Diálogo de Imaginarios de Estudiantes, Profesores y Saberes Matemáticos: Una Línea de Investigación en Matemática Educativa

Dra. Leonora Díaz Moreno
leonoradm@gmail.com

Hoy entendemos que los niños construyen sus aprendizajes en la actividad y diálogo constante con otros y consigo mismos, movidos por su curiosidad ante un mundo que, de este modo, se les va desplegando. Desde su exploración y sus preguntas, sus soliloquios y coloquios, van tejiendo redes de significados que les van alumbrando el mundo a la vez que se van insertando en él, desde su eficacia en la acción y la comunicación cotidianas. De este modo cuando un yo cognitivo habla en expresiones cotidianas, también habla un yo colectivo y anónimo, expresando el saber y el sentir de un estrato social y cultural, enunciando un *imaginario cultural*[1] particular. Para comprender los aprendizajes estudiantiles atendemos a ese yo cultural que se naturaliza en la construcción de mundo y por tanto es posibilidad y condición de sus entendimientos. El saber académico por su parte, desde su génesis, es heredero de un yo colectivo representado en los miembros de la comunidad científica, comunidad que decanta elaboraciones, constituyéndolas y resignificándolas en un proceso continuo. En la interactividad del aula se encuentran, entre otros, imaginarios estudiantiles, imaginarios docentes y saberes académicos traspuestos expresados en planes y programas. Amerita cada uno de ellos deconstrucciones cuyos resultados abran miradas para abordar diálogos significativos tendientes a los aprendizajes robustos sustentados en la plasticidad y autonomía intelectiva de los protagonistas de cada aula. Al respecto Lizcano (2006) ilustra como "*ciertos procedimientos algebraicos y ciertos objetos (el 'cero', los 'números negativos') se construyen de modo bien diferente a partir de distintos imaginarios colectivos (como el de la China de los Han o el del alejandrinismo tardío) o bien son imposibles de construir desde otros presupuestos culturales (como el de la Grecia clásica)… El imaginario en que cada uno habitamos, el imaginario que nos habita, nos obstruye así ciertas percepciones, nos hurta ciertos caminos, pero también pone gratuitamente a nuestra disposición toda su potencia, todos los modos de poder ser de los que él está preñado*". Afirmamos, parafraseando, que al develar los presupuestos subyacentes a los distintos imaginarios, podemos construir puentes de diálogo entre ellos, desde diseños didácticos científicos, distinguiendo entre sus presupuestos aquellos que potencian y los que obstaculizan aprendizajes de saberes cristalizados en planes y programas[2].

---

1 Mientras que Ahumada (2006) lo entiende como una estructura inconsciente mediatizada por el concepto de realidad, constituida por elementos interdependientes que vinculan las codificaciones colectivas de un grupo social y estructuran tanto las diversas representaciones que éste hace de sí mismo y de su entorno, como de sus modos de decodificar lo real, para Lizcano el concepto de imaginario colectivo le permite dar cuenta de la crucial influencia de factores sociales, culturales y afectivos en la construcción de saberes como lo ilustra con las matemáticas. El imaginario es previo a las imágenes, posibilitando unas e impidiendo otras, toda vez que educa la mirada, una mirada que mira las cosas a través de las configuraciones imaginarias en las que el ojo se alimenta (Lizcano, 2006).

2 La literatura reseña aproximaciones culturales a ideas matemáticas que revelan obstáculos culturales en los aprendizajes de la matemática escolar. Por ejemplo el cero, significado como representación de la nada en la cultura occidental, se torna en un obstáculo para entender los números negativos, a decir de Descartes "no se puede tener menos que nada" y por tanto los negativos son números "falsos". Sin embargo la cultura china de los Han, que trabaja con el cero siglos antes que la matemática europea lo pueda concebir, "*miraba el número a través del complejo de significaciones imaginarias articulado en torno a la triada yin/yang/tao. Si el juego de oposiciones entre lo yin y lo yang lo gobierna todo para la tradición china, ¿por qué iba a dejar de gobernar el reino de los números? La oposición entre números positivos y negativos fluye así del imaginario arcaico chino con tanta espontaneidad como dificultad tuvo para hacerlo en el imaginario europeo, que todavía en boca de Kant habría de seguir discutiendo si los negativos eran realmente*

Desde el año 1994 a la fecha hemos venido desarrollando una línea de investigación que estudia imaginarios asociados a las matemáticas de la variación. Vinculamos nuestro trabajo al Programa Latinoamericano de Investigación en Pensamiento y Lenguaje Variacional, PyLV. Este Programa estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida, pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados, utilizando para ello diferentes estructuras y lenguajes variacionales, a saber: reconocer y describir regularidades y patrones en contextos geométrico, numérico y musical, entre otros; predecir patrones de variación en secuencias numéricas, geométricas o gráficas; identificar estado inicial y final en situaciones de cambio; explorar la dependencia entre variables haciendo cambiar una y verificando el cambio de la otra, configurando una base fundamental para acceder a los procesos de generalización propios de los pensamientos numérico, espacial, geométrico, aleatorio y algebraico, este último generalización del modelo aritmético. En este marco del PyLV, nuestra línea de investigación aborda el estudio de aquellas facetas tanto congruentes como contradictorias, de los imaginarios culturales cotidianos de variación y los de la matemática escolar, que favorecen u obstaculizan la enseñanza y los aprendizajes tendientes a la formación del pensamiento variacional en el estudiantado. Toma por referente al triángulo didáctico en contexto: (a) Saberes Matemáticos Escolares; (b) Aprendizajes; y, (c) Enseñanza. Se cuenta con ejemplos que muestran facetas e interacciones dialécticas en la unidad de análisis de este triángulo didáctico. Saberes, estudiantes, profesorado que se ponen en la escena del aula en compleja interacción, la que a su vez está inserta en un contexto. Dos proyectos de investigación ilustran nuestra línea de trabajo, *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos* y *Las representaciones docentes de la matemática del cambio.* Describimos a continuación el primero de ellos, que abordó el estudio de imaginarios estudiantiles acerca del cambio y la variación. Se propuso determinar la estructura y contrastar las representaciones de la variación tanto cotidianas como aquellas de las que se apropian los estudiantes y las estudiantes en la escuela. Interesó profundizar en aquellas facetas tanto congruentes como contradictorias de las representaciones cotidianas de variación y las de matemática, que favorecen u obstaculizan los aprendizajes tendientes a la formación de un pensamiento variacional en el estudiantado. Determinó como núcleos fundantes de redes semámtico-

---

*números o no. Y si el tao es el quicio o gozne que articula el va-i-vén de toda oposición, ¿por qué iba a dejar de articular el va-i-vén que engarza la oposición entre los números negativos y los positivos? El cero, como trasunto matemático del tao, emerge así del imaginario colectivo chino con tanta fluidez como aprietos tuvieron los europeos para extraerlo de un imaginario en el que el vacío (del que el cero habría de ser su correlato aritmético) sólo evocaba pavor: ese horror vacui que preside toda la cosmovisión occidental" (*Lizcano, 2006). Entre los temas abordados en nuestra línea de trabajo se encuentra el análisis de la estructura de la noción del límite. El habla cotidiana estudiantil revela un imaginario cultural que porta tres acepciones, a saber, la de separador cerrado, que se refiere a la constitución de mundos o realidades excluyentes y se relaciona con la familia de acepciones cotidianas de término, fin y lindes. La de separador abierto que refiere a la familia de acepciones *linde entre* y *lindero entre*, acepción esta que distingue entre medios diversos. Y la de valor en un contexto direccionado, que distingue según gradaciones crecientes o decrecientes y está más relacionada con excepcional, culmine, cambio, quiebre o transgresión - pasar y sobrepasar. Se derivaron consecuencias para los aprendizajes del concepto de límite, desde cada uno de los tipos de acepciones con sus contenidos y valoraciones. Las calificaciones para "separador cerrado" y "valor en un contexto direccionado", son acepciones vinculadas a fuerzas socializadoras que se relacionan con la existencia misma del sujeto. "Fuera" significa transgresiones entre cuyas consecuencias se encuentran la inseguridad por la marginación, pasando por un quiebre irreversible en el límite mismo. Entonces el sujeto velará por mantenerse dentro de los márgenes de modo consciente como inconsciente. Ello será una fuerza sustantiva para evitar el límite y, más aún, "tocarlo". Se le asigna un valor de "extremo-peligro" y de máximos alcanzables "justo antes" del cambio irreversible. El estudiantado ancla el concepto matemático de límite en estas ideaciones, invisibles para sí mismo y para el profesorado. Sus resonancias obstaculizan construir las características del concepto matemático, noción construida por la comunidad matemática en un devenir histórico de varios siglos por lo que es una elaboración extranjera a las elaboraciones y significaciones cotidianas estudiantiles.

operacionales de la variación matemático escolar a las nociones de tiempo y velocidad. A partir de esos núcleos, validó secuencias didácticas para el ciclo terminal de la enseñanza básica e inicial de la enseñanza media, imbricando ámbitos de la ciencia experimental y de las matemáticas.

Las representaciones con que el estudiantado aborda los aprendizajes de nociones variacionales comprometidas en conceptos matemáticos. El estudio puso en evidencia las complejidades de las epistemes del estudiantado, determinando representaciones estudiantiles cotidianas de variación. Se constata que, mientras la noción de los especialistas refiere al vocablo variación la noción del estudiantado refiere a cambio. El Pensamiento y Lenguaje Variacional del estudiantado remite a cosmovisiones cíclicas y lineales (en el sentido de una sola dirección), a ilustraciones de modos de pensar tanto dinámicos como estáticos. Los primeros favorecerán tanto a la visualización de covariaciones como a manejar cognitivamente la ucronización y la simultaneidad (habilidades necesarias para apropiarse significativamente de saberes del medio social) en tanto los segundos o modos de pensar estáticos coadyuvan al estudiantado al establecimiento de clasificaciones y determinación de estructuras. Para los jóvenes de segundo medio "variación siempre va a ser cambio, eso ya está establecido", privilegiando el cambio respecto de la variación. La palabra variación adjetiva, secunda, dando las tonalidades del cambio. Por su parte, cambio es una palabra sustantiva, que tiene la fuerza, el impulso que gatilla sus realizaciones. Las corporizaciones o ilustraciones del concepto abren las posibilidades de conversar sobre cambios y por el contrario, lo conceptual se agota pronto. Los cambios difieren en intensidad –máximos o mínimos-, varían según sea aquello que cambia, pueden manifestarse en un intervalo de tiempo, resultan de la elección de un curso de acción cotidiano diferente, son la irrupción de una vía alternativa en el vivir cotidiano. El tiempo es connatural al modo de pensar los cambios del estudiantado de segundo medio y tiene que ver con estados distintos acordes a pasos del tiempo, se compara un antes y un después de una misma cosa a la que se le detectan estados diferentes y se describen, dando cuenta del tipo de cambio ocurrido. Reconocemos aquí la acepción cotidiana en la que el tiempo es la duración de las cosas sujetas a mudanza. Pero duración en la voz cotidiana es a su vez, el tiempo que dura algo o que transcurre entre el comienzo y el fin de un proceso. Este tiempo cotidiano es el que debe dialogar con las secuencias didácticas de variación. En suma, en la manera de pensar de los jóvenes, la visualización de cambio responde al dinamismo de la acción que ocurre en el tiempo. Las representaciones estáticas no son naturales en el habla espontánea de este grupo etario de jóvenes. El cambio -que es activo- afecta de modo sustantivo no exento de efectos dramáticos y emociones como dolor, frustración, esperanza, goce, entretención. Sin embargo no se asocia a la matemática ni remotamente con cambio. Por su parte, el habla de los jóvenes de octavo básico prodiga el uso de la palabra variación. Lo variado es estático. En efecto, hay una colección en donde hay muchos distintos, presentes simultáneamente, que se comparan entre ellos mismos y son distintos por algún atributo, pueden ser de distinta naturaleza: hay variados elementos encima de la mesa, lápices, una goma, la radio. Aquí la voz de variación es pasiva "*ahí yacen elementos diversos*" a los que se asocian emociones tales como aburrimiento y comodidad. No obstante los jóvenes la dotan de valoraciones positivas al asociarla con coherencias conductuales por ejemplo. El cambio tiene aspectos que son vitales de considerar, prever sus consecuencias, controlarlas de modo que generen el menor daño posible y en otro dominio, lamentar la pérdida de opciones al interior de un conjunto disponible de ellas. A las consecuencias del cambio se asocian valoraciones buenas y malas. Puede darse una relación recíproca de valores y valoraciones: dos índices bajar, uno de ellos con valoración positiva y el otro con valoración negativa, dependiendo del contexto. Según estos jóvenes "la ley de la vida es cambiar, es inevitable". En conjunto los jóvenes de este grupo etario se visualizan más a merced de los cambios y variaciones, que como actores de ellos, a diferencia de lo que ocurrirá dos años más tarde.

Las representaciones de variación de las que se apropian los estudiantes. En el marco de la secuencia didáctica para el ciclo terminal de enseñanza básica que relevó desafíos de comunicación y la valoración de los distintos registros de esa comunicación, las evidencias muestran que las nociones asociadas con la variación se van corporizando en metáforas formadas por cadenas asociativas complejas que incluyen expresiones icónicas y visuales. Mirando objetos globales más que localidades y refiriendo cualidades distintas al tiempo, el que persiste en su invisibilidad para el estudiantado. Inicia la secuencia con una actividad en la que un grupo observa inflar dos globos y luego comunica lo observado a otro grupo. El primer grupo usa los registros verbal, escrito y tabular para comunicar la experiencia a un grupo que, sin haberla presenciado, a su vez la comunica. Se observa con sorpresa que éste recupera el registro tabular del primer grupo pero no considera al tiempo como variable en su tabla, que si aparece en la tabla del primer grupo. Ello es coincidente con lo observado para la noción cotidiana de variación en este grupo etario. En su lugar pone la "cantidad de aire en el globo antes de desinflar", categoría más cercana - por su materialidad - a sus experiencias. Este grupo no vivió la experiencia psicológica del tiempo, lo que demoró el inflar cada globo, luego al evocarla desde un relato de terceros no evoca tiempo sino "cantidad de aire", dejando el tiempo invisible a la situación relatada. El tiempo en nuestros estudiantes es una vivencia subjetiva, que no asocian a la metáfora de la distancia construida por los matemáticos y que, además, ha de ser experimentada. Ello arrojó luces sobre razones que explicarían las dificultades del estudiantado para expresar variaciones en una gráfica distancia–tiempo. En ellas la representación matemática que concibe a la dimensión de tiempo como una distancia, compite - a la hora de graficarlos juntos - con la dimensión propia del desplazamiento. En suma, la distinción de una diversidad de tiempos, respecto del tiempo consensuado por la comunidad matemática, desafía diseños que den oportunidad a los estudiantes de construirlo significativamente. En la segunda sesión de la secuencia, los estudiantes exploraron de modo individual dos situaciones de variación virtual en Cabri. Los estudiantes no conocen el tipo de variación que, en el diseño, los investigadores han ejercido sobre los radios de dos círculos concéntricos para provocar el efecto de contracción y expansión de los círculos pues se busca que los estudiantes exploren lo que varía y cómo varía en cada situación. Las producciones de los estudiantes usaron distinciones bipolares para reconocer y describir lo que varía, distinciones que no generan la necesidad de usar herramientas gráficas para la comunicación en la actividad inicial antes descrita. La necesidad, construida por la situación de la segunda sesión, de comunicar más de dos valores (numéricos o no), junto a la posibilidad de repetir el fenómeno observado y su automatización -que permite a los estudiantes observar con detenimiento, pudiendo repetir el fenómeno tantas veces se quiera- gatilla el recurso a las herramientas gráficas. De igual manera, las tablas y descripciones reconocen estados normales y estáticos desde los cuales partir y a los cuales llegar, les permiten acercarse a numerizar la situación para mejorar la comunicación. Constatamos que los estudiantes manejan covariación y particularmente recurren a complejos colección por contraste - contraste en el sentido de comparar distintos no necesariamente opuestos – lo que les permite levantar tablas y descripciones. Tablas asociables a variaciones proporcionales e inversamente proporcionales, propias del discurso curricular de términos del nivel básico, por lo que contribuyen a explorar cualitativamente las relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Por su parte, la distensión entre la protensión y retención del tiempo permiten levantar el tiempo en una situación de variación, como una articulación entre la predicción y lo que fue. Las producciones de los estudiantes, principalmente en la actividad de comunicación de la primera sesión de la secuencia, muestran como, aquellos que viven la situación de inflado de los globos, construyen una distensión entre futuro y pasado, lo que les lleva a comunicar lo visto/vivido explicitando el tiempo, mientras que aquellos que escuchan el relato se centran en lo estático. Desde aquí surge la necesidad de que los estudiantes vivan experiencias que les permitan vivenciar la distensión temporal. En suma, el diseño y aplicación de la secuencia levantó facetas de representaciones cotidianas que permitieron a los estudiantes trabajar con la variación del discurso curricular. Los estudiantes traen a escena las nociones en su acepción cotidiana de velocidad, tiempo, rapidez, movimiento. Estas nociones no son independientes en el imaginario colectivo, sino que se sustentan unas en otras en una relación que se puede metaforizar como simbiótica – “tiempo duración (prontitud/lentitud) de las cosas sujetas a mudanza” → “velocidad es ligereza o prontitud (tiempo breve/extenso) del movimiento” → “Rapidez es velocidad impetuosa”, entre otras. Estas nociones se entretejen en su discurso conformando complejos cadena. Asimismo aportan núcleos de una red de nociones asociadas a los conceptos del discurso curricular comprometidos en el trabajo con el pensamiento y lenguaje variacional. De esto se siguió el desafío de favorecer la construcción de una red semántico-operacional que cristalice el diálogo y las articulaciones entre las representaciones cotidianas de variación portadas por los estudiantes y las representaciones de variación implícitas en Planes y Programas y propuestas en el discurso curricular del Programa de Pensamiento y Lenguaje Variacional. Se profundizó entonces en las construcciones socioculturales de tiempo y velocidad. Estas nociones fueron nucleares al diseño de la secuencia didáctica para el ciclo inicial de enseñanza media, para la que se elaboraron actividades que actualizaran vivencias de lo qué varía y cómo varía en situaciones de cambio. Se distinguieron las etapas de observación y comunicación de cambios, estudio de variaciones en el geoplano y estudio de variaciones en contexto virtual-dinámico, con los objetivos de (a) Reconocer y describir para comunicar qué varía en situaciones de cambio; (b) Distinguir aspectos relevantes que caracterizan formas de variar: velocidad, inicio-fin, dependencia-covariación; (c) Detectar hitos de marcaciones de cambio en la variación (cambio de velocidades, cambios de aumento de tamaño a disminución de tamaño y recíprocamente); (d) Elicitar el tiempo al describir y comunicar una situación de variación; y, (e) Establecer relaciones matemáticas que modelen variaciones en situaciones de cambio. En la aplicación de la secuencia en su etapa Reconocer y describir cambios para comunicar, el tiempo surge como variable explícita involucrada en el fenómeno de variación para comunicar el devenir de cualidades que no responden a trayectorias en el espacio físico –por ejemplo describir un audio musical- y que presentan variaciones con regularidades identificables por el sentido auditivo en este caso. Esto es, que presente ciclos o períodos en los que se identifican inicio y duración. En el audio el tiempo emergió como necesidad para coordinar las acciones de los eventos sonoros, como agente de marcación y duración de esos sonidos. En la segunda etapa, en la que se procura relacionar a los estudiantes con regularidades numéricas así como con la figura geométrica del rectángulo, propiciando significados, herramientas y argumentos de la proporcionalidad, en ambiente de geoplano, de dibujo y de tablas, uno de los grupos reconoce secuencias de razones externas entre dos columnas de una de las tablas. Observan en otras dos columnas, la divisibilidad de cada una de las magnitudes de una columna por la primera de ellas, esto es, trabajan con las regularidades numéricas. Un segundo grupo de estudiantes vincula el registro de la geometría sintética con el registro numérico algebraico y corporizan la proporcionalidad en regularidades de secuencias numéricas[3]. El tercer grupo concluye -al igual que el grupo 2- que "Las multiplicaciones de los anchos, a su vez multiplicadas por 4 dan como resultado las multiplicaciones de los largos" intentan establecer regularidades en un nivel siguiente de abstracción acercándose al registro algebraico, cuando escriben: anchoxanchox4 o (anchoxancho+2)x8, la primera de las cuales refiere al lado izquierdo de la igualdad AxAs x4 = LxLs. Asimismo este grupo repara en que la inclinación de las diagonales dibujadas en cada uno de los rectángulos es colineal a la diagonal del rectángulo siguiente. Esta textualidad indica que los estudiantes recuperan, de la actividad de construcción, la herramienta de la geometría sintética, de que la colinealidad de un segmento y otro asegura su misma inclinación. De allí se sigue que, si cada uno de los rectángulos a su vez comparten –como en el caso de la actividad- su punto de origen y les formaron sus diagonales de modo que estas fuesen colineales - teniendo la misma inclinación - entonces se puede inferir que los rectángulos que tienen diagonales de igual inclinación son semejantes. Esa evidencia vincula los registros geométricos sintético y analítico, toda vez que la medida de la inclinación de la diagonal en el plano cartesiano se expresará como la pendiente de una recta por el origen, gráfica que corresponde al devenir de cualidades directamente proporcionales. Las producciones de la tercera etapa, Variaciones proporcionales en contexto de geometría dinámica relevaron recurso al significado cotidiano de proporcionalidad y al recurso a distinciones duales al argumentar (aumenta/disminuye) e instrumentalización de la diagonal para operar con la proporcionalidad, esto es, su elongación en una misma inclinación es condición necesaria y suficiente para la obtención de lados proporcionales. Relacionan el aumento del lado con el aumento en la variación del área, obteniendo una relación aritmética. Un grupo identifica la relación entre el cambio del largo ("si este aumenta en 1") y el cambio en la variación del área ("aumenta 1 más de lo que ya había aumentado") aproximándose a la aceleración entendida como el cambio del cambio así como pone en evidencia la fuerza de lo lineal en sus estrategias cognitivas. Respecto de la actividad Reconociendo Regularidades se establecen relaciones que modelan el cambio. Aunque el foco de esta segunda fase es la numerización, al argumentar sobre la proporcionalidad en las variaciones de largo y ancho recurren a la diagonal y, más específicamente, a su inclinación constante. Un estudiante construye una relación de dependencia entre la magnitud de la variación y la inclinación de la diagonal, conformando en herramienta a la inclinación de la diagonal del rectángulo en

---

[3] Las regularidades numéricas identificadas por los estudiantes se corresponden a las de las secuencias genéricas {4L(L+1), 4(L+1)(L+2), 4(L+2)(L+3), 4(L+3)(L+4),...} y {L(L+1), (L+1)(L+2), (L+2)(L+3), (L+3)(L+4),...}. Generalizando, para una secuencia cualquiera de rectángulos semejantes, el factor común a la secuencia numérica será la longitud del primer lado por la razón de proporcionalidad de las longitudes, al cuadrado. Otro grupo argumenta con la razón 1:2 entre ancho y largo registrada en su tabla para fundar que la razón, entre un ancho y el ancho siguiente, A y As, sea la misma, en el sentido de obtener la misma secuencia de cuatro valores {1/2, 2/3, ¾, 5/6} para ambas columnas. Determinan la razón externa 1:4 para cada una de las secuencias {2,6,12,20} y {8,24,48,80} dividiendo parejas de valores correspondientes. En efecto, por construcción de sus rectángulos, As=A+1, luego AxAs=A(A+1). Por su parte, L=2A y Ls=2(A+1) entonces LxLs=2Ax2(A+1)=4A(A+1). Por lo tanto AxAs/ LxLs=1/4. Generalizando, para una secuencia cualquiera de rectángulos semejantes, el cuociente constante entre ambas casillas será la longitud, en este caso, del ancho inicial al cuadrado, dividido por la longitud inicial del largo al cuadrado.

tanto permite establecer la velocidad de cambio del largo (herramienta prefigurada por la etapa del geoplano). En la fase Comparando cambios de esta etapa se espera que los estudiantes se desplacen desde una noción cotidiana de rapidez hacia la escolar. Asimismo se espera que grafiquen las diferencias de variación de los largos, corporizando la rapidez de variación de los lados de los rectángulos en la magnitud de las ordenadas de cada gráfico, de modo que para decidir sobre la mayor o menor rapidez, los estudiantes, recurran a la mayor o menor longitud de segmentos de ordenadas, calculadas por diferencia de ordenadas consecutivas o deltas. Los estudiantes lo logran en lo sustantivo, sin alcanzar a encapsular las diferencias o deltas como herramientas para manipular la velocidad. El ancho constantificado queda implícito para las descripciones y argumentaciones estudiantiles, al modo en que el tiempo constantificado de la estrategia cotidiana queda implícito en los discursos. Las textualidades arrojan evidencias de que la secuencia aportaría a superar el obstáculo "cognitivo" de corporización de la pendiente de la recta, logrando semantizarla como la rapidez de cambio de una variable respecto de otra. Ejemplo ilustrativo es la síntesis que construye la relación: "a mayor variación del largo, mayor será la inclinación de la diagonal del rectángulo", elaboración previa a identificar la pendiente de la recta con la rapidez del movimiento modelado. En la fase comparando velocidades, a partir de rectángulos que varían su tamaño, se aproxima a los estudiantes a la noción de rapidez entendida como la razón entre el cambio de los largos y el tiempo que transcurre entre los cambios de largos. De sus producciones se infiere que el rectángulo cuya variación es constante, se usa como referente para determinar cuando es más rápido o más lento el cambio del largo. Entre las argumentaciones más recurridas están acepciones cotidianas de proporcionalidad y su recurso escolar a la constante, y, el análisis por contraste de dos elementos – dipolos - para decidir sobre "el devenir de las cualidades", esto es, sobre la naturaleza de los cambios en la animación. Sus producciones en esta fase se centraron en la adjetivación del cambio más que en su cuantificación. Al devenir de las medidas se les tiende a asignar una naturaleza lineal. Se observa que, ante cambios de orden cuadrático, los estudiantes no cuentan con herramientas cotidianas o están menos presentes en la utilería a la que acceden. Ello podría deberse a su elaboración de reciente data en nuestra cultura, a diferencia de lo lineal. Cuando los números no eran calculables por inspección visual, usaron como herramienta de predicción a la proporcionalidad establecida en las fases anteriores. Un estudiante construyó los gráficos pedidos, figurando la línea recta y la hipérbola. Recurren al uso operatorio de la constante para los casos directo e inverso. Los deltas no se usaron en la gráfica. Podría deberse a que el foco de atención se centra en la variable y a que se recurre a significados cotidianos de cambio que refieren a dos estados, inicial y final, y al tránsito de la variable entre ellos. Así la cuantificación de la variación, mediante diferencias, no se construye como herramienta para figurar el cambio. El gráfico exhibiría la situación tal como se la ve a ojo descubierto, evocando el desplazamiento de la variable y sus diferentes estados. La enseñanza debe intencionar la figuración de las mediciones de ese cambio, los deltas de variación. La textualidad *"(recorre) más camino en el mismo tiempo*" muestra al delta de variación como argumento implícito en la acepción cotidiana de rapidez, dejando "ad portas" a la acepción matemática de ese delta.

Recomendaciones para el diseño de la enseñanza del pensamiento variacional. Sobre la base de la estructura de las representaciones estudiantiles de la variación tanto cotidianas como de las matemáticas escolares, emergen las consideraciones que siguen, en orden a diseñar una enseñanza que contemple a la variación en su calidad de red semántico-operacional transversal que imbrique distintos contenidos escolares de ciencia experimental y de matemática, particularmente aquellos de tiempo y velocidad. Red que cristalice el diálogo y las articulaciones entre las representaciones cotidianas de variación portadas por los estudiantes con las representaciones de variación implícitas en los Planes y Programas vigentes y aquellas propuestas en el discurso curricular del Programa de Pensamiento y Lenguaje Variacional.

Imágenes del Tiempo y la Velocidad en los Estudiantes

Semantizar tiempos atendiendo al tiempo estudiantil, red compleja de intencionalidades y coordinaciones que se estructuran a partir de las necesidades de coordinación con lo otro, con los otros y de las proyecciones intencionales hacia un futuro o un pasado.

Desplazamientos desde la velocidad cotidiana a la velocidad escolar. Considerar en los diseños de enseñanza, que la estrategia cotidiana para decidir sobre la velocidad opera para tiempos iguales, comparando los desplazamientos de dos móviles o los desplazamientos de un mismo móvil en dos eventos distintos. Relevar que lo mismo hicieron los antiguos: aprender de sus desplazamientos para incorporar cambios en la segunda variable, significando a la velocidad del discurso escolar actual.

Recursos del Operar Cognitivo

Recurso a la herramienta cognitiva de la constantificación. Desde una economía cognitiva, esta herramienta permite pasar, de manipular dos variables, a una sola.

Tener presente las estrategias cognitivas de análisis por contraste. El estudiantado construye redes de significados de proporcionalidad recurriendo a la estrategia del análisis por contraste binario recursivo, contrasta dos distintos no necesariamente opuestos cada vez y tiende a predecir sobre la base de regularidades observadas.

Contemplar la fuerza de lo lineal en los modos de interpretar. Nuestra cognición al trabajar con el cambio, se centrará en variaciones lineales, sean éstas cambios o cambios del cambio. Considerar estas coherencias cognitivas planteando fenómenos de cambio y cambios de cambios a ser puestos en escena del aula entendiendo que interpretamos primero lo lineal, requiriendo de rupturas provocadas por datos experimentales para construir los desplazamientos a lo exponencial.

Actividad Matemática a Privilegiar en la Enseñanza

Estudio de regularidades en el registro numérico. Profundizar el trabajo con regularidades numéricas. El registro tabular fue ocasión propicia para encapsular regularidades numéricas que el estudiante incorporará a su red conceptual de variación proporcional. Los estudiantes vincularon el registro de la geometría sintética con el registro numérico algebraico, corporizaron la proporcionalidad en regularidades de secuencias numéricas y mostraron desplazamientos al trabajo en el registro algebraico.

Figurar las mediciones del cambio, los deltas de variación. Significar a las diferencias o deltas como herramientas para manipular la velocidad. La tendencia cognitiva principal es graficar la situación tal como se la ve a ojo descubierto, evocando fotográficamente el desplazamiento de la variable y sus diferentes estados de modo que la cuantificación de la variación, mediante diferencias, no se construye como herramienta para figurar el cambio, requiere de diseños a tal efecto.

Promover desplazamientos con continuidad desde la inclinación de la diagonal del geoplano hacia la pendiente de la recta cartesiana. Propiciar anclajes geométrico-sintéticos para significar la pendiente -en una gráfica d/t- como el índice de rapidez.

Diseñar secuencias que recurren a la tríada concreto–virtual–abstracto. Fluidez de desplazamientos entre geoplano, tablas y computador para semantizar con solución de continuidad facetas concretas y virtuales, estáticas y dinámicas, discretas y continuas.

Bibliografía

Ahumada, Y. *Venezuela: la obra inconclusa de Jose Ignacio Cabrunas* Tomado de http://www.dramateatro.fundacite.arg.gov.ve/ensayos/n_0015/yoyiana_ahumada.html , visitada el 10.10.06.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado. México: Cinvestav-IPN.

Ávila, J. (2005). *Representaciones estudiantiles de variación desde mediaciones pedagógicas.* Tesis de Maestría, primera versión de circulación restringida. México: CICATA-IPN.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon 42*. España.

Carrasco, E. (2005). *Visualizando lo que varía*. Tesis de Maestría, primera versión de circulación restringida. México: CICATA-IPN.

Díaz, L. (2006) *Las Representaciones sobre la Variación y su Impacto en los Aprendizajes de Conceptos Matemáticos*. Informe Final Proyecto Fondecyt N°1030413, Santiago de Chile.

Díaz, L. (2003). Reflexión de nuestras Epistemes como Eje Transversal en Procesos de Estudio de Matemática Educativa. Ilustraciones. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 16*. Santiago de Chile.

Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos.* Tesis Doctoral en Ciencias de la Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

Lizcano, E. (2006) *Metáforas que nos piensan. Sobre ciencia, democracia y otras poderosas ficciones.* Tomado de http://creativecommons.org/license /, visitada el 12.10.06.