APLICACIÓN DEL MODELO DE TOULMIN AL OBJETO MATEMÁTICO RAÍZ CUADRADA.

Autor: Roberto Vidal Cortés.
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
E- Mail: profesorvidal@yahoo.es
Informe de Investigación. (Complemento Post - Tesis de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Mención Didáctica de la Matemática, defendida el 21 de abril de 2006 en la Pontifica Universidad Católica de Valparaíso, Chile).

Objetivos Generales:

- Determinar los cambios conceptuales objeto "Raíz Cuadrada", que se evidencian en su epistemología por medio del Modelo de Toulmin.
- Encontrar posibles explicaciones a las distintas concepciones y o representaciones que tienen los profesores de matemática sobre el objeto raíz cuadrada.

Introducción

En su obra de 1977, "La Comprensión Humana", Steven Toulmin proporciona un Modelo para estudiar el *cambio conceptual* y el *cambio científico*, discusión que permite colocarse por sobre un objeto de conocimiento e introducirse en su evolución, rescatando la historia y los vaivenes que le han devenido en el tiempo. Toulmin presenta su Modelo en forma analógica a la Teoría de la Evolución de Darwin, indicando que la evolución conceptual en una ciencia se produce "sólo si las innovaciones transitorias no mueren automáticamente con sus creadores". Uno de los tipos de fenómenos que permite estudiar el Modelo de Toulmin, *"comprende los problemas que se presentan cuando consideramos la mutua relación de diferentes conceptos co - existentes en una misma rama de la Ciencia".* El fenómeno que se ajusta muy bien a este tipo se situación, entre otros, es el presentaré sobre el concepto de Raíz Cuadrada, al cual aplicaremos el Modelo de Toulmin para analizar su evolución.

Una investigación que antecede a esta aplicación, es mi trabajo de Tesis de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Mención Didáctica de la Matemática titulado "Concepciones de los Profesores de Enseñanza Media acerca del objeto de enseñanza Raíz Cuadrada, una mirada desde la Transposición Didáctica", en el que se revela la co - existencia de dos diferentes concepciones de Raíz Cuadrada en Álgebra y frente a la cual, los profesores muestran confusión al respecto. De este modo, se complementa tal investigación, estudiando la evolución del concepto Raíz Cuadrada, encontrando elementos que permitan por un lado explicar la confusión del profesorado y por otro resolver este problema por medio de las tres propuestas que ofrece Toulmin: *"Refinando la terminología, introduciendo nuevas técnicas de representación y modificando los criterios para identificar casos a los que sean aplicables las técnicas corrientes"*[1].

[1] En La Comprensión Humana de S. Toulmin (1977).

Sistematización del abordaje histórico

Se distinguen 5 tiempos o fases en el desarrollo histórico de la raíz cuadrada:

- **El primer tiempo**

Es probable que La Raíz Cuadrada fuera pensada por las antiguas civilizaciones unido al conocimiento de los cuadrados perfectos 1, 4, 9, 16, 25, etc. vista la necesidad de encontrar la base de una potencia de exponente 2, en que se conoce su valor. Como los griegos no concebían números negativos, (y así hasta su aceptación en el siglo XVIII (Cousquer, 1998)), no tenían posibilidad de confusión.

Es en la escuela Pitagórica, en el siglo V a. C. cuando aparece el objeto Raíz Cuadrada con el Teorema de Pitágoras, y específicamente con los tríos pitagóricos; tres números a, b, c que corresponden a las medidas de los catetos y la hipotenusa respectivamente de un triángulo rectángulo, los que satisfacen la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

Los pitagóricos se entretuvieron encontrando tríos de números naturales que cumplieran la condición: “la suma de los cuadrados de dos de ellos, es igual al cuadrado de un tercero”. La raíz cuadrada se utiliza aquí para calcular uno de los números cuando se conocen los otros dos. Por ejemplo; 3, 4 y 5 es un trío que cumple la condición, tal como lo sabían empíricamente los egipcios al ocupar una cuerda con 12 nudos separados a igual distancia, para formar una escuadra. Al sumar los cuadrados de 3 y 4, es decir $9+16$ se obtiene 25, que debe ser el cuadrado de otro entero, en este caso 5. Observaron que también se puede extender esta situación a otros números fraccionarios como por ejemplo, buscar qué fracción al cuadrado da $\frac{16}{25}$, localizando a $\frac{4}{5}$.

Así, la raíz cuadrada es empleada como herramienta, es decir, como medio para encontrar la base de una potencia de exponente dos. Pero luego, se dieron cuenta que no todas las medidas de segmentos eran conmensurables, originando un hallazgo que les llevaría a una de las primeras crisis en la historia de la Matemática, la denominada ***crisis de los números irracionales***. Se trata del **descubrimiento o invención de los números irracionales**, del cual el primer encuentro fue con $\sqrt{2}$.

En el primer escolio del libro X de los Elementos de Euclides, se atribuye el descubrimiento de los irracionales a los pitagóricos, escuela cuyo pensamiento se centraba en la idea que "los números armonizaban el universo". Comienzan los pitagóricos así a buscar la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 unidad. Aparece entonces, un nuevo número que no tiene ninguna de las características de los conocidos. Tal número, corresponde a la raíz cuadrada de 2. Se trataba de buscar exhaustivamente un número cuyo cuadrado sea 2. Así como éste, fueron apareciendo otros del mismo "tipo" que denominaron "inconmensurables". Se cuenta que el pitagórico que primero había divulgado la irracionalidad de $\sqrt{2}$, Hipassos de Metaponte, habría sido muerto en un naufragio.

El motivo de este episodio según J. Piaget et al (1979) en su Tratado de lógica y conocimiento científico se debe a que "todo lo que es irracional y carente de forma debe permanecer oculto y si un alma quiere penetrar en esa región secreta y dejarla abierta, se verá arrastrada al mar del devenir y se ahogará en el incesante movimiento de sus corrientes".

- **El segundo tiempo**

El abordaje del problema que desorganiza la filosofía pitagórica.

En el plano matemático, la resolución de la crisis exigió reconstruir la teoría de las relaciones y proporciones de los pitagóricos. Se debió llegar a una teoría general que incluyera las magnitudes tanto conmensurables como las inconmensurables, la que aparece en el Libro V de los Elementos de Euclides. También en el Libro X, según Boyer, trata la clasificación sistemática de los segmentos inconmensurables de las formas $a \pm \sqrt{b}, \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ y $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$. Aquí, hay que precisar que a y b son números no negativos, en el contexto de la era griega.

Euclides, construyó su teoría de proporciones, para medidas de segmentos tanto conmensurables como inconmensurables, dando un lugar a los nuevos números irracionales. Para los griegos la quinta operación de la aritmética fue la "extracción de raíz cuadrada", de modo que ya pasa a convertirse en un objeto de estudio, pues, ahora se debía encontrar algún algoritmo que permitiese calcular la raíz cuadrada de cualquier número racional y no sólo de aquellos que por simple inspección de una tabla de cuadrados pudieran obtenerse. A lo largo de la historia, han surgido varios métodos de extracción de raíz cuadrada, los que omitiremos, por estar fuera del objetivo de este artículo.

- **El tercer tiempo**

Avanzando en el tiempo, según Boyer (1985), los árabes, alrededor del 850 d. C. ocupaban la raíz cuadrada como un medio para resolver ecuaciones cuadráticas y dejaron su legado en la obra escrita por Al- Khowarizmi denominada Al - jabr. Además, sólo consideraban las soluciones positivas si existían.

Lo importante de la época de la Hegemonía Árabe, fue la introducción de la acepción de la palabra raíz, como solución de una ecuación: Al- Khowarizmi, clasifica las ecuaciones de primer y segundo grado en 6 tipos en que intervienen las tres cantidades que la conforman: cuadrados (x^2), raíces (x) (también llamadas "cosas") y números.

A partir de este tratamiento, la palabra raíz, toma el significado de solución de la ecuación, que siglos después se formaliza en la teoría de polinomios, dentro del estudio de las estructuras algebraicas en el siglo XIX.

- **El cuarto tiempo**

El símbolo que hoy utilizamos con el nombre de operador radical $\sqrt{\ }$, es introducido en 1525 (Guedj, 1998), por el matemático alemán Christof Rudolff, concibiendo una r minúscula (inicial de la palabra latina *radix* que significa raíz) alargada". En el siglo XVI aparecen las álgebras italianas y germanas. Rudolff introduce el signo de operador radical en su obra Coss (cosa), nombre que recibía también la incógnita de una ecuación.

Antes y durante la masificación de este nuevo símbolo, se utilizaba otras notaciones. Según Rey Pastor (1951), el Matemático francés Nicolás Chuquet (segunda mitad del siglo XV), simbolizaba la raíz cuadrada con una R con exponente 2. En una de las últimas obras de los algebristas italianos del sigloXVI, "El Álgebra" de Rafael Bombelli, se indica la raíz cuadrada con R seguida de q encerrando luego el radicando en un doble ángulo recto que en el texto impreso se convirtió en dos L invertidas.

Aún en este tiempo, los matemáticos no aceptan los números negativos, sin embargo algunos se atreven a utilizarlos como coeficientes de ecuaciones pero no como solución, pues son números ficticios, falsos o absurdos. No se produce todavía la distinción entre los conceptos relacionados con raíz cuadrada.

- **El quinto tiempo**

La raíz cuadrada en su concepción científica corresponde, tanto a un número real no negativo, como función real de variable real (operador monario).

La raíz cuadrada de un número real no negativo, como número real no negativo, justifica su existencia y unicidad en el *teorema de la Existencia de la Raíz cuadrada*.

Para cada número real positivo a, existe un único número real positivo b tal que $b^2 = a$. Éste número b, lo designaremos por la notación $b = \sqrt{a}$, o bien $b = a^{\frac{1}{2}}$, y lo llamaremos *la raíz cuadrada de* a. Se extiende esta definición al número real cero, de modo que, $\sqrt{0} = 0$.

La Función Raíz cuadrada.

En el siglo XVI el estudio del movimiento apareció como el problema central de la física y como consecuencia, se desarrollaron las matemáticas que estudian la interdependencia de las magnitudes variables, esto es, del concepto de variable y de función. Abstrayendo a formas más generales el estudio de las interdependencias, las expresiones tienen una forma global que las identifican. Tal forma corresponde a la expresión y = f(x).

Según C. Azcárate et al (1996), muchos autores concuerdan que el nacimiento del concepto de función se ubica a mediados del siglo XVII, época de Descartes, Fermat, Newton y Leibnitz. Aparece por primera vez el término "función" cuando empieza a desarrollarse el análisis matemático con los conceptos de diferenciación e integración. Cabe destacar que la idea inicial de función era muy restringida, ya que se reducía sólo a las funciones analíticas, las que se pueden expresar mediante una ecuación polinómica y poco después a las desarrollables en series de potencias. En el siglo XVIII, Euler dio la primera definición de función. A partir de ese momento las definiciones se irán perfeccionando en el tiempo, con el propósito de incluir las funciones cada vez más complejas que aparecen, hasta llegar a las definiciones más recientes que incorporan el lenguaje conjuntista.

Con estos nuevos objetos matemáticos llamados funciones, se formaliza el estudio, de varios conocimientos, en especial el de las operaciones. La raíz cuadrada, como función real de variable real, se construye como la inversa de la función cuadrática canónica.

Acepción de la palabra raíz como solución de una ecuación.

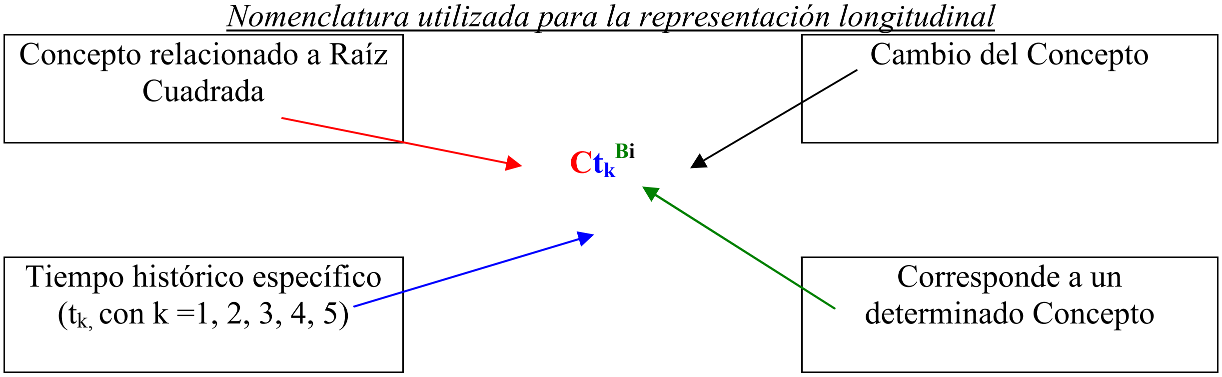
A pesar que la palabra raíz se viene utilizando desde siglos como sinónimo de solución de una ecuación o “cosa” como indicaban los matemáticos árabes y los alemanes en distintos siglos, este nombre toma su total legitimación científica con el desarrollo de la teoría de ecuaciones y en la teoría de polinomios con coeficientes en un cuerpo K.

Es en éste punto donde surgen las primeras confusiones en el profesorado. Por años ha existido una confusión del concepto de raíz cuadrada, en que pareciera que se ha hecho una extensión conceptual (de aquella que manejaban las antiguas civilizaciones) en la que cualquier número positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva que suelen llamar raíz principal y otra negativa, llamada raíz secundaria. Aquí vemos que el término moderno de "raíz cuadrada" se emplea en un nuevo contexto numérico (por cierto el de los números complejos), ámbito en que "toda ecuación de grado n tiene exactamente n raíces" (teorema fundamental del álgebra). Las soluciones de una ecuación son llamadas raíces de la ecuación, asociación que permite el malentendido, para el caso de las ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 = a$, que en el conjunto de los números complejos se interpreta como *las raíces cuadradas del número complejo a*.

La Evolución del Objeto Matemático Raíz Cuadrada a través del Modelo de Toulmin

Para realizar el análisis evolutivo de los conceptos de Raíz Cuadrada a través de la historia, utilicé la representación genealógica o longitudinal, la cual corresponde al seguimiento de la Raíz Cuadrada en el tiempo. El concepto de Raíz cuadrada está vinculada a otros como el Teorema de Pitágoras, los Números irracionales, los segmentos inconmensurables, las ecuaciones cuadráticas, Signo Radical y la Función real de Variable real. Explicaré a continuación la nomenclatura utilizada:

Nomenclatura utilizada para la representación longitudinal



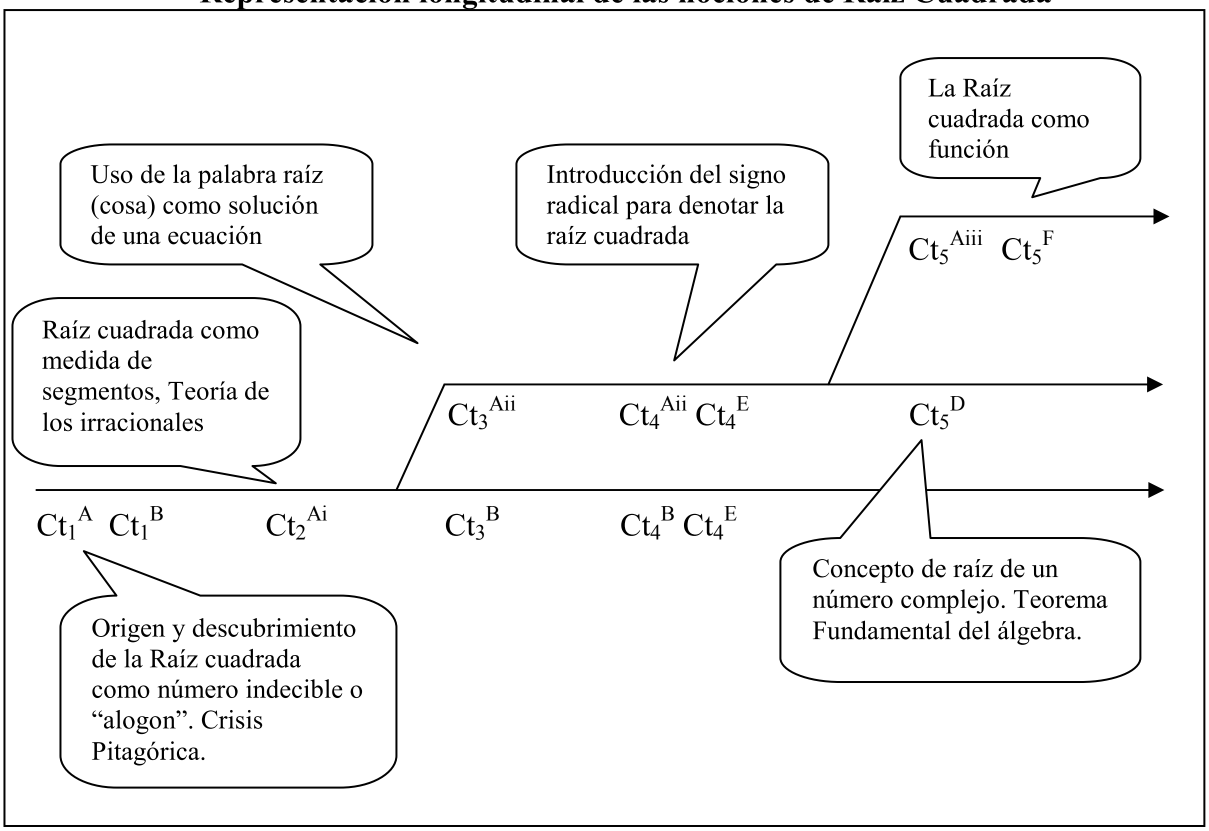
Conceptos desarrollados en la representación longitudinal

A = Teorema de Pitágoras	B = Números irracionales
C = Segmentos inconmensurables	D = Ecuaciones cuadráticas
E = Signo Radical	F = Función real de Variable real

Tabla resumen de la evolución del concepto de Raíz Cuadrada

Época	Aporte	Lugar	Nomenclatura
500 a.C.	Pitagóricos	Grecia	Ct_1^{A} , Ct_1^{B}
300 a. C.	Euclides	Grecia	Ct_2^{A} , Ct_2^{B} , Ct_2^{Ai}
(800 – 850) d.C.	Árabes (Al - Khwartizmi)	Arabia	Ct_3^{Aii} , Ct_3^{B}
1500 – 1650	C. Rudolff, N. Chuquet, R. Bombelli,	Italia, Alemania	Ct_4^{E} , Ct_4^{Aii} , Ct_4^{B}
1.700 d.C en adelante	C. Gauss, G. Cantor, Euler.	Inglaterra, Alemania	Ct_5^{Aiii} , Ct_5^{D} , Ct_5^{F}

Representación longitudinal de las nociones de Raíz Cuadrada



Conclusiones

El Modelo de Toulmin, permite organizar la evolución y el cambio conceptual que se produce sin riesgo de confusión hasta que aparecen y son legitimados los números negativos. Así, a partir de ese momento, es necesario distinguir dos acepciones de Raíz cuadrada, desde el ámbito de los números reales y las funciones reales de variables real y el nombre que se le da a cada una de las dos soluciones de una ecuación del tipo $x^2 = a$, en el cuerpo de los números complejos. La forma en que se resuelve este problema, se ajusta a las tres vías planteadas por Toulmin:

1. Refinando la terminología. Para ello, se define

Para cada número real positivo a, existe un único número real positivo b tal que $b^2 = a$. Éste número b, lo designaremos por la notación $b = \sqrt{a}$, o bien $b = a^{\frac{1}{2}}$, y lo llamaremos *la raíz cuadrada de* a. Se extiende esta definición al número real cero, de modo que, $\sqrt{0} = 0$.

2. Introduciendo nuevas técnicas de representación. En efecto,

i) se utiliza el signo $\sqrt{\ }$ sólo para denotar la función raíz cuadrada, la que es una función con valores en los números reales no negativos, deviniendo en que para un número real $a \geq 0$, la expresión $\sqrt{a}$ indica aquel único número no negativo cuyo cuadrado es a.

ii) Para expresar las raíces cuadradas de un número complejo z, utilizamos los símbolos: ϖ_1, ϖ_2. Caso particular de las raíces enésimas de un número complejo z, que corresponden a los n números complejos: $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \ldots \varpi_n$.

3. Modificando los criterios para identificar casos a los que sean aplicables las técnicas corrientes.

Para el caso de la función raíz cuadrada, sus propiedades se limitan a aquellos números admisibles por el dominio y el recorrido de dicha función.

Referencias Bibliográficas

Azcárate C., Deulofeu J. (1996). Funciones y Gráficas. Madrid, España. Editorial Síntesis.

Boyer, Carl. (1986). A history of mathematics: John Wiley & Sons. [Historia de la Matemática]. Madrid, España. Alianza Editorial Textos.

Cousquer E. (1998). La Fabuleuse histoire des nombres. Paris, Francia. Diderot Editeur.

Guedj, D. (1998). El teorema del loro. Barcelona, España. Anagrama.

Herstein, I. N. (1970). Álgebra Moderna. México. Editorial Trillas.

Larroyo, F. (1976). Filosofía de las Matemáticas. D. F. , México. Editorial Porrúa, S.A.

Piaget J. y Otros. (1979). Tratado de Lógica y Conocimiento Científico Vol. III "Epistemología de la Matemática". Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Rey Pastor, Babini, J. (1951). Historia de la Matemática. Buenos Aires, Argentina: Espasa –Calpe.

Robledo, A. (1977). Lecciones de aritmética elemental moderna. Concepción, Chile: Editorial Universitaria.

Toulmin S. (1992) La comprensión humana. Editorial Alianza. Madrid, España.

Van der Waerden, B. L. (1983). Geometry and álgebra ancient civilizations. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.