REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

R E C H I E M

VOLUMEN 11
1
2018
ISSN 0718-1213

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diseño y Diagramación de la Edición Digital

Editorial Gráfica: Duográfica Ltda
Contacto: rechiem@sochiem.cl

Revista Chilena de Educación Matemática
RECHIEM

VOLUMEN 11 N° 1-2018
ISSN N° 0718-1213

Revista RECHIEM, es una publicación de la Sociedad Chilena de Educación Matemática.
Las opiniones señaladas en notas o artículos firmados no representan las del Comité Editorial ni de la Sociedad.
LA dirección se reserva el derecho de publicar o sintetizar los artículos que estime conveniente. Correspondencia dirigirla a: rechiem@sochiem.cl

RECHIEM©
Inscripción N°143.059
ISSN n°0718-1213

Diseño de portada: Miguel Díaz Flores
Diseño y Diagramación (Edición Digital): Duográfica Ltda.
Noviembre 2018

Índice de contenidos

Índice de contenidos

Índice de contenidos

Índice de contenidos

Editorial

En este volumen, la revista RECHIEM, presenta un conjunto de trabajos de investigación en Educación Matemática relacionadas con la Educación Parvularia, Educación Básica, Enseñanza Media, Enseñanza Universitaria y Formación tanto Inicial de Profesores como en el servicio de su tarea profesional.

Estas propuestas constituyen un material interesante para analizar críticamente sus resultados y también como fuentes inspiradoras para continuar en la búsqueda de soluciones que mejoren los resultados de los aprendizajes matemáticos en todos los niveles.

Destacan como autores de estas propuestas, investigadores con una vasta trayectoria en este campo, como otros nóveles que nos dan indicios que se están incorporando nuevos recursos humanos que permitirán renovar la búsqueda de soluciones a los problemas detectados en el campo de la Educación Matemática.

Temáticas como la Resolución de Problemas Matemáticos en diferentes niveles, la construcción de instrumentos evaluativos para la búsqueda de información en distintos aspectos de la naturaleza humana, la búsqueda de estrategias didácticas para temas diversos, constituyen focos específicos de los trabajos publicados.

Realizada esta invitación los instamos a una revisión exhaustiva de este volumen

Pierina Zanocco Soto
Directora Revista RECHIEM
Sociedad Chilena Educación Matemática - SOCHIEM

Miradas didácticas ad hoc en problemas específicos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática

Marcela Parraguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

Este artículo presenta desde una postura cognitiva y a través de ejemplos, distintas miradas didácticas a problemas concretos que emergen en enseñantes y aprendices respecto de tópicos matemáticos específicos. Cada ejemplo, es el resultado de una investigación, que se abordó desde una adhesión o variedad de la Teoría Modos de Pensar –Teórico y Práctico–, donde los elementos articuladores entre los Modos son los elementos principales de la mirada que se quiere establecer, para evidenciar la comprensión de los objetos matemáticos concretos que se abordan en cada uno de esos ejemplos.

Palabras clave: Teoría modos de pensamiento, articuladores y ejemplos.

Antecedentes

ELa teoría Modos de Pensamiento de Sierpinska (2000) se concibe en sus inicios solo en el contexto del álgebra lineal (AL), con la finalidad de hacer explícito el pensar teórico de esta rama de la matemática. En su trabajo con enseñantes y aprendices del AL, Sierpinska identificó tres tipos de pensamientos que ellos ponen en juego –como estrategia cognitiva–, cuando enseñan o aprenden el AL. Dos de ellos corresponden al pensar teórico y el otro al pensar práctico del AL.

El pensamiento teórico del AL. Se produce en el hecho puro de pensar las relaciones sobre sistemas de conceptos del AL, y que Sierpinska (2000) los explicita en los Modos de Pensar **Analítico-Aritmético (AA)** y **Analítico-Estructural (AE)**, donde los objetos del AL son dados indirectamente. Esto es, en el modo AA un objeto es definido por una fórmula que permite calcularlo, en cambio, en el modo AE, un objeto es definido a través de un grupo de determinadas propiedades.

El pensamiento práctico del AL. Se genera con el fin de obtener algo concreto en acciones sobre hechos determinados del AL y Sierpinska lo denomina Modo de pensar **Sintético-Geométrico (SG)**, donde los objetos del AL son dados directamente para ser descritos por la mente.

Estos tres modos de pensar el AL, –AA, AE y SG– hay que considerarlos igualmente útiles en una actividad matemática, porque cuando ellos interactúan –a través de elementos que se han etiquetado como *articuladores*–son muestra de comprensión del AL. También hay que destacar, que estos tres modos de pensar emergen en lo histórico-epistemológico del AL para abordar algunas posiciones dogmáticas opuestas, como, (1) que el AL rechaza los números dentro de la geometría o (2) que la intuición geométrica sea llevada a un dominio puramente aritmético.

En lo que sigue, se mostrarán una serie de ejemplos que se han agrupado en dos categorías: Cónicas y Sistemas Numéricos con la finalidad de mostrar cómo esta Teoría ha evolucionado, al interpretar ahora modos de pensar objetos matemáticos que no pertenecen al ámbito del AL, propiamente tal.

Cónicas

Indagación en el objeto cónicas (Astorga y Parraguez, 2014; Bonilla y Parraguez, 2013) a través de los modos de pensar: estuvo motivada en el hecho que las técnicas analíticas que utilizan los estudiantes, no son insuficientes para lograr una comprensión profunda del concepto.

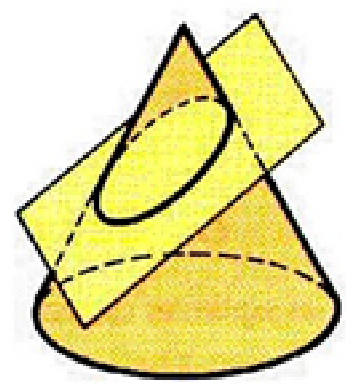
Modo de pensar AA-Elipse	Modo de pensar AE-Elipse	Modo de pensar SG-Elipse
Conjunto de pares ordenados que cumplen la ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ donde a y b son números reales distintos.	Lugar geométrico de todos los puntos del plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es siempre constante positiva.	

Figura 1.Modos de pensar una elipse en el plano (Bonilla y Parraguez, 2014, p. 24).

En Bonilla y Parraguez (2014), se presentan los tres modos de pensar la elipse (Figura 1) y que, a través de la metodología de estudio de caso (Stake, 2010), se logró establecer que los articuladores que evidencian los estudiantes, tuvo su éxito en gran medida gracias al diseño de preguntas en la Geometría Discreta del Taxista (Krause, 1986). A continuación, se presenta una de las preguntas utilizadas en la investigación reportada.

Las tres imágenes de la Figura 2 representan elipses en "Geocity". Los puntos F y F´ se conocen como focos de la elipse. ¿Qué característica común tienen los puntos de la elipse en relación a los focos en cada uno de los casos?

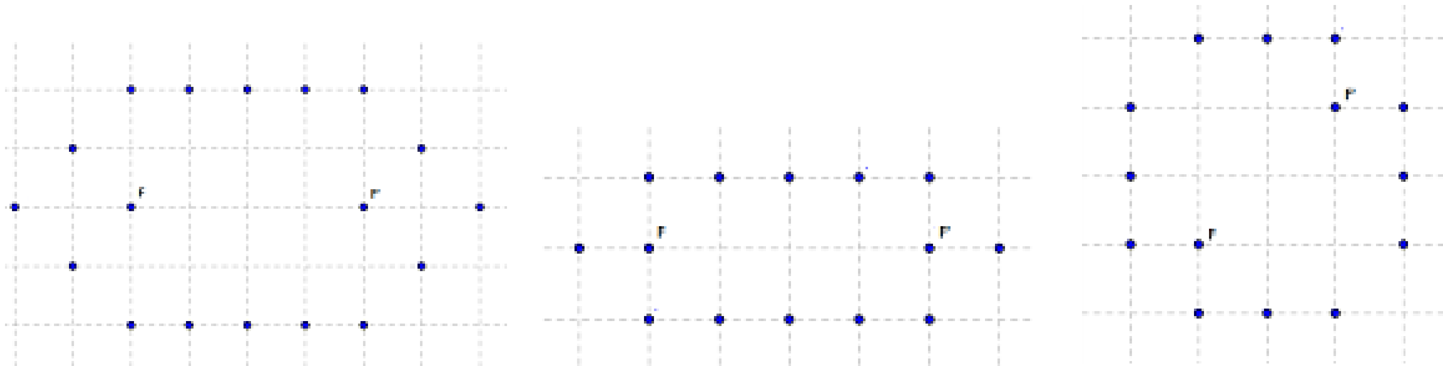


Figura 1.Modos de pensar una elipse en el plano (Bonilla y Parraguez, 2014, p. 24).

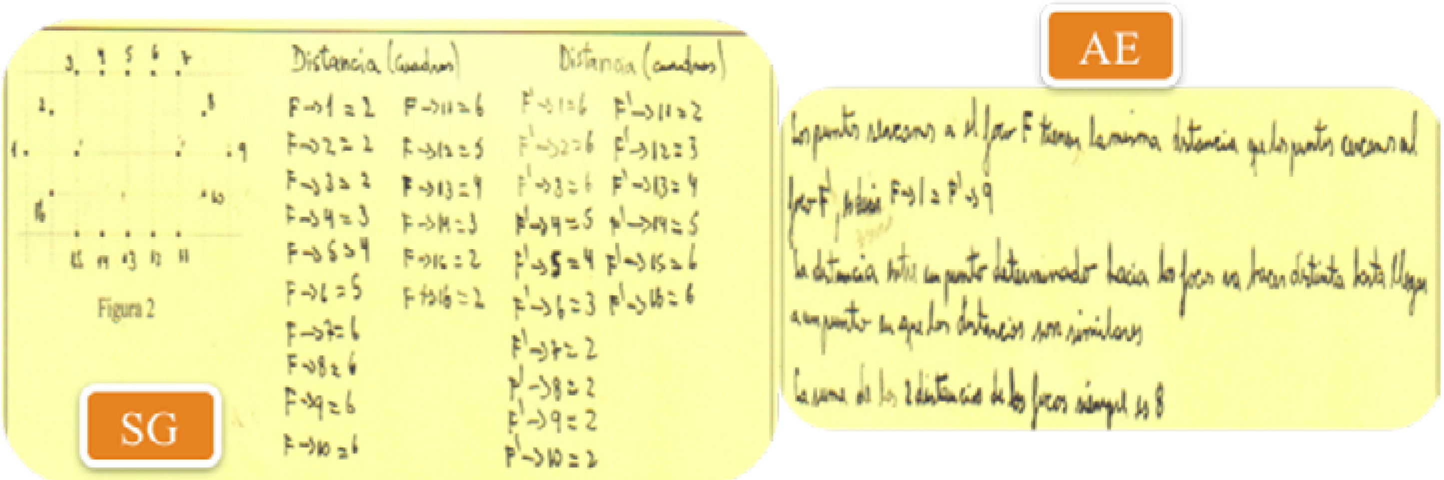


Figura 3. Argumento de SG-Elipse a AE-Elipse.

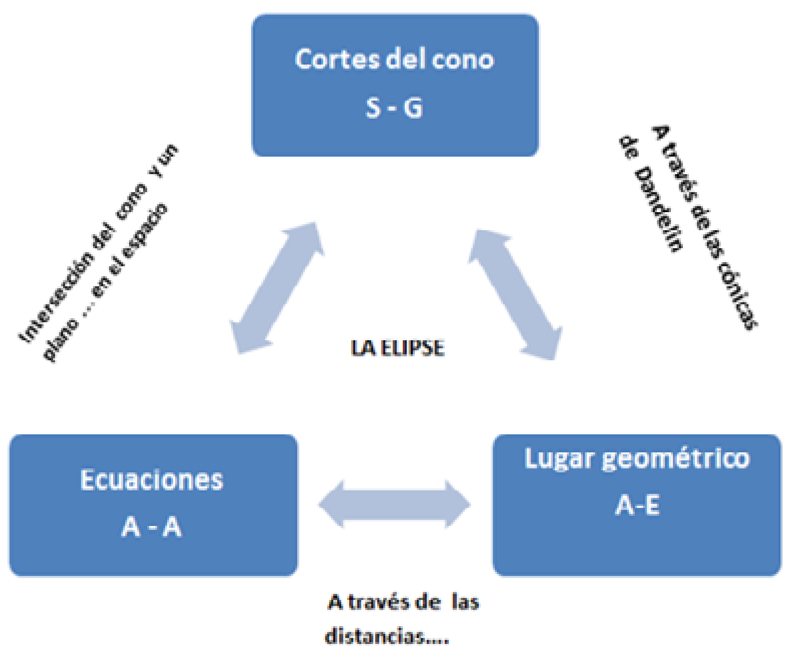


Figura 4. Elementos articuladores de los modos de pensar la Elipse.

Sistemas Numéricos

Otros tópicos que se han trabajado desde los modos de pensar son los sistemas numéricos (Randolph y Parraguez, 2015; Bonilla y Parraguez, 2015). Decimos sistema y no conjunto numérico, porque son conjuntos dotados de estructura. La motivación de estudiar estos tópicos, radica en la forma parcial que el currículo nacional propone trabajar los Sistema Numéricos, favoreciendo la operación algebraica de ellos y entendiendo a los números de estos Sistemas como entes simbólicos sin significado, y–no como un Sistema Numérico–.

A modo de ejemplo de los Sistemas Numéricos, en la Figura 5, se presentan los tres modos de pensar el Sistema de los Números Enteros.

AE

Z= $\{[(n,m)]_R : n,m \in N\}$
Donde $[(n,m)]_R$ es la clase de equivalencia del par (n,m)
R una relación de N x N, donde $(n,m) \wedge (p,q) \in$ N x N, tal que: $(n,m)R(p,q)$ *si y solo si* $n+q=p+m$.

AA

$$Z = Z^{+} \cup Z^{-} \cup \{0\}$$

SG

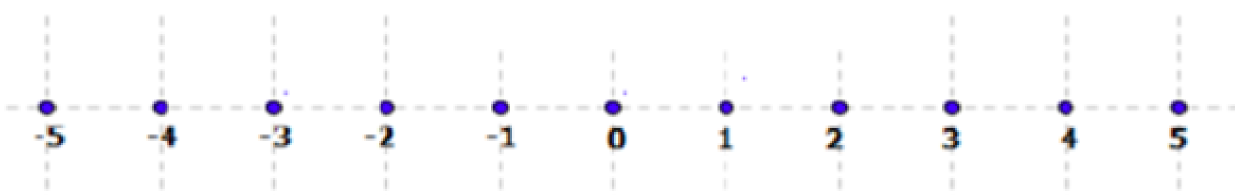


Figura 5. Modos de pensar el Sistema de los Números Enteros
(Bonilla y Parraguez, 2015, p. 588).

Utilizando la metodología de estudio de caso (Stake, 2010), se logró evidenciar que los estudiantes de Enseñanza Media logran articular el modo SG-Sistema Z con el modo AE-Sistema Numérico Z, a través la correspondencia entre la recta que muestra los números enteros y su correspondiente clase de equivalencia. Esto último es muy importante de explicitar, ya que un conjunto de números (AE) se identifica con uno solo que lo representa (SG), lo que se muestra en la Figura 6.

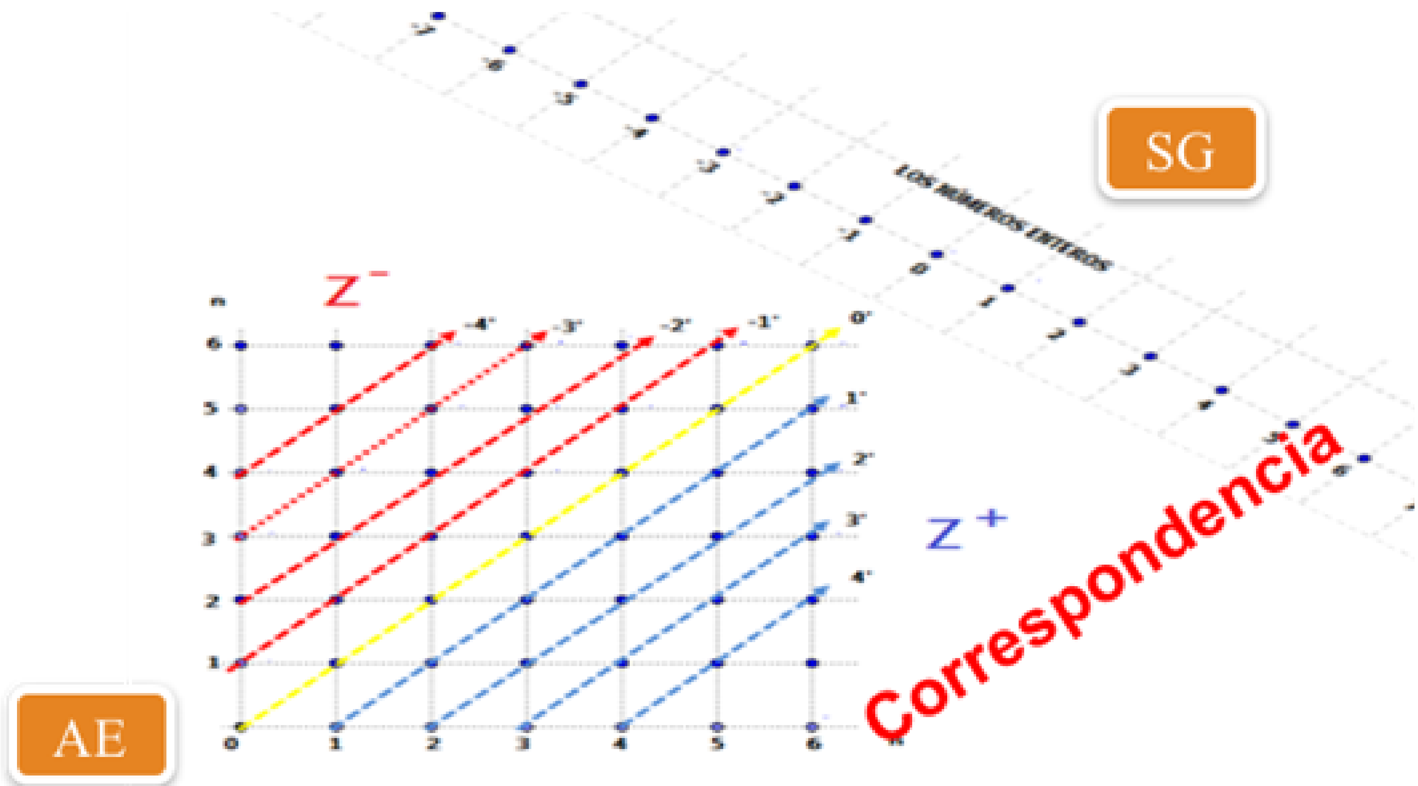


Figura 6. Articulación entre los modos AE y SG del Sistema de los Números Enteros.

Conclusiones

Estos ejemplos nos han mostrado explicaciones de la comprensión de objetos matemáticos desde lo Geométrico, lo Aritmético y lo Estructural, pero en interacción, haciendo explícito los articuladores, a través de evidencia empírica. También estos modos de pensar, han permitido desarrollar la investigación, no solo adheridos a un referente teórico, sino que a una variedad.

La investigación con los modos de pensar ha seguido desarrollándose en otras áreas, de hecho, ha incursionado en tópicos de Cálculo, explicitando los modos de pensar la derivada.

Referencias

Astorga, M. y Parraguez, M. (2014). Comprensión de las cónicas a través de los modos de pensamiento- Avance de Investigación. Revista Chilena de Educación Científica, 13(2), 19-24.

Bonilla, D. y Parraguez, M. (2015). Construcción Didáctica de los Números Enteros desde la teoría Modos de Pensamiento, 587-591. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (eds.), 2015. Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX. Villarrica: SOCHIEM.

Bonilla, D. y Parraguez, M. (2013). La elipse desde la perspectiva de la teoría los modos de pensamiento. Alemania: Editorial académica española. Recuperado de https://www.eaepublishing.com/catalog/details//store/es/book/978-3-8465-

6456-1/la-elipse-desde-la-perspectiva-de-la-teor%C3%ADa-los-modos-de-pensamiento

Krause, E. (1986). Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry. New York, United States of America: Dover Publications.

Pinto-Rojas, I. y Parraguez, M. (2017). Articulators for Thinking Modes of the Derivative from a Local Perspective. IEJME—MATHEMATICS EDUCATION, 12(10), 873-898.

Randolph, V. y Parraguez, M. (2015). Comprensión de los números complejos desde los modos de pensamiento. En R. Flores (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa nº 28, 401-409. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Disponible en: http://www.clame.org.mx/documentos/alme28.pdf

Sierpinska, A. (2000). "On some aspects of students' thinking in linear algebra", in J.-L. Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra, 209-246. Dortrecht: Kluwer Academic.

Stake, R. E. (2010). Investigación con estudio de casos (5ª Ed.). Barcelona: Labor.

Errores comunes en el aprendizaje de patrones, una experiencia en aula de primaria

Nicole Farías, Macarena Valenzuela
Universidad Alberto Hurtado

Resumen

A partir de una experiencia de implementación de una secuencia didáctica en matemática en un 5° año de primaria, hemos realizado un estudio pedagógico y didáctico del tema matemático y de los alumnos que componen el curso en el cual se trabajó. Para ello se ha realizado el Método de análisis didáctico propuesto por Rico (2013), que consta de cinco estadios: conceptual, contenido, cognitivo, instrucción y actuación. Para esta contribución nos enfocamos en el análisis cognitivo, específicamente en los errores que se evidenciaron en las respuestas de los estudiantes a ciertas tareas planteadas, constatándose la presencia de errores investigados a priori, además de otros que surgieron durante la intervención.

Palabras clave: Errores, secuencia didáctica, patrones y secuencia

ABSTRACT *From an experience of implementation of a didactic sequence in mathematics in a 5th year of primary school, we have made a pedagogical and didactic study of the mathematical theme and of the students that make up the course in which we will work. To this end, used the didactic analysis method proposed by Rico (2013). For this contribution we focus on the errors that were evidenced in the students' responses to certain tasks, evidencing the presence of errors a priori investigated, as well as others that arise during the intervention.*

Antecedentes

En el contexto de práctica profesional del último año de la carrera de Pedagogía en Educación Básica de la Universidad Alberto Hurtado se realiza esta propuesta didáctica para optar al título de Profesora General Básica en la Mención de Matemáticas.

A partir del Método de Análisis Didáctico (Gómez, 2002; Rico, 2013), el cual es definido por Gómez como: "una conceptualización del modo en el que el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares." (Gómez, 2002, p. 251), hemos realizado a priori un análisis conceptual, de contenido y cognitivo, para luego planificar e implementar una secuencia didáctica (Análisis de instrucción), terminando con un análisis de actuación en el cual se obtuvo, como parte de los resultados, una evidencia de los errores y dificultades explorados anteriormente en el análisis cognitivo.

Análisis cognitivo: Limitaciones en el aprendizaje

Durante la secuencia didáctica diseñada se trabajaron problemas en los que los estudiantes suelen cometer errores y de tal manera de observar la forma en que éstos se enfrentan a las tareas con un propósito específico. Por lo anterior es preciso estudiar los errores que cometen los estudiantes en torno al contenido matemático Secuencias, para anticiparse a las decisiones didácticas respectivas.

Algunos de los errores encontrados en la literatura y que cometen los estudiantes en Secuencias son:

- Obtienen la ley general – el patrón- analizando los primeros términos sin examinar los términos superiores.
- Confunden progresión aritmética y geométrica.
- No son capaces de identificar las sucesiones como un conjunto de elementos que tienen características comunes.
- No son capaces de detectar regularidades.

Metodología

El examen de resultados se realizó desde el paradigma cualitativo, de tipo descriptivo interpretativo (Hernández; Fernández y Baptista, 2010), utilizando el análisis de contenido con unidades referenciales correspondiente a las respuestas orales y/o escritas que tienen conexión o idea en común (Flick, 2004). Para ello se han considerado las respuestas escritas de los estudiantes en sus guías de trabajo específicas, diseñadas para las clases, y los argumentos orales a dichas respuestas, que se fueron registrando a medida que transcurría la clase.

Los sujetos en estudio son 36 estudiantes de 5° Básico que cuentan con 6 horas semanales en la asignatura de matemáticas. El objetivo por trabajar en la secuencia didáctica fue extraído de los Programas de Estudio del Currículo Nacional: OA14: *"Descubrir alguna regla que explique una sucesión dada y que permita hacer predicciones"* (MINEDUC,2013)

Luego de la implementación de cada una de las clases diseñadas, se analizaron las respuestas de los estudiantes en dos tareas propuestas, las cuales tienen cabida debido a que se relacionan con los errores y dificultades investigadas, y, además, porque de ellas surgen nuevas dificultades. Se analizará la tarea de la cual éstas emergen de modo que representen para futuros análisis de contenido un error común de los estudiantes para tener en cuenta, y, a la luz de ello, orientar el aprendizaje.

Análisis y resultados

Las tareas seleccionadas para el análisis se presentan a continuación:

- Continuación de un collar a partir de una secuencia dada, actividad que se realizó durante la segunda clase.
- Continuar una secuencia geométrica, tarea que se propuso en la tercera sesión.

Las respuestas a las actividades antes mencionadas se categorizaron según los diferentes errores, obstáculos y dificultades que a priori se habían investigado con el método del Análisis Didáctico (Rico, 2013), y con algunas categorías emergentes durante nuestro estudio, que surgieron de las respuestas de los estudiantes. Las categorías establecidas para el análisis fueron:

Categoría	Descripción de la categoría	Relación con la investigación a priori o emergente
PUT	Obtienen la ley general – el patrón- analizando los últimos términos de la secuencia.	Este error se asemeja a uno de los investigados a priori.
PDR	Utilizan patrón de repetición para completar el collar.	**Se levantan estas categorías debido a que un importante número de estudiantes continúan la secuencia de estas dos formas.**
PRC	Utilizan patrón de recurrencia combinada.	

A partir de la categorización anterior, se obtienen los siguientes resultados.

PUT: Obtienen la ley general – el patrón- analizando los últimos términos de la secuencia.

La problematización presentada a los estudiantes durante la tarea analizada fue: *"Un artesano recibe un collar para reparar; el dueño del collar desea conservar el diseño original de la joya, por ello junto a las piezas sueltas trae consigo parte del collar que quedó sin desarmar".*

A partir de la construcción de los estudiantes, se identificó que tres de ellos respondían a la tarea incurriendo en uno de los errores investigados en el Análisis de Contenido. Lo anterior se ejemplifica en las figuras 1 y 2.

Fig. 1: Secuencia entregada a los estudiantes

Fig. 2: Secuencia seguida por los estudiantes

Relación con el error investigado: Los estudiantes consideraron como patrón los últimos elementos de la secuencia sin analizar los elementos previos que la conformaban y establecieron que el patrón es: rosada, celeste, rosada, (5) amarillas.

***PDR:** Utilizan patrón de repetición para completar el collar.*

Si bien en el análisis de contenido se esperaban tres formas para completar el collar: (1) completar el collar con una parte de él que se repite (perla rosada, perla celeste, perla rosada) y la otra que cambia de forma ascendente (aumento de perlas amarillas); (2) determinar el patrón para completar el collar analizando los primeros términos de la secuencia y (3) completar el collar sin seguir ningún patrón; surgió a partir de la realización de la actividad una nueva forma de completar el collar que no había sido considerada en el análisis previo.

Esta forma consistió en tomar la secuencia ya entregada y repetirla de modo que ésta pasó a ser el patrón para completar el collar. Al realizar el monitoreo por el salón, algunos estudiantes manifestaron que lo completaron de esa forma, ya que debían repetir lo que ya estaba.

Existen otras estrategias comunicativas que también son relevantes para la gestión de la argumentación, y que se pueden dar en otras clases. Por ello creemos que el profesor utilice estrategias comunicativas es una de las condiciones principales para que se promueva argumentación en el aula de matemáticas.

A continuación se muestra una imagen ilustrativa de esta representación:

Fig. 3:

En la secuencia del collar entregada a los estudiantes se utilizaron sólo colores y no formas (cuentas de estrellas o flores) con la intención de que los estudiantes no tuviesen que analizar dos elementos: color y figura, propiciando que identificaran que las perlas rosadas y celestes se relacionaban de forma repetitiva (<u>rosada, celeste, rosada,</u> amarilla, <u>rosada, celeste, rosada</u>, amarilla, amarilla, <u>rosada, celeste, rosada,</u> amarilla, amarilla, amarilla...) y que las perlas amarillas lo hacían de forma recurrente (ya que aumentaban conforme se avanzaba en la construcción del collar). Pese a lo anterior, un gran número de estudiantes completó el collar considerando lo entregado como patrón de la secuencia.

PRC: *Utilizan patrón de recurrencia combinada.*

Otro grupo de estudiantes, continuaron la secuencia identificando una regularidad que considera, por un lado, el comportamiento de la perla rosada, celeste, rosada como patrón de repetición y por otro, el de las perlas amarillas como patrón creciente. Se presentan en las figuras 5 y 6 ejemplos de la construcción señalada:

Fig. 5:

Fig. 6:

Durante el recorrido por los grupos de trabajo que completaron el collar de la forma antes mencionada, se registraron los siguientes argumentos sobre cómo se continuaba el collar:

> *Lucas: Hay que repetir la rosada y la celeste y las otras suben [señalando las amarillas].*
>
> *Martina: [Mientras construía el collar decía] Una celeste, una rosada, una celeste, una amarilla, una celeste, una rosada, una celeste, dos amarillas, una celeste, una rosada, una celeste, tres amarillas…*

Se mencionan estas intervenciones orales de los estudiantes debido a que en ellas se manifiesta que existe una parte del patrón que se comporta de forma repetitiva (rosada- celeste- rosada), pero hay otra que lo hace de forma ascendente (1 amarilla, 2 amarillas, 3 amarillas, 4 amarillas…).

Como conclusión del análisis de esta tarea podemos evidenciar que existe una gran cantidad de estudiantes que responden a la tarea completando el collar como una repetición de lo entregado, es decir, realizan un patrón repetitivo para continuar el collar; otros en cambio responden a la tarea considerando que lo entregado contempla dos patrones: uno de repetición y otro de recurrencia para continuar la secuencia, ambas representaciones correctas. Se confirma además con el análisis de los collares, algunas dificultades investigadas a priori en el análisis cognitivo.

APORTES Y DISCUSIÓN

El Método de Análisis Didáctico (Rico, 2013) es una gran contribución para la formación de profesores de matemáticas, ya que se constituye como un proceso recursivo que invita al docente a reflexionar sobre las actividades propuestas, los materiales utilizados y las formas de evaluación que diseña para los estudiantes. Es un análisis profundo que permite al docente, además, anticiparse a la clase misma y estar preparado ante eventualidades que en ellas se presenten, para, por ejemplo, atender y orientar de forma oportuna respecto de los errores que cometen los estudiantes en torno al contenido.

Referencias

Flick, U. (2004) Introducción a la investigación cualitativa. Madrid: Morata.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. Revista EMA, 7(3), 251-293.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2010) Metodología de la Investigación. 5ta Edición. México, México D.F.: Editorial McGraw Hill.

Lupiañez, J.; Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. J, González y M. Moreno (Eds.): X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 225-236). Instituto de Estudios Aragoneses. Huesca

MINEDUC. (2013). Programa de Estudio para Quinto Año Básico. En MINEDUC, Matemáticas, Programa de Estudio para Quinto Año Básico. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ortega, M. (2012). Unidad didáctica. Sucesiones matemáticas. Progresiones aritméticas y geométricas. Trabajo de fin de máster.(?)

Una situación a-didáctica para el tratamiento de la variable aleatoria

Valeria Bizet Leyton, Daniela Araya Tapia, Elisabeth Ramos Rodriguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

Se presenta una tarea escolar para el proceso enseñanza y aprendizaje de una variable aleatoria, que fue diseñada desde la teoría didáctica. En un previo y posterior análisis de la tarea se puede concluir que, en relación con la construcción del conocimiento correspondiente a la variable aleatoria, desde su caracter functional ésta presenta algunas dificultades en la Escuela Secundaria, a la cual asisten los estudiantes de 15 a 16 años de edad. Además la identificación de una variable micro-didáctica; número de elementos que el espacio muestral poseee.

ABSTRACT *We present a school task for teaching and learning process of , the random variable, which was designed from the didactic issues theory. An a priori and a posteriori task analysis has allowed to conclude, in relation with the construction of knowledge corresponding to the random variable (from its functional character), that presents some difficulties in high school students (from 15 to 16 years old). Furthermore the identification of a micro-didactic variable; number of elements that the sample space possesses.*

Palabras clave: Variable aleatoria, situación a-didáctica, teoría de situaciones didácticas, educación media.

Introducción

En los últimos veinticinco años, el tratamiento de la probabilidad se ha ido incorporando en los currículos de matemática en los distintos niveles educativos en gran parte de los países desarrollados (Vásquez y Alsina, 2014). Chile no ha quedado ajeno a estas reformas, por ello es que se requiere contar con investigaciones *ad hoc* en el ámbito de didáctica de la estadística y de la probabilidad.

En el presente estudio hemos trabajado con uno de los objetos matemáticos fundamentales del eje Datos y Azar en la educación media, como lo es la variable aleatoria. Desde décadas anteriores hasta la actualidad diversos autores (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016), proponen a la variable aleatoria entre los conceptos fundamentales en la enseñanza de la Estadística, posicionan a ésta como un conocimiento relacionado con la probabilidad esencial en la educación escolar y relevante para entender situaciones de la vida real.

En el currículo nacional (MINEDUC, 2009), el concepto variable aleatoria se introduce en el nivel Segundo Medio (15-16 años). En la guía didáctica del docente para dicho nivel y distribuida por el MINEDUC se menciona con respecto al objeto matemático, que algunos errores de los estudiantes pueden provenir de una inadecuada comprensión del concepto función (Jiménez y Rupín, 2013). Para Pérez y Parraguez (2013) la variable aleatoria al ser enseñada en el nivel secundario presenta dificultades epistemológicas, didácticas, cognitivas y pedagógicas existiendo *"poca claridad de la noción de variable aleatoria, lejos de relacionarla con su significado funcional (en el contexto estadístico, aleatorio)"* (p. 590). Desde la perspectiva de la epistemología de la matemática, Ruiz (2006) reporta que a los estudiantes les resulta difícil la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad.

En este escenario, nuestro estudio aborda la problemática relativa a las dificultades de los estudiantes de educación media en comprender la naturaleza funcional del concepto variable aleatoria. Es de interés conocer cómo los estudiantes se apropian del concepto aludido a nivel escolar. Para ello, hemos diseñado, aplicado y analizado los datos de la implementación de una tarea escolar, considerando como fundamento teórico elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas, de tal manera de atender a la pregunta de investigación, ¿Cuáles son las dificultades *que presentan los estudiantes al abordar una situación a-didáctica en una clase sobre variable aleatoria?*

A continuación, se precisan los conceptos de la Teoría de Situaciones Didácticas a considerar en nuestro estudio, para dar cuenta de la pregunta de investigación planteada.

Marco teórico

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) propuesta por Brousseau (2007), busca indagar el sistema didáctico, constituido por tres entes profesor-estudiantes-saber y sus interacciones focalizándose en la dimensión cognitiva y epistemológica, vinculada a la construcción del conocimiento matemático, siendo el profesor quien facilita el medio en el que el estudiante construye su conocimiento. En la TSD, existen dos conceptos fundamentales, situación didáctica y situación a-didáctica.

Una situación didáctica, es una situación normal de clase, donde el profesor elige un problema con la intención de enseñar al estudiante un saber matemático. Mientras que en la situación a-didáctica, el estudiante aborda un problema de donde emergen conocimientos, el profesor emplea esta situación para que los estudiantes construyan un conocimiento, al cual podrá referirse para exponer el saber, además sólo puede comprenderse con relación a la situación didáctica.

Brousseau (2007), introduce tres tipos principales de situaciones que conducen gradualmente al estudiante a especificar el conocimiento utilizado para resolver un problema: situación de acción, situación de formulación, situación de validación, las cuales conforman una situación a-didáctica. Luego de finalizada la situación a-didáctica, se lleva a cabo la institucionalización, donde el profesor explicita las relaciones entre el conocimiento construido por el estudiante en dicha situación y el saber que desea enseñar.

En el desarrollo de la tarea escolar de nuestra investigación, hay una primera situación *(de acción);* en un grupo de tres a cinco integrantes, el estudiante se interesa en abordar el desafío propuesto e intenta dar respuesta a él poniendo en acción conocimientos previos. La segunda situación *(de formulación),* el estudiante comunica al equipo su estrategia de resolución y discute entre pares para generar una estrategia común (representar la relación entre los conjuntos propuestos en lenguaje figural, tabular o natural). Una tercera situación (*exposición y discusión de estrategias),* cada equipo comunica al grupo curso sus resultados, comprobando estos, y logrando un consenso sobre la respuesta precisa del desafío. Para finalizar con la cuarta situación *(de institucionalización)* en la que el profesor a partir de las representaciones propuestas por los grupos, introduce los conceptos de variable aleatoria y función de probabilidad.

Cabe destacar que en la tarea escolar no se considera una situación de validación, pues los estudiantes no establecen la validez del conocimiento característico de la situación: la variable aleatoria. Panizza (2003) señala que, no se trata de una regla general, aunque pueda ser apropiado en algunos casos, que para cada saber al que apunte la enseñanza hay que pasar necesariamente por situaciones de acción-formulación-validación. Habrá conocimientos que son oportunos formular pero cuya validación explícita no sea apropiada para ciertos niveles de escolaridad.

Desarrollo

Este estudio se enmarca en el paradigma de investigación cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo. Los sujetos informantes fueron 22 estudiantes del nivel Segundo Medio (15 a 16 años) de un establecimiento educacional subvencionado de la región de Valparaíso. Como instrumento de recogida de datos se empleó una tarea escolar (ver figura 1) y un video de su implementación que tuvo una duración de 90 minutos.

A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor de taller de cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes inscritos que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:

Número de apoderados	8	13	7	2
Número de estudiantes	1	2	3	4

La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, asignándose a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero éstas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto, el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.

Dados los conjuntos A, B y C definidos por

A: el conjunto de 30 apoderados del taller. B: el conjunto de cantidad de estudiantes. C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación. Defina y represente la relación entre A y B y entre B y C.

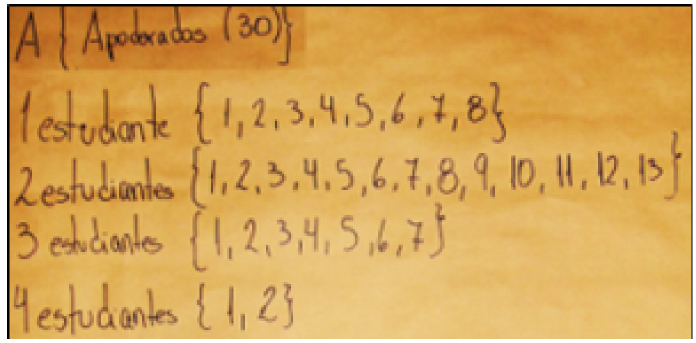
Figura 1. Tarea escolar implementada

Para el estudio se empleó la técnica del análisis de contenido, donde se definieron 10 categorías de análisis (C) en la primera y segunda situación de la situación a-didáctica diseñada. En la situación de acción el procedimiento se realizó a partir de la identificación preliminar de elementos conceptuales que pueden contribuir a la resolución del desafío, mientras que en la situación de formulación, se produjo con base en el reconocimiento de las posibles estrategias de resolución de éste. Los alumnos se dividieron en grupos asignados por Gi, con i=1, 2, 3, 4,5.

Reflexiones

En la situación de acción, inicialmente cuatro grupos (G1, G2, G3 y G5) identificaron como espacio muestral la cardinalidad de los cuatro subconjuntos al realizar una partición en A (figura 2). Después de realizar la devolución prevista en el plan de clase, la mayoría de los grupos (4) lograron identificar la cardinalidad del espacio muestral, aunque 2 grupos continuaron describiendo sus elementos como una colección de números y no como una colección de personas (figura 2). De esta manera se constata una dificultad para identificar el espacio muestral del experimento aleatorio.

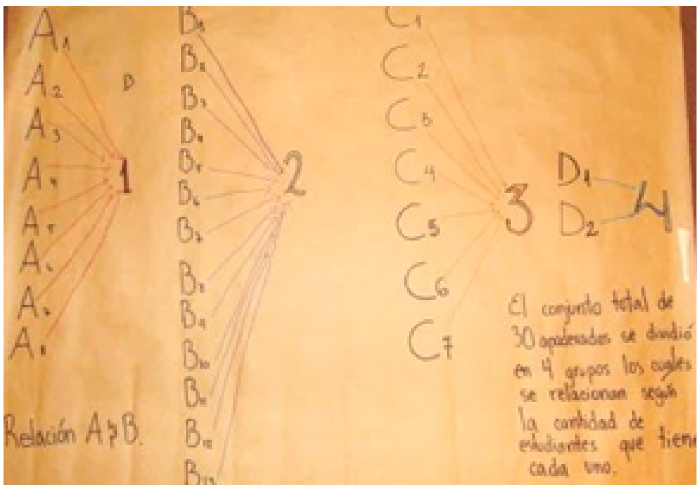
Identificación del espacio muestral del grupo G5 (5 estudiantes) antes de plantear la devolución al curso.



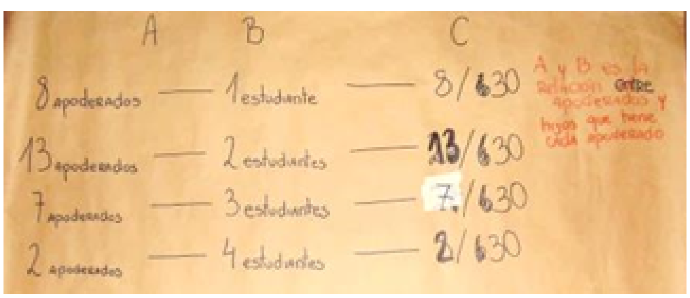
Identificación del espacio muestral del grupo G4 (3 estudiantes) después de plantear la devolución al curso.

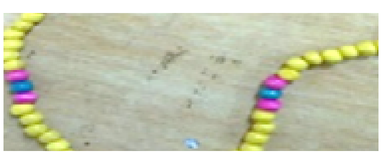
Figura 2. Respuesta en la situación de acción de algunos grupos.

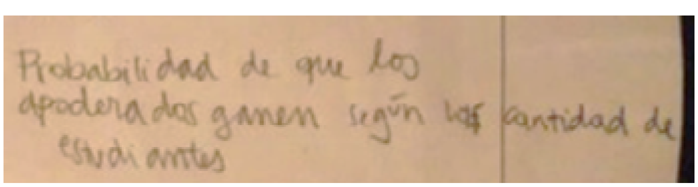
En la situación de formulación se aprecia, en las producciones o discursos de los grupos, que solo un grupo no respondió al requerimiento (G5). Tres grupos (G1, G2, G3) identificaron en el desafío la variable aleatoria; dos de ellos (G1 y G3) representaron la relación entre los conjuntos A y B en lenguaje natural y lenguaje figural a través de un diagrama sagital o esquema. Además, solo un grupo (G2) representó dicha relación a través de una tabla. También en esta situación, tres grupos (G1, G2 y G4) reconocieron la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria; dos de ellos (G1 y G4) representaron la relación entre los conjuntos B y C en lenguaje natural. Además el grupo G1 representó la relación en lenguaje figural mediante un diagrama sagital. Es importante destacar que la respuesta del grupo G2, fue clasificada en la categoría C10, ya que en su discurso evidenciaron haber reconocido la función de probabilidad (figura 3), aunque precisamente en la tabla representaron la función compuesta entre el espacio muestral y la probabilidad. Es así, que fue posible identificar una dificultad asociada a la aplicación del concepto de función real en el contexto de probabilidad, en particular, una dificultad en relacionar el recorrido de la variable aleatoria con el conjunto de probabilidades que ésta toma en cada uno de sus posibles valores.



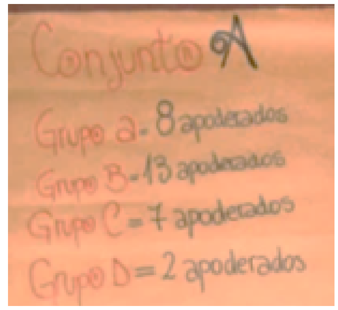
Grupo G3 (4 estudiantes)

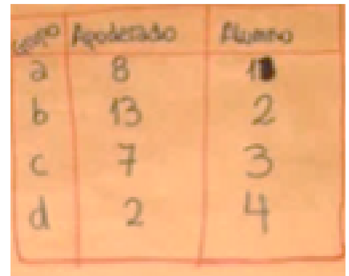




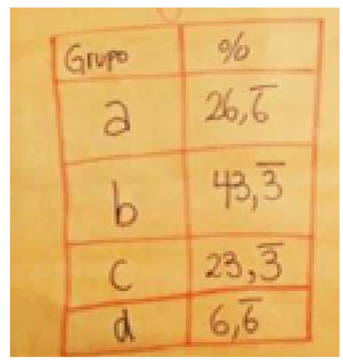


Grupo G1(5 estudiantes)





Por ejemplo la probabilidad de un apoderado que tiene un hijo gane la rifa".



Grupo G2(5 estudiantes)

Figura 3. Respuesta en la situación de formulación de algunos grupos.

Avances

se confirma la presencia de varias dificultades reportadas previamente en la literatura relacionada con la comprensión de la variable aleatoria: dificultad en identificar elementos del espacio muestral (Batanero, 2001), dificultad en identificar las probabilidades de sucesos (Fernández, Andrade, Montañez, Beltrán y Zamora, 2011) y dificultad asociada a aplicar el concepto de función real en el contexto de probabilidad (Jiménez y Rupín, 2013). Si bien existen investigaciones previas que reconocen dichas dificultades, estas no conectan esas dificultades con el análisis de los potenciales tipos de registros usados por los estudiantes y los obstáculos intrínsecos asociados a estos. Además como resultado de la implementación del desafío se evidenció la utilización implícita de la variable aleatoria sin haber sido definida previamente (Ruiz, 2006) y la variable micro didáctica: cantidad de elementos que posea el espacio muestral.

Conclusiones

Es posible concluir que la tarea escolar diseñada es una auténtica situación a-didáctica, la que permitió al profesor abandonar su rol de comunicador del saber y a los estudiantes construir su propio conocimiento como una experiencia grupal y colaborativa, con la cual el docente podrá conectar el saber institucional.

Referencias

Batanero, C. (2001). Didáctica de la estadística. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H.& Sánchez, E. (2016). Research on Teaching and Learning Probability.New York: Springer.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Fernández, F., Andrade, L., Montañez, J., Beltrán, J. y Zamora, S. (Junio, 2011). Hacia una posible aproximación comprensiva de la variable aleatoria. En XIIIConferência Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM), Recife, Brasil.

Jiménez, L. y Rupín, P. (2013). Matemática 2° Medio Guía didáctica del docente. Santiago: Ediciones SM

MINEDUC (2009). Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza, Enseñar matématica en el nivel inicial y primer ciclo de EGB: Análisis y propuestas. Buenos Aires: Paidós.

Pérez, B. y Parraguez, M. (2013). Construcciones mentales de los conceptos aleatorios y determinista a partir de la regresión lineal. En R. Flores (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 589-598. México: Comité Latinoamericano de. Matemática Educativa.

Ruiz, B. (2006). Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria (Tesis de maestría no publicada). CINVESTAV-IPN, México.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. Números, 85, 5-23.

Quién puede más: Un juego de aleatoriedad basado en la teoría de situaciones didácticas

Teresita Méndez Olave
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Resumen

Este artículo presenta episodios de una clase centrada en la construcción de la noción de aleatoriedad, en un curso de 20 niñas de 10 y 11 años. El análisis de las producciones de las alumnas se apoya en las nociones de contrato didáctico, medio y devolución de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD). La situación que se plantea es un juego, que es el medio por el cual se accede a estas nociones, en una situación adictiva. La metodología de investigación es cualitativa y considera algunas fases de la ingeniería didáctica. Uno de los resultados es que el modelo de gestión de clase demuestra diferentes fases que permiten a las niñas reconocer en el lenguaje de ellas la naturaleza aleatoria del juego.

ABSTRACT *This article presents episodes of a class focused on the construction of the notion of randomness, in a course of 20 girls of 10 and 11 years. The analysis of the productions of the girls is based on the notions of didactic contract, medium and return of the Theory of Didactic Situations (TSD). The situation that arises is a game, which is the means by which you access these notions, in an addictive situation. The research methodology is qualitative and considers some phases of didactic engineering. One of the results is that the class management model demonstrates different phases that allow girls to recognize in the children›s language the random nature of the game.*

Palabras clave: situación adidáctica, azar, toma de decisiones, incertidumbre, aleatoriedad.

Introducción

Una de las nociones centrales en la construcción del pensamiento probabilístico es el concepto de aleatoriedad. Azcárate et al, (1998) han señalado que esta noción es ambigua, compleja y habitualmente es considerada como un concepto obvio sin que su significado sea analizado con profundidad. Ellos plantean la hipótesis que determinados tipos de concepciones, pueden ser un claro obstáculo para la comprensión de la naturaleza probabilística de ciertos aspectos de la realidad. El concepto de suceso aleatorio se presenta como un aspecto fundamental para contribuir al desarrollo de una cultura probabilística. La vida cotidiana está plagada de sucesos aleatorios, entre ellos: los accidentes, el número de personas que acudirán a un concierto, sacarse la lotería o los viajes. Este tipo de sucesos, aun cuando muchos de ellos dependan de decisiones individuales, pueden ser estudiados como aleatorios. Azcárate et al, (1998) sostienen que la capacidad de reconocimiento y tratamiento de los sucesos aleatorios depende del nivel de reconocimiento de la incertidumbre y la complejidad presentes en los fenómenos.

Por otra parte, en el currículo chileno el estudio de la probabilidad se inicia en 4º básico (niños de 9 a 10 años). Las actividades curriculares plantean que los alumnos argumenten sobre lo predecible o no de un suceso, en 5º básico se desarrolla un lenguaje relacionado con la incertidumbre sugiriendo clasificar sucesos en posible, seguro e imposible, lo que claramente no es suficiente para reconocer la naturaleza aleatoria de estos sucesos. Lanzamiento de dados, monedas y flechas giratorias, proporcionan contextos escolares en los que los niños se relacionan con el azar desde la infancia. En 6° básico, las actividades se centran en la probabilidad experimental de un suceso, la que se expresa mediante la fracción que representa a la frecuencia relativa del experimento y en la cual la probabilidad cobra sentido en tanto se realizan experimentos aleatorios, (MINEDUC 2012).

En esta descripción se constata que: por una parte la noción de aleatoriedad no se conceptualiza, es decir, adquiere el estatus de una herramienta relacionada con el juego, mas no con lo impredecible, lo que ha sido señalado por Méndez y Guzmán (2016) y, por otra parte, una problemática que relaciona las complejidades del saber a enseñar la probabilidad con las dificultades que implica su enseñanza-aprendizaje y la importancia de una formación ciudadana que permita a las personas tomar decisiones que implican riesgo.

Esta problemática motiva a reproducir una situación adidáctica, como la concibe Brousseau, que permita indagar en los conocimientos sobre aleatoriedad que surgen en la interacción de 20 alumnas de 10 años de una escuela municipal de Curicó, frente a un juego de toma decisión.

Marco Teórico

Este trabajo se inscribe en el enfoque teórico de la Teoría de Situaciones Didácticas, la que propone producir escenarios de aprendizaje de las nociones matemáticas, desde la hipótesis de que las mismas no se construyen de manera espontánea.

El núcleo central de esta teoría es la noción de situación adidáctica, concebida por Brousseau "como un medio de aprendizaje que no puede ser dominado de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por otra parte, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego". Estas son algunas características del medio concebido por Brousseau, con el cual el alumno se relaciona, en forma autónoma, respondiendo al mismo a base de sus conocimientos, motivado por el problema y sin la motivación didáctica que implique la intervención del profesor. Todo regido por el contrato didáctico que el profesor va manejando en el desarrollo de la situación, poniendo en juego el proceso de devolución.

Respecto al contrato didáctico, Brousseau (1998, p. 60) afirma:

El maestro busca la manera de hacer la devolución al alumno de una situación adidáctica de modo que le provoque interacciones, las más independientes y fecundas posibles. Para esto él comunica o no informaciones, preguntas, métodos de aprendizaje, heurísticas, etc. El maestro entonces está implicado en un juego entre el sistema de interacciones del alumno con el problema que él le ha planteado [...].

Así el proceso devolución pone en juego dos tipos de interacciones, las del alumno con el problema y las del alumno con el profesor respecto al problema. El profesor, a través de preguntas en relación con el conocimiento previsto, lleva el proceso de enseñanza de modo de favorecer los aprendizajes, en Olfos et al. (2014, p. 343),

Metodología

La metodología de investigación es cualitativa, utilizamos algunas fases de la metodología ingeniería didáctica de investigación: análisis a priori – experimentación en clases – análisis de la experiencia y conclusiones.

Los informantes son 20 alumnas de 5º básico (10 y 11 años aproximadamente) de una escuela municipal de Curicó.

La situación corresponde a un juego diseñado por el equipo del IREM de Franche Comte (año 2007). El juego forma parte del medio adidáctico y la finalidad es determinar los conocimientos a priori y las representaciones que las alumnas movilizan sobre la noción de azar, aleatoriedad.

Se espera que en las producciones de las alumnas emerja el conocimiento social del azar.

Para el juego se ha previsto que las alumnas trabajen en parejas con un conjunto de tarjetas, numeradas de 1 a 9. Cada niña sortea dos tarjetas que contienen cifras del 1 al 9 para formar al azar números de dos cifras.

Las informaciones recogidas son analizadas, considerando las nociones de la Teoría de Situaciones Didácticas, contrato didáctico, medio, el proceso de devolución y las fases de las situaciones adidácticas.

El juego y sus reglas:

Materiales del juego: tarjetas numeradas del 1 al 9, para cada pareja de niñas y una cartilla de juego para cada alumna, como la siguiente:

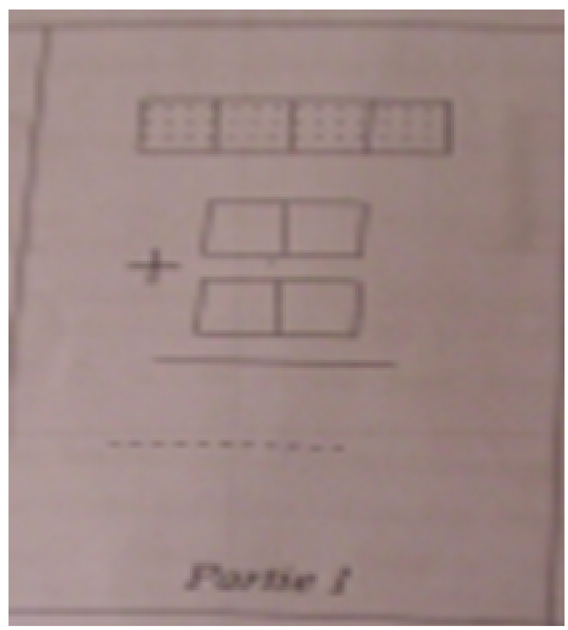


Figura nº 1: cartilla de juego

Las reglas de Juego:

Se juega en parejas y ambas son contrincantes.

Se ponen de acuerdo en quién revuelve las tarjetas, luego una alumna de cada pareja, sortea una tarjeta al azar y la da vuelta para que ambas la vean. Ellas anotan el número en la primera posición de la barra de 4 lugares, de la cartilla de juego y luego cada una decide el lugar en el que escribirá el dígito sorteado, en la primera barra de dos columnas (en la decena o en la unidad). A continuación la contrincante sortea una segunda tarjeta, la da vuelta y cada una la coloca en la casilla disponible de la primera línea, con esto forman el primer número. Para formar el segundo número se procede de la misma manera y se coloca en la segunda línea de dos posiciones de la cartilla de juego. Se suman los números obtenidos y se consigna el resultado en la línea punteada. La que obtiene mayor resultado, gana la partida.

El juego es sin reposición, es decir, una vez que se extrae una carta no sigue jugando. Esta es una variable didáctica que permite a las estudiantes, pensar en el lugar más conveniente para colocar las cifras en función de las tarjetas que quedan en la mano y de la probabilidad de formar números grandes.

Análisis a Priori: Se espera que las alumnas utilicen los términos de azar, suerte, chance u otros como los más adecuados para argumentar los resultados que van obteniendo y deduzcan reglas asociadas al juego y a la toma de decisiones. Algunas reglas son: Si se sortea primero el número más grande, se coloca en la casilla de la izquierda y si es el número más pequeño, se ubica en la casilla de la derecha.

Observación: El rol del profesor es, en todo momento, hacer explícitas estas reglas y organizar debates en la clase para obtener una justificación matemática.

Experimentación y Análisis de Resultados

En el minuto 5 la profesora (designada por **P**) forma parejas y explica las reglas del juego. Entrega cartillas de juego a cada alumna y realiza una partida con ellas para aclarar dudas.

Teóricamente en la clase se desarrollan fases de acción, formulación, propuestas por la TSD y una fase de preguntas finales.

La intervención de las alumnas aparecerá en el texto designada como Ai.

Una vez terminada la fase de acción, **P** desarrolla el proceso de devolución a través de preguntas como: Las que ganaron, ¿con qué puntaje lo hicieron? Y anota en la pizarra los puntajes obtenidos; ¿Quiénes obtuvieron algunos de estos resultados y perdieron?

En el minuto 38, P pregunta: ¿Hay algún método para ganar?

A4: Sí porque se puede colocar la cifra más grande en el primer lugar (casillero izquierdo de cualquiera de las filas con dos posiciones).

A9: Colocarlos en diferentes lugares, sumarlos y colocar el resultado.

Para A4 y A9 estas son estrategias que probablemente en el juego las hicieron ganar. La estrategia de A9 claramente es ubicar las cifras al azar, la que en el transcurso del juego no la hará ganar. En este caso no se toma la mejor decisión para tener más oportunidad de ganar. Se aprecia la existencia de un razonamiento que no analiza la relación entre el valor de los dígitos sorteados y la conveniencia de su posición en un numeral.

En la fase dos se vuelven a jugar 6 nuevas partidas, pero con tarjetas del 3 al 9. En este sentido hay un cambio de contrato didáctico.

Para la puesta en común, **P** pregunta, y escribe en la pizarra: ¿Qué hay que hacer para colocar la primera cifra? ¿Quién tiene otra regla?

Luego de la fase dos se aprecia que las niñas han encontrado reglas comunes que utilizan para decidir el lugar que darán a las cifras sorteadas: "Si la cifra es grande se coloca en la casilla de la izquierda" (el lugar de las decenas).

Casi al final de la clase surge una regla en el lenguaje de las niñas, el que se parafrasea como: *"Si la cifra es grande (7, 8 o 9) se coloca en el lugar de las decenas y si es pequeña en el lugar de las unidades".*

P: ¿Siempre puedo escoger esos números? (se refiere a los números grandes)

Algunas niñas: Noo;

P: ¿Por qué?

A5: Porque las tarjetas están vueltas.

A9: Y así uno no puede ver qué va a sacar.

A10: Se saca a la chuña.

A11: Al achunte.

A5: Se saca a la suerte de la olla. Porque si no sería trampa.

Las alumnas A10, A11 y A5 han develado la naturaleza aleatoria del juego, expresada en el lenguaje infantil, "el juego es al achunte, a la chuña y a la suerte de la olla". Se aprecia que el medio didáctico permitió que las niñas tomaran decisiones que implican riesgo y dieran significado a un suceso aleatorio en el lenguaje de las niñas.

Resultados

En la fase de acción emergen las primeras reglas de decisión: "ubicar la cifra más grande en la posición de las decenas" y "ubicar los números al azar". Además, han tomado conciencia de que con un mismo resultado se puede ganar, perder o empatar.

En la fase de formulación, las alumnas se han dado cuenta de que la ubicación de las cifras depende de su valor. En este sentido ubicar al azar no siempre les permite ganar. En esta fase se perfecciona la primera regla de acción y es aceptada por el grueso de la clase.

Las devoluciones de la profesora han permitido a las niñas elaborar reglas de decisión y seleccionar en el lenguaje natural expresiones que caractericen al juego como aleatorio, como fue previsto en el análisis a priori. Estas expresiones dan significado infantil a la compleja noción de aleatoriedad.

Conclusión

Los episodios descritos permitieron observar que la situación se reprodujo sin develar la naturaleza aleatoria del juego y que el medio de la situación solo fue dominado al final.

Los conocimientos aritméticos jugaron como medio para establecer reglas de decisión para ganar. En efecto en la fase de acción aparecieron las primeras reglas, las que carecieron de justificación analítica, en relación a los dígitos sorteados y su posición.

En la reproducción del juego se observa como el medio sanciona las decisiones de las jugadoras, y lo que se obtiene al final de la clase es una regla aceptada por la mayoría. La sanción negativa del medio, durante el desarrollo de la clase, les permite desechar la regla de acción "colocar las cifras en diferentes lugares, sumarlos y colocar el resultado"

Referencias

Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. Enseñanza de las Ciencias 16 (1), 85 – 97.

Brousseau, G. (1989), Theorie des situations didactiques. RDM. La Pensee Sauvage. Grenoble.

Groupe Élémentaire IREM de Franche Comté, 2007, ¿Qui peut le plus?Introduction de l'aleatoire en cycle 3, Grand N N° 80, pp. 43 – 58,

Méndez, T. Guzmán, I. (2016). Aproximación Intuitiva a la Aleatoriedad, el caso de Alumnos de 13 y 14 años de un Liceo Municipal. Bolema, Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 1145- 1164.

MINEDUC, (2012) Bases Curriculares ciclo básico - Programas de curso ciclo básico. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación

Olfos, R.; Estrella, S.; Guzmán, I. (2014).Gestión Didáctica en Clases y su Relación con las Decisiones del Profesor: el caso del Teorema de Pitágoras en séptimo grado. Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 341-359.

La función exponencial basada en el estudio de clases

Carlos Andrés Ledezma Araya
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

El presente estudio tiene por objetivo estudiar las características didácticas que debe tener una clase para que los estudiantes de Segundo año medio (15 a 16 años) sean capaces de alcanzar las etapas del proceso de modelización matemática. Para ello, se diseñó una secuencia de tres clases con el objeto función exponencial, estructuradas según el modelo didáctico-cognitivo de Blomhøj y Jensen para el proceso de modelización matemática, con el cual, en conjunto con elementos de la Teoría APOE, se analizaron los resultados de tres intervenciones que se implementaron con el primer plan de clase de la secuencia. Los resultados evidenciaron los logros de los grupos de estudiantes con respecto al proceso de modelización, y las construcciones mentales en determinadas fases del mismo, permitiendo proyectar el estudio para futuras implementaciones y reformulaciones.

Palabras Clave: Estudio de clase, función exponencial, modelización matemática

Introducción

La noción de función se encuentra presente desde los primeros niveles educativos en el ámbito de la matemática escolar, sin embargo, el currículo chileno postula el comienzo de su estudio formal en el nivel Octavo año básico (13 a 14 años) en sus formas lineal y afín, junto con el desarrollo de la habilidad de modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2016). Adicionalmente, el Programa de Estudios vigente hasta 2017 estipulaba que en el nivel Segundo año medio (15 a 16 años) se introducían las funciones raíz cuadrada, exponencial y logarítmica, trabajando también la modelización (MINEDUC, 2011).

En el análisis efectuado a dos textos de estudio utilizados hasta 2017 para el curso Segundo año medio, se evidenció una carencia de ejercicios de modelación con el objeto matemático función exponencial (véase Ledezma, 2017), en el sentido que las actividades propuestas descuidaban la concreción de las distintas fases de un proceso de modelización requerido para la construcción de conocimiento matemático (Blum y Borromeo-Ferri, 2009). De acuerdo a ello, esta carencia a la que se aludió anteriormente en los textos escolares puede limitar el desarrollo de la habilidad de modelar en los estudiantes, a pesar del interesante esfuerzo que se establece en MINEDUC (2011; 2016) por introducir y trabajar la modelación en el currículo nacional.

Para esta investigación se ha propuesto como objetivo principal estudiar las características didácticas que debe tener una clase de modelación para que los estudiantes sean capaces de alcanzar todas las etapas del proceso de modelización matemática, y a su vez, comprender cómo el proceso de modelización matemática aporta al aprendizaje del objeto matemático función exponencial.

Marco Conceptual

Para este estudio se construyó un marco conceptual basado en dos referentes: por una parte, en el modelo cognitivo sobre las etapas del proceso de modelización matemática, propuesto por Blomhøj y Jensen (Blomhøj y Jensen, 2003; Blomhøj, 2004); y por otra, en la adaptación y modificación de un fragmento de la descomposición genética (en adelante, DG) propuesta por Vargas (2012) para la función exponencial. La articulación entre ambos referentes permite una mirada en la construcción de procesos, desde la Teoría APOE (Dubinsky, 1991), sobre ciertas fases del proceso de modelización matemática.

En el modelo propuesto por Blomhøj y Jensen (Blomhøj y Jensen, 2003; Blomhøj, 2004), se detallan seis sub-procesos, sobre los que sus autores enfatizan que no deben ser entendidos en forma lineal, sino que cíclica, lo que puede provocar una redefinición del modelo si la situación lo amerita. En consonancia, se adopta la noción de modelización matemática definida por Blum et al. (2003), como aquel proceso en que una situación-problema del mundo real es llevada hacia el mundo matemático en forma de un modelo, y que puede ser considerada como una herramienta significativa para el aprendizaje de la matemática, tanto por la relación que permite establecer con el mundo real, como por la importancia de su implementación como estrategia de aula, en donde se le conoce como modelación (Bassanezi y Biembengut, 1997).

Con respecto a la DG antes mencionada, se adaptó y modificó un fragmento de ésta con el fin de adecuarla a los contenidos y habilidades trabajados en Segundo año medio según al Programa de Estudio vigente hasta 2017, con un foco en la construcción de procesos durante las fases de matematización y de análisis matemático. Para ello, los prerrequisitos considerados para la DG fueron: la función como objeto matemático, el concepto de exponente natural mayor que 1, la noción de exponente no natural, y las propiedades de los exponentes (Vargas, 2012).

Metodología y contexto de la experimentación

Este estudio, de corte cualitativo y paradigma interpretativo, se enmarcó en el Estudio de Clases Japonés en la forma de una investigación-acción del tipo práctica. Se diseñó una secuencia didáctica de tres clases para estudiantes de Segundo año medio, donde la primera de éstas fue implementada en tres cursos distintos, según el acceso de los investigadores. En cada intervención, los estudiantes se organizaron en grupos de tres a cinco integrantes cada uno, como lo muestra la tabla 1.

Intervención	Grupos	Total estudiantes
Primera intervención (a)	G1a, G2a, G3a	23
Segunda intervención (b)	G1b, G2b, G3b, G4b	24
Tercera intervención (c)	G1c, G2c, G3c, G4c	30

Tabla 1: Clasificación de los grupos y número total de sujetos informantes por intervención

Para la recopilación de información, se registraron en video cada una de las intervenciones, y se recolectaron las producciones escritas de los estudiantes sobre el desarrollo de la actividad de clase implementada, considerando para su análisis sólo aquéllas que los sujetos informantes entregaron en forma ordenada y legible al término de cada sesión.

Análisis de Resultados

Para el análisis de los resultados, se levantaron seis categorías, correspondientes a las fases del proceso de modelización matemática: formulación del problema (FP), sistematización (SM), matematización (MT), análisis matemático (AM), interpretación/evaluación (IE) y validación (VL); y cinco sub-categorías, correspondientes a las construcciones mentales evidenciables durante las fases MT y AM, desprendidas de la adaptación y modificación de la DG: la acción 'diferencia de dos variables' (AD) y su interiorización en el proceso 'variación de variables' (PV), la acción 'cociente de dos variables' (AC) y su interiorización en el proceso 'razón de variables' (PR), y la coordinación de los procesos PV y PR en el proceso 'invariante de la función exponencial' (PI).

La tabla 2 muestra una síntesis global de los resultados obtenidos de la implementación del estudio, en la que se clasifican las producciones escritas de los grupos de sujetos informantes respecto de las etapas que lograron desarrollar del proceso de modelización matemática, y si evidenciaron construcciones mentales durante las fases MT y AM.

	Categorías/Sub-categorías					
Grupos	FP	SM	MT	AM	IE	VL
G1a	X	X				
G2a	X	X				
G3a	X	X	X	X	X	X

G3b	X	X	X	X		
G4b	X	X	Ad. Ac. Pv		X	
G1c	X	X	X	X	X	
G2c	X	X	X	X	X	
G3c	X	X	X	X	X	X
G4c	X	X	X	X		

Tabla 2: Síntesis global de los resultados del estudio

En este estudio, se consideró como 'clase ideal' a aquélla en la que, incluso presentándose dificultades y errores por parte de los estudiantes, éstos son subsanados con las devoluciones del profesor y las reflexiones propias del alumnado, para así poder lograr completamente las fases de la modelización. Bajo este principio es que se afirma que la tercera clase fue la más cercana a una 'clase ideal', ya que evidenció una mayor homogeneidad en sus resultados. Lo anterior, también guarda relación con la metodología del Estudio de Clases Japonés, pues al término de cada intervención se realizaron adecuaciones al plan de clase y mejoras a las devoluciones del docente, con base en las dificultades y errores evidenciados, otorgándose un carácter de perfectible a la propuesta diseñada.

Conclusiones

El estudio permitió vislumbrar que una de las características a tener en consideración para una clase de modelación es que ésta logre el balance entre una mínima intervención directa del profesor y una máxima independencia por parte de los estudiantes para desarrollar el ciclo de modelización matemática, en torno al planteamiento de una situación-problema desafiante, pero no imposible de resolver, y donde las preguntas del profesor permitan el tránsito de los alumnos a través de las fases propuestas, pero sin guiarlos en las respuestas (Blum y Borromeo-Ferri, 2009). Por otra parte, los datos recolectados de las intervenciones evidenciaron, en parte, sólo la reafirmación de aprendizajes en los alumnos, más que el logro de nuevos conocimientos.

Tanto la implementación como el análisis de los resultados obtenidos, sugirió una mirada de la modelización no como un objeto matemático, sino más bien como un proceso que requiere de la articulación de distintos elementos, tanto en lo que respecta a las habilidades y contenidos matemáticos previos, como del factor empírico en los sujetos que la desarrollan.

Este estudio fue financiado parcialmente por el Proyecto FONDECYT nº 1171744.

Referencias

Bassanezi, R. y Biembengut, M. S. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación – un nuevo método de enseñanza. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 32, 13-25. Obtenido desde http://www.sinewton.org/numeros/numeros/32/Articulo02.pdf

Blomhøj, M. (2004). Mathematical Modelling: A Theory for Practice. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lester, A. Wallby y K. Wallby (Eds.), International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics (pp. 145-159). Gotemburgo, Suecia: National Center for Mathematics Education.

Blomhøj, M. y Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 22(3), 123-139. doi:10.1093/teamat/22.3.123

Blum, W., Alsina, C., Biembengut, M. S., Bouleau, N., Congrey, J., Galbraith, P., ... Henn, H. W. (2003). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – discussion document. Educational Studies in Mathematics, 51(1/2), 149-171. doi:10.1023/a:1022435827400

Dubinsky, E. (1991). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.). Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Ledezma, C. (2017). Estudio de la Modelación con Función Exponencial para Estudiantes de Segundo Año Medio, según el Modelo de Blomhøj y Jensen (Tesis de magíster no publicada). Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

Ministerio de Educación de Chile. (2011). Matemática. Programa de Estudio para Segundo Año Medio. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile. (2016). Bases Curriculares 7º básico a 2º medio. Santiago, Chile: Autor.

Vargas, J. (2012). Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales (Tesis doctoral, Universidad de Salamanca, Salamanca, España). Obtenido desde http://hdl.handle.net/10366/121430

Estrategias en la resolución de inecuaciones lineales y racionales en educación superior desde la teoría APOE

Marcela Fuentes González y Elisabeth Ramos Rodríguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

Desde la teoría APOE, nos centramos en estudiar los mecanismos mentales que se requieren para activar las construcciones mentales de los alumnos en una clase diseñada en un Estudio de Clases para el tratamiento de las inecuaciones racionales, cuyos polinomios asociados tienen grado menor o igual a dos en alumnos de Educación Superior de nivel Técnico Profesional. Al implementar la clase, se observa que los alumnos carecen de conocimientos previos como coordenadas cartesianas, lo que les impide transitar entre el registro gráfico y el algebraico, por lo que no logran llegar al proceso esquema, pero permite reformular la clase más precisa y coherente con el objetivo propuesto.

Palabras clave: Inecuaciones racionales, APOE, secuencia didáctica, registro gráfico.

ABSTRACT From APOE theory, we focus on studying the mental mechanisms that are required to activate the mental constructions of students in a class designed a Class Study for the treatment of rational inequations, whose associated polynomials are less than or equal to two in Higher Education students of Professional Technical level. When implementing the class, it is observed that students lack previous knowledge as Cartesian coordinates, which prevents them from moving between the graphic and algebraic records, so they do not reach the schematic process, but it allows to reformulate the most precise and coherent class with the proposed objective..

Introducción

El estudio de las inecuaciones comienza con el concepto de desigualdad, definida como dos cantidades o expresiones que no son iguales, donde se utilizan registros gráficos y pictóricos asociados a signos ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $\neq$). Si bien desde muy pequeños los alumnos están familiarizados con el concepto de desigualdad cuando comparan sus estaturas para ordenarse en la fila del kínder, o van a un cumpleaños y terminan comparando quién cogió más dulces de la piñata, este es un concepto que no se ha definido como objeto matemático; por tanto, tomaremos sus comienzos en cuarto año de Enseñanza Básica, que es el nivel donde el alumno realiza por primera vez operatoria con inecuaciones. Posteriormente, cuando estos alumnos ingresan a la universidad el nivel de análisis que deben desarrollar para el mismo objeto matemático, se ve ampliado a funciones, sistemas de inecuaciones, optimización y cálculo diferencial e integral. A no existir este análisis los alumnos tienden a resolver inecuaciones transfiriendo técnicas propias de resolución de ecuaciones, dejando de manifiesto que existen falencias arraigadas en los conocimientos previos (Monje, 2017).

En la Educación Técnica Profesional, este problema aparece cuando los alumnos deben resolver inecuaciones en el registro gráfico, dejando de manifiesto la falta de conocimientos para realizarlo. En este contexto nos planteamos llevar a cabo un Estudio de Clases para la resolución inecuaciones en alumnos de primer año de Educación Superior, nivel Técnico Profesional. Para ello se diseñó un plan de clase, cuyo objetivo es la resolución gráfica de inecuaciones apoyada con el tratamiento del análisis de ecuaciones de la recta en el plano cartesiano.

La falta de conocimiento en los alumnos de Educación Superior para resolver inecuaciones utilizando registros gráficos (Núñez, 2012), llevaron a definir el objetivo del plan de clase como: resolver inecuaciones racionales, con polinomios de grado menor o igual a dos, por medio del método gráfico, utilizando rectas en la resolución del conjunto solución.

El análisis de los datos de la implementación del plan de clase se centra en identificar los mecanismos y construcciones mentales para el concepto y resolución de inecuaciones en la dirección de una Descomposición Genética (DG) de las inecuaciones. Es decir, escogimos el marco teórico APOE, dado que cobra sentido al momento de identificar los conocimientos del alumno para resolver inecuaciones, desde el análisis de sus producciones para inferir acerca de sus construcciones mentales, toda vez que este marco permite identificar el desarrollo del pensamiento lógico y la forma en que el alumno logra ciertas construcciones mentales.

Desarrollo

se utilizó el paradigma cualitativo de forma que sean verificables con la experiencia y la observación, existiendo para este caso una interacción entre el alumno y el objeto de estudio: inecuaciones racionales. El diseño del estudio corresponde a un Estudio de Clases que se realiza con propósito de mejorar la calidad profesional del docente (Isoda, Arcavi y Mena, 2012).

El instrumento de recogida de datos corresponde a las producciones de los estudiantes en relación a las tareas seleccionadas de la secuencia de enseñanza, para interpretar la DG incipiente en un curso de 21 alumnos de Educación Técnica, nivel superior. El plan de clases contiene cuatro actividades, diseñadas para activar en los alumnos sus conocimientos previos y permitir el tránsito entre registros algebraico, tabular y gráfico; independiente del registro el conjunto solución es el mismo.

El método de análisis se basó en la observación y entrevista con aquellos alumnos que manifestaron respuestas inesperadas o poco explícitas, no permitiendo identificar la construcción cognitiva lograda, para cual se establecieron categorías con indicadores asociados a cada actividad del plan de clase, los que al ser analizados permitieron establecer las construcciones necesarias para la concepción del objeto matemático inecuación en ambos registros. En concreto las categorías de análisis corresponden a las etapas del objeto matemático en la construcción acción y proceso.

Reflexiones

La construcción acción se logra cuando el alumno sigue instrucciones para dar respuesta a un requerimiento sin prestar mayor observación a las relaciones existentes, por ejemplo cuando iguala a cero la ecuación de la recta para obtener valores críticos y luego traza las perpendiculares al eje X en esos puntos, o cuando determina los intervalos en que se divide el eje X, toda vez que estas acciones obedecen a estrategias repetitivas, guiadas, donde no existe un razonamiento por parte del alumno, sólo lo realiza porque es una acción aprendida sin poder explicar por qué lo hace (figura 1).

Recta L1	Recta L2
y = x + 1 0 = x + 1 -1 = x	y = x - 3 0 = x - 3 3 = x

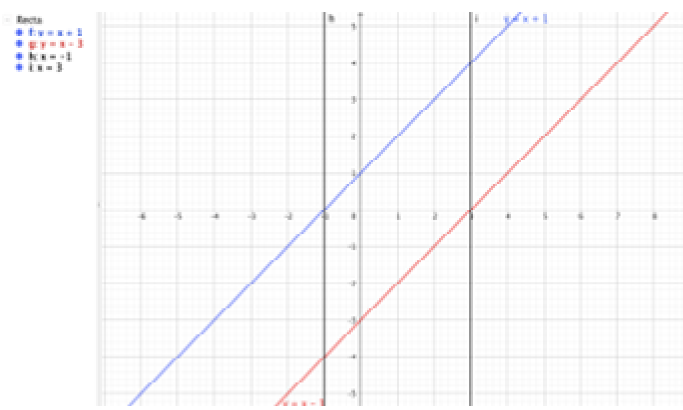


Figura 1: Ejemplo de construcción acción

La construcción proceso se evidencia cuando el alumno visualiza e identifica en el gráfico, que existen subconjuntos del dominio que vuelven las imágenes positivas o negativas (figura 2). En este caso existe reflexión del alumno sobre las acciones realizadas, donde relaciona el dominio con la imagen, sentando sus bases de análisis en conceptos previos de función y ecuación de la recta.

$$f(x)=x+1 f(x)=x-3$$

Pre-imagen	Imagen	Signo de la imagen
2	-1	-
1	2	+
4	5	+

Figura 2: Ejemplos de construcción proceso

Pre-imagen	Imagen	Signo de la imagen
-2	-5	-
1	-2	-
4	1	+

La construcción objeto se logra cuando el alumno logra declarar, visualizar, explicitar y comprender las inecuaciones sobre el axioma de cuerpo y orden en los Reales, cuando es capaz de ejecutar acciones en el objeto y desencapsular el objeto y volverlo al proceso que le dio origen las veces que sea necesario (figura 3). Esto se observa en el momento en que los alumnos identifican que pueden trasladar el signo de la imagen de las rectas, en cada sector de los intervalos generados por los puntos de intersección de la recta en el eje X, trasladando esa información a lo que será el conjunto solución de la inecuación planteada.

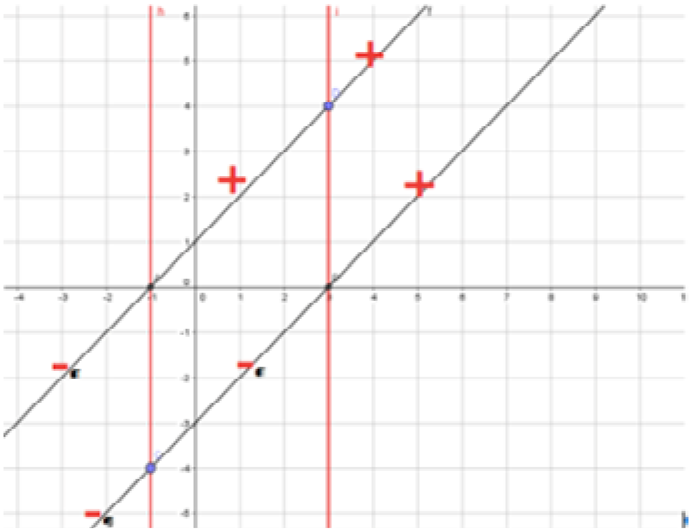


Figura 3: Ejemplos de construcción objeto

La construcción esquema (figura 4) alude al desarrollo gráfico de la resolución de la inecuación. Desde el punto de vista gráfico se logra cuando el alumno identifica las funciones que pueden ser utilizadas para que el gráfico represente la inecuación que se quiere resolver; o cuando se deben comparar dos o más gráficos dados, analizando los signos de las imágenes. En esta etapa, los alumnos logran reconocer que el conjunto de una inecuación expresada en forma racional constituida por dos expresiones lineales de primer grado con una incógnita tiene el mismo conjunto solución, que el generado por las mismas expresiones lineales, pero esta vez desarrolladas como un producto entre ellas y de esta forma podrán extrapolar a encontrar el conjunto solución de cualquier inecuación cuadrática.

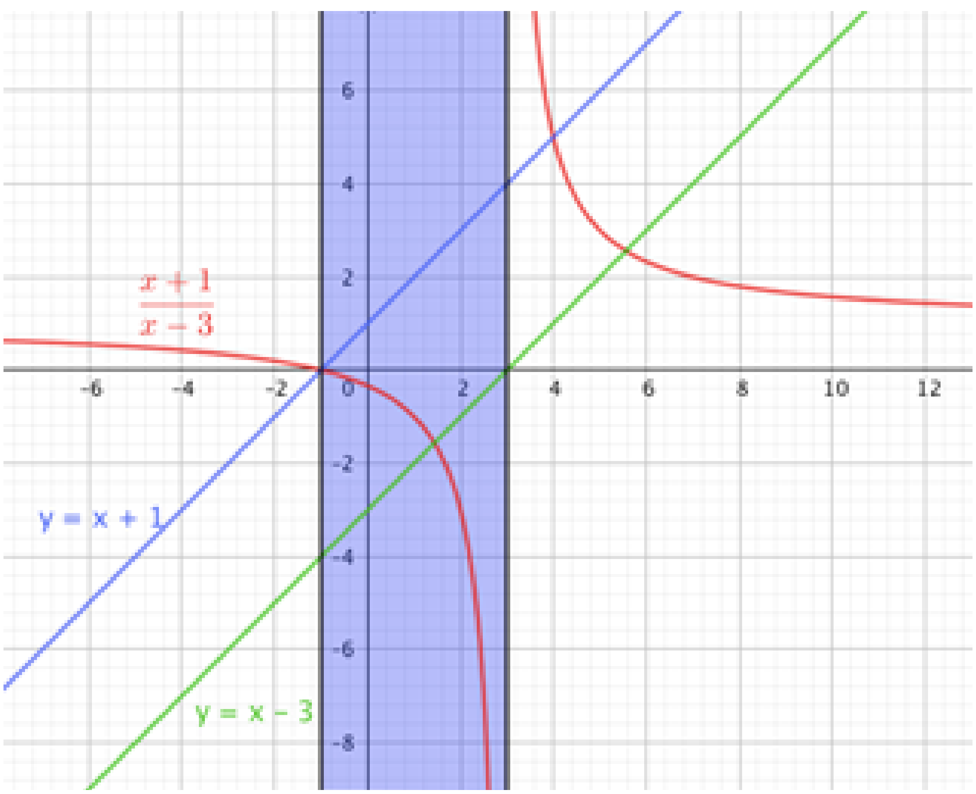


Figura 4: Ejemplo de construcción esquema

$$(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}) \left(\exists \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}\right) \left(a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1\right)$$

donde, $\frac{1}{a} = a^{-1}$, de donde se tiene que $a \cdot a^{-1} = 1 > 0$

Aplicando condiciones para resolver la inecuación:

$$(x+1)(x+3) < 0$$
$$\{(x+1<0) \wedge (x-3>0)\} \vee \{(x+1>0) \wedge (x-3<0)\}$$
$$\{x<-1 \wedge x-3>0)\} \vee \{x>-1 \wedge x<3\}$$
$$\{\emptyset\} \vee \{x>-1 \wedge x<3\}$$
$$\{x>-1 \wedge x<3\}$$

De los registros obtenidos por los alumnos en el plan de clase fue posible observar que los alumnos carecen de conocimientos previos, lo que concuerda con Barbosa (2008), Monje (2017), Torres (2013) y que se ven doblemente perjudicados ya que no hay una continuidad en el aprendizaje de las inecuaciones en el currículo escolar. Si se tuviese que establecer las construcciones mentales del alumno articuladas en el plan de clase, se concluiría que sólo llega a la construcción acción, toda vez que existen muchos vacíos arraigados en los conocimientos previos necesarios para cualquier construcción cognitiva. Consecuente con lo anterior y considerando que el alumno aún no es consciente del proceso como un todo, no es capaz de percibir y construir transformaciones que pueden influir en el proceso, entonces se dice que el proceso no fue encapsulado, imposibilitando aún más la construcción objeto.Conclusiones

La conclusión general de este trabajo es que el curso de Introducción a la Pedagogía en Matemática y Computación es un buen recurso para contribuir a optar con información al desarrollo de una identidad profesional, concordante con el rol social del profesor de matemática o para tempranamente dejar esta opción. En términos más específicos, la replicabilidad de aspectos centrales del curso en tres cohortes de estudiantes contribuye a modificar varias de las preconcepciones que traen los estudiantes y ampliar sus posibilidades de desarrollo profesional. Aún cuando en las versiones del curso ha habido variaciones en las actividades con la participación de los docentes, sus efectos principales han sido replicados. Ello debido a que las actividades del curso se vinculan con: a) un perfil de egreso con dominios y competencias profesionales claramente establecidas que fortalecen su rol social y futura proyección, b) un escalamiento de las competencias del perfil de egreso y la integración de los diferentes tipos de conocimientos para la actuación competente del profesor de matemática, permitiéndole a los alumnos resignificar e integrar desempeños formativos con crecientes niveles de dificultad incorporados en la malla del plan de estudios de la carrera y c) que su formación académica esté dirigida a la obtención de una Licenciatura en Educación Matemática como disciplina y no a una Licenciatura en Educación o a una Licenciatura en Matemática como se encuentra frecuentemente en otras ofertas educativas.

En suma, el curso además de sus efectos motivacionales tiene importantes implicaciones para fortalecer una identidad profesional con varias opciones de desarrollo. La replicabilidad y posible transferencia de aspectos centrales del enfoque del curso, lo hacen muy recomendable para ser incorporados en la formación de profesores de matemáticas que estén alineados con una identidad profesional de educación matemática distintiva e integradora, que cuenta con competencias profesionales para desempeñarse eficientemente en su futuro rol social y desarrollo profesional, con alto reconocimiento social.

Avances

A la luz de la Teoría APOE, es posible llegar a establecer las construcciones mentales necesarias en los alumnos de Educación Técnica nivel Superior, para lograr la construcción del objeto matemático inecuaciones desde una perspectiva gráfica. Hemos diseñado e implementado un plan de clase para la resolución de inecuaciones racionales a partir de registros, identificando los conocimientos previos necesarios para lograr articulación entre diferentes construcciones mentales, observándose además que los problemas presentados por los alumnos chilenos para resolver inecuaciones son los mismos que se manifiestan en diferentes partes del mundo (Monje, 2017)

Conclusiones

Basada en la aplicación del plan de clase y las dificultades observadas en los alumnos, es prudente manifestar que para lograr la construcción del objeto matemático inecuación, utilizando la Teoría APOE, es necesario articular el concepto o definición de inecuación con la resolución de ella como un todo y no por separado como lo proponen otros estudios, toda vez que de lo contrario, los alumnos no logran asociar los axiomas de cuerpo y orden de los reales para resolver inecuaciones.

Cabe hacer presente que no fue posible estructurar una DG a partir de los antecedentes recopilados, toda vez que no se evidenció la existencia de mecanismos que permitiesen llegar a la construcción esquema y para obtener una DG se requiere de las construcciones mentales Acción, Proceso, Objeto y Esquema. No obstante, este hecho sirvió para reformular la clase para movilizar los diferentes registros, condición que permitirá llegar a la construcción esquema de modo de acercarlos a la construcción de una DG para la comprensión y resolución de inecuaciones. Esto posibilitará atender a las necesidades reales de los alumnos avanzando en su conocimiento matemático.

Referencias

Barbosa, K. (2008). Inecuaciones: un análisis de *las construcciones mentales de estudiantes universitarios (Tesis de Doctorado publicada). Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.*

Isoda, M., Arcavi, A., y Mena, A. (2012). El Estudio de clases japonés en perspectiva. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Monje, Y. (2017). Tratamiento de la inecuación en el contexto escolar de Chile y Rusia (Tesis de Magíster). Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción.

Torres, R. (2013). Aplicación del Enfoque Gráfico en la enseñanza de Inecuaciones: Una revisión de la experiencia didáctica desde la perspectiva ontosemiótica. El cálculo y su enseñanza, 4, 83-102.

Transmitir, internalizar y extender: Las justificaciones disciplinares de los profesores al hacer resolución de problemas en educación superior

Valentina Toro Vidal, Sergio Celis Guzmán
Universidad de Chile

Resumen

Este trabajo busca entender cómo la matemática como disciplina influye en la toma de decisiones de profesores de educación superior, en el contexto de actividades de resolución de problemas. Los profesores entienden transmitir, internalizar y extender como parte de su rol y, al juntar estos tres motores, logran abordar contenidos matemáticos de forma crítica y profunda.

ABSTRACT *This study tries to understand how mathematics as a discipline influences the decision making of higher education teachers, in the context of problem solving activities. Teachers understand transmit, internalize and extend as part of their role and, by putting these three engines together, they manage to address mathematical contents in a critical and deep way.*

Palabras Clave: Toma de decisiones, resolución de problemas, obligaciones profesionales.

Introducción

En educación superior, distintos estudios han resaltado la importancia de las acciones de los profesores en la sala de clases para dar forma a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Yackel & Cobb, 1996; Sfard, 2001). Ha habido un foco especial en la calidad de estas interacciones y su impacto en el trabajo de los estudiantes (Chiu, 2004) y su aprendizaje (Kunter & Voss, 2013). En educación superior, estudios exponen fuertemente los beneficios de promover la enseñanza centrada en el estudiante en matemática y otros campos STEM (Freeman et al., 2014).

Aunque la evidencia apoya el uso de metodologías activas en la sala de clases, es difícil para los profesores incorporar este cambio o pueden tener buenas razones para no hacerlo (Hayward, Kogan & Laursen, 2005; Andrews & Lemons, 2014; Turpen, Danch & Henderson, 2016). Muchos estudios tratan de entender los factores que afectan el cambio y el desarrollo de los profesores, enfocándose en las competencias de los docentes (Hill, Ball & Schilling, 2008) o su toma de decisiones (Shoenfeld, 2016). En nuestro caso, para entender estos factores trabajaremos con la teoría de Obligaciones Profesionales (Herbst & Chazan, 2011), que habla sobre cómo distintos grupos de interés influyen y tensionan a los profesores de matemática.

Metodología

Los datos de la investigación fueron recogidos de un grupo de 9 docentes de matemática de una institución chilena con más de 20 mil estudiantes y que realiza labores de instituto profesional y centro de formación técnica. Los docentes participaron en un desarrollo profesional de un año basado en la implementación de la resolución de problemas (en adelante, RP). Durante dicho desarrollo profesional, los docentes participaban de sesiones de discusión en grupos de 2 a 4 integrantes, donde se observaban y discutían breves episodios de implementaciones de RP en el aula, tanto propias como de pares. Un monitor escogía los episodios buscando elementos percibidos como positivos o a mejorar. El rol del monitor en estas sesiones era promover la reflexión y facilitar la discusión. Estas sesiones de discusión fueron filmadas, generándose 8 videos que fueron transcritos de forma literal y que son el foco de nuestro análisis.

Los autores independientemente codificaron instancias en las que los docentes hablaran sobre decisiones en aula. Hubo reuniones regulares para discutir y ajustar la codificación. Para categorizar las justificaciones entregadas por los docentes se utilizó el marco de obligaciones profesionales de Herbst y Chazan (2011). Dado el carácter de este trabajo nos centraremos en la obligación disciplinar, la que es una de las más observadas en la muestra. Cuando se tuvo la lista final de justificaciones que mostraban una obligación disciplinar, nos enfocamos en buscar lineamientos detrás de las decisiones que toman los docentes. La búsqueda se realizó a través de un análisis temático (Braun & Clark, 2012).

Resultados

Dentro de las justificaciones a sus decisiones en sala entregadas por los docentes (N=149), se observó que describen mayormente las obligaciones interpersonales (28%) y disciplinar (24%), por sobre las otras obligaciones: institucional (19%) e individual (16%). La cantidad considerable de justificaciones con la obligación disciplinar (N=48) nos permitió explorar cómo los docentes dan sentido a sus intervenciones, obteniendo tres temáticas principales.

Primero, se vio que los docentes quieren **transmitir la experiencia de resolución de problemas** (49%) a sus alumnos, es decir, tienen una fuerte disposición porque sus estudiantes vivan la RP y todas sus aristas. Esto involucra preparar el problema, pensar en los conocimientos y habilidades necesarios para resolverlo, guiar de forma precisa a los estudiantes para que comprendan y aborden el enunciado, fomentar la autonomía y promover la comunicación de estrategias entre pares. También se observó una preocupación para que los estudiantes **internalizaran conocimiento** (29%). Con esto nos referimos a que al realizar RP los docentes quieren que sus alumnos expliciten las razones detrás de ciertas operaciones matemáticas, con el fin de que obtengan un entendimiento profundo de lo que hacen. Finalmente, los profesores muestran un deseo de querer ir más allá del problema original, es decir, buscan **extender conocimiento** (22%).

Esto podía ocurrir, por ejemplo, cuando se quiere que durante la RP aparezca una generalización del problema original o cuando se quería que los estudiantes pensaran más de una estrategia para resolver el mismo problema.

Tema	Ejemplo
Transmitir la experiencia de RP	*"Por eso yo les dije 'yo lo hubiese hecho así'. (...) Por último, que no se queden con la idea que es el profesor el que lo tiene que explicar [la solución], siendo que son ellos los que lo tienen que explicar."*
Internalizar conocimiento	*"Me dijo 'no, yo lo hice al achunte'. ¡No! No lo hizo al achunte, si yo estaba viendo lo que estaban haciendo."*
Extender conocimiento	*"Sí, todos llegaron a lo que se pedía [a la solución del problema original]. Se logró el problema, se logró el objetivo y en algún momento dije 'podría terminar acá', pero no. Yo dije 'ahora voy a hacer lo que yo quiero, quiero que lleguen al modelo algebraico de la función'."*

Tabla 2: Ejemplos de temas rescatados a partir de las justificaciones con una obligación disciplinar.

¿Qué pasa cuando se combinan las tres temáticas disciplinares? En adelante, se describirá el caso de una docente, a la que llamaremos Ana[1], que durante su última sesión de discusión aborda de forma muy completa los aspectos disciplinares de su RP.

Ana propone el problema *Un corral para caballos* para llevar una aplicación de la función cuadrática a su sala de clases. El enunciado es el siguiente:

> Un campesino desea construir un corral de forma rectangular para sus caballos. Con el fin de ahorrar material ha decidido ubicarlo contra un muro. Para tal fin, dispone exactamente de 21 metros de malla de alambre. ¿Qué dimensiones debe tener el corral para que albergue una mayor cantidad de caballos utilizando todo el alambre?

Ana elige este problema para reforzar los conceptos de máximo y mínimo. A pesar de esto, ella tiene claro que es poco probable que sus estudiantes usen en primera instancia la estrategia de establecer un modelo cuadrático:

> *"Yo tenía mis dudas si lo iban a encontrar de manera algebraica, haciendo el modelo de la función cuadrática. En el fondo, lo dejé como extensión, porque pensé que no lo iban a lograr y de hecho ninguno lo hizo así. Lo hicieron de otras maneras. Tanteándolo o poniendo valores."*

Ella anticipa esta situación revisando el modelo algebraico y determinando valores que sus alumnos probablemente tantearían durante la clase. Más aún, ella prevé que sus estudiantes sólo tantearán valores enteros. En la implementación, tras guiar a sus estudiantes para

[1] Pedagoga con postítulo, trabaja a Jornada Completa en la institución y posee 6 años de experiencia.

que superen dicha situación, los alumnos usan el método de prueba y error para llegar al área máxima, la cual finalmente todos obtienen. Ana no se detiene aquí y continúa el problema, entregando extensiones para que sus estudiantes usen un modelo cuadrático como estrategia de resolución (ver cita en Tabla 2).

A lo largo de la sesión de discusión, Ana justifica distintas acciones que ella realiza influenciada por su deseo de abordar un contenido específico. Transmitir: Ana planifica su clase pensando cómo guiar a sus estudiantes para lograr resolver el problema y, al mismo tiempo, cumplir los objetivos que tenía para la actividad. Internalizar: el desarrollo de su clase le permite promover que sus estudiantes entiendan y cuestionen los valores que van tomando. Extender: finalmente, Ana hace énfasis en su interés de concretar y relacionar el problema con el contenido de función cuadrática, llegando a continuar el trabajo en la RP y en clases posteriores.

Reflexiones Y Conclusiones

Vale la pena recordar que el compromiso con la disciplina no habla sólo del interés de los docentes de entregar conocimiento matemático. También incluye transmitir las prácticas y los valores que el "hacer matemática" trae consigo, donde entendemos esto, como producir un *zig-zag* constante entre conjeturas y argumentos/contraejemplos en torno a conjeturas que aparecen en la resolución (Lakatos; 1976). Desde esta perspectiva consideramos que la RP es protagonista en las justificaciones de los docentes porque promueve cambios de comportamiento en los profesores y sus estudiantes. Internalizar conocimiento evidencia que los docentes quieren que se entiendan en profundidad los procedimientos. Tal como dijo uno de los educadores, "no basta con decir la respuesta correcta", es necesario entender el proceso detrás. Por otra parte, Extender conocimiento aparece como la intención de mantener el *zig-zag* como un proceso constante en la RP, que los alumnos logren el problema original y continúen generando nuevas intuiciones.

La RP es el motor que permite que salgan a la luz transmitir, internalizar y extender como lo que entienden los mismos profesores de matemática como parte de su rol. Más aún, también parece ser una herramienta orientadora para que dejen fluir esos propósitos. El caso de Ana es un fiel reflejo de esto: cuando se permite a las tres temáticas confluir en la sala de clases, los profesores generan la oportunidad de abordar conocimientos matemáticos de forma crítica y profunda, a través de una actividad acabada y completa.

Referencias

Andrews, T., & Lemons, P. (2014). It's Personal: Biology Instructors Prioritize Personal Evidence over Empirical Evidence in Teaching Decisions. CBE-Life Sciences Education, 14 (págs. 1-18).

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic Analysis. En H. Cooper, Handbook of Research Methods in Psychology (Vol. 2, págs. 57-71). American Psychological Association.

Chiu, M. (2004). Adapting teacher interventions to student needs during cooperative learning: How to improve student problem solving and time on-task. American Educational Research Journal, 41, 365-399.

Freeman, S., Eddy, S., McDonough, M., Smith, M., Okoroafor, N., Jordt, H., & Wenderoth, M. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering and mathematics. Proceedings *of the National Academy of Sciences, 111.*

Hayward, C., Kogan, M., & Laursen, S. (2015). Facilitating Instructor Adoption of Inquiry-Based Learning in College Mathematics. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2 (págs. 59 – 82).

Herbst, P., & Chazan, D. (2011). Research on Practical Rationality: Studying the justification of actions in mathematics teaching. The Mathematics Enthusiast, 8(3), 405-462.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education, 39(4), 372-400.

Kunter, M., & Voss, T. (2013). The model of instructional quality in COACTIV: A multicriteria analysis. En Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers (págs. 97-124).

Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. New York: Cambridge University Press.

Schoenfeld, A. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics. Journal of Education, 196 (págs. 1-38).

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. Educational Studies in Mathematics, 46, 13-57.

Turpen, C., Dancy, M., & Henderson, C. (2016). Perceived affordances and constraints regarding instructors' use of Peer Instruction: Implications for promoting instructional change. Physical Review Physics Education Research.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 27, 458-477.

Elaboración de instrumento para diagnosticar las creencias y conocimientos de estudiantes de pedagogía básica sobre la matemática escolar, su aprendizaje y enseñanza

Ma. Victoria Martínez Videla[1], Francisco Rojas Sateler[2], Eugenio Chandía Muñoz[1], Andrés Ortiz Jiménez[3], Josefa Perdomo Díaz[4], Cristian Reyes Reyes[1], Rodrigo Ulloa Sánchez[3]
[1]Universidad de Chile, [2]Pontificia Universidad Católica de Chile, [3]Universidad Católica de la Santísima Concepción, [4]Universidad de La Laguna

Resumen

En el presente trabajo compartimos el desarrollo del Proyecto FONIDE FX11624, cuyo objetivo principal fue generar un instrumento válido capaz de identificar las creencias y conocimientos de estudiantes de Pedagogía básica sobre la matemática escolar, su enseñanza y aprendizaje al comienzo de su formación inicial. Por medio de una metodología mixta (entrevistas en profundidad para el apartado de creencias y validación de expertos para ítems de conocimiento), se logró construir la primera versión del instrumento, que fue aplicada a un total de 511 estudiantes de primer año de Pedagogía básica de un total de 14 universidades del país. Compartimos el proceso de elaboración del instrumento detallando el trabajo realizado para los ítems de creencias y de conocimiento y la composición final del instrumento como resultado de dicha validación.

Palabras Clave: Educación matemática, Formación inicial docente, Creencias, Conocimiento matemático

Antecedentes

Diversas son la necesidades y cuestionamientos ligados a la formación inicial, en particular, es de vital importancia tener mayor información respecto de quiénes se forman como profesores, qué saben y qué creen respecto de la enseñanza y aprendizaje al comenzar su adiestramiento docente, con el fin de ajustar la formación inicial y que ésta sea significativa. Esto cobra especial importancia en el marco de la nueva Ley 20.903, Sistema de Desarrollo Docente, que propone una prueba al inicio de la carrera profesional, de carácter formativo y obligatorio para los estudiantes y de la que dependerá la acreditación de la carrera. En este contexto nace el proyecto de investigación Diagnóstico de las creencias y conocimientos iniciales de estudiantes de pedagogía básica sobre la matemática escolar, su aprendizaje y enseñanza cuyo objetivo se centra en identificar creencias y conocimientos sobre la matemática escolar, su aprendizaje y enseñanza de alumnos de Pedagogía básica al iniciar su proceso de formación profesional (Martínez et al., por aparecer). De este modo, se planteó como objetivo específico el diseñar y validar un instrumento para diagnosticar el conocimiento de las matemáticas escolares de 1º a 6º básico y creencias sobre la misma, su aprendizaje y enseñanza, que es lo que compartimos en esta comunicación.

Metodología

La estructura del cuestionario se realizó en dos partes. Por un lado, se trabajó en el diseño de ítems que permitieran evaluar creencias respecto de la matemática, su enseñanza y aprendizaje y, por otro, en el de ítems relativos a conocimiento matemático escolar.

Diseño de ítems para evaluar creencias

En primer lugar, se diseñó una entrevista cuyo objetivo fue identificar creencias de los futuros profesores, a base de la revisión de literatura especializada (Martínez Videla, Perdomo Díaz y Ulloa Sánchez, 2017). Esto permitió explorar las creencias emergentes de los estudiantes y complementar, desde el contexto chileno, los constructos sobre las creencias acerca de la matemática escolar, su enseñanza y aprendizaje presentadas por la literatura. En segundo lugar, y contrastando la información de las entrevistas y de los antecedentes teóricos, se diseñó un conjunto de 64 ítems distribuidos en distintas categorías y subcategorías:

- Enseñanza y aprendizaje (25 ítems): aprendizaje, enseñanza, dinámica social del aula, contenidos y actividades.
- Expectativas y logro (20 ítems): condiciones para el logro, autopercepción, ansiedad/actitud, familia.
- Matemática (19 ítems): naturaleza de la matemática, naturaleza del pensamiento matemático, naturaleza de la acción matemática y su relación con el estudiante, utilidad de la matemática escolar.

Para esta parte del cuestionario se diseñaron dos tipos de ítems de creencias. Los 54 primeros corresponden a una escala Likert, de 1 (muy en desacuerdo) a 4 (muy de acuerdo). Los 10 restantes, denominados "ítems de suma cien", están compuestos con series de 3 afirmaciones cada ítem, donde el estudiante tiene que dar un valor a cada ítem, según su grado de acuerdo, de manera que la valoración de las 3 afirmaciones del ítem sumen 100.

Diseño de ítems para evaluar Conocimiento Matemático Escolar (CME)

En el caso de los ítems de CME, una vez revisados los antecedentes, se analizaron los contenidos del currículo de Matemática (MINEDUC, 2012), se construyó una matriz de indicadores que consideraba conocimiento matemático relativo al saber (contenido) y el saber hacer (habilidades) y se diseñó un primer conjunto de 75 ítems que fueron sometidos a un proceso de evaluación de expertos (Tabla 1). Como resultado quedaron un total de 67 ítems de selección múltiple, que responden a los ejes de contenido del currículo y a 3 tipos de habilidades (conocer, aplicar y razonar), distribuidos como se muestra en la Tabla 1.

Habilidad				
Conocimiento	Conocer	Apicar	Razonar	Total
Números	12	9	2	23
Medición	5	7	3	15

Geometría	8	7	3	18
Álgebra	3	2	2	7
Datos y probabilidades	2	4	6	12
Total	30	29	16	75

Tabla 1: Número de ítems por dominio de conocimiento y nivel cognitivo.

Para la validación se hizo un muestreo considerando tanto los programas de formación acreditados, distinguiendo entre universidades tradicionales y no tradicionales, como los cuartiles según puntaje de ingreso, obteniendo un total de 8 estratos. Se consideró un muestreo proporcional, estimándose el número de estudiantes que se encontraba en cada uno de los estratos definidos y la cantidad que se debía considerar para completar un mínimo de 400 estudiantes a encuestar. La Tabla 2 incluye ese valor de referencia y, entre paréntesis, el número de individuos que finalmente respondieron al cuestionario en cada uno de los ocho grupos. Se decidió mantener todos los cuestionarios recolectados para la validación del instrumento, por lo que el tamaño final de la muestra es n=511.

		Promedio Puntaje PSU (matemática y lenguaje) ingreso 2017			
		500-540	541-553	554-570	Más de 571
Tipo de universidad	Tradicional	62 (68)	45 (58)	110 (94)	98 (138)
	No Tradicional	22 (34)	28 (24)	17 (48)	14 (47)

Tabla 2: Cantidad de participantes necesarios para n=400 (nº de participantes efectivos)

Análisis y resultados

Debido a la diferencia en el diseño de los ítems de creencias y CME, el proceso de validación se hizo distinguiendo entre los tipos de ítems. Para los de creencias, se comenzó asignando una direccionalidad a los ítems, asociando el valor menor (1 para la escala Likert y el menor número asignado en la suma 100) a la perspectiva de trasmisión o la concepción de la matemática como estáticas (Kaiser et al., 2007). De igual manera, en los ítems referidos a expectativas y logros, la menor puntuación fue asociada a bajas expectativas o autopercepción. A continuación, se calculó el valor del *alpha ordinal* (Zumbo, Gadermann & Zeisser, 2007)[2], se realizó un análisis de factores, utilizando correlaciones policóricas, ya que se trata de variables categóricas, y un análisis de clúster. En el análisis factorial encontramos que 12 factores explican el 70,05% de la varianza, y 8 Factores el 60,12%. Finalmente, se

[2] El alpha ordinal corresponde a una corrección del alpha de Cronbach para datos ordinales. Se calcula en base a las correlaciones policóricas.

decidió el uso de 9 factores, que explican el 82,80% de la varianza y que eran caracterizables. Además, a partir de estos análisis se eliminan 7 ítems, 2 por sus cargas inestables y los otros 5 por baja correlación con los demás.

El análisis de la parte CME se realizó en cuatro etapas, sobre 64 de los 67 ítems, ya que dos de ellos se eliminaron por problemas de construcción y uno de ellos por presentar diferencias significativas de acierto entre las formas aplicadas. La primera incluye un análisis descriptivo bajo la teoría clásica de test TCT (Novick,1965), en la cual se determinaron los índices de dificultad (entre .06 y .89 (M=.4; DS=.22)), discriminación (.00 y .63 (M=.34; DS=.14)), correlación (Alpha de Correlación Tetracórica = .99) y porcentaje de omisión por ítems. La segunda etapa incluyó un análisis factorial exploratorio en que fue posible definir 6 factores que explican el 67.06% de la varianza y un análisis factorial confirmatorio sobre un total de 40 ítems una vez realizada la eliminación de ítems, logrando índices de ajuste (absolutos y relativos) adecuados, con carga factorial sobre .4, pero menor explicación de la varianza (58%).

En la tercera etapa se determinó la consistencia interna, obteniendo .8 para subestimación y .88 para sobre-estimación, y además se obtuvo un Alpha de Cronbach de .82 para escala completa. Por último, en la cuarta etapa, se llevó a cabo un análisis bajo la Teoría de Respuesta al Ítem TRI (Lord, 1980) que nos permitió determinar que la dificultad de los ítems en promedio es baja y que tienen discriminaciones moderadas a muy altas. Además, nos permitió determinar que los 40 ítems servirían para obtener información de estudiantes que tienen menos habilidad o una habilidad promedio.

Conclusiones

La interacción con datos, gráficas y fórmulas Respecto a los alcances de este instrumento y su proceso de validación, podemos concluir que permitirá a las Facultades de educación que tienen FID en Pedagogía básica, diagnosticar a sus estudiantes en lo respecta a sus conocimientos de la matemática escolar de 1º a 6º básico y sus creencias respecto a enseñar y aprender matemática. No obstante lo anterior, es claro que un diagnóstico basado en este solo instrumento no bastará para ajustar apropiadamente las actividades curriculares de matemática en las carreras de Pedagogía básica, y por ende hay que agregar otros aspectos a la medición u otros instrumentos, como entrevistas personales, por ejemplo. Además, será necesario evaluar cómo se comporta este instrumento con estudiantes que van en la mitad de su trayectoria académica, y lo más importante, las carreras de Pedagogía, con sus respectivos comités de carrera tendrán que decidir cómo harán estos ajustes y sus implementaciones.

La elaboración de este instrumento marca un precedente importante, en el sentido que muestra una metodología de cómo realizar futuros ajustes al instrumento, o para elaborar otros instrumentos complementarios. En cierto sentido, en el proyecto se describe *una forma de hacer*, que puede ser replicable en otras circunstancias.

Agradecimientos

Este trabajo es parte del proyecto FONIDE FX11624 "Diagnóstico de las creencias y conocimientos iniciales de estudiantes de Pedagogía Básica sobre la matemática escolar, su aprendizaje y enseñanza", financiado por el Ministerio de Educación de Chile. Además, se agradece al Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE), de la Universidad de Chile, por facilitar las bases de datos del Proceso de Admisión a la Educación Superior Universitaria vía Prueba de Selección Universitaria para el desarrollo de esta investigación.

Referencias

Kaiser, G., & Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom—problems and opportunities. In Modelling and applications in mathematics education (pp. 99-108).Springer US.

Lord, F. M. (1980). Applications of item response theory to practical testing problems.Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Martínez Videla, M. V., Perdomo-Díaz, J. y Ulloa Sánchez, R. (2017). Diseño y análisis de entrevistas en profundidad para identificar creencias respecto de la matemática de profesores en formación. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) 31.

Martínez, M. V., Rojas, F., Chandía, E., Ortiz, A., Perdomo-Díaz, J., Reyes, C. y Ulloa, R. (por aparecer). Diagnóstico de las creencias y conocimientos iniciales de estudiantes de Pedagogía Básica sobre la matemática escolar, su aprendizaje y enseñanza. Informe FONIDE.Mineduc: Gobierno de Chile.

MINEDUC. (2012). Proyecto de ley que establece el Sistema de Promoción y Desarrollo Profesional Docente del Sector Municipal. Mensaje 456 – 359. Santiago Chile.

Novick, M. R. (1965). The axioms and principal results of classical test theory. ETS Research Report Series, 1965(1), p i-31.

Zumbo, B. D., Gadermann, A. M., & Zeisser, C. (2007). Ordinal versions of coefficients alpha and theta for Likert rating scales.Journal of modern applied statistical methods, 6(1), 4.

Construcción cognitiva del espacio vectorial R^2

Miguel Rodríguez, Marcela Parraguez, María Trigueros
Universidad de Playa Ancha (Chile) – Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile) – Pontificia Universidad Católica Valparaíso – Instituto Tecnológico Autónomo de México (México)

Resumen

Presentamos antecedentes sobre la validación de un modelo cognitivo para el aprendizaje del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Como hallazgo, destacamos el papel que desempeña asociar un par de números reales a una ecuación lineal homogénea (de dos incógnitas) para inducir estructura algebraica a su conjunto solución. Además, se entrega evidencia de cómo el uso de un parámetro, para escribir una solución de una ecuación lineal homogénea, es un factor importante que pone de relieve a la ponderación de una solución por un escalar como una operación que se asocia al conjunto solución de una ecuación lineal homogénea. Todo lo anterior en estrecha relación con la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

Palabras clave: Modelo cognitivo, espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, ecuación lineal homogénea, conjunto solución, teoría APOE.

ABSTRACT *We present background information on the validation of a cognitive model for the learning of the vector space $\mathbf{R}^2$. As a result, we highlight the role played by the association of a pair of real numbers to a homogeneous linear equation (with two unknowns) to induce an algebraic structure to the solution set. Furthermore, we present evidence of how the use of a parameter to write a solution of a homogeneous linear equation, is an important factor that highlights the product of a solution by a scalar as an operation that is associated with the solution set of an homogeneous linear equation. All of this has a close connection with the construction of the vector space $\mathbf{R}^2$.*

Keywords: Cognitive model, vector space $\mathbf{R}^2$, homogeneous linear equation, solution set, APOS theory.

La enseñanza del espacio vectorial desde la Didáctica de la Matemática

Respecto de la enseñanza del concepto de espacio vectorial, desde la Didáctica de la matemática, destacan algunas perspectivas (Dorier et al., 2002; Dubinsky, 1996; Harel, 2000) como aquella que pone de manifiesto principios como el de representación múltiple y algunas fases a tener en cuenta (Harel, 2000) o aquella que sitúa al espacio vectorial como una estructura algebraica sistematizadora y generalizadora, la que debe tenerse en cuenta al momento de enseñar (Dorier et al., 2002) o la que intenta revertir el papel imitador y reproductor del estudiante (Dubinsky, 1996). Además destacan algunas iniciativas que se han documentado como exitosas y que establecen fases para ir situando paulatinamente al estudiante en un proceso gradual de abstracción (Harel, 2000) y otras que ponen de relieve el concepto de abstracción reflexiva como mecanismo que permite construcciones mentales (Arnon et al., 2014; Trigueros, M. & Oktaç, 2005).

Pregunta de Investigación

¿Qué estructuras mentales son necesarias como prerrequisitos para la construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, a través del Cartesiano $\mathbf{R}^2$?

Marco teórico: APOE

En la teoría APOE, las estructuras de construcción de un fragmento del conocimiento matemático están descritas por cuatro estructuras mentales: *Acciones, Procesos, Objetos* y *Esquemas*, que un individuo construye en su proceso de comprensión, y para ello pone en juego mecanismos mentales: *interiorización, coordinación, encapsulación y reversión,* que son considerados casos particulares de la abstracción reflexiva (Arnon et al, 2014; Trigueros, M. & Oktaç, 2005; Parraguez, M. y Oktaç, 2010).

Consideramos que un concepto matemático, una acción asociada a dicho concepto se realiza sobre objetos construidos para otros conceptos matemáticos que se toman como base para la construcción del nuevo. Las acciones se caracterizan por ser transformaciones que se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son o se perciben como externos (Arnon et al., 2014, Parraguez, M. y Oktaç, 2010).

Un individuo ha interiorizado una acción en un *proceso*, si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente realizar todos los pasos específicos. Dos o más *procesos* pueden coordinarse para construir un nuevo *proceso* y un *proceso* puede revertirse. Si el individuo considera un *proceso* como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre él, se considera que ha *encapsulado* el *proceso* en una *construcción objeto*. Además, cuando se recupera desde el *objeto* al *proceso* que le dio origen, ha ocurrido una *desencapsulación* del *objeto* (Parraguez, M. y Oktaç, 2010).

Metodología

Con base en el ciclo de investigación de APOE (Arnon et al., 2014) se consideró un estudio de caso múltiple pues permite indagar en profundidad los distintos aspectos que plantean las preguntas de investigación, dado que además permite una aproximación conceptual apropiada para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo (Stake, 2010).

Las unidades de estudio fueron conformadas por 7 estudiantes de dos universidades chilenas de las carreras de Licenciatura y Pedagogía en Matemática como se indica en la Tabla 1.

Tabla 1:
Unidad de análisis para la conformación de los dos casos de estudio

Unidad de Análisis	Caso 1: 5 Estudiantes de Pedagogía en Matemática (E1, E2, E3, E4 y E5) Aplicación de Instrumentos: 1 cuestionario de 5 preguntas 1Entrevista de 4 preguntas	Caso 2: 2 Estudiantes de Licenciatura en Matemática (E6 y E7) Aplicación de Instrumentos: 1 cuestionario de 5 preguntas 1Entrevista de 4 preguntas

EN EL ENCABEZAMIENTO SE HABLA DE "estudiantes ... de las carreras de Licenciatura y Pedagogía en Matemática" Y EN LA TABLA 1 SE MENCIONAN estudiantes de Pedagogía y de Ingeniería

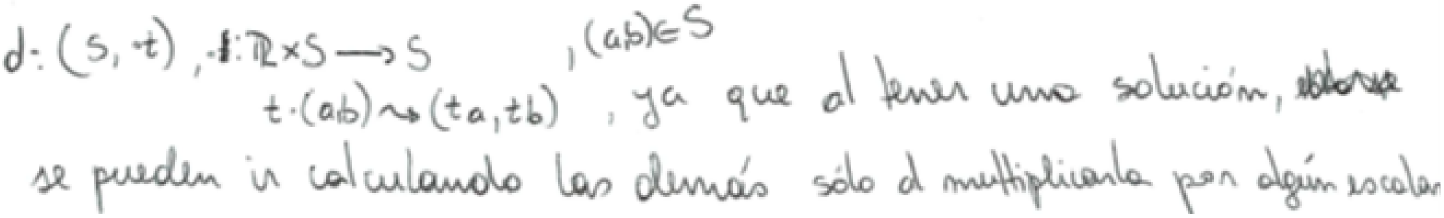
Una descomposición genética del espacio vectorial R^2

La Descomposición Genética (DG) que se propone, pone de manifiesto que el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ se construye a partir de una *acción*: asociar un par de números reales a los términos de una ELH. Dicha asociación sumada al uso de un parámetro permite *interiorizarla* en un proceso, solución de una ELH, siendo necesario que éste se coordine con el proceso par ordenado, como concepto previo, para conformar un nuevo *proceso*, CSELH.

Pensar en la dilatación de un segmento dirigido desde una solución del CSELH, asociado a una recta vectorial, permite coordinar el *proceso* CSELH con el *proceso* operación binaria, como concepto previo, para obtener el proceso ponderación de una solución de una ELH. Pensar en la traslación de puntos de una recta vectorial para obtener una recta afín (recta paralela a una recta vectorial) permite desencapsular el objeto plano cartesiano en el proceso álgebra de pares ordenados. Abocarse a obtener nuevas soluciones en combinación lineal de dos rectas vectoriales permite *coordinar* los *procesos*, álgebra de pares ordenados y ponderación de una solución, en un nuevo *proceso*, el cartesiano $\mathbf{R}^2$. Finalmente comparar estructura de subconjuntos de $\mathbf{R}^2$, desde el CSELH y CSELNH, permite *encapsular* el proceso cartesiano R2 en el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

Resultados

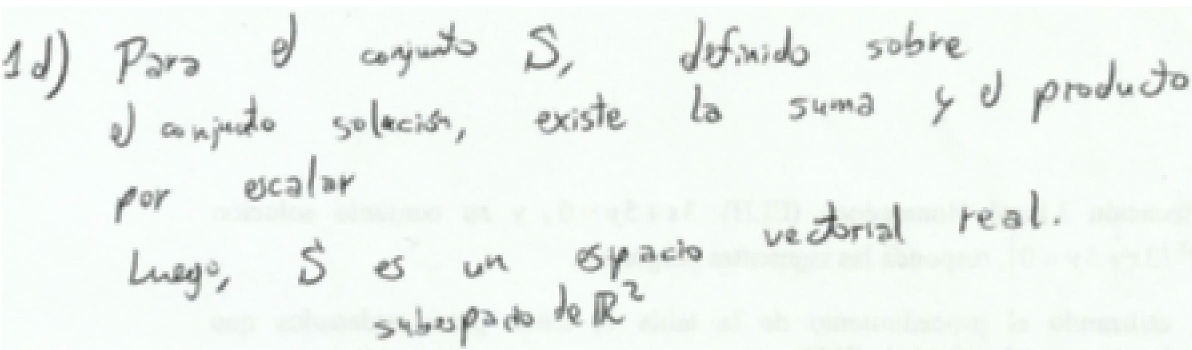
El **E3**, como se aprecia en la figura 1, define en el apartado 1d de la pregunta 1 una operación binaria externa para el conjunto solución, desde lo que se va solicitando en los apartados 1a y 1b. Comenta que toda solución del CSELH se puede generar a partir de un par ordenado y un escalar real. Esto evidencia que ponderar una solución por un escalar real permite coordinar dos procesos, CSELH y operación binaria, en un proceso, ponderación de un par ordenado. Además evidencia una concepción proceso del Cartesiano $\mathbf{R}^2$.



d: $(S, +)$, $\cdot: \mathbb{R}\times S \to S$, $(a,b)\in S$
$t\cdot(a,b) \mapsto (ta, tb)$, ya que al tener una solución, ~~ahora~~ se pueden ir calculando las demás sólo al multiplicarla por algún escalar

Figura 1: Respuesta de **E3** al apartado 1d.

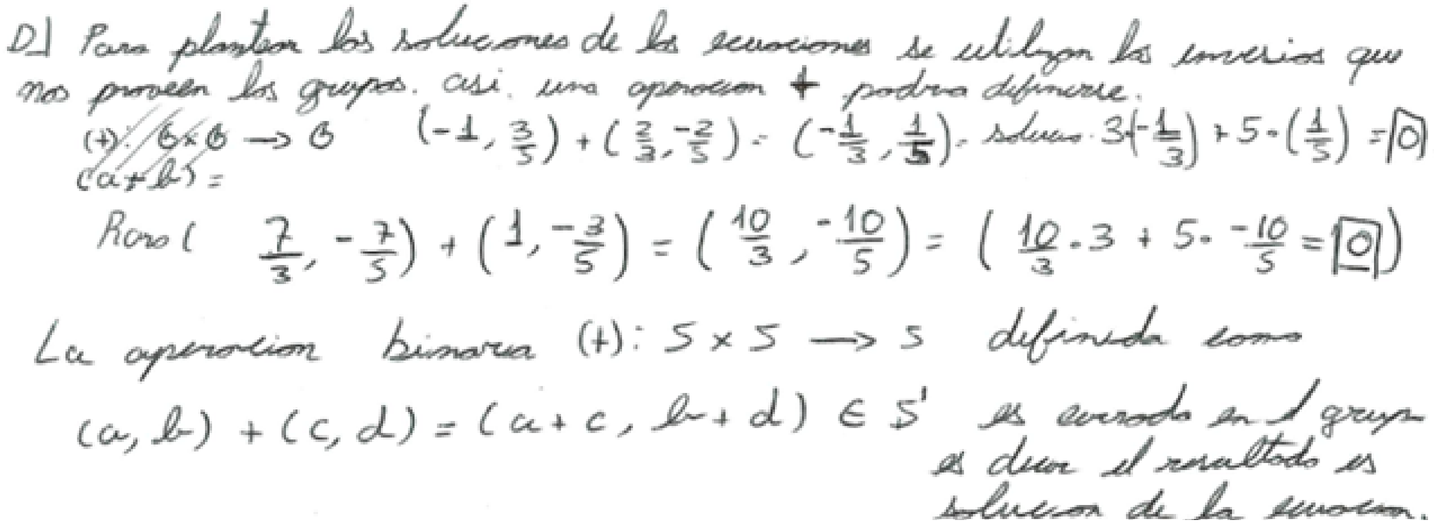
Por otro lado, el **E4,** como se aprecia en la figura 2, concibe el CSELH como un sub-espacio vectorial del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Lo que evidencia una concepción Objeto de conjunto solución para una ELH.



1d) Para el conjunto S, definido sobre el conjunto solución, existe la suma y el producto por escalar
Luego, S es un espacio vectorial real.
subespacio de $\mathbb{R}^2$

Figura 2: Respuesta de **E4** al apartado 1d.

Además, el **E7**, como se aprecia en la figura 3, reconoce en el CSELH un grupo aditivo destacando la propiedad de clausura, lo que evidencia una concepción objeto del CSELH.



D] Para plantear las soluciones de las ecuaciones se utilizan los conceptos que nos proveen los grupos. así una operación + podría definirse.
$(+): G\times G \to G$ $(-1, \frac{3}{5}) + (\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{5})$. solución $3(-\frac{1}{3}) + 5\cdot(\frac{1}{5}) = \boxed{0}$.
$(a+b) =$
Pero $(\frac{7}{3}, -\frac{7}{5}) + (1, -\frac{3}{5}) = (\frac{10}{3}, -\frac{10}{5}) = (\frac{10}{3}\cdot 3 + 5\cdot -\frac{10}{5} = \boxed{0})$
La operación binaria $(+): S\times S \to S$ definida como
$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \in S'$ es cerrada en el grupo es decir el resultado es solución de la ecuación.

Figura 3: Respuesta de **E7** al apartado 1d.

Conclusiones

Las respuestas de los tres estudiantes, ponen de relieve distintos aspectos sobre las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG, como por ejemplo, que al comparar soluciones del CSELH considerado la acción asociar números reales a una ELH permite coordinar el proceso soluciones de una ELH con el proceso averiguar propiedades para construir el proceso grupo de soluciones, como plantea **E7.** De igual manera reescribir el CSELH utilizando un parámetro, permite coordinar el proceso solución de una ELH con el proceso operación para construir el proceso ponderación de una solución. Todo lo anterior, para dar cuenta de la encapsulación del objeto Cartesiano $\mathbf{R}^2$.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10(2), 117-132.

Dorier, J. L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. Historia Mathematica, 22(3), 227-261.

Dorier, J. L. (Ed.). (1997). L'enseignement de l'algèbre linéaire en question. Grenoble: La penséee Sauvage.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J-L. Dorier (ed.). On the teaching of linear algebra. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 23, 3-81.

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). The teaching and learning of mathematics at university level new ICMI. Study Series, 7(3), 255-273

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática, 8(3), 24 – 41.

Harel, G. (2000). Principles of learning and teaching mathematics, with particular reference to the learning and teaching of Linear Algebra:Old and new observations. In J-L. Dorier (Ed), On the teaching of linear álgebra, (pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. Linear Algebra and its Applications, 432(8), 2112-2124.

Stake, R.E. (2010). Investigación con estudio de casos. Barcelona: Labor.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 10, 157-176.

Impacto que tiene la estrategia de transversalidad como componente en la malla curricular de las carreras de educación de la universidad santo tomás santiago, en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático

Pierina Zanocco Soto; Claudia Ormeño H; Patricio Pino C; Marcelo Zúñiga H.
Universidad Santo Tomás (UST)

Resumen

Esta comunicación tiene el propósito de dar a conocer cómo la Escuela de Educación ha logrado disminuir la brecha entre los conocimientos y habilidades de entrada de nuestros estudiantes que llegan a primer año. La estrategia seleccionada ha sido la implementación, en todas sus carreras, de un rediseño curricular donde la transversalidad, a lo largo de toda la carrera, da respuesta, por un lado, al cambio de paradigma en la enseñanza de las habilidades del desarrollo del pensamiento lógico matemático promoviendo la capacidad reflexiva, el desarrollo del pensamiento crítico y, por otro, atender a la diversidad de las conductas de entrada del alumnado.

La metodología se adhiere al paradigma positivista. El método de recolección de datos es (i) cuasi experimental ex post facto para los datos cuantitativos, ya que el método de muestreo es no probabilístico intencional tanto para el grupo de control como para el grupo experimental, y (ii) de aplicación única a través de un grupo focal en el caso de los datos cualitativos. Se aplicó un instrumento para medir conocimientos matemáticos básicos y resolución de problemas. (alfa de Cronbach 0.80).Los t de Student reflejan una significatividad a favor de los Grupos Experimentales vs Grupos controles.

Palabras clave: Formación de profesores, Pensamiento Lógico-Matemático, Retención, Estrategia de transversalidad

Introducción

Desde el año 2011 la Escuela de Educación ha implementado en todas sus carreras un rediseño curricular basado en cinco criterios orientadores relevantes y que se encuentran plasmados en el *Proyecto Educativo* Escuela Educación del año 2012 y que tienen relación con la pertinencia y validación del perfil de egreso resultante de un cuidadoso análisis de los requerimientos del mundo laboral, de la información recabada de egresados y de empleadores, de los marcos vigentes de la legislación y de las políticas educativas en el país; con la actualización, considerando los avances y tendencias en el área de la educación a partir del estudio de opiniones y propuestas de expertos de diversas áreas (sicología, gestión, políticas públicas, fundaciones, consultoría internacional) y de los aportes de la literatura nacional e internacional relacionada con modelos innovadores. Como parte fundamental de este rediseño curricular se consideró focalizar la acción en la eficacia de los procesos de enseñanza aprendizaje, aplicando medidas remediales de apoyo académico que fuesen oportunas y eficaces. Es así, que, para superar deficiencias de entrada, se implementó un programa de transversalidad de intervención pedagógica que integra el aprendizaje propio de algunas asignaturas a un trabajo explícito y progresivo del profesor para la formación de habilidades académicas fundamentales de lectura y escritura académica y de desarrollo del pensamiento lógico matemático en todos los estudiantes. En esta comunicación se da cuenta de este último componente.

La transversalidad da respuesta al desarrollo del pensamiento lógico matemático, el cual ha migrado desde un enfoque normativo y reproductivo hacia uno situado y disciplinar y por otro, a la diversidad del alumnado. En este sentido, la transversalidad propuesta en el rediseño apunta a promover la capacidad reflexiva, el desarrollo del pensamiento crítico y la búsqueda permanente de la verdad para favorecer el logro de una sólida identidad profesional, fundada en un saber pedagógico sustentado en elementos teóricos coherentes y actualizados y, además, apunta a apoyar el desarrollo personal del futuro educador, a través de una formación transversal en el desarrollo de habilidades fundamentales de pensamiento lógico matemático, expresión oral, uso pedagógico de TICs y promoviendo una formación y moral orientada por las virtudes de honestidad, responsabilidad, respeto y tolerancia, entre otras.

En este contexto y pasados cuatro años desde el inicio de la implementación del rediseño, la presente comunicación evalúa el impacto de la transversalidad en los estudiantes de las cinco carreras de la Escuela de Educación, con el propósito de asegurar la mejora continua del mismo programa de transversalidad y garantizar la calidad de la formación de los estudiantes de las carreras de Educación. A continuación se presenta la secuencia de desarrollo del Pensamiento Lógico-Matemático.

Tabla 1 SECUENCIA Y PROGRESIÓN EN DESARROLLO PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

Aspectos considerados	NIVEL I	NIVEL I I	NIVEL III
Habilidad pensamiento lógico	Análisis descriptivo. Inferencia. Formulación de conclusiones.	Análisis comparativo. Inferencia. Formulación de juicios valorativos. Fundamentación.	Análisis crítico. Inferencia. Conjetura e hipótesis. Argumentación. Fundamentación.

Es importante destacar que los recursos pedagógicos que se implementan en las asignaturas que comprenden la transversalidad deben cumplir el propósito de integrar de manera comprensiva y con sentido lógico, el desarrollo de las habilidades de pensamiento lógico -matemático con las capacidades pedagógicas y disciplinares. Para ello, estos recursos deben permitir guiar y modelar las distintas habilidades, de modo que el estudiante avance, de manera progresiva en el logro de dichas habilidades. Ejemplos de estos recursos son los siguientes: guías de aprendizaje, mapas mentales, mapas conceptuales, lectura guiada de textos académicos y científicos, uso de bases de datos, artículos de opinión, fichas de lectura, informes de lectura, ensayo no argumentativo y argumentativo, estudios de caso, plenarios de lectura, representaciones, organizadores gráficos, tecnologías de la información y la comunicación, entre otros. Tomando en cuenta el total de asignaturas de cada carrera los porcentajes de asignaturas con transversalidad corresponden entre un 48 % a un 32%

El Instrumento

El instrumento aplicado consta de dos partes: una que evalúa conocimientos matemáticos básicos (12 ítems de selección múltiple) y la otra, resolución de problemas (18 ítems de selección múltiple)- El diseño cuasi experimental consistió en la aplicación del instrumento descrito elaborado por el equipo investigador, validado a través de juicio de expertos, con una confiabilidad de 0.8 de consistencia interna (alfa de Cronbach), Este instrumento se aplicó en muestras por conveniencia tanto en el grupo experimental, conformado por estudiantes de las cinco carreras de la Escuela de Educación (n = 175), como en el grupo de control, conformado por estudiantes de otra carrera del área humanista (n = 26). En ambos grupos se aplicó una medición a los estudiantes de segundo año (situación de base, pre-prueba) y otra a los estudiantes de cuarto año (situación meta, post-prueba). Una de las amenazas a la validez del estudio se puede apreciar en la comparabilidad de los grupos, ya que si bien todas las carreras son del área de las humanidades, el tamaño muestral puede dificultar la comparación. El análisis de estos datos se realizó a través de una prueba t de Student para muestras

Los Resultados

La prueba t de Student entre grupos que representaban a los estudiantes de segundo año versus estudiantes de cuarto año es significativa en favor de los estudiantes de cuarto año.

Group Statistics

	Año	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Puntaje	Segundo Año	77	11,56	4,312	,491
	Cuarto Año	83	13,58	4,249	,466

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Puntaje	Equal variances assumed	,005	,946	-2,983	158	,003	-2,020	,677	-3,357	-,683
	Equal variances not assumed			-2,982	156,723	,003	-2,020	,677	-3,358	-,682

Tabla 2 Prueba t de Student grupo experimental PLM Se hipotetizó que los logros de las habilidades de Pensamiento Lógico-Matemático en las carreras de Educación serían mayores en cuarto año (M = 13.58; σ = 4.24; n = 83) que en segundo año (M =11.56; Además, se optó por un análisis post-hoc a través de la d de Cohen con tal de tener una estimación del tamaño del efecto en el grupo experimental. A continuación se presentan los resultados comparativos entre grupo experimental y control.

Tabla 3

Prueba t de Student grupo de control PLM: Trabajo Social (TSO

Group Statistics

	Año	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Puntaje	Segundo Año	13	11,08	4,291	1,190
	Cuarto Año	14	7,64	2,405	,643

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Puntaje	Equal variances assumed	7,324	,012	2,591	25	,016	3,434	1,326	,704	6,164
	Equal variances not assumed			2,539	18,566	,020	3,434	1,353	,599	6,270

Se hipotetizó que las habilidades de Pensamiento Lógico-Matemático en la carrera humanista serían similares en cuarto año (M = 7.64; σ = 2.40; n = 14) y en segundo año (M = 11.08; σ = 4.29; n = 13). Asumiendo que la varianza es igual en ambos grupos, esta diferencia fue significativa; t (25) = 2.59; p = 0.01 (no direccional), pero se observa un descenso en estas habilidades en los estudiantes de cuarto año, en comparación con los estudiantes de segundo año., consideradas muestras independientes, entre los estudiantes de segundo y cuarto año del grupo de control, así como también en el grupo experimental, y además entre el cuarto año del grupo experimental y del grupo de control.

Conclusiones

- Los resultados obtenidos son suficientes para refutar la hipótesis nula de la investigación, y por consiguiente aceptar la hipótesis de trabajo. Se ha comprobado, entonces, que la presencia de la estrategia de transversalidad a lo largo de la malla curricular incide de manera significativa en el desarrollo de las habilidades específicas de pensamiento lógico-matemático.

Proyecciones

- Cabe destacar que futuras investigaciones en esta línea podrían utilizar estos resultados, tanto cualitativos como cuantitativos, para construir una estrategia de transversalidad que se pudiera adaptar a las necesidades de cada carrera en la Universidad Santo Tomás, ya que se ha comprobado ampliamente la importancia de estas habilidades, y Chile es uno de los países con más problemas en estas áreas según la OCDE.

- Por otra parte, se presentó un proyecto de investigación institucional con el objetivo de *"Generar, implementar y evaluar un modelo de andamiaje didáctico para docentes con el fin de mejorar la retención de los estudiantes de asignaturas críticas"*. Cuya adjudicación permitirá reforzar en los estudiantes de la universidad adquirir un pensamiento reflexivo crítico, que constituirá un beneficio para culminar con éxito su formación profesional.

Referencias

Ávalos, B. (2014). La formación inicial docente en Chile: Tensiones entre políticas de apoyo y control. Estudios Pedagógicos, 15(1), 11-28.

Creswell, J. W. (2012). Educational research: Planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research (4th ed.). Boston: Pearson Education.

Flick, U. (2014). An introduction to qualitative research (5th ed.). California: Sage.

Korkmaz, Ö. (2012). The impact of critical thinking and logico-mathematical intelligence on algorithmic design skills. Journal Of Educational Computing Research, 46(2), 173-193.

Leal Huise, S., & Bong Anderson, S. (2015). La resolución de problemas matemáticos en el contexto de los proyectos de aprendizaje. Revista De Investigación, 39(84), 71-93.

Peñalva Rosales, L. P. (2010). Las matemáticas en el desarrollo de la metacognición. Política y Cultura, (33), 135-151.

Dificultades, obstáculos y errores asociados al infinito en estudiantes de último año de pedagogía en matemática

Bustos Tiemann, C. Roberto Vidal
Universidad Alberto Hurtado

Resumen

Esta comunicación tiene por objeto mostrar los resultados obtenidos en el trabajo final de graduación de Magíster en Didáctica de la Matemática, el cual consistió en un estudio de las dificultades, los obstáculos y los errores en dos grupos de estudiantes de último año de Pedagogía en matemática de dos universidades chilenas con respecto al infinito. Para tal efecto se aplicó un instrumento con diferentes problemas en los que está involucrado dicho objeto matemático. Los principales resultados obtenidos demuestran una fuerte tendencia de reconocer solo el infinito potencial, especialmente en situaciones en las que el infinito en lo pequeño se manifiesta. Por otro lado, se reconoce el obstáculo epistemológico de la intuición geométrica en los procesos infinitos de divisibilidad y en la noción de límite. Además emergen obstáculos asociados a la generalización de las propiedades de los procesos finitos a los infinitos y al considerar el valor de un límite como una aproximación.

Palabras Clave: Infinito potencial, infinito actual, obstáculo epistemológico, divisibilidad infinita, noción de límite.

ABSTRACT *This communication aims to show the results obtained within the Master's Degree in Mathematics' Didactics final graduation work, which consisted in a study of the difficulties, obstacles and errors in two groups of Mathematics' Pedagogy senior students from two Chilean universities in regard to infinity. To reach such purpose, an instrument was applied with different problems in which said mathematical object is involved. The main results obtained show a strong tendency to recognize only the potential infinity, particularly in situations where infinity in the small manifests. On the other hand, there is a reckoning of the epistemological obstacle of geometric intuition in the infinite processes of divisibility and in the notion of limit. Additionally, obstacles emerge associated both with the generalization of the properties of finite processes to infinity and withthe consideration of the value of a limit as an approximation.*

Keywords: Potential infinity, actual infinity, epistemological obstacle, infinite divisibility, notion of limit

Introducción

La incorporación del concepto infinito en el currículo escolar presenta una característica singular, no se define ni se enseña a trabajar con él. En este sentido es que se plantea la problemática que genera este concepto en la enseñanza tanto escolar como universitaria ya que aparece como un saber transparente u objeto paramatemático y que dicha problemática se acentúa con la existencia de diferentes concepciones para el infinito: una concepción potencial y una concepción actual, contradictorias entre ellas, que hace que en los estudiantes se presenten una serie de obstáculos, especialmente con esta última (Garbin, 2005).

A partir de lo planteado anteriormente es que surge la necesidad de describir las dificultades, errores y obstáculos que puedan evidenciar los estudiantes de último año de Pedagogía en matemática con respecto al infinito y así tener una idea de cuáles son sus nociones respecto de este objeto matemático, previo a su desempeño profesional.

Antecedentes históricos

En el desarrollo histórico de la idea de infinito es posible distinguir tres etapas, que según Crubellier (1994) permite definir tres tipos de infinito.

En la primera etapa se tiene el infinito de Platón y Aristóteles, que es un principio indefinible. En esta etapa, especial interés presentan las paradojas de Zenón de Elea (s. V a.C.) quien mediante la reducción al absurdo argumentaba la imposibilidad del movimiento lo cual negaba la aceptación del infinito actual.

La segunda etapa corresponde al infinito de la Edad Media en donde se consideraba el infinito como propiedad exclusiva de Dios. En esta época el mismo Galileo rechaza la idea de infinito por considerarla que atenta contra la razón humana y realiza consideraciones geométricas en donde presenta un infinito que contradice la noción de Euclides que el todo es mayor que sus partes.

En la tercera etapa se tiene el infinito de los matemáticos. En este período Karl Weierstrass (1815 - 1897) traduce el concepto de límite a través de la notación $\varepsilon - \delta$ que conocemos hoy en día y posteriormente Cantor, a finales del siglo XIX, desarrolla su teoría formal sobre el infinito actual y define conjunto infinito numerable y no numerable mediante una extensión de la noción de cardinalidad la cual consiste en la búsqueda de una biyección adecuada como método de prueba de coordinabilidad conjuntista.

Antecedentes desde el currículo escolar e investigaciones afines

Este concepto va ligado a una gran cantidad de temas habituales en la enseñanza media y superior tales como en las nociones de número real, serie, límite, fractal, etc. Sin embargo, desde hace ya varias décadas, con el desarrollo de estudios en educación matemática, varios autores, como Sierpinska (1985) y Artigue (1995), entre otros, han observado que la noción de infinito es por lo general contradictoria en los estudiantes y que éstos encuentran muchas dificultades para su conceptualización cuando se enfrentan con conceptos que la involucran.

Por otro lado, investigadores como Tall (2002) y Montoro (2005) plantean que la noción de infinito matemático no es intuitiva, y mucho menos puede ser aprendida por la experiencia sensible, sino que se requiere de contextos educativos que favorezcan la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza específicas y sostenidas.

Problemática y objetivos de la investigación

La problemática de investigación que se plantea es que el infinito es uno de los obstáculos más difíciles de superar en la enseñanza de las matemáticas y que esta situación hace crisis en el momento de enfrentar los conceptos formales del Cálculo y del Análisis Matemático, fundamentalmente debido a la tensión dialéctica de lo potencial y actual.

En este sentido es que el objetivo general de esta investigación consistió en identificar errores, dificultades y obstáculos asociados al infinito en profesores de matemática en formación al término de su enseñanza universitaria y los tres objetivos específicos que ayudaron a lograr lo anterior fueron: (1) Analizar las nociones emergentes referidas al infinito potencial y al infinito actual planteadas en distintos ámbitos matemáticos, (2) Describir las percepciones de los estudiantes respecto de las sumas infinitas y (3) Describir la emergencia de algunos obstáculos epistemológicos del concepto de límite derivados de la problemática propia del infinito.

Marco Referencial

El marco referencial utilizado consiste de una adaptación de la tipología de dificultades, obstáculos y errores propuesto por Martín Socas (1997). Para lograr lo anterior se incorporaron nuevas categorías respecto de las dificultades en la transición del Álgebra al Cálculo dada por Artigue (1998) y la tipología de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite levantada por Sierpinska (1994). En definitiva el marco referencial contempla las siguientes categorías:

D1: Dificultades asociadas la dificultad de los objetos matemáticos.

D2: Dificultades asociadas a la conceptualización de la noción de límite. Esta categoría se concreta en los siguientes cuatro obstáculos epistemológicos:

O1: Límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.

O2: Sobre-generalización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.

O3: La fuerza de una geometría que impide identificar claramente los objetos involucrados en el proceso de límite.

O4: Asociar el paso al límite con un movimiento físico, con una aproximación.

Es decir, la categoría D2 se relaciona con su obstáculo y se denota por D2-O1, D2-O2, D2-O3 o D2-O4 según sea el caso.

D3: Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

O5: Confiar en engañosas experiencias intuitivas.

Err1: Errores que tienen su origen en un obstáculo. También esta categoría se da asociada con su obstáculo Err1-O según sea el caso.

Err2: Errores debido a las características propias del Análisis Matemático.

Err3: Errores de procedimientos.

Marco Metodológico

La metodología de este trabajo es de carácter cualitativo con un diseño descriptivo y exploratorio cuyas unidades de análisis correspondieron a las producciones de estudiantes en formación de profesores de matemática. Específicamente esta investigación fue realizada en dos universidades chilenas con un total de 12 estudiantes, seis de cada una, que cursaban el último año de su carrera. Se aplicó un instrumento con diferentes situaciones y problemas en los que está involucrado el infinito. Posteriormente se realizaron entrevistas para aclarar algunas de las producciones de los estudiantes y finalmente se realizó un análisis de tales producciones de acuerdo al marco referencial.

Resultados

Los principales resultados evidencian una alta frecuencia en las siguientes categorías:

(D2-O3): Indicando una fuerte presencia de la intuición geométrica como obstáculo epistemológico. Esta situación se presentó de gran manera al considerar lo infinito en lo pequeño en un ámbito geométrico, particularmente con el tema de la divisibilidad infinita en un segmento de recta. (Err3): Esta categoría se dio mayoritariamente en la situación de las pelotas de tenis, problema abordado por Dubinsky (2008), en el que se considera lo infinito en lo pequeño, pero en un ámbito conjuntista. (Err1-O2): Es un error que tiene su origen en el obstáculo de la sobre-generalización de las propiedades de los procesos finitos a los infinitos. Esta situación fue muy evidenciada con respecto a las sumas infinitas en donde muchos estudiantes consideraron lícitas las operaciones de intercalar paréntesis, asociar u otras operaciones que son válidas para las sumas finitas. Especial atención merece la categoría (D2-O4) referida principalmente al obstáculo que consiste en asociar el paso al límite con una aproximación. Además, esta categoría a veces va asociada al error (Err1-O4), pues tanto la dificultad como el error asociados al obstáculo (O4) conviven juntos en el estudiante ya que muchas veces la dificultad es causa del error.

Conclusiones

Los resultados obtenidos no arrojaron diferencias significativas respecto de una u otra universidad, por lo que la procedencia de las muestras fue irrelevante. Las categorías consideradas, que definieron el marco referencial utilizado, permitieron una completa mirada a las nociones emergentes en las producciones de los estudiantes y al mismo tiempo una articulación con los objetivos planteados. El conocimiento que se tiene de la recta, densidad, continuidad, formada por infinitos puntos o incluso asociándola a conceptos físicos como el tiempo o el espacio; impide aceptar la divisibilidad infinita que existe en la matemática. Además este hecho impide acceder a una mirada actual del objeto infinito pues se acepta como imposible concebir el proceso acabado.

En definitiva, esta investigación pretende ser un incentivo para considerar como metodología de análisis en los estudios en didáctica los errores, dificultades y obstáculos que emergen constantemente en las producciones de los estudiantes y a partir de los resultados obtenidos levantar novedosas propuestas de enseñanza.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? LRelime, 1(1), 40-55.

Crubellier, M. (1994). La raison et l'infini. Repères-IREM, 17, 13-28.

Dubinsky, E., K. Weller, K. Stenger y d. Vidakovic. (2008). Infinite iterative processes: the tennis

Ball Problem. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 1(1), 99-121.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los

modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Revista Latinoamericana de

Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 8(2), 169-193.

Montoro, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. Infancia y

Aprendizaje, 28(4), 409-427.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistemologiques relatifs à la notion de limite. Recherches en

Didactique des Mathématiques, 6(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in Mathematics. Studies in Mathematics Education Series.

London: The Falmer Press.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la

Educación Secundaria. La educación matemática en la enseñanza secundaria / coord. Por

Luis Rico Romero, 1997, ISBN 84-85840-65-8, págs. 125-154

Tall, D. (2002). Natural and formal infinities. Educational Studies in Mathematics, 48 (2 y 3), 129-

136.

Aprendizaje matemático en contextos multilingües

Atif Lodhi
Universidad Católica del Maule

Resumen

Se presentan algunos resultados de la experiencia del taller sobre resolución de problemas realizado en la tesis doctoral "El aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes paquistaníes en Cataluña", realizada en un Instituto de Educación Secundaria de Barcelona. El taller promueve el trabajo cooperativo, la creatividad del alumnado y el debate sobre sus estrategias de resolución de problemas, en un espacio de estudiantes paquistaníes escolarizados en Cataluña. Hemos analizado el cambio de lengua durante la resolución de actividades matemáticas, así como las dificultades que presenta el alumnado y las estrategias alternativas que utiliza.

Palabras Clave: Estrategias alternativas, aproximaciones, bilingüismo, etnomatemáticas, resolución de problemas.

Introducción

Las migraciones internacionales, cada vez más frecuentes, producen el aumento de aulas multiculturales a nivel mundial, por lo que en esta investigación trabajamos con estudiantes de origen migrante. Su integración en Cataluña se realiza en las "aulas de acogida" que han sido diseñadas especialmente para el aprendizaje del catalán y del vocabulario científico de las distintas materias escolares. Los alumnos a medida que van aprendiendo la lengua se van integrando en las aulas regulares.

Sabemos por distintos estudios que los alumnos en general, donde presentan más dificultades respecto al conocimiento de la lengua y de las matemáticas es en la resolución de problemas. Las dificultades del alumnado para resolver problemas es un tema de investigación relevante en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas (Polya, 1945, 1954; Castro 2008). Estas dificultades se ven incrementadas en el caso de estudiantes que estudien en una lengua diferente a su primera lengua, lo que ha originado extensos estudios sobre bilingüismo (Clarkson, P.C., 1992; Planas,2009, 2013).En la investigación se han detectado dificultades en el aprendizaje matemático de estudiantes paquistaníes, especialmente en la resolución de problemas y actividades de ecuaciones, que se asocian a dificultades tanto matemáticas como lingüísticas.

Por este motivo, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Qué dificultades del aprendizaje matemático y lingüístico manifiestan los alumnos inmigrantes paquistaníes al resolver problemas matemáticos cuando lo hacen en otra lengua que no es la suya? ¿Qué estrategias utilizan para resolverlas?

Metodologia

El estudio ha optado por una metodología cualitativa etnográfica de estudio de casos, con la finalidad de entender los aspectos de diálogo e intercambio, además del conocimiento de aspectos culturales y sociales de los estudiantes paquistaníes, resolviendo problemas algebraicos. Hemos utilizado esta aproximación metodológica puesto que en la literatura se sugiere que es un método adecuado para la investigación en contextos socioculturales específicos (Goetz y LeCompte, 1988).

Para este estudio se implementó un taller que contó con 12 sesiones sobre la resolución de actividades matemáticas algebraicas, centrado en resolución de ecuaciones, el uso de la lengua y las dificultades del alumnado, en el que participaron voluntariamente 4 estudiantes paquistaníes de 3º curso de secundaria escolarizadas en Barcelona (equivalente a 1º medio en Chile). Las estudiantes trabajaron en parejas resolviendo actividades matemáticas y se registraron las interacciones entre cada pareja. El objetivo de estas actividades de aprendizaje era el de desarrollar competencias básicas de resolución de problemas, centradas en la comprensión y planteamiento de las ecuaciones y se analizó también su resolución para ver si cometían errores de ejecución. Estas actividades fueron seleccionadas a partir de diferentes propuestas educativas del currículo escolar y fueron validadas por un grupo de expertos. La actividad propuesta fue: *La suma de las edades de dos amigos es 44. Sabemos que uno de ellos es 2 años mayor que el otro. Averigua la edad de cada uno y explica cómo lo has hecho.* Analizamos las interacciones de las alumnas, tanto en corrección de contenidos matemáticos, detección de dificultades y estrategias alternativas utilizadas.

Resultados

En un primer momento, las alumnas leen y entienden el problema, pero no son capaces de traducirlo a lenguaje algebraico. Luego de leer el enunciado en catalán (L2), pasan inmediatamente a una segunda lengua (L3) (castellano). A partir del fragmento 7 continúa el diálogo donde se reflejan los errores conceptuales de las alumnas.

Fragmento	Alumna	Enunciado	Registro matemático	Lengua
7	A	x +2 por x	Error conceptual	Castellano
8	Z	¿Aquí va un paréntesis, no?	Duda notación	Castellano
9…	A	¿Por x o más x? no es lo mismo	Duda de operaciones	Castellano
11	Z	¡Pues ya está! Hay que sumar 2, 2x….3x porque …(inaudible)	Duda de operaciones	Castellano

Fragmento	Alumna	Enunciado	Registro matemático	Lengua
12...	A	¡Pues ya está! Hay que sumar 2, 2x....3x porque ...(inaudible)	Confirmación de operación	Castellano
14	Z	x por 2x	Confusión	Castellano
15	A	Pero primero tenemos que hacer el paréntesis	Prioridades de operatoria	Castellano
16	Z	Esto por esto, y esto por esto		Castellano
17	Z	por x es 2x	Error de operatoria	Castellano
19	A	más x.....por 2, ¿es x elevado a 2?	Error conceptual	Castellano
20	Z	No sé, no creo	Duda	Castellano
21	A	x por 2, 2x	Confirmación error	Castellano
22	Z	Si sumas es x por 2, si multiplicas es x elevado a 2	Aclaración en operatoria	Castellano
23	A	Es 2x elevado a 2	Error conceptual	Castellano

En el fragmento de diálogo que se muestra a continuación las alumnas están confundidas con el uso de las operaciones implicadas. Deben escribir una ecuación correcta y dialogan sobre la manera de hacerlo. La alumna Z comienza a tratar a resolver calculando mentalmente por aproximación, e intentando diferentes estrategias para resolver la actividad, y explica a A como está razonando, como se ve en el fragmento siguiente : Después de intentar resolver la actividad, y no encontrar ninguna.

Fragmento	Alumna	Enunciado	Lengua
64	A	44 dividido por 2 es 22 y suma 2 es 24: ¿Pero es lo mismo, no?	Castellano
65	Z	(Dice que no con gestos, moviendo la cabeza)	Gestual
66	A	¿Por qué no?	Castellano
68	A	¡Pero amiga, son iguales!	Urdú
69...	Z	No, mira 44/2 es así	Castellano
73	A	A: Dime que está malo aquí	Urdú
74	Z	Mira uno es 2 años más pequeño que el otro, cuando uno tiene 26 el otro tendrá 24 y eso es 50 en total y aquí es 44	Urdú
75	Z	Cuando restamos 26 de 44 es 18	Urdú
76	Z	Y el otro amigo tiene 2 años menos que el primero	Urdú
77	Z	Y aquí no es	Urdú
78	A	No, uno tiene que tener 20 y el otro tiene que tener 22	Urdú
79	Z	Pero la suma de los dos es 42	Urdú
81	Z	Y creo que es 24	Urdú
82	A	Y la resta cuanto es	Urdú
83	Z	La resta es 21	Urdú

Fragmento	Alumna	Enunciado	Lengua
85	Z	24, 25, 26, 27 44	Inglés
86	A	21	Inglés
87	Z	Mira es 20 no es 21	Urdú
88	A	Cuenta de 24 a 44	Inglés
89	A	Ah si estaba contando hasta 40	Urdú
90	A	Pero aquí han escrito que es 2 años mayor que el otro, pero lo que hicimos aquí la diferencia es 4 años no son 2 años	Urdú
92	Z	Pero cuando hacemos 22 años el otro tiene que tener 24 años porque tienen dos años de diferencia	Urdú

Después de intentar resolver la actividad, y no encontrar ninguna salida, la alumna A comienza hablar en su primera lengua y Z responde probando diferentes estrategias para resolver la actividad también en urdú. Cabe señalar que mientras usan su primera lengua, las alumnas hacen "code switching" a lengua inglesa para decir los números (en Pakistán aprendieron los números en inglés). Luego continúan en urdú. Vemos que la alumna Z argumenta más veces que la alumna A (toma la palabra 26 veces versus 12 veces su compañera), y resuelve el problema calculando mentalmente. Las alumnas deciden utilizar un método de tanteo, probando pares de números que cumplan con la norma (dos números sumados dan 44 y su diferencia es 2). Empiezan probando distintas parejas de números pares, pero ven que no cumplen la regla de que la diferencia entre ellos sea 2 y al final prueban una pareja impar que si les resulta correcto.

Conclusiones:

Se generó un espacio de intercambio y colaboración entre las estudiantes, quienes tuvieron la posibilidad de cambiar registro lingüístico, hecho que facilita la comunicación de la pareja analizada. Detectamos dificultades relacionadas con la traducción al lenguaje algebraico y la operatoria. Sin embargo, las alumnas comprenden el enunciado y utilizan un método alternativo para responder la actividad, ensayando pares de números que cumplan la condición. El uso de diferentes lenguas posibilita una buena comunicación entre ellas. Una vez resuelta por el método del tanteo la actividad, esta fue traducida a lenguaje algebraico y solucionada de manera correcta.

Respecto a la resolución de problemas matemáticos, constatamos que se propician momentos metacognitivos que ayudan a que las estudiantes propongan formas de resolución, aunque no siempre tienen éxito. Constatamos que al propiciar un espacio para el desarrollo de un trabajo cooperativo en la resolución de problemas, se producen interacciones muy ricas que facilitan el desarrollo de las actividades. Por otra parte, posibilitar el uso de un lenguaje bilingüe permitió mejorar la argumentación matemática. Todo el taller fomentó la metacognición del alumnado, mediante preguntas que potenciaron su aprendizaje de modo socio- constructivista.

Referencias

Castro, E. (2008). "Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España". En Luengo, R. Gómez, B.; Camacho, M.; Blanco, L. (Eds.) Investigación en educación matemática XII pp. 130-140. Badajoz, Sociedad Española de educación matemática SEIEM

Clarkson, P.C. (1992). "Language and mathematics: A comparison of monolingual bilingual". Educational Studies in Mathematics, Vol. 23, nº 4, pp. 417-429

Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Madrid. Ed. Morata

Planas, N.; Setati, M. (2009). "Bilingual students using their languages in the learning of mathematics." Mathematics Education Research Journal, Vol. 21, nº 3, pp 36-59

Planas, N.; Civil, M. (2013). "Language-as-resource and language-as-political: tensions in the bilingual mathematics classroom". Mathematics Education Research Journal, Vol. 25, nº 3, pp. 361-378.

Polya, G. (1945, 2nd, edition 1957). How to solve it. Pricenton. Pricenton

Polya, G. (1954). "Mathematics and plausible reasoning". Vol.1. Induction and analogy in mathematics. Vol. 2. Patterns of plausible inference. Pricenton. Pricenton Press

VOL11 - NUM 1

Formación ciudadana y comunidades de aprendizaje. Propuesta de articulación desde una visión socioepistemológica de la matemática educativa

Iván Pérez Vera, Daniela Reyes Gasperini, Angela Silva Salse
Universidad Academia de Humanismo Cristiano (Chile), CINVESTAV (México), Universidad SEK (Chile).

Resumen

Esta comunicación da cuenta de un proyecto desarrollado en el marco de una investigación doctoral cuyo objetivo es la articulación de habilidades de formación ciudadana y la Matemática Educativa desde una mirada Socioepistemológica. El tratamiento escolar de la matemática en Chile sigue centrándose, en términos de Cantoral (2013), en una visión platónica de la enseñanza. Los procesos de enseñanza manifiestan una matemática escolar de carácter utilitario, es decir, carente de significados para quienes aprenden. Esta afirmación se contrapone a la idea de la formación ciudadana (Magendzo, 2006), que busca desarrollar personas reflexivas, argumentativas y críticas, habilidades declaradas en el Currículum, en el que se propone el aprendizaje desde el aula conectado al entorno. Identificamos una carencia de relación entre las concepciones y objetivos de la matemática escolar y de la formación ciudadana.

ABSTRACT *This communication is based on a project developed under a PhD framework investigation which objective is the interaction of citizen formation and educative Mathematics from a socioepistemological perspective. Teaching mathematics at school is still centered, according to Cantoral (2013), in a platonic view of teaching. Training processes present mathematics as a functional nature, that is to say, it has lack of meaning for those who are learning. This statement is opposed to the idea of citizen formation (Magendzo, 2006), that looks to develop reflexive, argumentative and critical people. These abilities are declared in the Curriculum, where it is proposed to learn in a classroom connected to the environment. It was identified lack of school mathematical and citizen formation concepts and objectives.*

Palabras clave: Formación Ciudadana, Comunidad de aprendizaje, Matemática Educativa, Prácticas Sociales

Matemática Escolar y propuesta curricular.

La propuesta de enseñanza a nivel escolar presenta una clara tendencia a la enseñanza de un objeto preexistente; es decir, el tratamiento escolar de la matemática, se reduce a una visión platónica del objeto (Cantoral, 2013). En el sentido de Platón (Chacón y Covarrubias , 2012), la matemática vive en un plano más allá de nosotros, es eterna y previa al hombre, transita por el mundo de las ideas y solo se puede acceder a este conocimiento por medio de la razón. Lo anterior, en el paradigma platónico de la Ciencia, se considera a los individuos como entes que interactúan con el saber, no que lo generan. Sin embargo, desde Kuhn (1970) se plantea la ciencia como producto del hombre y de su interacción como ser social. En Reyes-Gasperini (2016) se caracteriza la matemática escolar como una visión platónica de la enseñanza, identificando los posibles usos del objeto como una etapa posterior al proceso de aprendizaje. Surge como propuesta la Re-Significación del objeto desde el uso, es decir, desde la práctica social como normativa de la actividad humana.

El rol de la escuela en los procesos de formación ciudadana.

Señala Mardones (2015) que en las últimas décadas se ha observado a nivel mundial un cambio de referentes de la socialización política escolar desde el paradigma de la educación cívica a la educación ciudadana, esto último incorpora el desarrollo de habilidades, valores y se concibe como una experiencia escolar integral. Sobre la Ciudadanía Democrática, señalan Cox y García (2015) que los requerimientos a la experiencia educativa en este plano se han elevado y complejizado en forma radical; la respuesta a este nuevo nivel de exigencias desafía a toda la experiencia escolar, por tanto, a la totalidad del Currículum. Sobre la educación, vista como un todo, señala Magendzo (2006) que esta debe hacer de los estudiantes sujetos–ciudadanos empoderados para una ciudadanía activa, interlocutantes con la diversidad social, cultural y política que se nos impone en un mundo global que queremos y debemos "domesticar". La ciudadanía y el desarrollo democrático tienen como uno de sus factores claves a la educación.

La ausencia de la matemática en las propuestas oficiales curriculares de formación ciudadana en Chile.

Desde el plan de Formación Ciudadana impulsado por el Ministerio de Educación de Chile, en particular del documento "Orientaciones técnicas y guiones didácticos para fortalecer la formación ciudadana" (MINEDUC, 2013) se presenta como referente del plan a la asignatura de Historia, Geografía y Ciencias Sociales, presentando como una de las competencias transversales a la Resolución de Problemas, lo que es posible interpretar desde la propuesta como un tratamiento al objeto y su posterior uso aplicado, desconectando este objeto de su naturaleza propia, transformándolo en una herramienta instrumental. Observamos que en los procesos de formación ciudadana la escuela desempeña un rol fundamental, sin embargo, existe, a nivel local, una desconexión entre formación ciudadana y la enseñanza y aprendizaje de las Ciencias en general.

Problemática y objetivos.

El tratamiento escolar de la matemática en Chile sigue centrándose, en términos de Cantoral (2013), en una visión platónica de la enseñanza. La matemática se aprende para usarla en sí misma. Los procesos de enseñanza manifiestan una matemática escolar de carácter utilitario, es decir, carente de significados para quienes aprenden y centrada en significados que, como se dijo al comienzo, son de utilidad para ramos o carreras posteriores. Esta afirmación se contrapone a la idea de la formación ciudadana que busca desarrollar personas reflexivas, argumentativas y críticas. A pesar de que estas habilidades están declaradas en el Currículum, en el que se propone el aprendizaje desde el aula conectado al entorno, identificamos una carencia de relación entre las concepciones y objetivos de la matemática escolar y de la formación ciudadana. Consideramos que la matemática escolar debiera ser capaz de desarrollar las habilidades ciudadanas, sin embargo, al revisar los antecedentes damos cuenta de que esto no está sucediendo.

Como objetivo general de la investigación se propone analizar un proceso educativo de estudiantes basado en una visión socio-epistemológica de la matemática escolar para el desarrollo de habilidades de ciudadanía. Los objetivos específicos son: (1) Diseñar un proceso educativo de estudiantes basado en una visión socio-epistemológica de la matemática escolar para el desarrollo de habilidades de ciudadanía; (2) Aplicar un proceso educativo de estudiantes basado en una visión socio-epistemológica de la matemática escolar para el desarrollo de habilidades de ciudadanía; (3) Evaluar un proceso educativo de estudiantes basado en una visión socio-epistemológica de la matemática escolar para el desarrollo de habilidades de ciudadanía

Antecedentes teóricos.

Comunidades de aprendizaje: Para realizar una articulación teórica fue necesario ver la escuela como un todo, identificar (en lo posible) todos los actores y factores que con mayor o menor profundidad, influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por la naturaleza de la formación ciudadana decidimos entender la escuela y su entorno bajo la propuesta de una comunidad de aprendizaje, entendiendo esto desde la propuesta de Jaussi y Luna (2006) como un proyecto de cambio en la práctica educativa para responder de forma igualitaria a los retos y necesidades que plantean la transformación de sociedad industrial en sociedad informacional y todas las demás transformaciones sociales que se están produciendo en la sociedad actual.

Nuevas necesidades de la formación ciudadana: Martínez, Silva, Morandé y Canales (2010) plantean seis desafíos para la política de programas de formación ciudadana: (1) Creación de una cultura escolar democrática que permita generar sentido de identidad y membresía; (2) Valoración de la formación en ciudadanía y rol de los adultos como facilitadores; (3)Sintonía entre el programa, el proyecto educativo y el entorno institucional; (4) Fortalecimiento de los equipos ejecutores e implementación de metodologías acordes a la complejidad de estas competencias; (5) Problematización de la Pobreza; (6) Extensión de las experiencias de participación real e influyente a los contextos de vida reales de los jóvenes. Muñoz y Torres (2014) plantean una serie de desafíos para el profesorado en formación ciudadana, específicamente resaltan la necesidad de superar el vínculo con lo político, potenciar el análisis colectivo por sobre lo individual, la ampliación del concepto de ciudadano elector al de actor social y, finalmente, contextualizar los intereses personales en una dimensión social.

Teoría Socioepistemología de la Matemática Educativa (TSME). Para mirar al ciudadano y como la matemática escolar ha de potenciar su proceso formativo como tal, nos situamos desde la TSME (Cantoral, 2013) y desde la construcción social del conocimiento que esta propone y en torno al cual se articula. Cuatro son las dimensiones que caracterizan la TSME: epistemológica, didáctica, cognitiva y social, esta última cuyo énfasis está puesto en el valor de uso. Reyes-Gasperini (2016) señala desde la TSME una descentralización del objeto (matemática escolar) para pasar a un foco en las prácticas (Saber Matemático Escolar); específicamente se propone pasar de una construcción del conocimiento matemático mediante una evolución conceptual, sustentada en una epistemología de ideas, a una construcción del conocimiento matemático mediante la pragmática sustentada en la epistemología de prácticas (valor de uso). Las prácticas, entendidas desde Cantoral (2013) se articulan en un proceso de anidación, transitando desde la práctica social, las prácticas de referencia, las prácticas, hasta llegar a las actividades y acciones que desarrollan los individuos. Centramos nuestro foco en las prácticas de referencia y la triada que lo acompaña; el contexto en el que se desarrolla, el uso y al sujeto en su rol de usuario (Cantoral, 2013).

Articulación y marco metodológico.

La aproximación a la escuela no puede ser invasiva, la propuesta formativa no puede ser ajena al lugar en que se vivenciará, por ello surge la necesidad de aproximación a la comunidad de aprendizaje, siendo esta nuestra postura para entender y construir la escuela. Hemos identificado en análisis preliminares algunos procesos ciudadanos que responden a lo que entendemos como prácticas de referencia desde la TSME (encuestas, proyecciones, distribución de la riqueza, tasas de natalidad y mortalidad, índice de abortos, índices de pobreza, presupuestos), por lo que proponemos que desde estas prácticas de referencia realizar una construcción del saber matemático escolar.

Marco metodológico. Para Ibernón (2012) existe una desconexión entre la teoría y la práctica, investigadores responden preguntas que no se hacen los profesores, diferencia entre conocimiento universal y práctica contextualizada y falta de preocupación de unir lo investigado con la práctica educativa. Se hace necesaria la generación de diálogos con los diferentes actores de la comunidad educativa. Se buscará problematizar prácticas de referencia inmersas en procesos ciudadanos para generar situaciones de aprendizaje. Lo anterior se desarrollará en tres fases que se enuncian a continuación: (1) Problematización de la matemática escolar y diseño de situaciones de aprendizaje. (2) Experimentación por parte de los estudiantes de la situación de aprendizaje. (3) Reflexiones y análisis del proceso. Durante todo el proceso se utilizarán instrumentos del análisis cualitativo con la intención, desde lo empírico, de generar constructos analíticos, con el fin de generar y levantar elementos teóricos. La intervención se realizará en la Escuela Héroes de Yungay de la comuna de la Granja (Chile), en particular con los estudiantes del segundo ciclo de educación básica.

Referencias

Cantoral, R. (2013). Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento (1a ed.). Editorial Gedisa SA, Barcelona.

Chacón y Covarrubias. (2012). El sustrato platónico de las teorías pedagógicas. Tiempo de educar, 13(25).

Cox, C. y García, C. (2015). Objetivos y contenidos de la formación ciudadana en Chile 1996–2013: tres currículos comparados. C. Cox y JC Castillo, Aprendizaje de la ciudadanía. Contenidos, *experiencias y resultados. Santiago: Ediciones UC, 283–319.*

Imbernón, F. (2012). La investigación sobre y con el profesorado. La repercusión en la formación del profesorado: ¿cómo se investiga? Revista electrónica de investigación educativa, 14(2), 1–9.

Jaussi, M. y Luna, F. (2006). Comunidades de aprendizaje. Claves para la innovación educativa. Transformando la escuela: comunidades de aprendizaje, 36, 29–33.

Kuhn, T. (1970). Book and film reviews: Revolutionary View of the History of Science: The Structure of Scientific Revolutions. The Physics Teacher, 8(2), 96–98.

Magendzo, A. (2006). El Ser del Otro: un sustento ético-político para la educación. Polis. Revista Latinoamericana, (15). Recuperado a partir de http://polis.revues.org/4897

Mardones, R. (2015). El paradigma de la educación ciudadana en Chile: una política pública inconclusa. Aprendizaje de la Ciudadanía. Contextos, Experiencias y Resultados, 145–173.

Martínez, M. L., Silva, C., Morandé, M., y Canales, L. (2010). Los jóvenes ciudadanos: reflexiones para una política de formación ciudadana juvenil. Última década, 18(32), 105–118.

MINEDUC, (2013). Orientaciones técnicas y guiones didácticos para fortalecer la formación ciudadana.

Muñoz, C. y Torres, B. (2014). La formación ciudadana en la escuela: Problemas y desafíos. Revista Electrónica Educare, 18(2).

Reyes-Gasperini, D. (2016). Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa para la transformación y la mejora educativa. Recuperado a partir de https://www.researchgate.net/

Elementos de inferencia informal presentes en libros de texto de matemáticas en el tema de estadística. Un estudio exploratorio

Nicolás Sánchez Acevedo, Blanca Ruiz Hernández
CICATA-IPN; Tecnológico de Monterrey

Resumen

La formación en Estadística se debe proyectar desde los primeros niveles escolares con la intención de que los estudiantes la utilicen para analizar datos en diversos fenómenos. Desde la perspectiva de la inferencia informal, se podría, incluso hacer deducciones sobre estos fenómenos basadas en datos. Este tipo de inferencias y explicaciones no se da por sí solo, sino que emerge de un trabajo guiado con distintos recursos: profesores, libros de texto, tecnologías, etc. El libro de texto es uno de los recursos más usados por los profesores para diseñar, planificar y ejercitar. Tiene, por tanto, un rol central en la enseñanza y aprendizaje. En este trabajo presentamos resultados preliminares del análisis de dos libros de texto de 8° grado. Utilizamos dos categorías de análisis para este trabajo (i) de inferencia informal (Makar y Rubin, 2009) y (ii) de contexto (Pfannckuch, 2011). Los resultados preliminares muestran que los problemas, en su mayoría tienen características nemotécnicas y centradas en la ejercitación, dejando de lado razonamientos e inferencias. Sobre los contextos, en su mayoría son de aprendizaje experiencias, los que buscan solo una rutinización de las prácticas.

Palabras Clave: Libro de texto, inferencia informal, estadística, problemas

ABSTRACT *Training in statistics should be planned from the first school levels with the intention that students use it to analyze data on various phenomena. From the perspective of informal inference, one could even make inferences about these phenomena based on data. This type of inferences and explanations does not occur by itself, but emerges from a guided work with different resources, teachers, textbooks, technologies, etc. The textbook is one of the most used resources by teachers to design, plan and exercise. It has, therefore, a central role in teaching and learning. In this paper we present preliminary results of the analysis of two 8th grade textbooks. We use two categories of analysis for this work (i) of informal inference (Makar and Rubin, 2009) and (ii) of context (Pfannckuch, 2011). The preliminary results show that the problems, mostly have mnemonic characteristics and focused on the exercise, leaving aside reasoning and inferences. On the contexts, they are mostly learning experiences, which seek only a routinization of practices.*

Keywords: Textbook, informal inference, statistics, problems

Introducción

Formar ciudadanos con la capacidad de leer, analizar y comprender la información proveniente de diversos medios debe gestarse en el seno de la educación elemental, la cual se guía por los lineamientos de directrices curriculares en cada país y por consiguiente en cada institución educativa. Es por esto que algunos currículos (e.g. MEC, 2007; MINEDUC, 2015) comienzan a introducir el conocimiento de conceptos e ideas fundamentales de estadística, principalmente para profundizar en la comprensión de la naturaleza de los datos y contextos más reales. Algunas directrices internacionales han sido la base de estas reformas (NCTM, 2000; Franklin et al., 2005).

En el caso de Chile, los documentos oficiales han venido haciendo cambios curriculares respondiendo a estas demandas y tomando en consideración las directrices que emanan de estamentos internacionales. De esta manera el MINEDUC (2015) plantea que se debe formar *"alumnos críticos y alumnas críticas que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones; que sean capaces de determinar situaciones conflictivas a raíz de interpretaciones erróneas de un gráfico y de las posibles manipulaciones intencionadas que se pueden hacer con los datos"* (p. 100).

Diversos investigadores han propuesto e implementado estrategias de aprendizaje y enseñanza desde diversas perspectivas, algunas de ellas, curriculares, por proyectos y tecnológicas (Meletiou-Mavrotheris, Paparistodemou, 2014; Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013; Mclean, Doerr, 2015)

Estos estudios tienen en común promover un aprendizaje de la estadística centrado en la comprensión de conceptos, más que en el trabajo rutinario sobre técnicas de cálculo de estadística alejadas del contexto, es decir, la idea de reducir el aprendizaje de conceptos aislados contrasta completamente con los enfoques holísticos para aprender a razonar estadísticamente (Makar y Ben-Zvi, 2011).

Una de estas estrategias o enfoques de enseñanza es la inferencia informal, la que se muestra como alternativa a los enfoques tradicionales. La inferencia informal permite interconectar razonamientos sobre la distribución, con medidas de centro y variación, así como la inclusión del juicio de las personas basados en el contexto y argumentos sustentados en la necesidad de razonar sobre la base de la evidencia de los datos (Pfannckuch, 2006; Bakker, Derry y Konold, 2006). La propuesta de enseñanza de inferencia informal se basa en promover el razonamiento a partir de los datos y no en procedimientos formales conocidos, es decir, se considera una aplicación del razonamiento inferencial, permitiendo trabajar la inferencia estadística fuera de lo formal. Para Zieffler, Garfield, Delmas, Reading (2008) se trata de una combinación de perspectivas y plantean que este razonamiento es el uso del conocimiento estadístico, pero informal para argumentar y sustentar sus inferencias a poblaciones con base en datos y muestras observadas; para Makar y Rubin (2009) la inferencia informal es la base para aprender estadística y a pesar que se apoya conceptualmente en procesos de inferencia formal posteriores, el objetivo no está en preparar a los estudiantes para estadísticas formales.

La estadística el marco del currículo nacional

En el caso de Chile, el eje de estadística ha sufrido modificaciones tanto en sus objetivos como en los contenidos que se deben desarrollar en cada nivel educativo, principalmente por los cambios que se han hecho a nivel internacional. Dentro del eje temático de estadística y probabilidad se plantean los siguientes objetivos: (i) Realizar análisis, inferencias y obtener información a partir de datos estadísticos, (ii) Formar alumnos críticos que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones, (iii) Determinar situaciones conflictivas a raíz de interpretaciones erróneas de un gráfico y de las posibles manipulaciones intencionadas que se pueden hacer con los datos (MINEDUC, 2013, p. 110).

Metodología, objetivos y unidad de análisis

Para la presente investigación se analizaron dos libros de texto de 8° grado de educación primaria de Matemáticas (estudiantes de entre 12 y 13 años): A) Bennett, Burger, Chard, Hall, Kennedy, Renfro, Roby, Scheer y Waits (2014), Texto para el estudiante. Matemática 8°, Ed. Galileo y (B) Catalán, Pérez, Prieto y Rupin (2017), Texto del estudiante de Matemática, 8° básico.

La investigación sigue una metodología cualitativa de tipo descriptivo, pues la intención es describir las actividades que presentan ambos libros de texto con relación a las unidades de análisis consideradas. La selección de los dos libros de texto se ha hecho por medio de un muestro intencionado (Quinn, 1980), pues nuestra intención no es generalizar.

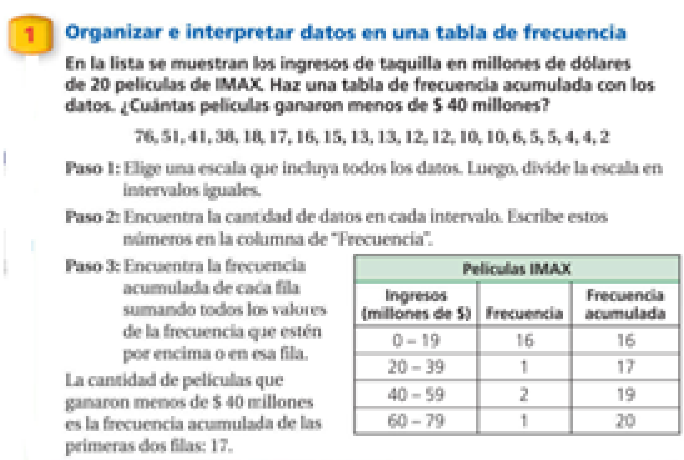
El objetivo planteado es: Analizar las actividades de estadística propuestas para el estudiante en dos libros de texto de Matemáticas de 8° grado de educación primaria a través de dos unidades de análisis seleccionadas para tal fin. Estas son: (i) Unidad de análisis de inferencia informal: se considera el uso de la palabra informal en este caso como medio para sustentar la comprensión conceptual de los procesos inferenciales estadísticos (Makar y Rubin, 2009). Unidad de análisis de contexto, de los que se distinguen *contexto en problemas desde una perspectiva estadística o centrada en los datos y contexto de aprendizaje-experiencia* (Pfannkuch, 2011).

Resultados preliminares

Los resultados que se muestran en este reporte son sobre la base del análisis de los problemas-situaciones que aparecen en los libros de texto a modo de presentación.

En las secciones de interés, el libro de texto A contiene ocho ejemplos, de los cuales en uno de ellos (12,5%) se hace uso de lenguaje probabilístico, permite generalizar y hacer uso de los datos como evidencia (Figura 1). Los otros siete ejemplos son rutinarios y aluden al desarrollo de técnicas matemáticas. En sus enunciados y explicación, no se encuentran, elementos de las unidades de análisis de inferencia informal. De acuerdo a la unidad de análisis de inferencia informal, se espera que se hagan visibles algunos aspectos que impliquen un trabajo, por parte del estudiante fuera de lo determinista y puramente matemático, en el sentido de analizar datos y considerar su naturaleza para hacer inferencia y analizar información, varios de estos aspectos aparecen referenciados en las situaciones iniciales analizadas.

En relación a la unidad de análisis de contexto que consideramos en este trabajo (Pfannkuch, 2011) se toma en cuenta el contexto desde una perspectiva estadística y la otra desde una perspectiva del aprendizaje-experiencia. De los ocho ejemplos propuestos en el libro de texto A, todos ellos aluden a contextos de aprendizaje experiencia. Pues estos ejemplos se centran en tareas para que el estudiante resuelva y permiten una construcción de aprendizajes centrado en conceptos. En ninguno de ellos se hace alusión a la forma en que se generan los datos y la forma en que se diseña el problema base de los ejemplos.


1 Organizar e interpretar datos en una tabla de frecuencia

En la lista se muestran los ingresos de taquilla en millones de dólares de 20 películas de IMAX. Haz una tabla de frecuencia acumulada con los datos. ¿Cuántas películas ganaron menos de $ 40 millones?

76, 51, 41, 38, 18, 17, 16, 15, 13, 13, 12, 12, 10, 10, 6, 5, 5, 4, 4, 2

Paso 1: Elige una escala que incluya todos los datos. Luego, divide la escala en intervalos iguales.

Paso 2: Encuentra la cantidad de datos en cada intervalo. Escribe estos números en la columna de "Frecuencia".

Paso 3: Encuentra la frecuencia acumulada de cada fila sumando todos los valores de la frecuencia que estén por encima o en esa fila.

La cantidad de películas que ganaron menos de $ 40 millones es la frecuencia acumulada de las primeras dos filas: 17.

Películas IMAX		
Ingresos (millones de $)	Frecuencia	Frecuencia acumulada
0 – 19	16	16
20 – 39	1	17
40 – 59	2	19
60 – 79	1	20

Figura 1: Ejemplo de situación rutinaria con ausencia de elementos de inferencia informal y de contexto aprendizaje experiencia (Bennett, Burger, Chard, Hall, Kennedy, Renfro, Roby, Scheer y Waits, 2014, p. 158)

Del libro de texto B, de las diecisiete situaciones que se presentan por lección, seis (35,3%) de ellas incluyen algún elemento de la unidad de análisis de inferencia informal (ver ejemplo en Figura 2).

Algunos de los elementos que se consideran en esta unidad son por ejemplo preguntas del tipo *"cuántos estudiantes tardan entre…"*, o *¿a qué se debe el aumento de la estatura promedio con base en datos muestrales?*, comparación de gráficos de barras haciendo uso de datos en la información de escalas, *"¿bajo qué puntaje está el 60% de los postulantes?"* o *"al menos el 25% de los niños y niñas mide menos de …"*. Todos estos indicadores aluden a presencia de inferencia informal en las situaciones, pero en aspectos muy particulares, sin embargo, ellos no pueden llevar al estudiante a pensar estadísticamente con base en el uso de datos. Las once situaciones restantes que presenta el libro de texto son mecánicas e inducen solamente a un trabajo y explicación rutinarios basada en pasos predefinidos, que posteriormente son los que forman la base para resolver los ejercicios para los estudiantes.

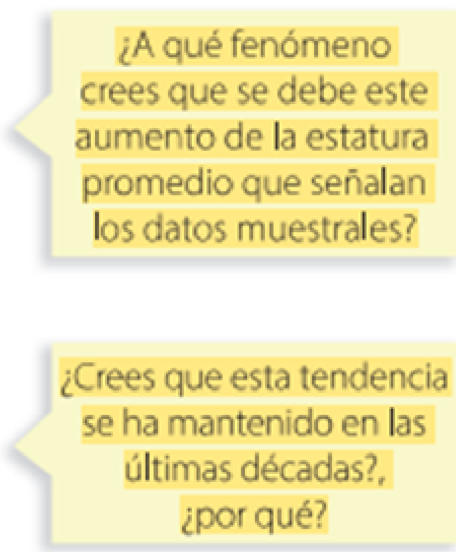


Figura 2: Ejemplo de situación rutinaria con ausencia de elementos de inferencia informal y de contexto aprendizaje experiencia (Catalán, Pérez, Prieto y Rupin, 2017, p. 297)

Con relación a la unidad de análisis de contexto, dieciséis de las situaciones (94,1%) que presenta el libro de texto son basadas en contexto de aprendizaje experiencia, es decir, no se muestra el origen del estudio y la forma en que se llevó a cabo la recopilación de datos, más bien sirven de modelos para desarrollar sobre las estrategias y formas de análisis que se presentan. En un caso analizado (5,9%) el contexto puede tener una componente de contexto estadístico, pues muestra la posibilidad de indagar sobre el origen de los datos y la forma de ser recopilados.

Conclusiones Preliminares

Con base en los resultados preliminares, estos concuerdan con algunas otras investigaciones relativas al análisis problemas en libros de texto en el nivel primario, algunas de los resultados coinciden con los hallazgos de la presente investigación, los cuales se centran en los tipos de problemas, tienen un marcado acento en la práctica rutinaria de problemas y están despojados de aspectos que lleven a los estudiantes a cuestionar distintos fenómenos reales. Por otro lado, varios de las situaciones de contexto-experiencia tienen directa relación con las situaciones que no presentan aspectos inferenciales informales, lo que hace que la práctica y desarrollo de estas situaciones se enmarque en una secuencia de *pregunta* --› *extracción de información* --› *respuesta* y que en pocos casos, las actividades se plantean con un sentido estadístico más investigativo en el sentido que lo propone Pfannckuch (2011) con base en el ciclo investigativo. Con este tipo de trabajos, se pretende aportar evidencia que permita a los autores que elaboran material didáctico a que consideren sugerencias que ayuden a los profesores a diseñar situaciones que estimulen el pensamiento estadístico, así como a que contengan mayores elementos de una estadística basada en fenómenos aleatorios y que tomen en cuenta aspectos como el origen de los datos, analizar la variabilidad entre las muestras, trabajos centrados en pequeños proyectos que permitan hacer emerger elementos centrales de la estadística, dependiendo del nivel escolar, etc., dejando de lado la mecanización matemática, que en el contexto del trabajo estadístico es un actor secundario que apoya el razonamiento estadístico sobre los datos.

Referencias

Bakker, A., y Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. Mathematical Thinking andLearning, 13(1–2), 5–26.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. Números, 83, 7-18.

Mclean, J., y Doerr, H. (2015). The development of informal inferential reasoning via resampling. En Noveno Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática (CERME 9) (pp. 785-786).

Makar, K., & Ben-Zvi, D. (2011). The role of context in developing reasoning about informal statistical inference. Mathematical Thinking and Learning, 13(1–2), 1–4.

Makar, K., y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. Statistics Education, Research Journal, 8(1), 82-105.

Meletiou-Mavrotheris, M., & Paparistodemou, E. (2015). Developing students' reasoning about samples and sampling in the context of informal inferences. Educational Studies in Mathematics, 88, 385–404.

MINEDUC. (2015). Bases curriculares 7° básico a 2° Medio. Ministerio de educación. Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

NCTM (2000)."Principles and standards for school mathematics. Reston, VA ".NCTM. http:// standards. nctm.org/.

Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil. [CDROM]. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. [En línea: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/ publications/17/6A2_PFAN.pdf.

Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. Statistics Education Research Journal, 7(2), 40-58.

Un instrumento para medir el nivel de razonamiento geométrico basado en el modelo de van hiele

Sofía Carrasco y Angela Castro
Universidad Austral de Chile

Resumen

Presentamos parte de un instrumento que evalúa el nivel razonamiento geométrico de estudiantes de Primer Año Medio, basado en el Modelo de van Hiele. Para ello, (i) realizamos una progresión de los objetivos de aprendizaje propuestos en el eje de Geometría de Educación Básica; (ii) identificamos los conocimientos claves que los alumnos deberían poseer al momento de finalizar la Educación Básica; (iii) comparamos los conocimientos claves identificados con los conocimientos necesarios para el eje de Geometría según los planes y programas de Primer Año Medio; y (iv) elaboramos preguntas basadas en los niveles de razonamiento de van Hiele. Esta propuesta ofrece una herramienta para que los profesores determinen el nivel de razonamiento geométrico con el que inician sus alumnos la enseñanza media, permitiéndoles diseñar secuencias metodológicas más eficaces.

Palabras clave: Razonamiento geométrico, niveles de razonamiento, educación media, cuestionario.

ABSTRACT *We present part of an instrument that assesses the geometric reasoning level of First Year Middle School students, based on the Van Hiele Model. We (i) made a progression of the learning objectives proposed in the Basic Education Geometry; (ii) identify the key knowledge that students should have at the time of completing Basic Education; (iii) compare the key knowledge identified with the knowledge required for the Geometry axis according to the plans and programs of the First Year of the Year; and (iv) we elaborated questions based on van Hiele's reasoning levels. This proposal offers a tool for teachers to determine the level of geometric reasoning with which their students start their secondary education, allowing them to design more effective methodological sequences.*

Key words: *Geometric reasoning, reasoning levels, secondary education, questionnaire*

Introducción

La Geometría se ha posicionado como una de las ramas más complejas dentro de la Matemática. Uno de los factores que ha gatillado esta situación, posee su origen a partir del siglo XVII con el comienzo de la idealización, en el cual la imagen visual del objeto geométrico retrocedió en importancia y fue sustituido por lo algebraico y lo analítico (Davis, 1993).

En Chile, los resultados alcanzados por los estudiantes en evaluaciones nacionales e internacionales evidencian que no se han desarrollado las competencias básicas en matemáticas, debido a que se prioriza el trabajo algebraico, sin aplicaciones ni contextos. Esta situación, ha traído como consecuencia, que los alumnos no desarrollen las habilidades claves en los procesos geométricos, tales como la visualización, las representaciones, la exploración, la modelización, la argumentación y la demostración (Aravena y Caamaño, 2013).

Al inicio de la Educación Media, ocurre un cambio de ciclo de escolarización y en muchas ocasiones, los profesores se ven enfrentados a alumnos que provienen de diversos contextos, con distintos conocimientos previos, habilidades y actitudes. Esta situación plantea la necesidad de disponer de instrumentos de evaluación diagnostica que permitan recoger la diversidad presente en el aula. Esto motivó nuestro interés por diseñar una evaluación que permita a los docentes que imparten clases en primer año de educación media, medir el nivel de razonamiento que posee cada uno de sus estudiantes. Si bien, en estudios anteriores se han propuestos algunos instrumentos que buscan medir el nivel de razonamiento geométrico (e.g. Aravena y Caamaño, 2013; Cabello, Sánchez y López, 2013; entre otros), se requieren instrumentos actualizados a los nuevos programas que orienten la planificación de la enseñanza en el eje de Geometría.

Enseñanza de la geometría y el modelo de Van Hiele

De acuerdo con las Bases Curriculares del MINEDUC (2013), en el eje de Geometría *"se espera que los estudiantes desarrollen sus capacidades espaciales y que entiendan que ellas les permiten comprender el espacio y sus formas"* (p.110). Para lograr esto, se afirma que los alumnos deben ser capaces de comparar, medir, estimar magnitudes y analizar propiedades y características, para que así puedan utilizar de manera adecuada y precisa las propiedades y relaciones geométricas existentes, y así, finalmente, realizar generalizaciones y resolver problemas geométricos.

Lo descrito anteriormente, se relaciona con el concepto de razonamiento geométrico, ya que según la Agencia de Calidad de la Educación (2016) es aquel pensamiento lógico y sistemático para realizar deducciones basadas en reglas y supuestos específicos. Entonces, se infiere que para razonar deben manejar ciertos *"conceptos, redes de conceptos e información sobre hechos, procesos, procedimientos y operaciones"*(MINEDUC, 2016, pág. 9).

De acuerdo con lo anterior, esta investigación se basa en el modelo de van Hiele, debido a que es uno de los modelos de enseñanza de la Geometría, que busca determinar e incrementar los niveles de razonamiento geométrico. El Modelo de van Hiele es una teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría constituida desde la idea de que, a lo largo del proceso de aprendizaje, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles que son secuenciales y ordenados (Jaime y Gutiérrez, 1993).

Tabla 1: *Niveles de razonamiento del Modelo de van Hiele*

Niveles	Descripción del nivel
lógico Nivel 1 *(visualización)*	Realizan una descripción de los objetos a base de su aspecto físico, sin distinguir explícitamente sus componentes ni propiedades matemáticas.

Niveles	Descripción del nivel
Nivel 2 *(análisis)*	Realizan una descripción de los objetos a base de su aspecto físico, sin distinguir explícitamente sus componentes ni propiedades matemáticas.
Nivel 3 (deducción informal)	Reconocen los componentes y propiedades de un objeto o concepto. Pueden establecer relaciones entre objetos y componentes, sólo de forma experimental.
Nivel 4 (deducción formal)	Hacen una relación lógica entre propiedades matemáticas y son capaces de seguir un razonamiento deductivo, pero no entienden la función de los elementos de un sistema axiomático matemático.
Nivel 5 (Rigor)	Son capaces de escribir pruebas abstractas en diferentes sistemas axiomáticos, analizar y comparar dos sistemas axiomáticos.

Fuente: Elaboración propia a partir del trabajo de Jaime y Gutiérrez (1990).

Dentro del modelo de van Hiele se definen las Fases del aprendizaje, las cuales son aquellas pautas por seguir en la creación y planificación de actividades, que resultan ser fundamentales para que el estudiante pueda progresar a un nivel superior. Es importante destacar que las fases no están asociadas a un nivel determinado, sino que en cada nivel se pasa por las cinco fases, es decir, al finalizar la quinta fase, los estudiantes deberán haber alcanzado el nivel de razonamiento que sigue.

En esta línea, entre 1982 y 1993 se realizaron diversos estudios acerca del modelo de van Hiele, como, por ejemplo, el de Fuys, Geddes, y Tischler(1988), en donde se establecio que los niveles de razonamiento no poseen carácter discreto, sino continuo. Desde ahí, diversos autores se han centrado en la continuidad de los niveles y los grados de adquisición (e.g. Aravena y Caamaño, 2013; Jara y Gaita, 2017; entre otros.).

El instrumento

El enfoque de esta investigación es de carácter cualitativo, debido a que recogiendo lo propuesto por Jaime (1993), consideramos que una de las mejores maneras de medir el nivel de razonamiento geométrico es utilizar un cuestionario abierto.

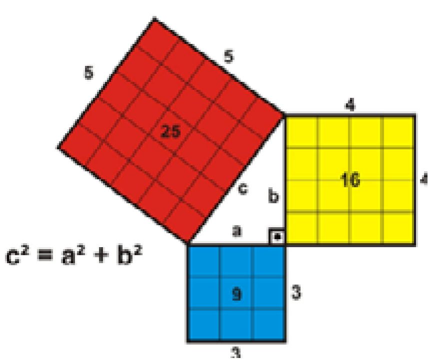
Los contenidos en los que se basa el cuestionario son extraídos a partir de los Programas de Estudio de Matemáticas que proponen los nuevos Planes y Programas del MINEDUC (2013) de Quinto al Octavo Año Básico. Posteriormente, se realiza una progresión de contenidos, con el objetivo de determinar el desarrollo de los contenidos claves de Geometría a través del ciclo de la Educación Básica. A partir de lo anterior, se extrajeron los contenidos que articulan este eje y seguidamente se determinaron cuáles son los conocimientos claves que están presentes para el Programa de Primer año de Educación

Media. Se compararon con los que se habían obtenido del análisis anterior. De acuerdo con esta revisión, se extrajeron los siguientes contenidos como conocimientos claves: (i) propiedades y clasificación de figuras en 2D y 3D, (ii) cálculo de áreas en 2D y 3D, (iii) ángulos, plano cartesiano y vectores, (iv) Teorema de Pitágoras, y (v) la composición de rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio.

Composición del instrumento

El cuestionario consta de 15 preguntas tipo abiertas, que deben ser contestadas de manera individual en un tiempo de 90 minutos.

Tabla 2: Extracto del instrumento

Pregunta	Contenido	Nivel	Respuestas esperadas por nivel
¿Qué diferencias hay entre un cuadrado, un trapecio y un rectángulo? Explique.	Composición de figuras 2D	1	Debe mencionar la cantidad de lados, de puntas o los tamaños (sólo elementos visuales).
		2	Debe hacer referencia a las propiedades de las figuras como a los lados paralelos o diagonales.
		3	Debe clasificarlas a base de sus propiedades, por ejemplo, que el cuadrado y el trapecio son paralelogramos.
A partir de la siguiente imagen demuestre que se cumple el teorema de Pitágoras para todo triángulo rectángulo. 	Teorema de Pitágoras	2	Utilizan los valores dados, pero no demuestran la propiedad para todos los triángulos rectángulos.
		3	Realizan la demostración geométrica usando áreas de los cuadrados formados, pero con un lenguaje informal.
		4	Realizan la demostración mediante el uso de áreas de los cuadrados formados y utilizan un lenguaje formal.
		5	Demuestran que poseen una visión global del teorema de Pitágoras, esta visión puede ser demostrada mediante la comparación de dos demostraciones.

Fuente: Elaboración propia.

Comentarios finales

Resulta fundamental para el docente disponer de un instrumento que le permita identificar el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentra cada uno de los estudiantes al inicio de la educación media, brindándole la posibilidad de identificar las formas de razonamiento geométrico y pautas a seguir para fomentar la consecución de niveles más altos de razonamiento (Vargas y Gamboa, 2013). En este sentido, el instrumento que presentamos al poseer preguntas abiertas puede acercarse mucho más al nivel alcanzado del estudiante debido a que no posee ambigüedades dentro de las preguntas

Referencias

Agencia de Calidad de la Educación. (2016). Informe técnico SIMCE 2014. Santiago de Chile: Agencia de Calidad de la Educación.

Aravena, M., & Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule. Talca, Chile. RELME, 16 (2), 139-178.

Cabello, A.B., Sánchez, A.B. y López, R.(2013). Significatividad de la implementación curricular del modelo de van Hiele. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 193-207). Bilbao: SEIEM.

Davis, P. J. (1993). Visual Theorems. Educational Studies in Mathematics 24 (4), 334.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents. Journal for Research in Mathematics Education, 3, 82. doi:10.2307/749957

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares, y M.V. Sánchez, Teoría y práctica en educación matemática (pp. 306-311). Sevilla:Alfar. Obtenido de https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento(tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.

Jara, L., & Gaita, R. (2017). Caracterizaciones de los paralelogramos para el primer grado de secundaria según el modelo de Van Hiele. Revista de Producción Discente en Educación Matemática 6 (1), 15-26.

MINEDUC. (2013). Bases curriculares 7° básico a 2° medio. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

MINEDUC. (2016). MATEMÁTICA Programa de estudio Octavo Básico. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Uniciencia, 27(1),77-94.

Utilización de las herramientas en el espacio de trabajo matemático y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Paula Verdugo Hernández y Gonzalo Espinoza Vásquez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

Este trabajo considera los modelos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) para estudiar la relación entre las herramientas teóricas y operacionales con el conocimiento de conexiones entre objetos matemáticos. Para ello, se proponen dos ejemplos en donde el uso de ciertos teoremas permite estudiar, desde ambos modelos, el rol y el conocimiento acerca de ellos tratando de este modo de profundizar el análisis de la actividad matemática. Concluimos que esta investigación podría generar una complementariedad entre los subdominios del MTSK y las componentes del ETM, afinando el estudio que se puede realizar en cada modelo.

Palabras Clave: ETM, MTSK, herramientas, conexiones, sucesiones de números reales.

ABSTRACT *This work considers the models of Mathematical Working Space (MWS) and Mathematical Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) to study the relationship between the theoretical and operational tools with the knowledge of connections between mathematical objects. For make so, two examples on the use of certain theorems are proposed which allows to study, from the viewpoints of both models, the role and the knowledge of them trying in this way of deepening the analysis of mathematical activity. We conclude that this research could generate a complementarity between the subdomains of MTSK and the components of MWS, tuning the study that can be made within each model.*

Keywords: MWS, MTSK, tools, connections, sequences of real numbers.

Introducción

La comprensión de un fenómeno depende del marco teórico que se elija para su estudio. En ese sentido, creemos que la complementación entre distintos enfoques podría proveer una visión más profunda del fenómeno, de acuerdo a los elementos teóricos que se consideren. La vinculación entre teorías permite dar una perspectiva más amplia de dicho fenómeno o robustecer el análisis que se realice del mismo. Por ejemplo, Bikner-Ahsbahs y Prediger(2010) muestran la estrategia de combinar elementos de diferentes teorías para realizar dicho vínculo, la que es considerada para conducir el presente escrito.

Los marcos teóricos que tomamos en cuenta corresponden al Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK) y al Espacio de Trabajo Matemático (ETM), los que teniendo objetivos diferentes, posibilitan la combinación de sus elementos para robustecer los análisis (Espinoza-Vásquez, 2016). Existen varios trabajos que buscan establecer relaciones y conexiones entre el MTSK y el ETM, por ejemplo, ver en (Gómez-Chacón, Kuzniak, Nikolantonakis, Philippe, & Vivier, 2016).En ellos se postula que el modelo del ETM posibilita profundizar en las relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y las acciones de enseñanza que éste sustenta en un esquema más amplio donde se incorpora el saber sabio y los espacios de trabajo personales de los estudiantes, así como las diferencias entre planos y génesis.

Ambos modelos permiten analizar el quehacer del profesor, siendo éste un elemento que permite la articulación entre ellos. Asimismo, la tarea matemática que el profesor presenta a sus estudiantes también posibilita el uso de los dos marcos, ETM y MTSK, para analizar el conocimiento que él pone en juego al plantear esta tarea. Así, el análisis desde la perspectiva de ambos modelos autoriza comprender mejor la actividad matemática que propicia el profesor y cómo se explica desde su conocimiento especializado. En este trabajo nos enfocamos en la noción de herramienta teórica definida por Kuzniak, Nechache y Drouhard (2016), y asimismo en la noción de herramienta operacional dada por Verdugo-Hernández (2017), las que se describirán más adelante.

A partir de lo anterior, nos preguntamos ¿Qué sub-dominios o elementos de MTSK parecen ser influyentes en la construcción de los ETM variados? (Gómez-Chacón et al., 2016). Más específicamente intentaremos adentrarnos en la siguiente pregunta ¿Cuál es la función de las herramientas teóricas y operacionales en el ETM y cómo pueden ser comprendidas desde el MTSK? Esto en relación a la función que cumplen las herramientas en el ETM y cómo estas se puede visualizar en el MTSK o viceversa.

Fundamentos teóricos

El MTSK es un modelo analítico que permite estudiar el conocimiento que muestra, posee y/o declara el profesor de matemática (Carrillo et al., 2013). Inspirado en el trabajo de Shulman (1986), el MTSK propone una conceptualización para el conocimiento del profesor considerando una división en dominios y subdominios con fines analíticos. Así, el MTSK considera dos grandes grupos de conocimiento distinguidos para referirse al conocimiento del profesor: el **Mathematical Knowledge (MK),** que es el conocimiento de la matemática como disciplina científica en un contexto escolar y contempla los subdominios Conocimiento de los Temas (KoT),Conocimiento de la estructura matemática (KSM) y Conocimiento de la práctica matemática (KPM), y el **Pedagogical Content Knowledge (PCK),** que abarca los objetos matemáticos como objetos de enseñanza-aprendizaje y contempla los subdominios de Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) y Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) (Carrillo et al., 2014). El modelo otorga un lugar fundamental a la matemática y no la disocia de su proceso de enseñanza-aprendizaje, siendo esto clave para comprender el carácter especializado con el que se considera el conocimiento del profesor de matemática. Asimismo, se incluye, al centro del modelo (ver esquema en Carrillo et al.(2013)), el dominio de las creencias que tiene el profesor acerca de la matemática y de la enseñanza y aprendizaje de la misma. Estas creencias son demarcadas con líneas segmentadas para indicar que ellas influyen en todos los subdominios del conocimiento, pudiendo también ser analizadas bajo ciertas categorías (e.g., Carrillo & Contreras, 1995).En este trabajo hemos limitado la aplicación del MTSK al dominio MK para realizar el análisis e interpretación de los resultados.

Se entiende que la división en dominios y subdominios para el conocimiento es artificial, respondiendo a fines analíticos, por esta razón se espera observar distintas relaciones entre los subdominios cuando se estudia el conocimiento especializado del profesor.

Espacio de Trabajo Matemático

El Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011) tiene por objetivo principal modelizar el trabajo matemático en un contexto educativo, con el fin de favorecer y mejorar las condiciones en las cuales se produce el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Para definir el ETM se introducen dos planos, el **plano epistemológico** y el **plano cognitivo**, los cuales estructuran el ETM apoyando la comprensión del modelo del trabajo matemático que se genera. Además, se identifican tres tipos de ETM: el ETM de referencia, del cual depende la organización esperada del espacio de trabajo, el que se define sólo sobre la base de criterios matemáticos; el ETM idóneo, que consiste en el acondicionamiento y organización del ETM de referencia, con el fin de convertirlo en un espacio de trabajo efectivo e idóneo en una institución educativa dada con una función definida; y el ETM personal, que reside en la manera en que el ETM idóneo es utilizado por los estudiantes y también por sus profesores; cada individuo se apropia y ocupa su propio ETM personal con sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas (Kuzniak, 2011). Por otro lado, según Kuzniak & Richard (2014) el Espacio de Trabajo Matemático cuenta con tres planos verticales, los cuales se activan por medio de una determinada tarea (Kuzniak & Richard, 2014).

Avances teóricos: hacia la complementariedad ETM-MTSK

En esta oportunidad, mostraremos sólo parte de nuestra investigación, centrada en el estudio de las relaciones entre el ETM y el MTSK, para lo cual nos basaremos en una metodología cualitativa (Denzin, 1970), en donde se realizará una revisión de dos marcos teóricos. Nuestro propósito es analizar y describir la utilización de las herramientas teóricas y operatorias al plantear una posible tarea, para lo cual pretendemos identificar la relación existente entre las herramientas del ETM y las conexiones propuestas por el MTSK, estableciendo las posibles articulaciones de ambos marcos mediante la combinación de sus componentes teóricos.

La herramienta teórica se define como aquella que sirve para el razonamiento matemático, basado en la lógica y en las propiedades de los objetos matemáticos (Kuzniak, Nechache y Drouhard, 2016). Por ejemplo, una herramienta teórica para las sucesiones es el criterio de convergencia para sucesiones monótonas y acotadas. Por otro lado, la noción de herramienta operacional corresponde a aquella propiedad necesaria con el fin de resolver una tarea, por ejemplo, las propiedades de las desigualdades, de la factorización, etc. (Verdugo-Hernández, 2017). Cabe destacar que las herramientas operacionales son también herramientas teóricas, pero en otro referencial. Por ejemplo, cuando se utiliza el teorema del binomio de Newton para demostrar la monotonía de una sucesión, dicha herramienta forma parte del referencial del Álgebra, y no es parte del referencial de las sucesiones, lo que le da el carácter de herramienta operacional. Asimismo, el teorema del binomio de Newton es una conexión de tipo auxiliar entre las sucesiones y el dominio del Álgebra al cual pertenece, mientras que como conocimiento este teorema es parte del KoT del profesor. De hecho, consideramos que las conexiones estudiadas bajo el modelo del MTSK en el subdominio KSM, pasan a ser herramientas en el modelo del ETM en la componente del referencial. Por ejemplo, la caracterización del límite mediante sucesiones (Spivak, 2003, p. 619)establece una conexión entre las funciones y las sucesiones, donde dicha conexión es interconceptual desde el modelo del MTSK, y al mismo tiempo es una herramienta teórica desde el ETM. De este modo, existe una amplia variedad de conexiones o herramientas que se podrían estudiar desde ambos puntos de vista. Estas conexiones o herramientas son susceptibles de ser utilizadas por un individuo, por ejemplo, en la resolución de una determinada tarea, lo cual establece la posibilidad de estudiar la actividad matemática que de allí se desprende, integrando ambas teorías.

Conclusiones y perspectivas

Aunque los resultados aquí presentados son parciales, debido a que este trabajo se encuentra en desarrollo, es posible apreciar que la combinación de los elementos de ambos modelos permite hacer un análisis más detallado en cuanto al rol de ciertos objetos o nociones matemáticas. Podemos agregar que pese a que existen diferencias en las orientaciones de cada modelo, por ejemplo el ETM se refiere a herramientas, mientras que el MTSK se refiere a conexiones entre objetos matemáticos y los procedimientos asociados, es posible dar una doble mirada sobre el uso de estas propiedades o teoremas identificando conexiones y herramientas de manera simultánea. De este modo, consideramos que existe una relación entre las herramientas del ETM y las conexiones en el MTSK.

La investigación en curso se puede proyectar considerando las conexiones que podría proponer y mostrar el profesor en el marco del MTSK al plantear tareas matemáticas durante la enseñanza de un objeto matemático, las cuales podrían influenciar en la actividad del estudiante. Este hecho podría acercar el estudio del trabajo del profesor al del estudiante en el MTSK, complementándose con el ETM personal del alumno.

Finalmente, respecto de la pregunta de investigación que nos hemos planteado, concluimos que uno de los subdominios del MTSK (KSM) tiene elementos que ayudan en el estudio del ETM debido a la naturaleza de las conexiones allí encontradas y a la relación que estas pudieran tener con las herramientas de la componente referencial del ETM.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge *for Mathematics Teaching. Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8), 2985–2994.*

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M. A. (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Denzin, N. (1970). Sociological Methods: a Source Book. Aldine Publishing Company. Chicago.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Nikolantonakis, K., Philippe, R., & Vivier, L. (2016). Espacio de Trabajo Matemático. Actas Quinto Simposio Internacional ETM (pp. 1–507). Florina, Grecia: University of Western Macedonia.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses Genèses. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 9–24. Retrieved from http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Annales_16.pdf

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. ZDM. http://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa, 1–8.

Spivak, M. (2003). Calculo Infinitesimal. (B. Frontera, Ed.) (Reverté S.). Barcelona, España

Verdugo-Hernández, P. (2017). Espacio de Trabajo Matemático del Análisis: Enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad. (Tesis Doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Facultad de Ciencias, Chile.

Significados intuitivo y clásico de la probabilidad: Un estudio de clase

Soledad Estrella, María Isabel Gazmuri, Milca Obregon, Constanza Quiroz, Pedro Vidal-Szabó, Carlos Zuleta.
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

Este trabajo presenta una experiencia de enseñanza de la Probabilidad llevada a cabo por un grupo de futuros profesores mediante un Estudio de Clase. El Plan de Clase construido por el grupo fue mejorado tras dos implementaciones en distintos establecimientos educacionales de la V Región. Los resultados muestran cómo los estudiantes de séptimo año básico se aproximan al concepto de probabilidad, utilizando el diagrama de árbol, por medio de una enseñanza que ha considerado los significados intuitivo y clásico, estableciendo una relación entre la puntualidad en la vida cotidiana y el cálculo de la probabilidad laplaciana.

Palabras Clave: Estudio de clase, Significados de la probabilidad, Diagrama de árbol.

ABSTRACT *This study presents a teaching experience about Probability carried out by a group of prospective teachers through a Lesson Study. The Lesson Plan created by the group was improved after two implementations in different schools of the Valparaiso Region. The results show how seventh grade students approach the concept of probability, using tree diagram, through a teaching that has considered the intuitive and classical meanings, establishing a relationship between the punctuality in everyday life and calculation of Laplacian probability.*

Keywords: *Class Study, Meanings of probability, Tree diagram.*

Introducción

La probabilidad es un concepto multifacético que conlleva ciertas dificultades en su enseñanza. En Chile, este contenido ha sido incorporado al currículo de matemática desde los primeros niveles escolares, proponiendo experiencias concretas con situaciones aleatorias por sobre cálculos y procedimientos carentes de razonamiento probabilístico y sin contexto. Dotar de sentido el aprendizaje de la probabilidad implica articular sus distintos significados, a saber, intuitivo, clásico, frecuentista, subjetivo y axiomático (Batanero, 2005), mediante situaciones didácticas que integren algunos de estos significados conjuntamente con la aleatoriedad, la variabilidad y las representaciones de las situaciones.

Para lograr una comprensión de la probabilidad en los estudiantes es necesario el trabajo colaborativo entre los responsables de su enseñanza. Por esta razón, se utilizó el Estudio de Clase (EC) como metodología que permite afrontar profesionalmente el aprendizaje de un contenido. Específicamente, el EC contempla la planificación de la lección, su implementación y la revisión conjunta por parte del equipo de docentes que la gestiona con el fin de mejorarla. Uno de los fines del EC es tratar algún problema didáctico través de una clase que mejora progresivamente (Isoda, Arcavi y Mena, 2007).

En el EC que se reporta, se ha considerado la articulación de los significados intuitivo y clásico en un plan de clases de probabilidad, pues incorpora la intuición como andamiaje que permite construir y dar sentido al significado clásico de ella. El significado intuitivo de la probabilidad se entiende como una medida subjetiva y estimada por experiencias personales, las ideas intuitivas sobre el azar se caracterizan por el uso de frases coloquiales para "cuantificar" sucesos inciertos y expresar cierta medida de la creencia en ellos. Mientras que el significado clásico de la probabilidad nos remite a la medida de un suceso aleatorio como la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, en que todos los casos sean igualmente probables.

Así, el EC realizado tuvo por objetivo coordinar en una lección los significados de la probabilidad, intuitivo y clásico, integrando el diagrama de árbol. A continuación, se presenta la experiencia de enseñanza de la probabilidad en 7° año de educación básica, la cual evidencia en parte, cómo razonan los estudiantes, enfrentados a una situación probabilística que puede ser respondida mediante el uso de representaciones

Metodología

Participantes. Estudiantes de séptimo año básico cuyas edades fluctúan entre 12 y 13 años de dos establecimientos mixtos de la V Región: un colegio particular de Viña del Mar, en que participaron los 27 estudiantes, y un colegio particular subvencionado ubicado en Quilpué, en que participaron 30 estudiantes. Al momento de las implementaciones, los alumnos no habían comenzado a tratar el modelo de Laplace, indicado en MINEDUC (2016).

Instrumento. Como parte de la asignatura de Didáctica de la Estadística, de la carrera de Pedagogía en Matemática de una universidad de la V región, un grupo de 4 futuros profesores diseñó un Plan de Clase (PC) desde la metodología de Estudio de Clase. El PC fue apoyado y corregido en todas las etapas por el académico responsable de la asignatura y/o el ayudante de la misma. Realizado el primer diseño del PC, que incluía la situación central de probabilidad y su puesta a prueba, se implementó en un colegio particular de Viña del Mar. Posteriormente, se discutió y mejoró dicha implementación de la primera clase, para rediseñar el PC y realizar su segunda implementación en un colegio particular subvencionado de Quilpué. Tras estas dos implementaciones, se hizo una nueva mejora del PC para refinar la lección de probabilidad.

Recogida de datos. Las clases fueron videograbadas y las producciones de los estudiantes se registraron mediante fotografías, todos los Planes de Clases fueron conservados y compartidos en formato digital.

Análisis. Para analizar ambas implementaciones, se utilizaron las evidencias empíricas del desempeño de los estudiantes, y se indagó en el rol que tuvo el diagrama de árbol y los significados de la probabilidad, intuitivo y clásico, durante la clase.

Situación de la clase

En la figura 1 se exhibe la versión mejorada de la situación didáctica del PC, la cual corresponde a la segunda implementación.

"Pablo entra a clases a las 8.00 a.m. En el trayecto desde su casa al colegio hay un total de 4 semáforos peatonales, cada vez que él se enfrenta a una luz roja debe esperar 1 minuto para continuar su camino. Pablo realiza el siguiente trayecto desde su casa al colegio:

1. *¿Cuál es la posibilidad de que Pablo llegue a tiempo a clases si sale a las 7:45 a.m. desde su casa? Represente la situación anterior en un diagrama de árbol.*

2. *¿Puedes predecir desde que hora debe salir Pablo para llegar siempre a*

Figura 1: Situación didáctica central del Plan de ClaseConclusiones y perspectivas

Resultados y discusiones

Presentamos dos producciones que ejecutaron unos estudiantes, para dar respuesta a la situación didáctica central, las cuales evidencian los significados intuitivos y clásicos de la probabilidad.

Significado intuitivo en los argumentos de dos estudiantes

En la primera implementación de la clase, una estudiante (P1) verbalizó su pensamiento durante la discusión inicial con su compañera. Este episodio ha sido seleccionado, pues el argumento da sustento al significado intuitivo de la probabilidad.

1. P1.a: "(...) Imaginémonos que Pablo tiene tan mala suerte que si le tocan los 4 semáforos en rojo le faltarían dos minutos, ya que la suma de todo el trayecto más la espera de los semáforos da 17 minutos. Entonces, debería salir de su casa a las 7:43 a.m."

2. P1.b: "En cambio, existe la posibilidad que deba salir de su casa a las 7:45 si le tocaran dos o menos semáforos en rojo. La suma del trayecto más la espera de los semáforos, da 15 minutos (...)"

Desde el argumento de la estudiante P1.a, se infiere que existe un caso más desfavorable para Pablo, en el sentido de llegar tarde, es decir, que todos los semáforos estén en rojo. Este razonamiento intuitivo da cuenta de la consideración del tiempo máximo de salida para que Pablo llegue a tiempo. Mientras que en P1.b, indica que si sale a las 7:45 a.m., Pablo debe enfrentarse a lo más con dos semáforos en rojo, con el fin de no llegar tarde al colegio. Esta idea descansa en el hecho de identificar los casos favorables en el contexto cotidiano. Ambos presentan un razonamiento aditivo en sus argumentos.

Significado clásico de la probabilidad en una representación

Ahora bien, con respecto al significado clásico, presentamos una representación elaborada por dos alumnos en la segunda implementación de la clase. Esta ha sido seleccionada, ya que hemos considerado que ilustra la puesta en marcha del significado laplaciano de la probabilidad en el desempeño de los estudiantes

Si deseas incluir transcripciones, puedes utilizar uno de los dos estilos siguientes:

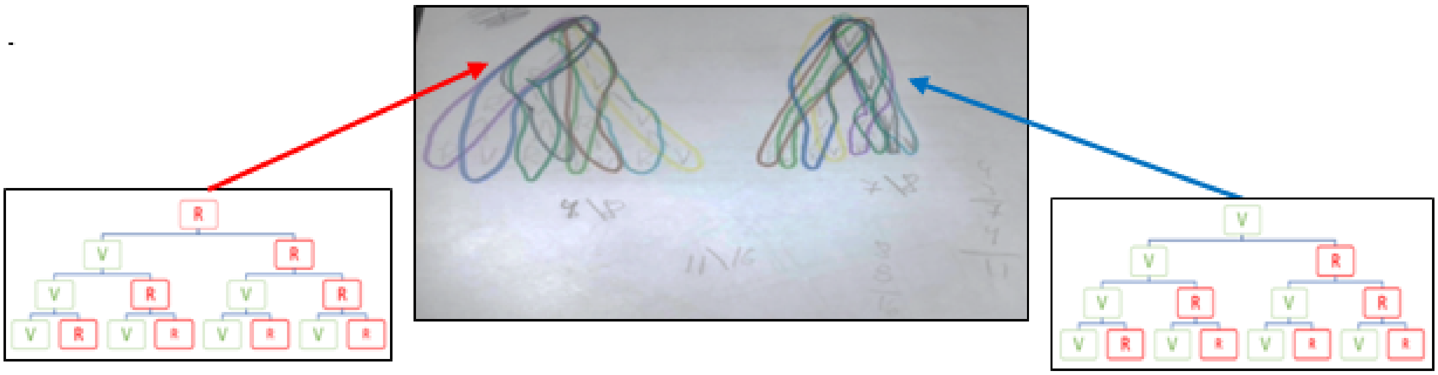


Figura 2: Representación de los datos mediante diagrama de árbol"

La elaboración del diagrama de árbol consistió en dos partes (ver figura 2): el diagrama de árbol de la izquierda (reconstruido) corresponde al subtotal de casos favorables y posibles obtenidos sabiendo que el primer semáforo estaba en rojo, cuya razón es 4/8. Análogamente, con el diagrama de árbol de la derecha se obtuvo una razón de 7/8, considerando que el primer semáforo tenía luz verde. Por tanto, en la esquina inferior izquierda de representación construida de la figura 2, podemos observar que el estudiante realiza un conteo total de los casos favorables y posibles, determinando una probabilidad de 11/16.

Conclusiones

Promover aprendizajes probabilísticos, implica diseñar situaciones que permitan poner en juego distintos significados de la probabilidad. Pues esta, requiere de una enseñanza con más desafíos a grupos de estudiantes y también a profesores, y futuros profesores, con el propósito de que se aproximen a una alfabetización probabilística (Estrella et al., 2018).A la vez, esta enseñanza debiese confrontar que el conocimiento matemático de carácter probabilístico se sustenta en la noción de incertidumbre la cual es antagónica a la noción de certeza propia de la enseñanza tradicional de la matemática escolar.

El PC diseñado integró significados de la probabilidad en la enseñanza para la construcción del aprendizaje probabilístico en los estudiantes, movilizando tanto los conceptos de aleatoriedad, variabilidad y representaciones en función de una situación didáctica dando sentido al cálculo laplaciano de la probabilidad, pues ésta actuó como modelo probabilístico en el EC presentado.

Mediante esta experiencia de diseño, implementación y mejora del PC, hemos podido evidenciar que los estudiantes para dar respuesta a la situación didáctica, debieron transitar por ambos significados, permitiendo comprender por qué se realiza ese cálculo para medir la incerteza de una situación. Por tanto, consideramos que la articulación de los significados intuitivo y clásico, ha permitido comprender el modelo de Laplace.

Finalmente, reconocemos que el uso de representaciones creadas por los estudiantes, muy similares al diagrama de árbol, ha sido un apoyo para su razonamiento y la comunicación de sus argumentos numéricos; y el contexto cotidiano de la puntualidad ha despertado cercanía y otorgado sentido al aprendizaje de contenidos probabilísticos.

Referencias

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 8(3), 247-264

Estrella, S., Olfos, R., Alvarado, H., y Retamal, L. (2018). Desarrollo de la alfabetización probabilística: textos argumentativos de estudiantes. magis, Revista Internacional deInvestigación en Educación. (en edición).

Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A. (2007). El estudio de clases japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global. Ediciones Universitarias de Valparaíso: Chile.

MINEDUC (2016). Matemática, Programa de Estudio, Séptimo Básico. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

De la argumentación intuitiva a la argumentación matemática: Un estudio desde la tipología de pruebas y niveles de razonamiento geométrico

Gallegos, Ginette. Barra, Marcos. Vidal, Roberto
Colegio Madre Ana Eugenia, Universidad Alberto Hurtado

Resumen

Este trabajo se configura como investigación exploratoria y busca convertirse en una herramienta para docentes e investigadores en torno al trabajo de la argumentación en las clases de matemática. Atiende a la necesidad de establecer el estado inicial de la argumentación de los estudiantes para proyectarse en futuros trabajos, diseños que permitan promover el desarrollo argumentativo. Para ello, se estudia la Argumentación Intuitiva (AI), la Argumentación Matemática (AM) y el Tránsito entre ambas, a base de los Niveles de Razonamiento de Van Hiele y la tipología de prueba de Nicolás Balacheff, al usar el tópico geométrico: "teorema de Euclides", contextualizado en II Medio.

ABSTRACT *This paper is based on an exploratory research and seeks to become a pedagogical tool for teachers and researches who work with argumentation on mathematical lessons. This investigation addresses the need to establish an initial status of student's argumentation to map future works out and designs which allow promoting the argumentation development. To this effect, Intuitive Argumentation, Mathematic Argumentation and the transit between them are studied, based on Van Hiele Levels of Reasoning and Nicolas Balacheff Typology of proof using the geometric topic: "Euclid's theorem" contextualized for 10th grade students.*

Palabras Clave: Argumentación Intuitiva, Argumentación Matemática, Niveles de Razonamiento, Tipología de Prueba.

Esta investigación nace a partir de antecedentes sobre Argumentación provenientes de la Didáctica de la Matemática, el currículo escolar chileno y evaluaciones internacionales, presentándose la problemática de docentes en aula sobre cómo desarrollar la habilidad argumentativa en estudiantes y avanzar hacia la comprensión y elaboración de la argumentación matemática. En esta recogida de antecedentes surgen dos temas claves: la mención y reconocimiento de la existencia la de Argumentación Intuitiva por parte del Ministerio de Educación chileno, y la necesidad de establecer el estado argumentativo inicial de los estudiantes antes de proponer el desarrollo de la argumentación en ellos. Con ello, surge la pregunta que le da vida a esta investigación: "*¿Qué características tienen las justificaciones de las y los estudiantes cuando presentan argumentaciones intuitivas,* *matemáticas o en tránsito entre ambas, en el tópico geométrico del Teorema de Euclides?"*

El fundamento teórico que sustenta esta investigación proviene de cuatro fuentes: la primera de ellas apunta a determinar lo que se entenderá por intuición, recogiendo el examen crítico realizado por Bunge (1986) y refinado en 1996, quien presenta una tipología de intuición dependiendo de cómo la considera el mundo científico. Para establecer la conexión entre argumentación e intuición, se utiliza el trabajo realizado por Cecilia Crespo (2008-2010). Y finalmente, para determinar características propias de la Argumentación Intuitiva y la Argumentación Matemática, se utiliza la tipología de pruebas de Nicolás Balacheff (2000) y los Niveles de Razonamiento del Modelo de Van Hiele.

Metodología de investigación y de análisis de datos

La metodología utilizada responde a una investigación cualitativa, orientada a la fase descriptiva exploratoria, ya que presenta dos objetivos centrales: clasificar a partir de la recogida de datos, y ser la puerta de entrada a nuevas investigaciones que busquen el desarrollo de las habilidades argumentativas en las y los estudiantes, a partir de las clasificaciones obtenidas respecto a la Argumentación Intuitiva, la Argumentación Matemática y argumentación en tránsito entre AI y AM.

La investigación se lleva a cabo en tres momentos: el primero tiene por objetivo levantar información sobre el discurso que hay en la comunidad en torno a la argumentación, contempla la aplicación de un cuestionario a las estudiantes de la muestra y a los profesores de matemática de la comunidad. Los otros dos momentos tienen por objetivo clasificar el estado argumentativo de las estudiantes de la muestra, considerando un diseño inicial frente a una situación referida al Teorema de Euclides, y un diseño posterior, apoyado con preguntas generadoras.

Para enfrentar la metodología de análisis de datos se establece lo que se entenderá en el estudio por Argumentación Intuitiva, con el apoyo teórico de Mario Bunge (1996) y Cecilia Crespo (2008-2010), reconociendo, además, la Argumentación Matemática como la demostración misma. Para analizar las respuestas de las estudiantes, en cada uno de los diseños, se determina qué Niveles de Razonamientos (de Van Hiele) y qué tipos de prueba (de Nicolás Balacheff) se pueden categorizar como AI, cuáles serían AM, y finalmente, aquellos que no sean AI o AM, entonces, se categorizan como Argumentación en tránsito entre AI y AM, como se aprecia en la siguiente tabla.

Tabla 1

	Tipología de Prueba	Modelo de Van Hiele
AI	Empirismo ingenuo.	*Nivel 0*: Visualización o Reconocimiento
AI	Experiencia crucial.	*Nivel 1*: Análisis

Tránsito	Ejemplo genérico.	*Nivel 2*: Deducción informal (Ordenación o Clasificación)
Tránsito	Experimento mental.	
Tránsito	Calculo sobre el enunciado.	
AM	Demostraciones.	*Nivel 3: Deducción formal* *Nivel 4*: Rigor

Tabla 1: Muestra la clasificación de Tipología de Prueba de Nicolás Balacheff y Niveles de Razonamiento del Modelo de Van Hiele entre Argumentación Intuitiva (AI), Argumentación Matemática (AM) y el Tránsito entre ambas argumentaciones (Tránsito).

Resultados

Los resultados obtenidos en la primera etapa de la investigación dan cuenta de estudiantes y profesores que diferencian entre argumentos con característica de AI y AM, sin embargo, asocian principalmente la argumentación con la necesidad de explicar un procedimiento; solo en profesores de enseñanza media se evidencia la justificación con fundamentos matemáticos. La comunidad reconoce como más confiable la argumentación que usa fundamentos matemáticos, pero a la hora de justificar, lo hace por medio de la explicación de procedimientos.

Con respecto a los resultados obtenidos en los diseños, de las 10 parejas que trabajaron en los dos diseños propuestos, 6 presentaron un avance en su estado argumentativo entre el diseño inicial y el segundo diseño, logrando acercarse a la AM, sin que ninguna de sus producciones se pueda catalogar como Argumentación Matemática.

Conclusiones

Con respecto al discurso en torno a la argumentación, se concluye que si bien la comunidad escolar reconoce la importancia del uso de fundamentos matemáticos para argumentar, no los utiliza en la práctica, detectándose esta falta principalmente en los profesores de primer ciclo de enseñanza básica.

Con respecto a la metodología de análisis de datos, se concluye que los niveles de razonamiento del Modelo de Van Hiele y la tipología de prueba de Nicolás Balacheff son un aporte para determinar el estado argumentativo entre AI, AM y el tránsito entre ellas, ya que ofrecen directrices y características claras que permiten identificar la Argumentación Intuitiva y la Argumentación Matemática.

Con respecto a los diseños realizados, se determina que las preguntas generadoras son un aporte para propiciar el avance hacia la Argumentación Matemática, pero se sugiere, en un fututo trabajo de investigación, usar las fases del Modelo de Van Hiele para lograr el avance.

Por otro lado, se ha determinado que la intuición es una buena base para generar instancias argumentativas, pero es necesario propiciar el uso del razonamiento para que AI le den paso a argumentaciones que se acerquen a la AM, procurando ser consciente de que la ausencia de razonamiento puede conducir a errores.

En respuesta a la pregunta de investigación: "*¿Qué características tienen las justificaciones de las y los estudiantes cuando presentan argumentaciones intuitivas, matemáticas o en tránsito entre ambas, en el tópico geométrico del Teorema de Euclides?*", se determinan las siguientes características en cada caso:

A partir de lo observado en la evidencia empírica y en la teoría, pudieron ser catalogadas como **argumentaciones intuitivas** aquellas justificaciones donde hubo presencia del uso de elementos intuitivos para formular la prueba, como la representación de una situación particular, o la necesidad de contextualizar la situación. Además, se evidencia el uso de la imaginación al representar una situación, aunque exista conciencia de la necesidad de generalizar.

El razonamiento en la argumentación intuitiva tiene relación con elementos de la percepción, ya que esta última es un elemento distintivo de la intuición, con la presencia explícita de la experiencia y la observación y la ausencia de conexiones entre los elementos; donde el estudiante reconoce, además, los objetos en su totalidad, o bien las partes y las propiedades del objeto por medio de la experimentación y la observación, pero, sin establecer relaciones.

A partir de lo observado en la evidencia empírica y en la teoría, pudieron ser catalogadas como **argumentaciones en tránsito** aquellas justificaciones que presentaron la razón como forma de justificación, donde se aprecia una estructura y cierta conexión entre la hipótesis, los argumentos y las conclusiones, aunque con alguna(s) desconexión (es).

El razonamiento matemático en la argumentación en tránsito se ve iniciado, lo que permite evidenciar descripciones formales de los objetos y argumentos válidos aunque los estudiantes no comprenden la estructura necesaria para la demostración.

A partir de lo observado solo en la teoría, ya que no hay producciones clasificadas como AM, se categorizaron como argumentaciones matemáticas las justificaciones que en sí mismas presenten una estructura y conexión entre sus argumentos, usando teoremas y definiciones de una manera formal y lógica, dentro de uno o varios sistemas axiomáticos. Se reconoce la estructura propia de la demostración en este razonamiento, donde el estudiante, además, demuestra comprenderla. En este nivel de razonamiento, no es posible encontrar modelos concretos, estando ausentes todo tipo de elementos intuitivos.

Referencias

Araujo, J., Giménez, J., & Rosich, N. (2006). Afectos y demostraciones Geométricas en la formación inicial docente. Enseñanza de las ciencias, 24(3), 371-386.

Balacheff. N. (2000).Procesos de prueba en alumnos de matemáticas. Colombia: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

Bunge, M. (1996). Intuición y razón. Madrid: Editorial Tecnos.

Cantoral, R.; Reyes-Gasperini, D.; Montiel, G., (2014) Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(3), 91-116

Crespo, C. (2008). Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21, 717-727

Crespo, C., Farfán, R. M., Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(3), 283-306

Corberán, R., Huerta, P., Garrigues, J., Peñas, A. y Ruiz, E. Didáctica de la geometría Modelo de Van Hiele. España: Edición Castella.

De Gamboa, G.; Planas, N.; Edo, M. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas e *interpretaciones. SUMA-Revista sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, 64, 35-44*

De Villiers, M (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 26, 15-30

Duval, R. (1999). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fouz, F. & De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. Un paseo por la geometría., 2004/2005, 67-82

Goizueta, M. y Planas, N. (2013). El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. PNA, 7(4), 155-170.

Ibañes, M. y Ortega, T.; (2005).Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 61, 19-40

Meece, J. (2000) Desarrollo del niño y del adolescente. Compendio para educadores, SEP, México, D.F.

Moreira, L.; Chico, J.; Bobadilla, E.; Planas, N. (2012). Problemas ricos en argumentación para secundaria: reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor. SUMA-Revista sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, 70, 9-20

Pedemonte B., (2007) How can the relationship between argumentation and proof be analysed?,Educational Studies in Mathematics, 66, 23–41.

Situación de modelación matemática para la division de fracciones

Macarena Valenzuela Molina, Elisabeth Ramos Rodríguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

Indagamos en las situaciones que involucran modelos matemáticos propuestos para la división $1\,\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, por un grupo de futuros profesores de educación básica. Estudiamos dichos modelos, a través de los contextos y los significados de la fracción que involucran. Desde el paradigma cualitativo evidenciamos que todos los casos estudiados presentan una situación que no modela la división propuesta por el investigador, aportando solo contextos personales y que involucran únicamente el significado de parte-todo de la fracción. Esto nos lleva a cuestionarnos cómo afrontar la formación de futuros profesores para que puedan contar con mayores herramientas para la modelación matemática, los contextos y los significados de la fracción.

Palabras Clave: Modelación matemática, división de fracciones, profesores en formación

ABSTRACT *We investigate situations that involve mathematical models proposed for division 1 3/4: 1/2, by a group of future teachers of basic education. We study these models, through the contexts and the meanings of the fraction that they involve. From the qualitative paradigm we show that all cases studied present a situation that does not model the division proposed by the researcher, contributing only personal contexts and that only involve the meaning of part of the fraction. This leads us to question how to deal with the training of future teachers so that they can count on greater tools for mathematical modeling, the contexts and the meanings of the fraction.*

Introducción

El diseño de situaciones que involucran modelos matemáticos se puede entender como una de las competencias que deben desarrollar los futuros profesores para promover la construcción de conocimiento matemático de sus estudiantes. Existen estudios que permiten conocer de qué manera los profesores o futuros profesores de matemática modelan distintas situaciones (Ma, 2010) y de tal forma observar cómo se manifiesta el conocimiento de las matemáticas que tienen al respecto.

En Chile, la información que se posee de los estudiantes de la carrera de profesorado en educación básica, sobre la prueba estandarizada INICIA[3] en el área de las matemáticas.

(MINEDUC, 2015) evidencia escasos niveles de desarrollo de la actividad matemática (Espinoza, Barbé y Gálvez, 2011), detectando que utilizan directamente el algoritmo convencional, sin hacer mención a otros procedimientos no convencionales. Según documentos presentados, los resultados de la prueba INICIA se reduce a demostrar la forma en que estos futuros profesores se enfrentan a resolver distintas situaciones de aprendizaje, donde no se proporciona información que atañe al diseño de experiencias de aula o sobre la modelación matemática que pudieran evidenciar los futuros docentes.

A nivel internacional se cuenta con el estudio comparativo Teacher Education and Development Study: Learning to Teach Mathematics (TEDS-M), implementado en Chile con futuros profesores de enseñanza básica en el año 2008, el cual arroja una baja influencia de las instituciones chilenas sobre los conocimientos disciplinares y pedagógicos de los estudiantes de educación básica (Tatto, 2013).

Desde esta problemática presente en la formación de profesores de educación básica, específicamente en el área de la matemática y el conocimiento pedagógico de las matemáticas que tienen al respecto, es que nuestro estudio exploratorio tiene como objetivo: indagar en el tipo de situaciones que involucran modelos matemáticos propuestos para la división $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, por un grupo de futuros profesores de educación básica con especialización en matemática.

Desarrollo

A continuación mostraremos los elementos teóricos y metodológicos.

Marco de referencia

Hemos considerado tres referentes teóricos. El primero basado en lo que entendemos como modelación matemática a partir de las ideas de Blomhoj (2004), quien menciona que la modelación matemática se entiende como una práctica de enseñanza en la que se conectan las situaciones reales con la matemática en contextos de enseñanza y aprendizaje.

El segundo referente teórico tiene que ver con el contexto (OECD, 2005) con que se presentan las situaciones modeladas. Para observar las situaciones de modelación matemática puesta de manifiesto por los futuros profesores, consideramos la propuesta de la OECD (2005), en la cual se han establecido cuatro criterios de clasificación de las tareas matemáticas: situaciones personales, educativas o laborales, públicas y científicas. Éstas se refieren a posibles esferas de aplicación de cualquier concepto matemático en la vida para trabajar las matemáticas en todos los niveles de aprendizaje.

Por último, el tercer elemento teórico se enmarca en los significados de las fracciones (von Hofe, 2015) involucradas en cada una de las situaciones, los cuales atienden a entender la fracción como parte-todo, operador, cociente

[3] La prueba INICIA es un estudio de medición y evaluación de los futuros profesores en Chile, a la cual se enfrentan al finalizar el 8° semestre de formación, esta evaluación implica Conocimiento disciplinar y pedagógico en distintas áreas de conocimiento (MINEDUC, 2015).

y razón. Von Hofe (2015) resumen estos significados en la figura 1.

Figura 1: Metáfora sobre los significados de la fracción (von Hofe, 2015)

Elementos metodológicos

Con un análisis cualitativo descriptivo, las producciones fueron estudiadas a partir de del análisis de contenido (Flick, 2004), donde las categorías surgen de los conceptos de significados de la fracción y tipos de tareas planteadas por la OCDE como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1: Categorías empleadas para el análisis

Categorías	Sub—categoría
Tipos de tareas matemáticas (OCDE, 2003)	Personales Educativas o laborales Públicas Científicas
Significado (von Hofe, 2015)	Parte del todo Operador Razón, relación entre cantidades Parte de varios todos, división

El contexto del estudio se enmarca en un curso de didáctica de las matemáticas en una universidad chilena, en el séptimo semestre de formación inicial de profesores de educación básica que inician su especialidad en matemática.

Se han seleccionado cuatro casos de producciones de estudiantes (tabla 2), a quienes se les entregó un cuestionario con la siguiente tarea: *"Enuncie un buen problema de modelación matemática para* $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$,

Tabla 2: Producciones analizadas

Producción	Situación propuesta
A	María y su hermana deciden comprar dos pizzas y cortarlas en cuatro pedazos cada una. Al momento de repartir, a María se le cae un pedazo al suelo. Si ambas decidieron comer la misma cantidad ¿Cuántos pedazos de pizza comió cada una?

B	Si de dos barras de chocolate solo me queda un $1\frac{3}{4}$ y tengo que darle $\frac{1}{2}$ a mi hermana, ¿Con cuánto me quedo yo?
C	Teresa tiene tres cuartos de una pizza y quiere comerse la mitad ahora y la otra mitad en la tarde. ¿Cómo tendrá que repartir su pizza?
D	Paola hizo una "Pizza Party" de la cual le quedó cortada una pizza (cortada en cuatro trozos) y $\frac{3}{4}$ de otra. Su padre le sugiere que corte cada trozo a la mitad, ¿Qué operación realiza Paola?, ¿Qué operación hizo al final?

Al analizar cada situación propuesta por los futuros profesores, podemos evidenciar que los cuatro casos presentan un enunciado verbal cuyo modelo matemático no corresponde a la división propuesta para la tarea. Tres de ellos no modelan una división de la fracción impropia en medios, sino una división de la fracción impropia en dos natural, al parecer, estos estudiantes interpretan repartir en medios como repartir en dos partes iguales, lo que no corresponde matemáticamente (producción A, B y C). Uno de los tres estudiantes modela una multiplicación de la fracción impropia por un medio, lo que tampoco representa el modelo matemático que se pretende.

En síntesis, de las cuatro producciones estudiadas, ninguna modela matemáticamente la operación $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, es decir, no logran relacionar la realidad personal con la matemática; en este caso, la representación simbólica de una división de fracciones con el contexto personal en el cual se evidencia el uso de la comida para representar las situaciones de aprendizaje, porque el modelo que proponen tres futuros profesores corresponde a una división de una fracción mixta en dos partes y no en medios, el otro profesor modela una multiplicación de la fracción impropia por un medio.

Los cuatro casos presentados diseñan una situación de modelación en un contexto personal relacionado con la comida, lo que llama la atención es que tres de los cuatro casos utilizan la pizza como principal representación del entero, la hipótesis es que lo han visto en su formación a través de la pizza, es uno de los ejemplos más comunes utilizados en la enseñanza obligatoria.

Además, los cuatro futuros profesores presentan un significado de la fracción como parte del todo, ya que consideran la pizza/chocolate como un todo que se divide en partes iguales.

Avances

A la luz del análisis podemos observar que los cuatro casos estudiados presentan una situación que no modela la división $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, aportando solo contextos personales y que involucran solo el significado de parte-todo de la fracción. Esto nos lleva a cuestionarnos cómo afrontar la formación de futuros profesores de manera de que estos puedan contar con mayores herramientas sobre la modelación matemática, los contextos y los significados de la fracción.

Conclusiones

A la luz de este trabajo sostenemos que es necesario que la formación docente proporcione espacios de trabajo, en los cuales exista un desarrollo de conocimiento disciplinar y didáctico en profundidad, que les permita a los futuros profesores definir adecuadamente situaciones que modelen un objeto matemático determinado. Además, les ayude a crear situaciones didácticas para sus alumnos, que evoquen distintos significados de la fracción y a relacionar con los diversos contextos existentes.

Referencias

Blomhøj, M. (2008). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling Categorising the TSG21 papers. Proceedings of ICME 11, pp. 1-13.

Espinoza, L., Barbé, J. y Gálvez, G. (2011). Limitaciones en el desarrollo de la actividad matemática en la escuela básica: el caso de la aritmética escolar. Estudios Pedagógicos, XXXVII(1), 105-125.

Flick, U. (2004). Introducción a la investigación cualitativa. Madrid: Morata.

Ma, L. (2010). Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales: la comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU. Santiago: Academia Chilena de Ciencias.

MINEDUC (2015). Evaluación Inicia presentación de resultados 2014. Santiago: Ministerio de Educación de Chile, Santiago.

OECD (2005). Teachers Matter: attracting, developing and retaining effective teachers. Paris: OECD.

Tatto, M.T. (Ed.) (2013). The Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries. Technical report. Amsterdam: IEA.

Von Hofe, R. (2015). Nociones básicas. Presentación en Seminario de Educación en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Descargado de http://www.pedagogiapucv.clwp-content/uploads/2015/11/Nociones-Basicas-2015-Rudolf-vom-Hofe.pdf.

Variables didáctico-matemáticas para el abordaje de la noción piagetana de clasificación en educación parvularia

José Meza
Universidad Diego Portales

Resumen

El desarrollo de la noción de número, es un tema crucial en el aprendizaje de la matemática en los niveles iniciales. Uno de los enfoques que funda este aprendizaje, y el que es estudiado en este trabajo, se basa en el desarrollo de las nociones pre numéricas piagetianas, entre las cuales se encuentra la noción de clasificación. En este sentido se pretende, a modo exploratorio, reconocer algunas variables didáctico-matemáticas que permitirían hacer un estudio riguroso de esta noción, profundizando en los aspectos cualitativos involucrados, como un estudio previo a los aspectos cuantitativos vinculados a la noción de clasificación.

Palabras Clave: Nociones pre numéricas, clasificación, noción de número

Introducción

En la actualidad la Educación Parvularia es para Chile una preocupación que ha determinado avances en términos de políticas públicas y prácticas escolares, moviendo también a los investigadores a estudiar lo que en este nivel educativo sucede. Algunas de estas investigaciones muestran como las características de las mediaciones y/o el apoyo pedagógico o las prácticas instruccionales que ofrecen algunas educadoras de párvulos (en adelante EP) a sus estudiantes, requerirían de apoyos o mejoras para lograr un mayor impacto (Treviño, Toledo & Gempp, 2013). Particularmente, en la enseñanza de la matemática, algunas investigaciones también han dado cuenta como algunas educadoras declaran que el aprendizaje de la matemática y el desarrollo del pensamiento lógico es muy importante en el proceso formativo de los estudiantes, no obstante también reconocen y muestran no tener un sólido conocimiento que les permita abordar correcta y apropiadamente estos aprendizajes (Ormeño, Rodríguez & Bustos, 2013).

Desarrollo y marco teórico

Uno de los aprendizajes que deben intencionar las EP según las Bases Curriculares de Educación Parvularia (2005), son las nociones de seriación y clasificación. En el Aprendizaje Esperado se declara que los estudiantes deben lograr *"establecer relaciones cada vez más complejas de semejanza y diferencia mediante la clasificación y seriación [...] ampliando así la comprensión de su entorno"* (p.85). La seriación y la clasificación, *son* dos de las cuatro nociones pre numéricas que Piaget (1969) declara en su teoría para adquirir o desarrollar la noción de número natural.

La propuesta de Piaget, se basa en que el hombre de manera natural y por necesidad innata y empírica, ha tenido la necesidad de organizar y ordenar su entorno. Por ejemplo, el autor muestra que al analizar el comportamiento de los niños al enfrentarlos a ciertos problemas, éstos dan cuenta de diferentes formas de organizar el medio (Castorina & Palau, 1981). Para algunos autores (Piaget 1969; Piaget 1978; Lawrence, Theakston & Isaacs, 1968), el aprendizaje del número natural se logra gracias al desarrollo de las nociones lógico-matemáticas de seriación, clasificación, conservación de cantidad y de correspondencia uno a uno. El desarrollo de estas nociones no es – necesariamente todas– anterior al desarrollo de la noción de número, sino que la relación entre cada una de ellas y el número, se producen en momentos y de maneras diferentes (Chamorro, 2005). Cabe mencionar, que la propuesta de Piaget rechaza el aprendizaje memorístico de la secuencia oral o cantinela numérica, ya que oculta la real comprensión del concepto asociado al número natural.

Cada una de las nociones contribuirían, no de manera exclusiva, pero sí con mayor énfasis, en un aspecto distinto a las propiedades o características que tiene el número natural. Por una parte, el abordaje de la seriación, por ejemplo, contribuye en el aprendizaje de la función ordinal del número y, la clasificación, por otra parte, permitiría que los párvulos estudiaran el número natural como cardinal de un conjunto, y en la composición y descomposición aditiva de números. La correcta y apropiada coordinación de éstas y las otras nociones, desarrolla el aprendizaje del número. Una mala comprensión de las noción de clasificación, llevaría a que las educadoras de párvulos solo trabajen en la agrupación de elementos, basándose en las semejanzas y en las diferencias a partir de determinados atributos y despreciando por completo, el estudio cuantitativo y/o aritmético que está albergado en dicha agrupación (Lawrence, Theakston & Isaacs, 1968; Castorina & Palau, 1981).

En cambio, el buen tratamiento del estudio de la clasificación permitiría que los niños aprendan la relación jerárquica en la relación de pertenencia, la relación de inclusión, la invarianza del todo y la relación parte-todo, las que son aspectos relevantes en el aprendizaje de la matemática, porque se vinculan con el desarrollo del pensamiento lógico y/o con el aprendizaje del concepto de número (Piaget 1969; Piaget 1978; Lawrence, Theakston & Isaacs, 1968).

En trabajos anteriores, se ha evidenciado cómo algunos manuales escolares invitan a las EP a trabajar experiencias de aprendizaje poco desafiantes, relacionadas con la noción de clasificación y, además, centradas en el estudio cualitativo de los conjuntos y no en el aspecto aritmético como fue antes señalado. Tratan a la clasificación como si fuese un objetivo matemático que debe ser definido y explícitamente enseñado. Además, estos dispositivos le sugieren a la EP preguntas que no invitan a los párvulos a presentar algunos de los aspectos de clasificación que fueron mencionados en párrafos anteriores.

Metodología

El estudio consistió en un análisis didáctico, en particular un análisis la meso génesis (Sensevy, 2007), de un corpus de 12 experiencias de aprendizaje pertenecientes a 6 manuales para docentes para los Niveles de Transición (4 a 6 años). Para ello, se realizó una decodificación abierta y luego axial, las que permitieron elaborar 4 categorías y 10 subcategorías. Entre ellas, se encuentra aquella que tiene relación con la definición teórica que sugiere respecto a la clasificación y las orientaciones instruccionales para la gestión en aula.

Avances y reflexiones

Para comenzar, los manuales escolares proponen utilizar la palabra ordenar como sinónimo de clasificación, despreciando la seriación y la generación de patrones como otros criterios de orden. Además, estos textos invitan a las EP a que los párvulos expliciten el procedimiento de clasificación, comenzando por la observación, la descripción y la definición de atributos, la comparación y finalmente, la clasificación. Si en estas etapas se desprecia la observación y se le incluye la *selección*, existiría una completa secuencia de procedimientos para desarrollar la clasificación. A continuación, se muestran las características de las diferentes tareas antes mencionadas. La caracterización es dada en función de lo que debe hacer el párvulo:

- Descripción: Se espera que digan cualidades del objeto, como: color, forma, tamaño. Por ejemplo, un niño diría: *"La pelota es roja"*. No se espera que utilicen argumentos cuantitativos (cuantificadores) o número. De ser así, la descripción ya no se hace necesaria pues el estudiante ya utiliza el número. En esta tarea, los párvulos pueden comenzar a conocer las categorías o los atributos. La tarea podría ser: *"¿Cómo es la pelota?".*

- Comparación: Se espera que establezcan relaciones entre las cualidades. Estas relaciones son basadas en descripciones antes dadas, por ejemplo, un niño diría: *"Esta pelota es roja y esta es azul"* o *"Esta pelota es roja, pero esta otra es azul".* En esta tarea pueden utilizar cuantificadores (mucho, poco, más, menos, etc.) Siguiendo esta secuencia, no se espera que los párvulos utilicen el número para comparar, de ser así, los niños ya dan cuenta de que han logrado comprender los números hasta esa cantidad. La tarea podría ser: "*¿Qué semejanzas y diferencias hay entre estas pelotas?".*

- Selección: Se espera que escojan entre todos los elementos del conjunto, aquellos que cumplan con una o más categorías simultáneamente. Para el niño, no son de interés los otros elementos que no cumplen la categoría, es decir, al hacer la revisión, el niño puede ir describiendo los elementos y solo detenerse en el que es de interés. Por ejemplo, un niño diría: *"Pelota roja, pelota amarilla, ¡pelota azul! Esta me sirve."* Esto no es clasificar aún. La tarea podría ser: *"Escoge aquellas pelotas que sean rojas."*

- Clasificación: Se espera que escojan entre todos los elementos del conjunto, aquellos que cumplan con una o más categorías. A diferencia de la selección, en esta tarea los párvulos deben coordinar al menos dos opciones para agrupar, por ejemplo, los párvulos dirían: *"Pelota roja; ¡Pelota azul! Esta va allá; ¡Pelota amarilla! Esta* *va acá."* Como se observa en el ejemplo, para el niño no son de interés todos los elementos, pero sí debe reconocer aquellos que cumplen con las categorías dadas. La tarea podría ser: *"Aquí, pon las pelotas que son rojas y acá, las que son azules."*

Como se puede observar, las tareas son jerárquicas, pues cada una de ellas involucra a las anteriores, es decir, cuando un estudiante debe seleccionar, también debe describir y también comparar. Cabe destacar que en algunas ocasiones, la tarea se basa en nombrar elementos que pertenecen a una determinada categoría y, por otra parte, otra tarea se basa en determinar el o los criterios de clasificación, es decir, la categoría que permitieron agrupar dichos elementos. De esta manera, la tarea de 'categorizar' podría ser entendida bajo estas dos definiciones: determinar el o los criterios de clasificación de un conjunto de elementos ya clasificados o decir elementos que pertenecen a dicha categoría, o sea, una *familia semántica.*

En relación a la caracterización del medio, gran parte de las guías docentes, sugieren actividades en donde los espacios y los recursos han sido previamente estudiados y definidos con el objetivo de propiciar ciertas respuestas, aprendizajes o conductas. Así también, el educador orienta frecuentemente la atención del párvulo en los recursos de aprendizaje. En este sentido, en la siguiente tabla se ofrecen variables didáctico-matemáticas que se relacionan con las cualidades de los objetos que componen la colección. Para esto, se entenderá *criterio* como el hiperónimo que contiene opciones –por ejemplo: color– y los *atributos*, como los hipónimos que están contenidos en el criterio –por ejemplo, rojo. Las variables para cada tarea son:

- Descripción y Comparación: La cantidad de criterios y atributos que tienen los elementos no determinan la tarea. No obstante, sí podrían determinar la complejidad, dependiendo del tipo criterio (forma, color, función, etc.).

- Selección: En esta tarea solo se pide una categoría. La cantidad de criterios y atributos que tienen los elementos no determinan la tarea. No obstante, sí podrían determinar la complejidad, dependiendo del tipo criterio (forma, color, función, etc.).

- Clasificación: En esta tarea se pide más de una categoría. Si los elementos cumplen con un criterio y con dos atributos, es decir, fichas rojas y amarillas, la tarea se convierte en una actividad de *selección*. Generalmente esto es llamado: "*clasificar por un criterio/atributo*". Para que sea una tarea de clasificación, los elementos deben considerar: un criterio y más de dos atributos o, dos criterios simultáneos.

Conclusiones

Las variables didácticas que se describen podrían ser útiles para la planificación del trabajo de la noción de clasificación. Si a este estudio, se incorporan además preguntas que desafíen a los niños a estudiar cuantitativamente la experiencia, los párvulos se aproximarán correctamente a la formación del número pues, como fue descrito en este artículo, es solo un estudio cualitativo de los conjuntos y sus elementos, no contribuyendo del todo y directamente en la formación del número natural.

Referencias

Castorina, J., & Palau, G.(1981). Introducción a la lógica operatoria de Piaget. Alcances y significado para la psicología genética. Barcelona, España: Editorial

Paidós.

Chamorro, C. (Ed.), (2005). Didáctica de la matemática. Colección infantil. Madrid, España: Editorial Pearson.

Fernandez, C., (2015). Análisis cognitivo de la secuencia numérica: procesamiento de la información y epistemología genética. Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana 2015, 52(2), 172-188.

Mineduc, 2005. Bases Curriculares de Educación Parvularia. Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ormeño, C., Rodríguez, S. & Bustos, V. (2013). Dificultades que presentan las educadoras de párvulos para desarrollar el pensamiento lógico matemático en los niveles de transición. Pág. Educ. [online]. 2013, vol.6, n.2 [citado 2018-01-31], pp.55-71. Disponible en: <http://www.scielo.edu.uy/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1688-74682013000200003&lng=es&nrm=iso>. ISSN 1688-7468.

Piaget, J., 1978. La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo. España: XXI Editores.

Piaget., J & Inheler B., (2007). Psicología del niño. Madrid, España: Morata. (Trabajo original publicado 1969)

Treviño, E., Toledo, G. & Gempp, R. (2013). Calidad de la educación parvularia: las prácticas de clase y el camino a la mejora. Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana 2013, 50(1), 40-62.

Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemática en el desarrollo del pensamiento proporcional: un estudio de casos de la subdimensión conocimiento de los temas

Jessica Torres Astudillo, Pablo Suazo Huerta, Dra. María del Valle Leo
Universidad de Concepción

Resumen

Con base en el modelo analítico para el estudio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés), desarrollado por Carrillo y colaboradores (Carrillo et al, 2015) y considerando el enfoque ontosemiótico de Godino (Godino, Batanero y Font, 2007), se realiza una revisión bibliográfica que ofrece un marco de referencia para el análisis de las diferentes subdimensiones que ofrece el modelo MTSK en el desarrollo del pensamiento proporcional. A partir de un estudio de casos se recogen las concepciones de futuros profesores acerca del Conocimiento de los Temas (KoT) relacionados a las variaciones proporcionales. El resultado evidencia la importancia de la inclusión de un curso especializado de este tema con el fin de fortalecer alguna de las facetas del conocimiento del profesor necesario para enseñar matemáticas y específicamente para el desarrollo del pensamiento proporcional.

Palabras Clave: Pensamiento Proporcional, MTSK, KoT.

Introducción

En una primera etapa se realiza una revisión de la literatura que nos da indicios de cuáles son las dimensiones que involucra la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad y las variaciones proporcionales.

> El estudio de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad constituye un grueso legado sobre el cual, aun cuando existe una diseminada y amplia producción en torno a ella, hay muchas cosas por hacer y cosas por decir. Para nuestro entender, ese estudio constituye una actividad compleja para la cual no se ha logrado evidenciar una visión total y sistémica de todos sus componentes (Rivas, 2013).

A continuación, a través del modelo de análisis del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK, por sus siglas en inglés), se estructura el conocimiento involucrado en el desarrollo del pensamiento proporcional en dos dimensiones: el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido. Una vez establecidas las características del conocimiento del contenido y del conocimiento didáctico del contenido respecto a las variaciones proporcionales se indaga mediante un cuestionario de conocimiento del contenido acerca de las concepciones de dos grupos de profesores con el propósito de diagnosticar el estado del conocimiento matemático en las variaciones proporcionales: futuros profesores que en su formación tuvieron un curso específico de variaciones proporcionales y futuros profesores cuya formación no incluyó un curso específico de variaciones proporcionales.

Problemática de investigación

Desde la propuesta de Shulman (1986, 1987), se viene desarrollando en el ámbito de la educación matemática un interés creciente por caracterizar una forma de conocimiento matemático que es requerido para desarrollar una actividad de enseñanza adecuada de esta ciencia.

En su propuesta, Shulman (1986, 1987), introdujo lo que comúnmente se ha traducido como *Conocimiento Pedagógico del Contenido*, del inglés: Pedagogical Content Knowledge (PCK), que se caracteriza por ser una forma de conocimiento que no es sólo del contenido, de la disciplina científica al que refiere, tampoco es un conocimiento didáctico o pedagógico puro, sino que es una mezcla de ambos tipos de conocimiento.

Las investigaciones, además, permitieron identificar elementos importantes para la comprensión de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en contextos escolares, pero se les puede reclamar que no realizaron un cuestionamiento al conocimiento matemático que se enseña en la escuela sobre las razones y la proporcionalidad, al asumir que las dificultades de los maestros para enseñar, y de los alumnos para aprender, podían ser completamente tratadas a partir de los avances en la comprensión de los procesos del desarrollo cognitivo y de los fenómenos ligados a las condiciones de contexto. (Obando,2014)

Por ejemplo, las ideas de proporcionalidad son en general mal entendidas, debido a que es común que en el aula se enseñe este tema de manera mecánica utilizando la regla de tres (Ramírez y Block, 2009).

Marco teórico

Durante décadas ha habido interés por la formación, el conocimiento, el desarrollo y la identidad profesional del profesor de matemáticas (Ponte y Chapman, 2006); dentro de este interés han aparecido diversos aportes como los de Ball (2008), Shulman (1986) y Gómez-Chacón; Romero; Carrillo (2015). Por su parte el modelo MTSK no se queda de lado frente a este interés y pretende contribuir en diversas áreas. Entre ellas, se encuentran el análisis y la conceptualización del conocimiento específico que el profesor posee o podría poseer para la enseñanza de las matemáticas.

El modelo MTSK tiene a su disposición de dos grandes dominios de conocimiento: el *"Conocimiento de las Matemáticas"*, el que tiene a su disposición tres subdimensiones; Conocimientos de los Temas (KoT), Conocimientos de la Estructura de las Matemáticas (KSM) y Conocimiento de la Practica Matemática (KPM). Por otra parte se encuentra el *"Conocimiento Didáctico del Contenido"* en el que se encuentran el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los

Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), finalmente dicho modelo posee las *"creencias sobre matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas"*. (Flores, 2016).

Noción de Proporción

A través de diversas investigaciones se ha encontrado que el termino Proporción proviene del latín *Proportionem*, contracción de *Pro portione,* que significa según la parte.

Piaget & Inhelder (1958), por su parte, señalan que la comprensión de la proporción comporta dos aspectos, uno lógico y otro matemático. Bajo el aspecto lógico, la proporción es un esquema que establece relaciones entre relaciones (una razón es una relación entre dos variables, y la proporción una relación de equivalencia entre dos razones) e implica el recurso a una lógica de segundo orden. Bajo el aspecto matemático, las compensaciones cuantitativas asumen la forma de esquemas proposicionales de equivalencia (coordinación de los procesos de covariación entre variables y sus respectivas compensaciones) que permiten garantizar que en el proceso de variación se conserve invariante un cociente o un producto (si _x y = _x y´ ´, entonces x y´= x´y).

Por otra parte, desde la didáctica de la matemática, la proporción se define como la igualdad de dos razones (Llinares, 2003b; F. Fernández, 2001; García y Bertrán, 1987; Grupo Beta, 1990.

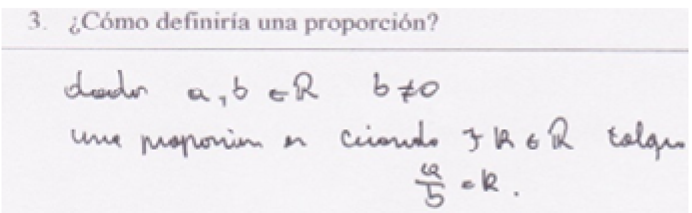
F. Fernández (2001), añade que cuando dos razones son equivalentes, es decir, cuando representan al mismo número abstracto, se pueden igualar los cocientes indicados por ellas y obtener una relación entra las medidas de cuatro o más cantidades homogéneas dos a dos. Simbólicamente este autor lo anuncia indicando que si $\frac{a}{b} = n$ y $\frac{c}{d} = n,$ entonces se puede expresar la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e indica que a esta igualdad se le denomina Proporción.

Metodología

La investigación es de carácter cualitativo-descriptivo, del tipo estudio de casos (PONTE, 2006). Su desarrollo contempla un cuestionario de conocimiento matemático acerca de variaciones proporcionales con preguntas divididas en dos partes: Preguntas abiertas y Resolución de problemas. Esta metodología se enmarca en una investigación fenomenológica, situación en donde los autores, Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2014) señalan que las investigaciones con un diseño fenomenológico poseen como propósito principal: *"explorar, describir y comprender las experiencias de las personas con respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias".*

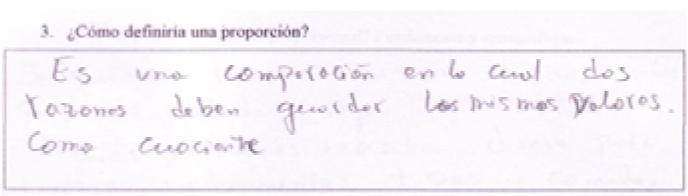
El contexto de esta investigación es el de la formación de profesores. Los participantes conforman un grupo de seis futuros maestros, en el cual tres de ellos, pertenecientes al grupo uno, debieron llevar a cabo durante el año académico el curso "Enseñanza y Aprendizaje de las Variaciones Proporcionales", asignatura presente con carácter obligatoria para estudiantes de la carrera de Pedagogía en Educación Básica. Los seis estudiantes antes mencionados llevaron a cabo un cuestionario de conocimiento matemático acerca de variaciones proporcionales de manera voluntaria. Este cuestionario se estructura de 14 preguntas divididas en dos partes: 8 preguntas abiertas de conceptos y 6 de resolución de problemas.

Si se observa la figura 1 y figura 2, correspondientes al grupo 1 y grupo 2 respectivamente, frente a la pregunta abierta nº 3 del cuestionario, se puede observar las diferencias en la concepción de un mismo concepto: definición de proporción, e incluso se pueden observar errores conceptuales (figura1).


3. ¿Cómo definiría una proporción?

dados $a, b \in \mathbb{R}$ $b \neq 0$
una proporcion es cuando $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{a}{b} = k$.

Figura 1: Respuesta al ítem 3 pregunta abierta de estudiante grupo 1


3. ¿Cómo definiría una proporción?

Es una comparación en la cual dos razones deben guardar los mismos valores. Como cociente

Figura 2: respuesta al ítem3 pregunta abierta de estudiante grupo

Resultados y conclusiones

Godino y colaboradores presentan, desde una visión integrativa de diferentes planteamientos teóricos, provista por el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero yFont, 2007), una propuesta sobre aspectos fundamentales relativos a la proporcionalidad a ser considerados en la formación de maestros (Rivas, 2013). Mediante el análisis de las respuestas en los ítems de resolución de problemas se observan las diferencias respecto a los métodos de resolución, que en un grupo son predominantemente algorítmicos y sin que necesariamente exista un pensamiento proporcional involucrado en su desarrollo, y en el otro se muestra la existencia de un procedimiento proporcional.

Respecto al dominio conceptual del primer grupo, como se mostró en el apartado anterior, también existe una diferencia importante respecto al grupo 1 y grupo 2, evidenciando de forma clara, que la inclusión de un curso de variaciones proporcionales en la formación del futuro docente, favorece el desarrollo del pensamiento proporcional.

Referencias

Carrillo, J.(2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales.Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 143-167, abr. 2015

Obando Gilberto, (2013). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte.Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.

Ponte, J. (2006) Estudos de caso em educação matemática. Bolema, Rio Claro (SP), v. 19, n. 25, p. 1-23, 2006. Disponible en: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/ index.php/bolema/article/view/1880/1657>. Acceso en: 5 dic. 2017.

Flores, E. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemátic.Bolema, Rio Claro (SP), v. 30, n. 54, p. 204- 221, abr. 2016.

Rivas, M. (2013). Análisis epistémico y cognitivo de tareas deproporcionalidad en la formación deprofesores de educación primaria. Tesis doctoral no publicada. Disponible en <http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Mauro_Rivas_tesis.pdf>. Acceso en 5 dic.2017.

Experiencia de metodologías de investigación en la clase de matemáticas

Marcela Ojeda Castillo y Elizabeth Cañete
Universidad Católica Silva Henríquez

Resumen

La enseñanza de las matemáticas es y ha sido siempre un desafío para los docentes; lo anterior podría deberse al estilo tradicional de enseñanza. En la actualidad se han desarrollado técnicas de enseñanza que responden a una mirada más integral de los estudiantes, en donde aspectos cotidianos y básicos del entorno de ellos son lo esencial. El objetivo de esta comunicación es presentar de manera breve las dificultades de la enseñanza de las matemáticas y describir dos metodologías de enseñanza innovadoras: Ingeniería Didáctica y Estudio de casos. Además, presentaremos nuestra experiencia al poner en práctica estas técnicas, ofreciendo nuestras reflexiones del ejercicio. Las principales conclusiones de este estudio son que es necesario sustituir los métodos tradicionales de enseñanzas por aquellos en donde la vida cotidiana y el entorno de los estudiantes sean las principales herramientas para diseñar la metodología a utilizar, sin olvidar el rol de docente, que debe preocuparse constantemente de capacitarse y comprender lo más posible el contexto de sus estudiantes.

ABSTRACT *The teaching of mathematics is and has always been a challenge for teachers, this could be due to the traditional style of teaching. At present, teaching techniques have been developed that respond to a more comprehensive view of students, where every day and basic aspects of the students' environment are essential. The objective of this communication is to briefly present the difficulties of teaching mathematics and describe two innovative teaching methodologies; Didactic Engineering and Case Studies. In addition, we will present our experience in putting these techniques into practice, offering our reflections on the exercise. The main conclusions of this study are that it is necessary to exchange traditional teaching methods for those where daily life and students' environment is the main tool to design the methodology to be used, without forgetting the role of teacher, who should be concerned constantly train and understand as much as possible the environment of their students.*

Palabras Clave: Metodologías de enseñanza, Matemáticas, Ingeniería didáctica, Estudio de casos.

Introducción

Durante nuestro proceso de formación como futuras profesoras de Educación Básica con mención en Educación matemática, y ante la lectura de diversos documentos e investigaciones, hemos podido identificar distintos procesos para la comprensión de un concepto matemático y cómo se enfrentan las personas a estas ideas matemáticas a partir de una secuencia de aprendizaje, permitiéndonos visualizar las principales dificultades que se presentan en la enseñanza.

Esta comunicación, tiene por finalidad detallar en pocas palabras la experiencia de haber implementado la ingeniería didáctica y el estudio de casos durante dos cursos de taller de didáctica en la mención de matemáticas, para analizar la implementación de una situación de aprendizaje elaboradas a partir del avance progresivo del concepto multiplicación y de patrones en enseñanza básica. Procesos que sin duda han sido de gran relevancia en nuestro proceso de formación.

El profesor investigador

Una de las principales dificultades que presenta la enseñanza en las matemáticas escolares, es el estilo de enseñanza tradicional de algunos docentes, donde se dedican a que el estudiante memorice reglas sin sentido. Es así como lo demuestra un estudio realizado en Chile, por Araya y Dartnell (2009), quienes analizaron videos de profesores de matemáticas de la ronda 2005 de DocenteMás. En esta investigación, el 78% de estos videos, daban cuenta que el proceso de enseñanza se centra en el profesor, quien formula preguntas, expone en el pizarrón u organiza el trabajo individual de los estudiantes (Preiss, 2010). Lamentablemente, este tipo de práctica trae como consecuencia la pérdida de interés de los estudiantes por las matemáticas, generando bajo rendimiento académico, deserción escolar y exclusión social, ya que muchas veces contribuye a la expulsión del sistema educativo.

Es importante considerar lo que nos indica el Instituto Max Planck de Alemania en sus últimas investigaciones, donde señala que para logar un buen proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es esencial la capacidad didáctica del docente, por sobre sus conocimientos pedagógicos y disciplinares (Jimenez, 2013). El docente debe ser capaz de problematizar situaciones de la vida cotidiana, con el propósito que el estudiante sea capaz de examinar cuidadosamente los problemas, en especial, aquellos mal resueltos, y que aprenda del error. Esta situación también le permite al docente identificar el origen de los errores y relacionarlos con obstáculos (cognitivos, didácticos y epistemológicos) que limitan el aprendizaje del niño/a, de tal forma, que esta información le sea útil para reformular su procesos de enseñanza (Socas, 2011). Nos referimos a un profesor investigador.

Metodologías activas en el profesor de matemáticas

Con el propósito de dar a conocer dos metodologías que nos permitan observar las situaciones de aprendizaje, y al estudiante en acción con la situación, es que nos referiremos a cuál ha sido nuestra experiencia al desarrollar un proceso de "ingeniería didáctica" y "estudio de casos".

La ingeniería didáctica se fundamenta en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y de transposición didáctica de Chevallard. Se basa en analizar situaciones de aprendizajes, cuyo fin es que el estudiante sea el generador de su propio conocimiento, poniendo en juego sus habilidades, sus actitudes físicas y mentales, despertando la curiosidad, que le permita generar un razonamiento y la aplicación de sus conocimientos para resolver ciertas situaciones (Estadística, M. V., 2013).

Para la implementación de la ingeniería didáctica se elaboró una propuesta de situación didáctica que promoviera la construcción de un algoritmo para la multiplicación, el cual contaba con cuatro fases: acción, donde al estudiante se le plantea una situación en particular y se le plantea una pregunta desafiante; formulación, que tiene por objetivo que los estudiantes se comuniquen entre ellos, con el propósito de que den a conocer sus propuestas y opiniones sobre posibles estrategias que le permitan dar respuesta a la pregunta planteada; validación, donde los estudiantes explican cuál fue la estrategia que eligieron para resolver la problemática por medio de la exposición de sus argumentos y la institucionalización, que tiene por finalidad que el conocimiento del estudiante sea transformado, donde el docente tiene la misión de contextualizar matemáticamente el concepto aprendido.

Esta experiencia nos permitió conocer, cómo el estudiante utiliza sus conocimientos y pone en práctica sus habilidades y destrezas, buscando distintas maneras de solucionar una situación y, a su vez, permitiéndole generar nuevos conocimientos. Además, este tipo de metodología también nos demostró que para analizar una situación de aprendizaje hay que analizar las distintas fases de la *Ingeniera Didáctica*. Estas fases son: el Análisis Preliminar, cuyo propósito es hacer un análisis epistemológico, didáctico y cognitivo; el análisis a-priori, que consiste en tener claro cuáles son los conocimientos previos, los posibles errores y obstáculos que nos podemos encontrar y las posibles estrategias que se esperan del estudiante. Y, para finalizar, la última etapa, el análisis a-posteriori, que nos permite analizar los errores cometidos por los estudiantes, hacer una triangulación de los datos, visualizando qué estrategias se usaron y/o declarar todas aquellas situaciones y estrategias nuevas. (Edison De Faria Campos,, 2006)

Otras de las metodologías que tuvimos la oportunidad de conocer es el *"Estudio de casos"*, la cual consistió en formular un caso de estudio sobre la interacción de un grupo de estudiantes con la construcción de un modelo algebraico que representa un patrón de comportamiento. Para ello, se diseñó una situación de aprendizaje que hiciera transitar a los informantes del caso por un saber hacer, saber analizar y saber profundizar, con el propósito de estimular la construcción de aprendizajes significativos.

El poner en práctica esta metodología nos permitió conocer y analizar ciertas situaciones y particularidades en el proceso de enseñanza, tales como: saber cuáles son sus conocimientos previos; las dificultades que nos podemos enfrentar en el cómo profundizar y adquirir nuevos conceptos; obtener información cualitativa respecto a un estudiante en particular, que nos permita comprender lo que él sabe y entiende, posibilitando conocer cómo mejorar y fortalecer nuestras planificaciones, metodologías, estrategias de enseñanza y las formas de evaluación.

Desde nuestra experiencia podemos indicar que varios de nuestros informantes, se encontraban en un ambiente óptimo, donde no se visualizaron mayores obstáculos, sino más bien, les costó la comprensión de algunas indicaciones, situación que se manifestó al terminar de desarrollar cada actividad. Esta experiencia, a su vez, permitió también evidenciar que para usar las matemáticas se debe comenzar utilizando elementos o situaciones cotidianas y poco a poco ir profundizando, permitiendo así, desarrollar habilidades y nuevos aprendizajes donde, por consiguiente, el docente tiene una gran responsabilidad.

Reflexiones

El llevar a cabo este tipo de experiencia, también nos permitió darnos cuenta de lo importante que es considerar el contexto sociocultural donde se desenvuelve el estudiante y cómo influyen los obstáculos que se puedan presentar en la construcción del conocimiento del mismo.

Una reflexión que podemos manifestar sobre el aprender a elaborar distintas metodologías de aprendizaje, es que nos permitió saber cuáles son los elementos en los que nos debemos focalizar al momento de construir una situación de aprendizaje. Esta identificación, nos permite ser un aporte en el proceso de enseñanza y aprendizaje en nuestros futuros estudiantes. No obstante, cada una de estas metodologías no es una herramienta sencilla y fácil de llevar a cabo.

La experiencia nos permitió reconocer que el resultado obtenido dependerá del instrumento que se implemente para realizar una secuencia de aprendizaje, porque no debemos olvidar que el propósito de éste, es que el estudiante sea participativo en la construcción de su propio aprendizaje, el cual parte con un docente capaz de elaborar buenas preguntas considerando el contexto real del estudiante.

Conclusiones

En conclusión, para lograr la problematización del saber matemático es importante erradicar los métodos tradicionales de algunos docentes, que se centran en la memorización y desarrollo de técnicas de resolución de problemas. Los nuevos métodos deben enfocarse en plantear situaciones relacionadas con la vida cotidiana, donde los estudiantes pongan en práctica sus habilidades y actitudes y sean capaces de construir sus propios conocimientos, y donde los docentes también se dediquen a buscar nuevas metodologías de enseñanzas, que les faciliten conocer y analizar ciertas situaciones y particularidades en los estudiantes y sus procesos de enseñanza. Lo anterior, nos faculta para fortalecer y replantear las planificaciones, metodologías de observación de los estudiantes y de las situaciones de aprendizaje que llevamos al aula.

Nuestra experiencia en realizar este tipo de trabajo nos permitió darnos cuenta también de la brecha existente entre lograr un aprendizaje significativo en las clases de matemáticas y el rol de un profesor investigador, donde la forma en que analizamos la formulación de situaciones de enseñanza y las características particulares de cada estudiante al construir conocimiento matemático son herramientas potentes para lograr dicho aprendizaje.

Referencias

Edison De Faria Campos,. (2006). INGENIERÍA DIDÁCTICA,. Costa Rica: Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas Universidad de Costa Rica. Asociación de Matemática Educativa.

cuadernos de investigación y formación en educación matemática.

Estadística, M. V. (2013). Situaciones de aprendizaje Pautas metodológicas para el desarrollo de competencias en el aula. . Ministerio de Educación de Guatemala.

Jimenez. (2013). Pero si las matemáticas son tan difícil. EduGlobal red de sevicios para la educación., (págs. http://www.eduglobal.cl/2013/02/06/pero-si-la-matematica-es-tan-dificil/.).

Preiss, D. R. (2010). Patrones de Discurso Observados en el Aula de Matemática de Segundo Ciclo Básico en Chile.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en educación obligatoria Aportaciones de las Investigaciones. .

Resolución de problemas por estudiantes talentosos

Miguel Rodríguez - Pablo Gregori
Universidad de Playa Ancha (Chile) – Universidad Jaume I (España)

Resumen

Este artículo presenta parte de un estudio cuyo foco es el análisis de estrategias y procedimientos matemáticos que desplegaron estudiantes talentosos en un taller de resolución de problemas en la Quinta Región de Chile, utilizando el análisis implicativo como recurso estadístico. La metodología consideró el trabajo de un grupo de estudiantes que individualmente resolvían problemas según la temática en estudio, y a los cuales se les permitió explicar sus estrategias y formas de abordar los problemas planteados en forma socializada. Como principal hallazgo, se evidencia el uso eficaz de las estrategias ensayo y error, búsqueda de patrones y haz una lista, para resolver distintos problemas, que demandaron manipular un conjunto de números naturales consecutivos bajo una condición dada. Además, se describen los procedimientos matemáticos que se activaron a la luz de las estrategias utilizadas, y su relación con los contenidos matemáticos que los programas de estudio declaran.

Palabras Clave: Resolución de problemas, estrategias, talento

ABSTRACT *This article presents part of a study that focuses on the analysis of strategies and mathematical procedures displayed by gifted students in a prob¬lem-solving workshop, which was implemented in the fifth region of Chile. The implicative analysis was used as statistic resource. The methodology considered the work that a group of students produced individually as they solved problems according to the topic of study. Additionally, these students were allowed to explain their strategies and methods, as well as to approach the proposed problems in a socialized way. Findings reveal the strategies used by students, which include trial and error, pattern recognition, make-a-list to solve different problems that demanded the knowledge of a set of consecutive natural numbers under a given condition. They also show the mathematical procedures that were activated when using the strategies, and their relation to the mathematical contents stated in the study plans.*

Introducción

El currículo escolar chileno organiza la enseñanza de la Matemática a través de cuatro ejes: Estadística-Probabilidades, Números, Álgebra y Geometría. A partir de ellos se promueven cuatro habilidades fundamentales que son: representar, argumentar-comunicar, resolver problemas y modelar (MINEDUC, 2012). Estas habilidades, desarrolladas a través de los contenidos que cada eje incluye en el respectivo nivel de escolaridad, son evaluados a partir de una prueba nacional denominada "Sistema de Medición de la Calidad de la Educación"(SIMCE), y pruebas internacionales tales como el "Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes" (PISA) y el "Estudio de las Tendencias Internacionales en Matemáticas y Ciencias" (TIMSS), (MINEDUC, 2007).

Antecedentes respecto del talento

Los estudiantes con talento evidencian características cognoscitivas que los diferenciarían de los demás estudiantes, por ejemplo, una buena memoria, un mayor conocimiento de base, mejores procesos autorreguladores, mayor velocidad en los procesos de aprendizaje, mejor representación de los problemas, mayor uso de estrategias elaboradas en el empleo del conocimiento, gran flexibilidad cognitiva y una mayor preferencia por la complejidad (Shore y Kanevsky, 1993). Además destaca en ellos un alto nivel de atención y concentración (Aretxaga, 2013), habilidades para trabajar con ideas abstractas y una mayor capacidad para establecer relaciones lógicas, sintetizar y efectuar generalizaciones (Artola et al., 2005; Martínez y Guirado, 2012; Aretxaga, 2013). Asimismo, dan cuenta de una mayor perspicacia en tanto son agudos observadores, lo que les permite descubrir con facilidad la idea o aspecto central de algún problema o fenómeno (Aretxaga, 2013).

Sobre la investigación

Para dar cuenta de lo anterior, se implementó un taller de RP al interior de un programa para estudiantes talentosos que se dicta en una universidad de la ciudad de Valparaíso, Chile. El taller estuvo dirigido a estudiantes de 12 a 14 años, y su planificación incorporó problemas no rutinarios para estimular el uso de estrategias y procedimientos matemáticos con el propósito de identificar aquellos aspectos inherentes a las cualidades matemáticas que están en juego en la RP (Santos Trigo, 1997; Rodríguez y Parraguez, 2014). En este marco, el objetivo es dar cuenta de aquellos caminos de solución, las nociones e ideas matemáticas que se activan en los estudiantes y las estrategias que se ponen de manifiesto en función del tipo de problema que se plantea (Santos Trigo, 2007). Para el análisis de los datos, se incorporó el uso de estadística implicativa, cuyas sigla en francés es ASI (Analyse Statistique Implicative) (Gras, 2008; Orús et al., 2009), y el uso del software CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification) versión 6.0.Una de las motivaciones para el uso de este tipo de estadística obedece, fundamentalmente, a que ASI es un método exploratorio no simétrico que permite obtener indicadores como similaridad e intensidad de implicación, los que son calculados bajo un enfoque probabilístico(Gras et al., 2008; Orus et al; 2009).

Análisis a un problema desarrollado en el curso de RP

Problema: Dados los números del 1 al 24, sepárelos en dos conjuntos, S y P, de tal manera que la suma de los números pertenecientes a S sea igual al producto de los números que pertenecen a P. Explique cómo resolvió el problema.

En la Tabla 1 se presenta una posible solución, utilizando un procedimiento que se asocia a un conjunto ordenado de números naturales consecutivos.

Tabla 1
Posible resolución al problema en cuestión

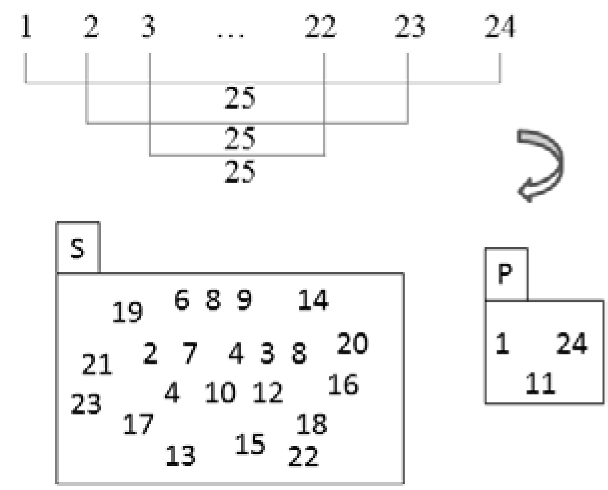
Descripción	Procedimiento
En primer lugar, es necesario calcular "la suma máxima". Para ello se recurre a una regularidad del conjunto de números consecutivos: $25 \cdot \frac{24}{2} = 300$ El procedimiento matemático permite obtener la suma máxima y una pista, 25·12. Dos factores que pueden ayudar a dar respuesta a lo solicitado. Se puede, con un ensayo y error, averiguar qué ocurre con 24·11= 264, descontando luego: 300 - (24 + 11) = 265. Difieren en una unidad. Como 1 es el neutro multiplicativo, se puede escribir 24·11·1=264 y además 300-(24+11+1) =264, como se pedía.	

Tabla 2
Los procedimientos matemáticos y estrategias del análisis a priori

Procedimientos y estrategias asociadas a la resolución del problema	Rótulo
Adiciona y multiplica números de manera arbitraria comprobando la condición dada.	p1
Suma el total de los números y descarta factores en función de dicha suma.	p2
Aplica relaciones aritméticas asociadas a números naturales	p3
Organiza los datos del problema	eOd
Supone resuelto el problema	eSr
Reduce el problema a otro más simple	eRp
Aplica Ensayo y Error	eEe
Busca regularidades	eBr

En atención a la información de la Tabla 2, es posible establecer conjeturas respecto del desempeño de los estudiantes al resolver el problema. Por ejemplo, éstos podrían proceder según la eEey utilizar el **p1** o el **p2** sin hacer uso de la eBr. También podrían utilizar el **p2** en combinación con la **eBr.** Por otro lado, como se planteó en la Tabla 1, podrían utilizar el **p3** y las eOd y eBr, lo que idealmente debería llevar a una de las respuestas del problema. En la Figura 1 destaca la clase (**p4**, **eBr**) que pone de relieve un procedimiento y una estrategia cuyo uso articulado demanda de un proceso de sistematización y organización por parte de quien las utiliza. Por otro lado, los estudiantes **E3**, **E10** y **E11** contribuyeron que a dicha clase se conformara, los que a su vez tuvieron una participación destacada en el primer problema que se analizó. Esto pone de manifiesto la flexibilidad que existe en este tipo de estudiantes para adaptarse a nuevos requerimientos, variando los procedimientos en sintonía con los conocimientos que los programas de estudio declaran.

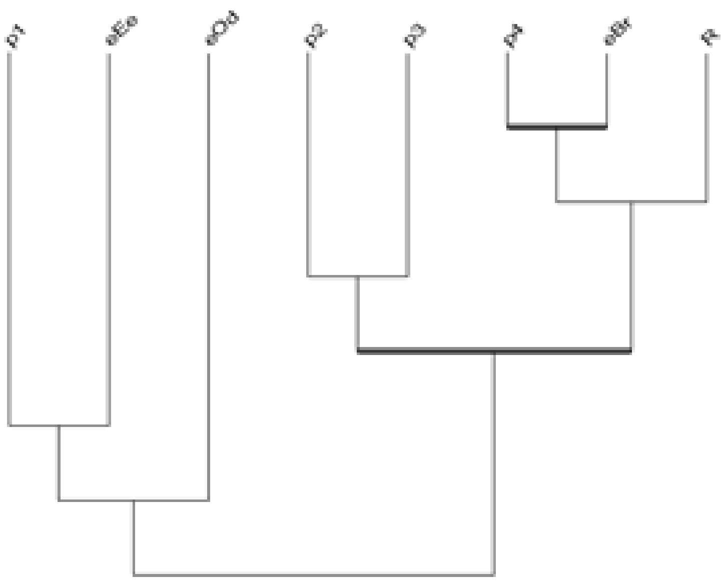


Figura 1. Árbol de Similaridad

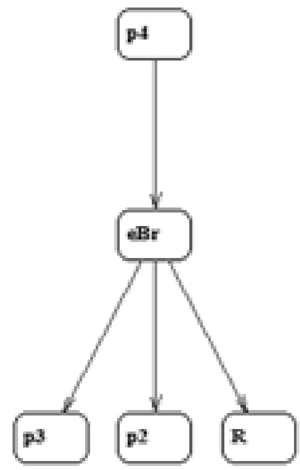


Figura 2. Grafo implicativo

En relación al grafo implicativo, Figura 2, se puede deducir que la utilización de un procedimiento más elaborado estimula el uso de otras estrategias y la activación de procedimientos más elementales inciden en la aproximación de la resolución del problema. En la Figura 1 se aprecia parte del desempeño del **E3,** quien logra distribuir correctamente los números dados.

Conclusiones

Las características propias de un estudiante con talento académico se manifestaron en el desempeño en cada uno de los problemas analizados, ya sea utilizando variadas estrategias y procedimientos matemáticos o evidenciando flexibilidad para abordar los distintos problemas, desde las estrategias y procedimientos usados. Cabe destacar que para algunos estudiantes promedio, lo anterior podría resultar demasiado complejo y poco motivante.

Respecto de las estrategias que emplearon los estudiantes, en función del tipo de problemas que se planteó, éstas son equivalente a las utilizadas por un estudiante promedio, dado que el problema de alguna manera lo sugiere: *ensayo y error, crear una lista, buscar regularidades*. La diferencia radica en la forma en cómo los estudiantes talentosos las utilizan, sistematizando la información que se despliega a medida que utilizan los distintos recursos, en definitiva, poniendo en juego el uso de un pensamiento matemático.

Referencias

Aretxaga, L. (coord.) (2013). Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales.Consultado el 18 de agosto de 2016 en:http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/contenidos/informacion/dig_publicaciones_innovacion/es_escu_inc/adjuntos/16_inklusibitatea_100/100012c_Pub_EJ_altas_capacidades_c.pdf.

Artola T., Barraca, J., Mosteiro, P. (2005) Niños con altas capacidades: quiénes son y cómo tratarlos. Madrid: Entha.

Martínez, M. y Guirado, A. (2012) Altas capacidades intelectuales. Pautas de actuación, orientación, intervención y evaluación en el periodo escolar. Barcelona: Graó.

MINEDUC (2007) PISA 2006: Rendimientos de estudiantes de 15 años en Ciencias, Lectura y Matemática. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación/ Ministerio de Educación de Chile. Consultado el 10.1.2013 en http://www.agenciaeducacion.cl//biblioteca-digital/archivos-pisa/.pdf.

MINEDUC (2010) Orientaciones para la implementación del Decreto Supremo N° 170 en Programas de integración escolar". Santiago de Chile: Ministerio de Educación de Chile.

MINEDUC (2012). Ajuste curricular 2012. Consultado el 12 de junio de 2013 de http://www.ayudamineduc.cl/docs/informacion/info_guia/guia_ajuste.pdf.

Orús, P.; Zamora, L. y Gregori, P. (2009) (Eds.). Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana. Consultado el 02 de marzo del 2015 de http://hdl.handle.net/10234/125568.

Rodríguez, M. y Parraguez, M. (2014). Interpretando estrategias en Resolución de Problemas desde dos constructos teóricos: Un estudio de caso. Revista electrónica de investigación de la enseñanza de las ciencias, 9 (2), 1-12.

Schoenfeld, A. (1994). Mathematical thinking and problem solving. Hillsdale: NJ, Erlbaum.

Santos, L.M. (1997). Principios y métodos en la resolución dela resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México: Iberoamericana.

Santos, L.M. (2007). Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos Cognitivos. México: Trillas

Shore, B.; Kanevsky, L. (1993) Thinking processes: Being and becoming the gifted, en Heller, K.; Monk, F. J. y Passow, A. (Eds.), International handbook of research and development of giftedness and talent, (pp. 133-147). Oxford: Pergamon Press

Caracterización de la capacidad de enseñanza de la estadística de un profesor en una clase de análisis exploratorio de datos

Sergio Morales, Soledad Estrella y Raimundo Olfos
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

En esta ponencia se presenta un análisis preliminar de aquellos elementos que pone en juego un profesor en la implementación de una clase de estadística inicial diseñada en el marco del Estudio de Clases, de las relaciones que se establecen entre estos elementos y de la manera en que se articulan para dar funcionalidad a la clase y contribuir al desarrollo del pensamiento estadístico. Para el análisis se optó por la perspectiva inductiva de la Teoría desde la Base con el objetivo de estudiar la implementación desde la complejidad de la enseñanza en aula, tomando en cuenta las distintas variables que influyen en el proceso de enseñanza de la Estadística en primer ciclo. Los resultados iniciales muestran consideraciones afectivas del profesor que le permiten modelar las actitudes de los estudiantes, favoreciendo la construcción de conocimientos estadísticos a nivel de toda la clase.

Palabras Clave: Enseñanza de la Estadística, Pensamiento Estadístico, Actitud matemática, Estudio de Clases, teoría desde la Base.

Introducción

La enseñanza es una tarea compleja que implica tomar decisiones en las que intervienen diferentes conocimientos profesionales del docente (Escudero y Sánchez, 2007). Las investigaciones de Shulman (1986, 1987) fueron pioneras en el estudio de estos conocimientos, y detonaron el desarrollo de una serie de investigaciones que han permitido alcanzar una comprensión más profunda del conocimiento profesional del profesor, en particular de aquel que enseña matemática (Hill, Ball y Schilling, 2008; Escudero, Flores y Carrillo 2012). No obstante, la complejidad de la enseñanza radica en que el curso previsto de la instrucción puede ser confundido por varios factores organizacionales tales como interrupciones y violaciones de las reglas de comportamiento en las distintas etapas de la lección (Doyle, 1986); respecto de ello, Corcoran (2008) agrega que entre las situaciones más visibles que emergen en la instrucción se encuentran aquellas descritas como "*contingentes*", en las que un profesor encuentra algo inesperado, que lo obliga a pensar *in situ.*

Una manera de reducir las sorpresas del profesor ante las contingencias en el aula, y tomar mejores decisiones, se asocia al conocimiento del profesor acerca del conocimiento matemático de los estudiantes, de los errores comunes y conceptos erróneos, y el conocimiento de las dificultades de estos (Ryan y Williams, 2007), así como también, al conocimiento matemático que aquel posea, pues le ofrece orientaciones para tomar decisiones en el momento que impulsan y guían la implementación de sus clases (Rowland y Zazkis, 2013).

Por otro lado, si bien la tarea del profesor de matemática apunta a generar conocimientos matemáticos o estadísticos por medio de la enseñanza, este también debe promover en sus estudiantes tanto el desarrollo del pensamiento matemático (Katagiri, 2004) o estadístico (Wild, y Pfannkuch, 1999), como el de actitudes matemáticas, tales como, dar explicaciones coherentes de los fenómenos naturales, utilizar una variedad de recursos intelectuales y sociales, comprender cómo justificar antes las observaciones de otros, cómo representar su pensamiento para comunicarlo, cómo criticar las ideas de otros de manera civilizada y productiva y revisar las suyas en respuesta a la evidencia y el argumento (Fennema, Franke, Carpenter y Carey, 1993; Hill, Rowan y Ball, 2005; Lee, 2007; Rosebery, Warren y Conant, 1992; Smith, Lee y Newmann, 2001). Las actitudes matemáticas de los estudiantes han sido asociadas a su compromiso con el aprendizaje de las matemáticas en el aula y responden a las reacciones afectivas que el profesor, las tareas y actividades matemáticas les evocan (Rokeach, 1968; Green 1971; McLeod 1992; Gómez-Chacón, 1997; Grootenboer y Marshman, 2016). En ese sentido, los afectos no forman parte de un fenómeno anecdótico del pensamiento y de la acción humana, debido a que cada vez se cuenta con más evidencias de cómo los estados emocionales interactúan con las funciones cognitivas (Gómez-Chacón, 2000).

Este trabajo busca caracterizar la Capacidad de Enseñanza del profesor de matemática identificando elementos que pone en juego un profesor en la implementación de una clase de estadística inicial, diseñada en el marco del Estudio de Clases, y la manera en que estos se articulan para dar funcionalidad a la clase y contribuir a la construcción de conocimiento estadístico del estudiante.

Desarrollo del estudio

Este estudio se enmarcó en un paradigma cualitativo, empleando como método de investigación la Teoría desde la Base (Glasser y Strauss, 1967; Strauss y Corbin, 1998).

La elección del enfoque de la Teoría desde la Base como método de investigación responde a la necesidad de comprender en profundidad la naturaleza de la capacidad de enseñanza del profesor de matemática desde la complejidad de las tareas profesionales de este, tomando en cuenta los múltiples factores que afectan su desempeño en aula. Se espera que la Teoría desde la Base permita levantar conceptos junto con sus propiedades, así como también hipótesis acerca de las relaciones entre dichos conceptos, y que facilite la construcción de una teoría de CEM desde los datos y sustentada en ellos.

Sujetos y contexto de la investigación

El caso en estudio es una docente de enseñanza básica que dicta una clase de estadística en un tercer grado a estudiantes sin conocimientos previos formales de la estadística, en una escuela particular subvencionada de la ciudad de Viña del Mar.

La clase fue diseñada en el contexto del estudio de clases por cuatro profesoras en el 2013, incluyendo a la docente que la implementa, y plantea a los alumnos el objetivo de *"organizar y clasificar para obtener información de nuestras colaciones".*

En la clase los estudiantes recibieron una hoja impresa con las colaciones que ellos mismos habían llevado a la escuela el día anterior, y se les planteó la pregunta ¿De qué manera podemos organizar y clasificar las colaciones para saber si estamos en riesgo de contraer enfermedades? Al término de la clase, los alumnos habían generado diversas representaciones estadísticas, y compartido con sus compañeros la información extraída de ellas, así como también la descripción de la suya y el correspondiente análisis.

Objetivos de la investigación

El objetivo de la investigación apunta a caracterizar la capacidad de enseñanza de una profesora, a partir de la identificación y descripción de los elementos que pone en juego en la enseñanza de la estadística, y la manera en que se articulan para dar funcionalidad a la clase y contribuir a la construcción de conocimientos estadísticos de sus estudiantes.

Codificación y Análisis de datos

La clase fue filmada y transcrita en su totalidad, además se incluyeron en la transcripción fotografías de distintos momentos que ayudaran a alcanzar una mejor comprensión de ella.

La codificación y análisis de los datos se realizó por medio del software Atlas.ti, y se ajustó al proceso de *"codificación abierta"* asociada al proceso de etiquetamiento, categorización y comparación entre dichas categorías mediante el proceso de Comparación Constante; al proceso de *"codificación axial de datos"* que consiste en crear un esquema conceptual identificando el tema principal y reduciendo el número de categorías; y al proceso de *"codificación selectiva"* relacionado con la delimitación de la teoría, y la definición de la categoría central, junto con las categorías que la apoyan así como las distintas relaciones que hay entre ellas.

Avances

Los avances que se presentarán se refieren tanto al proceso de análisis como a los resultados del proceso de codificación abierta y a los resultados iniciales del proceso de codificación axial.

Conclusiones

Los análisis preliminares muestran que en una situación de aula, la capacidad de enseñanza de un profesor posee entre sus componentes, por un lado, elementos que le permiten intencionalmente controlar reacciones afectivas hacia la estadística por medio de la modelación de las actitudes matemáticas del estudiantes, esto, diseñando y gestionando situaciones de enseñanza que estimulen al estudiante y lo comprometan con los datos y la tarea estadística presente en la situación; mientras que por otro lado muestra conocimientos y habilidades que le permiten intervenir durante la instrucción vigilando constantemente las reacciones afectivas de los estudiantes y el desarrollo su pensamiento estadístico.

Referencias

Chacón, I. (1997). Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social: Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas (tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España.

Corcoran, D. (2008). Developing mathematical knowledge for teaching: A three-tiered study of Irish pre-service primary teachers (PhD thesis). University of Cambridge, Cambridge.

Doyle, W. (1986). Classroom organization and management. In M. Wittrock (Ed.), Handbook of research on teaching (pp. 392 – 431). New York, NY: Macmillan.

Escudero, I., & Sánchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice?. The Journal of Mathematical Behavior, 26(4), 312-327.

Escudero, D., Flores, E., & Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Fennema, E., Franke, M., Carpenter, T., &Carey,D. (1993). Using children's mathematical knowledge in instruction. American educational research journal, 30(3), 555-583.

Glasser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). The development of grounded theory. Chicago, IL: Alden.Green, T. (1971). The activities of teaching. New York: McGraw-Hill.

Gómez-Chacón, I. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 43(2), 149-168.

Grootenboer, P., & Marshman, M. (2016). Mathematics, Affect and Learning. Springer.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S.(2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. Journal for research in mathematics education, 372-400.

Hill, H., Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. American Educational Research Journal, 42(2), 371–406.

Katagiri, S. (2004). Mathematical thinking and how to teach it. CRICED, University of Tsukuba.

Lee, C. (2007). The role of culture in academic literacies: Conducting our blooming in the midst of the whirlwind. New York: Teachers College Press.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 575–596). New York: Macmillan.

Rokeach, M. (1968). Beliefs, attitudes and values: A theory of organization and change.

Rosebery, A. S., Warren, B., & Conant, F. R. (1992). Appropriating scientific discourse: Findings from language minority classrooms. Journal of the Learning Sciences, 2(1), 61–94.

Rowland, T., & Zazkis, R. (2013). Contingency in the mathematics classroom: Opportunities taken and opportunities missed. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 13, 137 – 153. doi:10.1080/14926156.2013.784825

Ryan, J., & Williams, J. (2007). Children's mathematics 4 – 15: Learning from errors and misconceptions. Maidenhead: Open University Press.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching.Educational researcher, 15(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform.Harvard educational review, 57(1), 1-23.

Smith, J., Lee, V., & Newmann, F. (2001). Instruction and achievement in Chicago elementary schools. Chicago: Consortium on Chicago School Research, Chicago Annenberg Research Project.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory. Sage Publications, Inc.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International statistical review, 67(3), 223-248.

Una propuesta para evaluar el conocimiento de los profesores sobre diversificacion de la enseñanza

Camila Palma, Angela Castro y Ximena Oyarzo
Universidad Austral de Chile

Resumen

Presentamos parte de un estudio en curso, que tiene como objetivo determinar si los profesores de matemáticas de enseñanza media poseen los conocimientos necesarios para enfrentar adecuadamente el trabajo en un aula diversa e inclusiva. En concreto, presentamos parte de un instrumento que evalúa los conocimientos que poseen los profesores de matemática en torno a dos dimensiones: (i) diversidad en el aula y (ii) diversificación de la enseñanza. Considerando el concepto de diversidad como aquel que incluye las necesidades educativas especiales, la interculturalidad y los distintos niveles económicos de los estudiantes presentes en el aula, elaboramos un cuestionario de tipo mixto.

Palabras Clave: Conocimiento, diversidad, necesidades educativas especiales, inclusión, profesores de matemáticas.

ABSTRACT *We present a part of an ongoing study, which aims to determine if media mathematics teachers have the necessary knowledge to face work in a diverse and inclusive language. Specifically, we present the part of an instrument that assesses the knowledge that mathematics teachers have about two dimensions: (i) diversity in the classroom and (ii) diversification of teaching. Considering the concept of diversity as that which includes the special educational needs, interculturality and the economic components of the students present in the classroom, we elaborated a mixed questionnaire.*

Keywords: *Knowledge, diversity, special educational needs, inclusion, math teachers.*

Introducción

Desde la década del noventa se han puesto en marcha una serie de reformas, orientadas a mejorar dos aspectos críticos del sistema educacional chileno: la calidad y equidad de la educación .Velar por una educación de calidad y equitativa con oportunidades igualitarias, no solo conlleva tomar en cuenta las necesidades de la mayoría de los sujetos que participan de ella, sino, que aquella minoría que pertenece a distintas etnias, culturas, niveles socio-económicos, o que presenta alguna dificultad de aprendizaje, discapacidad o capacidad diferente también obtenga una respuesta educativa (Tenorio, 2005).

En este contexto, la Ley General de Educación consagró como principio que la educación debe ser garantizada a todos los niños, niñas, jóvenes y personas adultas, independientemente de sus condiciones y circunstancias (MINEDUC, 2016). En consecuencia, durante la última década se ha buscado mejorar el acceso a la educación regular y hacer parte de ella, a todos y todas. En esta línea, una de las medidas que ha sido adoptada por el Estado Chileno es el Programa de Integración Escolar (PIE). Este es un programa desarrollado por el Ministerio de Educación, que tiene como propósito fundamental atender a la diversidad de estudiantes presentes en el aula, equiparando las oportunidades de aquellos que presentan necesidades educativas especiales (NEE), y dando la posibilidad para que los establecimientos educacionales se comprometan con el progreso del aprendizaje de todos los niños, niñas y jóvenes (MINEDUC, 2009). Sin embargo, para hacer efectiva la educación a todos, y fortalecer el proceso de inclusión educativa, no sólo se requiere de programas, o solo de buena disposición y actitud hacia la diversidad por parte del profesorado, sino que también requiere de buenas prácticas pedagógicas (Pegalajar y Colmenero, 2017). Si bien desde hace algunos años se están desarrollando iniciativas que contribuyen a los profesores en formación a adquirir las competencias pedagógicas necesarias para desenvolverse en un aula diversa e inclusiva, ya sea incorporando asignaturas de este tipo en los programas actuales de formación inicial docente, u ofreciendo capacitaciones a los docentes en ejercicio; cabe preguntarse, si bajo la aplicación de la Ley de Inclusión, los profesores en ejercicio cuentan con los conocimientos necesarios para enfrentar la tarea de diseñar experiencias de aprendizaje para un aula inclusiva, aunque no hayan tenido una formación que los prepare para ello.

Formación del profesorado para la inclusión

La formación de un profesorado preparado para llevar a cabo el proceso de inclusión es uno de los factores más importantes para que este sea efectivo. Las escuelas no van a mejorar a menos que los profesores mejoren también su formación, pues estos son la clave y la base para el desarrollo de la escuela (Ainscow, Hopkins, Soutworth, West, 2008). Según Blanco (2006) las instituciones de formación docente deberían estar abiertas a la diversidad y formar docentes representativos de las distintas diferencias presentes en las escuelas; se les debería preparar para enseñar en diferentes contextos y realidades, sea cual sea el nivel educativo en el que se desempeñen. Deberían tener conocimientos teóricos y prácticos sobre las necesidades educativas más relevantes asociadas a las diferencias sociales, culturales e individuales. Esto requiere docentes preparados para asumir riesgos y probar nuevas formas de enseñanza. Docentes que sean reflexivos sobre su práctica, siendo capaces de transformarla y de trabajar colaborativamente con otros docentes, profesionales y familias. Se requiere que los profesores conozcan a sus alumnos y sean capaces de crear nuevas estrategias adaptando el currículo, planteando diferentes situaciones y actividades de aprendizaje para la diversidad de alumnos (Blanco, 2005).

En este contexto, durante el trascurso de los años se han desarrollado algunos estudios, a nivel nacional como internacional, orientados a analizar las actitudes del profesorado hacia las NEE y la inclusión (e.g. Chinner, 2011; Granada, Pomés, y Sanhueza, 2013; Pegalajar y Colmenero, 2017; Sánchez, Díaz, Sanhueza y Friz, 2008; entre otros). Estos estudios, dejan en evidencia que los profesores sienten no tener la formación necesaria para atender a la diversidad del alumnado presente en el aula. A pesar de que la mayoría de los profesores encuestados en dichos estudios, demuestra la mayoría una buena actitud hacia la inclusión educativa, más del 50% de los profesores encuestados afirma no poseer la formación que se requiere para atender y adecuar la enseñanza a estudiantes con NEE.

El cuestionario

El presente estudio se enmarca en una investigación de tipo mixta, la cual nos permite integrar, en un mismo estudio, metodologías cuantitativas y cualitativas, con el propósito de que exista mayor comprensión acerca del objeto de estudio, obteniendo una perspectiva más amplia y completa del fenómeno (Creswell, 2009).

Para recoger los datos elaboramos un cuestionario, que tiene como objetivo determinar los conocimientos que poseen los profesores de matemática sobre diversidad y la diversificación de la enseñanza para el trabajo en un aula diversa e inclusiva. Para ello, consideramos, el concepto de diversificación como la enseñanza para todos, es decir, para alumnos con talentos excepcionales, alumnos que presentan barreras para aprender y participar, aquellos con necesidades educativas especiales (NEE) y alumnos que son de distintas culturas y niveles socioeconómicos. Elaboramos el instrumento tomando como base el Marco para la Buena Enseñanza, el Diseño Universal de Aprendizaje y principalmente el Decreto N° 83/2015 de Adecuación curricular. El cuestionario fue validado por expertos, por el método de agregados individuales, en el cual se pidió individualmente a cada experto que dé una estimación directa de los ítems del instrumento (Corral, 2008).

El cuestionario está conformado de 17 preguntas de tipo cerradas con respuestas de tipo SI, NO y NO SÉ; y 7 preguntas de respuestas tipo abiertas que evalúan distintos aspectos del conocimiento de diversidad y la diversificación de la enseñanza. Respecto al conocimiento de la diversidad, en el cuestionario encontramos 7 preguntas de tipo cerradas y 2 preguntas de tipo abiertas, y respecto a la diversificación de la enseñanza, encontramos 10 preguntas de tipo cerradas y 4 preguntas de tipo abiertas. La Tabla 1, presenta un extracto de las preguntas incluidas en el cuestionario.

Tabla 1: Ejemplos de preguntas que evalúan el conocimiento de los profesores de matemáticas para trabajar en un aula inclusiva.

Dimensión	Descripción	Ejemplo de preguntas
Conocimiento de la diversidad en el aula	Esta dimensión apunta al conocimiento que tienen los docentes sobre la diversidad, las NEE y principalmente sobre los estudiantes que se encuentran dentro de la sala de clases y las necesidades que estos presentan.	(Cerrada) 3. El programa PIE es el único responsable de equiparar las oportunidades de aquellos estudiantes que presentan NEE. Tipo de respuesta: SI/NO/NO SÉ (Cerrada)

Dimensión	Descripción	Ejemplo de preguntas
		(Cerrada) 10. Un alumno que presenta altas capacidades requiere menos atención que los demás alumnos que tienen un desempeño regular, puesto que trabaja de manera autónoma y no necesita mayor supervisión. Tipo de respuesta: SI/NO/NO SÉ
Conocimiento de la diversificación de la enseñanza	Esta dimensión apunta al conocimiento que posee el docente sobre cómo considera que debe enseñar para todos.	(Cerrada) 11. Existe una única forma de presentación de los contenidos matemáticos que es óptima para todos los alumnos, esta es la de tipo simbólica, puesto que es la que todos pueden entender, y otorga mejores resultados. Tipo de respuesta: SI/NO/NO SÉ (Abierta) 18. ¿Qué estrategias utiliza usted en sus clases para que sus alumnos puedan demostrar lo que saben? Tipo de respuesta: argumentación

Fuente: Elaboración propia

Comentarios finales

El poseer conocimientos acerca de la diversidad actualmente más que un requisito es una necesidad. Cada vez nos enfrentaremos a una mayor diversidad de estudiantes en la sala de clases, los cuales merecen ser incluidos, sea cual sea su circunstancia o condición. La capacitación de los profesores en temas de NEE, metodologías inclusivas y evaluación para todos y todas, son necesarios para poder cumplir con las políticas nacionales e internacionales en temas de inclusión (Flores y Hernández, 2017). En este sentido el estudio que presentamos, por una parte, pretende ofrecer un instrumento que promueva la reflexión entre los profesores sobre la importancia de poseer estos conocimientos, y sobre la necesidad de ampliar constantemente los conocimientos que ya se poseen, puesto que la formación de docentes para la inclusión va más allá de la formación inicial, y se requieren capacitaciones de formación continua que adecuen al docente a las necesidades actuales del aula. Por otra parte, ofrece una herramienta para que los formadores de profesores puedan ver el foco en aquellos aspectos en los que se debe enfatizar durante el proceso formativo. Una adecuada preparación de los profesores sobre diversidad y diversificación podría lograr una inclusión educativa exitosa, y ofrecer educación de calidad a todos sus estudiantes.

Referencias

Ainscow, M., Hopkins, D., Soutworth, G., & West, M. (2008). Hacia escuelas eficaces para todos (2). Madrid: Narcea S.A.

Blanco, R. (2005). Los docentes y el desarrollo de escuelas inclusivas. Revista PRELAC, 1(1), 174-177.

Blanco, R. (2006). La Equidad y la Inclusión Social: Uno de los Desafíos de la Educación y la Escuela Hoy REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 4(3), pp. 1-15

Chiner, E. (2011). Las percepciones y actitudes del profesorado hacia la inclusión del alumnado con necesidades educativas especiales como indicadores de uso de práctica educativas inclusivas en el aula. Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Corral Y. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos. Revista Ciencias de la Educación, 19(33), 228-247.

Creswell, J. W. (2009). Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches, 3rd ed. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Flores, D., & Hernández, C. (2017). Capacitación Profesional Docente: Realidades de la Educación Inclusiva/Professional Teacher Training: Realities of Inclusive Education. Cuaderno de Pedagogía Universitaria, 13(26).

Granada, M., Pomés, M., y Sanhueza, S. (2013). Actitud de los profesores hacia la inclusión educativa. Papeles de trabajo del Centro de Estudios Interdisciplinarios en Etnolingüística y Antropología Sociocultural, (25) Recuperado en 30 de junio de 2017, de http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1852450820130001000003&lng=es&tlng=e.

MINEDUC. (2009). Programa de Integración Escolar PIE: Manual de orientaciones y apoyo a la gestión (directores y Sostenedores). Santiago: MINEDUC

MINEDUC. (2015). Diversificación de la enseñanza. Decreto n°83/2015. Santiago: Gobierno de Chile.

MINEDUC. (2016). La Reforma Educacional está en marcha: tu sueño, nuestro propósito.Cuenta Pública 2015(1).

Pegalajar, M. y Colmenero, M. (2017). Actitudes y formación docente hacia la inclusión en Educación Secundaria Obligatoria. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 19(1), 84-97.

Sánchez, A., Díaz, C., Sanhueza, S., & Friz, M. (2008). Percepciones y actitudes de los estudiantes de pedagogía hacia la inclusión educativa. Estudios pedagógicos, XXXIV(2), 169-178.

Tenorio, S. (2005). La integración escolar en Chile: Perspectiva de los docentes sobre su implementación. Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación (REICE), 3(1), 823-83. Consultada 30 de junio de 2017. En: http://www.ice.deusto.es/RINACE/reice/Vol3n1_e/Tenorio.pdf [Links]

Lógicas y prácticas institucionales: desafíos para la formación de profesores de matemática

Patricio Montero Lagos[1], Claudia Montero-Liberona[2], Rogelio Riquelme Sanfeliu[1]
Universidad de Santiago de Chile[1], Pontificia Universidad Católica de Chile[2]

Resumen

La formación de profesores debe responder a la heterogeneidad de los establecimientos educacionales que componen el sistema educativo nacional. Esta heterogeneidad se sustenta en una variedad de lógicas institucionales presentes en los establecimientos escolares, las que a su vez, afectan las prácticas organizacionales del trabajo institucionalizado del profesor de matemática. En esta presentación se abordan fuentes externas e internas que afectan las lógicas institucionales de los colegios; los resultados alertan de la complejidad de contar con una formación y desarrollo profesional institucionalizado en colegios heterogéneos, concordantes con la expectativa de contar con un trabajo del profesor de matemática eficaz para el aprendizaje de todos sus estudiantes

Palabras Clave: Lógica institucional, trabajo institucionalizado, formación de profesores de matemática, desarrollo profesional docente.

Introducción

Las lógicas institucionales son entendidas como construcciones sociales creadas *"en base a patrones históricos de prácticas materiales, supuestos, valores, creencias y normas por las que los individuos producen y reproducen su subsistencia material, organizan el tiempo y el espacio, y proporcionan un sentido a su realidad social"* (Thornton y Ocasio, 2008, p. 101). Desde la óptica de la Teoría Institucional (TI), en el sistema social de las organizaciones existen *"procesos sociales, obligaciones o realidades que llegan a ser asumidas o dadas por hecho mediante el status de reglas a través del pensamiento social o de la acción"* (Greenwood et al., 2008, p. 5). De esta forma, cualquier norma, regla, práctica, creencia, actitud o elemento se institucionaliza una vez que es asumido o considerado por los miembros de la organización como normal, al convertirse en parte de sus rutinas diarias.

Por su parte, el trabajo institucionalizado se refiere a *"(...) la acción intencional de los individuos y las organizaciones destinadas a crear, mantener y alterar las instituciones"* (Lawrence, Suddaby y Leca, 2009, p. 1). Comprende prácticas organizacionales como un puente entre los esfuerzos reflexivos y propositivos de las personas y los esfuerzos de las instituciones encarnados en arreglos de la actividad humana

(Hampel, Lawrence y Tracey, 2017). Las prácticas en una organización se sustentan en *"mitos racionales y ceremonias"* (Meyer y Rowan, 1977), que Lammers y Barbour (2006) definen como *"(...) reglas institucionales... con los cuales las organizaciones incorporan para ganar legitimidad, recursos, estabilidad y mejores perspectivas de supervivencia"* (p. 340). Consecuentemente, el trabajo institucionalizado del profesor de matemática junto con satisfacer regulaciones del medio externo al establecimiento escolar, que afectan su lógica institucional, también debe cumplir con reglas y procedimientos organizacionales vinculados a sus propios mitos y ceremonias, que dan cuenta de la heterogeneidad del trabajo institucionalizado del profesor.

Este trabajo indaga sobre algunos desafíos para la formación de profesores de matemática sobre la base de antecedentes vinculados a las lógicas institucionales de colegios y su trabajo institucionalizado. A continuación se presentan antecedentes externos de las instituciones que afectan la lógica institucional y el trabajo institucionalizado del profesor de matemática, y posteriormente, algunos factores internos de los establecimientos que ilustran su variedad.

Desarrollo

En esta indagación se recopilaron antecedentes del marco regulatorio y documentos de cuatro establecimientos educacionales, cada uno de diferente tipo de administración: particular pagado, administración delegada, particular subvencionado y municipal de la Región Metropolitana. Particularmente, en el análisis de las regulaciones a los colegios que afectan el trabajo institucionalizado del profesor de matemática se consideraron componentes del marco regulatorio nacional y, desde la perspectiva interna, documentos institucionales que afectan las practicas organizacionales de los establecimientos escolares, las que fueron complementados con información proporcionada por ocho profesores de matemática.

En el marco regulatorio nacional se encuentra: la Ley General de Educación (Ley Nº 20.370 de 2009) estableciendo los derechos y deberes de los profesionales de la educación; las bases curriculares (Decreto N°439 de 2012 y N°614 de 2014, del MINEDUC) que dirigen la labor del profesor respecto a su contribución al logro de una base cultural común para todo el país estableciendo los aprendizajes obligatorios comunes para todos los estudiantes, siendo los referentes para los programas de estudios y evaluaciones del SIMCE, la ley sobre el Estatuto Docente (Ley 19.070 de 1996) que define la autonomía y responsabilidad profesionales y, el Marco de la Buena Enseñanza que identifica el conjunto de responsabilidades en el aula y en el colegio que debe asumir un profesor en el desarrollo de su trabajo cotidiano..

La reciente Ley No 20.903 del año 2016 que crea el Sistema de Desarrollo Profesional Docente, junto con asignarles responsabilidad a los profesionales de la educación de su avance en el desarrollo profesional, establece requerimientos para la formación inicial y distingue niveles de experticia para dicho desarrollo profesional. Entre otras, para la formación inicial se mencionan estándares pedagógicos, criterios de acreditación y, pruebas de diagnóstico. En el desarrollo profesional, se distinguen cinco niveles (inicial, temprano, avanzado, experto I y experto II) de acuerdo al logro de un determinado nivel de competencias y habilidades profesionales, cuyo reconocimiento los habilita a percibir asignaciones, avanzar en su desarrollo profesional y asumir crecientes responsabilidades en el establecimiento, de conformidad con la ley. Por ejemplo, un profesor avanzado ha logrado el nivel esperado de consolidación de sus competencias profesionales de acuerdo a los criterios señalados en el Marco para la Buena Enseñanza,(…) demostrando una especial capacidad para lograr aprendizajes de todos sus estudiantes de acuerdo a las necesidades de cada uno (Ministerio de Educación, Ley 20903, 2016). Además, el puede *"hacer una reflexión profunda sobre su práctica y asumir progresivamente nuevas responsabilidades profesionales relacionadas con el acompañamiento y liderazgo pedagógico a docentes del tramo profesional inicial y con los planes de mejoramiento escolar. En esta etapa, el docente profundiza su desarrollo profesional y actualiza constantemente sus conocimientos"* (Ministerio de Educación, Ley 20903, 2016).

En concordancia con las fuerzas externas y particularidades internas, cada establecimiento educativo tiene su propia misión, enfoques, regulaciones, mitos y ceremonias y condiciones de infraestructura que afectan la institucionalización del trabajo del profesor de matemática. Tiene un proyecto educativo, un manual de convivencia y un plan de mejora o estratégico de desarrollo que afectan la estructura organizacional, reglas, rutinas y/o prácticas impactando los deberes y obligaciones de los miembros del colegio. Estos componentes afectan tanto los resultados de aprendizajes esperados, sus procesos, formas de evaluación y relaciones interpersonales, aspectos que estuvo presente en las entrevistas de los profesores.

Entre otros, en algunos colegios el trabajo del profesor institucionalizado está dirigido a cubrir todos los contenidos matemáticos de los programas y a que los estudiantes tengan buenos rendimientos en las pruebas estandarizas, mientras que en otros, está focalizado en que los estudiantes desarrollen habilidades, usando los conocimientos matemáticos en profundidad y con significado para el alumno. En algunos colegios el trabajo institucionalizado responde a un proyecto educativo sustentado por un enfoque humanista, mientras en otros, se hace desde una perspectiva constructivista o sociológica..

Reflexiones

Considerando que el trabajo institucionalizado del profesor de matemática cambia significativamente entre colegios y que los niveles de experticia de la ley, dependen fuertemente de las experiencias situadas de cada docente ¿Es posible validar estándares nacionales eficaces para el aprendizaje de todos sus alumnos que comuniquen y justifiquen con precisión las diferencias entre los niveles de experticia del profesor de matemática considerados en la ley? Más aún, reconociendo que vinculado a la experiencia previa cada profesor de matemática elabora una teoría implícita para la enseñanza aprendizajes de sus estudiantes ¿Cómo se conciliarán en los estándares de formación y desarrollo docente los conocimientos explícitos y los implícitos que deben ser movilizados, combinados y utilizados para la actuación competente en cada uno de los niveles?

Avances

Estos antecedentes forman parte de un Proyecto de Innovación de la Docencia de la USACH en que se estudian la lógica institucional de los colegios y la práctica profesional de la Carrera de Pedagogía en Matemática y Computación. Ellos confirman la complejidad de la formación y del desarrollo profesional del profesor y alertan en relación a la reciente ley, respecto a que la experiencia no necesariamente contribuye a que el profesor experimentado logre la expectativa de poder atender eficazmente a todos sus estudiantes.

Conclusiones

Este trabajo contribuye con antecedentes que deben ser profundizados para evitar que aspectos centrales de la nueva ley se transformen solo en declaraciones de principios con muy limitados efectos en la concreción en la institucionalización del trabajo del profesor de matemática y en sus teorías implícitas que guían su labor docente profesional.

Referencias

Greenwood, R., Oliver, C., Sahlin, K., y Suddaby, R. (2008). Introduction. The Sage Handbook of Organizational Institutionalism.

Lammers, J. C., y Barbour, J. B. (2006). An institutional theory of organizational communication. Communication Theory, 16(3), 356-377.

Lawrence, T., Hampel, C. E., Tracey, P., Greenwood, R., y Oliver, C. (2017). Institutional work: taking stock and making it matter. The Sage Handbook of Organizational Institutionalism. Second Edition.

Lawrence, T. B., Suddaby, R., y Leca, B. (2009). Institutional work: Actors and Agency in Institutional Studies of Organizations. Cambridge University Press.

Meyer, J. W., y Rowan, B. (1977). Institutionalized organizations: Formal structure as myth and ceremony. American Journal of Sociology, 83(2), 340-363.

Ministerio de Educación, Ley 20903 (2016). Crea el Sistema de Desarrollo Profesional Docente y Modifica Otras Normas. Artículo 19C.

Thornton, P. H., y Ocasio, W. (2008). Institutional logics. The Sage handbook of organizational institutionalism, 840, 99-128.

Modelación matemática en la formación inicial de profesores de educación secundaria

María Aravena Díaz
Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Básicas
Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. CIEMAE
Universidad Católica del Maule. Talca, Chile.

Resumen

El estudio se enfoca en la formación inicial de profesores de matemática donde se diseña una propuesta que aborda problemas de modelación matemática, tomando como base la teoría de la actividad (Davidov, 1998) y las propuestas que dan cuenta que esta metodología de trabajo permite desarrollar habilidades que son crecientemente valiosas para el siglo 21 (Niss, 1989,2011; Blum & Borromeo, 2009; Aravena, 2016). La metodología utilizada es de corte mixto, para lo cual se levantaron categorías de análisis para evaluar el trabajo matemático basado en problemas que involucran ciclos de modelación. La muestra cuenta de 40 estudiantes distribuidos en 11 grupos de trabajo de un curso de tercer año en el contexto de sus prácticas tempranas. A nivel de resultados los grupos desarrollan habilidades para utilizar los conceptos y métodos en la descripción de fenómenos científicos y sociales, comunicación argumentativa de los procesos y resultados y análisis crítico de rol de la matemática en la sociedad.

Palabras Clave: Modelación matemática, formación de profesores, procesos de modelación

ABSTRACT *The study focuses on the initial training of mathematics teachers where a proposal is designed that addresses problems of mathematical modeling, based on the theory of activity (Davidov, 1998) and the proposals that show that this work methodology allows to develop skills that are increasingly valuable for the 21st century (Niss,1989,2011; Blum & Borromeo, 2009; Aravena, 2016) .The methodology used is mixed-cut, for which analysis categories were created to evaluate the mathematical work based on problems involving modeling cycles The sample has 40 students divided into 11 work groups of a third year course in the context of their early practices.At the level of results it is observed that the groups develop skills to use the concepts and methods in the description of scientific and social phenomena, argumentative communication of processes and results and critical analysis of the role of mathematics in society.*

Keywords: *Mathematical modeling, teacher training, modeling processes.*

Introducción

El estudio se enfoca en la modelación

matemática en la formación inicial de profesores de secundaria, como una metodología que ha resultado exitosa en diversos países. Las bases teóricas en los cuales se enmarca la propuesta considera diversos estudios que han sido referentes para el diseño, implementación y evaluación, tomando como base la teoría de la actividad y unos principios matemático-didácticos que ayuden a fomentar en los alumnos el desarrollo de habilidades y competencias globalizadoras que son crecientemente valiosas en el siglo 21 (Niss, 1989;Davidov, 1998; Aravena & Caamaño, 2007; Gómez, 2007; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008; Niss, 2011; Aravena, 2016). Además, se consideraron los informes de OCDE (2004) que atribuyen a la formación inicial de profesores, parte importante de la responsabilidad en los resultados educativos, llamando la atención la existencia de debilidades, entre los contenidos disciplinares y las metodologías que los profesores utilizan en la sala de clases, concentrando la mayor atención en la poca capacidad de innovación de los formadores de formadores (Latorre, 2004) y OCDE(2009) que da cuenta de que a pesar de los esfuerzos que las instituciones de educación superior han hecho por acreditar sus programas, no hay evidencia empírica que estos esfuerzos hayan producido un mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El informe recomienda la necesidad de mejorar la formación de profesores, ya que los alumnos que ingresan a la educación superior no traen las competencias suficientes para enfrentar los cursos universitarios, si se quiere incidir en la enseñanza de los alumnos para disminuir la brecha de inequidad en el sistema educativo chileno.

Metodología

La metodología utilizada es de corte mixto; en este estudio se presenta el análisis cuantitativo, donde se realizó un examen descriptivo interpretativo, para lo cual se levantaron categorías de análisis que permitieron evaluar el trabajo matemático basado en problemas que involucran ciclos de modelación (Maaß, 2006; Blum & Borromeo 2009;Aravena, 2016): Categoría 1: Simplificación del problema, que comprende la interpretación del problema, el supuesto de diversas hipótesis, condiciones y restricciones; Categoría 2: Nivel de Matematización, referido a las relaciones matemáticas que interpretan los procesos; Categoría 3: verificación y validación, referidos a reestudiar los resultados numéricos, márgenes de error, predicción; Categoría 4. Análisis y proyección, que comprende fortalezas y debilidades del modelo, posibles generalizaciones y Categoría 5: Comunicación y argumentación matemática, hace referencia a la comunicación y argumentación de procesos, métodos, estrategias y resultados, dar respuesta al problema real y estudio de las condiciones.

ALUMNO(A): (1) ____________________________

Ciclo de modelación	criterios	1	2	3	4	5	observación
SIMPLIFICACIÓN DEL PROBLEMA.	Interpretación de datos, condiciones y restricciones						
	Supuesto de diversas hipótesis						
	Situación fragmentada o despreciable (deja de lado algunos supuestos para modelar)						
	Utiliza sistemas de representación (gráfica, tablas, expresión algebraica)						
	Reconoce la variables que intervienen (dependiente e independiente						
	Busca similitud con el mundo matemático						

NIVEL DE MATEMATIZACIÓN	Describe relaciones matemáticas Coloca las ecuaciones matemáticas en juego (que le permite modelar)						
	Utiliza simbología matemática						
	Aplica propiedades y algoritmos						
	Realiza ajuste de datos como una aproximación para interpretar los datos del problema						
	Formula el modelo en términos matemáticos						

Fig.1. Ejemplo de los criterios evaluados en la simplificación y nivel de matematización.

Ciclo de modelación	**Codificación de criterios**			
	2: insuficiente	3: suficiente	4: competente	5: destacado
Simplificación				Identifica condiciones y restricciones
Matematización	Presenta procesos errados			
Interpretación de la solución		Calcula margen de error para algunos datos		
Verificación y validación			Valida el modelo con nuevos datos	
Análisis y proyección				Identifica fortalezas y debilidades. Generaliza el modelo
Comunicación y argumentación	Argumentos inconsistentes			

Fig. 2. Ejemplo de rúbrica con la codificación de algunos criterios del ciclo.

La muestra fue de 40 estudiantes distribuidos en 11 grupos de trabajo y se seleccionó de manera intencionada, en el contexto de un curso de tercer año en la asignatura de Didáctica del Álgebra y la Geometría que enfrenta una de sus prácticas tempranas. El experimento se llevó a cabo durante el segundo semestre de 2017.

Resultados

A nivel de resultados, se observa en la Tabla 1 que de los 11 grupos 2 se encuentran en destacados, esto es, completan el ciclo de modelación (Maaß, 2006; Aravena, 2016) dando respuesta a cada uno de los indicadores en un nivel alto de dominio de la competencia; 6 de los grupos se encuentran en el rango de competente, esto es, a pesar de superar el rango mínimo, poseen dificultades en justificar la validez del modelo, estudio de las fortalezas y limitaciones, generalización del modelo para situaciones similares; 3 grupos se encuentran en el rango de suficiente, presentando un nivel mínimo en el dominio de la competencia, donde las principales deficiencias se encuentran en la verificación y validación, generalización del modelo y en la comunicación y argumentación de los procesos, métodos y resultados que dificultan dar respuesta al problema real.

Grupo	Rango de puntaje en el indicador	Dominio de la competencia
G1	4-5	Destacado
G2	3-5	Competente
G3	2-5	Suficiente
G4	3-5	Competente
G5	3-5	Competente
G6	2-5	Suficiente
G7	4-5	Competente
G8	2-5	Suficiente
G9	3-5	Competente
G10	3-5	Competente
G11	4-5	Destacado

Tabla 1. Resultados de los grupos con rangos de puntaje y dominio de la competencia.

Conclusiones

Dentro de las bondades de este tipo de trabajo destacamos que los grupos se enfrentan a problemas en contextos reales, valorando el rol de la matemática para resolver problemas tanto de las ciencias naturales como sociales. Permite que los alumnos investiguen el contexto de los problemas, desarrollando la capacidad comunicativa del lenguaje científico y mediante el estudio de los fenómenos generen una sensibilidad por el cuidado del medio ambiente y de su entorno, por las formas de desarrollo científico y el uso de las nuevas tecnologías, mediante una toma de conciencia de las implicaciones sociales. Desde el punto de vista formativo ayuda a la discusión de ideas, toma de decisiones y a la autonomía para enfrentar problemas nuevos que estimula la capacidad creativa, motor del desarrollo de los problemas locales y globales. Esta forma de trabajo matemático, en equipo y colaborativo, es un desafío actual en la formación de profesores de matemática y aunque no podemos extrapolar resultados por el tamaño de las muestra, nos permite conjeturar que puede ser beneficioso y prometedor para dar respuesta a las sugerencias de OCDE (2009) de cambiar los sistemas imperantes en la enseñanza de los alumnos del sistema educativo.

Referencias

Aravena, M.; Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca-Chile. Revista Estudios Pedagógicos. 33, 7-25

Aravena, M; Caamaño, C. & Giménez J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos., Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 11(1), 49-92.

Aravena, M. (2016). Modelización matemática e Chile. En Arrieta, J y Díaz L.(eds.). Investigaciones Latinoamericanas. Barcelona. Gedisa. pp.195-234

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?.Journal of Mathematical Modelling and Application, 1 (1), 45-58.

Davydov, V. (1998). The Concept of Development Teaching. Journal of Russian and East European Psychology. Sharpe Inc: New York

Gómez, J. (2007). La matemática reflejo de la realidad. La modelización matemática como herramienta para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. FESPM. Badajoz. España.

Latorre M. (2004). Aportes para el análisis de las racionalidades presentes en las prácticas pedagógicas. Estudios pedagógicos (Valdivia), (30), 75-91.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? ZDM, 38(2), 113-142.

Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modeling in mathematics curricula. En: W. Blum et al. (Eds.): Applications and modeling in learning and teaching mathematics (22-31). Chichester: Ellis Horwood.

Niss, M. (2011). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education.Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 6. Número 9. pp 13-24. Costa Rica.

OCDE (2004). Informe Revisión de Políticas nacionales de educación. Chile. Recuperado de http://www.scribd.com/doc/19341515/OCDE-Informe-Chile-2004

OCDE y BIRD/Banco Mundial (2009). La Educación Superior en Chile. Revisión de Políticas Nacionales de Educación. Recuperado de: http://www.oecd-ilibrary.org/education/la-educacion-superior-en-chile_9789264054189-es

Innovación curricular: Asignatura de desarrollo pensamiento lógico a seís años de su implementación, escuela de auditoria universidad de valparaíso

Roberto Araya Luan, Víctor Vilches Contreras
Universidad de Valparaíso, Chile.

Resumen

Han transcurridos 6 años desde que la Universidad de Valparaíso se propuso replantearse su modelo educativo, dejando atrás un modelo centrado en la enseñanza de contenidos a otro modelo centrado en el aprendizaje (orientado por competencias), lo que ha implicado, además de buscar las condiciones para que dichos aprendizajes se produzcan; que el profesor pase de ser un actor principal del proceso de enseñanza a un facilitador, guía, mediador y orientador del proceso. *El modelo educativo orientado por competencias adopta un enfoque centrado en la adquisición de saberes, expresados en un conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes que obliga a implementar metodologías, estrategias y técnicas que conduzcan a un aprendizaje significativo por parte los estudiantes (Universidad de Valparaíso, boletín 2013).*

"La educación superior tiene que adaptar sus estructuras y métodos de enseñanza a las nuevas necesidades. Se trata de pasar de un paradigma centrado en la enseñanza a otro centrado en el aprendizaje y el desarrollo de competencias transferibles a contextos diferentes en el tiempo y en el espacio" (UNESCO, 1998).

Alineándose con este modelo, la Escuela de Auditoria reestructuró su currículo en términos de programa, malla curricular; así como hizo un replanteamiento del perfil de egreso que se adaptara a las nuevas necesidades del mundo social y laboral actual. Dentro de las medidas adoptadas se implementó la asignatura de Desarrollo del Pensamiento Lógico Matemático como única asignatura de matemáticas del primer semestre de la carrera, cuyo objetivo era proporcionar a los alumnos que se iniciaban en la Carrera de Auditoria un conjunto de conocimientos y experiencias que le permitieran reestructurar cognoscitiva y conceptualmente su aprendizaje matemático previo, mediante la implementación de actividades y estrategias que favorecieran el razonamiento, el desarrollo de habilidades y destrezas para afrontar con éxito las asignaturas de matemáticas posteriores (disminuir la tasa de reprobación existente) y, en general, su formación académica y su desenvolvimiento futuro, tanto en el mundo laboral como en su vida diaria.

Este trabajo pretende dar cuenta de cómo esta asignatura ha sido implementada, de los logros y avances de los alumnos en términos de aprendizaje y lo transversal que han sido a otras asignaturas.

Palabras Clave: Modelo educativo, innovación, aprendizaje, competencias, situaciones problemas

ABSTRACT Six years have passed since the University of Valparaíso set out to rethink its educational model, leaving behind a model focused on teaching content to another model focused on learning (oriented by competencies), which has involved, besides seeking the conditions so that these learnings are produced, that the teacher passes from a main actor of the teaching process to a facilitator, guide, mediator and counselor of the process. *The competency-oriented educational model adopts an approach on the acquisition of knowledge, expressed in a set of knowledge, skills and attitudes that requires the implementation of methodologies, strategies and techniques that lead to significant learning by students (Universidad de Valparaíso, 2013).*

"Higher education has to adapt its teaching structures and methods to new needs. The idea is to move from a paradigm centered on teaching to another centered on learning and the development of transferable skills to different contexts in time and space "(UNESCO, 1998).

Aligning itself with this model, the School of Audit restructured its curriculum in terms of program, curriculum; as well as a rethinking of the graduation profile that will adapt to the new needs of the current social and labor world. Within the adopted measures, the subject Mathematical Logical Thinking Development was implemented as the only subject of mathematics in the first semester of the career, whose objective was to provide students who started in the Audit Course with a set of knowledge and experiences that would allowed them to restructure cognitively and conceptually their previous mathematical learning, through the implementation of activities and strategies that favored reasoning, the development of skills and abilities to successfully deal with subsequent mathematics subjects (decreasing the existing rate of failure) and in general their training academic and its future development, both in the workplace and in their daily lives.

This work intends to give an account of how this subject has been implemented, the achievements and advances of the students of promotion in promotion in terms of learning and the transversality it has been to other subjects.

Introducción

Las medidas adoptadas por la Dirección de la Carrera asesoradas por el Comité de Innovación Curricular (CIC) y por el Centro de Desarrollo Docente de la universidad (CDD) en la implementación de la asignatura de Desarrollo del Pensamiento Lógico Matemático, durante el primer semestre como única asignatura de matemáticas, se basaron fundamentalmente en que la gran mayoría de los alumnos que ingresaban a la Educación Superior (en particular a la Universidad de Valparaíso y específicamente a la Carrera de Auditoria Campus las Heras Valparaíso y Campus San Miguel Santiago), presentaban serias deficiencias a nivel cognitivo, pues en las asignaturas de Matemáticas iniciales se manifestaban errores tanto conceptuales como operacionales, con conocimientos previos insuficientes y erróneos; peor aún, estos eran internalizados como verdades absolutas. Pese a que un gran número de ellos asimilaba los nuevos contenidos en lo que se refiere a la parte procedimental, la falencia en la compresión y análisis de dichos contenidos u objetos matemáticos, así como sus propiedades y aplicaciones, quedaba de manifiesto al momento de enfrentarse a una cierta situación problema que requería de un análisis, planteamiento, interpretación y comunicación de resultados; todo esto debido fundamentalmente a una serie de factores dentro de los cuales se destacaban: *carencia y concepciones erróneas de ciertos contenidos matemáticos elementales, falta de hábitos de estudios y la falta de una actitud hacia el aprendizaje continuo.* Lamentablemente su aprendizaje matemático había estado orientado a la reproducción de ciertas formulas y procedimientos que en nada contribuían a un desarrollo de habilidades cognitivas y a un incremento de su pensamiento creativo; lo que constituía un obstáculo al enfrentarse a ciertas situaciones problemas que requieren de análisis y razonamiento deductivo. Esta problemática no solamente se presentaba en las asignaturas de matemáticas sino también en asignaturas como Contabilidad y Administración. Los conocimientos insuficientes, "errores", no eran superados por los alumnos transformándose en un obstáculo para la generación de nuevos aprendizajes y conducían irremediablemente al fracaso académico (Araya y Vilches, XVIII Jornadas de Educación Matemática, Usach 2014).

"Si los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, hemos de concluir que en el proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y por tanto el proceso mencionado de construcción, deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones". Rico, 1995

El proyecto de implementación de la asignatura citada fue consensuado por un equipo multidisciplinario (expertos en currículo, evaluación; psicólogos y profesores del área), cuya primera tarea fue dar respuesta a una serie de interrogantes como: ¿Qué es una competencia?, ¿Qué es una competencia matemática?, ¿Qué significa ser competente en matemática?, ¿Cómo evaluar una competencia matemática?. Al hacer un análisis comparativo de las definiciones de competencia que aparecen en distintos documentos, podemos destacar:

"La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" (Informe PISA 2006). Esta definición permite identificar una serie de Subcompetencias que en alguna medida puedan facilitar el diseño de actividades con problemas no rutinarios o situaciones problemas contextualizadas y de su correspondiente evaluación. En todo caso, independiente de la definición que se adopte de competencias matemáticas debemos tener claro que *"Las competencias matemáticas son un requisito esencial en la preparación, tanto de un ciudadano informado como en la de personal calificado requerido por la industria, la ciencia y la tecnología" (Travers 1991).*

Desarrollo

Marco Teórico

Este proyecto de implementación de la

asignatura citada, se enmarcó dentro de la Teoría de las Situaciones Didácticas propuesta por Guy Brousseau como un modelo de los procesos de aprendizajes y de enseñanza. Teniendo como hipótesis que: *las conceptualizaciones fundamentales para el aprendizaje son las que surgen de la acción al abordar situaciones problemas.* De ahí que el objetivo general que se propuso fue la construcción de nuevas situaciones didácticas (problemas no rutinarios) para el logro de los aprendizajes de ciertos contenidos matemáticos como Lógica, Conjuntos, Modelación de funciones (incluidos en el Programa), dichas situaciones fueron enfocadas desde un paradigma constructivista que genera espacios para que los alumnos accionen, reflexionen, comuniquen, verifiquen y justifiquen sus estrategias de resolución, permitiendo gestar instancias para aplicar diferentes formas de *evaluaciones de las cuales ellos puedan ser partícipe.* Dichas actividades permiten desarrollar en los alumnos diferentes competencias tales como: Comprensión de los conceptos matemáticos tratados, que permitan el logro de aptitudes de abstracción y de razonamiento deductivo; diseñar, desarrollar e implementar aplicaciones matemáticas en diversos contextos, manejar un lenguaje para representar ciertos modelos matemáticos fundamentales para simular sus comportamientos e interacciones, tomar decisiones y solucionar problemas. Lo anterior se pretende lograr mediante una metodología de estudio centrada en el alumno a través de lluvias de ideas, métodos exploratorios e institucionalización de los contenidos u objetos matemáticos, trabajos de investigación en terreno para revisar la forma en que estos contenidos son tratados en el mundo laboral relacionado con las ciencias económicas y administrativas; así como también incentivar el trabajo en equipo y, finalmente, *fomentar en los estudiantes actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia el quehacer matemático.*

Considerando las experiencias recogidas durante los años de implementación, este programa se ha ido modificando, es así como en la actualidad se consideran tres unidades y cuyo objetivo general es *"Aplicar estrategias para el análisis, interpretación y comunicación de resultados en la resolución de problemas relacionados con las ciencias Económicas y administrativas".*

I Unidad: Actividades que desarrollan el Pensamiento Matemático
II Unidad: Elementos de Lógica y Teoría de conjuntos
III Unidad: Introducción a la Modelación

Metodología de enseñanza: Trabajo en grupo en el desarrollo y análisis de situaciones problema que permitan desarrollar *la aptitud lógica, espacial y numérica, elaboración de informes exposición y defensa de los resultados obtenidos..*

Planificación de una Actividad (Ejemplo)

Interrogantes previas a tener en cuenta al momento de diseñar una actividad:

¿Qué queremos que los estudiantes aprendan en esta actividad?; ¿Cómo van a aprender ese contenido y de qué forma se desarrollará la actividad?; ¿Para qué es necesario que aprendan este contenido?

Aspectos a observar y/o evaluar:

Del trabajo propiamente tal: comprensión e interpretación de la situación problema planteada, identificación de datos, variables y relaciones entre ellas, estrategia utilizada, análisis, interpretación y comunicación de resultados *(uso de una rúbrica para su evaluación)*

Del trabajo en equipo: actitud al trabajo en equipo (respeto, empatía, tolerancia etc.), participación y colaboración *(uso de una lista de cotejos para su evaluación)*

De la evaluación: crear cultura de evaluación, lo que implica responsabilidad y autocrítica al momento de autoevaluarse y evaluar a sus compañeros.

Secuencia Didáctica

Objetivo general: Lograr que el alumno se pueda movilizar entre los diferentes cambios de registro (verbal, algebraico y gráfico) en la resolución e interpretación de una situación problema.

I**nstrucciones para desarrollar la actividad:.........**

Situación problema:

Una fábrica produce un cierto artículo que vende a $ 70.000 la unidad, el costo indirecto fijo es de $ 8.000.000 y los costos de producción son de $ 30.000 por unidad producida.

a) Modele las funciones de utilidad, ingreso y costo en términos del número de unidades producidas y vendidas x

b) ¿Cuántas unidades se deben producir y vender para alcanzar el punto de equilibrio?

c) ¿Cuántos artículos se requieren para tener una utilidad de $ 6.000.000?

d) ¿Cuál es la pérdida o utilidad si se producen y venden 150 artículos?

e) En un mismo sistema de coordenadas represente gráficamente todas las funciones involucradas.

Competencias a desarrollar: Capacidad de comunicación oral y escrita; capacidad de abstracción, análisis y síntesis; capacidad de crítica y de autocrítica; capacidad para integrar equipos.

Subcompetencias a desarrollar: comprender e interpretar diversos registros de representación; aplicar estrategias para el análisis e interpretación en la resolución de problemas; capacidad para cambiar sus paradigmas respecto del trabajo intelectual, alejándose de lo reproductivo para centrarse en lo transferencial, crítico y creativo; actitud, empatía, tolerancia, respeto y responsabilidad para el trabajo grupal basado en aprendizajes colaborativos.

Rol y actividades del profesor:

Al inicio: motivador de la actividad a realizar.

Durante el proceso: guía del aprendizaje, moderador de la actividad.

Fase final: Moderador en la exposición de los diferentes grupos, Institucionalizador de los contenidos u objetos matemáticos involucrados en la actividad; evaluador del trabajo de los alumnos.

Rol y actividades de los alumnos estudiantes:

Al inicio: Estar atentos a las indicaciones del profesor, predisposición al trabajo en equipo.

Durante el proceso: Participación activa en su grupo de trabajo, poner en juego actitudes valóricas, consensuar una estrategia adecuada que les permitan abordar el problema planteado, ejecutar la estrategia seleccionada.

Fase final: Análisis e interpretación de resultados obtenidos, entrega de informes, exposición y defensa de dichos resultados, autoevaluarse, evaluar tanto a sus compañeros de grupo como a los demás grupos.

Reflexiones

Sin duda que la modalidad de trabajo grupal (aprendizaje cooperativo/colaborativo) es una instancia propicia para que el alumno trabaje en la construcción del conocimiento significativo, desarrolle sus habilidades y capacidades e incorpore a su proyecto de formación actitudes y valores; teniendo en cuenta que la apropiación colectiva de conocimientos favorece la adquisición individual.

Los resultados de la implementación de este programa han cumplido con creces los objetivos iniciales al reducir en cifras significativas el porcentaje de alumnos reprobados en las asignaturas de matemáticas durante los últimos años en que se ha implementado. la tabla siguiente da cuenta de este hecho:

Año	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
% Aprobados	26,7	35,4	50,6	58,3	26,7	59,8	65,4	73,3	70,0	71,2	69,2	69,5
% Reprobados	3-5	64,6	49,4	41,7	73,3	40,2	34,6	26,7	30,0	28,8	30,8	30,5

Tabla 1: Tabla resumen de porcentajes de aprobación y reprobación por año en la asignatura Matemáticas I.

Sin dudas que la innovación implementada puede ser mejorada semestre a semestre, creando nuevas actividades con situaciones problemas o problemas no rutinarios, lo que en alguna medida se ha ido realizando de acuerdo a las experiencias recogidas en dicha implementación. Es obvio que la problemática que envuelve el paso de la Educación Media a la Educación Superior- la ruptura didáctica planteada por la Universidad frente al nivel de Enseñanza Media- no está resuelta, pero si estamos avanzando, no solo al reconocer y asumir la realidad académica de nuestros alumnos iniciales, sino al implementar programas de estudios que van mucho más allá de meros programas de nivelación o propedéuticos. Nuestras perspectivas son seguir manteniendo y mejorando, semestre a semestre, este programa, dado que la realidad de los alumnos actuales en nada se aleja de los alumnos de promociones anteriores.

El uso del registro gráfico de forma más activa durante un proceso de enseñanza aprendizaje y específicamente las situaciones problemas contextualizadas que se proponen no es muy habitual en los estudiantes. Sin embargo, si se dan las instancias a los alumnos de asociar el objeto matemático en estudio a un contexto grafico como el descrito en la situación problema planteada, éste puede enriquecer su concepto a través de la adquisición de sentido al desarrollo algebraico y significado del objeto matemático en estudio, al tener una visión en otro contexto. *(Duval R.: Registros De Representación Semiótica y*

Función Cognitiva Del Pensamiento).

Referencias

Araya, R., Mejías, C. & Vásquez, P. (2008) Una secuencia didáctica para la enseñanza de los números reales. Tesis para optar al grado de Magister en Didáctica de la Matemática. Porntificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

Artigue et al. (1995) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.

Brousseau, G. ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? IREM, Université de Bordeaux, Francia.

Charles D Miller & Hugo Ibarra Mercado (2006). Matemáticas: Razonamiento y aplicaciones. Pearson Educación.

Cordero, F.(2001) La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana

Del Rincón (1995) Técnicas de investigación en ciencias sociales, Madrid España.

George Polya.(1965)Como plantear y resolver problemas, Ed. Trillas.

.

Conocimiento didáctico-matemático de profesores chilenos: Un estudio de caso sobre la noción de función potencia

Yocelyn Parra Urrea, Luis Pino-Fan
Universidad San Sebastián, Universidad de Los Lagos

Resumen

El objetivo de esta investigación es determinar el conocimiento didáctico-matemático de los docentes chilenos en formación cuando se enfrentan a la enseñanza del concepto de función. Para lograr nuestros objetivos, reconstruimos el significado holístico de referencia, a través de una revisión de tipo histórico-epistemológico. Además, determinamos los aspectos relevantes asociados con el conocimiento didáctico-matemático de un profesor chileno en la capacitación inicial cuando aborda la noción de function; el análisis se basa en las nociones teóricas y metodológicas del Enfoque Onto-Semiótico (OSA) y en las herramientas propuestas por el modelo de conocimiento didáctico-matemático (DMK). Como resultado del estudio, hemos identificado errores y ambigüedades cuando se conceptualiza la noción de función de poder. Además, los profesores tienen dificultades para resolver actividades relacionadas con el conocimiento de contenido común y extendido. En cuanto a las representaciones que se movilizan, son principalmente algebraicas y gráficas.

ABSTRACT *This research aims to determine the didactic-mathematical knowledge of Chilean teachers in training when they face the teaching of the concept of function. To achieve our objectives, we reconstruct the holistic meaning of reference, through a revision of historical-epistemological type. In addition, we determine relevant aspects associated with the didactic-mathematical knowledge of a Chilean teacher in initial training when he approaches the notion of power function. the analysis is based on the theoretical and methodological notions of the Onto-Semiotic Approach (OSA), and on the tools proposed by the didactic-mathematical knowledge model (DMK). As a result of the study, we have identified errors and ambiguities when the notion of power function is conceptualized. In addition, teachers have difficulties in solving activities related to knowledge of both common and extended content. As for the representations that are mobilized, they are mainly algebraic and graphic.*

Palabras Clave: Funciones, Conocimiento Didáctico Matemático, EOS

Introducción

Diversos estudios han reportado una variedad de dificultades en los procesos de instrucción matemática, impidiendo a los estudiantes apropiarse, comprender y dar significado a la noción de función. Norman (1992) constata que los profesores aprueban definiciones informales consideradas como útiles para determinar la funcionalidad de las relaciones y las perciben como definiciones matemáticamente formales. En este mismo sentido, Even (1993) prueba que la apreciación de la naturaleza arbitraria de las funciones está ausente en dichos procesos de instrucción y muy pocos profesores pueden explicar la importancia y origen del requerimiento de la univalencia. En Chile el trabajo con las funciones es tratado en general desde un punto de vista estrictamente formal, generando una serie de obstáculos y dificultades en la comprensión de dicho objeto matemático (Aravena, 2001). Stacey, et al. (2001) citado en Sánchez y Llinares (2003) enfatiza la necesidad de que los programas de formación de profesores hagan hincapié en la importancia de integrar las diferentes representaciones de los objetos matemáticos, además de discernir sobre las problemáticas y dificultades relativas a los conceptos. Font y Acevedo (2003) aun cuando no estudian directamente las concepciones de los profesores, establecen cómo éstos tienen la creencia de que el uso de metáforas dinámicas en su discurso facilita la comprensión de los estudiantes sobre funciones. El problema se suscita cuando los estudiantes estructuran su conocimiento sobre funciones en términos estrictamente metafóricos (Acevedo, Font y Giménez, 2004). Godino, Wilhelmi y Bencomo (2006) explicitan que una instrucción didáctico-matemática idónea requiere de que el profesor posea un conocimiento profundo de los diversos significados de la noción de función. Por ello, conocer su evolución histórica, representa un conocimiento relevante para la enseñanza de las funciones, ya que permite tener una visión más amplia del objeto función (Font, 2011). En este trabajo presentamos un estudio de caso con el que tratamos de caracterizar algunos aspectos relevantes del CDM sobre funciones, particularmente sobre la noción de función inversa.

Marco teórico y metodológico

Diversos estudios se han interesados por describir y caracterizar los conocimientos didácticos matemáticos idóneos que permitan garantizar el aprendizaje de sus estudiantes (Shulman, 1987; Grossman, 1990; Ball, 2000). Pino-Fan y Godino (2015) presentan un modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor basado en el "enfoque ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). Este modelo plantea tres grandes dimensiones: Matemática; Didáctica; y Meta didáctico-matemática. Pino-Fan, Assis y Castro (2015) definen la dimensión matemática del CDM, como *"los conocimientos que permiten al profesor, resolver una actividad matemática que se pretende implementar en el aula y vincularla con objetos matemáticos que se encuentran más adelante en el currículum de matemáticas. Incluye dos subcategorías de conocimientos: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido"* (p. 1433). La dimensión didáctica del CDM incluye seis subcategorías del conocimiento: faceta epistémica, faceta cognitiva, faceta afectiva, faceta interaccional, faceta mediacional y faceta ecológica. (Pino-Fan, Assis, 2015).y la dimensión meta didáctico-matemática del CDM se define como *"los conocimientos sobre las normas y metanormas, las condiciones y restricciones contextuales. Conjuntamente involucra criterios de idoneidad que permiten al profesor reflexionar sobre su* *propia práctica y determinar mejoras potenciales de la misma"* (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 103).

La siguiente investigación pretende identificar los significados parciales que una profesora en formación implementa en el desarrollo de las clases sobre función potencia. En esta comunicación se presentará el análisis de la dimensión matemática del CDM y de la –faceta epistémica– de la dimensión didáctica del CDM. Al momento de la experimentación, la profesora estaba cursando el sexto semestre de la carrera de pedagogía en matemática. Cabe señalar que el estudio de la función potencia se realiza en Chile en cuarto año medio. Para la recolección de la información se filmó una clase simulada.

Resultados y análisis

Significado Holístico de la noción de función

A partir de un estudio histórico-epistemológico se identificaron seis significados parciales que constituyen el significado holístico de referencia de la noción de función. Estos son: *La función como correspondencia, como relación entre variables, como expresión gráfica, como expresión analítica, como correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos* (Parra, 2015).

Descripción Clase sobre Función Potencia

La profesora comienza explicitando el objetivo de la clase: *"Conocer y comprender el concepto de función potencia y su representación gráfica"*. Inmediatamente refuerza los conceptos de potencia y ecuación exponencial. Posteriormente define la noción de función potencia como: *"Es toda aquella función de la forma* $f(x)=ax^n$ *donde a es un número real distinto de cero y n debe ser un número natural mayor que cero"*. La profesora señala que *"existen cuatro casos de funciones potencia"* y se refiere a la función potencia con exponente par e impar y con a positivo y negativo. Da ejemplos y representa gráficamente las funciones presentadas, para ello recurre a una representación tabular asignando valores a *x* y obteniendo los valores de y. Seguidamente presenta una función cuyo exponente es impar. La profesora manifiesta *"Este tipo de función puede ocasionar mayor dificultad"*, una vez que presenta la función $f(x)=2x^5$ pregunta a sus estudiantes ¿Qué ocurre si x es cero? La profesora expone que "si $x=0$, entonces $y=0$, *por ende, este tipo de función potencia, siempre va a partir del cero y se obtendrán los valores positivos y negativos en la rama 1 y 2 respectivamente, es decir, los valores numéricos serán iguales en cada rama, pero con signo contrario"*. A continuación, la profesora plantea como actividad algunas representaciones algebraicas y solicita realizar sus respetivas representaciones gráficas. Posteriormente expone el caso de la función $f(x)=ax^n$ con n=1 y señala: ¿Cómo se comporta la gráfica de esta función? luego manifiesta: *"Efectivamente la gráfica es una recta, por ende, representa la gráfica de una función lineal. Por lo tanto, no es una función potencia, ya que su representación no corresponde a una parábola"*. Otra actividad planteada se refiere a ¿Cómo se comporta la gráfica de la función $f(x)=x^0$? Ante esta pregunta la profesora estima conveniente efectuar la gráfica, para ello, utiliza una tabla asignando los siguientes valores (-1, 0, 1) a la variable x y menciona que los valores de la variable y son (1, 1, 1) respectivamente, concluye que en este caso se trata de una función constante y no de una función potencia. Ante esta situación, uno de los estudiantes consulta: ¿$0^0=1$? La profesora alude que en ese momento no puede explicarlo, pero que durante la próxima clase aclarará aquella inquietud. Posteriormente, la profesora a partir de una tabla presenta el dominio y recorrido de funciones par cóncava hacia arriba, par cóncava hacia abajo y función impar. En la síntesis de la clase la profesora señala: *"Recordemos que en las funciones potencia el exponente siempre debe ser un número natural mayor que 1 pues si fuese igual a uno se trataría de una función lineal y si fuese igual a cero se trataría de una función constante".*

Análisis de resultados

A partir de los resultados obtenidos se puede evidenciar que la profesora posee un dominio parcial del conocimiento común del contenido. Esto principalmente porque no logra dar respuestas matemáticamente satisfactorias a más de una tarea que ella misma propone, además se evidencias ambigüedades en las definiciones que proporciona, puntualmente define erradamente función potencia y define dominio y recorrido como conceptos independientes de la noción de función. Asimismo, no se observan conexiones de la noción de función potencia con objetos matemáticos de niveles educativos más avanzados por tanto no se logra percibir el dominio del conocimiento ampliado del contenido de la profesora. Durante el proceso de enseñanza, la profesora moviliza diversas **representaciones**. No obstante, sólo transita desde representaciones algebraicas a tabulares y luego a gráficas. En cuanto a los procedimientos que presenta, sólo se identifica la valoración de expresiones algebraicas y luego la ubicación de pares ordenados en el plano. La profesora en el desarrollo de su clase no refuerza ni se refiere a la noción de función. Con respecto a las justificaciones y argumentaciones que proporciona la profesora se identifican ciertas imprecisiones, esto se evidencia cuando plantea la expresión $f(x)=x^0$ y no logra explicar la situación, cuando con definir el dominio de la función respondería a la problemática. Los tipos de problemas que se desarrollan durante la clase sobre función potencia son problemas para ejemplificar definiciones presentadas y problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas. No se identifican tareas contextualizadas que requieran de funciones potencias para modelar fenómenos.

Reflexiones Finales

Como resultado del análisis, se evidencia que la profesora posee un dominio parcial del conocimiento común del contenido, además, se observan errores y ambigüedades en la conceptualización de la noción de función potencia y se perciben imprecisiones en los argumentos y/o justificaciones a tareas propuestas en el desarrollo de la clase. Durante el transcurso de esta se promueve el trabajo de procesos mecánicos y algorítmicos. A partir del proceso de enseñanza y de acuerdo al tipo de problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos propuestos, el significado de la noción de función potencia pretendido por profesora no es representativo del significado holístico de referencia, esto pues el enfoque que se le da al objeto matemático se basa fundamentalmente en su acepción de representación gráfica y en un significado que involucra elementos de la teoría conjuntista.

Reflexiones Finales

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto de investigación FONDECYT de iniciación N°11150014.

Referencias

Acevedo, J.L., Font, V., & Giménez, J. (2004). Class Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph offunctions. In J. Giménez, G. Fitzsimons, C. Hahn (Eds.), Globalisation and mathematics education CIEAEM 54, pp. 336 - 342. Barcelona: Graó.

Aravena, M. (2001). Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica. (Tesis Doctoral). Universidad de Barcelona, España.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. Journal for Research in Mathematics Education, 24(2), 94-116.

Font, V., & Acevedo, J. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. Enseñanza de las Ciencias, 21(3), 405-418.

Godino, J., Wilhelmi, M., & Bencomo, D. (2006). Idoneidad de un proceso de instrucción matemática sobre la noción de función con estudiantes de ingeniería. Coloquio Internacional para la Enseñanza de la Matemática a Estudiantes de Ingeniería. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1), 127-135.

Norman, A. (1992). Teachers mathematical knowledge of the concept of function. In G. Harel, E. Dubinsky (Eds.), The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy, vol. 25, MAA notes (pp. 215-232). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Parra, Y. (2015). Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función. (Tesis de Magíster). Universidad de Los Lagos, Chile.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. PARADIGMA, 36(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of tearchers didactic-mathematical knowledge. EURASIA Journal of Mathematics, Science & Techonology Education, 11(6), 1429-1456.

Sánchez, V., & Llinares, S. (2003). El razonamiento Pedagógico sobre funciones de cuatro profesores en formación. Journal of Mathematics Teacher Education, 6(1), 5-25.

La ejemplificación en el nivel secundario y su relación con el conocimiento especializado

[1]Nicolás Sánchez Acevedo; [2]Luis Carlos Contreras; [3]Leticia Sosa Guerrero
[1,2]Universidad de Huelva; [3]Universidad Autónoma de Zacatecas

Resumen

La caracterización del conocimiento del profesor, en específico el especializado, puede ser visto y analizado desde diferentes perspectivas. Una de estas perspectivas es el uso de ejemplos en clase y cómo ésta permite evidenciar aspectos de este conocimiento. La ejemplificación cumple un rol relevante dentro de la enseñanza de las Matemáticas y permite profundizar en el conocimiento del profesor (e.g. Shulman, 1986; Ball, Thames y Phelps, 2008, Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Diversos autores han presentado clasificaciones de los ejemplos dependiendo de sus usos, naturaleza y objetivos, etc. (e.g. Figueiredo, Blanco y Contreras, 2007) y también han señalado aspectos que dependen del conocimiento del profesor de Matemáticas como la variación, covariación, espacios de ejemplos y trasparencia. En este trabajo mostramos algunas conexiones que pueden emerger del conocimiento del profesor de Matemáticas haciendo uso del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, de sus siglas en inglés) y la ejemplificación. Finalizamos con algunas proyecciones del trabajo.

Palabras Clave: Conocimiento especializado, uso de ejemplos, MTSK

Los ejemplos y el conocimiento profesional del profesor de matemáticas

El uso de ejemplos se da como un recurso relevante para analizar el conocimiento profesional del profesor. Shulman (1986), dentro de su PCK ya hacía alusión a los ejemplos, como una forma de caracterizar este conocimiento por medio de ideas, ejemplos, ilustraciones y analogías para explicar y demostrar en un área particular, posteriormente, Ball, Thames & Phelps (2008), en su modelo de conocimiento matemático (MKT) para la enseñanza plantean que los profesores, como parte de su conocimiento, deben saber elegir con qué ejemplos iniciar una lección y qué ejemplos usar para profundizar en un contenido específico. Dentro de nuestra visión de conocimiento profesional y el modelo de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (Carrillo et al., (2013), creemos que el profesor posee un conocimiento que es particular y especializado de su práctica, lo que lo hace distinguible de otro profesional. En este modelo se otorga un rol especial a los ejemplos como parte del conocimiento del docente, pudiendo informar sobre su conocimiento de los temas (KoT), sobre el conocimiento de la estructura y posiblemente sobre el conocimiento sobre la enseñanza (KMT) y su conocimiento en relación a características de aprendizaje (KFLM).

Los ejemplos y ejemplificación

Este recurso, se hace imprescindible en el proceso de enseñanza y como uno de los tantos componentes de conocimiento del profesor de Matemáticas. Los ejemplos y el proceso de ejemplificación son parte esencial en la enseñanza de las Matemáticas, pues pueden aportar indicios de la forma en que el profesor organiza sus lecciones, cómo justifica la elección de ciertos ejemplos y no otros. Esta elección está sujeta a aspectos preponderantes y el papel que cumplen, v.gr.: la secuenciación con base en aspectos críticos y otros no relevantes al momento de construir conceptos (Zaslavsky, 2010). En el caso de las representaciones, el uso de ejemplos también se vuelve un recurso preponderante, pues permite trabajar con objetos matemáticos, comunicar ideas matemáticas y ayudar en la resolución de problemas (Zazkis & Sirotic, 2004). Un amplio conocimiento sobre ejemplos permite posibilidades de generalización y conexiones con otros conjuntos de similares características en la construcción de conceptos (Watson & Mason, 2002). Para Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson & Zaslavsky (2006), los ejemplos deben permitir claramente al observador distinguir elementos de una clase, es decir, poder distinguir lo general de lo particular y en términos más generales, Figueiredo (2010) plantea que los ejemplos se pueden ver como una colección de objetos que se usan en escenarios diversos de enseñanza y aprendizaje mostrando características particulares. A diferencia del concepto de ejemplo, el de ejemplificación transmite un contenido con una contextualización de lo que se pretende ejemplificar

El marco teorico de conocimiento especializado (MTSK)

Derivado de los trabajos iniciales de Shulman (1986) y posteriormente algunas dificultades analíticas en la delimitación de los subdominios del equipo de Ball et al., (2008) al analizar y profundizar en el conocimiento del profesor de Matemáticas, se propone el modelo *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK), modelo que integra el conocimiento del profesor como un todo homogéneo y relacionado directamente con la práctica profesional, que es considerado como una propuesta teórica y una herramienta metodológica que nos permite analizar la práctica del profesor de matemáticas (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014). El MTSK se compone de los dominios *Mathematical Knowledg*e (MK) y P*edagogical Content Knowledge (*PCK). El dominio MK a su vez se compone de tres subdominios: conocimiento de los temas (KoT), *conocimiento de la estructura de la matemática* (KSM), y *conocimiento de la práctica matemática* (KPM). Por su parte, el dominio PCK se compone de los subdominios: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM), y *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS). Este modelo ya ha sido usado en algunos trabajos (e.g. Sosa, Flores-Medrano & Carrillo, 2016) para analizar el conocimiento del profesor y el uso de ejemplos. En este trabajo, se hace uso del modelo MTSK con dos profesores de bachillerato en el tema de álgebra lineal; algunos de los aportes es la creación de indicadores específicos, en este contexto, aportes sobre la potencialidad para los profesores sobre el uso de ejemplos y su elección, la cual está sustentada en el KMT de ellos.

Clasificaciones y aspectos relevantes de los ejemplos. Posibles relaciones con el MTSK

Dependiendo del contexto y el tipo de investigaciones que se han llevado a cabo para profundizar en la importancia que cumplen los ejemplos como parte del conocimiento del profesor de Matemáticas, se han propuesto algunas clasificaciones. Acá mostramos aquellas que pueden emerger en el contexto de nuestra actual investigación. Ya hace varios años, Rissland-Mischener (1978) propusieron cuatro categorías para clasificar los ejemplos: (i) ejemplos de puesta en marcha (introducción), (ii) ejemplos de referencia (estándares), (iii) ejemplos típicos de una situación y, (iv) contraejemplos. Figueiredo, Blanco & Contreras (2007) proponen una clasificación dependiendo del objetivo del ejemplo en: (i) de acuerdo a la definición, (ii) tipo de representación, (iii) sus características, (iv) aplicaciones internas y, (v) aplicaciones externas. Por su parte, Bills et al., (2006) proponen una clasificación según su naturaleza, en: ejemplos (i) resueltos, (ii) ejercicios (iii) ejemplos genéricos, (iv) contraejemplos, (v) no ejemplos y de forma más general. Algunas de estas clasificaciones, las cuales pueden emerger en clases y cuando se diseñan lecciones, pueden ser parte del KMT de un profesor si existe evidencia sobre cómo y por qué éste selecciona ejemplos o representaciones adecuadas en relación al contexto y tipo de estudiantes, y de su KFLM si la evidencia está en que el profesor considere ejemplos adecuados, atendiendo el nivel de dificultad que puede presentar un ejemplo a diferencia de otro.

Por otra parte, los ejemplos presentan características relevantes que se pueden manifestar de manera conjunta o de manera independiente, pero que en ocasiones, los profesores hacen su uso en la práctica. Una de las peculiaridades que pueden tener los espacios de ejemplos, según Watson & Mason (2005), es la variabilidad que posea la elección de un ejemplo y no otro cuando se pretende enseñar un mismo concepto, para ello, esta enseñanza dependerá del espacio que tiene cada profesor y el conjunto de los que dispone y cómo se relaciona cada uno de ellos, el cual podría aportar información del KoT del profesor, en el sentido de qué conceptos y contenidos pretenda enseñar. La variación permite ver aquello que puede modificarse sin perder la generalidad de lo que se pretende mostrar (Marton & Booth, 1997), aspecto que profundiza Mason (2011b) en relación al aprendizaje, cuando se es consciente de lo que éste puede variar en relación a la medida de la amplitud en que se puede efectuar esa variación sin transformar sustancialmente el objeto de enseñanza. Este aspecto podría aportarnos información relativa sobre el conocimiento del profesor de Matemáticas y su KMT en el sentido que la variación de los ejemplos en los que haga uso de estrategias de enseñanza para que los estudiantes logren comprender cierto tópico. Por otro lado, la transparencia permite ser usada en relación a la representación que se utiliza para cualquier concepto (Figueiredo & Contreras, 2013). Una representación es trasparente sin tener más o menos significado que el representado, mientras que una representación opaca releva aspectos de una idea o estructura y atenúa otros (Lesh, Behr & Post, 1987). Esta transparencia al hacer uso de ejemplos por parte del profesor podría aportar evidencia de su KFLM e incluso de su KMLS, cuando se seleccionan ejemplos adecuados en relación a las dificultades de aprendizaje de los estudiantes y cuando se seleccionan de manera adecuada ejemplos en relación a objetivos de aprendizaje.

Metodología y proyecciones

La metodología es de corte cualitativa, dado que buscamos comprender, descubrir e interpretar la realidad (Merrian, 1988) por medio de un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 2003).

El caso

Nuestro caso es una profesora formada en Licenciatura en educación y Pedagogía en Matemáticas. Su carrera profesional tiene 12 años de experiencia en educación secundaria, de los cuales, ocho años ejerce en la actual institución educativa y actualmente se desempeña en educación superior en un instituto de formación profesional.

Técnicas de recogida de datos

Se utilizarán para la investigación y recogida de información videograbaciones del aula y entrevistas semi-estructuradas para complementar la información de las videograbaciones sobre la base de indicios y oportunidades detectadas.

Proyecciones

Dentro de las proyecciones para el periodo académico 2018-2019 está la recolección de información (grabaciones y entrevistas) de la profesora informante para comenzar a analizar los datos recopilados y fundamentados en nuestro modelo teórico de conocimiento del profesor de Matemáticas y el uso de ejemplos. Sobre la base de la información y analizada comenzar a discutir sobre qué tipo de conocimiento sustenta la elección y el uso de ejemplos del profesor de Matemáticas cuando enseña en clase, sustento que estará apoyado sobre los subdominios del modelo MTSK y las relaciones que de estos puedan emerger.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Θουρναλ οφ Τεαχηερ Εδυχατιον, *59 (5), 389-407.*

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. En J. Novotna, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Volume 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. & Muñoz-Catalán, M.C. (2013).

Δετερμινινγ Σπεχιαλισεδ Κνοωλεδγε Φορ Ματηεματιχσ Τεαχηινγ.

. Manuscript submitted for publication (CERME 8)

Figueiredo, C.A., Blanco, L.J., & Contreras, L.C. (2007). La ejemplificación del concepto de función en estudiantes para profesores de matemáticas de secundaria. Investigación

en la escuela, 61, 53-68.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. En C. Janvier (Ed), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 41- 58). Hillsdale, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum.

Marton, F., & Booth, S. (1997). Learning and Awareness. Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.

Mason, J. (2011a). Explicit and Implicit Pedagogy: variation theory as a case study. En C. Smith (Ed.), Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 31(3), 107-112.

Rissland-Michener, E. (1978). Understanding understanding mathematics. Cognitive Science, 2, 361-383.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. Εδυχατιοναλ Ρεσεαρχηερ, *15(2), 4-14.*

Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal.

Watson, A., & Mason, J. (2002). Extending examples spaces as a learning/teaching strategy in mathematics.

Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics. Challengs for teaching. En M. K. Stein, & L. Kucan (Eds.), Instructional explanations in the disciplines. New York, USA: Springer.

Trastorno específico del aprendizaje con dificultad matemática

Leandro Navas Martínez
Departamento de Psicología Evolutiva y Didáctica. Facultad de Educación. Universidad de Alicante (España)

Resumen

Esta comunicación se basa en un análisis retrospectivo de las dificultades para el aprendizaje de las matemáticas. Se hace una comparación entre el concepto restringido, que se basa en criterios de discrepancia, especificidad y exclusión; y el concepto amplio o de necesidades educativas especiales que se basa en criterios curriculares. Posteriormente, se introduce la noción actual de trastorno de aprendizaje específico con dificultad matemática, los criterios de diagnóstico propuestos por la Asociación Americana de Psiquiatría, así como sus diferentes implicaciones. Se consideran algunas conclusiones y algunos aspectos críticos derivados de enfoques educativos y evolutivos.

ABSTRACT *This communication is based on a retrospective analysis of the difficulties for the learning of mathematics. A comparison is made between the restricted concept, which is based on criteria of discrepancy, specificity and exclusion; and the broad concept or of special educational needs that is based on curricular criteria. Subsequently, the current notion of specific learning disorder with mathematical difficulty is introduced, the diagnostic criteria proposed by the American Psychiatric Association, as well as its different implications. Some conclusions and some critical aspects derived from educational and evolutionary approaches are considered.*

Palabras Clave: Acalculia, ceguera para los números, dificultades para aprender matemáticas, discalculia, trastorno específico del aprendizaje con dificultad matemática

Introducción

Los antecedentes más remotos del concepto de dificultades de aprendizaje, provienen de estudios médicos en los que la pérdida de determinada habilidad se relacionaba con daños en el cerebro. Se trata de investigaciones realizadas con adultos que, como consecuencia de una lesión cerebral, perdían las habilidades matemáticas que poseían antes de la lesión y cuyos resultados se extrapolaban a niños que no desarrollaban tales habilidades, asumiendo que presentaban el mismo problema neurofisiológico. A partir de ahí, han surgido términos muy diversos para hacer referencia a la dificultad para aprender matemática, tales como acalculia, discalculia, ceguera para los números o dificultades para aprender matemática (DAM)

Acalculia

Según González y Martín (1991), fue Henschen, en 1919, el primero en usar este término para referirse tanto a la dificultad para leer o escribir números como a la pérdida de la capacidad para realizar ciertas operaciones matemáticas. Ambas dificultades eran atribuidas a una lesión focal en el cerebro. Es decir, la acalculia es una condición cerebral que afecta a la habilidad de entender y de trabajar con números y con conceptos matemáticos.

Discalculia

La discalculia hace referencia a los problemas para aprender a calcular, a los que subyacen alteraciones en las habilidades necesarias para realizar cálculos, y dificultades para manejar simbólicamente los números (Del Barrio, 1985; Navas y Veas, 2017). La etiología de la discalculia es muy variada. Se alude a factores genéticos y prueba de ello es que alguno de los progenitores o algún hermano del estudiante afectado muestran los mismos problemas. También se atribuye al desarrollo del cerebro o a lesiones en éste, de hecho cuando se comparan (por medio de tomografía axial computarizada o de resonancia magnética) los cerebros de niños sin dificultades y los de niños con discalculia, hay áreas cerebrales relacionadas con la memoria, la planificación o la autoevaluación que presentan diferencias en su grosor o su volumen. Que la madre haya consumido alcohol durante el embarazo, también aumenta las probabilidades de padecer el problema.

Ceguera para los números

La ceguera para los números es un término acuñado por Butterworth (2004) para hacer referencia a las dificultades para poder diferenciar cantidades. Este es una de los motivos por los que muchos estudiantes tienen problemas para poner en relación los números con el mundo real y son incapaces de entender, por ejemplo, que la cantidad de cinco lápices significa el mismo número de objetos que cinco dulces.

Dificultades para aprender matemática (DAM)

Las DAM se definen como un trastorno que afecta a la capacidad para manejar símbolos aritméticos y para realizar cálculos matemáticos, lo que entorpece el aprendizaje de la matemática: *"las DAM engloban los trastornos del cálculo y los trastornos en la resolución de problemas"* (Pérez, Poveda y López, 2011, p. 205).

Concepción restringida y concepción amplia de la dificultad para aprender matemática

Los términos que se han expuesto hasta ahora son representativos de la noción restringida de las dificultades para el aprendizaje de la matemática porque se ajustan a la definición operacional de Kavale y Forness (2000). Es decir, se cumplen tres criterios básicos: el de especificidad, el de discrepancia y el de exclusión. El criterio de especificidad hace referencia a que las dificultades de aprendizaje se ubican específicamente en el ámbito matemático (alcanzar el concepto de número, saber contar, saber calcular, ser capaz de resolver problemas, etc.). El criterio de discrepancia alude a que hay una diferencia entre la capacidad y el rendimiento (el estudiante rinde en matemáticas por debajo de lo que se puede esperar en función de su CI, de la instrucción recibida, de su edad, etc.). Y, finalmente, el criterio de exclusión nos indica que los problemas para aprender matemática no se deben a una discapacidad sensorial o intelectual, a problemas emocionales o de conducta, a falta de escolaridad, a diferencias culturales, a problemas de vulnerabilidad, etc.

Sin embargo, a partir de la publicación del informe Warnock (1978), se generalizó el término de necesidad educativa especial (NEE) que es una concepción amplia de las dificultades de aprendizaje. Cuando hablamos de necesidades educativas especiales agrupamos al alumnado que por cualquier, causa, tiene dificultades para lograr los objetivos educativos establecidos en el currículo que le corresponde según su edad cronológica. Se afirma, así, que un alumno presenta NEE cuando no aprende en el contexto de aula con los recursos (metodológicos, materiales, etc.) ordinarios, observándose un desfase con respecto a sus compañeros en los aprendizajes que por su edad debería haber adquirido. Es decir, tiene más dificultades que sus iguales para acceder a los aprendizajes comunes a su edad. La idea es resaltar lo que el alumnado precisa para aprender, la respuesta educativa que hay que proporcionarle para que aprenda: el alumno no es especial, lo que es especial es lo que necesita para aprender (¿qué ayuda psicopedagógica precisa?, ¿qué adaptaciones curriculares requiere?, ¿qué apoyos necesita para aprender?, etc.).

En la tabla 1 se resumen las diferencias entre ambas concepciones (la restringida y la amplia) en función de diferentes dimensiones de comparación.

Dimensión	Concepción restringida	Concepción amplia
Énfasis	En la diferenciación diagnóstica	En la respuesta educativa
Ámbito geográfico	Estados Unidos y Canadá	Europa
Categorías diagnósticas	Se establecen categorías y subcategorías	Amplias y poco delimitadas
Etiología	Se delimitan las causas	No se las considera
Tipos Criterio de identificación	Categorías diagnósticas Psicológico, psiquiátrico o psicopedagógico	Se establece un continuo Curricular

Tabla 1: Comparación entre las concepciones restringida y amplia de las dificultades de aprendizaje

Noción según la american psychiatric association (apa, 2013)

La APA (2013), entre los trastornos del desarrollo neurológico, incluye el "Trastorno específico de aprendizaje". Para su diagnóstico clínico se establecen cuatro criterios. En el primer criterio se enumeran seis síntomas. Los cuatro primeros se refieren a la lectura y a la escritura y los dos últimos están relacionados con las dificultades de aprendizaje matemático, indicando que deben estar presentes:

> Dificultades para dominar el sentido numérico, los datos numéricos o el cálculo (p. ej.. comprende mal los números, su magnitud y sus relaciones; cuenta con los dedos para sumar números de un solo dígito en lugar de recordar la operación matemática como hacen sus iguales; se pierde en el cálculo aritmético y puede intercambiar los procedimientos [...] Dificultades con el razonamiento matemático (p. ej., tiene gran dificultad para aplicar los conceptos, hechos u operaciones matemáticas para resolver problemas cuantitativos). (APA, 2014, p. 66).

En el segundo criterio se indica que la capacidad matemática debe estar por debajo de lo que cabe esperar en función de la edad cronológica del sujeto e interfiere de forma significativa con el rendimiento académico. La evaluación de tal capacidad ha de realizarse con pruebas estandarizadas aplicadas individualmente. El tercer criterio indica que los problemas se inician en la edad escolar. Y el último criterio señala que hay que excluir otras causas (discapacidades, otros trastornos neurológicos, adversidades de tipo social, etc.).

Implicaciones

Considerar el trastorno específico de aprendizaje con dificultad matemática como un trastorno del neurodesarrollo implica reconocer un origen biológico (genético, alteraciones en las funciones o en las estructuras cerebrales, prematuridad, madre que fuma o bebe durante el embarazo, etc.) que subyace a los problemas cognitivos para procesar la información.

Que la evaluación de la aptitud matemática se realice con pruebas estandarizadas implica que la puntuación del sujeto se ubica 1.5 desviación típica por debajo de la media de los estudiantes de la misma edad, es decir, por debajo del percentil 7.

Excluir la discapacidad intelectual como causa, implica que el sujeto tiene un funcionamiento intelectual normal, es decir, puntuaciones de CI superiores a 70 (±5).

Aspectos críticos y conclusiones

Que la APA (2014) excluya como causas del trastorno las adversidades psicosociales o las situaciones educativas inadecuadas impide que se realice el diagnóstico, cuando parece probado que la insuficiente estimulación durante la educación parvularia se relaciona "*con desarrollos pobres e inadecuados de los conocimientos y conceptos matemáticos informales*" (Riviere, 1990, p. 168) que, posteriormente, en la educación básica, son el fundamento de los conocimientos matemáticos formales.

El problema es que, al no haber un diagnóstico, no se tiene acceso a los recursos que ofrece el sistema educativo para paliar los problemas al aprender y, en consecuencia, la dificultad matemática persiste. Posiblemente la solución pase por mantener la noción amplia de dificultad de aprendizaje (NEE) comentada anteriormente. Al no ser ésta un concepto tan restringido, permite adoptar medidas tales como las adaptaciones curriculares, la provisión de apoyos o la introducción de cambios metodológicos con la finalidad de paliar las dificultades de aprendizaje de la matemática que muestran entre el 5 y el 15

% de los estudiantes de básica.

Referencias

American Psychiatric Association (2013). Guía de consulta de los criterios diagnósticos del DSM-5. Madrid, España: Editorial Médica Panamericana.

American Psychiatric Association (2014). Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales (5ª edición).Madrid, España: Editorial Médica Panamericana.

Butterworth, B. (2004). Dyscalculia Guidance: Helping pupils with specific learning difficulties in Maths. Abingdon, Reino Unido: David Fulton.

Del Barrio, M. V. (1985). Paidopsicopatología (II): comportamientos desajustados en la edad escolar. En a. Polaino-Lorente (Dir.), Psicología patológica (pp. 557-591). Madrid, España: UNED.

González, J. A., & Martín, F. (1991). Dificultades de aprendizaje. En J. Mayor (Dir.), Manual de educación especial (pp. 521-544). Madrid, España: Anaya.

Kavale, K. A., & Forness, S. R. (2000). What definitions of Learning Disability say and don't say. A critical analysis. Journal of Learning Disabilities, 33(3), 239-256.

Navas, L., & Veas, A. (2017). Dificultades de aprendizaje del cálculo. En J. L. Castejón y L. Navas (Eds.), Dificultades y trastornos del aprendizaje y del desarrollo en infantil y primaria (edición adaptada y ampliada) (pp. 203-228). Alicante, España: ECU.

Pérez, A., Poveda, P., & López, M. P. (2011). Dificultades de aprendizaje y trastornos del cálculo. En J. L. Castejón y L. Navas (Eds.), Dificultades y trastornos del aprendizaje y del desarrollo en infantil y primaria (pp. 203-231). Alicante, España: ECU.

Rivière, A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cogntitiva. En A. Marchesi, C. Coll y J. Palacios (Comps.), Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar (pp. 155-182). Madrid, España: Alianza.

Warnock, H. M. (1978). Special education needs. Report of the commitee of enquiry into the education of Handicapped children and youg people. Londres, Reino Unido: Her Majesty's Office.

SOCHIEM

2018