

TALLERES

NACIONALES

Transformaciones Isométricas en la
Educación General Básica

**Pierina Zanocco S, Ivette León L, Alejandro Pedreros
M.**

Pontificia Universidad Católica de Chile.

VIÑA DEL MAR, NOVIEMBRE DE 2006

© SOCHIEM
Edición: Noviembre de 2006
Tiraje 60 ejemplares.
Diseño Portada: Miguel Díaz F.
Preparación de originales del Autor
Diagramación: Universidad de Viña del Mar.
Editado por la Sociedad Chilena de Educación Matemática
Impresión "Lártole Editorial" Viña del Mar

XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática

COMISIÓN ACADÉMICA

María Aravena	Universidad Católica del Maule
Carlos Caamaño	Universidad Católica del Maule
Leonora Díaz	Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Miguel Díaz	Universidad de Viña del Mar
Verónica Díaz	Universidad de Los Lagos
Lorena Espinoza	Universidad de Santiago de Chile
Miguel Friz	Universidad del Bio Bio
Ismenia Guzmán	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Patricio Montero	Universidad de Santiago de Chile
Fidel Oteiza	Universidad de Santiago de Chile
Álvaro Poblete	Universidad de Los Lagos
Alonso Quiroz	Universidad Católica Silva Henríquez

XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática

COMISIÓN ORGANIZADORA

PRESIDENTE	Raimundo Olfos Ayarza	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
SECRETARIA	María Soledad Montoya G	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
PRO-SECRETARIA	Ruth Galindo Navarro	Universidad Mayor
REVISTA	Pierina Zanocco Soto	Pontificia Universidad Católica de Chile
LOGÍSTICA	Ximena Tapia Silva	Universidad Viña del Mar
TALLERES	Carlos Silva Córdova	Universidad de Playa Ancha
INVITADOS	Miguel Díaz Flores	Universidad de Viña del Mar
ACTAS	Eduvina Villagrán Campos	Universidad de la Serena
FINANZAS	Hernán Fibla Acevedo	Colegio Rubén Castro

PRESENTACIÓN

Viña del Mar, Noviembre de 2006.

Como un modo de favorecer el desarrollo de la profesionalización docente desde el análisis de estrategias e innovaciones en el aula, se presenta la realización de talleres. Éstos son cursillos prácticos dirigidos por un especialista en la que los participantes desarrollan propuestas didácticas, actividades de aula y recursos didácticos, entre otros.

Para tal objetivo, en esta ocasión, se presentan diez talleres, tres de ellos propuestos por expertos de Francia, España y Argentina y otros siete por especialistas nacionales provenientes de Valdivia, Concepción, San Felipe, Viña del Mar y Región Metropolitana, con una oferta variada que invitan a debatir en torno a una actividad de exploración y construcción en geometría, con o sin uso de recursos tecnológicos, estrategias de cálculo, actividades de aprendizaje de funciones y el estudio de la situación del alumno al término del proceso educativo, aprendiendo en forma autónoma a lo largo de la vida.

La Sociedad Chilena de Educación Matemática agradece a los autores de los talleres que en estas XIII Jornadas nacionales aportarán con su experiencia a la concreción de una matemática para la vida y al gusto por esta actividad, condiciones del quehacer en el aula, para su real contribución al desarrollo humano e integral de la nación.

INTRODUCCIÓN

Las transformaciones isométricas es un tema relacionado con la enseñanza de la Geometría, que aparece explícitamente mencionado en los programas de Educación Matemática de NB2 (tercer y cuarto año), con el propósito de ampliar el lenguaje geométrico y para profundizar en el desarrollo de la imaginación espacial. También lo encontramos en textos escolares desde segundo ciclo de la Educación Parvularia y NB1, proyectándose al segundo ciclo de EGB, donde en comprobaciones o descripciones se utilizan como vocabulario aplicado. También este tema se profundiza e incluye en la Enseñanza Media.

En este Taller se sistematizarán los conceptos relacionados con la Transformaciones Isométricas, tales como reflexión-simetría, rotación y traslación y se analizará el propósito de que este tema se incluya en la EGB. Además se desarrollarán algunas actividades recreativas para trabajar los conceptos mencionados. Entre ellos se ejemplifica cómo trabajar con imágenes del juego computacional TETRIS.

1. ¿QUÉ CONCEPTOS, EN RELACIÓN A LAS TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS, PUEDEN MANEJAR LOS ALUMNOS DEPENDIENDO DEL NIVEL?

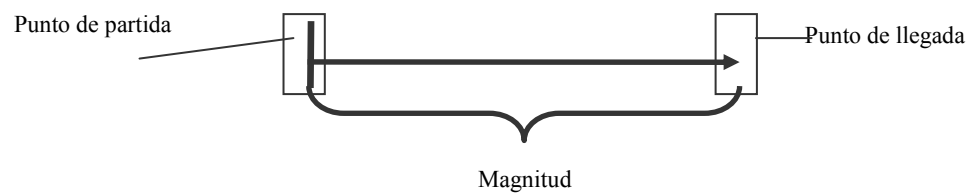
Las Transformaciones Isométricas son movimientos de figuras en el plano que se realizan sin cambiar la forma y el tamaño de la figura, es decir realizando una isometría. Se reconocen “tres movimientos” realizando una isometría: la traslación, la rotación, y la simetría.

Las transformaciones mencionadas tienen la propiedad de que las figuras trasladadas o rotadas son siempre congruentes a la inicial, además si trasladamos y/o rotamos polígonos regulares (los cuales tienen como propiedad que sus lados y ángulos sean congruentes entre sí) podemos teselar el plano de tal manera de construir una red geométrica a partir de polígonos regulares, lo cual a su vez permite “armar” los cuerpos geométricos denominados poliedros regulares, tales como el tetraedro, el icosaedro, entre otros.

El primer movimiento es la Traslación: Movimiento de una figura geométrica de modo que sólo cambie su posición, pero no su orientación, tamaño y forma.

Una Traslación es el movimiento de una figura en el plano, con una dirección determinada y una magnitud que está dada por la distancia entre el punto de partida y el punto de llegada. Vale decir, en lenguaje geométrico la traslación es el recorrido que realiza una figura determinado por “*un vector*”.

¿Qué indica un vector?

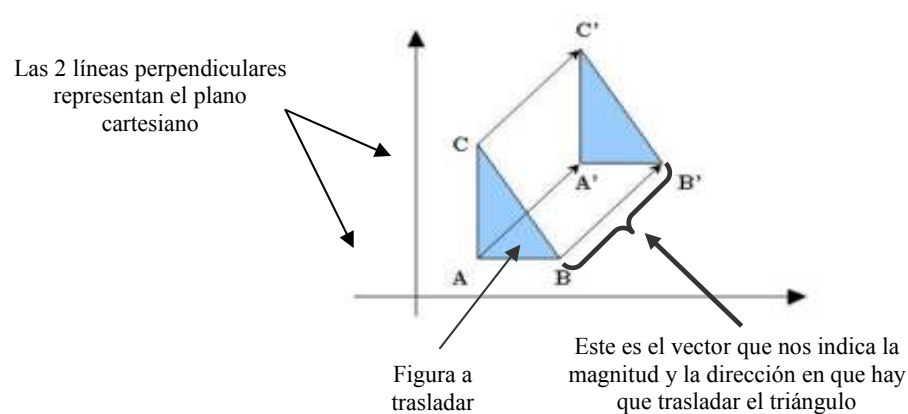


“Esta flecha” indica que se debe realizar un movimiento hacia la derecha, desde el punto de partida que coincide con la parte inicial del vector; con una distancia que está dada por la magnitud del vector, con lo cual se indica el punto de llegada de la figura al trasladarse. Es un símbolo que nos indica “un punto de partida”, “una dirección” y “un punto de llegada” en línea recta. En definitiva, este símbolo nos indica la distancia y el sentido en que se debe mover una figura.

• La traslación involucra...

- » O: punto de partida.
 - » A: punto de llegada.
 - » D: distancia.
- } Aquí la magnitud a trasladar la figura, esta indicada por estos tres elementos
- » ->: dirección hacia la derecha.
 - » <-: dirección hacia la izquierda.

Observando una traslación



Al realizar la traslación del triángulo, es importante señalar que el vértice A, B y C del triángulo ABC se trasladan a los puntos A', B' y C' respectivamente.

Otro punto importante en toda traslación, es señalar que el vector que traslada el vértice A en A', B en B' y C en C' son paralelos entre ellos, ya que es el principio fundamental para construir una traslación de una figura geométrica.

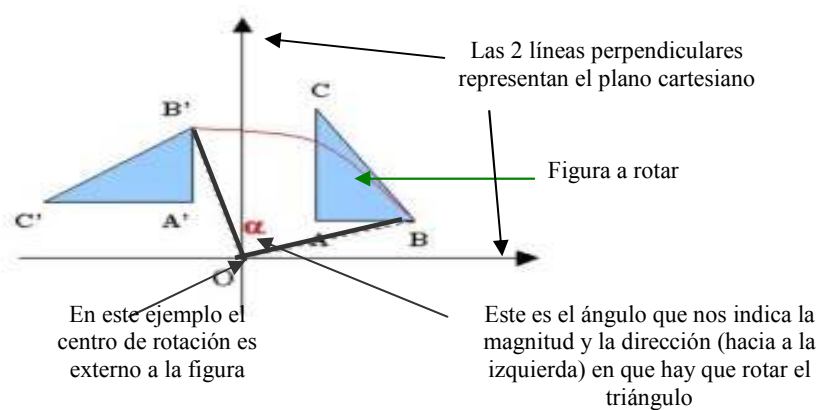
El segundo movimiento es la Rotación: Transformación geométrica en la cual una figura se mueve sin deformación alrededor de un punto fijo. Si el punto, o centro de rotación es "O", entonces para todo punto P de la figura que se transforma en el punto P' por la rotación, en el ángulo POP' es el mismo.

- Una rotación es un giro en torno a un punto determinado en la figura o fuera de ella, llamado centro de rotación.
- Una rotación es un giro con una cierta magnitud, llamada ángulo de rotación. Es importante recordar que la unidad de medida de los ángulos es en "Grados", en donde un giro completo está definido en 360 grados, es decir, 360 grados equivale a un giro completo.

- Los alumnos deben relacionar que un "cuarto de giro" equivale a 90 grados, que "medio giro" equivale a 180 grados, que "tres cuartos de giro" equivale a 270 grados y que "un giro completo" equivale a 360 grados.

Observemos una rotación

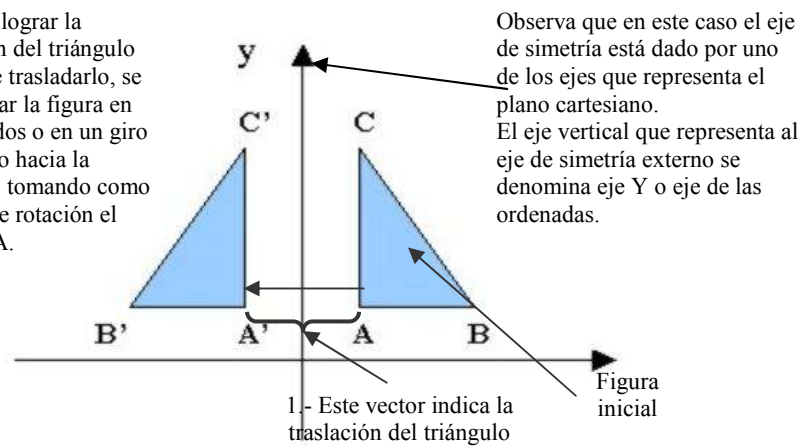
O: punto de partida o centro de rotación, que está ubicado en la figura o fuera de ella.



El tercer movimiento es la Reflexión: Transformación geométrica de una figura, en la cual siempre hay 2 puntos P y P' que están a la misma distancia de un eje de simetría, y además los puntos están en lados opuestos respecto del eje de simetría.

- Una reflexión es una transformación a partir de una línea recta llamada el eje de reflexión o eje de simetría. El eje de simetría puede ser interno o externo a la figura.
- Una reflexión puede ser construida a partir de una composición de “rotaciones y/o traslaciones”.
- Es un símbolo que nos indica “equidistancia de puntos respecto de una línea recta, que anteriormente definimos como eje de simetría”

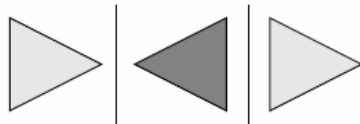
2.- Para lograr la reflexión del triángulo luego de trasladarlo, se debe girar la figura en 360 grados o en un giro completo hacia la derecha, tomando como centro de rotación el vértice A.



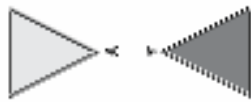
Como podemos constatar, los puntos A y A' , B y B' , C y C' están a la misma distancia respecto del eje de simetría que en este caso particular es el eje de las ordenadas del plano cartesiano.

El siguiente análisis conceptual se realizará en base a las diferentes relaciones con que se pueden trabajar estos tres movimientos. La propuesta es centrar la enseñanza de las transformaciones isométricas como un conocimiento interrelacionado, lo cual apoya la construcción de pavimentaciones.

- La composición de dos reflexiones sobre dos líneas paralelas equivale a la traslación de la figura geométrica.



- La rotación en un ángulo de 180° respecto de un punto dado equivale a una simetría axial (en torno a un eje de giro).



- La simetría de traslación es cuando al trasladar una pieza sobre otra moviéndola de arriba a abajo, de izquierda, derecha o por la combinación de varios de los movimientos anteriores ambas coinciden, entonces tenemos una simetría de traslación.

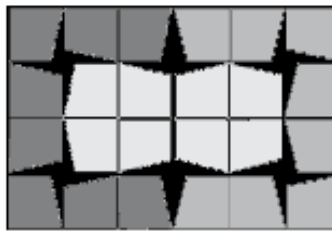
5 <http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2001/enero/1nosotros56.htm>



- La simetría de rotación es cuando al girar una pieza ésta coincide con otra. En ese caso diremos que existe simetría de rotación.



- En la siguiente figura podemos encontrar los dos tipos simetría antes mencionados.



Como hemos apreciado, hay diversos ejemplos y contextos en donde se puede apoyar la enseñanza de las transformaciones isométricas.

2.- ¿QUÉ DICEN LOS PROGRAMAS DE NB2?

En el eje **Formas y espacio** se continúa con el desarrollo del lenguaje geométrico y la imaginación espacial, a través de la profundización en el estudio de formas de dos y tres dimensiones, el análisis de sus representaciones y el inicio del estudio de transformaciones isométricas, tales como reflexiones, traslaciones, rotaciones, ampliaciones y reducciones, así como aspectos relacionados con la interpretación y ubicación de posiciones y trayectos.

El estudio de las traslaciones y reflexiones se inicia en 3° Básico y en 4° Básico se complementa con rotaciones, ampliaciones y reducciones. Así también, se inicia el estudio de la ubicación de posiciones y trayectos en el tercer año y se profundiza en el cuarto año, considerando aspectos relacionados con la interpretación y elaboración de representaciones gráficas que dan cuenta de la posición de un objeto y del trayecto que hay que seguir para ir de un lugar a otro o para encontrar un objeto determinado.

Los contenidos que aparecen en el programa son:

- Realización de traslaciones, reflexiones y rotaciones manipulando dibujos de objetos y de formas geométricas, para observar qué características cambian y cuáles se mantienen.

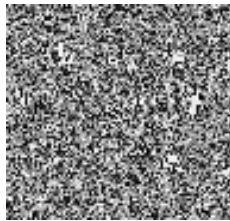
3. ¿CÓMO TRABAJAR LAS TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS CON ALUMNOS DE EGB?

El aprendizaje de las Transformaciones Geométricas favorece en los alumnos el desarrollo de habilidades asociadas al sentido espacial, al conocimiento de algunas propiedades de las figuras planas más conocidas y al desarrollo de habilidades intelectuales.

La enseñanza de este tema debe estar centrada en la exploración, la comprobación y la sistematización, es decir las actividades propuestas deben permitir a los alumnos descubrir a través de acciones y proceso de reflexión, formular predicciones a su nivel, para por último, establecer conclusiones que le permitan construir un concepto o procedimiento.

¿Qué tipo de actividades se les puede exigir a los alumnos de EGB?

- Descubrir propiedades de las figuras geométricas a partir de construcciones realizadas.
- Construir tablas para descubrir regularidades.
- Relacionar y analizar propiedades de figuras geométricas en contextos provenientes del arte, de la arquitectura y del diario vivir.
- Explorar y descubrir cuáles son las condiciones y elementos que participan en una traslación, rotación y simetría.
- Formular —en lenguaje verbal—situaciones en que haya traslación, rotación y simetría de diferentes objetos, para luego realizar la misma actividad con figuras geométricas en el plano.
- Describir los cambios que se observan entre una figura y su imagen por traslación, rotación o simetría.
- Reconocer transformaciones isométricas en la naturaleza, en el arte y el mundo cotidiano.
- Construir, utilizando instrumentos geométricos figuras simétricas, trasladadas y rotadas.
- Reconocer regiones poligonales que cubren el plano.
- Transformar un cuadrado y un triángulo en un tesela.
- Diseñar teselas incorporando traslaciones, simetrías y rotaciones.
- Describir las relaciones implícitas y explícitas entre cada una de las transformaciones isométricas. Ejemplo: Que toda traslación puede realizarse a partir de dos reflexiones sobre dos líneas paralelas.



Teselaciones de Escher

4. ALGUNOS EJEMPLOS DE ACTIVIDADES DESCUBRIENDO TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS



Propósito: Esta actividad permite detectar el conocimiento de giro o rotación que maneja cada alumno, como las relaciones de derecha e izquierda.

Observa cada una de las siguientes imágenes y responde las preguntas según corresponda.

- ¿Cuántos giros realizó el patinador, teniendo en cuenta como inicio la tercera imagen y como final penúltima imagen?



- Observando la cuarta y última imagen, ¿Se puede inferir que el patinador realizó un giro completo?



1. Compartan sus respuestas y determinen las correctas.
2. ¿Qué giros se debe realizar si se quiere que el punto vuelva al mismo lugar de partida?
3. ¿En qué objetos de la vida cotidiana se realizan giros? Nombre y explique.
4. ¿Qué diría usted de un alumno que dio todas las respuestas correctas?

Observa cada una de las siguientes imágenes y responde las preguntas según corresponda.

- ¿En cuántos grados deben girar el primer grupo de aviones para volar en la misma dirección que el segundo grupo de aviones?



- Teniendo como punto de referencia el cuarto avión de izquierda a derecha, ¿En cuánto han girado los otros aviones respecto del avión señalado anteriormente?



1. Compartan sus respuestas y determinen las correctas.
2. ¿Qué giros se debe realizar si se quiere que el punto vuelva al mismo lugar de partida?
3. ¿En qué objetos de la vida cotidiana se realizan giros? Nombre y explique.
4. ¿Qué diría usted de un alumno que dio todas las respuestas correctas?

Actividad: Jugando Tetris

Propósito: Esta actividad permite desarrollar la imaginación espacial y elaborar mentalmente los movimientos para lograr situar las diferentes piezas donde corresponde. Apoya el desarrollo del vocabulario espacial en la descripción de los cambios efectuados en las transformaciones.

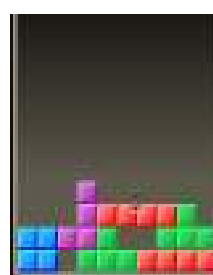
¿Qué es el tetris?

El Tetrix es un juego de puzzles ruso inventado por Alexey Pajitnov en 1985 cuando estaba trabajando en la Academia de Ciencias de Moscú. Lo creó inspirándose en el juego pentominos.

¿Cómo se juega?


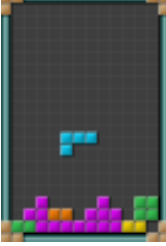


El juego consta de piezas bidimensionales formadas por cuadrados, las que caen de la parte superior de la pantalla. El jugador no puede impedir esta caída pero puede decidir la rotación de la pieza (0° , 90° , 180° , 270°) y en qué lugar debe caer moviéndolas horizontalmente a medida que bajan. Cuando una línea horizontal se completa, esta desaparece y todas las piezas que están por encima descienden una posición, liberando espacio de juego y por tanto facilitando la tarea de situar nuevas piezas. La caída de las piezas se acelera de forma constante. El juego acaba cuando las piezas se amontonan hasta salir del área de juego.

Existen distintas versiones del juego. La original tiene siete piezas diferentes, licencias posteriores añadieron formas suplementarias y existen incluso ciertas licencias tridimensionales. Fuente : <http://es.wikipedia.org/wiki/Tetris>

**PIEZAS BIEN UBICADAS****PIEZAS MAL UBICADAS**

1. Observa la siguiente jugada en el tetris.

¿Qué movimientos se debe realizar para que la pieza se sitúe correctamente?

	<ul style="list-style-type: none"> • 1° posibilidad: GIRO $\frac{1}{4}$ a la derecha la pieza azul y TRASLADO abajo 11 • 2° posibilidad: TRASLADO abajo 10 • 3° posibilidad: GIRO $\frac{1}{2}$ a la derecha la pieza azul y TRASLADO abajo 9 • 4° posibilidad: Giro $\frac{3}{4}$ a la derecha la pieza azul, TRASLADO a la derecha 1, TRASLADO abajo 8
<p>2. A continuación hay distintas jugadas en el tetris.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Observe cada una de ellas. • Describa en la forma completa los movimientos que se deben realizar para que la pieza se sitúe en forma correcta. • ¿Cuántas soluciones encontró? 	
	
	
	
<p>3. ¿Qué otro juego conoce usted que podría adaptarse a este tema?</p>	

Actividad: Jugando con simetrías

Propósito: Esta actividad permite que los alumnos identifiquen ejes de simetría en tarjetas, para luego ubicarlas en un tablero que presenta condiciones en relación al número de ejes de simetría.

MATERIALES

- Un tablero (ver prototipo en página siguiente)
- Un conjunto de tarjetas con diseños geométricos (ver prototipo en página siguiente)
- Un dado con caras pintadas
- Tarjetas relacionadas con conocimientos acerca de los cuadriláteros y triángulos.
- Una ficha de color por cada jugador.

INSTRUCCIONES

Cada jugador tira el dado numérico, el que obtiene mayor puntaje empieza el juego, siguiendo los turnos hacia la derecha.

Se colocan las fichas con la cara hacia abajo. Cada jugador, al tocarle su turno recoge una ficha y lanza el dado de colores, dependiendo del color son las acciones que debe hacer.

Las fichas deben ser ubicadas en el tablero de acuerdo a los ejes indicados en las flechas del tablero, por ejemplo, si una ficha cuenta con dos ejes debe ubicarse en una casilla donde se intersecten los dos sentidos de las flechas del tablero.

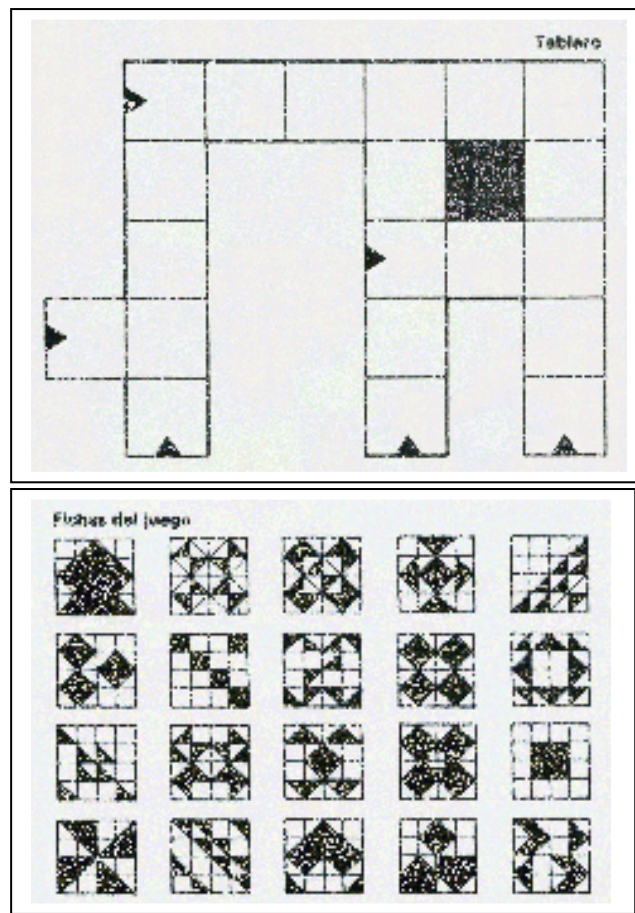
Colores del dado:

- Naranja: posiciona la ficha, y responde una pregunta con respecto a Triángulos (2 puntos)
- Morado: posiciona la ficha, y responde una pregunta con respecto a Cuadriláteros (2 puntos)
- Rojo: repite el turno
- Amarillo: posiciona la ficha y justifica el porqué (2 puntos)
- Azul: posiciona la ficha, justifica y nombra los ejes de simetría que se pueden identificar en ella (3 puntos)
- Verde: posiciona la ficha, justifica y nombra las figuras geométricas que se pueden observar de acuerdo a los ejes de simetría (3 puntos)

Si se equivoca al posicionar la ficha o al justificar, pierde 1 punto.

Cualquier jugador puede corregir y gana un punto.

Gana quien tenga más puntaje al terminar las fichas.



Actividad: Construyendo teselaciones

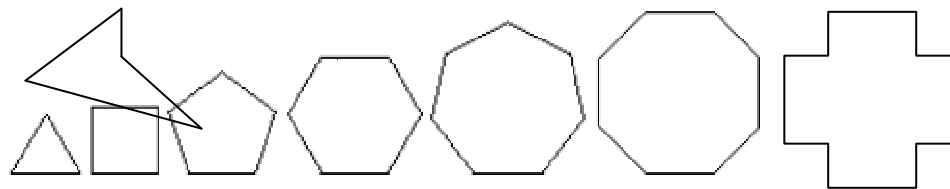
Propósito: Esta actividad permite que los alumnos identifiquen regiones poligonales regulares e irregulares que cubren o no el plano.

Materiales

- Regiones poligonales en papel lustre, algunas de ellas permiten cubrir el plano otras no, de cada una se necesitan de dos colores y las suficientes para cubrir la hoja de papel blanco.
- Una hoja de papel blanco
- Goma de pegar
- Tijeras

Instrucciones

- Repartir un conjunto de figuras geométricas de un tipo y dos colores a cada grupo.
- Ejemplificar lo que significa pavimentar el plano, a través de la revisión de pavimentaciones construidas.
- Solicitar al grupo que disponga, en la hoja de papel blanco, las regiones poligonales para pavimentar el plano.
- Solicitar que registren las transformaciones aplicadas para armar la pavimentación.
- Motivar a cada grupo para que descubra por qué se puede o no cubrir la hoja de papel blanco.
- Solicitar que registren sus observaciones para luego compartirlas.
- Conducir al grupo para que establezcan relaciones entre la suma de los ángulos.

EJEMPLOS DE REGIONES POLIGONALES

Actividad: transformación de un cuadrado

Propósito: Esta actividad permite que los alumnos transformen un cuadrado para construir un tesela..

Materiales

- Papeles lustres de diferentes colores, en cantidad suficiente para pavimentar la hoja blanca.
- Una hoja de papel blanco
- Goma de pegar
- Tijeras

Instrucciones

- Motivar a los alumnos a diseñar teselas creativas que tengan sentido y significado.
- Mostrar las condiciones para transformar un cuadrado en una tesela.
- Conducir a los alumnos, para que descubran por qué al respetar las condiciones de la transformación se genera una tesela.

¿Qué otras actividades podrían realizarse con esta transformación?

