

# TALLERES

# NACIONALES

Geometría Dinámica

**Rosa Eugenia Trumper M. y María Isabel del Río V.**  
Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile

VIÑA DEL MAR, NOVIEMBRE DE 2006

© SOCHIEM  
Edición: Noviembre de 2006  
Tiraje 60 ejemplares.  
Diseño Portada: Miguel Díaz F.  
Preparación de originales del Autor  
Diagramación: Universidad de Viña del Mar.  
Editado por la Sociedad Chilena de Educación Matemática  
Impresión "Lártole Editorial" Viña del Mar

## XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática

---

### COMISIÓN ACADÉMICA

<b>María Aravena</b>	Universidad Católica del Maule
<b>Carlos Caamaño</b>	Universidad Católica del Maule
<b>Leonora Díaz</b>	Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
<b>Miguel Díaz</b>	Universidad de Viña del Mar
<b>Verónica Díaz</b>	Universidad de Los Lagos
<b>Lorena Espinoza</b>	Universidad de Santiago de Chile
<b>Miguel Friz</b>	Universidad del Bio Bio
<b>Ismenia Guzmán</b>	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
<b>Patricio Montero</b>	Universidad de Santiago de Chile
<b>Fidel Oteiza</b>	Universidad de Santiago de Chile
<b>Álvaro Poblete</b>	Universidad de Los Lagos
<b>Alonso Quiroz</b>	Universidad Católica Silva Henríquez

## XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática

---

### COMISIÓN ORGANIZADORA

<b>PRESIDENTE</b>	Raimundo Olfos Ayarza	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
<b>SECRETARIA</b>	María Soledad Montoya G	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
<b>PRO-SECRETARIA</b>	Ruth Galindo Navarro	Universidad Mayor
<b>REVISTA</b>	Pierina Zanocco Soto	Pontificia Universidad Católica de Chile
<b>LOGÍSTICA</b>	Ximena Tapia Silva	Universidad Viña del Mar
<b>TALLERES</b>	Carlos Silva Córdova	Universidad de Playa Ancha
<b>INVITADOS</b>	Miguel Díaz Flores	Universidad de Viña del Mar
<b>ACTAS</b>	Eduvina Villagrán Campos	Universidad de la Serena
<b>FINANZAS</b>	Hernán Fibla Acevedo	Colegio Rubén Castro

## PRESENTACIÓN

Viña del Mar, Noviembre de 2006.

Como un modo de favorecer el desarrollo de la profesionalización docente desde el análisis de estrategias e innovaciones en el aula, se presenta la realización de talleres. Éstos son cursillos prácticos dirigidos por un especialista en la que los participantes desarrollan propuestas didácticas, actividades de aula y recursos didácticos, entre otros.

Para tal objetivo, en esta ocasión, se presentan diez talleres, tres de ellos propuestos por expertos de Francia, España y Argentina y otros siete por especialistas nacionales provenientes de Valdivia, Concepción, San Felipe, Viña del Mar y Región Metropolitana, con una oferta variada que invitan a debatir en torno a una actividad de exploración y construcción en geometría, con o sin uso de recursos tecnológicos, estrategias de cálculo, actividades de aprendizaje de funciones y el estudio de la situación del alumno al término del proceso educativo, aprendiendo en forma autónoma a lo largo de la vida.

La Sociedad Chilena de Educación Matemática agradece a los autores de los talleres que en estas XIII Jornadas nacionales aportarán con su experiencia a la concreción de una matemática para la vida y al gusto por esta actividad, condiciones del quehacer en el aula, para su real contribución al desarrollo humano e integral de la nación.

## Introducción

### Uso de la Informática en la Educación

La informática es un medio natural para los estudiantes de hoy, desde la temprana infancia. Lo usan como medio de comunicación permanente, como medio de estudio y de diversión y ocupa un lugar importante en su modo de vida. Por esta razón puede resultar muy útil aprovecharla como herramienta de aprendizaje.

De acuerdo con Azinian (1998) algunas de las posibilidades que brinda la informática son:

#### *a) Interactividad e inmediatez.*

La posibilidad de producir modificaciones, dar respuestas y requerir acciones, con inmediatez y fluidez, permite, entre otras cosas, la exploración dinámica de representaciones y el control de una secuencia de acciones. Con una misma construcción es posible visualizar varias situaciones, como por ejemplo construir las alturas en un triángulo acutángulo y luego transformar el triángulo de modo que sea obtusángulo o rectángulo para ver qué ocurre con las alturas en éstos.

#### *b) Capacidad de almacenamiento y de recuperación de la información.*

Esto posibilita el almacenamiento, para su posterior revisión, de la traza del trabajo de los alumnos, de la ruta que han seguido. Esta capacidad, combinada con la citada en primer término, facilita la visualización del proceso dinámico de obtención de un producto después de una serie de transformaciones, y no sólo la imagen final con todos los elementos acumulados. Así el estudiante puede revisar su estrategia de construcción y hacer consciente su proceso de pensamiento, desarrollando estrategias metacognitivas. Este tipo de trabajo ayuda a comprender qué son y para qué sirven los conceptos y relaciones (aprendizaje significativo).

#### *c) Múltiples formas de representación en un mismo medio: textual, gráfica, tabular, auditiva, icónica, espacial.*

Dado que los conceptos se materializan mediante una representación y el aprendizaje de un concepto está asociado al desarrollo de la capacidad de traducir de uno a otro tipo de representación, la exploración dinámica, el paso de uno a otro tipo, puede permitir que el alumno descubra información que estaba implícita o puede obligarle a crear información para mejorar la precisión. Esta capacidad de múltiples formas de representación, unida a la de almacenamiento y facilidad de recuperación de la información, permite la creación de un entramado de relaciones dinámicas de gran riqueza conceptual. En particular, podemos extender a la exploración de representaciones gráficas, la afirmación de Tall de que la exploración visual permite al alumno “lograr una comprensión intuitiva de los conceptos, proveyendo un fundamento cognitivo sobre el cual pueden construirse teorías matemáticas significativas”. (Tall, 1992)

*d) Polivalencia, versatilidad*

El mismo medio puede usarse de diversas maneras, ampliando enfoques. El estudiante puede construir figuras a partir de conocimientos previos, o sin usar conocimientos previos y elaborar conjeturas a partir de lo que visualiza en la construcción y apoyarse en ella para demostrar su conjetura.

Las características citadas, además de permitir el desarrollo de ambientes de aprendizaje enriquecidos, pueden ayudar al docente, abriéndole ventanas al proceso de aprendizaje (Nos,1995), a los “**proceptos**” (proceso + conceptos) de los alumnos (Tall,1994).

**Geometría Dinámica**

La introducción de los software de geometría dinámica ha revolucionado la enseñanza de la geometría.

El concepto de geometría dinámica fue introducido por Nick Jackiw y Steve Rasmussen (Goldenberg y Cuoco, 1988) y se aplica a los programas informáticos que permiten a los usuarios, después de haber hecho una construcción, mover ciertos elementos arrastrándolos libremente y observar cómo otros elementos responden dinámicamente al alterar las condiciones.

Estos programas de geometría fueron diseñados con la intención específica de poner a disposición de los alumnos un ambiente del tipo micro mundo para la exploración experimental de la geometría plana elemental. Al trabajar con lápiz, papel, regla y compás se obtiene una representación más o menos exacta pero fija, y por lo tanto se limita en extremo la exploración. En estos programas las figuras geométricas pueden construirse por medio de acciones y en un lenguaje que son muy próximos a los que se usan en el universo familiar de "papel y lápiz". En contraste con la construcción tradicional, la geometría dinámica es precisa y es muy fácil y rápido realizar construcciones complejas para luego modificarlas.

La mayoría de estos programas se convierten en herramientas de manipulación de representaciones gráficas con la capacidad de proveer retroalimentación informativa, con las que las actividades propuestas son algo más que “mirar la pantalla”.

Básicamente estos utilitarios permiten realizar dos categorías de acciones interdependientes:

- Tratamiento y control de los conocimientos teóricos de geometría, que permiten explicar, predecir, producir.
- Tratamiento y control perceptivos fundados en el reconocimiento de formas o de fenómenos como la alineación, la perpendicularidad, el paralelismo.

La interacción fuerte entre percepción y geometría se da cuando se utilizan las funciones de los programas para verificar las observaciones.

Por otra parte, dos de los rasgos más sobresalientes de este tipo de software son:

- holística: poder ver una situación en forma global, visualizando configuraciones con relaciones entre diversos elementos
- dinamismo: permite animar las configuraciones y observar los cambios.

Existen diversos software de geometría dinámica algunos comerciales y otros gratuitos. Entre los comerciales, los más populares son Cabri, Geometer's Sketchpad y Cinderella. Entre los gratuitos, cabe mencionar Regla y Compás y Geogebra,

El software elegido para este taller es **Regla y Compás**. El programa es versátil, fácil de usar y obtener, corre en distintos sistemas operativos y es gratuito.

A continuación presentamos una descripción del software Regla y Compás, tomada de la traducción hecha por Martín Acosta, de la pagina oficial del programa.

#### **Características de R.y.C.**

Aquí hay un resumen de las características mas importantes de R. y. C. de manera que Usted pueda compararlo con otros programas de geometría.

- Funciona bajo Windows, OS/2, Linux, Apple Macintosh, Solaris y otras plataformas con Java 1.1, así como en un navegador con Java.
- Es software libre, incluso el código fuente puede obtenerse bajo una licencia GNU.
- Documentación en HTML, Tutorial y Demos.
- Simulación de construcciones de geometría euclidiana plana con Regla y Compás.
- Interfaz moderna e intuitiva con shortcuts, descripción de iconos, ventanas de diálogo y menús.
- Modo visual en el que se construye con el ratón, o Modo descriptivo, en el que se escriben los comandos de construcción.
- Utilización del botón derecho del ratón para mover puntos, acceder a las propiedades de los objetos y mover los nombres de los objetos.
- Creación automática de puntos y de intersecciones.
- Posibilidad de fijar la longitud de segmentos, posición de puntos, radio de circunferencias y amplitud de ángulos.
- Posibilidad de truncar las circunferencias.
- Posibilidad de ocultar construcciones intermedias.
- Objetos de colores que pueden ocultarse ocultando el color.
- Posibilidad de mostrar los nombres y los valores de los objetos.
- Posibilidad de cambiar el número de decimales por separado para ángulos y magnitudes.
- Construcción rápida de perpendiculares, paralelas y puntos medios.
- Lugares geométricos de puntos, cuando el usuario mueve un punto independiente.
- Lugares geométricos de puntos cuando se mueve un punto sobre una circunferencia o una recta.

- Macros para facilitar la repetición de construcciones.
- Definición de ejercicios de construcción que pueden funcionar localmente o en un navegador.
- Presentación de construcciones y ejercicios en Internet con un navegador normal.
- Posibilidad de exportar automáticamente construcciones y ejercicios en paginas HTML, con comentarios, Style-Sheets y enlaces a las soluciones.
- Estandar XML para los archivos de construcción y de macros.
- Las construcciones también pueden diseñarse en un editor de texto.
- Impresión de las construcciones.
- Expresiones aritméticas para definir magnitudes, longitud de segmentos, radios de circunferencias y amplitud de ángulos, así como coordenadas de puntos.

Naturalmente, versiones futuras tendrán otras potencialidades como por ejemplo otras geometrías.

#### **Objetivos del Software**

Este programa puede ser usado por alumnos desde un nivel elemental hasta un nivel universitario. Aunque es difícil que un solo programa responda a las necesidades de tan diversos niveles, la intención es entregar un programa tan simple y tan útil como sea posible.

La principal funcionalidad del programa es el dinamismo, que consiste en que las construcciones geométricas pueden variarse moviendo los puntos de base. También es posible trazar el lugar geométrico de un punto cuando otro es desplazado, lo cual puede servir para lograr una mejor comprensión de conceptos geométricos. Otra funcionalidad es la construcción textual, como alternativa a la construcción visual. En Java es posible publicar las construcciones y ejercicios en Internet. Finalmente, el programa usa macros, que son construcciones automatizadas.

Para lograr una mayor versatilidad, la interfase se reduce a las herramientas necesarias para un manejo simple del programa. El usuario tiene a su disposición un ambiente gráfico estándar, en el que se sentirá cómodo. Así, el botón izquierdo del ratón servirá para construir junto con los botones de herramientas, mientras el botón derecho servirá para desplazar los objetos o editar sus propiedades. Otro objetivo es lograr respuestas automáticas. Por ejemplo, el usuario puede generar un segmento haciendo clic sobre la pantalla dos veces, sin haber creado con anterioridad los extremos. Los puntos de intersección también pueden generarse automáticamente.

Aunque la interfase es intuitiva, algunos usuarios acostumbrados a otros programas pueden enfrentar problemas. La filosofía del diseño era ajustarse al máximo al funcionamiento de windows, por lo que les pedimos paciencia para adaptarse a este esquema.

## El Taller

### Objetivos

- Familiarizar a los docentes con las herramientas de geometría dinámica y mostrar cómo puede usarse efectivamente en la enseñanza de la geometría.
- Implementar el uso del programa “Regla y Compás” para construir ambientes de aprendizaje con tecnología.
- Desarrollar la intuición geométrica mediante aplicaciones y el manejo de software “Regla y Compás”.
- Promover la capacidad de visualización y el uso de manipulables virtuales que posibiliten el desarrollo de conceptos, prueba de hipótesis y desarrollo de conjeturas.
- Fortalecer la experiencia y la capacitación de los docentes al explorar y elaborar conjeturas.

### Actividades

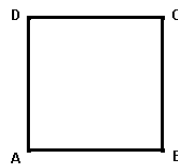
El taller se desarrollará en dos sesiones: En la primera se introducirá a los y las participantes en el uso de las herramientas del software Regla y Compás y en la segunda, se realizarán actividades de construcción y exploración de figuras geométricas, y se les pedirá que formulen conjeturas sobre los resultados observados, las escriban y demuestren alguna de ellas.

Para el desarrollo de la primera sesión, este documento contiene información detallada sobre las características del programa que permiten desarrollar las actividades. En la segunda, se detallan sólo las herramientas que no se han utilizado anteriormente.

### Actividad 1

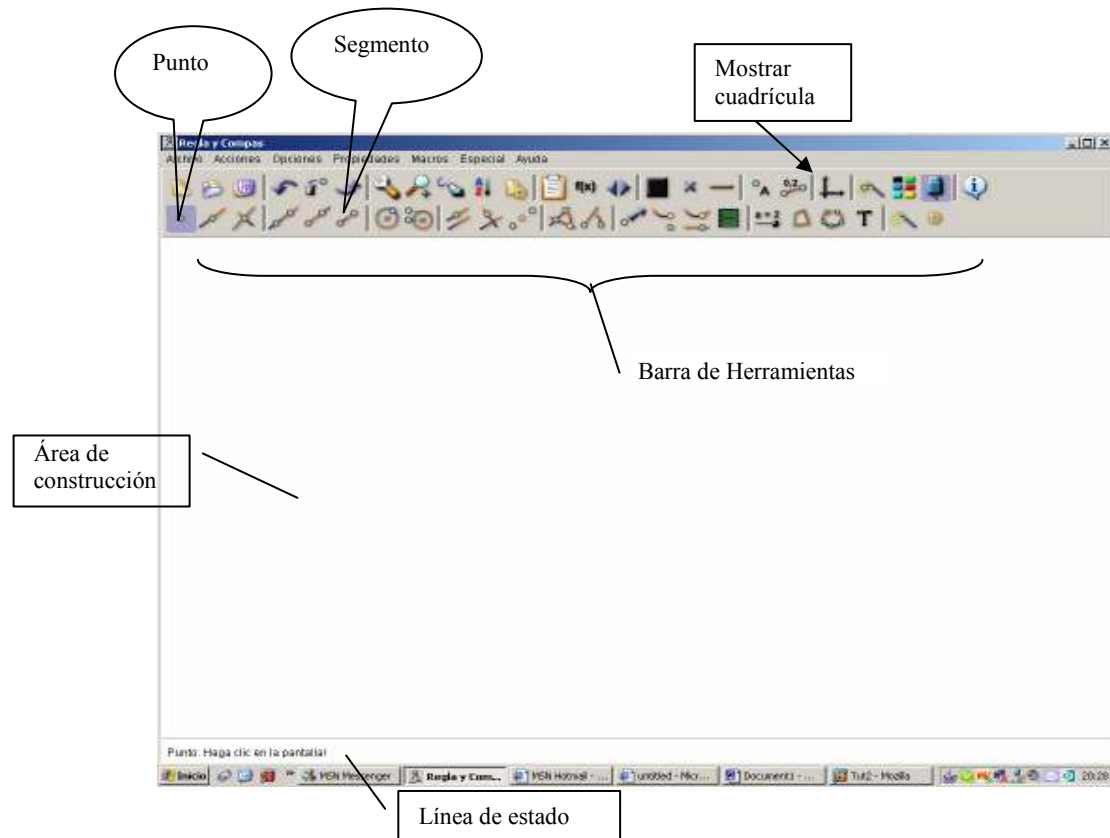
**Objetivo:** Conocer los elementos básicos del software regla y compás

Nuestra primera tarea será dibujar este cuadrado, tal como lo haríamos en un cuaderno cuadriculado, usando una regla. Cabe hacer notar que los conocimientos previos son que el cuadrado tiene lados congruentes y ángulos rectos, pero no es necesario conocer las construcciones geométricas correspondientes a estas características.



Aquí debajo puede verse una ventana de construcción simple. Comprende tres partes:

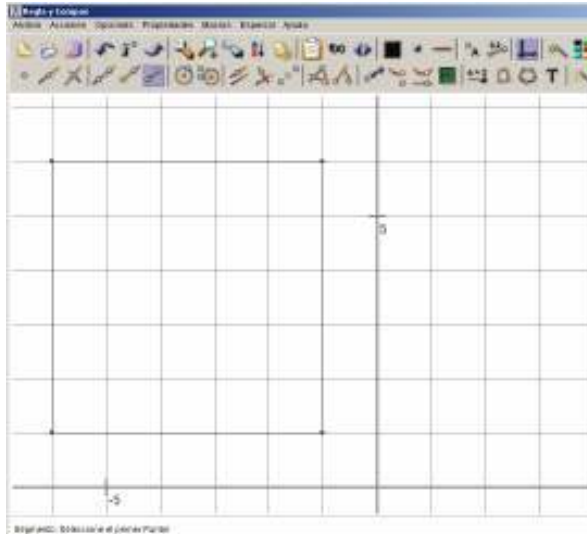
- la Barra de Herramientas,
- el área de construcción,
- y la línea de estado.



En este caso, en la Barra de Herramientas hemos destacado tres sólo tres iconos.

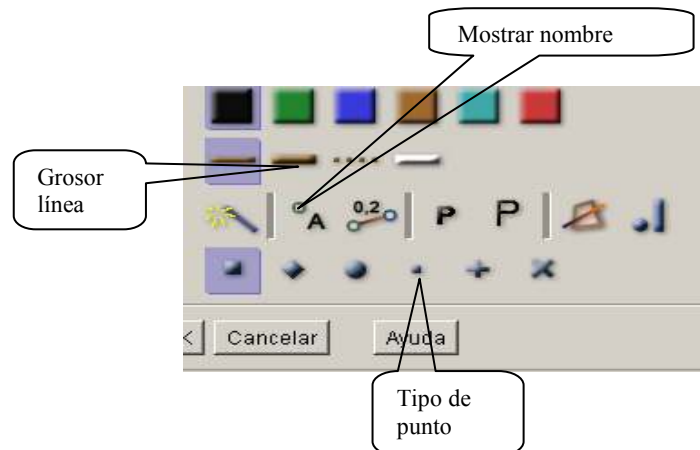
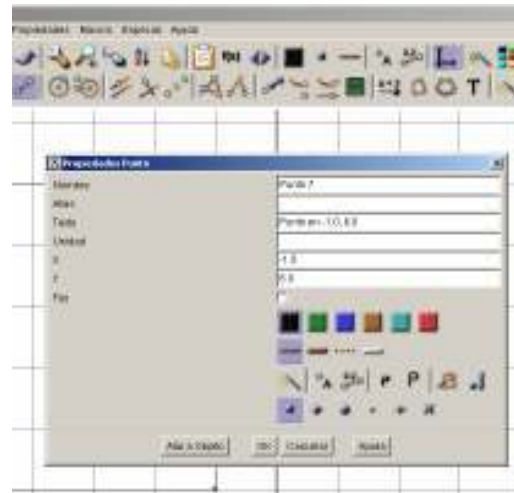
- la herramienta para construir puntos,
  - la herramienta para construir segmentos,
  - y el botón para mostrar la cuadrícula
1. Haga clic sobre el ícono Mostrar Cuadrícula. El área de construcción se verá cuadrículada
  2. Seleccione la herramienta Punto. En la línea de estado se le dirá qué es lo que debe hacer. Siga la instrucción, eligiendo el lugar donde quiera poner el vértice A. Así aparecerá un punto.
  3. Construya otro punto donde quiera poner el vértice B

4. Seleccione la herramienta Segmento, para unir esos dos puntos con un segmento. Haga clic sobre cada uno de los puntos. Si usted no señala con precisión el punto construido, aparecerá uno nuevo en el punto donde haga clic. En este caso puede borrar usando la tecla de retroceso (Backspace)
5. Construya ahora los otros tres segmentos que forman el cuadrado. No necesita utilizar la herramienta punto, pues con la herramienta Segmento se crea un punto si hace clic en un lugar vacío del área de construcción. Obtendrá una figura como la siguiente.



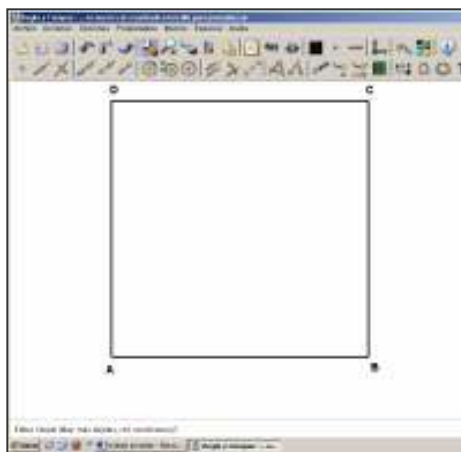
6. Mejoremos el aspecto de nuestro cuadrado. Para ello, seleccione el icono editar objeto. Cada elemento, en este caso segmento o punto es un objeto. Para colocar los nombres A, B, C, haga clic en un punto ( Si aparece una lista, seleccione un punto y no un segmento) Aparece entonces una ventana como la siguiente con las propiedades del punto.





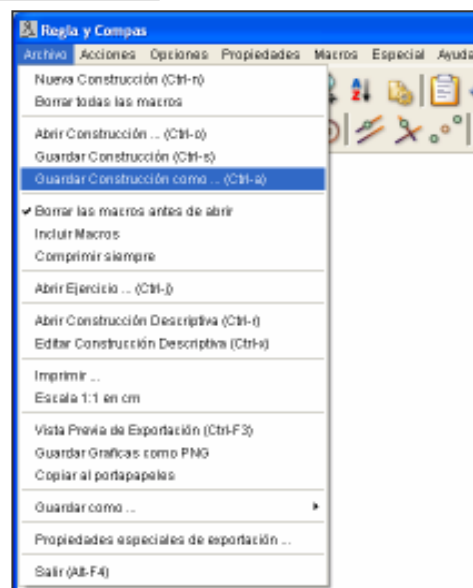
- a) Cambie el nombre del punto y llámelo A (B,C, D respectivamente). (Este nombre puede usarse posteriormente para referirse al punto)
  - b) Seleccione la casilla que tiene etiqueta A, lo cual significa "mostrar nombre" y elija el tipo de punto más pequeño
  - c) Cierre la ventana de propiedades con OK.
7. Para mejorar el aspecto de los segmentos, elija el mismo ícono, cambie el grosor, color, etc.

8. Si la posición de las etiquetas no le gusta, cámbielas de lugar con el botón derecho del ratón. Si hace un segundo clic con el botón derecho, la etiqueta regresará a su posición original.
9. Por último, haga clic una vez más en el ícono mostrar cuadrícula y esta desaparecerá.



10. Guarde su trabajo.

En el menú archivo, elija "Guardar Construcción como"

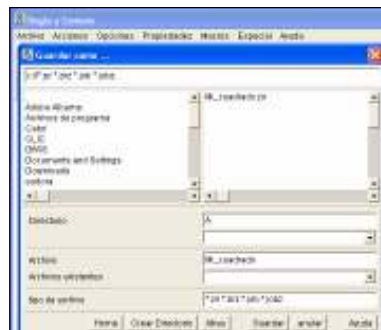


Se desplegará la siguiente ventana:

Para guardar en un diskette, escriba **A:** en el cuadro de dialogo **Directorio** y haga clic sobre crear directorio.

En el cuadro de dialogo **Archivo** escriba **Mi\_cuadrado** y haga clic en guardar.

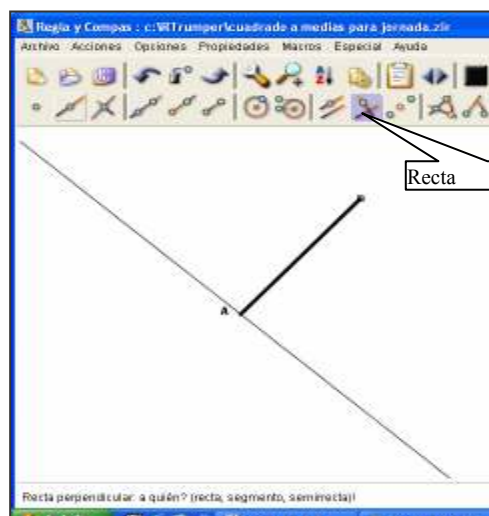
Habrá almacenado su trabajo en un diskette con el nombre de **Mi\_cuadrado**



**Actividad 2**

**Objetivo:** Aprender a utilizar las herramientas del Regla y Compás para hacer construcciones geométricas

Como habrá notado, hasta el momento hemos estado dibujando, no construyendo. Ahora construiremos geoméricamente un cuadrado, como lo haríamos usando regla y compás físico.



Dibuje un segmento y llame A a uno de sus vértices.

Seleccione el icono recta perpendicular.

En la línea de estado se verá "Recta perpendicular: a quien?". Haga clic sobre el segmento. Le pedirá ahora un punto, elija A.

Seleccione ahora la herramienta Círculo. Haga centro en A y elija como punto para el radio el extremo del segmento.

Encuentre los puntos de intersección entre la recta y la circunferencia usando el icono punto de intersección.

Es posible que este icono no esté visible, para ello debemos hacerlo aparecer.

1. Haga clic en el menú propiedades
2. Seleccione Editar las Herramientas



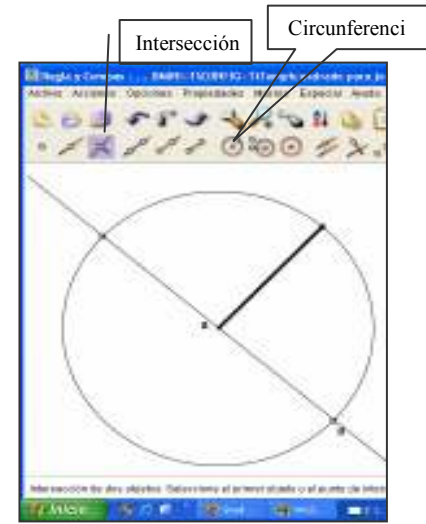
Se abra el siguiente cuadro de dialogo



Seleccione punto de intersección y luego OK.

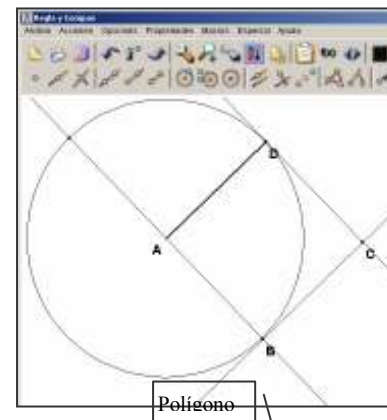
La recta perpendicular y la circunferencia se cortarán en dos puntos, elija uno de ellos para su vértice B

Trace por B una perpendicular a  $\overline{AB}$ .

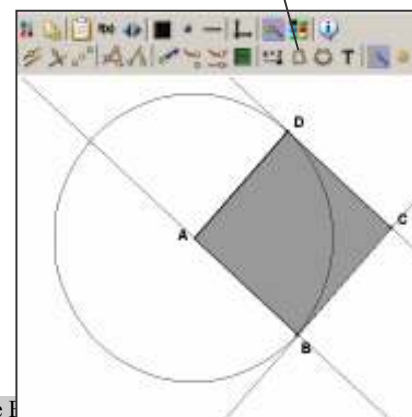


Llame D al otro extremo de su segmento original y trace por D una perpendicular a  $\overline{AD}$ .

La intersección de estas dos perpendiculares es su cuarto vértice, C



Usando la herramienta polígono, marque sucesivamente los puntos A,B,C,D,A. (El polígono se termina cuando vuelve al punto de partida)



Usando la herramienta “Ocultar Objeto”,  
oculte las líneas auxiliares.

Seleccione “Mover Punto”.

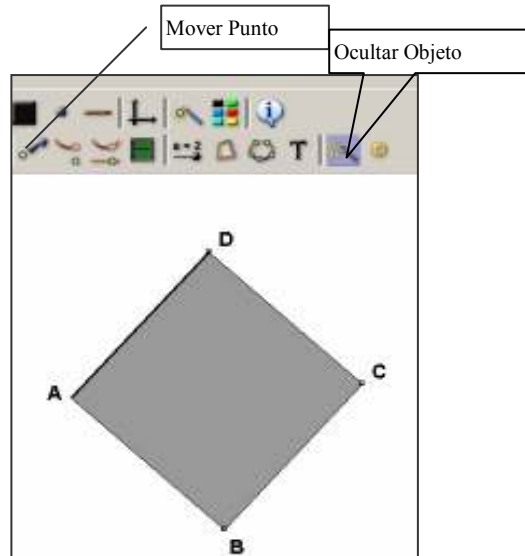
Mueva ahora el vértice A.

¿Qué sucede?

¿Puede mover todos los vértices?

¿Cuáles sí? ¿Cuáles no?

¿Por qué?



Para ayudarse en la reflexión, puede recurrir a la herramienta “Revisar Construcción” y repetir uno a uno los pasos realizados



### **Actividad 3**

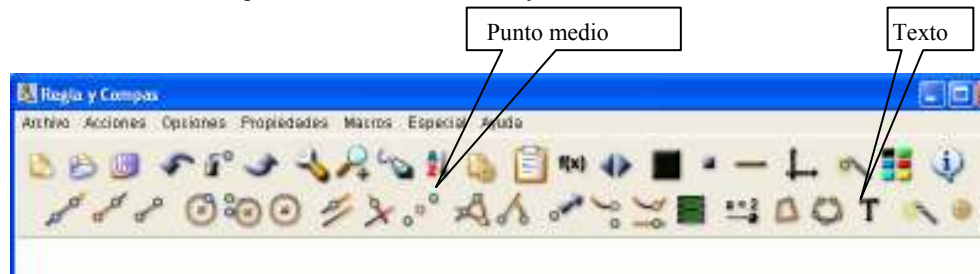
**Objetivo:** Utilizar las herramientas de R y C para construir los paralelogramos, utilizando sus definiciones.

Construya un rectángulo, un rombo, un romboide y un deltoide. Compruebe que su construcción es correcta moviendo los vértices libres. Al moverlos, su construcción no debería perder las características esenciales.

**Actividad 4**

**Objetivo:** Utilizar una construcción geométrica para elaborar conjeturas, analizarlas, ponerlas a prueba y demostrarlas o desecharlas.

Nuevas herramientas que utilizará: Punto medio y Texto.



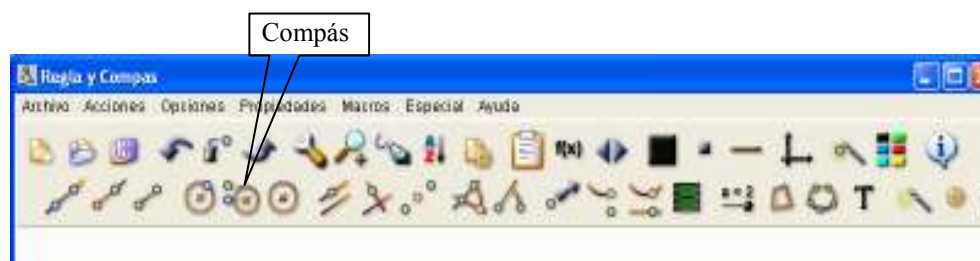
VARIGNON

1. Construya el cuadrilátero CUAD.
2. Determine los puntos medios de los lados de CUAD.
3. Una los puntos medios de CUAD, formando el cuadrilátero VRGN. ¿Qué observa?
4. Mueva alguno de los vértices de CUAD.
5. Usando la herramienta Texto, escriba y demuestre sus conjeturas.
6. Repita con un cuadrado, un rombo, un rectángulo.
7. Busque en INTERNET VARIGNON.

**Actividad 5**

**Objetivo:** Utilizar las herramientas de R y C para construir geoméricamente figuras , a partir de elementos secundarios y aplicando propiedades.

Nuevas herramientas que utilizará:



La herramienta Compás se usa para tomar una medida o distancia y aplicarla a otro lugar. Para ello primero hay que darle los dos puntos entre los cuales se quiere calcular la distancia y después el punto de inicio donde queremos trasladarla (dibujará una

circunferencia con centro en este último punto y radio la distancia entre los dos primeros puntos).

1. Dibuje dos segmentos cualquiera en un extremo de la pantalla.
2. Estos segmentos representan la medida de las diagonales de un paralelogramo. Construya el paralelogramo.
3. Describa su trabajo.

### **Actividad 6**

**Objetivo:** Utilizar una construcción geométrica para elaborar conjeturas, analizarlas, ponerlas a prueba y demostrarlas o desecharlas.

1. Construya un romboide ABCD (o recupere el que construyó la sesión anterior).
2. Trace la diagonal AC
3. Usando punto sobre objeto, cree P sobre AC.



4. Por P construya  $l_1 \parallel \overline{CD}$ . Llame T a la intersección de  $l_1$  con  $\overline{BC}$ .
5. Por P construya  $l_2 \parallel \overline{CB}$ . Llame Q a la intersección de  $l_2$  con  $\overline{DC}$ .
6. Usando la herramienta Polígono, forme BRPQ y TPSD y calcule el área, use "Editar las Herramientas" y en la ventana de valores de objetos ¿Qué observa?
7. Mueva el punto P, ¿Qué observa?
8. Mueva otros puntos. ¿Qué observa?
9. Describa sus observaciones y demuéstrelas.



### **Actividad 7**

**Objetivo:** Utilizar una construcción geométrica para elaborar conjeturas, analizarlas, ponerlas a prueba y demostrarlas o desecharlas.

Nuevas herramientas que utilizará: Fórmula

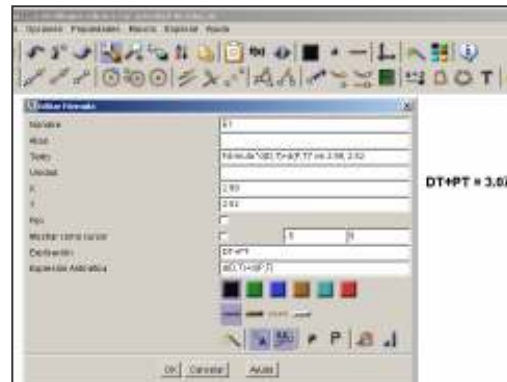
1. Construya triángulo isósceles ISO de base SO.
2. Cree punto T en la base  $\overline{SO}$ .

3. Construya perpendiculares  $\overline{TP}$  a  $\overline{IS}$  y  $\overline{TD}$  a  $\overline{IO}$
4. Calcule la suma de TP + TD. Para ello use la herramienta “Fórmula”



Esta herramienta se usa para calcular una expresión o ver el valor asociado a un objeto o realizar un cálculo.

Después de seleccionar un lugar donde aparecerá la Fórmula, aparecerá automáticamente la ventana de propiedades de la expresión. Escriba en ella la expresión deseada.



El cuadro de diálogo “Explicación” escriba pantalla un texto explicativo (En este caso DT+PT)

El cuadro “Expresión Aritmética” escriba la expresión que quiere calcular

Todos los elementos utilizados deben definirse antes de ser utilizados en una fórmula

5. Mueva T sobre  $\overline{SO}$ . ¿Qué observa?
6. Construya la altura  $\overline{OW}$ . Mida OW. ¿Qué observa?
7. Mueva T sobre  $\overline{SO}$  de manera que esté sobre S o sobre O
8. ¿Qué observa?
9. Demuestre sus conjeturas.

A continuación se presenta una tabla con la sintaxis de las fórmulas más usadas.

Tipo de elemento usado	Ejemplo	Descripción
Signos de operación +, -, *, /, ^	$3.5*3+3/(4-5^2)$	Expresión aritmética elemental. ^ significa potencia.
Nombre de objeto	AB/CD	Los nombres de segmentos, circunferencias, ángulos y polígonos se calculan por su longitud, radio, amplitud y área respectivamente. Si el nombre contiene un espacio debe ir entre comillas.
Función	sin(a)	Diferentes funciones matemáticas
Función	d(A,B)	Calcula la distancia entre los puntos denominados A y B
Pi	pi	La constante Pi.

#### Referencias

1. <http://matematicas.uis.edu.co/~marsan/geometria/RyC/> Traducción al español de Martín Acosta para la Página de R y C
2. <http://217.127.159.76/mat/spip.php?article296> Manual de R y C
3. Azinian, Herminia, Capacitación Docente para la Aplicación de Tecnologías de la Información en el Aula de Geometría, 1998.  
<http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos/a4.pdf#search=%22Azinian%2BCapacitaci%C3%B3n%22>
4. Goldenberg y Cuoco In R. Leher & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, pp. 351- 367. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
5. Grothmann, R. C.A.R Home page [http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/doc\\_en/index.html](http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/doc_en/index.html)
6. García A., Jesús, Bertrán I, Celeste. Geometría y Experiencias. Addison Wesley Longman, Mexico 1998
7. Keyton Michael 92 Geometric Explorations on the TI-92, Texas Instruments Inc., Texas, 1996
8. Noss, R. Y C. Hoyles “Windows on Mathematical Meanings. Learning Cultures and Computers”, Kluwer, 1996
9. Santaló, L., Llinares, S., Sánchez, V., Taibo, A. García-Hoz, A. La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia. Los aprendices y las matemáticas: el proceso de aprendizaje. Ediciones Rialp, S.A., Madrid 1994.
10. Tall, D. “A Versatile Theory of Visualization and Symbolisation in Mathematics” Conferencia invitada en CIEAEM, Toulouse, 1994
11. Tall, D. y B. West “Graphic Insight into Mathematical Concepts” en “The influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching” B. . Cornu y A. Ralston (Eds.), UNESCO, 1992
12. Villela, José Uno, dos, tres Geometría otra vez. Aique, Buenos Aires, 2001.

