

TALLERES

NACIONALES

Enseñando Geometría con
Vectores

Roberto Reinoso Bascuñán

Colegio Alemán de Concepción / Universidad San Sebastián - Chile

VIÑA DEL MAR, NOVIEMBRE DE 2006

© SOCHIEM
Edición: Noviembre de 2006
Tiraje 70 ejemplares.
Diseño Portada: Miguel Díaz F.
Preparación de originales del Autor
Diagramación: Universidad de Viña del Mar.
Editado por la Sociedad Chilena de Educación Matemática
Impresión "Lártole Editorial" Viña del Mar

XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática

COMISIÓN ACADÉMICA

María Aravena	Universidad Católica del Maule
Carlos Caamaño	Universidad Católica del Maule
Leonora Díaz	Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Miguel Díaz	Universidad de Viña del Mar
Verónica Díaz	Universidad de Los Lagos
Lorena Espinoza	Universidad de Santiago de Chile
Miguel Friz	Universidad del Bio Bio
Ismenia Guzmán	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Patricio Montero	Universidad de Santiago de Chile
Fidel Oteiza	Universidad de Santiago de Chile
Álvaro Poblete	Universidad de Los Lagos
Alonso Quiroz	Universidad Católica Silva Henríquez

XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática

COMISIÓN ORGANIZADORA

PRESIDENTE	Raimundo Olfos Ayarza	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
SECRETARIA	María Soledad Montoya G	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
PRO-SECRETARIA	Ruth Galindo Navarro	Universidad Mayor
REVISTA	Pierina Zanocco Soto	Pontificia Universidad Católica de Chile
LOGÍSTICA	Ximena Tapia Silva	Universidad Viña del Mar
TALLERES	Carlos Silva Córdova	Universidad de Playa Ancha
INVITADOS	Miguel Díaz Flores	Universidad de Viña del Mar
ACTAS	Eduvina Villagrán Campos	Universidad de la Serena
FINANZAS	Hernán Fibla Acevedo	Colegio Rubén Castro

PRESENTACIÓN

Viña del Mar, Noviembre de 2006.

Como un modo de favorecer el desarrollo de la profesionalización docente desde el análisis de estrategias e innovaciones en el aula, se presenta la realización de talleres. Éstos son cursillos prácticos dirigidos por un especialista en la que los participantes desarrollan propuestas didácticas, actividades de aula y recursos didácticos, entre otros.

Para tal objetivo, en esta ocasión, se presentan diez talleres, tres de ellos propuestos por expertos de Francia, España y Argentina y otros siete por especialistas nacionales provenientes de Valdivia, Concepción, San Felipe, Viña del Mar y Región Metropolitana, con una oferta variada que invitan a debatir en torno a una actividad de exploración y construcción en geometría, con o sin uso de recursos tecnológicos, estrategias de cálculo, actividades de aprendizaje de funciones y el estudio de la situación del alumno al término del proceso educativo, aprendiendo en forma autónoma a lo largo de la vida.

La Sociedad Chilena de Educación Matemática agradece a los autores de los talleres que en estas XIII Jornadas nacionales aportarán con su experiencia a la concreción de una matemática para la vida y al gusto por esta actividad, condiciones del quehacer en el aula, para su real contribución al desarrollo humano e integral de la nación.

Introducción:

La enseñanza de los temas asociados a vectores es, por lo general, relegada al ámbito de la Física. Resulta natural que sea en esta disciplina el que se estudien los vectores, sus propiedades, operaciones e interpretaciones; pues, asumimos, es en ella que estos entes adquieren real significado y aplicabilidad. ¿Cómo representar una fuerza, un movimiento, una trayectoria, una aceleración o una fuerza electromagnética?, no hay duda de la importancia que tienen los vectores en la interpretación de un sin número de situaciones físicas. Sin embargo, en muchas ocasiones, es el profesor de física quien debe dar abarcadas desde su noción matemática a su aplicabilidad las ideas asociadas a los vectores, y no es de extrañar que, por tiempo, pueda abordar sólo las propiedades de operatoria y alguna interpretación de los vectores como vinculadas con el movimiento. Si aceptamos la premisa que los vectores, son en esencia entes matemáticos, que por cierto tienen gran aplicabilidad en la física, es el profesor de matemática quien debe abordar estos temas desde una perspectiva geométrica, asociada a las transformaciones isométricas y específicamente a las traslaciones, pero también la idea de vector está ligada a la generación de sistemas de coordenadas (referencia) es necesario el establecimiento no sólo de ejes sino que de unidades y sentidos positivos sobre dichos ejes (nociones vinculadas a los vectores). Por lo anterior, se comete un error al pensar que a la matemática, le cabe un rol secundario en cuanto a la enseñanza de estos temas.

Objetivo:

El presente taller tiene por finalidad analizar, de manera práctica, algunas actividades de aprendizaje, las cuales partiendo de contextos conocidos por los estudiantes, los orienten hacia la conceptualización y caracterización de lo que se entiende por vector; sean capaces de deducir y transferir las propiedades y relaciones asociadas a los vectores a la resolución y demostraciones de carácter geométrico y, simultáneamente, establecer las expresiones y deducir las reglas de operatoria con vectores representados en un sistema de coordenadas.

Descripción:

Este taller tiene un carácter, principalmente, activo-participativo por parte de los asistentes. En el se desarrollaran y analizarán con espíritu crítico una serie de actividades de aprendizajes, orientadas al trabajo por parte de los estudiantes en forma individual o en compañía con el apoyo del docente, cuyo desarrollo potencia el logro de aprendizajes y el desarrollo de las capacidades establecidas en los programas de la asignatura de matemática por parte de sus alumnos.

Actividades:

El presente taller tiene como centro el desarrollo y análisis de actividades de aprendizajes las cuales se orientan a:

- 1° Conceptuar y caracterizar un vector.
- 2° Interpretar geoméricamente las operaciones con vectores y deducción de sus propiedades.

- 3° Conceptualizar y aplicación la noción de colinealidad entre vectores en problemas de carácter geométrico.
- 4° Aplicar las propiedades geométricas de los vectores en la demostración de relaciones diversas relaciones en figuras geométricas.
- 5° Deducir la representación y la forma de operar con vectores en un sistema de referencia.
- 6° Ejemplificar el uso de los vectores en aplicaciones referida al centro de gravedad de un conjunto de puntos ponderados.

ACTIVIDAD N° 1: Interpretando una Traslación

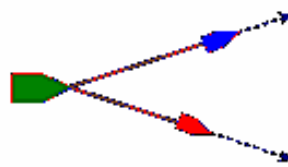
Objetivo: *Aproximarse a la noción de traslación en base al análisis e interpretación de una situación concreta.*

- I.- Un bañista está determinado a cruzar a nado un río, considerando el arrastre que produce la corriente del río y que el bañista nada directamente hacia adelante, la situación se puede representar por el siguiente esquema:



- a) Representar, gráficamente, la trayectoria que tendrá el nadador cuando realice su travesía. Justificar su respuesta.
- b) Identificar el punto, en la orilla opuesta del río, en el cual el bañista saldrá.
- c) Determinar la forma en la cual debería nadar el bañista con el fin de salir, en la orilla contraria, exactamente en el punto opuesto al punto en el cual ingresó al río.

- II.- Un barco es desplazado por dos remolcadores durante el proceso en atraque. Las direcciones y potencias que aplica cada uno de los remolcadores, por unidad de tiempo, se representan gráficamente por las flechas según el diagrama:



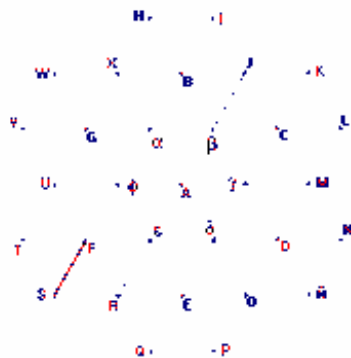
- a) Señalar cual de los remolcadores está empujando con mayor fuerza.

- b) ¿El barco, en el diagrama, seguirá una trayectoria horizontal?. Justifique.
 c) Determinar, gráficamente, la trayectoria según la cual se desplazará el barco.
 d) Plantee otra situación en la cual el uso de vectores sea útil.

ACTIVIDAD N° 2: Caracterizar un vector

Objetivo: Conceptualizar un vector como la representación gráfica de una traslación de puntos en el plano.

I.- Considere el siguiente diagrama formado por hexágonos regulares y adyacentes :



- a) Justifique que los siguientes cuadriláteros son paralelogramos:

$$XHJ\beta \quad ADEF \quad \beta KNO \quad JMFV$$

- b) Sea la traslación $t(x)$, la cual traslada al punto S hasta el punto F; es decir $t(S) = F$. En base a lo anterior determinar las imágenes de los siguientes puntos según $t(x)$:

$$V, C, Q, \alpha, O, \varepsilon, \gamma, A, X, \phi$$

- c) Sea la traslación $p(x)$, la cual traslada al punto B hasta el punto C; es decir $p(B) = C$. En base a lo anterior determinar las imágenes de los siguientes puntos según $p(x)$:

$$W, I, \beta, G, T, J, \delta, R, B, A$$

- d) Sea la traslación $r(x)$, la cual traslada al punto G hasta el punto V; es decir $r(G) = V$. En base a lo anterior determinar las imágenes de los siguientes puntos según $r(x)$:

$$A, L, \tilde{N}, \gamma, J, \varepsilon, \delta, M, D, E$$

e) Dadas las traslaciones siguientes, señale si son o no iguales, justifique las distintas :

$$\begin{array}{ll} a(\overline{AB}) = \overline{B} \text{ y } b(\overline{CD}) = \overline{D} & g(\overline{PQ}) = \overline{Q} \text{ y } h(\overline{MN}) = \overline{N} \\ c(\overline{EF}) = \overline{F} \text{ y } d(\overline{RS}) = \overline{S} & i(\overline{UV}) = \overline{V} \text{ y } j(\overline{ST}) = \overline{T} \\ e(\overline{GH}) = \overline{H} \text{ y } f(\overline{IJ}) = \overline{J} & k(\overline{LM}) = \overline{M} \text{ y } l(\overline{NO}) = \overline{O} \end{array}$$

En base a los resultados anteriores, señale las condiciones que deben cumplir dos traslaciones para que sean iguales:

Por ejemplo: la traslación $t(x)$, que traslada al punto S hasta el punto F , puede ser representada por el vector \overline{SF} .

f) Exprese cada una de las traslaciones del ejercicio (e) como un vector.

De acuerdo con lo anterior señale las condiciones que deben cumplir dos vectores para que sean iguales:

ACTIVIDAD N° 3: Adición, sustracción y multiplicación por escalar.

Objetivo: Deducir la propiedad de Chasles para la suma de vectores y establecer un mecanismo para realizar las adiciones y sustracciones de vectores.

I.- Considerando el diagrama utilizado en la clase anterior:

a) Determine la imagen correspondiente para cada una de las siguientes traslaciones compuestas :

Ejemplo: $t(p(A)) = t(D) = M$

$$\begin{aligned} p(r(C)) &= \\ r(t(P)) &= \\ p(p(r(t(B)))) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(p(A)) &= \\ t(p(t(E))) &= \\ r(t(p(G))) &= \end{aligned}$$

Una traslación compuesta puede ser expresada a través de una suma de vectores

Por ejemplo : la traslación $t(p(A)) = t(D) = M$, se puede expresar por medio de la suma $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM}$.

b) Exprese cada una de las traslaciones compuestas del ejercicio (a) como suma de vectores.

c) Señale al menos dos vectores iguales a cada uno de los siguientes vectores:

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{BJ} = & \overrightarrow{G\phi} = & \overrightarrow{\phi T} = \\ \overrightarrow{SW} = & \overrightarrow{HL} = & \overrightarrow{\delta P} = \end{array}$$

d) Determine un vector igual a cada una de las siguientes sumas de vectores :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} &= \\ \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{G\phi} &= \\ \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{AM} &= \\ \overrightarrow{ML} + 2 \overrightarrow{JB} &= \\ \overrightarrow{H\beta} \cdot \overrightarrow{NP} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BK} &= \end{aligned}$$

e) Calcule e interprete geoméricamente las siguientes expresiones:

$$t(t(\gamma)) =$$

$$\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FA} =$$

$$\frac{3}{2} \overrightarrow{UX} =$$

- f) Señalar las propiedades que cumplen las operaciones entre vectores:
- g) Investigar acerca de las aplicaciones que tienen los vectores en las distintas áreas de la vida cotidiana. (ejemplo: aviación; ingeniería, etc.)

ACTIVIDAD N° 4: Vectores Colineales.

Objetivo: Deducir la condición de colinealidad entre dos vectores.

Definición:

"Dos vectores no nulos son COLINEALES si tienen igual dirección"

Es decir :

$$\overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{CD} \text{ son colineales si y sólo si } \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

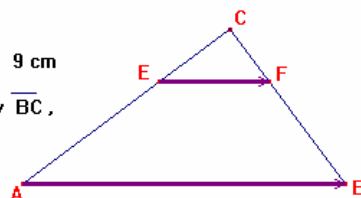
I) Considere la siguiente figura:

Sea el triángulo ABC tal que

$$AB = 16 \text{ cm} \quad AC = 12 \text{ cm} \quad BC = 9 \text{ cm}$$

E y F son puntos de los lados \overline{AC} y \overline{BC} , respectivamente.

$$\text{Si } CF = 3 \text{ cm} \quad \text{y} \quad CE = 4 \text{ cm}$$



- a) Determinar el número "m", tal que $\overrightarrow{CE} = m \overrightarrow{CA}$
- b) Determinar el número "n", tal que $\overrightarrow{CF} = n \overrightarrow{CB}$
- c) Justificar que \overline{AB} y \overline{EF} son paralelos.
- d) Determinar el número "k", tal que $\overrightarrow{EF} = k \overrightarrow{AB}$
- e) Justificar que los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{EF} son colineales.

II) Sea un triángulo RST, cualesquiera.

- a) Construir los vectores siguientes: $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{PQ} = 2 \overrightarrow{ST}$
- b) Expresar el vector \overrightarrow{RP} en función del vector \overrightarrow{RS}
- c) Justificar que $\overrightarrow{RQ} = 2 \left(\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} \right)$
- d) Determinar el número "k", tal que $\overrightarrow{RQ} = k \overrightarrow{RT}$
- e) Justificar que \overrightarrow{RQ} y \overrightarrow{RT} son colineales
- f) Justificar que los puntos R, T y Q están alineados

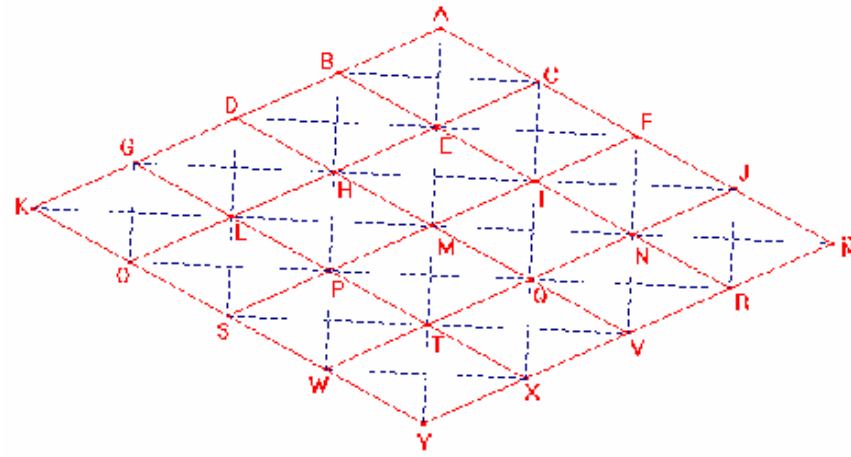
III) Considerando el triángulo RTS, de la figura anterior:

- a) Determinar los puntos A y B tales que : $\overrightarrow{RA} = \frac{1}{3} \overrightarrow{RT}$ y $\overrightarrow{RB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{RS}$
- b) Expresar los vectores \overrightarrow{TS} y \overrightarrow{AB} en función de \overrightarrow{TR} y \overrightarrow{SR}
- c) Justificar que $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{TS}$
- d) Justificar que \overline{AB} y \overline{TS} son paralelos
- e) Demostrar que \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{PQ} son colineales
- f) Determinar el número "n", talque $\overrightarrow{AB} = n \overrightarrow{PQ}$

Enunciar la condición analítica de colinealidad entre dos vectores:

EJERCICIOS

I.- Considere la siguiente figura compuesta por rombos congruentes y adyacentes :



1° Determinar un vector igual a :

a) $\vec{BF} + \vec{QP} - \vec{VN} + \vec{MR} =$

b) $\vec{KP} - 2\vec{QX} - (\vec{WM} + \frac{1}{2}\vec{LT} - \vec{EF}) =$

c) $3\vec{OL} + \vec{HS} - \vec{FQ} - \frac{3}{2}\vec{MN} =$

d) $\vec{DP} - \vec{JV} - (\vec{SG} + \vec{YV} - 2\vec{NF}) + \vec{BC} - \vec{MT} + \vec{RN} =$

2° Descomponga los siguientes vectores en función de \overrightarrow{MI} y \overrightarrow{MQ} :

a) \overrightarrow{DX}

d) \overrightarrow{PN}

b) \overrightarrow{QH}

e) \overrightarrow{IV}

c) \overrightarrow{EP}

f) \overrightarrow{QB}

II.- Considere la siguiente figura:



Determinar los puntos N, M y P definidos por :

a) $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AM} = -\frac{5}{4} \overrightarrow{AC} + 2 \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{PB} = 2 \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2} \overrightarrow{CB}$

III.- Sea ABC un triángulo cualquiera. Los puntos I y J están definidos por:

$$\overrightarrow{BI} = -2 \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$$

a) Construir los puntos I y J.

b) Expresar los vectores \overrightarrow{AJ} y \overrightarrow{AI} en función de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC}

c) Demostrar que los puntos A, J e I están alineados.

IV.- Sea ABC un triángulo cualesquiera. P es el punto medio de \overline{AB} .
Los puntos Q y R se definen como:

$$\overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{CR} = \frac{4}{3} \overrightarrow{CA}$$

a) Demostrar que

b) Expresar el vector $\overrightarrow{PQ} = \frac{5}{6} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ y \overrightarrow{RQ} en función de los vectores \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{AB} .

c) Demostrar que los puntos R, P y Q están alineados.

V.- Sea ABCD un paralelogramo cualquiera. I es punto medio de \overline{AB} .
Los puntos J y K se definen como:

$$\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{CK} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$$

a) Construir los puntos I, J y K.

b) Expresar los vectores \overrightarrow{IJ} y \overrightarrow{KJ} en función de los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AD} .

c) Demostrar que los puntos J, I y K están alineados.

VI.- Sea el triángulo OAB, cualquiera. I, J y K son los puntos medios de los lados \overline{OA} , \overline{OB} y \overline{AB} , respectivamente. El punto L es el simétrico de I con respecto a A y el punto M es punto medio de \overline{JB} . Demostrar que los puntos M, K y L están alineados.

VII.- Sea ABC un triángulo. O es un punto cualquiera del plano. P y Q son puntos tales que:

$$\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{OP} = 3 \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - 2 \overrightarrow{OC}$$

a) Expresar \overrightarrow{OP} en función de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} .

b) Demostrar que $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{QC}$

VIII.- Sean A, B y C tres puntos NO alineados. D y E son puntos tales que:

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{EC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} - \frac{5}{24} \overrightarrow{BC}$$

a) Demostrar que $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{ED}$

b) Demostrar que $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{CE}$

Otras Relaciones Vectoriales

1.- $ABCD$ es un paralelogramo, M es un punto de la región interior de este cuadrilátero. Las rectas L y L' pasan por M paralelamente a los lados \overline{AD} y \overline{AB} , respectivamente.



Demostrar $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AC}$ cualquiera que sea la ubicación de M .

2.- Sea ABC un triángulo, I es punto medio de \overline{BC} .

a) Construir el punto J , tal que $\vec{BJ} = \frac{1}{3} \vec{BI}$.

b) La recta que pasa por J paralela a \overline{AI} , interseca a \overline{AC} en K y a \overline{AB} en L .

Demuestre que $\vec{JK} + \vec{JL} = 2\vec{IA}$.

3.- Sea ABC un triángulo. I, J y K los puntos medios de los lados \overline{BC} ; \overline{AC} y \overline{AB} , respectivamente. El punto G es el centro de gravedad del triángulo.

Demostrar que: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

4.- Sea ABC un triángulo acutángulo. Los puntos B y C se proyectan ortogonalmente sobre los lados \overline{AC} y \overline{AB} , determinando los puntos D y E . Estos puntos, a su vez, se proyectan ortogonalmente sobre los lados \overline{AB} y \overline{AC} determinando F y G , respectivamente.

a) Justificar que existe un número k , tal que $\vec{AC} = k \vec{AD}$.

b) Justificar que existe un número k' , tal que $\vec{AB} = k' \vec{AE}$.

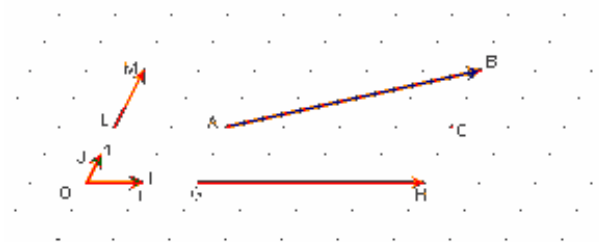
c) Expresar el vector \vec{AD} en función del vector \vec{AG} y el vector \vec{AE} en función del vector \vec{AF} .

d) Justificar que los vectores \vec{BC} y \vec{FG} son colineales.

ACTIVIDAD N° 5: Vectores y Sistemas de Referencia.

Objetivo: Establecer método de representación de un vector por medio de un sistema de coordenadas. Deduciendo la forma de operatoria entre vectores representados por coordenadas.

Consideremos un sistema de referencia $(O; i; j)$ cualesquiera. Y en él los puntos $A(2; 2)$ y $B(6; 4)$



a) Justificar las igualdades siguientes: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{LM}$

b) Expresar el vector \overrightarrow{AB} en función de los vectores \vec{i} y \vec{j}

c) Si consideramos los puntos $D(2; 3)$; $E(-3; 4)$ y $F(3; -1)$. Expresar en función de los vectores \vec{i} y \vec{j} los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{ED} \quad \overrightarrow{BE} \quad \overrightarrow{FD} \quad \overrightarrow{EB} \quad \overrightarrow{AD}$$

Todo vector, en un sistema de referencia, se puede descomponer en función de los vectores \vec{i} y \vec{j} , llamados vectores unitarios. Así, tenemos que:

$$\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

de igual forma podemos abreviar lo anterior por medio de un PAR ORDENADO:

$$\overrightarrow{AB} = (a; b) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

d) Determine los pares ordenados que representan a los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{BD} \quad \overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{AF} \quad \overrightarrow{OE} \quad \overrightarrow{CO}$$

e) Compare las coordenadas de los vectores y de los puntos que se indican a continuación:

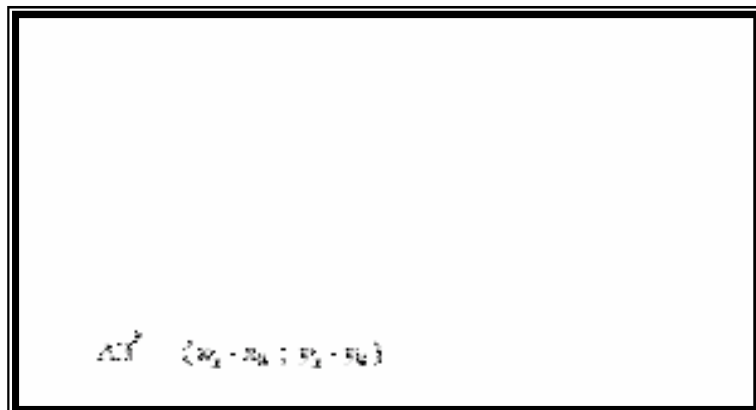
vector \overrightarrow{AD} y punto D vector \overrightarrow{OE} y punto E

vector \overrightarrow{FC} y punto C vector \overrightarrow{OB} y punto B

vector \overrightarrow{AO} y punto A vector \overrightarrow{OF} y punto F

¿Qué puede concluir, en base a los resultados anteriores?

f) Si consideramos los puntos $A(x_a; y_a)$ y $B(x_b; y_b)$ en un sistema $(O; i; j)$
Justifique cada una de las siguientes igualdades:



$$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a; y_b - y_a)$$

Aplicaciones Directas de la igualdad anterior

1) Considere el sistema de referencia $(O; i; j)$ y los puntos de coordenadas
 $A(3; 7)$ $B(-8; 11)$ $C(0; 9)$ $D(-7; -7)$ $E(12; 0)$ $F(1; -4)$

Determinar las coordenadas de los siguientes vectores:

$$\vec{AD} \quad \vec{CF} \quad \vec{BC} \quad \vec{DA} \quad \vec{AE}$$

- 2) Determinar las coordenadas de los puntos P ; Q y R tales que se cumplan las siguientes igualdades:

$$\vec{AP} = \vec{AD} + 2 \vec{BC} \quad \vec{QD} = \vec{CA} + 3 \vec{EF} - \vec{BD}$$

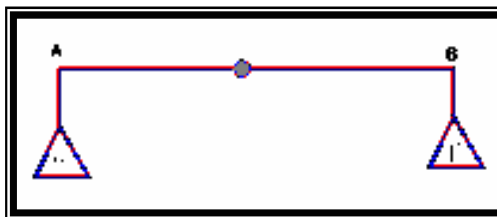
$$\vec{CR} = \vec{AC} + 3 \vec{RD} - 2 \vec{AD} + \vec{ED}$$

ACTIVIDAD N° 6: Vectores y Centros de Gravedad.

Objetivo: Deducir las relaciones vectoriales del Baricentro de un conjunto de puntos.
Aplicar las propiedades del baricentro para la demostración de algunas propiedades geométricas y la solución de problemas.

- I.- Utilizando los materiales entregados (monedas de \$10 y una vara a modo de balanza no graduada) desarrollar las siguientes actividades:

- a) Coloque en ambos extremos de la balanza una cantidad igual de monedas. Determine la ubicación, sobre la vara, el punto de equilibrio G (centro de gravedad o baricentro).



Mida las longitudes \overline{AG} y \overline{GB} . ¿Qué observa?, ¿Porqué este resultado era predecible?.

- b) Coloque en α 4 monedas y en β 2 monedas. Determine la ubicación, sobre la vara, del punto de equilibrio G (centro de gravedad o baricentro).

¿Qué sucede con el punto G, en comparación con el resultado anterior?
A su juicio, ¿Por qué sucede esto?

- c) Complete la siguiente tabla, de acuerdo a las mediciones realizadas en la balanza, distribuyendo monedas en α y β según se señala:

α	β	\overrightarrow{AG}	\overrightarrow{GB}	\overrightarrow{AG}^2	\overrightarrow{GB}^2
3	3				
4	2				
5	3				
6	10				
8	4				
9	6				

¿Qué se observa en la tabla anterior?

- d) Si en α y β se ubican 11 y 6 monedas, respectivamente.
 ¿Puede predecir la posición que tendrá el punto G, sin utilizar la balanza?. Señálela.
 Verifique su conjetura directamente en la balanza.
- e) Utilizando los resultados de la tabla anterior, determine el valor de k tal que se cumpla la relación vectorial existente entre \overrightarrow{AG} y \overrightarrow{GB} .

α	β	\overrightarrow{AG}	\overrightarrow{GB}	\overrightarrow{AG}^2	\overrightarrow{GB}^2
3	3				
4	2				
5	3				
6	10				
8	4				
9	6				

- e) Justifique la siguiente igualdad: $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

Definición y Propiedad

Si A y B son dos puntos, afectados por ponderaciones α y β , respectivamente (con $\alpha + \beta \neq 0$). Entonces existe un único punto G que verifica la relación vectorial:

$$\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

G es llamado **Centro de Gravedad** de los puntos ponderados $(A; \alpha)$ y $(B; \beta)$.

Si los puntos A y B son distintos, entonces G pertenece a la recta \overline{AB} .

Teorema:

Si A y B son dos puntos, afectados por ponderaciones α y β , respectivamente (Con $\alpha + \beta \neq 0$). Entonces se verifica la relación vectorial:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

Observación: Para la demostración utilice la relación de Chasles

Aplicación:

Considere los puntos ponderados $(A; \alpha)$ y $(B; \beta)$.

Construya geoméricamente el Baricentro de este par de puntos, si:

i) $\alpha = 2$ y $\beta = 3$

ii) $\alpha = -3$ y $\beta = 4$

iii) $\alpha = -8$ y $\beta = -6$

f) Considere los puntos ponderados $(A; \alpha)$ y $(B; \beta)$ en un sistema de coordenadas $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Justificar que se cumplen las relaciones vectoriales:

$$(\alpha + \beta) \overrightarrow{OG} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$$

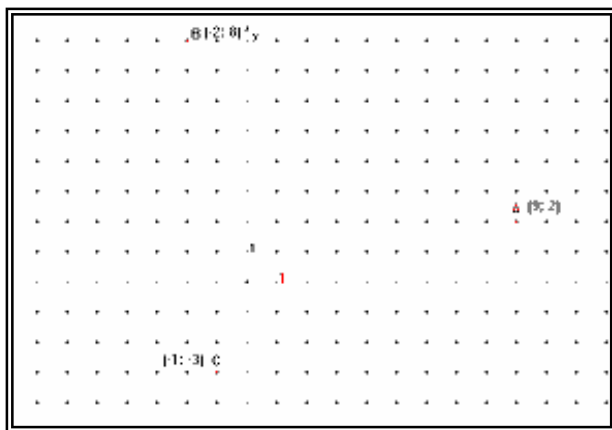
?

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{(\alpha + \beta)} (\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB})$$

Aplicación :

Sea $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un sistema de coordenadas y en él los puntos

$$A(9; 2) \quad B(-2; 8) \quad C(-1; -3)$$



- 1° Determinar el centro de gravedad M de los puntos $(A; 5)$ y $(B; 5)$
- 2° Determinar el centro de gravedad G de los puntos $(M; 10)$ y $(C; 5)$

A MODO DE RESUMEN**1.- VECTOR:**

Un vector \overrightarrow{AB} , es la representación gráfica de una traslación definida sobre los puntos del plano; en la cual el punto A es punto de inicio y el B es punto de llegada.

También, se acostumbra a denotar un vector como $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Todo vector (traslación) queda definida por :

- Su Dirección
- Su Sentido
- Su Longitud

La dirección del vector \vec{u} corresponde a la pendiente de la recta \overline{AB} .

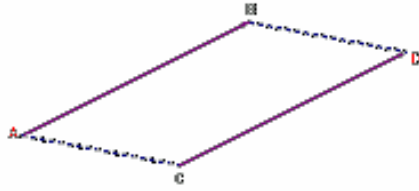
El sentido del vector \vec{u} corresponde a la trayectoria desde A hacia B.

La longitud (norma) del vector \vec{u} es la longitud del segmento \overline{AB} .

$$[\|\vec{u}\| = AB]$$

2.- IGUALDAD DE VECTORES :

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ es un paralelogramo.}$$

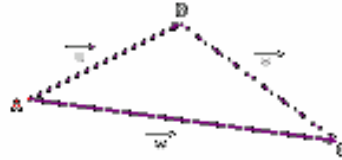


3.- ADICIÓN DE VECTORES:

La adición de dos vectores u y v es el vector w , la suma de estos vectores puede ser representada de dos maneras :

a) Traslación sucesiva:

$$\text{Si } \vec{u} = \vec{AB} \text{ y } \vec{v} = \vec{BC} \text{ entonces } \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$$

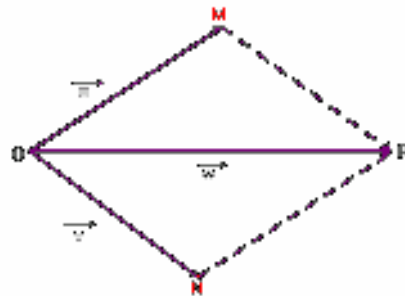


Si puntos A y C están dados, entonces se cumple que para todo punto B :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad (\text{relación de Chasles})$$

b) Por medio de un paralelogramo:

$$\text{Si } \vec{u} = \vec{OM} \text{ y } \vec{v} = \vec{ON} \text{ entonces } \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{OR} \\ \text{donde OMRN es un paralelogramo. } \vec{OR} \text{ es la diagonal del paralelogramo.}$$



Si O , N , M y R están dados, tales que:

$$\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OR} \Leftrightarrow ONRM \text{ es un paralelogramo.}$$

3.- VECTOR NULO:

Es aquel que NO posee dirección, sentido, ni longitud. Se denota por :

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

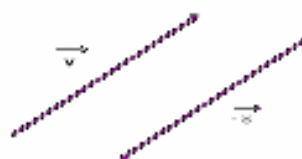
4.- VECTORES OPUESTOS:

Dos vectores son opuestos si ellos tienen igual dirección, igual longitud pero sentidos contrarios.

\overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BA} son vectores opuestos.

Se cumple que: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

de donde se deduce que: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$



5.- MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR:

Sea \vec{u} un vector no nulo ($\vec{u} \neq \vec{0}$) y $k \in \mathbb{R}$, no nulo ($k \neq 0$).

Al considerar sobre una recta L un sistema de referencia $(O; \vec{u})$ tal que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ y un punto M de la recta L cuya abscisa es k , entonces se cumple que:

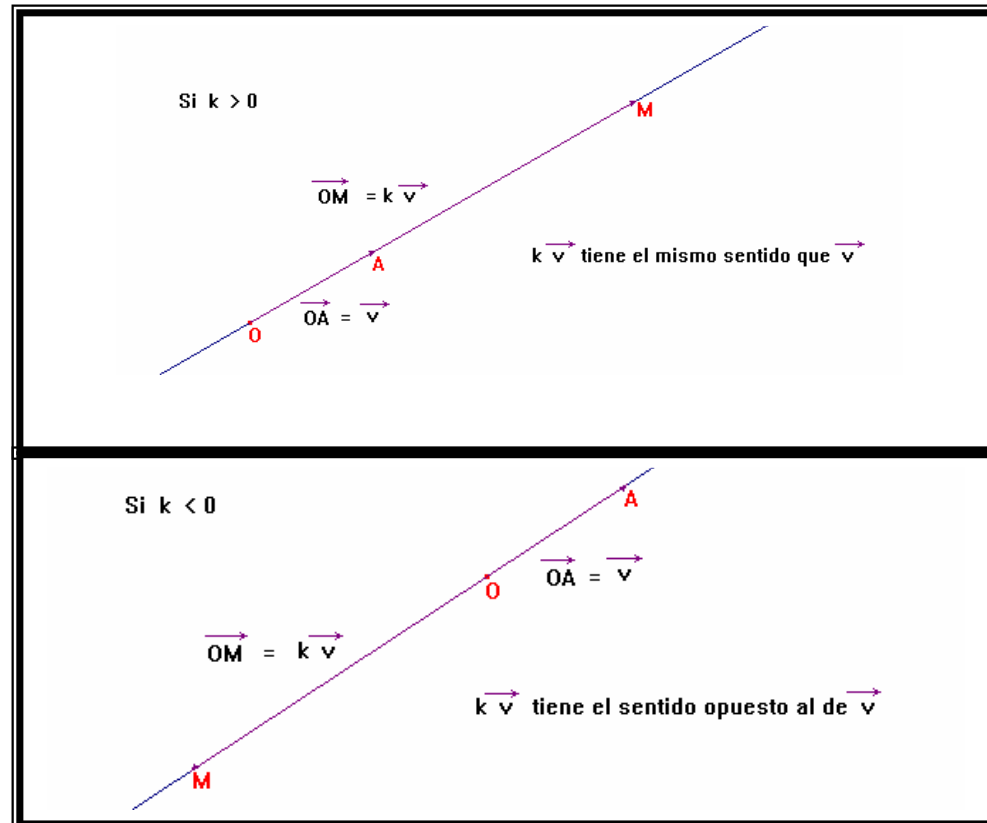
\overrightarrow{OM} es el producto del vector \vec{u} por el escalar k , lo que se escribe :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$$

La dirección del vector $k \vec{u}$ es igual a la dirección del vector unitario \vec{u} .

La longitud del vector $k \vec{u}$ es igual al producto de la longitud de \vec{u} por el valor absoluto de k . [$OM = |k| OA$]

El sentido del vector $k \vec{u}$ respecto al sentido del vector \vec{u} depende del valor de k .



6.- VECTORES COLINEALES:

Dos vectores, no nulos, \vec{u} y \vec{v} son COLINEALES si uno es el producto del otro por un escalar, es decir, si existe un número real k , tal que $\vec{u} = k \vec{v}$.

También se dice que dos vectores, no nulos, son COLINEALES si, y sólo si, ellos tienen igual dirección.

Si $k = 0$, entonces el punto M se confundiría con el origen del sistema, y $0 \vec{u} = \vec{0}$.

Por convención se tienen que para todo real k , se cumple que $k \vec{0} = \vec{0}$ y el vector nulo es colineal con todos los vectores.

7.- PARALELISMO y ALINEACIÓN :

Dos rectas \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{MN} son paralelas si, y sólo si: los vectores

los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{MN} son colineales.

Tres puntos distintos A , B y C están alineados si, y sólo si:

los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son colineales.

BIBLIOGRAFÍA

- | | |
|--------------------------|--|
| DELORD, Robert | “Maths 3 ^{es} ”; collection Cinq sur Cinq |
| VINRICH, Gérard | editorial Hachette Education, París-Francia. 2003. |
| DENYS, Bernadette | “Mathématiques 2 ^{des} ”, collection Axiale |
| | Editorial Hatier, París-Francia. 2004. |
| ALVEZ, Yves | “Math Première S”, collection Math’x |
| LE YAOUANQ, Marie-Hélène | Editorial Didier, París-Francia. 2005. |
| ANTIBI, André | “Math Term S, spécialité”, collection Nouveau |
| BARRA, Raymond | Transmath Editorial Nathan, París-Francia. 1998. |
| DEL RIO, Celia | “Matemática IV”, Educación Media |
| VERGARA, Cristián | Editorial Santillana, Santiago-Chile. 2002. |

