Les mathématiques et la «réalité»:

Comment passe-t-on d'un domaine à l'autre? Quelles activités pour faire faire le passage aux élèves?

L'une des tendances les plus fortes dans l'évolution de l'enseignement général des mathématiques au cours de ces vingt dernières années est l'insistance sur le lien étroit entre les connaissances mathématiques et la compréhension de la réalité. Cela se traduit de multiples manières. Culturellement, il y a, par exemple, le souci d'illustrer la présence des mathématiques dans toutes les productions techniques. Didactiquement, il y a la voie des activités de manipulation, d'observation et d'exploration pour introduire les notions mathématiques. Le développement des outils informatiques d'enseignement permet d'ailleurs d'aller très loin dans ce sens. Pour l'organisation des curriculum, on distingue de plus en plus des mathématiques pratiques et des mathématiques théoriques et on oppose des mathématiques intuitives aux mathématiques formelles.

Cette tendance forte s'inscrit dans une situation globale où ce qui est en question, aussi bien pour les décideurs que pour la très grande majorité des élèves, c'est l'intérêt et le rôle des mathématiques dans la formation. Mais cette motivation objective de l'enseignement des mathématiques, qui recontextualise les mathématiques dans des problèmes et des structures de la réalité, rend–elle l'apprentissage et la compréhension des mathématiques plus accessibles pour les élèves ? C'est ce problème du passage entre deux domaines perçus comme étant aux antipodes l'un de l'autre — ainsi que l'indique l'emploi récurrent des oppositions «abstrait/concret, inutile/utile » ou de formules comme « donner du sens » — que nous allons aborder dans cette conférence. Suffit-il de les associer, ou des les mélanger, dans les activités proposées aux élèves pour rendre les mathématiques plus accessibles et en faire des outils que les élèves peuvent utiliser par eux-mêmes dans la réalité ?

Il y a deux points de départ possibles pour ce passage : soit partir de manipulations ou d'observations sur un matériel concret ou dans une situation réelle pour faire émerger des notions mathématiques (propriétés, relations, opérations, invariants...), soit partir de « contenus mathématiques » pour les appliquer à la réalité et résoudre des problèmes qu'elle pose. En fait, que l'on prenne l'un ou l'autre de ces deux chemins, on retrouve toujours les deux caractéristiques fondamentales qui sont spécifique à toute activité mathématique :

> — (1) le recours à une grande variété de représentations différentes et presque toutes de nature sémiotique, car en mathématiques il est essentiel de pouvoir transformer les représentations en d'autres représentations
>
> — (2) le passage d'un type de représentation à un autre type de représentation (énoncé verbal, dessin géométrique, formule littérale, graphe...) que nous avons appelé « conversion de représentations ». On le retrouve non seulement comme un moment nécessaire dans toute résolution de problème, mais comme un moyen heuristique ou un moyen de contrôle pour conduire des traitements mathématiques.

Cette deuxième caractéristique est cruciale dans tout apprentissage des mathématiques, car le passage d'un type de représentation à un autre s'avère souvent être un obstacle que la plupart des élèves ne surmontent pas. Or ce passage repose sur la capacité à mettre en correspondance de deux représentations qui n'ont rien de commun entre elles. Et cette opération de mise en correspondance est radicalement différente de l'opération de comparaison habituellement sollicitée dans des tâches d'observation où il s'agit de repérer et de classer ressemblances et différences entre des objets, entre des formes, etc.. C'est par rapport à cette opération de mise en correspondance de représentations différentes que nous nous proposons d'analyser le rapprochement entre les mathématiques et la réalité, tel que l'enseignement des mathématiques tente de le mettre en place. Permet-il d'aplanir ou de court-circuiter les difficultés que suscite le passage d'un type de représentation à un autre ? Et de toutes manières, les passages que l'on organise didactiquement peuvent-ils atteindre leur objectif ?

Pour mettre en évidence tout ce que mobilise le passage entre des connaissances mathématiques et des situations de problème « réels », je centrerai la conférence sur l'analyse de deux exemples classiques et toujours utilisés

Le premier est utilisé dans l'enseignement primaire : c'est le recours à des situations de partage pour introduire les élèves au « sens» de la division.

Le second apparaît aux différents niveaux de l'enseignement secondaire : c'est l'utilisation de la propriété (ou du théorème ?) de Thalès pour résoudre tous les problèmes de mesure concernant les objets très éloignés ou inaccessibles : leur taille, leur distance.

Nous verrons que le rapprochement entre les mathématiques et la réalité recouvre une coordination de fonctionnements cognitifs très différents, et que l'enseignement en néglige souvent la complexité et, surtout, le fait qu'elle est à ... construire ! L'analyse détaillée de ces deux exemples nous conduira également à soulever deux questions peut-être plus « pratiques » pour les enseignants. Comment analyser la pertinence non seulement mathématique mais également cognitive des activités que l'on propose en classe ? Comment interpréter les productions des élèves pour développer une interaction « tutorale » adaptée ?