

TALLERES

NACIONALES

Funciones y Cálculo en la TI-84 PLUS

Marco Barrales Venegas

Colegio Alemán de Concepción / Universidad San Sebastián - Chile

VIÑA DEL MAR, NOVIEMBRE DE 2006

© SOCHIEM
Edición: Noviembre de 2006
Tiraje 70 ejemplares.
Diseño Portada: Miguel Díaz F.
Preparación de originales del Autor
Diagramación: Universidad de Viña del Mar.
Editado por la Sociedad Chilena de Educación Matemática
Impresión "Lártole Editorial" Viña del Mar

XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática

COMISIÓN ACADÉMICA

María Aravena	Universidad Católica del Maule
Carlos Caamaño	Universidad Católica del Maule
Leonora Díaz	Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Miguel Díaz	Universidad de Viña del Mar
Verónica Díaz	Universidad de Los Lagos
Lorena Espinoza	Universidad de Santiago de Chile
Miguel Friz	Universidad del Bio Bio
Ismenia Guzmán	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Patricio Montero	Universidad de Santiago de Chile
Fidel Oteiza	Universidad de Santiago de Chile
Álvaro Poblete	Universidad de Los Lagos
Alonso Quiroz	Universidad Católica Silva Henríquez

XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática

COMISIÓN ORGANIZADORA

PRESIDENTE	Raimundo Olfos Ayarza	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
SECRETARIA	María Soledad Montoya G	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
PRO-SECRETARIA	Ruth Galindo Navarro	Universidad Mayor
REVISTA	Pierina Zanocco Soto	Pontificia Universidad Católica de Chile
LOGÍSTICA	Ximena Tapia Silva	Universidad Viña del Mar
TALLERES	Carlos Silva Córdova	Universidad de Playa Ancha
INVITADOS	Miguel Díaz Flores	Universidad de Viña del Mar
ACTAS	Eduvina Villagrán Campos	Universidad de la Serena
FINANZAS	Hernán Fibla Acevedo	Colegio Rubén Castro

PRESENTACIÓN

Viña del Mar, Noviembre de 2006.

Como un modo de favorecer el desarrollo de la profesionalización docente desde el análisis de estrategias e innovaciones en el aula, se presenta la realización de talleres. Éstos son cursillos prácticos dirigidos por un especialista en la que los participantes desarrollan propuestas didácticas, actividades de aula y recursos didácticos, entre otros.

Para tal objetivo, en esta ocasión, se presentan diez talleres, tres de ellos propuestos por expertos de Francia, España y Argentina y otros siete por especialistas nacionales provenientes de Valdivia, Concepción, San Felipe, Viña del Mar y Región Metropolitana, con una oferta variada que invitan a debatir en torno a una actividad de exploración y construcción en geometría, con o sin uso de recursos tecnológicos, estrategias de cálculo, actividades de aprendizaje de funciones y el estudio de la situación del alumno al término del proceso educativo, aprendiendo en forma autónoma a lo largo de la vida.

La Sociedad Chilena de Educación Matemática agradece a los autores de los talleres que en estas XIII Jornadas nacionales aportarán con su experiencia a la concreción de una matemática para la vida y al gusto por esta actividad, condiciones del quehacer en el aula, para su real contribución al desarrollo humano e integral de la nación.

Introducción:

A pesar de que en un principio, bastantes profesores de matemática fueron reacios a la utilización de la calculadora en la clase, en estos momentos es ya una herramienta práctica aceptada por la casi totalidad de los mismos. Así, algunos temas concretos, como pueden ser la utilización de las tablas de logaritmos o las tablas trigonométricas, que requerían una gran cantidad de tiempo en clase, para un trabajo puramente mecánico, han encontrado en la calculadora científica una herramienta de trabajo que permite emplear el tiempo dedicado a la enseñanza del manejo de tablas, en encontrar estrategias y métodos de resolución de la actividad correspondiente y a la interpretación de los resultados obtenidos.

Actualmente, la aparición de las calculadoras gráficas, dan otro paso hacia delante y de nuevo nos hacen replantearnos el papel del profesor en la clase de matemáticas y a su vez, hacen que el tiempo dedicado a las tareas puramente mecánicas (obtención de tablas de valores de una función dada, por sencilla que sea; cálculo de límites en el infinito, cálculo de derivadas, problemas de optimización, etc.), sea menor y menos importante que lo ha sido hasta ahora.

Objetivo:

El presente taller tiene por finalidad analizar, de manera práctica y con la ayuda del entorno gráfico de la TI-84 Plus algunas actividades de aprendizaje de las funciones y el uso del cálculo para resolver situaciones problemáticas.

Según las investigaciones de Janvier C. (1978), el concepto de función se materializa a través de cuatro representaciones distintas que, idealmente, contienen la misma información y que, sin embargo, ponen de manifiesto aspectos y propiedades de las funciones no necesariamente idénticos.

Considerando la idea de función como expresión de una dependencia entre variables, las cuatro representaciones que señala Janvier son:

Gráfica: tiene relación esencialmente con potencialidades conceptualizadoras de la visualización y por tanto con el mundo de las formas en la geometría y la topología.

Tabular: pone de manifiesto los aspectos cuantitativos o numéricos.

Analítica: es la codificación simbólica que nos permite trabajar en álgebra.

Verbal: de carácter cualitativo, la más próxima a las destrezas más básicas. Pero, desde otro punto de vista, la más compleja ya que articula todas las demás y actúa con ellas como clave interpretativa o piedra angular que las sostiene y da sentido.

Las calculadoras gráficas, en esta forma de ver el aprendizaje de las funciones, ayudan a los estudiantes en la comprensión de estas formas de representación y facilita el paso de unas a otras, es decir, **traducir es entender**.

Las cuatro posibles representaciones de las funciones se valen de códigos diferentes para transcribir la relación existente entre dos variables causalmente dependientes. Janvier asocia el aprendizaje de las funciones al desarrollo de la capacidad, la habilidad y la destreza de recodificar la información de unas representaciones funcionales a otras.

La ayuda que las calculadoras gráficas proporcionan puede ser de varios tipos:

- Realizar exploraciones previas para comprender mejor el problema.
- Confirmar y comprobar estudios o conjeturas previas.
- Alcanzar soluciones intuitivas o de las que no estamos plenamente convencidos.
- Conocer nuevos métodos que complementen a otros ya conocidos o disponer de métodos alternativos cuando los tradicionales no están a nuestro alcance.
- Adquirir más experiencia por la posibilidad de estudiar mayor cantidad de casos prácticos.

Descripción:

Este taller tiene un carácter, principalmente, activo-participativo por parte de los asistentes. En él se desarrollarán y analizarán con espíritu crítico una serie de actividades de aprendizajes, orientadas al trabajo por parte de los estudiantes en forma individual o en compañía con el apoyo del docente, cuyo desarrollo potencia el logro de aprendizajes y el desarrollo de las capacidades establecidas en los programas de la asignatura de matemática por parte de sus alumnos.

Actividades:

Se realizarán actividades en los siguientes temas:

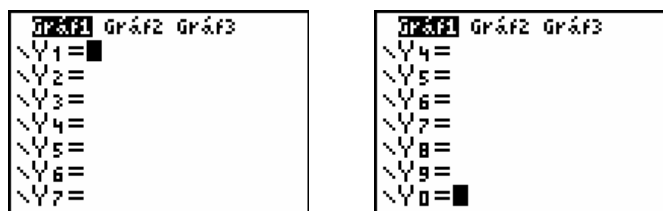
1. **Resolución de ecuaciones** utilizaremos métodos gráficos para la resolución de ecuaciones y veremos la forma en que cambia la perspectiva del trabajo de la clase.
2. **Estudio de familias de funciones** se dedica al estudio de los cambios que producimos en la gráfica cuando variamos los parámetros de una función. Estudiaremos rectas, parábolas, funciones racionales y trigonométricas.
3. **Estudio de las propiedades de una función** se hace un recorrido por los distintos tópicos de la representación gráfica de funciones y la mejor forma de sacar provecho a la calculadora gráfica en su tratamiento, prestando especial atención a las relaciones entre los conceptos involucrados (Límite, continuidad, derivada e integral).
4. **Funciones definidas a trozos** realizaremos un estudio de aquellas situaciones en las que no se puede utilizar el “=” al plantear una expresión que represente el enunciado o la función resultante no tiene la misma expresión algebraica en todo su dominio.
5. **Problemas de optimización de funciones** analiza varias situaciones clásicas de optimización y su tratamiento desde un punto de vista numérico, gráfico y analítico.

Actividades:**(1) Cómo representar funciones con la calculadora TI-84 Plus Silver Edition**

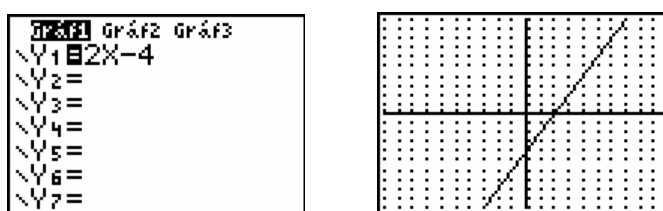
Encendida la calculadora con la tecla ON, se presenta la pantalla principal y si algo quedó escrito de un trabajo anterior, se podrá borrar con la tecla [CLEAR] y si es necesario borrar un carácter hay que pulsar [DEL], después de situarse sobre él.

Para representar funciones se utilizarán, fundamentalmente las siguientes teclas: las cinco teclas superiores, fuera del teclado general, con los rótulos: [Y=], [WINDOW], [ZOOM], [TRACE] y [GRAPH]; las cuatro teclas dispuestas en círculo y que con las flechas indican las distintas direcciones en las que se puede mover el cursor; la tecla que lleva impresas las letras [X, □, □, y n]; las teclas numéricas y las que indican las distintas operaciones.

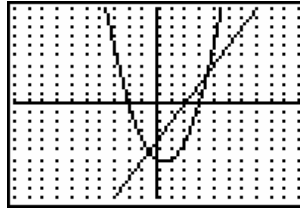
La primera de las teclas superiores, rotulada como [Y=], permite acceder a un menú de 10 funciones: $y_1, y_2, \dots, y_9, y_0$:



Se puede escribir la primera función: $y_1 = 2x - 4$, mediante las teclas: 2,x,-,4 y pulsando la tecla GRAPH, se obtiene la gráfica de la función, después de que en la parte superior de la pantalla se vea un pequeño segmento dotado de movimiento.



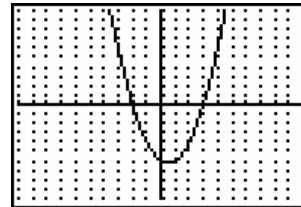
Si se vuelve a pulsar [Y=], se puede escribir $y_2 = x^2 - x - 6$, desplazándose hasta y_2 y teniendo en cuenta que el cuadrado viene representado por ^2 y mediante [GRAPH]:



Aparecen representadas ambas funciones, pues la función y_1 seguía seleccionada por estar sobreimpresionado en negro el signo igual; si sólo se desea la gráfica de y_2 , volviendo sobre el signo = de y_1 se pulsaría ENTER y se volvería a representar.

```

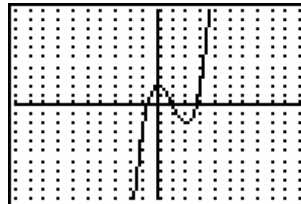
Gráf2 Gráf3
Y1=2X-4
Y2=X^2-X-6
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
  
```



Las siguientes funciones son escritas en [Y=], seleccionadas y luego representadas:

```

Gráf2 Gráf3
Y1=2X-4
Y2=X^2-X-6
Y3=X^3-3X^2+2
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
  
```



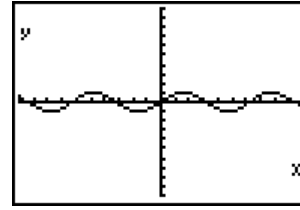
```

Gráf2 Gráf3
Y1=2X-4
Y2=X^2-X-6
Y3=X^3-3X^2+2
Y4=3/X
Y5=
Y6=
Y7=
  
```



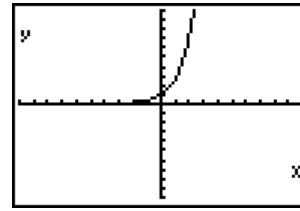
```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=2X-4
\Y2=X^2-X-6
\Y3=X^3-3X^2+2
\Y4=3/X
\Y5=sin(X)
\Y6=
\Y7=
    
```



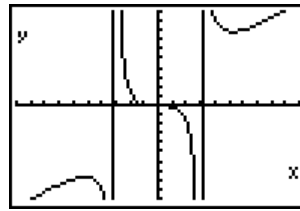
```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=2X-4
\Y2=X^2-X-6
\Y3=X^3-3X^2+2
\Y4=3/X
\Y5=sin(X)
\Y6=e^X
\Y7=
    
```



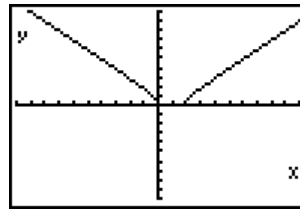
```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y2=X^2-X-6
\Y3=X^3-3X^2+2
\Y4=3/X
\Y5=sin(X)
\Y6=e^X
\Y7=(X^3+1)/(X^2-9)
    
```



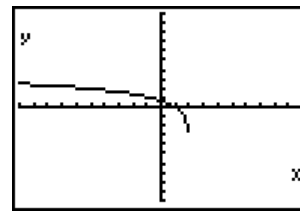
```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y4=3/X
\Y5=sin(X)
\Y6=e^X
\Y7=(X^3+1)/(X^2-9)
\Y8=sqrt(X^2-2X)
\Y9=
    
```



```

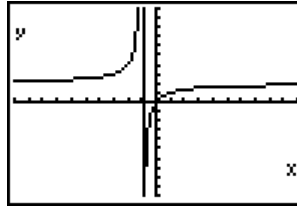
Plot1 Plot2 Plot3
\Y4=3/X
\Y5=sin(X)
\Y6=e^X
\Y7=(X^3+1)/(X^2-9)
\Y8=sqrt(X^2-2X)
\Y9=ln(2-X)
    
```



```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y5=sin(X)
\Y6=e^(X)
\Y7=(X^3+1)/(X^2
-9)
\Y8=sqrt(X^2-2X)
\Y9=ln(2-X)
\Y0=2X/(X+1)

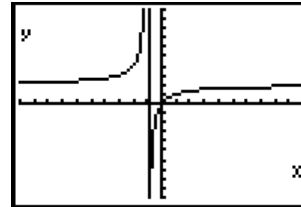
```



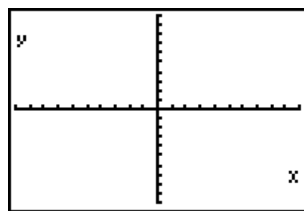
```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y5=sin(X)
\Y6=e^(X)
\Y7=(X^3+1)/(X^2
-9)
\Y8=sqrt(X^2-2X)
\Y9=ln(2-X)
\Y0=2X/(X+1)

```



Cada función aparece escrita en la columna de la izquierda y su correspondiente representación gráfica a la derecha. Para escribir nuevas funciones habrá que ir borrando las escritas, puesto que es 10 el máximo de funciones que pueden figurar simultáneamente. Al representar algunas funciones puede ocurrir que la gráfica no aparezca, debido a la amplitud de los ejes; por ejemplo, si representamos la función $y = 12 + x^2$:



```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=12+X^2
\Y2=X^2-X-6
\Y3=X^3-3X^2+2
\Y4=3/X
\Y5=sin(X)
\Y6=e^(X)
\Y7=(X^3+1)/(X^2
-9)

```

Aparentemente la función no ha sido representada, pero lo que ha ocurrido es que la gráfica está fuera de la pantalla y para arreglarlo habrá que cambiar los intervalos de representación. Presionando la tecla [WINDOW], aparece

```

WINDOW
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-5
Ymax=18
Yscl=1
Xres=1

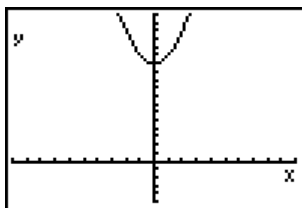
```

```

WINDOW
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=1
Xres=1

```

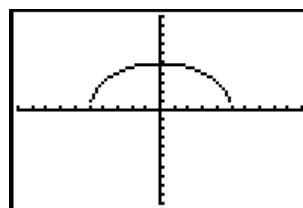
y la segunda pantalla es el resultado de cambiar los valores: Ymin=-10 por -5; Ymax=10 por 18 y que al representar la función quedaría:



Para representar una semicircunferencia: $y = \sqrt{25 - x^2}$

```

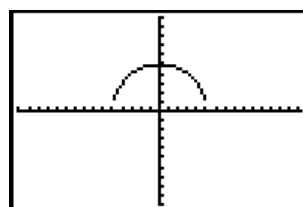
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=2+X^2
\Y2=√(25-X^2)
\Y3=X^3-3X^2+2
\Y4=3/X
\Y5=sin(X)
\Y6=e^(X)
\Y7=(X^3+1)/(X^2)
    
```



Se observa que la representación no es una semicircunferencia, por tener distintas unidades en los ejes y para establecer igual unidad, se selecciona [ZOOM] 5:ZCuadrado [ENTER]

```

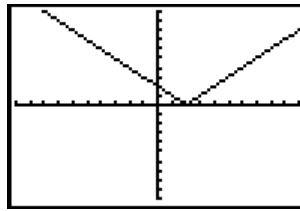
MEMORY
1:ZBox
2:Zoom In
3:Zoom Out
4:ZDecimal
5:ZSquare
6:ZStandard
7:ZTrig
    
```



Funciones con valores absolutos.- Pulsando la tecla [2nd] CATALOG [0] se accede a un conjunto de funciones, la primera de las cuales es abs(que seleccionada y pulsando ENTER aparecerá escrita en la función y_3 y se completa ésta:

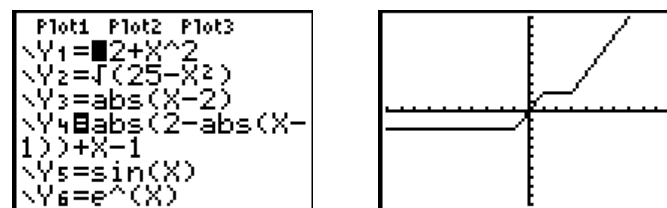
<pre> Plot1 Plot2 Plot3 Y1=12+X^2 Y2=√(25-X^2) Y3=abs(X-2) Y4=3/X Y5=sin(X) Y6=e^(X) Y7=(X^3+1)/X^2 </pre>	<pre> CATALOG abs(and angle(ANOVA(Ans augment(AxesOff </pre>
--	--

Y su representación gráfica, después de cambiar Zoom-5 a Zoom-6(ZEstándar)

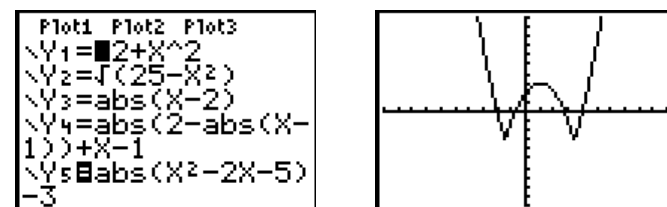


Otras funciones representadas con uno o más valores absolutos, quedarían:

$$y = |2 - |x - 1|| + x - 1$$



$$y = |x^2 - 2x - 5| - 3$$

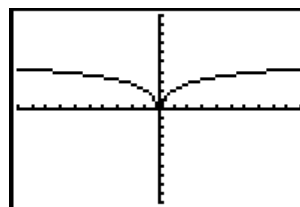


$$y = \ln|x| + 2$$

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y3=abs(X-2)
\Y4=abs(2-abs(X-
1))+X-1
\Y5=abs(X^2-2X-5)
-3
\Y6=ln(abs(X))+2

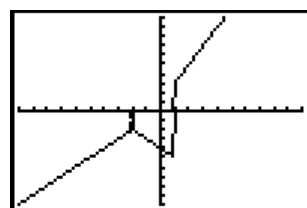
```



La representación gráfica de funciones definidas por intervalos

$$\text{como: } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -2 \\ -x - 4 & \text{si } -2 < x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

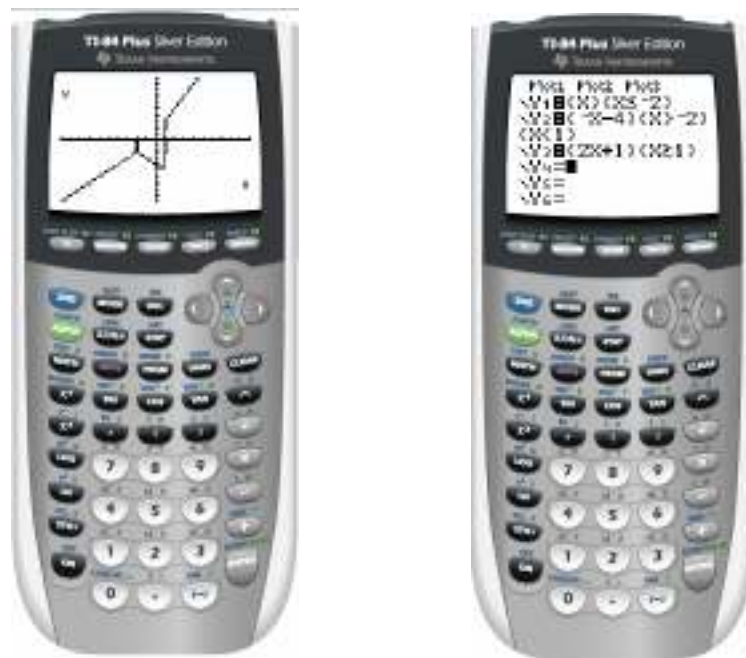
se escribiría en la TI-84 Plus mediante 3 funciones, separadas de sus respectivos dominios:



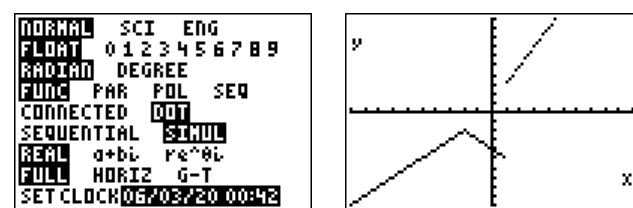
```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y6=ln(abs(X))+2
\Y7=(X)(X≤-2)
\Y8=(-X-4)(X>-2)
(X<1)
\Y9=(2X+1)(X≥1)
\Y0=2X/(X+1)

```

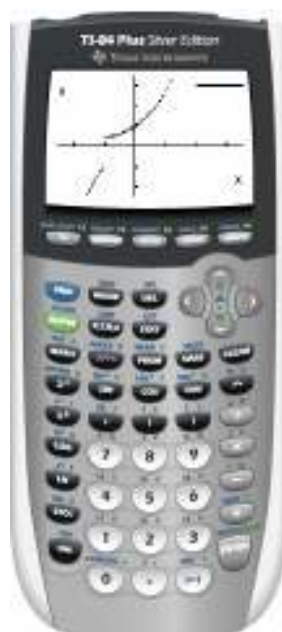
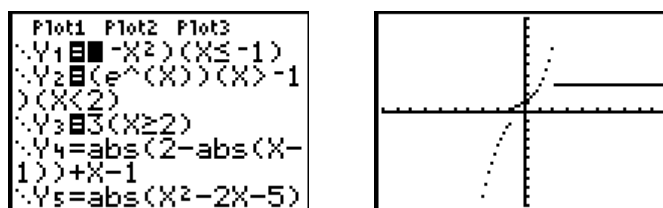


La representación gráfica obtenida ha conectado una función con otra, esto se evita pulsando la tecla [MODE] y cambiando la opción CONNECTED por DOT



La función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ e^x & \text{si } -1 < x < 2 \\ 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



(2) Calculadoras Gráficas: Un Reto Para Resolver Ecuaciones

Uno de los problemas más antiguos del álgebra no lineal es el de hallar las raíces de una ecuación o de un sistema de ecuaciones no lineales. La innumerable lista de métodos disponibles nos hace imaginar la importancia que este problema ha tenido a lo largo de la historia.

Ahora, con la calculadora gráfica, vamos a repasar parte de estos métodos que aparentan haber sido creados para llevarlos a la práctica con una calculadora gráfica o un computador.

El problema es resolver la ecuación: $\cos(x) - x = 0$

Desde luego que muchos alumnos no podrían resolver esta ecuación no lineal, sin embargo tienen herramientas para resolver el problema.

El análisis matemático que estos alumnos estudian, les proporciona herramientas para asegurar la existencia de un cero en el intervalo $[0,2]$ e incluso su unicidad. Efectivamente,

si estudiamos los signos de la función $f(x) = \cos(x) - x$ en los extremos del intervalo $[0,2]$ tenemos: $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$ y $f(2) = \cos(2) - 2 < 0$

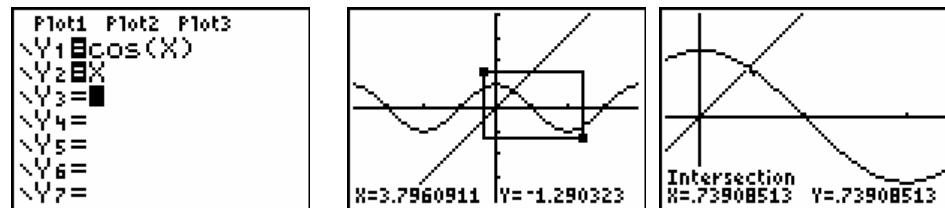
Además la función $f(x) = \cos(x) - x$ es continua por ser diferencia de dos funciones continuas. Por lo tanto gracias al Teorema de Bolzano podemos asegurar la existencia de al menos un cero.

Método 1: Gráfico – Como intersección de dos gráficas

- Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \cos(x)$
- Dibujar la gráfica de la función $f(x) = x$
- Hallar el punto de intersección de las dos gráficas.

Para ver mejor la intersección de las gráficas hacer un ZOOM de caja (Zbox) y en el menú de CALCULATE (2nd TRACE) 5:intersect .

Después de unos segundos en la parte inferior de la pantalla nos aparece la palabra Intersection y debajo las coordenadas del punto $x = 0.73908513$ e $y = 0.73908513$.



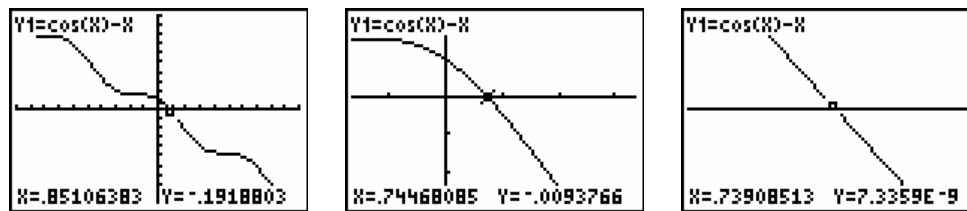
Método 2: Gráfico con el eje OX

- Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \cos(x) - x$
- Hallar el punto de corte con el eje OX

Solución: Introducimos la función $Y_1 = \cos(x) - x$ aprovechando lo escrito.

Borramos la segunda función. Nos colocamos sobre el trazo de la gráfica. Pulsamos los cursos hasta situarnos sobre el punto donde cambia de signo la función y su coordenada "y" sea más pequeña.

Realizamos un ZOOM In y después del [TRACE] nos movemos con los cursores hasta encontrar el punto donde la "y" cambia de signo. Repetimos el mismo proceso para obtener una mejor aproximación. [ZOOM] [2] [ENTER] [TRACE].



Método 3: TABLA

a) Utilizando la función TABLE de la calculadora

Obtendremos valores de la función $Y_1 = \cos(x) - x$ tomando como punto de partida $x = 0.7$ y como incremento de $x \Delta x = 0.01$

Con [2nd][WINDOW] (TBLSET) ingresamos a la ventana de Configuración Tabla y realizamos la modificaciones. Con [2nd][GRAPH] (TABLE) obtenemos los valores de la función. Pulsamos los cursores hasta situarnos sobre el punto donde cambia de signo la ordenada.

La función cambia de signo entre los valores de $x = 0.73$ y $x = 0.74$ por tanto el teorema de Bolzano nos asegura la existencia de un cero en ese intervalo.

TABLE SETUP	
TblStart=.7	
ΔTbl=.01	
Indent: Auto Ask	
Depend: Auto Ask	

X	Y1
.7	.06404
.71	.04836
.72	.03181
.73	.01517
.74	-.0015
.75	-.0183
.76	-.0352

X=.73

Volvemos a cambiar el punto de partida u el incremento de x .

[2nd][WINDOW] (TBLSET) 0.73 [ENTER] $x = 0.739$ [2nd][GRAPH] (TABLE)... y continuamos.

TABLE SETUP	
TblStart=.7390...	
ΔTbl=.00000001	
Indent: Auto Ask	
Depend: Auto Ask	

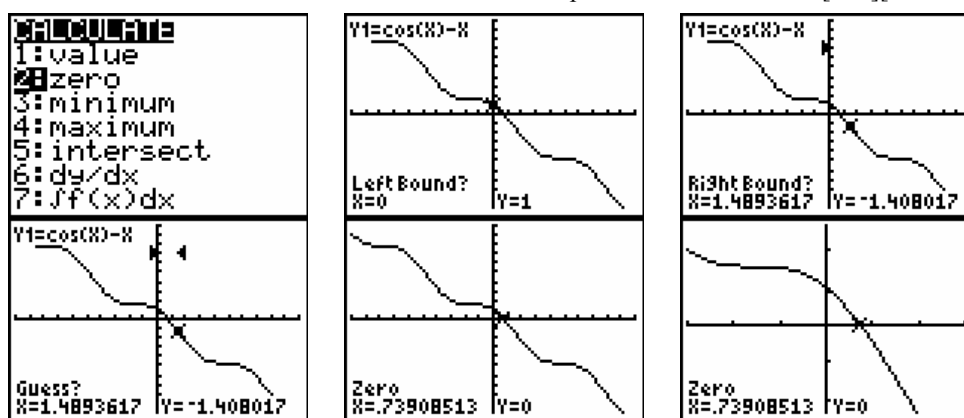
X	Y1
.73909	5.6E-8
.73909	3.9E-8
.73909	2.2E-8
.73909	5.4E-9
.73909	-1E-9
.73909	-3E-9
.73909	-4E-9

X=.73908513

Método 4: CÁLCULO DE LA RAÍZ

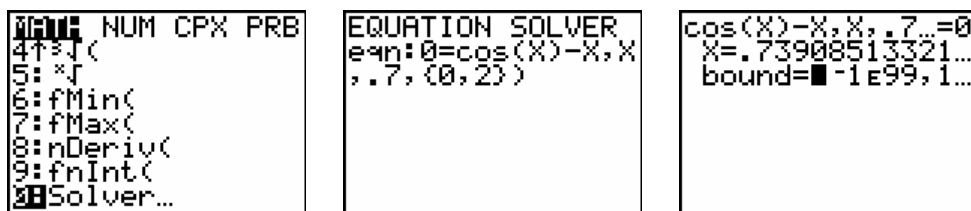
a) Utilizando la función ZERO de la calculadora

Calculamos el cero de la función mediante la opción ZERO de CALC [2nd][TRACE]



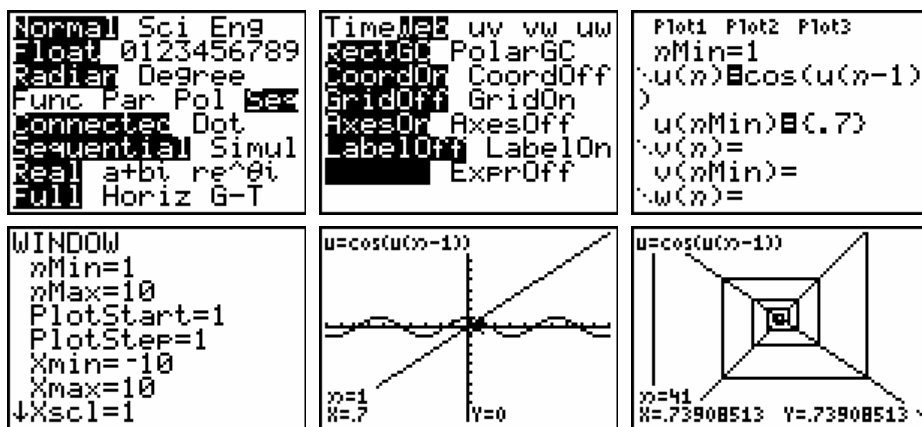
Método 5: CÁLCULO DE LA SOLUCIÓN

- a) Utilizando la función Solver... de la calculadora [MATH] [0:Solver...]
 Su sintaxis es: eqn:0=(expresión, variable, valor inicial, {inferior, superior})



Método 6: MÉTODO DE LA CONVERGENCIA

- a) Método convergencia de la iteración del punto fijo mediante sucesiones
 Veremos como podemos representar gráficamente la sucesión que representa las aproximaciones del método de Iteración del punto fijo.
 Elegimos [ZOOM] 6:Zstandard para ponernos en una situación inicial. Elegimos la opción Seq de [MODE]. En [2nd][ZOOM] elegimos la opción Web.
 Web calcula U_n y V_n como funciones de U_{n-1} y V_{n-1} . Representa U_{n-1} y V_{n-1} (variables independientes) en el eje horizontal y U_n y V_n (variables dependientes) en el eje vertical, representando también la línea $Y = x$



También se dibujan las líneas que unen los valores de la sucesión, pero con este ZOOM no logramos apreciarlo. Para solucionarlo hacemos varios ZOOM in (2: Zoom in) hasta conseguir una aproximación que nos permita ver la convergencia de la sucesión. Como la convergencia por este método es un poco lenta, necesitamos 41 iteraciones para llegar al número $x = 0.73908513$.

Método 7: MÉTODO DE NEWTON

Usaremos el método de Newton que obtiene sucesivas aproximaciones mediante la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Volvemos al modo de función [MODE] Func y [2nd] [MODE] (QUIT) para llegar a la pantalla de edición.

Introducimos en x el punto de partida $0.7 \rightarrow x$ [.] [7] [STO \rightarrow] [X,T, θ ,n] [ENTER]

Ahora introducimos la fórmula de Newton con la siguiente secuencia:

[X,T, θ ,n] [-] [VARS] \rightarrow Y-VARS 1:Function.. [ENTER] 1:Y₁ [÷] [MATH] 8 \downarrow nDeriv([ENTER] [VARS] \rightarrow Y-VARS 1:Function.. [ENTER] 1:Y₁ [,][X,T, θ ,n][,] [X,T, θ ,n][] [ENTER] [STO \rightarrow] [X,T, θ ,n] ($X - Y_1 / nDeriv(Y_1, X, X) \rightarrow X$)

La ventaja ahora es que con cada pulsación de la tecla [ENTER] obtenemos sucesivas aproximaciones.

Evidentemente el método de Newton es mucho más rápido que el de Convergencia, ya que en la 3^a iteración ha alcanzado la aproximación máxima en este caso.

Conclusiones

Quizás pueden parecer excesivos todos los métodos o variantes planteados, pero cada uno nos ha mostrado algo nuevo sobre las posibilidades de la calculadora o nos permitirá comparar la rapidez de convergencia de cada método o nos hará reflexionar sobre la componente gráfica de nuestro problema.

Pero lo que sí que es cierto es que con estas calculadoras, los métodos gráficos que estaban casi desechados por su falta de precisión o por la dificultad que entrañaban su realización de una forma correcta, vuelven a cobrar protagonismo, aún más por que su ejecución conlleva una mejor comprensión de las percusiones gráficas que el problema tiene, es decir se ve claramente que un cero de una función es la intersección de la gráfica con el eje OX, o que una ecuación no es más que la búsqueda de la intersección de dos funciones.

Es evidente que las calculadoras nos han liberado de la realización de innumerables cálculos mecánicos, los cuales nos distraen de la mejor comprensión del problema y nos

ha permitido centrarnos en los aspectos teóricos que son fundamentales para la resolución y entendimiento de la naturaleza del ejercicio.

Nos gustaría terminar con una frase que nos permita reflexionar sobre lo expuesto:
“No usemos la matemática para apoyarnos, como lo hacen los borrachos con las farolas, sino más bien para iluminarnos”

No estaría mal en nuestro caso cambiar la palabra matemática por el de calculadora gráfica.

Nota: Extraído del artículo “Calculadoras Gráficas: Un Reto para Resolver Ecuaciones”, de Francisco González Martínez y Floreal Gracia Alcaine.

(3) ESTUDIO DE FAMILIAS DE FUNCIONES

En este apartado vamos a analizar el comportamiento de algunas de las funciones más usuales en la educación secundaria: las polinómicas, las racionales y las trigonométricas. En todas ellas es muy importante que los estudiantes sean capaces de relacionar la expresión analítica con la forma de la gráfica, sabiendo explicar la relación existente entre los parámetros de la fórmula y su efecto gráfico al ser representadas.

Al utilizar la calculadora gráfica TI-84 Plus en este trabajo, la identificación entre los parámetros y la gráfica puede desarrollarse en toda su amplitud, ya que el dinamismo que se puede imprimir a la edición de la función así lo permite.

La actividad del estudiante se convierte en una potente investigación en la que a partir de la función más elemental del modelo, podemos obtener otras más complejas por medio de traslaciones (horizontales o verticales) y por dilataciones (estrechamientos o ensanchamientos horizontales o verticales).

Las traslaciones respecto de la gráfica de la función $y = f(x)$ se ponen inmediatamente de manifiesto desde las primeras representaciones funcionales, respondiendo a las gráficas de las funciones $y = f(x + a)$ e $y = a + f(x)$.

Las dilataciones se apreciarán con mayor claridad en el estudio de las funciones trigonométricas, asociando sin mucha dificultad la homotecia (dilatación vertical) a la función $y = a \cdot f(x)$ y la dilatación horizontal a: $y = f(a \cdot x)$.

Al estudiar las funciones lineal y cuadrática veremos además la relación entre los ceros de la función y los cortes con el eje de abscisas. También en las funciones racionales, por medio del estudio de límites, podremos analizar las asíntotas horizontales o verticales.

El trabajo en clase debe fomentar el carácter investigador, por lo que la propuesta que podemos hacer a los alumnos es del tipo: *Analiza qué cambios producen los parámetros a y*

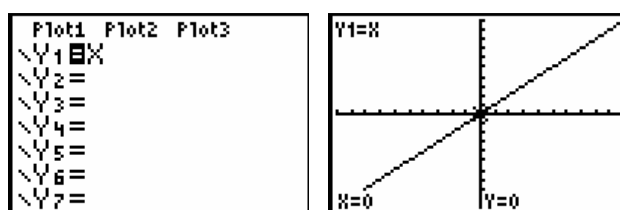
b en las funciones $y = ax + b$ (Idénticamente para funciones cuadráticas, racionales o trigonométricas).

Funciones polinómicas

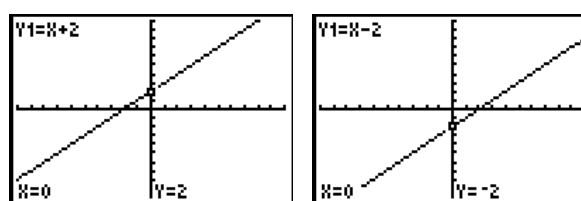
Funciones lineales

Estudiaremos el efecto de los parámetros a y b en la función lineal $y = ax + b$, para lo que comenzaremos representando la función $y = x$ con objeto de apreciar que en la ventana estándar de representación ($-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$), la gráfica tiene un aspecto diferente del usual debido a la forma rectangular de la pantalla de la calculadora. Las escalas son diferentes en ambos ejes y, por lo tanto, la gráfica aparece con menor inclinación respecto al eje de abscisas, de lo que ocurriría en una pantalla cuadrada (podríamos modificarla a un ajuste cuadrado seleccionando la opción **ZCuadrado** del menú [ZOOM]).

Editamos la función $Y_1=X$

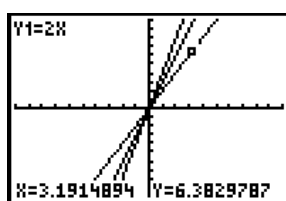


Representamos ahora $Y_1=X+2$, $Y_1=X-2$



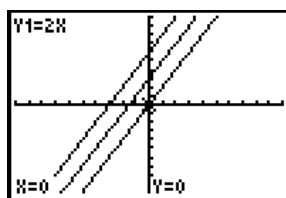
Se aprecia un desplazamiento de dos unidades, hacia arriba o hacia abajo, aunque también podemos verlo como un desplazamiento de dos unidades, hacia la derecha o la izquierda, siendo los cortes con el eje de ordenadas en los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$ respectivamente. En realidad se trata de una traslación vertical u horizontal de dos unidades respecto de $y = x$.

Vamos a representar $y = 2x$, $y = 3x$, $y = 4x$ simultáneamente:



Como se ve en el gráfico, el cursor está recorriendo la primera función $y = 2x$. Siendo ésta la de menor inclinación (pendiente) de las tres.

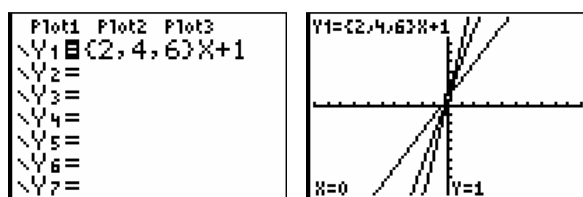
Representamos ahora $y = 2x + 3$ y $y = 2x + 6$ comparándolas con $y = 2x$:



Se aprecia que $y = 2x + 3$ es una traslación vertical de tres unidades, y que $y = 2x + 6$ es una traslación horizontal de 3 unidades. Sin embargo, en ambos casos, también podría considerarse al contrario, la primera una traslación horizontal de 1,5 unidades y la segunda una traslación vertical de 6 unidades.

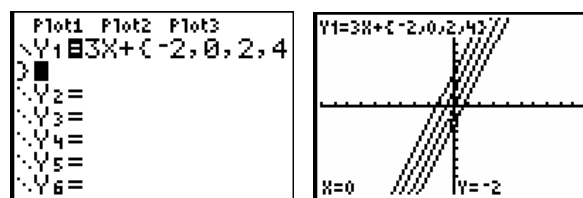
Con la función lineal siempre se dará esta dualidad de interpretación correspondiente a las funciones $y = f(x + a)$ e $y = f(x) + a$. La traslación vertical es, no obstante, más sencilla de interpretar. Además, es necesario tener en cuenta que el objetivo del estudio de funciones lineales es la asociación del coeficiente de ax con la inclinación de la recta (la pendiente), y el parámetro b con el punto en el que corta la recta al eje de ordenadas (ordenada en el origen).

Estos conceptos de pendiente y ordenada en el origen suelen quedar claros por medio de los ejemplos anteriores, aunque, si es necesario, podemos utilizar la edición de funciones con listas, con lo que las funciones se representan simultáneamente para los diferentes valores de las listas. Lo podemos ver introduciendo en la edición de la función Y_1 la lista $\{2,4,6\}$, como coeficiente del término de primer grado para un valor fijo del término independiente:



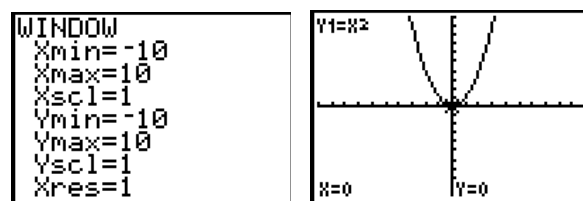
Con ello se aprecia claramente que la ordenada en el origen es la misma para las tres rectas, teniendo mayor pendiente la de mayor coeficiente, 6 en nuestro caso.

Editamos ahora una lista de cuatro elementos para el término independiente:



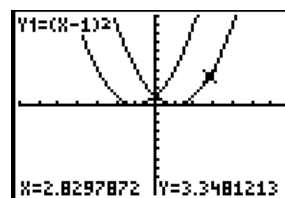
Funciones cuadráticas

Comenzaremos por $y = x^2$ representándola en la ventana estándar para, posteriormente, analizar los cambios de los parámetros a, b, c en la familia funcional $y = a(x - b)^2 + c$

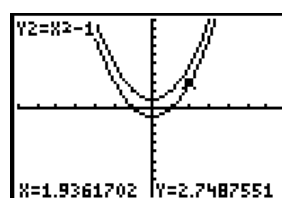


Representamos $y = (x - 1)^2$ e $y = (x + 1)^2$:

Se aprecian traslaciones horizontales de dos unidades.

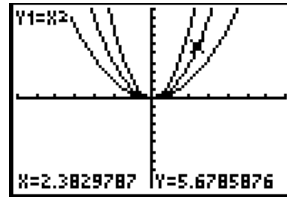


En $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 1$:



Podemos ver una traslación vertical de una unidad, dependiendo del signo del término independiente, respecto de la gráfica original $y = x^2$.

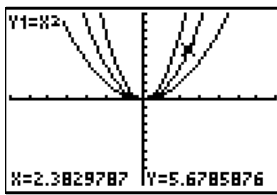
Si comparamos ahora $y = x^2$ con $y = 2x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$ observamos, por la posición del cursor en $y = x^2$, que la transformación sufrida es una mayor apertura de las ramas de la parábola en $y = \frac{1}{2}x^2$ y más



cerrada (crece más rápidamente) en $y = 2x^2$. Podemos llamar dilatación vertical de factor 2 a esta última.

En ambos casos hemos considerado las funciones como la homotecia $y = af(x)$, en el primer caso para $a = 2$ y en el segundo para $a = \frac{1}{2}$. También podríamos tomar casos particulares de $y = f(ax)$ para $a = \sqrt{2}$ y $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y, por lo tanto, analizarlos como dilataciones horizontales.

Si en vez de un coeficiente positivo introducimos uno negativo tendremos que la función $y = -2x^2$ será la simétrica respecto al eje de abscisas de $y = 2x^2$.



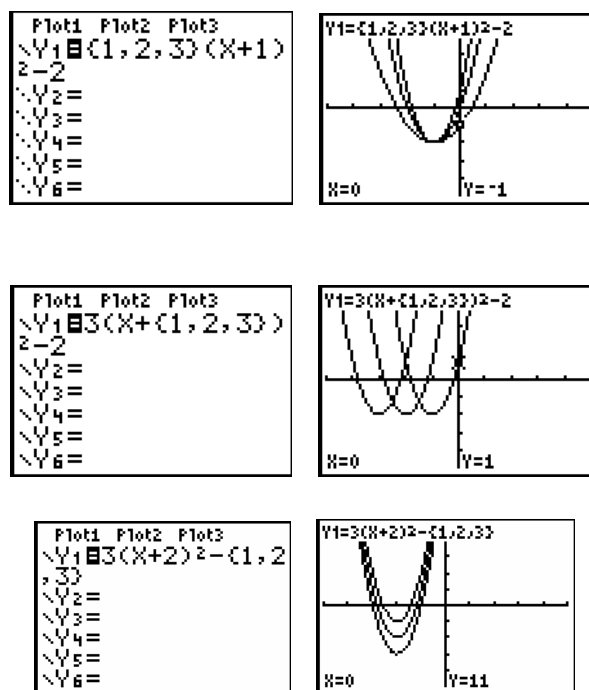
Un elemento que se puede estudiar al representar $y = x^2 + 1$ es que la gráfica no corta al eje de abscisas, que $y = (x - 1)^2$ corta una sola vez al eje de abscisas y que $y = x^2 - 1$ corta en dos puntos (en $x = 1 \wedge x = -1$). Ésta es una buena oportunidad para revisar la relación de los cortes con los ejes con las soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ninguna solución real	Una solución doble $x = x_1$	Dos soluciones $x = x_1$ y $x = x_2$
Ningún corte con el eje de abscisas	Un único punto de corte en el punto de abscisa x_1	Dos puntos de corte en esos mismos puntos x_1 y x_2

El estudio de las funciones cuadráticas también se podría haber planteado desde el análisis de las variaciones que generan los parámetros a, b, c de la familia funcional $y = ax^2 + bx + c$. Es ésta una buena oportunidad para que, por medios algebraicos, se compruebe la relación entre los dos enfoques, demostrando que es posible establecer la relación $ax^2 + bx + c = a(x - b)^2 + c$.

Al igual que hicimos para las funciones polinómicas de primer grado, también podemos introducir listas en la expresión analítica de las funciones de segundo grado para ver simultáneamente los cambios que se producen en las gráficas. Primero introduciremos una lista en el lugar de a , después de b y por último de c .

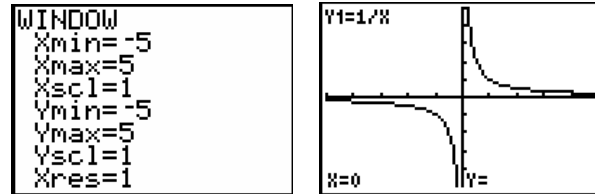


Funciones racionales $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Comenzaremos por la función racional más sencilla, la hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x}$, para analizar las siguientes transformaciones:

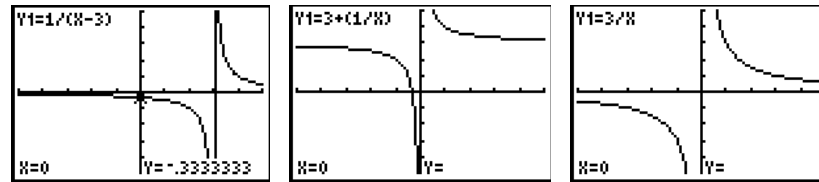
$y = f(x)$	$y = f(x + a)$	$y = a + f(x)$	$y = af(x)$	$y = f(ax)$
$y = \frac{1}{x}$	$y = \frac{1}{(x - 3)}$	$y = 3 + \frac{1}{x}$	$y = \frac{3}{x}$	$y = \frac{1}{3x}$

La representación de $y = \frac{1}{x}$ es:



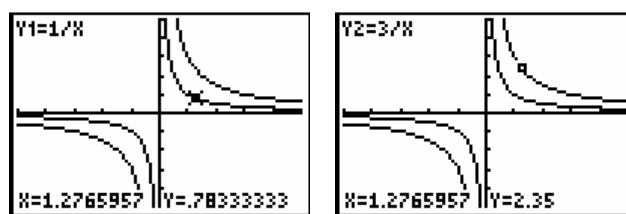
Veamos a la vez la representación de las gráficas de $y = f(x - 3) = \frac{1}{(x - 3)}$,

$y = 3 + f(x) = 3 + \frac{1}{x}$ e $y = 3 \cdot f(x) = \frac{3}{x}$ para poder reafirmar lo visto en las funciones polinómicas de primero y segundo grado. ¿Se tratará de una traslación horizontal, vertical y una dilatación vertical respectivamente?



La respuesta es totalmente clara en los dos primeros casos de traslación horizontal o vertical. La última transformación exige una representación conjunta de las dos funciones, la original

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \text{ y } y = 3 \cdot f(x) = \frac{3}{x}$$



Ahora sí que apreciamos la dilatación vertical (se trata de una homotecia de razón 3).

Veamos ahora que en el último caso $y = f(ax)$ (con el ejemplo de $y = \frac{1}{3x}$) se trata de una dilatación horizontal:



Podemos, además, analizar brevemente las modificaciones que sufren las asíntotas en los cuatro tipos de funciones estudiadas. La traslación horizontal traslada la asíntota vertical y mantiene la asíntota horizontal. La traslación vertical traslada la asíntota horizontal y mantiene la vertical. Los dos tipos de dilataciones no cambian las asíntotas.

Haremos ahora el mismo estudio para una función racional con polinomios de primer grado en numerador y denominador, por ejemplo $y = \frac{x}{(x+1)}$

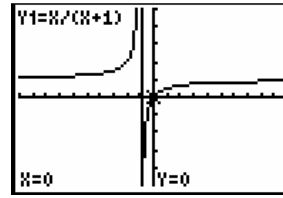
$y = f(x)$	$y = f(x + a)$	$y = a + f(x)$	$y = af(x)$	$y = f(ax)$
$y = \frac{x}{(x+1)}$	$y = \frac{(x + 3)}{(x - 4)}$	$y = 3 + \frac{x}{(x+1)}$	$y = \frac{3x}{(x+1)}$	$y = \frac{3x}{(3x+1)}$

Esta función presenta como diferencias fundamentales

respecto de $y = \frac{1}{x}$ el hecho de presentar el salto en

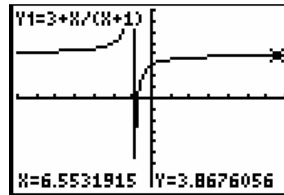
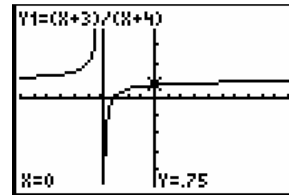
$x = -1$, al igual que $y = \frac{1}{(x+1)}$ y, sobre todo, que

cuando la función toma valores muy grandes tanto positivos como negativos, es decir, cuando $x \rightarrow \pm\infty$, la función tiende a uno (y no a cero como le ocurría a las anteriores funciones). Por lo tanto su asíntota horizontal es la recta $y = 1$.



Representaremos las dos funciones generadas por traslación respecto de ella,

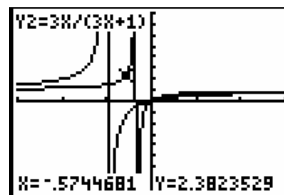
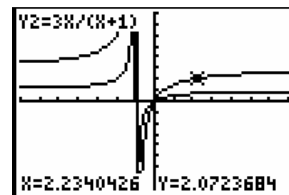
$$f(x+3) = \frac{(x+3)}{(x+4)} \text{ y } 3 + f(x) = 3 + \frac{x}{(x+1)}$$



En el caso de la primera representación, la traslación horizontal, la asíntota vertical se ha trasladado también horizontalmente pasando a ser la recta $x = -4$. La asíntota horizontal se mantiene inalterada en la recta $y = 1$. La segunda representación, la traslación vertical, nos permite apreciar que la asíntota vertical se mantiene inalterada en la recta $x = -1$ mientras que la asíntota horizontal se desplaza 3 posiciones al igual que toda la función, pasando a ser $y = 4$.

Ahora representaremos las dilataciones comparándolas en cada caso con la función tomada

como prototipo $\left(y = \frac{x}{(x+1)} \right)$:



En este caso podemos constatar visualmente que en la primera representación, la dilatación vertical, la asíntota vertical se mantiene inalterada en $x = -1$, mientras que la asíntota horizontal se modifica con el mismo factor que toda la gráfica pasando a ser la recta $y = 3$. En la segunda representación, la dilatación horizontal, la asíntota vertical se modifica pasando a ser la recta $x = \frac{1}{3}$, mientras que la horizontal se mantiene en $y = 1$.

Vamos a resaltar estas últimas afirmaciones, sobre todo en lo referente a las asíntotas horizontales (determinadas por el análisis de la función para valores de la variable independiente que tienden a infinito), por medio del análisis numérico de las tablas que nos proporciona la TI-84 Plus.



Comenzaremos primero definiendo las características de la tabla por medio del menú desplegado al pulsar [2nd][WINDOW]:

Con posterioridad, al pulsar [2nd] [GRAPH] podremos ver la tabla de valores.

Compararemos por parejas $Y_1 = \frac{x}{(x+1)}$ con $Y_2 = \frac{(x+3)}{(x+4)}$ $Y_3 = 3 + \frac{x}{(x+1)}$

$Y_4 = \frac{3x}{(x+1)}$ $Y_5 = \frac{3x}{(3x+1)}$

X	Y ₁	Y ₂
0	0	.75
1000	.999	.999
2000	.9995	.9995
3000	.99967	.99967
4000	.99975	.99975
5000	.9998	.9998
6000	.99983	.99983

X	Y ₁	Y ₃
0	0	3
1000	.999	3.999
2000	.9995	3.9995
3000	.99967	3.99967
4000	.99975	3.99975
5000	.9998	3.9998
6000	.99983	3.99983

X	Y ₁	Y ₄
0	0	0
1000	.999	2.997
2000	.9995	2.9985
3000	.99967	2.9993
4000	.99975	2.99975
5000	.9998	2.9999
6000	.99983	2.99995

X	Y ₁	Y ₅
0	0	0
1000	.999	.99967
2000	.9995	.99983
3000	.99967	.9999
4000	.99975	.99995
5000	.9998	.99997
6000	.99983	.99998

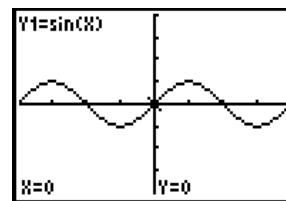
Las afirmaciones anteriores respecto a las asíntotas horizontales tienen su constatación numérica

El estudio de las funciones racionales puede plantearse de partida como una investigación en la que los alumnos deben cambiar los parámetros a , b , c y d en $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ y analizar los cambios que se producen en las correspondientes gráficas.

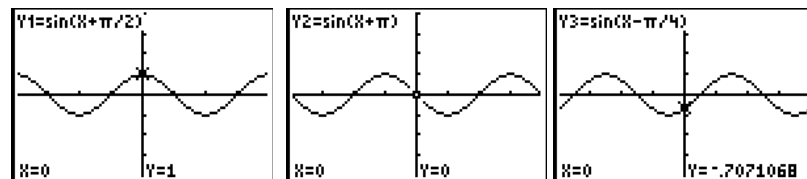
(4) Funciones trigonométricas ($y = a + b\text{sen}(cx + d)$)

Comencemos por representar la función base $y = \text{sen}(x)$ para $-2\pi < x < 2\pi$:

Previamente nos aseguramos de que en [MODE] esté definida la medida de los ángulos en radianes.

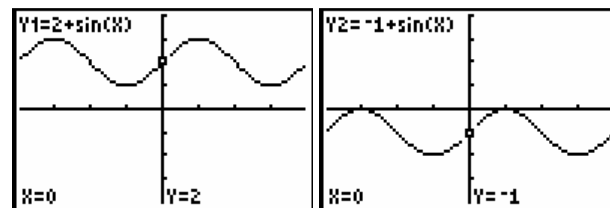


Veamos la transformación $y = \text{sen}(x + d)$ para $d = \pi/2$, $d = \pi$ y $d = -\pi/4$:



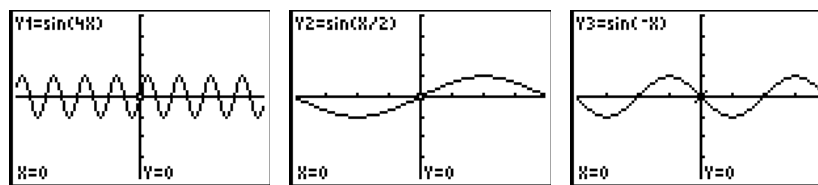
Se trata de una traslación horizontal hacia la izquierda en los dos primeros casos y hacia la derecha en el tercero.

$$y = a + \text{sen}(x), \text{ para } a = +2 \wedge a = -1.$$



Se aprecia claramente que estamos ante una traslación vertical, en el primer caso positiva de 2 unidades y en el segundo negativa de 1 unidad.

$$y = \text{sen}(cx), \text{ para } c = 4, c = \frac{1}{2}, c = -1$$



Se trata en los dos primeros casos de dilataciones horizontales que, en el caso de las funciones trigonométricas, significa una reducción o ampliación del período. En el primer caso el período se reduce a $\pi/2$ y en el segundo se amplía a 4π .

Para el caso de que c tome valores negativos se trata de la función simétrica respecto al eje OX de la correspondiente con el mismo valor positivo.

$$y = b\text{sen}(x) \text{ para } b = 4, b = \frac{1}{2}, b = -1$$



Se trata de dilataciones verticales en los dos primeros casos que, en el caso de funciones trigonométricas, representan cambios en la amplitud o recorrido de la función. En el primero, el recorrido se “estira desde” $-4 \leq y \leq 4$ y, en el segundo, se estrecha entre $-1/3 \leq y \leq 1/3$. En el tercero (cuando b es negativo) estamos ante una simetría respecto del eje OY de la correspondiente función con el mismo valor positivo.

(5) ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN

En esta parte del taller se pretende estudiar las propiedades de una función utilizando exclusivamente el entorno gráfico. Esto permite poder analizar el comportamiento de las funciones en el momento que el profesorado lo considere oportuno, sin necesidad de que los estudiantes tengan conocimientos previos de cálculo diferencial.

Junto al estudio más clásico de la obtención de máximos, mínimos, crecimiento, etc., observaremos que este contexto nos permite acercarnos a algunos conceptos, como el de la derivada, que de otra forma no podríamos hacer.

DOMINIO, CORTES CON LOS EJES, MONOTONÍA, ASÍNTOTAS Y EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN

5.1 Dominio de una función

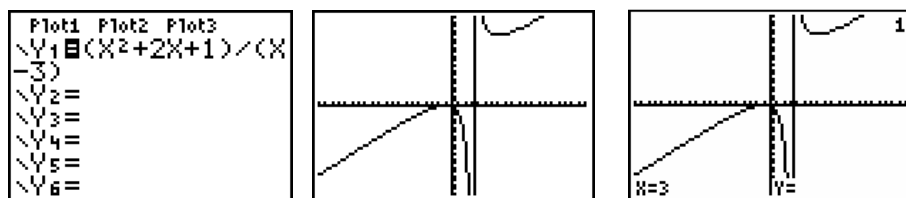
Podemos estudiar el concepto de dominio de una función observando el comportamiento de la función en la gráfica o en la tabla de valores. Veamos el proceso estudiando el dominio de

la siguiente función. $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 3}$

Primero introducimos la función en el editor de funciones y elegimos el [ZOOM] adecuado para representar su gráfica.

Si colocamos la opción [MODE] en **Unida**, la calculadora une todos los puntos de la gráfica. Esta característica hace que el dibujo que vemos en la pantalla sugiera una asíntota vertical, aunque en realidad lo que estamos observando es la unión de dos puntos consecutivos. En la opción [TRACE] y pulsando \rightarrow se observa que la función no está definida. Hay que indicar que para poder dibujar la gráfica la calculadora toma 94 puntos del dominio, que coinciden con los píxeles que tiene de ancho la pantalla, y calcula su imagen. En **Unida**, une estos puntos para dibujar la gráfica.

En la imagen de la función se observa una recta que, aunque no sea una asíntota, la



tomaremos como tal, y representará el punto donde la función no está definida.

TABLE SETUP		X	Y1
TblStart=1		-2	
ΔTbl=1		-9	
Indent: AUTO Ask		ERROR	
Depend: AUTO Ask		25	
		18	
		16.333	
		16	
		X=1	

Podemos observar qué ocurre en la tabla de valores. En este caso habrá que ajustar **TBLSET** al problema, pulsando las teclas [2nd][WINDOW].

El valor de **TblStart** representa el primer valor de la x que aparecerá en la tabla. ΔTbl representa el incremento con el que calcularemos los valores de la " x ".

En el caso de la tabla, los estudiantes deben tratar de explicar el significado de la palabra **ERROR**.

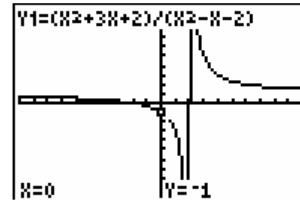
Podemos estudiar diferentes familias de funciones observando el comportamiento de cada una de ellas para llegar a una regla general. Veamos un ejemplo en la siguiente tabla con algunas funciones racionales:

Función	No está definida en	Dominio
$y = \frac{x}{x+1}$		
$y = \frac{x}{x-2}$		
$y = \frac{x}{(x-3)^2}$		
$y = \frac{x}{(x-5)^2}$		
$y = \frac{2x}{(x-3)(x+4)}$		
$y = \frac{3x}{(x+4)(x-3)}$		
$y = \frac{6x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 3}$		
$y = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 8}$		

Se trataría en cada caso de ir rellenando la tabla en función de la información aportada por la gráfica y la tabla de valores.

En el caso de funciones racionales en cuya descomposición factorial se aprecien factores comunes al numerador y al denominador, la calculadora puede ocultar valores donde la función no está definida. Veamos un ejemplo:

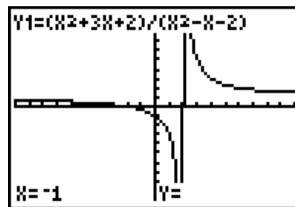
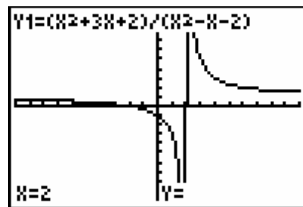
Calcular el dominio de la función $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$



La gráfica sugiere que la función únicamente no está definida en $x=2$, pero si descomponemos factorialmente el numerador y el denominador observaremos que tampoco está definida en $x = -1$

$$y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+1)}$$

Veámoslo con las pantallas:



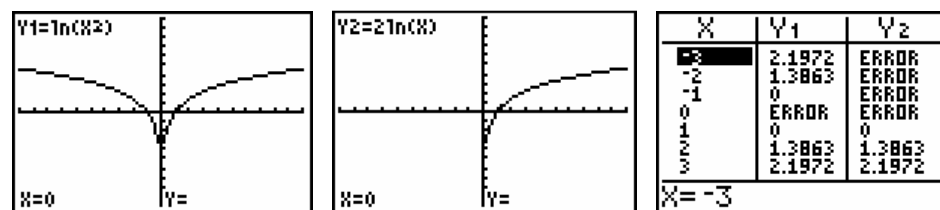
Sin embargo, en otras ocasiones, la calculadora nos permite detectar errores que se cometen en clase, por la incorrecta interpretación de las propiedades de algunas funciones.

Veamos el caso de las funciones: $y = \ln(x^2)$, $y = 2 \ln(x)$

Las propiedades de la función logarítmica nos sugieren que las dos funciones son iguales, por lo tanto tienen el mismo dominio. La realidad es que la segunda función no está definida para valores negativos y, por lo tanto, no serán la misma función. Esto se observa perfectamente al dibujar las gráficas.

La función $y = \ln(x^2)$ aparece definida en todos los puntos, menos en el cero.

La función $y = 2 \ln(x)$ no está definida para los valores negativos y el cero.



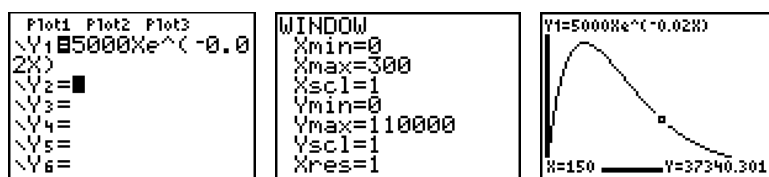
(5.2) Máximos

Vamos a estudiarlo con un problema:

La demanda de un cierto bien es de $D(p)=5000pe^{-0.02p}$ unidades al mes, cuando el precio de mercado es de p miles de euros la unidad. Hallar el precio que hace máximo el gasto de los consumidores.

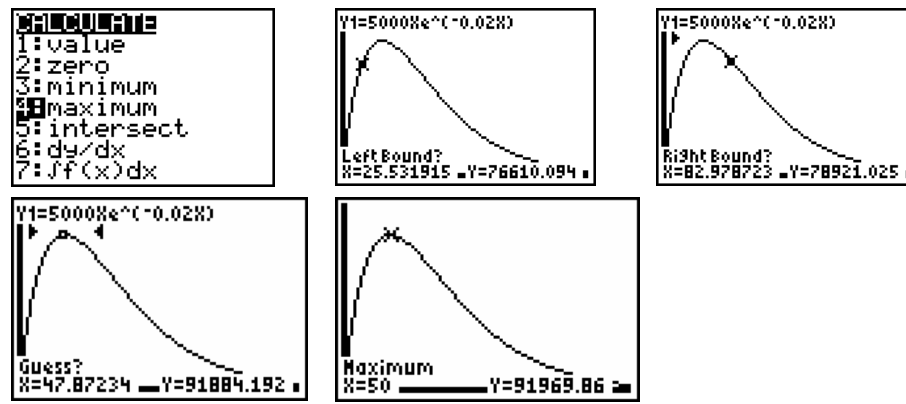
Escribiremos la función en el editor de funciones.

El primer problema que nos encontramos es el estudio de las dimensiones de la pantalla, que pueden modificarse desde [WINDOW]. El problema y el ensayo y error harán que encontremos las dimensiones adecuadas.



Para obtener un máximo utilizamos el menú [2nd] **CALC 4:máximo**, en el que nos pide un punto de la curva que esté a la izquierda del máximo (**Left Bound?**), otro a la derecha del máximo (**Right Bound?**), y una aproximación (**Guess?**) entre los dos anteriores, y que conviene que sea lo más cercana posible al máximo que buscamos.

Hay un máximo en $x=50$



Existe la opción de calcular el máximo automáticamente desde el menú [MATH]. Pulsamos desde la pantalla principal [MATH], opción **7:fMax**, con la instrucción **fmax** (función, variable, valor inferior de la "x" en el que empezará la máquina a buscar, valor superior).

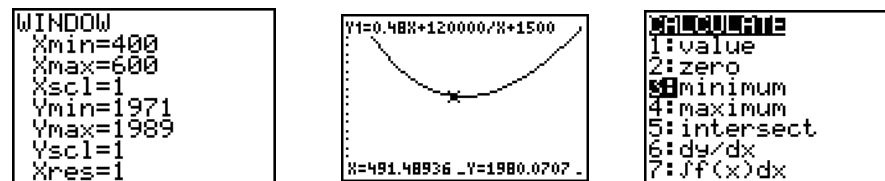
Veamos en nuestro caso (la función y_1 hay que buscarla en [VARS] Y-VAR 1: 1):

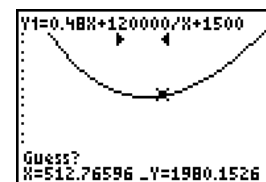
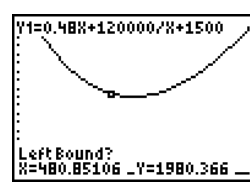
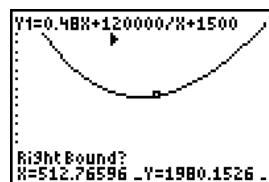
Una vez tenemos el valor de la abscisa obtendremos el valor de la ordenada.

Mínimos

El proceso es el mismo que para obtener el máximo.

Veámoslo con la función $C(x) = 0,48x + \frac{120000}{x} + 1500$, que representa el costo e producción de "x" piezas de una fábrica. Buscamos el valor de "x" que minimiza el costo

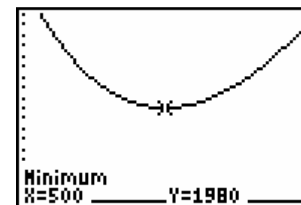




El mínimo costoso tenemos cuando
 $x = 500$

Para obtener el mínimo con el menú [MATH] haríamos igual que con el máximo: **fMin** (Y1,x,0,600).

En este punto hay que destacar que la máquina calcula máximos/mínimos relativos, en función de los valores que nosotros le indicamos al poner un valor a la izquierda y a la derecha. Esto facilita en algún caso la solución de problemas con máximos absolutos, que no se detectan fácilmente con el análisis.



Veamos un ejemplo:

Se divide un hilo de alambre de longitud 100 en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el segundo un cuadrado. Determinar las longitudes de esos trozos para que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea máxima.

Si x es el trozo de alambre que dedicamos para formar el triángulo, la ecuación de la suma de las dos áreas es:

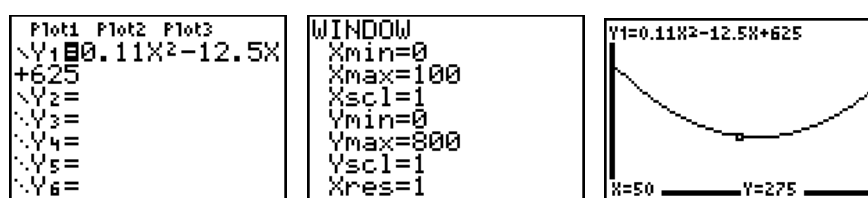
$$A = 0,11x^2 - 12,5x + 625$$

Su derivada por lo tanto es:

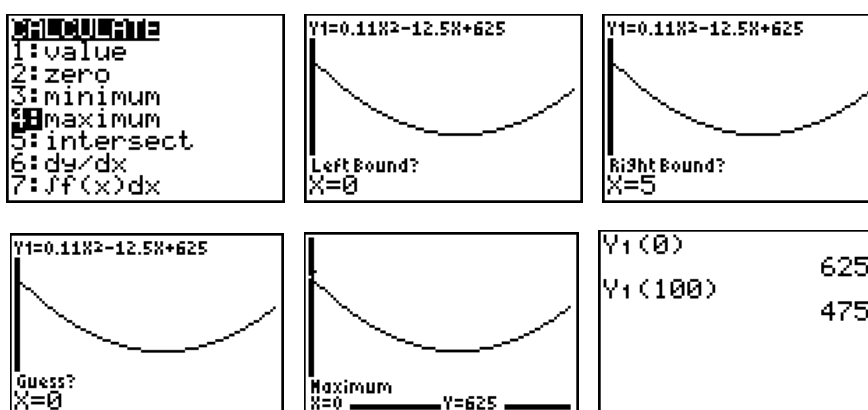
$$A' = 0,22x - 12,5$$

Si $A'=0$ entonces $x=56,82$, dado que estamos buscando un área, es probable que el alumnado piense que en este valor se encuentra el máximo, sin hallar la segunda derivada, cosa que es errónea, dado que la segunda derivada es positiva, lo que indica que en ese valor hay un mínimo. ¿Cómo podemos solucionar el problema?

Veamos la solución desde el entorno gráfico:



Se observa el mínimo que obtenemos con la derivada, a la vez que aparece el máximo en el extremo inferior del dominio.

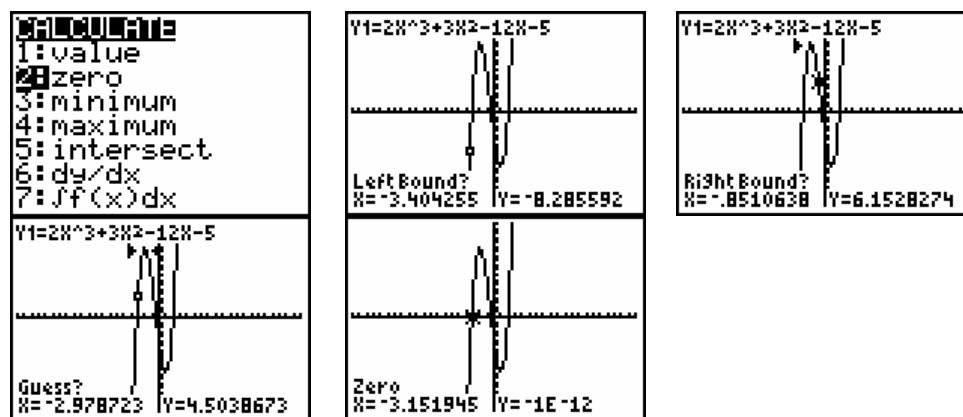


El máximo se obtiene en $x = 0$, en este caso la calculadora halla el máximo relativo dentro del intervalo $[0,5]$. También desde la pantalla principal se puede observar que el máximo no se alcanza en el otro extremo del dominio.

(5.3) Cortes con el eje OX

La obtención de los ceros de la función, es decir, los puntos de corte con el eje OX se han visto con detalle en el capítulo 2. Recordemos en las pantallas como sería el estudio en la función:

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$$



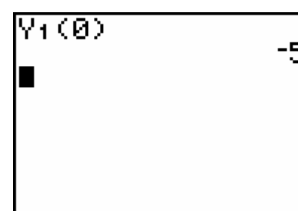
Hay un cero en $x = -3,151945$. De igual forma se pueden encontrar los otros ceros: $x = -0,3886845$ y $x = 2,0406294$.

No hay que olvidar que para facilitar el trabajo se puede utilizar el **ZOOM BOX**.

Corte con el eje OY

Podemos encontrar el corte con el eje OY de varias formas. Veamos una de ellas, utilizando la función Y_1 que ya tenemos introducida en el editor de funciones.

Desde la pantalla principal pulsaremos [VARS] Y-VAR 1: 1: y aparecerá en la pantalla principal Y_1 al introducir el cero que es el valor que queremos evaluar. Al pulsar 0 la máquina nos dará el valor buscado.



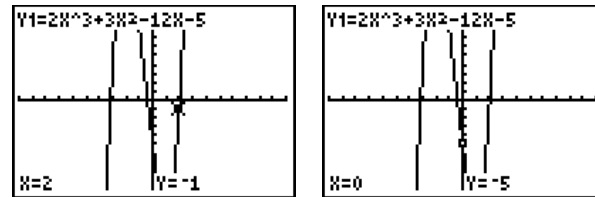
Desde el menú **TABLE** también podremos acceder con las opciones adecuadas a la solución del problema.

TABLE SETUP	
TblStart=0	
Δ Tbl=1	
Indent: Auto	Ask
Depend: Auto	Ask

X	Y1
-3	4
-2	15
-1	8
0	-5
1	-12
2	-1
3	40

X=3

También en la pantalla gráfica **TRACE** pulsando X=0 y [ENTER].



(5.4) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Los intervalos se pueden observar directamente en la gráfica, o en combinación del menú TABLE y el [ZOOM], con [2nd][GRAPH]. Previamente se debe haber ajustado el menú TBLSET.

La gráfica indicará los valores donde la función es creciente o decreciente, y la tabla confirmará los datos. Veamos el caso del ejemplo que estamos trabajando:



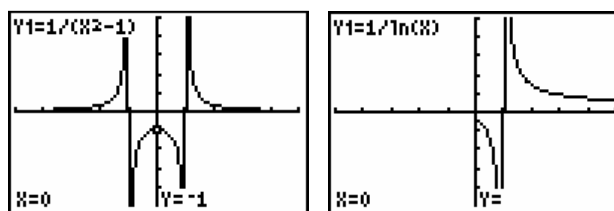
Modificando Δ Tbl podemos aproximarnos tanto como queramos al punto donde la función cambia.

TABLE SETUP TblStart=.7 ΔTbl=1 Indent: Auto Ask Depend: Auto Ask		<table border="1"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>Y1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>.7</td><td>-11.24</td></tr> <tr><td>.8</td><td>-11.66</td></tr> <tr><td>.9</td><td>-12.01</td></tr> <tr><td>1.0</td><td>-12.31</td></tr> <tr><td>1.1</td><td>-12.54</td></tr> <tr><td>1.2</td><td>-12.71</td></tr> <tr><td>1.3</td><td>-12.81</td></tr> <tr><td>1.4</td><td>-12.84</td></tr> </tbody> </table> X=1.3	X	Y1	.7	-11.24	.8	-11.66	.9	-12.01	1.0	-12.31	1.1	-12.54	1.2	-12.71	1.3	-12.81	1.4	-12.84
X	Y1																			
.7	-11.24																			
.8	-11.66																			
.9	-12.01																			
1.0	-12.31																			
1.1	-12.54																			
1.2	-12.71																			
1.3	-12.81																			
1.4	-12.84																			

Crecimiento $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$ Decrecimiento $(-2, 1)$

(5.5) Asíntotas

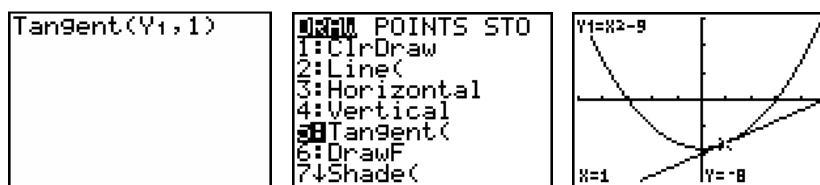
Como se ha señalado al principio de este capítulo, si la calculadora tiene activada la opción **Unida** del menú [MODE], unirá cada punto con el siguiente. Se puede utilizar esta propiedad para buscar las asíntotas verticales. Para las asíntotas horizontales y oblicuas habrá que estudiar los límites correspondientes, algebraica o gráficamente.



(5.6) RECTA TANGENTE Y FUNCIÓN INVERSA

La calculadora gráfica posee un comando que nos permite dibujar directamente la recta tangente a la curva de una función en un punto dado, para ello en el menú **DRAW** seleccionamos la opción Tangente(. Si lo hacemos desde la misma pantalla gráfica, bastará con situarnos sobre el punto que nos interesa y pulsar [ENTE]; si deseamos un punto de abscisa exacta, nos conviene llamar al comando Tangente desde la pantalla principal y especificar entre paréntesis la función y el valor de la abscisa.

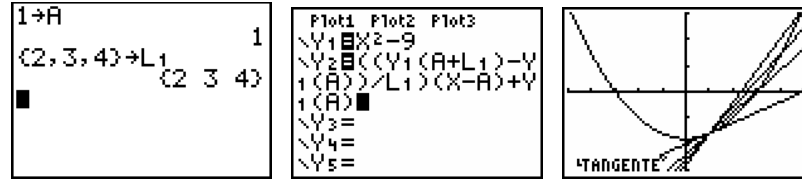
Veámoslo con una sencilla función como: $y = x^2 - 9$. La introducimos en el editor de funciones con el [ZOOM] adecuado:



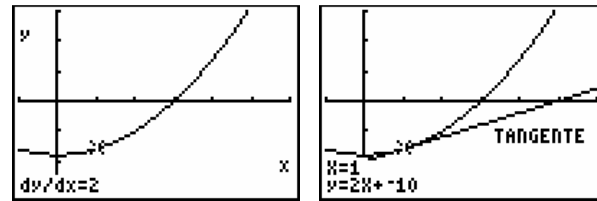
Pero si deseamos conectar varios conceptos: relacionar la derivada en un punto con la recta tangente y mostrar la recta tangente como límite de las rectas secantes, podemos introducir en el editor de funciones la función de las rectas secantes por un punto A y varios próximos a él que determinamos por un incremento L_1 que podemos variar al ser L_1 una lista que se puede definir. L_1 se edita directamente desde el teclado.

$$Y_2 = ((Y_1(A+L_1) - Y_1(A)) / L_1)(X - A) + Y_1(A)$$

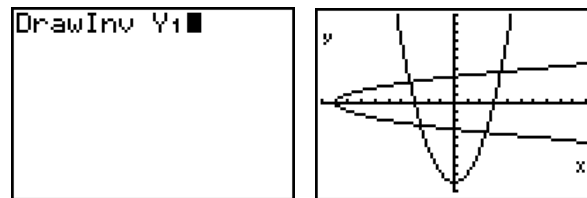
Y_1 se puede escribir en pantalla desde el menú **VARS, Y-VARS, FUNCTION**.



Cambiando los valores en [TABLE] obtendremos un dibujo más claro, y de nuevo en $x=1$ con **CALCULATE** podemos obtener el valor de la derivada y dibujar otra vez la tangente, y comprobar que el valor (2) de la pendiente de la recta tangente es igual a la derivada en el punto:



Por último destacar la posibilidad de dibujar la función inversa de una función dada en la opción 8 del menú **DRAW**; veamos la “función” inversa de la función estudiada Y_1 :



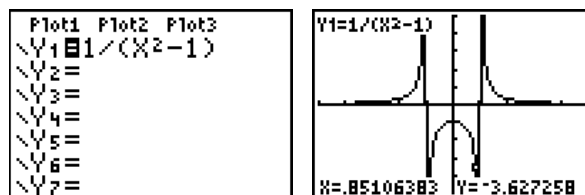
(5.7) LÍMITES Y CONTINUIDAD

Estudio del límite

El límite se puede estudiar desde la observación directa de la gráfica utilizando la opción [TRACE] y el cursor para moverse por la gráfica. También podemos estudiarlo desde la tabla y la pantalla principal. Veamos un ejemplo:

Estudiar el $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$

Con la opción [TRACE] se puede observar el comportamiento de la función al aproximarnos por la derecha o por la izquierda a 1.



Veamos el comportamiento con la opción TABLE, modificando el TBLSET:

TABLE SETUP		X	Y1
TblStart=.97		.97	-16.92
ΔTbl=.01		.98	-25.25
Indent: Auto Ask		.99	-50.25
Depend: Auto Ask		1	ERROR
		1.01	49.751
		1.02	24.752
		1.03	16.42
		X=.97	

TABLE SETUP		X	Y1
TblStart=.9997		.9997	-1667
ΔTbl=1E-4		.9998	-2500
Indent: Auto Ask		.9999	-5000
Depend: Auto Ask		1	ERROR
		1.0001	4999.8
		1.0002	2499.8
		1.0003	1666.4
		X=1.0003	

Continuando con la modificación del TBLSET podemos observar perfectamente el comportamiento de la función al aproximarnos a $x = 1$ por la derecha y por la izquierda.

Desde la pantalla principal también se puede obtener con la máquina el valor de la función al acercarnos a 1 por la derecha y por la izquierda. Utilizaremos para ello, desde la pantalla principal, la secuencia [VARS] Y-VAR 1: 1: y aparecerá en la pantalla principal Y_1 . Introduciremos el valor que queramos evaluar y pulsaremos [ENTER].

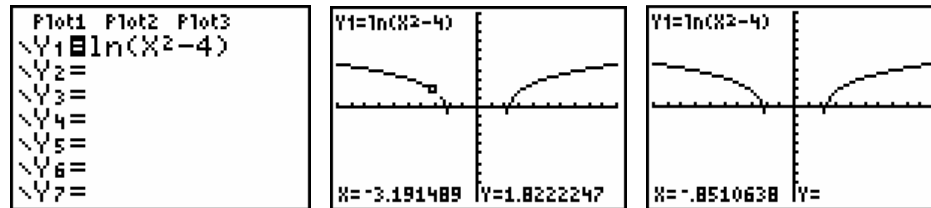
```
Y1(0.99999999)
-500000000
Y1(1.00000001)
500000000
```

Los métodos numéricos y gráficos no sustituyen los algebraicos, pero sí que aportan un refuerzo importante para la consolidación del concepto.

Estudio de la continuidad

El estudio de la continuidad en un punto se limita al estudio del límite en ese punto, y a la existencia o no de la función en el punto que es objeto de estudio. Veamos algunos detalles al respecto.

La función $y = \ln(x^2 - 4)$ no es continua donde la función no está definida. Veámoslo desde la gráfica, utilizando [GRAPH], y desde la opción TABLE.



La gráfica no aparece en un tramo, ¿qué significado tiene?

Veámoslo desde la tabla de valores:

TABLE SETUP	
TblStart=-2.3	
ΔTbl=.1	
IndPnt: Auto Ask	
Depend: Auto Ask	

X	Y1
-2.3	.25464
-2.2	-.1744
-2.1	-.8916
-2	ERROR
-1.9	ERROR
-1.8	ERROR
-1.7	ERROR

X=-1.7

En clase se puede analizar el motivo por el que aparece la palabra **ERROR**.

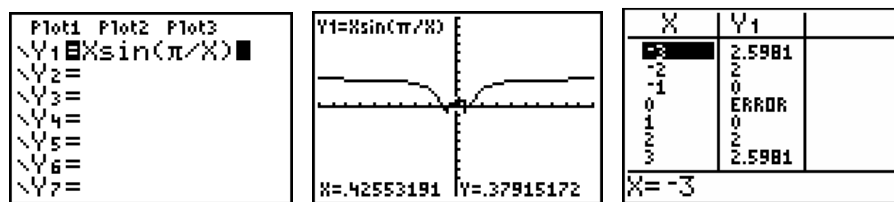
En otros casos, el gráfico (como es el caso que abajo estudiamos) induce claramente a un error, dado que la gráfica que dibuja la calculadora parece estar definida en todos los puntos. Como la función no está definida en el cero tendremos que estudiar especialmente cómo se comporta en un entorno de este punto.

Estudiar la continuidad (también podríamos decir el límite) de la función

$$y = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

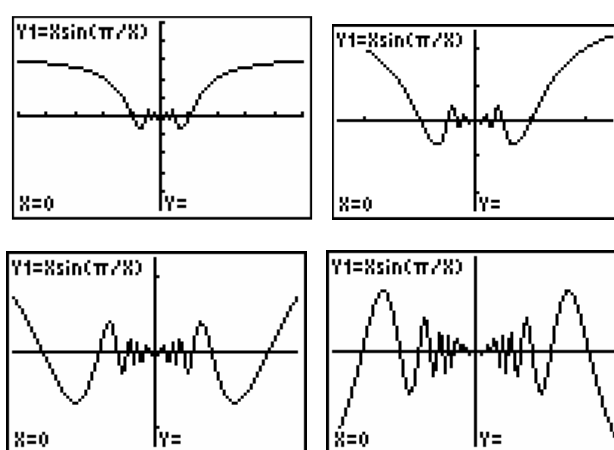
en el punto $x=0$

Para mayor comodidad cambiaremos la unidad de medida de ángulos en radianes, en el menú [MODE].



Se observa en una primera aproximación que la función parece continua en todos los puntos. Con el menú **TABLE** podemos ver que en el cero no está definida.

Estudiemos gráficamente el comportamiento de la función en cero utilizando el **ZOOM In** varias veces, o cambiando con la opción **Zoom Box**.

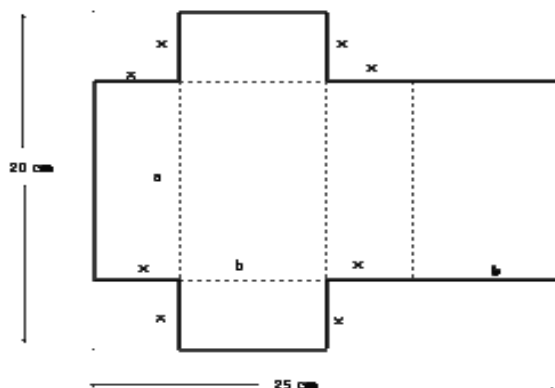


Viendo las gráficas, se puede observar que la función converge a cero, tanto por la derecha como por la izquierda, pero no está definida para ese valor. Observamos desde la gráfica que la función tiene una discontinuidad evitable en $x=0$.

El estudio del límite es prácticamente automático con la gráfica, mientras que la inexistencia de la función en algún valor, puede resultar difícil de detectar.

(6) Problema de Aplicación

Tome una hoja de cartón de medidas 20 cm. por 25 cm. y recorte cuadrados de x cm. por x cm. en dos esquinas. Recorte rectángulos de x cm. por 12.5 cm. en las otras dos esquinas. Pliegue el papel de cartón para formar una caja con tapa. ¿Para qué valor de x se obtiene el máximo volumen $V(x)$ de la caja?. Utilice tablas y gráficos para hallar la solución.



Solución: Realizaremos un esquema (dibujo) de la situación a maximizar.

Del diagrama obtenemos las siguientes relaciones:

$a + 2x = 20$ y $2b + 2x = 25$, si despejamos a y b respectivamente obtenemos:

$a = 20 - 2x$; $b = 12.5 - x$.

Con esta información expresamos el volumen de la caja de la siguiente manera:

$$V = f(x) = x \cdot (20 - 2x) \cdot (12.5 - x).$$

Analizaremos una tabla para observar el cambio de volumen con los respectivos cortes:

De lo cual determinamos que el valor máximo se encuentra entre 3 y 4 cm. Podemos modificar el incremento de la tabla para un valor más preciso.

X	V1
0	0
1	207
2	336
3	399
4	408
5	375
6	312

La solución

```
CONFIG TABLA
InicTbl=1
ΔTabla=1
Indent:Auto Preg
Depend:Auto Preg
```

```
CONFIG TABLA
InicTbl=3
ΔTabla=.1
Indent:Auto Preg
Depend:Auto Preg
```

```
CONFIG TABLA
InicTbl=3.6
ΔTabla=.01
Indent:Auto Preg
Depend:Auto Preg
```

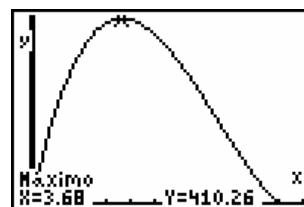
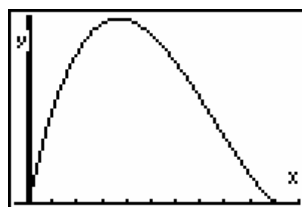
se encuentra entre 3.6 y 3.7, para buscar, “tantear” un número más aproximado haremos un incremento de 0.01.

Con lo cual podemos concluir que si hacemos un corte de 3.68 cm obtenemos un volumen máximo para nuestra caja. ¿Es necesario una aproximación tan exacta? ¿Podremos cortar con una tijera en 3.68 cm?

X	Y1
3.63	410.20
3.64	410.23
3.65	410.24
3.66	410.25
3.67	410.26
3.68	410.26
3.69	410.26
Y1=410.264064	

Veamos ahora el gráfico de la situación. Cuidado, debemos ajustar la escala, según la situación problemática.

```
VENTANA
Xmin=.5
Xmáx=11
Xescal=1
Ymin=0
Ymáx=415
Yescal=.1
Xres=1
```



¿Qué podemos concluir de la gráfica? ¿Qué sucede en el valor 10 cm? Unos Ejemplos para Uds.

- ✓ La Caja de Cartón: De una lámina de cartón cuadrada, de 24 cm. de lado, queremos fabricar una caja sin tapa. Podemos hacerla recortando cuadrados en las esquinas y doblando por los lados. Si queremos que la caja tenga el máximo volumen posible, ¿De qué tamaño serán los cuadraditos que se corten?
- ✓ Rectángulos: Toma una hoja de papel cuadrulado y recorta todos los rectángulos que puedas de área 36 unidades cuadradas (tomando como unidad uno de los cuadrillos) y que tengan longitudes enteras de sus lados.
 - a) ¿Cuántos rectángulos puedes recortar?. Considera tanto el de base 4 como el de 9.
 - b) Anota en una tabla la base, la altura y el perímetro de cada uno. ¿Encuentras alguna relación entre la base y la altura?

c) Pega todos los rectángulos obtenidos en una hoja de papel, uno sobre otro, de manera que la base quede en una misma línea horizontal, la altura en una misma línea vertical y el vértice inferior izquierdo en el mismo punto. Une mediante segmentos los vértices superior derecho de los rectángulos.

d) Representa gráficamente la relación base - perímetro.

✓ El rectángulo más barato: Nos interesa encontrar el “el rectángulo más barato”, es decir el de menor perímetro entre todos aquellos que tiene la misma área.

✓ Graficar: $y = \frac{1}{x^2 + 6x + 10}$; $x \in \mathbb{R}$. Comprobar, gráficamente, que su dominio es \mathbb{R} y su recorrido $]0,1]$.

✓ Dada la función real $y = \frac{2-3x}{x^2+3x+3}$, determinar, usando su gráfica:

a) Su dominio y recorrido. b) Su intersección con el eje X y con el eje Y. c) Las coordenadas de sus máximo(s) y mínimo(s).

Conclusiones

Trabajando con esta metodología se logra no solo adquirir competencias en el campo de la matemática, sino también en el trabajo grupal de los estudiantes. La discusión de las soluciones y la elección del mejor método de investigación serán un significativo aporte al aprendizaje del respeto a las opiniones ajenas y el reconocimiento del error propio y el acierto ajeno como también el respeto al que se equivoca.

Un instrumento como la calculadora gráfica provee un rico ambiente para la resolución de problemas complejos, y puede ser pensado como una herramienta cognitiva o bien como un agente didáctico. La representación de un mismo objeto matemático en distintos sistemas de representación semióticos y la conexión entre los mismos permite que el encuentro entre el sujeto y el medio sea fructífero, y que el sujeto se apropie del conocimiento de una manera más efectiva.

Aunque la tecnología no es la solución a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, hay indicios de que ella se convertirá paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática.

Bibliográfica:

- [1] Texas Instruments.(1999). Manual de la Calculadora Gráfica TI-83 Plus. U.S.A
- [2] El Estudio de Funciones con Calculadora Gráfica. T³ Europe es una marca registrada de Texas Instruments.
- [3] CALCULADORAS GRÁFICAS: UN RETO PARA RESOLVER ECUACIONES. Francisco González, Floreal Gracia. Texas Instruments. 1996.
- [4] Böhm, J. (2002). Dale un Giro. Tercera Edición. Revista Innovaciones Educativas. Dallas. Texas Instruments, Inc.