

Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática: XIX JNEM 2015

ISBN N° 978-956-9805-01-1

sochiem

XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática

Villarrica, Chile. 2015

XIX JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

"Perspectivas actuales de la educación matemática en una sociedad de cambio"

Campus Villarrica – Facultad de Educación
Pontificia Universidad Católica de Chile.
26 y 27 de Noviembre 2015

IX Región de La Araucanía – Villarrica – Chile

La Sociedad Chilena de Educación Matemática y la Pontificia Universidad Católica de Chile extienden una cordial invitación a participar activamente de las Décimo Novena Jornadas Nacionales de Educación Matemática que se realizarán el 26 y 27 de Noviembre de 2015 en la ciudad de Villarrica, IX región de la Araucanía, Chile. Las Jornadas Nacionales se realizan desde el año 1982 siendo un espacio de encuentro entre investigadores, profesores en ejercicio y/o en formación y diferentes actores del sistema educativo que influyen en las políticas que conciernen a dicho campo.

El objetivo de estas XIX Jornadas de Educación Matemáticas (XIX JNEM) es brindar un espacio de discusión, análisis y reflexión en torno a perspectivas actuales de educación matemática frente a una sociedad de cambio. A partir de este primer anuncio le invitamos a ser parte de un encuentro que busca compartir experiencias de enseñanza-aprendizaje exitosas en el campo de la educación matemática así como, difundir resultados de investigación que propicien la reflexión en torno al actual desarrollo y alcances de la educación matemática.

La comisión organizadora de las XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática, invita a participar activamente de estas jornadas a la comunidad científica y en especial a los profesores del sistema escolar de las diversas actividades programadas: comunicaciones breves, reportes de investigación, talleres, poster y conferencias donde participarán algunos connotados invitados nacionales y extranjeros, lo que permitirá tener una visión ampliada del estado actual de la disciplina y sus proyecciones.

Esperando contar con su activa participación, le saluda cordialmente,

COMISIÓN ORGANIZADORA
XIX JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CONVOCAN

Sociedad Chilena de Educación Matemática, SOCHIEM

Campus Villarrica y Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

INSTITUCIONES QUE ORGANIZAN

Campus Villarrica - Pontificia Universidad Católica de Chile

Facultad de Educación - Pontificia Universidad Católica de Chile

Organizan:

CAMPUS VILLARRICA UC

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

FACULTAD DE EDUCACIÓN UC

FACULTAD DE EDUCACIÓN PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Con el aporte de la Vicerrectoría de Investigación de la Pontificia Universidad Católica de Chile

INSTITUCIONES QUE COLABORAN

Vicerrectoría de Investigación de la Pontificia Universidad Católica de Chile

Ediciones UC

Centro Cultural Liquen de Villarrica

Ilustre Municipalidad de Villarrica

Gal&leo Tecnologías Educativas Colaborativas

Santillana del Pacifico S.A.

Mat Educa Visual Temuco

LIQUEN CENTRO CULTURAL VILLARRICA

EDICIONES UC

Villarrica Paraíso Lacustre... Ilustre Municipalidad de Villarrica

gal&leo

SANTILLANA

MAT EDUCA VISUAL E.I.R.L.

COMITÉ ORGANIZADOR

PRESIDENTE

Claudia Vásquez Ortiz, Pontificia Universidad Católica de Chile. cavasque@uc.cl

VICEPRESIDENTE

Marcela Parraguez González, (SOCHIEM), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. marcela.parraguez@ucv.cl

SECRETARIA GENERAL

Nataly Pincheira Hauck, Pontificia Universidad Católica de Chile. npincheirah@uc.cl

COMITÉ ORGANIZADOR

Claudia Vásquez Ortiz, Pontificia Universidad Católica de Chile, cavasque@uc.cl

Hernán Rivas Catricheo, Pontificia Universidad Católica de Chile, hrivasa@uc.cl

Nataly Pincheira Hauck, Pontificia Universidad Católica de Chile, npincheirah@uc.cl

Francisco Rojas Sateler, Pontificia Universidad Católica de Chile, frojass@uc.cl

Horacio Solar Bezmalinovic, Pontificia Universidad Católica de Chile, hsolar@uc.cl

Eugenio Chandia Muñoz, Pontificia Universidad Católica de Chile, echandia@uc.cl

COMITÉ CIENTÍFICO

Presidente: Horacio Solar (PUC)

Vicepresidenta: Marcela Parraguez (SOCHIEM)

P. Universidad Católica de Chile: Francisco Rojas, Horacio Solar, Claudia Vásquez, Hernán Rivas, Alejandro Pedreros

P. Universidad Católica de Valparaíso: Arturo Mena, Jaime Mena, Elizabeth Montoya, Diana Zakaryan, Raimundo Olfos, Soledad Estrella, Tatiana Goldrine, Pamela Reyes, Astrid Morales, Marcela Parraguez

U. Alberto Hurtado: Soledad Montoya, Roberto Vidal.

U. Católica de la Santísima Concepción: Hugo Alvarado

U. Católica del Maule: María Aravena, Carlos Caamaño, Carlos Cabezas

U. de Chile: María Victoria Martínez, Cristian Reyes, Josefa Perdomo, Roberto Araya, Salomé Martínez, Patricio Felmer, Rafael Correa, Pablo Dartnell, Jorge Soto.

U. de Concepción: María Elsa del Valle

U. de los Lagos: Luis Pino, Álvaro Poblete, Verónica Díaz, Ismenia Guzmán

U. de Playa Ancha: Carlos Silva

U. de Punta Arenas: Carmen Oval

U. de Santiago de Chile: Daniela Soto, Héctor Silva, Lorena Espinoza, Patricio Montero, Claudia Vargas.

U. de Talca: Ximena Colipán

U. de Tarapacá: Alicia Zamorano

U. de Valparaíso: Leonora Díaz

U. del Bio Bio: Miguel Friz, Sara Pascual

U. Diego Portales: Sebastián Howard

INDICE

CONFERENCIAS INTERNACIONALES

Algunas ideas clave para fomentar la competencia matemática en las aulas de infantil y primaria 9
Profesora, ¿Qué es multiplicar? 21
La idoneidad didáctica como herramienta de análisis y reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas. 31

CONFERENCIAS NACIONALES

Factores que influyen en el cambio del profesor Evaluación de una experiencia. 41
Construcciones y mecanismos mentales para el uso de los conceptos básicos del álgebra lineal. 47
Conocimiento del profesor de los números racionales como objeto de aprendizaje: Un estudio de caso. 56
Niveles y procesos de razonamiento geométrico en estudiantes de secundaria de la Región del Maule 64
Formación inicial docente de profesores de matemática desde la perspectiva del léxico disponible en alumnos y profesores: un estudio de caso asociado al proyecto. 70
Conocimientos para la enseñanza del número en Educadoras de Párvulos en Formación Docente Inicial: Constructo, instrumentos e intervención. 79
Metodología para el trabajo pedagógico en educación matemática mediada por el uso de tic para profesores de enseñanza básica. 87
Sistema de Auto Soporte para el Mejoramiento de las Prácticas Docentes. 95
Activar la resolución de problemas en el aula. 103
Disponibilidad Inmediata de Educación Universal de Calidad: Modelo Teórico y Evidencia Empírica. 111
La importancia de la práctica en la formación del profesorado de matemática. 120
Abordar la contingencia en una gestión argumentativa de la clase de matemáticas. 129

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

Diseño formativo para desarrollar la competencia de Análisis Epistémico y Cognitivo de Profesores de Matemáticas. 137
Sesgos y estrategias para la comparación de fracciones reveladas por análisis de grupos en segundo ciclo básico. 145
Argumentación durante la enseñanza de los números enteros: Análisis de la interacción en el aula. 153
Hacia un modelo de formación continua basada en la experiencia. 161
Un ejemplo de análisis ontosemiótico para una tarea sobre la antiderivada. 169
Pictogramas en una muestra de directrices curriculares latinoamericanas. 175
Modelación matemática en la formación inicial de profesores. 183
Un modelo multinterpretativo para el estudio del concepto transformación lineal. 191
Impacto del capital cultural en el Rendimiento Escolar en Matemática. 198
Práctica de figuración en la construcción de Modelos Gráficos y Algebraico: Un caso de estudio con estudiantes de Pedagogía en Matemática. 206
El conocimiento de la enseñanza de la estimación de medida de los profesores de educación básica. 214
Análisis de la probabilidad y sus significados en el currículo escolar y en libros de texto de educación básica. 222
Probabilidad condicional como herramienta para la toma de decisiones: una secuencia didáctica. 230
Diseño e implementación de estudios de casos que promueven argumentación en el aula matemática 237
Trayectorias constituidas y emergentes en prácticas de modelación desde una mirada socioepistemológica 245
Un estudio de las inecuaciones lineales desde el espacio de trabajo matemático. 253
Aproximación a la construcción del concepto de multiplicación en el marco del estudio de clases. 261

Construcción de teorías locales sobre la enseñanza del concepto de variable: un caso de estudio de caso. 269
Validación de una descomposición genética del concepto de inducción matemática. 276
Hechos didácticos significativos en el estudio de figuras planas. 283
Un modelo cognitivo para mejorar el aprendizaje de la composición de funciones. 290
Estadística temprana en los grados k a 4: transnumeración en kínder. 298

COMUNICACIONES BREVES

Fomento de hábitos saludables mediante un proyecto estadístico. 306
Las medidas de dispersión en el estudio de la Inferencia Estadística. 311
Efecto de un dispositivo de formación inicial docente sobre el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de pedagogía. 316
Análisis Didáctico para la enseñanza de las propiedades de unión, intersección y complemento de un evento en probabilidad. 321
Texto guía de Cálculo Diferencial para estudiantes de Ingeniería en Chile, su estado del arte y actualización. .. 326
Reflexión de docentes noveles a partir de sus tareas propuestas en un curso de formación continua. 331
La transición en matemáticas desde la educación secundaria a la universidad: ¿Entienden los universitarios los conceptos abstractos? 336
Análisis didáctico para identificar errores y dificultades de los estudiantes en el tratamiento de sucesos independientes. 341
Análisis de la organización matemática respecto a la incorporación formal de la media aritmética en en el currículo nacional chileno. 347
Creencias del estudiante en formación inicial sobre la forma de enseñar la adición. 352
Estudios de casos: una estrategia para la enseñanza de la matemática en programas de formación inicial de profesores. 357
Visión de los docentes respecto a sus prácticas y dificultades en la resolución de problemas. 362
Clases de matemáticas vistas por niños de 5° básico a través de sus dibujos. 368
TIC en enseñanza de estadística descriptiva y aprendizaje autónomo. 373
Propuesta didáctica en patrones: visión desde las competencias en modelación matemáticas. 377
Planificación y diseño de la asignatura de educación matemátca - geometría - en el contexto del ajuste curricular en la carrera de educación básica. 382
Identificación de indicadores del conocimiento especializado del Profesor de Matemática sobre funciones mediante el análisis didáctico. 388
Análisis de obstáculos didácticos observados en el cálculo de perímetro con tangrama chino. 393
Taller de resolución de problemas: desarrollando habilidades en matemática. 399
El álgebra lineal en el currículo y en a formación inicial. 404
Situaciones a-didácticas para la enseñanza-aprendizaje de estrategias de conteo utilizando la resolución de problema como medio. 409
Análisis de transposición sobre los números con expansión decimal periódica y semiperiódica. 414
Fenómenos didácticos en el estudio de las fracciones en su transición de la aritmética al álgebra. 419
Desde lo sintético a lo analítico: una propuesta para la construcción de la recta de Euler. 424
La justificación de procesos infinitos en la matemática escolar. 429
Resignificación del concepto función en estudiantes de enseñanza básica. 434
Matices en la tematización del esquema de la derivada. 439
La construcción de conceptos de álgebra lineal a través de los modelos emergentes. 444
Desarticulación de las praxeologías que se ponen en juego en los textos de cálculo diferencial e integral. 449
Juego de los parámetros: función cuadrática. 454
Tutoría de apoyo académico universitario: desarrollo de preguntas orientadoras en un ambiente de aprendizaje colaborativo. 459

Paradigmas algebraicos: una aporte a la teoría del espacio de trabajo matemático. 464
Matemática y cultura: concepciones y relatos de profesores de Educación Básica. 469
Evidencias de la divergencia entre la visualización y el razonamiento geométrico..... 473
Elementos del pueblo mapuche en las clases de educación matemática: un estudio de caso desde el enfoque ontosemiótico. 478
Diseño de tareas en el estado de la transversal de gravedad de un triángulo usando geogebra. 483
Propuesta de enseñanza del álgebra escolar: Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. 488
Promoción del aprendizaje matemático desde el conocimiento cultural Mapuche..... 494
Errores de estudiantes de primer año medio en la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado. 499
Enseñanza de transformaciones isométricas en 8° básico desde la teoría de las situaciones didácticas..... 505
Modelamiento geométrico desde la cosmovisión del pueblo mapuche presente en telares. 510
Razones y sentidos en la toma de decisiones. 515
Elementos precursores de lo lineal en la modelación tabular..... 520
Graficar parábolas. 525
Análisis didáctico de una situación de aleatoriedad utilizando el modelo de estructuración del medio..... 530
Ubicación de puntos en el plano una experimentación con graficadora. 536
Perspectiva de profesores de ciencias en el contexto del diseño de tareas de enseñanza. 541
Un marco de referencia para los usos de la optimización. 544
Un estudio sobre el álgebra de conjuntos basado en registros semióticos. 550
Desarrollo e implementación de un centro de apoyo a la enseñanza de la matemática: una experiencia en educación superior. 555
Pensamiento funcional en edades tempranas. Un estudio exploratorio. 561
La demonstration geométrica en la sala de clases 566
Análisis de los patrones instruccionales en las clases de resolución de problemas matemáticos verbales. 571
Resolución de problemas: rasgos distintivos en las producciones escritas de estudiantes de 3° y 4° básico. 576
Modelos docentes e los profesores de matemática de un colegio en a comuna de paine y su relación con la educación matemática crítica. 582
Construcción didáctica de los números enteros desde la teoría los modos de pensamiento. 586
ETG de Referencia en Chile, simetría: Estudio de Caso..... 591
Artefacto y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos..... 596
Razonando monitoreos y toma de decisiones en administración pública. 601
Razonamiento matemático a través del uso de tecnologías digitales: experiencias de aula en el contexto de un diplomado en la U.D.P. 606
Articuladores para los modos de comprender el concepto de derivada. 611
Dificultades en la enseñanza y en los aprendizajes de triángulos y sus elementos secundarios. 616
Resultados de aprendizaje de un proceso de instrucción matemática para ingenieros..... 621
Idoneidad afectiva de un proceso de enseñanza utilizando videos educativos. 627

TALLERES

Introducción/Aprendizaje del concepto de porcentaje a través del uso de la banda elástica y sus representaciones. 632
Diseño de buenas tareas escolares. Discusión desde la modelación matemática..... 635
Reflexión sobre la práctica desde la modelación Matemática en el aula. 640
Condiciones necesarias o suficientes, estructuras deductivas y argumentativas en las clases de matemática..... 645
Enunciado de un Teorema: ¿Único componente de su significado?..... 650
Un proceso de modelización en la formación del profesor: Análisis didáctico-matemático. 655
Observación de clases de matemática usando pautas..... 660

Pensamiento crítico y resolución de problemas en el contexto del programa tutores de la Universidad del Bío-Bío. 664
Taller de resolución de problemas: desarrollando habilidades en matemática. 669
Conjetura y demostración. Una propuesta didáctica para transitar de la aritmética al álgebra. 674
Construcción de un espacio de trabajo matemático en la formación de profesores. 678

Cítese como:

C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (eds.), 2015. *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX*. Villarrica: SOCHIEM.

Los trabajos aquí publicados han sido sometidos a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM).

ISBN N° 978-956-9805-01-1
Editorial SOCHIEM

CONFERENCIAS INTERNACIONALES

ALGUNAS IDEAS CLAVE PARA FOMENTAR LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN LAS AULAS DE INFANTIL Y PRIMARIA

Some key ideas for promoting mathematical competence in preschool and primary classrooms

Alsina, Á.

Universidad de Girona (España); angel.alsina@udg.edu

Resumen

Se argumenta la necesidad de substituir un currículo orientado a la adquisición de contenidos por un currículo orientado a la adquisición de la competencia matemática. Desde este marco, se revisan algunas de las aportaciones más relevantes a nivel internacional sobre qué es y cómo se desarrolla la competencia matemática en las aulas de Educación Infantil y Primaria. Se concluye que la competencia matemática se refiere a la habilidad de utilizar de forma comprensiva y eficaz los conocimientos matemáticos que se aprenden en la escuela en todas las situaciones en los que estos conocimientos son necesarios; y que la planificación y la gestión de actividades matemáticas competenciales requiere el trabajo sistematizado de los contenidos a través de los procesos matemáticos. Desde este prisma, se ofrecen diversas ideas clave.

Palabras clave: *Competencia matemática, contenidos matemáticos, procesos matemáticos, Educación Infantil, Educación Primaria.*

Abstract

This article stresses the importance of replacing a curriculum focused on the acquisition of contents with one aimed at the acquisition of mathematical competence. Within this framework, a revision is carried out of some of the most relevant international studies on the question of what mathematical competence is and how it can be developed in preschool and primary classrooms. It is concluded that mathematical competence refers to the capacity to be able to use the mathematical knowledge learned at school in a comprehensive and effective way in all situations in which such knowledge is needed; and that approaches to and the undertaking of competence-based mathematical activities require systematic work on contents through mathematical processes. From this perspective, some key ideas are presented.

Keywords:

Mathematical competence, mathematical content, mathematical processes, Preschool education, Primary education.

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente los currículos de matemáticas (y de prácticamente todas las materias escolares) estaban diseñados para adquirir contenidos: los alumnos de hace dos, tres o más décadas debían aprender (muchas veces sin comprender) algoritmos, definiciones más o menos abstractas, etc., que

permitían, con mayor o menor suerte, aprobar un examen que a menudo consistía en resolver ejercicios descontextualizados. De esta forma, sin pretender generalizar, se fomentó que muchas inteligencias académicas "fracasaran" ante las situaciones problemáticas que va planteando la vida (Alsina, 2015): interpretar adecuadamente una factura del gas, negociar de forma eficaz una hipoteca en el banco, reconocer cuales son las mejores ofertas que ofrece un supermercado, comprar los muebles de acuerdo con las medidas reales de una habitación, etc.

Diversos organismos internacionales, como por ejemplo la *Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD, 2003, 2004, 2006), fueron alertando progresivamente de este desequilibrio entre la formación escolar y las exigencias sociales e impulsaron una transformación de los currículos que permitiera evolucionar en este sentido. En el caso concreto del currículo de matemáticas, se vio la necesidad de preparar a los alumnos no sólo para dominar los contenidos matemáticos, sino especialmente para poder usarlos en todas las situaciones de la vida cotidiana en las que intervienen las matemáticas.

Este nuevo planteamiento curricular implica partir de un enfoque más globalizado que no se limite a los contenidos matemáticos, sino trabajar de forma integrada todos los conocimientos matemáticos (contenidos y procesos), explorando como se potencian unos y otros y usándolos sin prejuicios. Además, exige trabajar para favorecer la autonomía mental de los alumnos, potenciando la elaboración de hipótesis, las estrategias creativas de resolución de problemas, la discusión, el contraste, la negociación de significados, la construcción conjunta de soluciones y la búsqueda de formas para comunicar planteamientos y resultados. En definitiva, pues, se trata de ayudar a gestionar el conocimiento, las habilidades y las emociones para conseguir un objetivo a menudo más cercano a situaciones funcionales y en contextos de vida cotidiana que a su uso académico.

En *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) se presenta un planteamiento que va en esta línea, en el que junto a los contenidos matemáticos que deberían aprenderse se hace referencia a los procesos matemáticos, y la integración de contenidos y procesos es la que da lugar al cuerpo de conocimientos matemáticos.

Los procesos matemáticos ponen de relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos. Su trabajo sistemático durante las etapas de Educación Infantil y Primaria permite: 1) introducir a los alumnos en las formas de pensar propias de las matemáticas: pensar, argumentar, razonar, demostrar, descubrir, representar, modelizar, etc.; 2) dar aplicabilidad a los contenidos matemáticos en diferentes contextos: en la escuela y, sobre todo, fuera de ella; 3) y, cómo no, desarrollar la competencia matemática.

1. ¿QUÉ ES Y QUÉ NO ES LA COMPETENCIA MATEMÁTICA?

Desde hace algunos años se ha ido incorporando el término "competencia" en el argot del profesorado. Se trata de un término importado del mundo empresarial que es complejo de definir, por lo que prácticamente existen tantas definiciones como autores han tratado de definirlo. No se pretende aquí aportar una definición más, puesto que reconocidos expertos han publicado numerosos artículos y libros y han pronunciado múltiples conferencias sobre el tema; sin embargo, de las palabras de estos reconocidos expertos pueden extrapolarse dos ideas opuestas: los más optimistas lo ven como la solución a todos los males, mientras que los más escépticos apuntan que este término no aporta nada nuevo, puesto que desde siempre la escuela ha formado a personas competentes.

Ni blanco ni negro. Por supuesto, no se comparte la opinión de los que consideran que la palabra "competencia" es un tecnicismo más en la lista de vocablos que aparecen cada vez que se aprueba una nueva ley de educación. Sólo podría compartirse esta idea -y además de forma parcial- si lo que se quiere expresar en realidad es que la escuela tradicional ha formado desde siempre a personas académicamente competentes. La implantación de un currículo orientado a la adquisición de

competencias básicas significa un paso adelante y pretende, en principio, formar personas con un mayor grado de eficacia para afrontar los problemas reales que plantea la vida, más allá de los estrictamente académicos. Este es un cambio substancial, pero de entrada no es garantía de nada puesto que implica -necesariamente- sacudir algunas creencias y estereotipos muy arraigados respecto a los procesos de enseñanza-aprendizaje. Desde esta perspectiva, se realiza una breve aproximación conceptual sobre la competencia matemática desde un triple enfoque: la aproximación del NCTM (2000), las aportaciones de Niss (2002) y la conceptualización de la competencia matemática de la OECD (2003).

1.1. La competencia matemática según el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000)

A partir del trabajo compartido de profesores de matemáticas de Educación Infantil, Primaria Secundaria; de multitud de sociedades de padres; de grupos de expertos; de seminarios de estudio; de equipos de innovación; de editoriales; de matemáticos preocupados por la enseñanza; de investigadores en educación; y responsables, en general, del currículum de matemáticas, se establecen (NCTM, 2000):

- Cinco estándares de contenidos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, y análisis de datos y probabilidad.
- Cinco estándares de procesos: la resolución de problemas; el razonamiento y la prueba; la comunicación; la representación; y las conexiones.

Los estándares y expectativas específicos referentes a los distintos bloques de contenidos y procesos pueden consultarse en NCTM (2003, p. 399-411).

A raíz de la publicación de estos estándares, los currículos de matemáticas de la mayoría de países han ido incorporando paulatinamente los procesos matemáticos que, junto con los contenidos matemáticos, constituyen el conjunto de conocimientos matemáticos que favorecen la competencia matemática. En la Figura 1 se muestra la interrelación entre ambos tipos de conocimientos matemáticos:

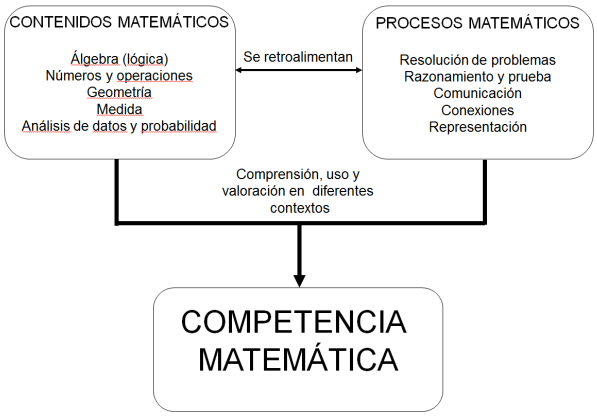


Figura 1: Interrelación entre contenidos y procesos matemáticos

Desde este enfoque, se insiste en la importancia y la necesidad de entender y ser capaz de usar las matemáticas en la vida diaria y en el trabajo: "en este mundo cambiante, aquellos que comprendan y puedan hacer usar matemáticas tendrán cada vez más oportunidades y opciones para determinar

su futuro. La competencia matemática abre puertas a un porvenir productivo; su carencia las mantiene cerradas" (NCTM, 2003, p. 5)

1.2. La competencia matemática según Niss (2002)

En una línea similar, Mogen Niss señala la necesidad de substituir los currículos de matemáticas orientados a la adquisición de contenidos, ya que se centran exclusivamente en la adquisición de símbolos y de técnicas, por currículos orientados al uso significativo de estos contenidos en una variedad de situaciones en las que las matemáticas pueden desempeñar un papel, haciendo hincapié en el enfoque competencial. Desde este prisma, Niss define la competencia matemática como "la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden desempeñar un papel" (Niss, 2002, p 7). Este autor identifica ocho competencias matemáticas que clasifica en dos grupos:

Tabla 1: Competencias matemáticas (Niss, 2002)

Grupo 1: Preguntar y responder preguntas "dentro de" y "con las matemáticas"
1. Dominio de modos matemáticos de pensamiento (pensar matemáticamente), como por ejemplo: - Plantear preguntas que son propias de las matemáticas y conocer el tipo de respuestas que las matemáticas pueden ofrecer; - Comprender y manejar las posibilidades y limitaciones de un determinado concepto; - Ampliar las posibilidades de un concepto extrayendo algunas de sus propiedades o generalizando resultados; - Diferenciar los diferentes niveles de las matemáticas (afirmaciones condicionadas del tipo "si-entonces", hipótesis, definiciones, teoremas, conjeturas o casos).
2. Planteamiento y resolución de problemas matemáticos, como por ejemplo: - Identificar, plantear y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos: puros o aplicados; abiertos o cerrados; - Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos, planteados por otros o por uno mismo, de diferentes maneras cuando sea necesario.
3. Modelización matemática (es decir, análisis y construcción de modelos), como por ejemplo: - Analizar los fundamentos y las propiedades de los modelos existentes, incluida la evaluación de sus posibilidades y de su validez; - Decodificación de los modelos existentes; - Realización de actividades de modelización en un determinado contexto: estructurar el campo; matematizar; trabajar con el modelo, incluyendo la solución de los problemas a que da lugar; validar el modelo, interna y externamente; analizar y criticar el modelo; comunicar sobre el modelo y sus resultados; vigilar y controlar todo el proceso de modelización.
4. Razonamiento matemático, como por ejemplo: - Seguir y evaluar cadenas de argumentos; - Conocer qué es una demostración matemática (y qué no es) y en qué se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático, como por ejemplo el heurístico; - Descubrir las ideas básicas en una determinada línea de argumento (sobre todo en una prueba), incluyendo la distinción de las líneas principales de los detalles, las ideas de los tecnicismos;

- Elaborar formal e informalmente argumentos matemáticos y demostrar declaraciones.
Grupo 2: Gestionar el lenguaje matemático y las herramientas matemáticas
5. Representación de las entidades matemáticas (los objetos y situaciones), como por ejemplo: - Comprensión y utilización (decodificación, interpretación, distinción entre) diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos, fenómenos y situaciones; - Comprensión y utilización de las relaciones entre las distintas representaciones de la misma entidad, y conocer sus puntos fuertes y sus limitaciones; - Elegir y cambiar entre las diferentes representaciones.
6. Manejo de símbolos matemáticos y formalismos, como por ejemplo: - Decodificación e interpretación simbólica y formal del lenguaje matemático, así como la comprensión de sus relaciones con el lenguaje natural; - Comprender la naturaleza y las normas de los sistemas matemáticos formales (tanto la sintaxis como la semántica); - Traducción del lenguaje natural al formal y simbólico; - Manejo y manipulación de las declaraciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.
7. La comunicación en, con, y acerca de las matemáticas, como por ejemplo: - Comprensión de textos escritos, visuales u orales que tengan un contenido matemático, en una variedad de registros lingüísticos; - Expresar estas cuestiones de forma escrita, visual u oral, con diferentes niveles de precisión teórica y técnica.
8. Hacer uso de los recursos y herramientas, como por ejemplo: - Conocer la existencia y propiedades de los diversos instrumentos y recursos disponibles para la actividad matemática, y conocer sus posibilidades y limitaciones; - Ser capaces de utilizar reflexivamente dichos recursos y herramientas.

Estas ocho competencias, como puede apreciarse, tienen que ver con procesos mentales o físicos, actividades y comportamientos. En otras palabras, la atención se centra en lo que las personas pueden hacer.

1.3. La competencia matemática según la *Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD, 2003, 2004)

En el marco de esta organización intergubernamental, en un primer momento se había utilizado el término "alfabetización matemática" (*mathematical literacy*) para referirse a las capacidades individuales de los alumnos para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. En PISA 2003 se usa ya el término "competencia matemática (*mathematical competence*) para resaltar su carácter funcional, y se concibe como:

> La capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades para su vida individual como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo(OECD, 2003, p. 24)

Las competencias o procesos generales elegidos por el proyecto PISA son ocho:

Tabla 2. Competencias matemáticas (OECD, 2004)

1. Planteamiento y resolución de problemas. Esta competencia incluye: a) plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados); y b) resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.
2. Uso de herramientas y recursos: esta competencia incluye utilizar los recursos y herramientas familiares en contextos, modos y situaciones que son distintos del uso con el que fueron presentados.
3. Pensamiento y razonamiento. Esta competencia incluye: a) plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿Cuántos hay? ¿Cómo encontrarlo? Si es así, ¿entonces?); b) conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a las cuestiones anteriores; c) distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas); y d) entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.
4. Argumentación. Esta competencia incluye: a) conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático; b) seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; c) disponer de sentido para la heurística (¿Qué puede -o no- ocurrir y por qué?); y d) crear y expresar argumentos matemáticos.
5. Comunicación. Esta competencia incluye: a) expresarse uno mismo en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita; y b) entender enunciados sobre estas materias de otras personas en forma oral y escrita.
6. Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal. Esta competencia incluye: a) decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones; y b) escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.
7. Utilización del lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones. Esta competencia incluye: a) decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural; b) traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal; c) manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; y d) utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.
8. Construcción de modelos: Esta competencia incluye: a) estructurar el campo o situación que va a modelarse; b) traducir la realidad a una estructura matemática; c) interpretar los modelos matemáticos en términos reales: trabajar con un modelo matemático; d) reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados; e) comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones); y f) dirigir y controlar el proceso de modelización.

Como puede apreciarse, las tres aproximaciones expuestas presentan diversas similitudes. En laTabla 3 se realiza una comparaciónentre los estándares de procesos (NCTM, 2000) y las competencias matemáticas (Niss, 2002; OECD, 2004):

Tabla 3: Comparación entre los estándares de procesos (NCTM, 2000) y las competencias matemáticas (Niss, 2002; OECD, 2004)

Estándares de procesos matemáticos (NCTM, 2000)	**Competencias matemáticas (Niss, 2002)**	**Competencias matemáticas en PISA 2003 (OECD, 2004)**

Resolución de problemas	Planteamiento y resolución de problemas matemáticos	Planteamiento y resolución de problemas
	Uso de recursos y herramientas	Uso de herramientas y recursos
Razonamiento y prueba	Dominio de modos de pensamiento matemático	Pensamiento y razonamiento
	Razonamiento matemático	Argumentación
Comunicación	Comunicación en, con y acerca de las matemáticas	Comunicación
Conexiones	-	-
Representación	Representación de entidades matemáticas	Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal
	Manejo de símbolos matemáticos y formalismos	Utilización del lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.
	Análisis y construcción de modelos	Construcción de modelos

Los procesos matemáticos y las competencias matemáticas que se exponen en la tabla 3 enfatizan una misma idea: la capacidad de usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos, además del escolar, reforzando de esta forma un enfoque social en torno al diseño, aplicación y evaluación de situaciones de aula que fomenten la competencia matemática.

2. ¿CÓMO SE FOMENTA LA COMPETENCIA MATEMÁTICA?

La evidencia procedente de la investigación sobre medidas educativas eficaces para mejorar el rendimiento en matemáticas subraya la necesidad de considerar las siguientes medidas:

- Atención a las diferentes necesidades del alumnado: las conclusiones de diversos estudios indican que adaptarse a la diferentes necesidades de aprendizaje de los alumnos, en lo referente a su disposición hacia el aprendizaje, su interés y su perfil individual de aprendizaje, incide positivamente sobre el rendimiento y la implicación en matemáticas (Tieso, 2001).
- Hacer hincapié en la importancia de las matemáticas: los métodos de enseñanza deberían partir de "grandes temas" y temas multidisciplinares que permitan establecer conexiones con la vida cotidiana y con otras asignaturas.
- Intervención temprana en la educación primaria: los dos primeros años de escolarización constituyen la base de los futuros aprendizajes en matemáticas, y la identificación de dificultades puede evitar que los niños desarrollen estrategias inadecuadas (Williams, 2008).
- Factores motivacionales: el profesorado necesita establecer y comunicar a sus alumnos unas expectativas de aprendizaje elevadas y fomentar la participación activa de todos ellos (Hambrick, 2005).
- Aumentar la participación de las familias: debe animarse a los padres a que ayuden a aprender y a disfrutar con las matemáticas (Williams, 2008).

En términos más generales, parece que para lograr cada vez mejores rendimientos es necesario trasladar el currículo de matemáticas a la práctica de aula; aplicar diversos enfoques didácticos para dar respuesta a las necesidades de todos los alumnos; usar de forma eficaz los métodos de evaluación; establecer objetivos y hacer un seguimiento de la eficacia de los programas de apoyo; aumentar la motivación y la implicación de los alumnos a través de iniciativas específicas; ampliar el repertorio didáctico del profesorado y fomentar la flexibilidad; promover políticas basadas en la evidencia; y, por supuesto, trabajar los contenidos a través de los procesos matemáticos.

Desde esta perspectiva, Alsina (2010) plantea que para favorecer el desarrollo de la competencia matemática es preciso partir de contextos de aprendizaje significativos y ajustados a las necesidades de los alumnos. Haciendo un símil con la pirámide de la alimentación, plantea la"Pirámide de la Educación Matemática" en la que se indica de forma sencilla el tipo de recursos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su frecuencia de uso más recomendable. Como en el caso de la pirámide alimentaria, no descarta ningún recurso, sólo informa sobre la conveniencia de restringir algunos de ellos a un uso ocasional y, por eso, puede ser una herramienta muy útil para el profesorado preocupado por hacer de su metodología una garantía de educación matemática.



Figura 2: Pirámide de la Educación Matemática (Alsina, 2010)

En la base de este diagrama piramidal están los recursos que necesitan todos alumnos y que, por lo tanto, se podrían y deberían "consumir" diariamente para desarrollar el pensamiento matemático en general y la competencia matemática en particular. Ahí están las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana de cada día; la observación y el análisis de los elementos matemáticos de nuestro contexto; la manipulación con materiales diversos, dado que la acción sobre los objetos posibilita que los alumnos puedan elaborar esquemas mentales de conocimiento; o bien el uso de juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después aparecen los que deben "tomarse" alternativamente varias veces a la semana, como los recursos literarios: cuentos populares, narraciones, novelas y canciones con un contenido matemático; o los recursos tecnológicos como el ordenador y la calculadora. Por último, en la cúspide, se encuentran los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los libros de texto.

Sin embargo, el libro de texto continúa ejerciendo un control considerable en el diseño y el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, por lo que en realidad, en la práctica diaria de muchos docentes este organigrama piramidal está invertido: en la base están los libros de texto, que vendrían a ser como las carnes grasas o los pasteles; mientras que la matematización del entorno, el uso de materiales manipulativos, juegos, etc. "se consumen muy poco". En nutrición, la inversión de la pirámide conlleva problemas de salud, como por ejemplo la obesidad. En educación

matemática, la inversión del organigrama piramidal conlleva también graves problemas. Estos problemas han sido analizados desde distintas disciplinas, entre ellas la educación matemática: aprendizajes poco significativos, desmotivación, falta de comprensión, etc., y son los que han dado lugar, en términos generales, a una escasa competencia matemática. Parece necesario, pues, repensar qué tipo de actividades se ofrecen a los alumnos para poder desarrollar su competencia matemática.

En esta línea, se considera que el diseño que actividades competenciales requiere la necesidad de trabajar los contenidos matemáticos a través de los procesos matemáticos.La combinación de ambos tipos de conocimientos favorece nuevas miradas que enfatizan no sólo el contenido y el proceso, sino -y especialmente- las relaciones que se establecen entre ellos:

	Álgebra	Números y operaciones	Geometría	Medida	Análisis de datos
Resolución de problemas					
Razonamiento y demostración					
Comunicación					
Conexiones					
Representación					

Figura 2: Relación cartesiana entre contenidos y procesos matemáticos

Partir de este enfoque globalizado del conocimiento matemático ya desde las primeras edades, en la que todo está integrado, nos parece especialmente significativo, dado que cuando los alumnos usan las relaciones existentes en los contenidos matemáticos, en los procesos matemáticos y las existentes entre ambos, progresa su conocimiento de la disciplina y crece la habilidad para aplicar conceptos y destrezas con más eficacia en diferentes ámbitos de su vida cotidiana.

En Alsina (2014, 2015) se exponen diversas ideas clave para trabajar los contenidos desde los procesos matemáticos. En un intento de síntesis, los aspectos más relevantes que deberían considerarse son los siguientes:

Tabla 4: Ideas clave sobre los procesos matemáticos en las aulas de Educación Infantil y Primaria (Alsina, 2014, 2015)

Resolución de problemas	- Una situación problemática es una situación nueva de la que no se conoce por adelantado el método de resolución. - La resolución de problemas tiene que entenderse como el marco de aplicación de los diferentes bloques de contenido matemático. - Además del tipo de contenido, hay que considerar otros criterios: según el tipo de enunciado (visual o verbal), según la finalidad (aprender una estrategia, aplicar una técnica, etc.), según el tipo de respuesta (abierta, cerrada) ... - Se aprende a resolver problemas haciendo, manipulando, simulando, discutiendo, compartiendo, imaginando, observando, visualizando, etc. - En el proceso de resolución se tendría que permitir que cada alumno utilice la técnica o la estrategia que se ajuste mejor a sus posibilidades: un esquema, un material, el cálculo mental, etc.
Razonamiento y prueba	- En las primeras edades el razonamiento es sobre todo informal y se refiere a la capacidad de argumentar, mientras que la prueba implica comprobar. - A medida que los niños avanzan tendrían que interiorizar otros tipos de razonamiento: algebraico, geométrico, estadístico y probabilístico, etc. - Una gestión de las prácticas matemáticas que favorezca el razonamiento y la prueba implica plantear buenas preguntas, más que dar explicaciones. - Las preguntas tienen que servir para justificar (por qué piensas que es verdad?); para descubrir (qué piensas que pasará ahora?); argumentar proposiciones (por qué funciona esto?); y hacer razonamientos inductivos y deductivos. - Las prácticas realizadas a partir de proyectos y situaciones de experimentación favorecen el razonamiento y la prueba, en contraposición a prácticas descontextualizadas (basadas en la repetición y la práctica).
Comunicación	- Las matemáticas son, entre otras cosas, un lenguaje que permite comunicarse. Sin embargo, se tiende a asociarlas al lenguaje simbólico, pero no es la única herramienta para comunicar ideas matemáticas. - El lenguaje oral y escrito son herramientas imprescindibles (y previas al lenguaje simbólico) para comunicar el pensamiento matemático. - La comunicación se tiene que distinguir de la información: informar implica transmitir en sentido unidireccional; en cambio comunicar implica interactuar en sentido bidireccional. - La comunicación requiere integrar los procesos de interacción, diálogo y negociación alrededor de los contenidos matemáticos y su gestión. - En los procesos de interacción, diálogo y negociación, las preguntas se erigen como uno de los instrumentos de mediación más idóneos, puesto que pueden hacer avanzar desde unos primeros niveles de concienciación sobre el que uno ya sabe o es capaz de hacer hacia niveles más superiores.

Conexiones	- Se refieren a las relaciones entre los conocimientos matemáticos (intradisciplinariedad); entre las matemáticas y otras áreas de conocimiento (interdisciplinariedad); y entre las matemáticas y el entorno (enfoque globalizado). - Las conexiones entre los diferentes bloques de contenido matemático ponen de manifiesto que las matemáticas constituyen un campo integrado de conocimiento. - Las conexiones entre las matemáticas y otras áreas de conocimiento dan respuesta al enfoque interdisciplinario que tendrían que tener las actividades competenciales. - Las conexiones entre las matemáticas y el entorno evidencian que el uso de contextos reales o realistas contribuyen a comprender cuál es el sentido de las matemáticas. - Cuando los alumnos pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión mejora.
Representación	- La representación de las ideas y procedimientos matemáticos es un proceso indispensable para aprender, puesto que si no hay representación no hay comprensión. - El desarrollo progresivo de la representación va del concreto al abstracto (abstracción progresiva). - La adquisición progresiva de la representación aumenta la capacidad por modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. - La representación está estrechamente ligada con la comunicación, cada uno de ellos coopera con el otro y le apoya. - A través de las representaciones y los modelos matemáticos se comprenden mejor las ideas matemáticas, puesto que representaciones y modelos diferentes aclaran diferentes aspectos de una idea matemática compleja.

La planificación y gestión de actividades que consideren de forma sistemática los aspectos mencionados en la tabla anterior van a permitir fomentar progresivamente la competencia matemática en las aulas de Educación Infantil y Primaria.

Referencias

Alsina, Á. (2010). La "pirámide de la educación matemática", una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa, 189,* 12-16.

Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números 86,* 5-28.

Alsina, Á. (2015). *Cómo fomentar el aprendizaje de las matemáticas en el aula. Ideas clave para la Educación Primaria.* Barcelona: Editorial Casals.

Hambrick, A. (2005). *Remembering the child: On equity and inclusion in mathematics and science classrooms.Critical issue.*North Central Regional Educational Laboratory.

NCTM (2000).*Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics. (Traducción española: NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.*Sevilla: Thales).

Niss, M. (2002).*Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project.* Roskilde: Roskilde University.

OECD (2003).*The PISA 2003 assessment framework: mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills.* París: OECD

OECD (2004).*Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003.* París: OECD.

OECD (2006).*Assessing scientific, reading and mathematical literacy: A framework from PISA 2006.*París: OECD.

Tieso, C. (2001). Curriculum: Broad brushstrokers or paint-by-the numbers? *Teacher Educator, 36,* 199-213.

Williams, P. (2008). *Independent review of mathematics teaching in early years settings and primary schools: final report.* London: DCSF.

PROFESORA, ¿QUÉ ES MULTIPLICAR?[I]

Teacher, what is multiply?

Obando-Zapata, G

Universidad de Antioquia, Colombia; gilberto.obando@udea.edu.co

Resumen

A pesar de las diferencias culturales que se puedan presentar de un país a otro, la respuesta a la pregunta planteada en título es, con pequeños matices, casi la misma: la multiplicación es una forma abreviada de sumar, cuando los sumandos son todos iguales. Esta forma de responder la pregunta, si bien da la ilusión de dar continuidad conceptual desde la suma hasta la multiplicación, abre el camino a una serie de problemáticas en el aprendizaje de la multiplicación a lo largo de la educación básica y media. Así entonces, En este artículo argumentaremos en favor de una comprensión de la multiplicación que se distancia de la perspectiva clásica de la suma de sumandos iguales, y que la posiciona en relación con la coordinación de procesos de variación entre cantidades, y por ende, sobre la base conceptual de las nociones de razón, proporción y proporcionalidad.

Palabras clave: *Razonamiento proporcional; estructuras multiplicativas; pensamiento numérico; educación básica.*

Abstract

Despite cultural differences that may arise from one country to another, the answer to the question posed in the title is, with little nuances, almost the same: the multiplication is a shortened form of adding, when the summands are all equal. This way of answering that question, but gives the illusion of conceptual continuity from the sum to the multiplication, opens the way to an important series of problems in learning multiplication along the primary and secondary education. So then, this article will argue in favor of an understanding of multiplication that is away from the classical perspective of the sum of equal addends, and that positioned it in relation with the processes coordination of variation between quantities, and therefore on the conceptual basis of the notions of ratio, proportion and proportionality.

Keywords:

Proportional Reasoning; Multiplicative Structure;Numerical Thinking; Primary Education.

CÓMO SE ENSEÑA LA MULTIPLICACIÓN:

Una estrategia muy común para introducir el estudio de la multiplicación en los primeros años de la Educación Básica (por lo general finalizando el grado 2, o iniciando el grado 3) es la de mostrar la multiplicación como una forma de abreviar la suma, cuando los sumandos son todos iguales.Este tipo de mirada sobre la multiplicación tiene una ventaja aparente al mostrar una línea de continuidad desde la suma hacia la multiplicación, pero en el sentido estricto de la palabra, los eventos o fenómenos en donde se suma varias veces una misma cantidad al presentar explícitamente solo un sistema de cantidades (cantidad de lápices o de borradores) deja escondido elementos clave que permiten relacionar este tipo de situaciones con los casos más simples de proporcionalidad directa(Vergnaud, 1988, 1994, 2009), y por lo tanto, no permiten una buena comprensión de las relaciones entre las cantidades involucradas en toda situación multiplicativa(Gilberto Obando, Vasco, & Arboleda, 2014). Todo lo anterior, sin entrar a considerar

los casos en los que la multiplicación no admite la interpretación de una suma de sumandos iguales, como por ejemplo, el cálculo de áreas de figuras planas a partir de multiplicar dos medidas lineales,[i] o cuando las cantidades multiplicadas son fracciones menores que la unidad.

Esta aproximación que se hace en la escuela a la multiplicación a partir de la suma de sumandos iguales no es la más apropiada,[ii] no solo porque es limitada para interpretar los tipos de tarea a los que se deben enfrentar los estudiantes, sino porque se circunscribe a una forma de pensamiento aditivo (acumulaciones sucesivas en una sola cantidad), alejándola de las formas de razonamiento típicamente multiplicativas (variación conjunta de dos o más cantidades), pues los eventos o fenómenos que generan problemas multiplicativos son aquellos en donde existen al menos dos cantidades variables, para las cuales, la variación en una de ellas condiciona el proceso de variación en la otra(Obando Z., 2015). Incluso, en este tipo de situaciones, al ver la multiplicación como una suma abreviada se centra la atención en una sola de las cantidades, y por ende en su variación (acumulación aditiva), y se deja implícita la otra cantidad al igual que la variación conjunta de la primera con respecto a la segunda.

EL TRABAJO RELIZADO EN EL AULA

Con críticas como las anteriores y teniendo en cuenta que el conocimiento de la multiplicación forma parte de un constructo mucho más amplio, el de las estructuras multiplicativas(Vergnaud, 1988, 1994, 2009), durante una año lectivo escolar se analizó la actividad matemática de un grupo de estudiantes del grado tercero de una Institución Educativa, [iii]la cual pretende una organización de los procesos de enseñanza de la multiplicación desde la perspectiva del isomorfismo de medidas, como una alternativa para superar las problemáticas antes enunciadas.

Así entonces, en la propuesta pedagógica para el grado 3, en el plan de área de esta institución destaca un eje llamado "estructuras multiplicativas", que se desarrolla a lo largo del año escolar, y a partir de líneas temáticas como las siguientes:

- Diferentes algoritmos para la multiplicación: egipcio, ruso, celosía (árabe), tradicional;
- Relaciones multiplicativas: doble de…, la mitad de… (*ídem*, cuádruple de…, cuarta parte de…; óctuple de…, octava parte de…; etc.); triple de…, la tercera parte de… (*ídem*, séxtuple de…, la sexta parte de…; 9 veces…, la novena parte de…; etc.), entre otras;

---

[i] En ocasiones este cálculo áreas de figuras planas se hace cuadriculando la superficie de la figura, contando cuántos de esos cuadrados unidad hay en un lado, y sumando luego esta cantidad tantas veces como cuadrados unidad hay en el otro lado. Si bien procedimientos de este tipo son expresiones de una suma de sumandos iguales, se debe destacar que en el sentido estricto de la palabra, no se multiplicaron las dos medidas lineales, sino que se cambia el problema original por otro, que consiste en multiplicar una cantidad de área (la cantidad de cuadrados unidad en uno de los lado) por un número sin unidades, que es el que representa las veces que se repite dicha cantidad de área. Así entonces, cuando el área es vista como producto de dos medidas lineales, esta multiplicación no admite interpretación como suma de sumandos iguales.

[ii] Es importante aclarar en este punto que la aproximación a la multiplicación como suma de sumandos iguales tiene un trasfondo en la axiomática de Peano, en donde la multiplicación es definida en forma recursiva como: (1) y (2) (donde x, y son números naturales y). Esta definición, en última instancia, reduce la multiplicación a una suma donde x se repite y veces como sumando. Sin embargo, esta interpretación de la multiplicación como abreviación de una suma de sumandos iguales, derivada de un aproximación formalizada con base en la axiomática de Peano, no da cuenta de las formas de razonamiento típicamente multiplicativas presentes en los tipos de problemas que se resuelven a través de multiplicaciones y divisiones, en particular, de aquellos que implican situaciones de proporcionalidad directa.

[iii] En Colombia, el grado tercero de la Educación Básica lo cursan estudiantes que, en promedio, tienen 10 años de edad. Esta Institución Educativa, es de carácter privado, y atiende estudiantes de una población de condiciones socioeconómicas altos. El trabajo se realizó a lo largo de un año escolar, entre los meses de septiembre de 2010 y junio de 2011.

- Problemas multiplicativos: cuarta proporcional y proporcionalidad directa;
- Tablas de multiplicar.

Estas líneas temáticas, que se desarrollan paralelamente a lo largo del año lectivo, presentan de hecho cuestiones interesantes en lo que tiene que ver con los primeros aprendizajes de la multiplicación. En primer lugar, la aproximación a las relaciones multiplicativas pone en simultáneo parejas de razones (relaciones parte-todo) de la forma *n-veces de…* y *n-ésima parte de…*, y esto permite trabajar al tiempo tanto con las relaciones directas como con las inversas, relacionando la razón *n-veces* (razones en las que la cantidad mayor es un número exacto de veces la cantidad menor) con la razón *n-ésima parte de* (cuando la cantidad menor es una parte alícuota de la mayor). Dicho de otra manera, la multiplicación se aprende en simultáneo con la división. Además, estas parejas de razones son organizadas a través de familias de cantidades que conservan la regularidad de que al ser ordenadas de mayor a menor, cada pareja de cantidades consecutivas es una de otra el *doble de…*, o la *mitad de…*; el *triple de…*, o el *tercio de…*; etc. Esta regularidad en las cantidades genera entonces familias de parejas de razones de la forma 2^n*veces…* $\frac{1}{2^n}$*parte de…*; o de la forma 3^n*veces…* $\frac{1}{3^n}$*parte de…etc.* Las regularidades que se identifican entre estas familias de cantidades y de parejas de razones son utilizadas como una estrategia para el aprendizaje de las tablas de multiplicar, de tal forma que éste sea resultado de la aplicación sucesiva de relaciones entre números (razones).

Además, el estudio de estas familias de razones es la base para el trabajo con las multiplicaciones; así por ejemplo, multiplicar por 2 tiene como base la razón *doble de…*, multiplicar por 3, la razón *triple de…*, y así sucesivamente. De esta manera la institución busca una base conceptual para la multiplicación a partir de la noción de razón y, como se verá más adelante, esta apuesta institucional da una forma específica a la actividad matemática que desarrollan los estudiantes.

Finalmente se plantean los problemas multiplicativos como si fueran problemas de proporcionalidad simple directa. Este trabajo se introdujo a través de una adaptación de la propuesta de los minicomputadores de Papy[iv] que realizaron los profesores de la institución: a los niños se les presenta una tabla con cuatro casillas, donde se dan tres valores (el valor de la primera posición es uno), y se debe encontrar un cuarto valor desconocido. Dos a dos las cantidades son de la misma naturaleza y se organizan en la tabla de tal forma cada pareja ocupa una columna diferente. Esquemáticamente esto les permite trabajar situaciones de la forma $\begin{matrix} 1 & \rightarrow & a \\ n & \rightarrow & ? \end{matrix}$ para la multiplicación, o de la forma $\begin{matrix} 1 & \rightarrow & ? \\ n & \rightarrow & n \times a \end{matrix}$ o $\begin{matrix} 1 & \rightarrow & a \\ ? & \rightarrow & n \times a \end{matrix}$ para el caso de la división. El trabajo se desarrolla de manera tal que en ocasiones se da la representación gráfica, para que el estudiante elabore el enunciado verbal del problema y realice el cálculo respectivo, o dado el enunciado verbal, el estudiante debe realizar la representación gráfica y solucionar el problema.

Puede decirse que esta forma de organizar el estudio de las relaciones multiplicativas tiene un fundamento epistemológico interesante, pues, de un lado, pone la idea de razón como base para la

[iv] Una especie de ábaco plano, con cuatro casillas, diseñado por Georges Papy en los años 50, usado para el aprendizaje de la numeración y el cálculo numérico (fundamentalmente en el sistema binario). La adaptación realizada en la institución se orientó hacia la representación de las cuatro cantidades implicadas en una situación multiplicativa de isomorfismo de medidas, sin tomar en consideración los cambios de unidad que implicaban los valores posicionales de cada casilla en la propuesta original de Papy. En el sentido estricto de la palabra, al no considerar el valor posicional de las casillas se deja de lado la propuesta original, y por tanto, bien podría dársele otro nombre a esta adaptación, pero aquí se conserva ese nombre en tanto era el que se le daba en la institución.

construcción de tales tipos de relaciones y, de otro, organiza los procesos de estudio de la multiplicación y la división como parte del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. De esta manera el estudio de ciertos objetos de conocimiento tales como la razón, el número racional, la proporción y la proporcionalidad se realiza siguiendo una línea que toma como base la linealidad. Además, las operaciones multiplicación y división son estudiadas en contextos que las muestran una como inversa de la otra, y separando los aspectos relativos al cálculo de los que son propios de las relaciones multiplicativas de base. Y todo lo anterior, unido a la puesta en escenade diferentes formas de representación (verbal, gráfica, simbólica –fracción y notación decimal) y a partir de favorecer el desarrollo de diferentes tipos de técnicas de cálculo (diferentes algoritmos, uso de relaciones numéricas, memorización de hechos numéricos), lo que genera entonces ambientes ricos para la actividad matemática de los alumnos en donde se favorecen la búsqueda de regularidades, la formulación y validación de hipótesis, la comparación de procedimientos, etc.

RESULTADOS DEL TRABAJO CON LOS ESTUDIANTES

Percepción de la covariación entre cantidades

Las imágenes mostradas en la figura 2, son respuestas dadas por los estudiantes a una de las tareas iniciales que se les propuso, en la cual se les daba el enunciado "Andrés pagó $120 por 8 dulces iguales. ¿Cuánto pagará por tres dulces?", y se les entregaba una tabla en la que debían consignar el precio para otras cantidades de dulces, y en la cual solo se escribía la pareja de valores 8 y 120.

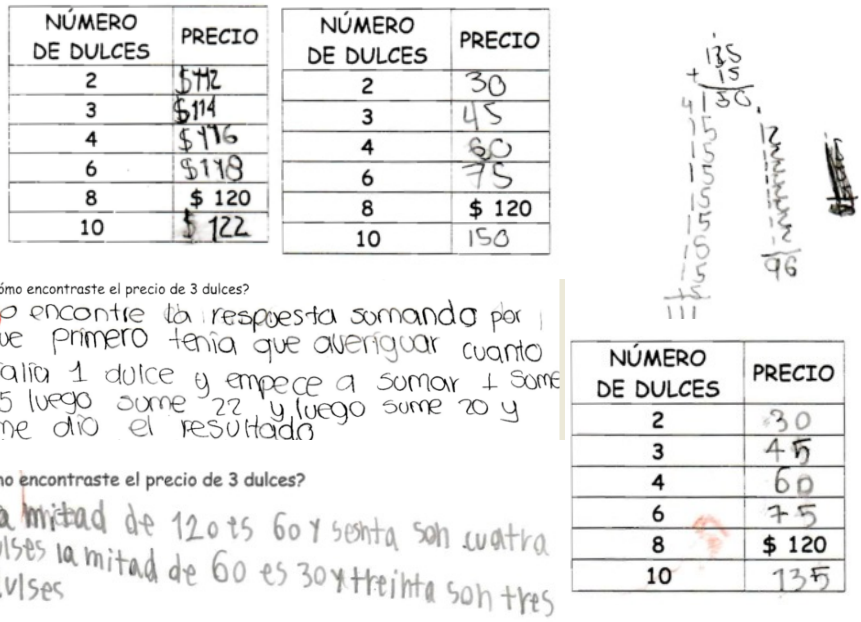


Figura1: procedimientos en una tarea de covarición entre dos cantidades

Los procedimientos de los estudiantesmuestran que pueden percibir la covariación entre las cantidades involucradas en el evento (cantidad de dulces, precio de dicha cantidad), pero no todas las formas de correlación establecida permiten realizar un tratamiento apropiado de la tarea.

Así por ejemplo, el procedimiento en la imagen de la parte superior izquierda, las dos cantidadesse correlacionan en función del número de casillas que se deben completar con los precios de los dulces. Por su parte, las otras dos imágenes de la parte superior (centro y derecha), tiene la diferencia de que el conteo se basa en suponer un valor hipotético para un dulce, y se realiza un conteo iterado de este valor hipotético tantas veces como cantidad de casillas vacías hay por llenar, y además, se busca que la distribución de valores haga coincidir a la cantidad de 8 dulces el valor de $ 120 (este valor hipotético se estableció de diversas formas, pero para el caso de estas dos imágenes, la estrategia fue buscar una cantidad que repetida 8 veces diera 120, y luego se repitió este 15, una vez por cada casilla en la tabla).

Nótese entonces que el instrumento usado para presentar la información determina la manera como se analizan las relaciones entre las cantidades. Esta forma de "ver" las relaciones entre las cantidades define unos procedimientos que no permiten asignar el valor correcto a cada cantidad de dulces, pues se basan en un criterio de distribución espacial de la escritura de las cantidades en la hoja de trabajo: la cantidad de casillas vacías en la segunda columna de la tabla se usan para hacer una distribución regular de una serie de valores de tal forma que el 120 fuera coherente con esta secuencia de valores, y se asume que cada casilla es un dulce más en la cuenta. Es importante llamar la atención en el procedimiento descrito en la frase que se puede leer en la parte inferior izquierda, pues como se puede ver, el estudiante ha identificado de manera clara la relación entre la cantidad de dulces y el valor correspondiente a dicha cantidad, y opera con esta relación de tal forma que reducir una de ellas a la mitad, reduce la otra igualmente a la mitad (claro, que al final de cadena de enunciados comete un error que lo lleva a un procedimiento equivocado al llenar la tabla), lo que muestra el poder de la noción de razón en el tratamiento de este tipo de situaciones.

Coordinación de un doble conteo

Como se puede observar de esta corta selección, los procedimientos de los estudiantes muestran cierta sensibilidad para percibir en un determinado evento el proceso de covariación entre las cantidades de los dos sistemas de cantidades involucrados en el evento, pero el criterio o regularidad usado para definir tal proceso de covariación no les permite la descripción precisa de lo que realmente sucede en el evento. También se evidencia que los valores faltantes en la columna precio no se fijan de cualquier manera, sino que se hace a partir de un principio que tiene al menos dos momentos: uno, que fija el valor de un dulce (tomar como referencia que el valor de 8 dulces es $ 120), y otro, que permite hacer copias sucesivas de ese valor, tantas veces como dulces se tenga (lo que implica interpretar el valor escrito en cada una de las casillas de la columna de la izquierda). Nótese que en los casos mostrados el criterio escogido para una u ambas partes del proceso no es apropiado, pues los estudiantes más que centrar la atención en el proceso de variación de las cantidades en ambos sistemas, analizan la variación en cada sistema como dependiendo de su distribución espacial en la tabla, y trasladan relaciones en uno de los procesos como regla para controlar el proceso de variación en el otro sistema.

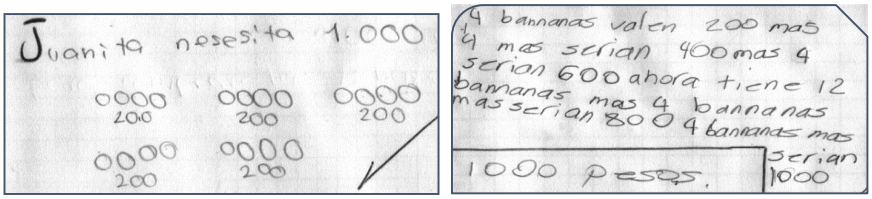


Figura 2: procedimientos de los estudiantes en otra tarea de covariación entre cantidades

En la figura 3 se muestran los procedimientos en otra tarea, similar a la anterior, pero en donde no se les pidió llenar una tabla. El enunciado sobre el cual trabajaron decía "Juanita ha comprado 4 bananas para regalar a algunos de sus amigos, y pagó 200 pesos. Ella quiere saber cuánto dinero necesitaría para regalar de una banana a cada uno de sus 20 compañeros de clase. ¿Cómo le ayudarías a Juanita a realizar las cuentas?".[v] Estos dos procedimientos muestran plena conciencia del proceso de covariación entre los dos sistemas de cantidades, pues se explicita que por cada vez que se repita la cantidad 4 dulces, se repite la cantidad $ 200. Esto implica conciencia de la relación (razón):*cada cuatro dulces se corresponden con doscientos pesos*. Tener conciencia de este tipo de relaciones, es clave para la comprensión de una idea de razón, y para el uso instrumental de esta idea de razón en la comprensión de los conceptos propios de la multiplicación, como se puede ver, en las formas de representación tanto de las cantidades, como de sus procesos de variación, los cual es por demás fundamental en la objetivación de los aprendizajes sobre la multiplicación.

[v]En Colombia, una banana es un dulce o caramelo que viene envuelto en una cubierta plástica.

El siguiente diálogo igualmente es evidencia de la necesidad de tal comprensión:

36:06	e:	es que no se si multiplicar, sumar o restar.
36:07	p:	a ver empecemos. qué es lo que tienen que hace::r Juanita
36:11	e:	Juanita apenas compró cuatro bananitas para regalarle a algunos amigos y cuando ahí::
36:21	p:	doscientos pesos
36:25	e:	ella quiere saber cuánto dinero necesitará para regalar una banana a cada uno de sus amigos
36:35	p:	entonces cuántas bananas realmente necesitará Camila
36:38	e:	a:h necesita:: veinte
36:39	p:	necesita veinte bananas. y ella necesita saber cuánto dinero necesitaría para comprar las veinte bananas. y entonces. ella que.que tiene. ella. estos doscientos pesos por cuántas bananas fueron?
36:57	e:	estos fue, po:r cuatro bananas
36:58	p:	cuatro bananas, entonces para completar veinte bananas que tiene que hacer
37:04	e:	se, se::: suma?
37:14	p:	tiene que comprar más bananas?
37:15	e:	si
37:16	p:	cuantas más
		((una larga espera mientras la estudiante piensa))
37:47	e:	dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte
38:02	e:	necesita: -- dieciséis?
38:03	p:	aja. necesita dieciséis bananas más y cuanto le costarán esa dieciséis bananas más, si tú sabes que cuatro valen doscientos
38:16	e:	si cuatro valen doscientos, más uno, trescientos.
38:34	p:	NO. cuatro bananas valen doscientos
		((otra pausa larga))
39:16	e:	con cuatro bananas más ya serían cuatrocientos
39:18	p:	exactamente, con cuatro bananas más serían cuatrocientos, perfecto. --- cuántas bananas llevarías aquí en total? --- cuántas bananas llevas hasta ahora?
39:46	e:	ahora llevo:: - ocho
39:47	p:	llevas ocho bananas y llevas cuatrocientos pesos
39:58	e:	a:h (mas cinco)
39:59	p:	y por qué cinco
40:02	e:	más otras cuatro
40:04	p:	más otras cuatro, porque tú sabes cuánto valen doscientos pero no sabes todavía cuánto valen cinco. más otras cuatro
40:14	e:	cuatrocientos y dos ((no es audible))
40:16	p:	serían seiscientos, más otras cuatro ya serían seiscientos
40:22	e:	y ahora tiene doce bananas

40:23 p: y ahora tiene doce bananas

40:48 p: ...más

Desde la entrada 36:06 hasta la entrada 36:38, la interacción entre el profesor y el estudiante está orientada a que este tome conciencia de las de las cantidades involucradas en la situación. La intervención del profesor en la entrada 38:03 y 38:34 se presenta una situación crucial, pues se busca que el estudiante tome conciencia de la relación *cuatro bananas 200 pesos*, lo cual es crítico a partir de la entrada 39:16, en donde luego de la negación del profesor en la entrada anterior, el estudiante ve que por cada cuatro bananas, debe agregar $200 al total de dinero. Obsérvese como en la entrada 39:18 el profesor recapitula el trabajo realizado, mostrando las dos cuentas que se deben llevar, en las entradas siguientes, sigue insistiendo en los totales de ambas cantidades: cuántas bananas se completan, y cuánto dinero se ha acumulado.

En suma, lo anterior muestra varios elementos claves en la comprensión de la multiplicación: (1) diferenciar la naturaleza de cada uno de los sistemas de cantidades, (2) identificar que de acuerdo con las condiciones del evento que da origen a la tarea, al interior de cada sistema de cantidades hay un movimiento en los valores que pueden tomar las cantidades y, finalmente, (3) que ese movimiento de los valores de las cantidades está gobernado por una condición, para este caso, la razón *4 bananas son 200 pesos*, a este nivel, objetivada a partir de una expresión verbal. En ambos casos, la tarea se resuelve favorablemente por la comprensión de esta razón, y por la coordinación del doble conteo que se desencadena a partir de dicha razón, lo que garantiza dos cosas: una, cada que haya un cambio en una cantidad hay un cambio en la otra, y dos, el cambio se coordina a partir de una regularidad (cada que se agreguen cuatro bananas a la cantidad de bananas, se deben agregar $200 a la cantidad total de dinero).

Iconicidad y objetivación de las unidades de conteo

En una de las tareas los estudiantes debían completar los valores faltantes en unas tablas en las que se presentaba información incompleta sobre estados posibles de un juego realizado.[vi] Para cada tabla se sabía el color de la sección de la canasta a la cual pertenecían los valores consignados en ella (y por ende el puntaje que daba cada ficha en dicha sección) y se daba, o bien la cantidad de fichas obtenidas en dicha sección de la canasta, y se debía encontrar el puntaje correspondiente a dicha cantidad de fichas, o bien se daba el puntaje total en un determinado color, y se debía determinar la cantidad de fichas que originaron dicho valor.

A pesar de lo elemental que parecen ser los procedimientos mostrados en la figura 4, implican una complejidad que se pone en evidencia en la manera como se realiza la representación de las cantidades y sus relaciones. Por ejemplo, en la imagen de la parte superior derecha, cada grupo de rallas representa una ficha, y la cantidad de rallas en el grupo, el valor de la ficha de acuerdo a la zona en que cayó en la canasta (cada grupo de rallas representa la razón *una ficha, cantidad de puntos por dicha ficha*). Es importante resaltar entonces que en estas formas de representación se están objetivando la relación *una ficha,puntos por esta ficha* (al representar el valor de la ficha

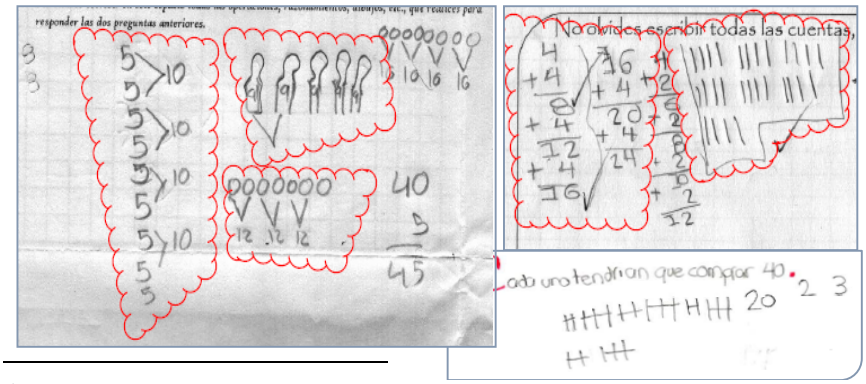


Figura 3: representaciones de la razón entre dos cantidades y operaciones realizadas con dichas representaciones

[vi]) que tenía cuatro zonas pintadas de un
[c] n que cayera.

con un grupo de rayas verticales), y por ende, la repetición de *n* de tales grupos objetivan la cantidad de fichas y la cantidad de puntos se objetiva en el conteo del total de las rayas dibujadas.En la imagen de la izquierda, los dos "círculos" unidos con una raya al "12", representa la razón, por *cada 2 fichas, 12 puntos*. Obsérvese entonces las diferentes formas de iconicidad utilizada para representar la razón entre las dos cantidades, y además, la forma de utilizar operativamente esta dicha representación de la razón. En particular, es de notar cómo en los procedimientos mostrados, si bien se representan los valores de las fichas con rayas horizontales, y hay tantos grupos como fichas en un determinado color, hay un apoyo en la representación numérica para determinar el total de puntos obtenidos sumando tantas veces el valor de la ficha, como fichas en un determinado color.

Este recurso a la combinación entre representaciones icónicas, acompañadas de representaciones simbólicas (uso de números), permite llevar el control de los dos procesos de variación acumulativa. Estas formas de representación combinada permiten a los estudiantes una objetivación de las cantidades en cada sistema, de la relación entre dichas cantidades, y de los procedimientos para llevar a cabo el control y coordinación de los dos procesos de conteo que permiten resolver el problema. Esto les entrega capacidades operatorias para controlar los dos procesos de acumulación, y por ende, de la correlación entre la cantidad de bolos con la cantidad de puntos que les corresponde.

CONCLUSIONES

En los casos analizados, el control de uno de los sumandos está soportado sobre algún medio (físicamente en las fichas usadas en el juego, en los dibujos, en las grafías escritas en las hojas de trabajo, etc.), y puede ser de uno en varios (cuando la relación inicial es del tipo: por cada unidad en uno de los sistema hay ***n*** unidades en el otro sistema) o de varios a varios (cuando la relación es del tipo: por cada ***m*** unidades en uno de los sistema, hay ***n*** unidades en el otro). Este proceso de control de la cantidad de veces que se repite la cantidad unidad en uno de los sistemas (los puntos por cada ficha, el valor de una banana, los puntos por bolo, etc.) se oculta tras las representaciones físicas de las cantidades y de las acciones físicas de los estudiantes con dichas representaciones y, entonces, se da la impresión que sólo se estuviera trabajando sobre una sola suma iterada (la de los puntos, los precios, etc.), pero en realidad hay dos procesos de sumas iteradas que se coordinan entre sí: la suma de uno en uno (doces, cuatros, cincos) en un sistema de cantidades (la cantidad de fichas, la cantidad de bananas) se coordina con la suma de dos en dos, de cinco en cinco, etc., en el otro sistema de cantidades (el total de puntos, el precio total, etc.). Este ocultamiento de uno de los dos procesos de conteo sucede en la mayoría de las situaciones multiplicativas a las que clásicamente se enfrenta el estudiante en el aula de clase, y por ende, pareciese que la multiplicación fuese solamente una suma iterada, la que van de n en n, pues cuántas veces esté n en la suma como sumando, es la cantidad de veces que se ha sumado el uno en el otro sistema de cantidades.

Así entonces, lo que estos procedimientos nos muestran es cómo las diferentes formas de representación utilizadas por los estudiantes les permiten objetivar varios elementos claves en la construcción de las relaciones multiplicativas implicadas en las diferentes situaciones:

1. En primer lugar, diferenciar los dos sistemas de cantidad cuyo proceso de variación está correlacionado a partir de una cierta relación (la razón de puntos obtenidos a las fichas o bolos derribados), y en segundo lugar, objetivar la relación (razón) que pone en correspondencia las cantidades en uno de los sistemas con las cantidades del otro sistema.
2. A partir de lo anterior, coordinar los dos procesos de conteo, lo que a su vez implica:
    a. Identificar la unidad de conteo que se repite en cada uno de los dos sistemas de cantidades.

b. Dada una cantidad A en uno de los sistemas de cantidades, repetir la unidad de conteo en el otro sistema de cantidades tantas veces como esta cantidad A contenga la unidad de conteo de su sistema de cantidades.

3. Y finalmente, obtener el resultado a partir, bien de conteos sucesivos, o a partir de la suma de una misma cantidad un cierto número de veces, o a través de una multiplicación.

Estos tres elementos muestran que la multiplicación como la abreviación de una suma iterada de un mismo sumando es una interpretación que simplifica al extremo la complejidad subyacente a la comprensión de la multiplicación, pues de un lado, en una situación multiplicativa intervienen dos sistemas de cantidades (y no uno como daría a entender la suma iterada de un solo sumando) que se correlacionan a partir de una razón constante, y de otro, es necesario poner en correspondencia dos procesos de conteo iterado. Es decir, en la multiplicación no hay uno, sino dos procesos de conteo iterado que se correlacionan uno al otro.

Así entonces, una noción de multiplicación que cumpla con las condiciones anteriores puede ser la siguiente: *multiplicar es encontrar un número que es a uno de los factores, como el otro factor es a la unidad*(Gilberto Obando, Vasco, & Arboleda, 2013; Obando Z., 2015). Esta idea de multiplicación, tomada del libro VII de los elementos de Euclides, se basa en la igualdad de dos razones, pero a su vez, deja ver los dos procesos de variación que relacionan las cantidades involucradas en la situación, covariación controlada por la razón de uno de los factores a la unidad (valor o precio por unidad). Esta idea de multiplicación nos muestra que la interpretación tradicional de la multiplicación como abreviación de una sola suma de sumandos iguales no deja ver el trasfondo conceptual que da soporte a la multiplicación como objeto de conocimiento, a saber, la razón entre dos cantidades y la coordinación de los dos procesos de conteos correlacionados por dicha razón. Pero coordinar dichos procesos de conteo implica que para cada uno de los sistemas de cantidades se identifique una cantidad que se repite –unidad para contar–, y que se coordine la repetición de ambas unidades. Además, esta noción de multiplicación muestra de manera inmediata la relación entre la multiplicación y la proporcionalidad directa, pues evidencia que en el problema más simple de multiplicación están presentes las relaciones lineales de base características de toda proporcionalidad directa entre dos cantidades o magnitudes.

Sin embargo, esta forma de aproximación a la multiplicación en la escuela deja un vacío en tanto no permite abarcar los tipos de situaciones en las que una de las cantidades es el producto (producto de medidas) de las otras, como por ejemplo, un área como resultado del producto de las dos dimensiones lineales que la componen, o volumen como resultado del producto de un área por una longitud lineal. Este es un campo abierto a la investigación en educación matemática, y de grandes posibilidades de aporte a la comprensión de los procesos de estudio de la multiplicación en la educación básica.

Referencias

Obando, G., Vasco, C., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 59-81. doi:10.12802/relime.13.1713

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2013). Razón, proporción y proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la Educación Básica. In R. Flórez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 977-986). Mexico, DF.: Comite Latinoamericano de Matemática Educativa.

Obando Z., G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica.* (Doctor), Universidad del Valle, Cali, Co.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In H. Guershon & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (1 ed., pp. 41-60). Albany, NY: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52*, 83-94. doi:10.1159/000202727

I Este trabajo es derivado de la Tesis doctoral del autor, Universidad del Valle, Colombia, y que lleva por título "Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica".

LA IDONEIDAD DIDÁCTICA COMO HERRAMIENTA DE ANÁLISIS Y REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS[vii]

Didactical suitability as a tool for mathematics teachers' analysis and reflection on teaching practice

Juan D. Godino

Universidad de Granada; jgodino@ugr.es

Resumen

Se describen algunas características de los modelos de formación de profesores que enfatizan la reflexión sobre la práctica docente como estrategia para la mejora de la enseñanza: la investigación - acción, el práctico reflexivo y el estudio de lecciones japonés. Seguidamente se presenta la Teoría de la Idoneidad Didáctica como una herramienta que puede complementar los modelos mencionados en el caso de la educación matemática, al aportar criterios de idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y guiar las reflexiones sobre la práctica de manera sistemática y detallada. Se resalta la importancia de la reconstrucción de un significado de referencia global para el contenido matemático en cuestión, mediante el estudio sistemático de las investigaciones e innovaciones previas, con el fin de particularizar los criterios de idoneidad generales al estudio del tema específico.

Palabras clave: *educación matemática, principios didácticos, idoneidad didáctica, reflexión sobre la práctica*

Abstract

Some features of the following teacher training models– action research, the reflective practitioner and the Japanese study lessons-all of them emphasizing the reflection on teaching practice as a strategy for improving education are described. Next, the Theory of Didactical Suitability is presented as a tool that complement the models mentioned for mathematics education, because it provides criteria to evaluate the suitability of mathematics teaching and learning processes, and to guide the systematic and detailed reflection on practice. The importance of elaborating a global reference meaning for the specific mathematical content, studying systematically previous research and innovations with the aim of applying the general suitability criteria to study the specific subject, is also highlighted.

Keywords: *mathematics education, didactical principles, didactical suitability, teaching practice reflection*

INTRODUCCIÓN

Diversas tendencias sobre la formación de profesores, tanto inicial como continua, proponen la investigación del profesorado y la reflexión sobre la práctica docente como una estrategia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. Entre dichas tendencias destacamos la investigación - acción, la práctica reflexiva y el estudio de lecciones desarrollado en Japón y difundido en diversos países.

[vii]Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2012-31869 y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

La investigación – acción es un método de investigación cualitativa que se basa, fundamentalmente, en convertir en centro de atención lo que ocurre en la actividad docente cotidiana, con el fin de descubrir qué aspectos pueden ser mejorados o cambiados para conseguir una actuación más satisfactoria (Eliot, 1991). La práctica docente se considera el marco de referencia de todo el proceso de investigación contemplando la acción y la reflexión como dos caras de una misma realidad.

> "Los investigadores en la acción planifican ciclos de acción y reflexión y por tanto deben ser reflexivos sobre cómo los esfuerzos de cambio se despliegan, y el impacto que nuestro presencia (la intervención) está teniendo" (Bradbury-Huan, 2010, p. 98).

Se trata, por tanto, de una vía de formación permanente que permite al profesorado ejercer la investigación en el aula en busca de una mejora significativa de la calidad educativa. La reflexión constituye la fase que cierra el ciclo y da paso a la elaboración del informe y posiblemente el replanteamiento del problema para iniciar un nuevo ciclo de la espiral auto-reflexiva.

Heredera de la investigación – acción es la corriente promovida por Schön (1983), quien desarrolla su teoría de la práctica reflexiva en la cual aboga por un docente que reflexione de modo permanente sobre su práctica de enseñanza con el fin de transformarla. Schön (1983) describió la reflexión como "una continua interacción entre el pensamiento y la acción" (p. 281); y al "práctico reflexivo" como la persona que "reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura" (p. 50). En una revisión de los modelos de reflexión que se han descrito, Rogers (2001) encontró como definición más común de reflexión como el proceso que permite al aprendiz a "integrar la comprensión lograda en la propia experiencia con el fin de capacitarle para realizar mejores elecciones o acciones en el futuro así como estimular la propia efectividad global". Llinares y Kainer (2006) destacan que,

> "La práctica reflexiva ofrece una perspectiva de cómo los estudiantes para profesor aprenden sobre la enseñanza y proporciona información sobre los cambios en su enseñanza de las matemáticas. La reflexión de los estudiantes para profesor es un componente clave en esta visión del aprendizaje y se asume que uno aprende mediante la reflexión sobre la propia experiencia" (p. 437).

Por su parte, el estudio de clases (o lecciones) se refiere a la metodología desarrollada en Japón para la enseñanza de las matemáticas (basada en la resolución de problemas), la formación y perfeccionamiento de los profesores. Está teniendo un fuerte impacto a nivel internacional como se muestra en Isosa y Olfos (2009), Doig y Groves (2011) y Hart, Alston y Murata (2011). En el centro de esta metodología se encuentra el desarrollo colaborativo de una "lección" (considerada una unidad didáctica, unidad de estudio construida en torno a un tema, más que una unidad de tiempo como tal) mediante una serie de "sesiones de investigación". Los profesores involucrados en la enseñanza de la misma clase, o unidad didáctica, se observan unos a otros sucesivamente mientras la imparten, poniendo en común sus observaciones entre una clase y la siguiente, como base para tomar decisiones colectivas sobre cambios posteriores en las programaciones de las clases, que se pondrán a prueba posteriormente en la siguiente clase de investigación.

En estas tendencias o modelos de formación de profesores se trata de promover la reflexión del profesor, bien de manera personal, o en interacción con otros colegas. Sin embargo, dada la multiplicidad de disciplinas para las cuales se proponen y la generalidad con la cual se aborda el tema de la reflexión sobre la acción no encontramos instrumentos explícitos que guíen la reflexión profesional en el campo específico de la educación matemática. El caso del estudio de lecciones es diferente dado que se está aplicando ampliamente en la enseñanza de las matemáticas y podemos encontrar algunas referencias sobre los criterios o principios didácticos sobre los cuales se basa la reflexión que se propone. Aunque dado que su foco de atención es la resolución de problemas podemos pensar, a priori, en la existencia de un cierto sesgo o parcialidad en la visión de las matemáticas sobre la cual se sustenta.

Sin dudar de la utilidad, incluso necesidad, de que el profesor adopte una actitud reflexiva sobre su propia práctica, y de las indudables potencialidades de compartir tales reflexiones en el seno de comunidades profesionales, nos parece que tales esfuerzos se verían reforzados si los profesores compartieran algunas herramientas conceptuales para apoyar sus reflexiones de manera sistemática y detallada. En este sentido la Teoría de la Idoneidad Didáctica (Godino, 2011), cuyas principales características detallamos en las siguientes secciones, pudiera ser una de tales herramientas. En la última sección describimos un caso de aplicación de la TID en la formación inicial de profesores de matemáticas.

LA NOCIÓN DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como *idóneo* (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*)(Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, 2011).

En la figura 1 se representan las facetas y componentes de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio pretendido o planificado, indicando un criterio básico de idoneidad para cada faceta:

- *Representatividad* de los significados pretendidos o planificados respecto de un significado de referencia previamente reconstruido y conexiones (idoneidad epistémica);
- *Proximidad* de los significados personales a los significados institucionales y demanda cognitiva (idoneidad cognitiva);
- *Implicación* de los estudiantes en el proceso de estudio (idoneidad afectiva);
- *Negociación* de significados (idoneidad interaccional);
- *Disponibilidad* de los recursos técnicos y temporales (idoneidad mediacional);
- *Adaptación* al entorno socio-profesional, currículo, escuela y sociedad (idoneidad ecológica).

La noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o "incidentes didácticos" puntuales.

El logro de una alta idoneidad didáctica de un proceso de estudio, como también su valoración, es un proceso complejo puesto que, como hemos visto, involucra diversas dimensiones, que a su vez están estructuradas en distintas componentes. Además, tanto las dimensiones como los componentes no son observables directamente y, por lo tanto, es necesario inferirlos a partir de indicadores empíricos.

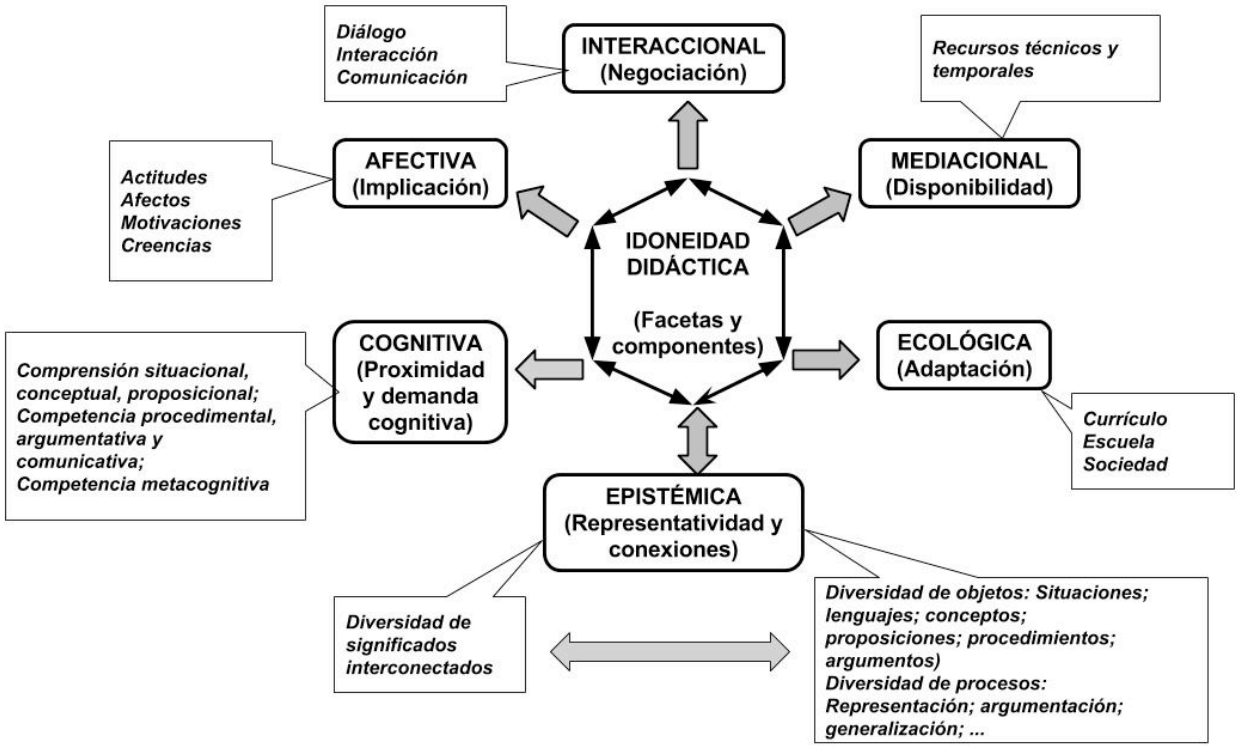


Figura 1. Facetas, componentes y criterios básicos de idoneidad didáctica

SISTEMA DE INDICADORES DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

Partiendo de trabajos previos (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007), Godino (2011) incluye una propuesta de indicadores empíricos de idoneidad para las seis facetas y las interacciones entre las mismas cuya síntesis se incluye como anexo en este trabajo.Así mismo, en Godino (2011) se describen algunas concordancias entre los indicadores de idoneidad y los que se pueden inferir de otros marcos teóricos. Por ejemplo, en la idoneidad epistémica se contempla el componente relativo a las situaciones – problemas para el cual se enuncian los criterios:

- *Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación*
- *Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)*

En el marco del EOS se atribuye a las situaciones problemas un papel central, ya que se asume una concepción antropológica de la matemática, de modo que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinados problemas. Esta posición es concordante con la "Teoría de situaciones didácticas" (Brousseu, 1997), con la "Educación matemática realista" (EMR) (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005), basada en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983), y también en el Estudio de clases japonés (Isosa y Olfos, 2009). En estas teorías y modelos, y en diversas propuestas curriculares, se propone el uso de situaciones - problemas como medio de contextualizar las ideas matemáticas y generarlas a partir de la actividad de resolución, comunicación y generalización de las soluciones.

Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas. Sin embargo, aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención, como propone el EOS, a las diversas representaciones o medios de expresión (lo que concuerda con los trabajos de Duval, 1995; 2006), las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes

diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones.

En cuanto a la idoneidad cognitiva, en el marco del EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en la comunidad de prácticas generada en la clase. Supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados. Los significados son entendidos en términos de prácticas operativas y discursivas y supone además el reconocimiento e interrelación de los objetos que intervienen en dichas prácticas.

Tres de los seis principios formulados por el NCTM (2000) sobre la enseñanza de las matemáticas tienen relación con la idoneidad cognitiva. El principio de igualdad indica, "La excelencia en la educación matemática requiere igualdad, grandes expectativas y un fuerte apoyo para todos los estudiantes". Se exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas, y que sean incluidos contenidos motivadores para promover el acceso y el logro de todos los estudiantes. El principio de aprendizaje requiere que "Los estudiantes deben aprender las matemáticas entendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de sus experiencias y conocimientos previos". Así mismo, el principio de evaluación afirma que, "La evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas relevantes y proveer de información útil tanto a profesores como estudiantes".

Como componente de la idoneidad interaccional se incluye en la TID como indicador:

— *Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)*

La aceptación de este principio de autonomía en el aprendizaje es un rasgo esencial de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1997), en la que las situaciones de acción, comunicación y validación se conciben como momentos adidácticos de los procesos de estudio, esto es, situaciones en las que los alumnos son protagonistas en la construcción de los conocimientos pretendidos. Así mismo, en el marco de la Educación Matemática Realista se asume un principio de interacción, según el cual, la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión. Los estudiantes, en lugar de ser receptores de una matemática ya elaborada, son considerados como participantes activos del proceso de enseñanza - aprendizaje, en el que ellos mismos desarrollan herramientas y comprensiones, y comparten sus experiencias unos con otros. La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los métodos formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005, p. 290).

En definitiva, la Teoría de la Idoneidad Didáctica trata de interrelacionar las distintas facetas que intervienen en el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. Las nociones de idoneidad epistémica y ecológica y el sistema de indicadores asociados pueden constituir el germen de una teoría curricular, mientras que los correspondientes a las facetas cognitiva – afectiva lo constituye para una teoría del aprendizaje. Las facetas interaccional y mediacional contienen, a su vez, el germen de una teoría de la enseñanza.

DESCRIPCIÓN DE UN CASO

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, componentes e indicadores han sido usadas en diversas investigaciones en las universidades de Granada, Barcelona y de varios países latinoamericanos (Argentina, Brasil, Chile y México), como se puede ver en la revisión hecha por Breda, Font y Lima (2014). Con el fin de mostrar el uso de la TID, en este apartado referimos brevemente el trabajo de fin de máster de Posadas (2013) en el que realiza una reflexión sistemática sobre una experiencia de enseñanza de la ecuación cuadrática en secundaria. El problema que se aborda en dicho trabajo se formula en los siguientes términos:

> 1) ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza - aprendizaje sobre las ecuaciones de segundo grado experimentado durante el periodo de prácticas en 3º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO)?
>
> 2) ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica en un próximo ciclo de experimentación?

En el marco de la teoría de la idoneidad didáctica se establece que para poder emitir un juicio fundamentado sobre la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático es imprescindible realizar una reconstrucción de los significados de referencia didáctica del tema correspondiente. Ello requiere proceder a una revisión sistemática de los resultados de las investigaciones e innovaciones realizadas en educación matemática sobre los aspectos epistémicos, ecológicos, cognitivos, afectivos, interaccionales y mediacionales (Godino, 2011). Esto lleva a plantear una cuestión previa:

> 3) ¿Cuáles son los conocimientos didáctico–matemáticos resultados de las investigaciones e innovaciones previas realizadas sobre la enseñanza - aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado?

Remitimos a Posadas (2013) donde se incluye un resumen de las principales características del diseño, implementación y evaluación de la experiencia de enseñanza mencionada. También se hace en dicho trabajo una síntesis de los conocimientos didáctico – matemáticos producidos por las investigaciones e innovaciones sobre las distintas facetas implicadas en la enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática en educación secundaria. Usando los resultados de las investigaciones y los enunciados de los criterios de idoneidad propuestos en Godino (2011) se procede a emitir un juicio fundamentado sobre la idoneidad didáctica del proceso y a identificar propuestas de cambio.

Valoración de la idoneidad didáctica y propuestas de cambio

Facetas epistémica y ecológica

El proceso de estudio implementado siguió básicamente los contenidos y orientación propuestos en el libro de texto (Colera et al., 2010) que se viene usando en el tercer curso de ESO en el instituto en el que se realizaron las prácticas de enseñanza. El esquema seguido consistió básicamente en la presentación y aprendizaje de la fórmula general para hallar las soluciones de la ecuación cuadrática. No hubo una problematización previa que llevara a la búsqueda, tras un proceso de generalización, de soluciones para las ecuaciones cuadráticas. El texto presenta un resultado, una fórmula de cálculo, cuya justificación se descarta por ser un proceso "largo y complicado". Se transmite la visión de las matemáticas como sistema de reglas generales que hay que saber interpretar y seguir en cada caso, para lo cual es suficiente mostrar algunos ejemplos aclaratorios y ejercitar su aplicación en casos similares. La resolución de problemas verbales (puesta en ecuación)

es también una cuestión de seguir unas reglas. Sería necesario contemplar el uso de situaciones introductorias que lleven al planteamiento de ecuaciones cuadráticas y motiven la búsqueda de procedimientos eficaces para su solución. En este sentido la situación descrita en Swan, Dawson, Evans et al., (2012) puede ser usada con dicha finalidad.

Los conceptos de variable, incógnita y parámetro no se discutieron y aclararon con ocasión del estudio de las ecuaciones cuadráticas, como tampoco algunas propiedades básicas involucradas en su resolución, como la ley del factor nulo. La ecuación cuadrática es una especie de caja negra, una "máquina" que admite una cierta clase de números como entrada y produce como resultado dos números, uno o ninguno. Como se muestra en Posadas (2013) hay alternativas a este planteamiento procedimental / algorítmico, tanto desde el punto de vista de la investigación (Hanna y Barbeau, 2008), como de las innovaciones educativas (Pérez et al, 1999). Es posible y deseable diseñar una unidad didáctica que contemple la introducción de las técnicas de completar el cuadrado, y de factorización, al menos en casos sencillos. También es posible combinar el uso del lenguaje algebraico junto con el geométrico, como muestran los trabajos de Radford y Guerete (1996) y Galván (2006), lo que facilita la comprensión de las transformaciones algebraicas que llevan a establecer la fórmula general de resolución de las ecuaciones de segundo grado. En consecuencia, se puede calificar la idoneidad epistémica del proceso implementado como baja por las razones mencionadas. En los trabajos citados se encuentran criterios y recursos para su mejora.

Desde el punto de vista de las orientaciones curriculares (faceta ecológica) se encuentra apoyo para retrasar el estudio a cursos posteriores al 3º de ESO, y relacionar la resolución de las ecuaciones cuadráticas con el de las funciones cuadráticas (procesos de modelización funcional), lo que permitirá dar sentido a la búsqueda de los ceros de la función cuadrática, entre otras, como la función exponencial, usando las nuevas tecnologías (calculadoras gráficas, software de cálculo simbólico).

La introducción de los cambios mencionados permitiría poner en juego, y en consecuencia desarrollar, "estándares de la práctica matemática" (competencias, entendidas como expectativas generales de aprendizaje) tales como:

- Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.
- Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
- Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de los otros.
- Modelizar con matemáticas.

Facetas cognitiva y afectiva

El análisis de los resultados obtenidos en la evaluación de los aprendizajes logrados en la experiencia de enseñanza reveló algunas dificultades en la resolución de ecuaciones cuadráticas, aunque el énfasis se puso en aspectos básicamente procedimentales.

El estudio de Vaiyavutjamai y Clements (2006) reveló también la existencia de dificultades de tipo conceptual (comprensión de la variable, aplicación de propiedades, entre otras), al ser entrevistados una muestra de estudiantes. Esta investigación fue realizada con estudiantes de 9 grado, lo que corresponde al curso de 3º de ESO (entendiendo que los alumnos estudiarán posteriormente los grados, 10, 11 y 12, antes de iniciar los estudios universitarios). Una conclusión de esta investigación es retrasar el estudio del tema a cursos posteriores, lo que mejoraría la idoneidad cognitiva del proceso de estudio, y posiblemente también la afectiva.

En la experiencia analizada los instrumentos de evaluación de los aprendizajes deberán ser mejorados para obtener información tanto de aspectos procedimentales como aspectos conceptuales y argumentativos. El cuestionario desarrollado por Vaiyavutjamai y Clements (2006) para evaluar las destrezas de los estudiantes en la resolución de ecuaciones cuadráticas incluyó un conjunto de 18 cuestiones, por lo que permite cubrir de manera más sistemática y válida los diferentes tipos de ecuaciones que se espera resuelvan los estudiantes. Las cuestiones incluidas en el instrumento desarrollado por Didiş, Baş, y Erbaş (2011) pueden ser útiles para evaluar aspectos conceptuales y argumentativos.

Faceta instruccional (interaccional y mediacional)

Los modos de interacción en el aula que fueron implementados en la experiencia responden básicamente a un modelo tradicional: el profesor presenta la expresión general de la ecuación cuadrática, explica el significado de los parámetros, presenta algunos ejemplos, y los alumnos realizan ejercicios. Son escasos los momentos en que se concede un grado de autonomía a los estudiantes, exceptuados los momentos de trabajo individual para realizar ejercicios en clase o en casa.

Sería deseable introducir cambios en el proceso de enseñanza orientados a que los alumnos planteen cuestiones y presentan soluciones; exploren ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usen una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos.

En la experiencia se utilizaron únicamente los recursos propios del aula del instituto y al alcance de los alumnos: pizarra, libro de texto y calculadora. No se utilizaron recursos manipulativos ni recursos tecnológicos TIC ya que en realidad no se consideraron necesarios para apoyar la enseñanza y aprendizaje de los contenidos planificados. La mejora de la idoneidad mediacional del proceso llevaría a incluir actividades con material manipulativo (como el sugerido en el trabajo de Radford y Guerete), y también recursos informáticos (como el descrito en Galván, 1996).

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo se ha presentado la noción de idoneidad didáctica y el sistema de componentes e indicadores que la desarrollan como un recurso teórico que puede facilitar la necesaria actitud reflexiva de los profesores ante su propia práctica docente. El objetivo es elaborar un conjunto organizado de indicadores de calidad de un proceso de estudio matemático sobre los cuales existe un cierto consenso en la comunidad de educadores matemáticos. No se trata de un sistema cerrado y definitivo, sino abierto a refinamiento, ampliación y concreción.

En la introducción del trabajo se han mencionado tres tendencias educativas que enfatizan la reflexión sobre la práctica como una actitud necesaria en el profesor. Ahora bien, ¿cómo promover y facilitar esa fase reflexiva en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas? La Guía para la Valoración de la Idoneidad Didáctica (Godino, 2011) se ofrece como un recurso que permite crear un lenguaje común, y la asunción de unos principios didácticos compartidos, que puede ayudar en el intercambio de experiencias y el progreso de la investigación sobre la práctica.

Como hemos indicado en el caso descrito es necesario concretar los criterios de idoneidad para cada una de las facetas y componentes al tema o contenido matemático específico (p. e., estudio de la ecuación cuadrática). Sobre la didáctica específica de cada tema existe una abundante y sólida investigación que es necesario conocer y tener en cuenta, con el fin de que el trabajo del profesor sea una actividad tecnológica y no mera innovación artesanal.

Referencias

Bradbury-Huan, H. (2010). What is good action research? Why the resurgent interest? *Action Research*, 8(1), 93–109.

Breda, A., Font, V. y Lima, V. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8 (2), 1-41.

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Colera, J. Gaztelu, I. & Oliveira, M. J. (2010). *Matemáticas 3º Educación Secundaria*. Madrid: Anaya.

Didiş, M. G., Baş, S., y Erbaş, A. (2011). Students' reasoning in quadratic equations with one unknown. En *The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7)*. University of Rzeszów: Poland.

http://www.cerme7.univ.rzeszow. pl/WG/3/CERME7_WG3_Gozde.pdf

Doig, B. y Groves, S. (2011). Japanese lesson study: Teacher professional development through communities of inquiry. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13.1, 77–93.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée*: *registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Switzerland: Peter Lang.

Duval, R. (2006).A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics.*Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131

Elliot, J. (1991). La investigación-acción en educación. Madrid: Morata, 1994.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*.Dordrecht: Reidel.

Galván, C. (2006). Desde la cuadratura de polígonos a ecuaciones de segundo grado. *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 5, 23-35.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil. Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/index.htm

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education.*ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221-252.

Hanna, G. y Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge.*ZDM. Mathematics Education*, 40, 345-353.

Hart, L.,Alston, A. y Murata, A. (Eds.) (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education.*Dordrecht, The Netherlands: Springer

Isosa, M., y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (students) teachers and teacher educators as learners.En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdan: Sense Publishers.

National Council of the Teachers of Mathematics.(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*.Reston, VA: The Council.

Pérez, R. (Coordinador) (1999). *Construir las matemáticas. 4º ESO*. Granada: Proyecto Sur.

Posadas, P. (2013). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre ecuaciones de segundo grado en 3º de educación secundaria obligatoria.* Tesis de Fin de Máster. Universidad de Granada. Disponible en,

http://www.ugr.es/local/jgodino/fprofesores.htm

Radford, L. y Guerette, G. (1996). Second degree equations in the classroom: a Babylonian approach. En V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics* (pp. 69 76). Washington, D.C: The Mathematical Association of America.

Rogers, R. (2001). Reflection in higher education: A concept analysis. *Innovative Higher Education*, 26, 37–57.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action*. Nueva York: Basic Books.

Swan, M., Clarke, N., Dawson, C., Evans, S., Burkhardt, H., Crust, R., Noyes, A. y Pead, D. (2012). Solving quadratic equations: Cutting corners.*Mathematics Assessment Resource Service.*University of Nottingham & UC Berkeley.(Disponible en,

http://map.mathshell.org/materials/lessons.php?taskid=432)

Vaiyavutjamai, P. y Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal,* 18 (1), 47-77.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands.ZDM, 37, 4, 287-307.

CONFERENCIAS NACIONALES

FACTORES QUE INFLUYEN EN EL CAMBIO DEL PROFESOR EVALUACIÓN DE UNA EXPERIENCIA

Factors that influence on teacher change Assessment of an experience

Ma. Victoria Martínez Videla[a]

[a]CIAE, Universidad de Chile; mvmartinezv@ciae.uchile.cl

Resumen

El siguiente trabajo reporta los resultados de una investigación exploratoria descriptiva del cambio del profesor desde su propia perspectiva en torno a la resolución de problemas. Se considera el cambio del profesor como un proceso interno y externo, que implica el sistema de creencias y actitudes y cambios a nivel cognitivo. Por lo anterior, y mediante el uso de entrevistas utilizando viñetas y recuerdo simulado como herramientas metodológicas, se trabajó en la identificación de elementos que favorecen el cambio en el sistema de creencias y la forma de trabajar la resolución de problemas en un grupo de 11 profesores, que han participado en un proyecto implementando la resolución de problemas de final abierto a lo largo de tres años. Hemos observado que los profesores identifican y declaran los cambios en la forma en que trabajan en el aula, en ellos mismos y en sus estudiantes y como estos elementos pueden servir para evaluar una experiencia de desarrollo profesional.

Palabras clave: *cambio del profesor, creencias, viñetas.*

Abstract

The following paper reports the results of a descriptive exploratory study about the teacher change from their own perspective on problem solving. Teacher change is an internal and external process, which involves the system of beliefs and attitudes and changes at the cognitive level. Therefore, and by using interviews using vignettes and simulated recall as methodological tools, we worked on identifying elements that favor the change in the belief system and how to work on problem solving in a group of 11 teachers, who participated in a project to implement open-ended problem solving over three years. We have observed that teachers identify and declare changes in how they work in the classroom, in themselves and in their students and how these elements can be used to evaluate a professional development experience.

Keywords:*teacher change, beliefs, vignettes.*

INTRODUCCIÓN

Actualmente, las reformas educativas a nivel mundial y, por lo tanto también en Chile, promueven objetivos para la educación matemática que son muy distintos que los que han regido por muchos años. Se propone un cambio de paradigma que concibe el aprendizaje como el resultado de una construcción activa y no como el resultado de un estímulo-respuesta. Poco a poco dejamos de entender los contenidos como elementos conceptuales propios de una disciplina, para llegar a considerarlos como el conjunto de saberes o formas culturales cuya asimilación y apropiación por los alumnos y alumnas se considera esencial para su desarrollo y socialización (Coll y otros, 1994).

Todos estos cambios son cambios profundos e implican modificaciones, en el aula y fuera de ella, es un cambio de paradigma, el resultado de las demandas de nuestra sociedad. Y como todo cambio de paradigma demanda cambios drásticos, de forma y sobre todo de fondo en las prácticas educativas. Por ello, a través de un proyecto de investigación posdoctoral (Fondecyt 3130702) nos hemos propuesto estudiar el cambio de un grupo de profesores, que participaron en un proyecto de intervención en torno a la resolución de problemas de final abierto, teniendo como objetivo comprender como ellos han vivido y percibido el proceso de cambio en ellos mismo y en sus alumnos.

Es así como el trabajo que presentamos se centra hacia responder las siguientes preguntas a partir de la perspectiva de los mismos profesores participantes en dicha intervención: ¿Qué cambia en los profesores? ¿Qué cambia en sus alumnos? ¿Qué favorece y qué dificulta dichos cambios?

MARCO TEÓRICO

El cambio de paradigma que al que se ven enfrentados los profesores hace crucial la comprensión del proceso de cambio de los profesores. La literatura subraya el importante papel que juegan las creencias y actitudes en la capacidad de cambio que puedan tener los profesores, entendiendo las creencias como las disposición a actuar de una determinada manera y no solo como una verbalización de lo que se cree (Wilson y Cooney, 2003).

In mathematics education belief research, had defined three subcategories on the system of beliefs (Op´T Eynde et al, 2002): Beliefs about mathematics education (mathematics as a subject, mathematical learning and problem solving, mathematics teaching in general); Beliefs about self (self-efficacy, control, task-value, goal-orientation): Beliefs about the social context (social and socio-mathematical norms in the class).

But, what do we know about how this beliefs systems change, if it does?.En Liljedahl, Oesterle and Bernèche (2012) se hace una recopilación respecto de la estabilidad que pueden o no tener las beliefs in mathematics education. A partir de la literatura se plantea que las beliefs on teacher efficacy are stable or at least difficult to change. Also they do a differentiation between newly and older belief, saying that a newly belief is easier to change because it is on development. On the same way Kaossila, Hannula, Laine and Pehkonen (2008) assumed that core beliefs are more stable and less likely to change than the peripheral beliefs are.

En el mismo sentido Smith (1999) a partir de un estudio de casos y mediante la observación, el dialogo reflexivo y los procesos grupales a lo largo de un año escolar, elabora un modelo en que

relaciona una nueva creencia (convencerse de un cambio) con un cambio en lo que se hace (práctica) y con un cambio en lo que se declara (verbalización).

Otro factor que incide en el cambio es quién lo promueve, es decir, los profesores se resisten al cambio cuando es impuesto o sugerido por otros, sin embargo se comprometen con él cuando es una iniciativa propia (Richardson, 1998; Freeman, 1992). Es decir, el profesor se compromete con una aproximación metodológica diferente e innovadora cuando ve que éstas funcionan en el aula con sus estudiantes y, por lo tanto, tiene sentido modificar el trabajo que venía haciendo hasta ese momento. Esto se condice con el planteamiento de Stuart and Thurlow (2000) que subrayan que para una persona el cambio en sus creencias significa renunciar a lo familiar y, por lo tanto, es puede ser complejo y desafiante.

METODOLOGÍA

Esta investigación responde a un diseño exploratorio descriptivo, en el marco de describir el proceso de cambio experimentado por un grupo de 11 profesores participantes en una experiencia de implementación de resolución de problemas de final abierto en sus aulas durante tres años consecutivos (2011-2013), comenzando a trabajar en 3° básico y hasta 5° básico, con el mismo grupo de estudiantes. La experiencia consistía en desarrollar una clase de resolución de problemas de final abierto una vez al mes, teniendo como objetivo el desarrollo de competencias y no la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático particular.

Una vez finalizada la experiencia, y con el fin de indagar en el proceso de cambio que puedan haber experimentado a lo largo de esos 3 años, se realizaron 2 entrevistas. La primera apenas había terminado la experiencia, que tenía como objetivo identificar y describir el proceso de cambio que los profesores dentro del aula y la segunda un año más tarde, que nos permitiera distinguir que cambios habían sido sostenidos en el tiempo.

Para la primera entrevista se utilizó como herramienta metodológica el uso de una viñeta, herramienta que está ideada para indagar en procesos profundos y no consientes (Lieberman, 1987; Aliverti y otros, 2007; Sánchez y otros, 2008; Yañez y otros, 2012). Se utilizó este tipo de herramienta dado que el cambio del profesor es un cambio profundo que ocurre a nivel interno, en el sistema de creencias y actitudes del profesor. Y por otra parte, la demanda de cambio, su contenido y su escenario es público y oficial y por lo tanto, para identificarlo es necesario traspasar la barrera de lo que es políticamente correcto declarar a momento de entrevistar al profesor.

RESULTADOS

El análisis de las entrevistas se hizo mediante la creación de categorías que permitieran responder las preguntas plateadas originalmente. A continuación resumimos los elementos identificados en primer lugar relacionados con el cambio que los profesores identifican en sí mismo y en sus alumnos (Tabla 1), estos están organizados según la clasificación de Op´T Eynde et al (2002) ya mencionada.

Tabla 1.Cambios identificado en los profesores y en los alumnos.

Sujeto que cambia	Cambio identificado
En sí mismos (profesor)	Visión de la Matemática: visión menos rígida de la disciplina, se acepta más de una respuesta. Disciplina más abierta y permite diversidad. Enseñanza / aprendizaje de la matemática: rol protagónico que otorgan al alumno, profesor facilitador que no da respuesta, sino que hace preguntas. Valoran que los estudiantes se expresen verbalmente y por lo tanto promueven la discusión en el aula. Dan tiempo para pensar. Usan el error como parte del aprendizaje. Mayor expectativas de los estudiantes. Respecto de sí mismos: se sienten menos estructurados y más capaces de hacer matemática en el aula. Desarrollo de la capacidad de aceptar errores propios y de los estudiantes.
En sus alumnos	Visión de la Matemática: Visión más cercana de la matemática de y sin "miedo" Enseñanza / aprendizaje de la matemática: Mejor disposición al trabajo, trabajan de manera más concentrada y se involucran en las tareas propuestas. Son capaces de discutir entre ellos y aprender entre compañeros. Desarrollan habilidades como razonamiento matemático, pensamiento crítico, uso de lenguaje matemático. Respecto de sí mismos: los profesores observan que sus alumnos se sientes capaces. Desarrollo de habilidades blandas como creatividad y perseverancia.

En segundo lugar se resumen los factores que facilitan o dificultan el (Tabla 2).

Tabla2.Factores que facilitan o dificultan el cambio

Facilidad /dificultad	Factor identificado
Facilita el cambio	Larga duración del Proyecto, que da tiempo de que sucedan los cambios y se valoren. Frecuencia no extenuante de la implementación (una vez por mes). Claridad de la estructura y duración del proyecto. Reuniones mensuales con compañeros y equipo investigadores que generó una comunidad de aprendizaje.
Dificulta el cambio	Cantidad de contenidos que deben cubrir en el curriculum nacional. Poco apoyo institucional, para incluir una práctica diferente en el aula. No se sienten capaces de inventar problemas por su cuenta y tener independencia.

DISCUSIÓN

El estudio comprensivo del proceso de cambio del profesor, en este caso centrado en el profesor como foco de atención y la reflexión ha sido un tópico muy interesante sobre el que indagar.

Uno de los elementos que sin duda han aportado a este estudio fue la elección y puesta a prueba de las viñetas como herramienta metodológica para acceder al cambio de los profesores, que como mencionamos en el marco teórico, es un proceso que vive en un nivel profundo, interno y muchas veces inconsciente del sujeto, en este sentido la viñetas permitieron una "elaboración situada" (Yañez y otros, 2012; Sánchez y otros, 2008). El uso de esta herramienta efectivamente permitió acceder a información que no hubiera sido posible obtener con otro tipo de dispositivo, y además, sortear la barrera de lo "políticamente correcto" o deseabilidad social, que dado el contexto evaluativo en que se desempeñan los profesores en Chile es efectivamente un obstáculo a nivel de investigación. Además realizar el segundo ciclo de entrevistas mediante el uso de recuerdo simulado, permitió que los profesores efectivamente evaluaran la sostenibilidad del cambio identificado en una primera instancia, pudiendo identificar con mayor claridad los factores que lo favorecen y dificultan.

En cuanto al proceso de cambio de los profesores destacamos dos elementos. Primero, que la experiencia de resolución de problemas de final abierto en las aulas significó que se incorporó un cambio en el trabajo que se realizaba al interior del aula. Esto trajo consigo un cambio en las creencias de los profesores. En segundo lugar, este cambio en las creencias fue posible organizarlo respondiendo a las categorías propuestas por Op´T Eynde et al. (2002), tanto para aquellos cambios que los profesores reconocen en sí mismos, como en el cambio que reconocen en sus estudiantes y como esto se articula conformando un cambio global y sistémico en el aula de matemática.

En cuanto a los factores que influyen en el cambio del profesor fue posible distinguir factores que favorecen el cambio de los profesores relacionados con la estructura de la experiencia vivida durante el proyecto de resolución de problemas. Pero además releva como dificultades elementos más diversos que guardan relación con el contexto curricular nacional, la institución donde trabaja el docente y las creencias respecto de su capacidad y relación con la matemática, es decir, su sentido de autoeficacia.

Finalmente, subrayamos la importancia de indagar en procesos de largo aliento, como es el cambio del profesor, no solo con el fin de comprender la complejidad del mismo, sino también con el fin de evaluar experiencias de desarrollo profesional, evaluación profunda y que de información respecto de los procesos vividos por los participantes, como favorecen o dificultan su desarrollo profesional, de esta manera será posible el diseño de intervenciones futuras que se basen en información empírica de como impulsar el desarrollo docente en la dirección deseada, más aún cuando hay grandes inversiones de recursos humanos y económicos.

Agradecimientos

Eta investigación fue financiada por Fondecyt 3130702 yFB0003 Conicyt. Desarrollada en el contexto de Proyecto de cooperación bilateral Chile-Finlandia: AKA 09 en CONICYT Chile; #135556 enla Academy of Finland.

REFERENCES

Alberti, A., Amos, D., Bates, B., Brennan, C., Carmak, C. & otros (2007). Study of teacher-consultants and leadership: Vignettes Study. National Writing Project. (Consulta on –line14.05.2012: http://www.nwp.org/cs/public/print/doc/results/leadership_vignette.html)

Coll, C., Pozo, J. I., Sarabia, B. y Valls, E. (1994). Los contenidos en la Reforma. Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes. Buenos Aires: Editorial Santillana/AulaXXI.

Freeman, D. (1992). Language teacher education, emerging discourse, and change in classroom practice. En J. Flowerdew, M. Brock, y S. Hsia,. (Eds.), Perspectives on Language Teacher Education (pp. 1-21). Hong Kong City Polytechnic, Hong Kong.

Kaasila, R., Hannula, M. S., Laine, A., & Pehkonen, E. (2008).Socioemotional orientation and teacher change. Educational Studies on Mathematics, 67(1),11–123.

Lieberman, A. (1987). Documenting professional practice: The vignette as a qualitative tool. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. (ERIC Documente Reproduction Service N0. 5485215).

Liljedahl, P., Oesterle, S. & Bernèche, C. (2012).Stability of beliefs in mathematics education: a critical analysis. Nordic Studies in Mathematics Education, 17(3-4), 23-40.

Op´t Eynde, P., De Corte, E. and Verschaffel, L. (2002).Framing students´mathematics-related beliefs: a quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G. Leder, E. Pehkonen and G. Törner (Eds.), Beliefs: a hidden variable in mathematics education? (pp. 13-37). Dordrecht: Kluwer.

Richardson, V. (1998). How teachers change. What will lead to change that most benefits student learning? Focus on basics, connecting, research and practice, 2, issue C.

Sánchez, A. y Domínguez, A. (2008). Elaboración de un instrumento de viñetas para evaluar el desempeño docente. Revistas Mexicana de Investigación Educativa, 37, 625-648.

Smith, E. (1999). Reflective reform in mathematics: the recursive nature of teacher change. Educational Studies in Mathematics, 37, 199 – 221.

Stuart, C. And Thurlow, D. (2000). Making it their own: preservice teachers´ experiences, beliefs, and classroom practices. Journal of Teacher Education, 51(2), 113 – 121.

Wilson, M. & Cooney, T. (2003).Mathematics teacher change and developments.The role of beliefs. En Leder, G., Pehkonen, E. y Törner, G. (Eds.), Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?.(pp. 127-147). Mathematics Education Library, V(31).

Yáñez, R., Ahumada, H. y Rivas, E. (2012). La técnica de viñetas y su aplicación en investigaciones en enfermería. Ciencia y Enfermería XVIII (3), 9-15.

CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES PARA EL USO DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

Constructions and Mental Mechanisms for Use of Basic Concepts of Linear Algebra

Marcela Parraguez[a]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

marcela.parraguez@pucv.cl[a]

Resumen

En esta conferencia se presentan resultados de una investigación desarrollada con base en los esquemas cognitivos de la teoría APOE a través de las fases Intra, Inter y Trans, las que se han caracterizado a través de relaciones, transformaciones y conservaciones (o invariantes), respectivamente, que estudiantes universitarios evidencian a partir del uso o aplicación de los conceptos básicos del álgebra lineal en situaciones problemáticas que se etiquetan como Intra-AL y Extra-AL, a través de las cuales se muestra que el uso y la aplicación de estos conceptos básicos se convierten en un medio de construcción conceptual para el algebra lineal.

Palabras clave: Conceptos básicos del álgebra lineal, Teoría APOE.

Abstract

In this conference we present results of a research developed on cognitive theory APOS schemes with the help of phases Intra, Inter and Trans, which have been characterized by relationships, transformations and conservations (or invariant), respectively, that college students show from the use or application of the basic concepts of linear algebra in problem situations that are labeled as Intra-AL and Extra-AL, through which it is shown that the use and application of these basic concepts become a means for the conceptual construction of linear algebra.

Keywords:*Basic concepts of linear algebra, APOS Theory.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del álgebra lineal (AL) es un tema que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemáticas para carreras como ingeniería, licenciatura en ciencias o en economía; es así como surge el interés por investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos básicos que la componen. Cuando decimos conceptos básicos nos estamos refiriendo específicamente los conceptos de espacio vectorial de dimensión finita, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, sunespacio generado y conjunto generado, base, dimensión, transformación lineal, valores y vectores propios, en esos espacios. Existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que muestran los estudiantes para comprender conceptos relativos al álgebra lineal. Por ejemplo, en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra lineal no son exitosos (Sierpinska, 2000). En su esfuerzo por formular una propuesta didáctica específica para el álgebra lineal, desde la teoría APOE, RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) ha preparado materiales de enseñanza en el que se muestra su filosofía acerca de qué contenidos debiera incluir y cómo debiera organizarse un primer curso universitario de álgebra lineal (Weller, Montgomery, Clark, Cottrill, Trigueros, Arnon y Dubinsky, 2002).

Diversas investigaciones han reportado que el discurso matemático escolar del álgebra lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en deterioro de la comprensión de nociones básicas (Dorier y Sierpinska, 2001; Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002). De hecho, Sierpinska (2000) se concentra en algunos aspectos del razonamiento de los estudiantes, que podrían ser los responsables de algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal. La autora argumenta que los estudiantes tienden a pensar más en forma práctica que teórica, y señala que esta tendencia afecta negativamente el razonamiento en el ámbito del álgebra lineal (Sierpinska, 2000).

Una primera tentativa en revelar las fuentes de las dificultades de los estudiantes en álgebra lineal, a través de un análisis histórico y epistemológico se puede encontrar en Robinet (1986). El trabajo en esta dirección fue seguido por Dorier (2000). Estas investigaciones no solamente sirvieron como referencia para una mejoría de los errores y las dificultades de los estudiantes, sino también se han utilizado como inspiración para diseñar actividades para los estudiantes.

SOBRE EL USO DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

A pesar de que existen investigaciones en Didáctica de la Matemática sobrelas temáticas del álgebra lineal, las investigaciones hasta ahora reportadas no han hecho énfasis en aspectos cognitivos importantes relacionados con el uso y la aplicación, pues apostamos que ellos también se convierten en un medio de construcción conceptual. Eso es teóricamente el interés de la conferencia que se propone, para responder a la pregunta ¿cuál es la ruta de construcción conceptual de los conceptos básicos del AL? pero la vía no necesariamente deberá ser desde la perspectiva teórica del álgebra lineal, sino de su uso, a través de sus conceptos –básicos–. Es todo un reto construir esquemas mentales (descomposiciones genéticas) no solo desde la reflexión teórica, sino también práctica.

ÁLGEBRA LINEAL EN PREGRADO

Seguir impartiendo cursos abstractos de álgebra lineal y con los resultados que se conocen (Dubinsky, 1997; Sierpinska, Dreyfus y Hillel, 1999; Dorier, 1997) es una pérdida de capital cultural en el sistema, toda la energía de profesores que explican y plantean asuntos que no se transforman en herramientas útiles en lo estudiantes, también se convierte en una pérdida en el esfuerzo educativo. Hay que contribuir en romper ese círculo vicioso. Por eso se investiga: desempeño, errores, interpretaciones, concepciones, nociones, formas instruccionales, y luego la más fina y compleja, los procesos mentales en la construcción de esquemas mentales propios de la disciplina (que ya es mucho decir) en su uso. Estudiar estos procesos de construcción desde su aplicación o uso dará paso a la construcción de procesos instruccionales mas exitosos, eso la investigación lo puede señalar (aunque bien sabemos que desde la perspectiva teórica de la disciplina casi no quiere decir nada) pero en el medio escolar si tiene valor y significado.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA: TEORÍA APOE

La teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto, Esquema– toma como base la epistemología genética de Piaget. Esta teoría (Dubinsky, 1991) nace al estudiar el mecanismo de entendimiento de la Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan desde un objeto de conocimiento. Desde el punto de vista de la teoría APOE la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas, acciones, procesos y objetos, las cuales no necesariamente son secuenciales. El esquema, "es el nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante." (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews y Thomas,1996, p. 12). Cuando un sujeto

se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. En la Figura 1, se muestra un diagrama de las construcciones y la abstracción reflexiva.

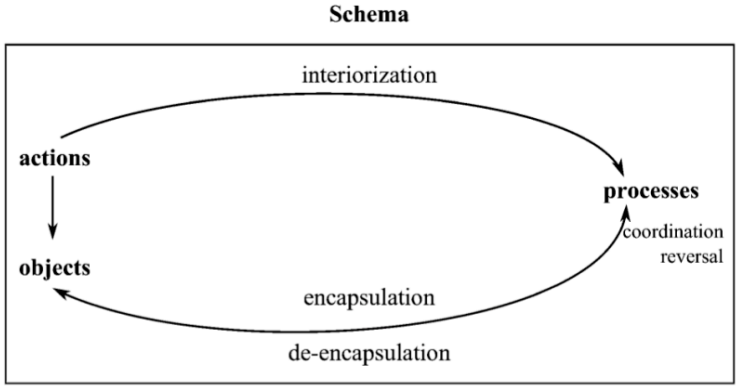


Figura 1. Construcciones y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático.(Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014, p. 18).

A lo largo de todo este escrito, vamos a considerar un ESQUEMA como una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, previamente construidos, que son coordinados y sintetizados por el estudiante para formar estructuras utilizadas en la resolución de problemas matemáticos y que muestran la coherencia del esquema (o sea niveles de desarrollo) al discernir cuando el esquema es aplicable o no. De esta manera, el desarrollo cognitivo de un esquema en la mente de un estudiante se caracteriza a través de los niveles Intra, Inter y Trans en el tipo de las relaciones y transformaciones que los estudiantes son capaces de establecer entre construcciones particulares que evocan dentro del esquema, cuando resuelven un problema.

Desde estas caracterizaciones generales, un indicador del desarrollo del esquema en la mente de un estudiante es el tipo de relaciones (Intra), el tipo de transformaciones (Inter)y el tipo de conservaciones o invariantes (Trans) que los estudiantes son capaces de establecer entre los estados de construcciones de conceptos del AL particulares, que evocan dentro del esquema, cuando resuelven problemas. La forma en que los estudiantes establecen relaciones, transformaciones y conservaciones entre los diferentes estados de construcciones mentales de conceptos particulares dentro del esquema, cuando están resolviendo un problema matemático, puede ser vista como la forma en que los estudiantes reorganizan y reconstruyen –o sea usan– los conceptos básicos del AL, para formar nuevos estados de construcción de éstos. De esta manera el desarrollo de un esquema viene determinado por el tipo de organización, a partir de relaciones y síntesis constituidas al alero del AL, que el resolutor de un problema precisa para su resolución. Así los niveles de desarrollo del esquema de los conceptos básicos del AL en la mente de un estudiante los caracterizamos como se describe a continuación.

ESQUEMA

Nivel INTRA de los Conceptos básicos del AL:no se establecen organizaciones a partir de **relaciones** lógicas o síntesis constituidas dentro de la axiomática del AL y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) se realizarán con errores. Los estudiantes usan esto dos conceptos básicos del AL en forma aislada (por ejemplo: para cierto tipo de Espacios Vectoriales específicos), y no como un cuerpo de conocimiento.

ESQUEMA Nivel INTER de los Conceptos básicos del AL: Los estudiantes establecen **transformaciones** u organizaciones a partir de relaciones lógicas (o alternativas) entre los estados de construcción del esquema de conceptos básicos del AL, pero con limitaciones, predominando el uso de la conjunción lógica, en elementos del AL que le son familiares. El estudiante es capaz de integrar a su síntesis más conceptos básicos (que en el nivel anterior) de la teoría del álgebra lineal de forma correcta.

ESQUEMA Nivel TRANS de los Conceptos básicos del AL: Aumenta el repertorio de las relaciones lógicas (y lógica, contrarecíproco, absurdo, y equivalencia lógica) que el estudiante es capaz de establecer entre los diferentes estados de construcción del esquema conceptos básicos del AL, para sustentar constructos que son **invariantes** como estructura, en el AL. En este nivel se produce la síntesis de los modos de rotular cuestiones relativas a los conceptos básicos del AL, que lleva al resolutor a la construcción de un cuerpo de conocimiento unificado, que le permite identificar los elementos invariantes para el andamiaje de un cuerpo de conocimiento del AL.

La síntesis que un estudiante ha construido de los conceptos básicos del AL después de realizar un curso del mismo, es posible de etiquetarse en una estructura de Acción, Proceso, Objeto o Esquema, la que él aplica a situaciones en las que hay que considerar conjuntamente cuestiones del AL que pertenecen a una misma familia o categoría. Por ejemplo: a veces un vector es una flecha, otras veces en un par ordenado, otras una matriz, otra un polinomio, etc.; para obtener a partir de su uso una información que no conocía, y que el estudiante construye con el hecho de verse enfrentado a resolver un determinado problema. Considerar la información conjuntamente lo entendemos como establecer algún tipo de relación lógica (o síntesis), transformación o conservación, para tomar una decisión relativa a la situación en la que el estudiante se encuentra para con el problema a resolver.

Por tanto, desde esta perspectiva el tipo de relaciones, transformaciones y conservaciones, diferentes, entre los estados de construcción de los conceptos básicos del AL que los estudiantes establecen durante la resolución de un problema puede ser considerado un indicador del nivel de desarrollo mental del esquema que hemos llamado esquema nivel intra, inter y trans de los conceptos básicos del AL.

El objetivo en esta parte de la investigación es identificar el tipo de relaciones (lógicas), transformaciones y conservaciones establecidas entre los elementos matemáticos del AL que los estudiantes usan cuando resuelven un problema, para así caracterizar el proceso de desarrollo del esquema concepto básicos del AL, a través de su uso.

La hipótesis sobre la cual se apoya este objetivo es que las relaciones, transformaciones o conservaciones entre los elementos matemáticos del AL que los estudiantes (de nuestro casos de estudio) son capaces de establecer durante la resolución de un problema, pueden ser consideradas como niveles de un esquema de dos conceptos básicos del AL desde un punto de vista cognitivo, utilizandoel modelo del desarrollo de los esquemas cognitivos de la teoría APOE, a través de las fases Intra, Inter y Trans, que apoyan la evolución de la construcción del conocimiento.

METODOLOGÍA

En esta primera etapa se trabajó con un caso de estudio (Stake, 2010), constituido por 12 estudiantes (sean estos de Licenciatura o Pedagogía en Matemática), atendiendo a criterios de

selección (haber cursado AL, buen rendimiento académico, accesibilidad de los investigadores). Los estudiantes fueron etiquetados como E1, E2, …, E12 y el entrevistador como E.

En esta primera etapa se aplicó un cuestionario de 11 preguntas, del tipo lápiz y papel y una entrevista semiestructurada de 5 preguntas. La idea es que la demanda del problema propuesto en los instrumentos al resolutor, permita caracterizar la evolución del esquema de los conceptos básicos del AL.

Hemos seleccionado una pregunta de la entrevista que se aplicó a los estudiantes, para mostrar en este reporte su análisis desde la triada Inter-conceptos básicos del AL, Intra-conceptos básicos del AL y Trans-conceptos básicos del AL.

EJEMPLO DE LA ENTREVISTA

Pregunta 5 de la entrevista.

Averigua si la siguiente afirmación es correcta o no en ambos casos justifica tu respuesta.

"Sean *V,* W y Z espacios vectoriales sobre un cuerpo K y supongamos que:

$V + W = V + Z$,

Entonces, $W = Z$".

Durante el desarrollo de la entrevista aE6, es interesante mostrar como él transforma una propiedad que no se cumple en el esquema de los conjuntos, hacia el contraejemplo en el esquema de los espacios vectoriales, conservando una propiedad sin estructura que evoluciona hacia una propiedad con estructura en el segundo esquema.

[169ES5] : Entonces hay que demostrar que W es igual a cero, si es que es verdadero no, no, no, yo creo que no.

[170E] : ¿Por qué?

[170ES5] : Porque estoy pensando en lo más fácil, R estoy pensando, pero perdón acá son todos los vectores que son de la forma V+W donde V pertenece a K y W K esa es la definición de suma de espacio ¿cierto?

Para poder considerar la aplicación de operaciones sobre espacios vectoriales, el estudiante necesita una concepción objeto de EV.

[171E] : Claro.

[171ES5] : Entonces, pensemos en V igual a R ahí todo esto falso, pensé mas en V igual a R entonces pensemos R más un conjunto igual a R más otro conjunto por ejemplo si yo, aquí yo pongo el espacio nulo eso me da R ¿cierto?

[172E] : Sí.

[172ES5] : De hecho si yo pongo cualquier cosa acá me va a dar R.

[173E] : ¿Cómo cualquier cosa?

Sin embargo para poder construir un contraejemplo, se requiere la desencapsulación del concepto espacio vectorial y pensar en el proceso que dio origen al objeto, y eso es justamente el uso del esquema del concepto subespacio vectorial.

[173ES5] : Cualquier subespacio de R, si yo pongo cualquier, por ejemplo…pongo el generado por el (1,1) el por ejemplo no el generado por el 1 esta en R, IR más R eso me da R e ir no es igual a y ese y ese son distintos, por lo tanto, es falso.

E6, en la misma pregunta 5, hace uso del esquema de conjuntos, para diseñar un contraejemplo, que hace evolucionar a una estructura de espacio vectorial.

[122ES6] **:** Ya se me vino a la cabeza una... algo de teoría de conjuntos, por ejemplo, si yo tengo que A unión B es igual a A unión C no necesariamente $B = C$, hay contra ejemplos para eso. Pero estaba tratando de pensar en un contra ejemplo para eso y yo creo que es análogo, creo que es análogo.

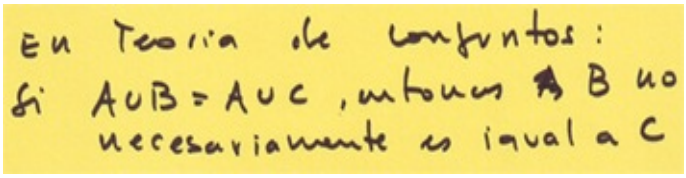


Figura 2.E6 traspasa la situación al esquema de conjuntos.

[125E] **:** Entonces ponga ahí lo que esta pensando usted .Estoy pensando que esta es la relación que hace.

[123ES6] **:** En teoría de conjuntos, tengo que si A unión B es igual a A unión C entonces D no necesariamente es igual a C. Escribo un contra ejemplo.

[126E] **:** Si usted quiere .No es necesario por que usted ya lo ve, pero si quiere lo escribe, si a usted lo va a ayudar a responder, escribir eso, bienvenido, pero ver esto es muy bueno.

[124ES6] **:** Por ejemplo, si tomo A como, claro, uno: a B uno coma dos; y a C como dos no más, entonces A unión B, esto es uno coma dos; y A unión C también es uno coma dos…

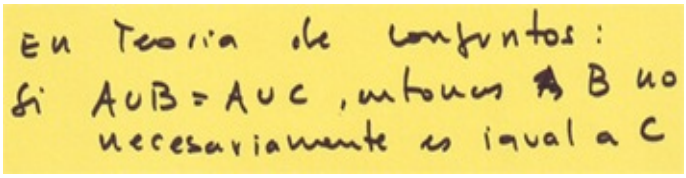


Figura 2. E6 traspasa la situación al esquema de conjuntos.

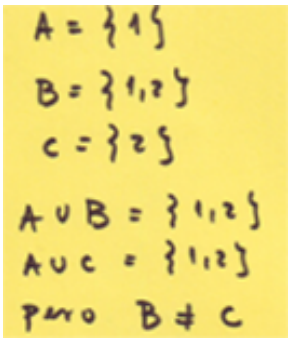


Figura 3. E6 construye el contraejemplo en el esquema de conjuntos.

[127E] **:** Pero…

[125ES6] **:** Pero B es distinto de C.

[128E] **:** Perfecto.

Este estudiante, E6 al desencapsular el objeto espacio vectorial, mira el proceso que dio origen a él, y resulta importante el rol que juega el esquema de conjuntos para usarlo (evocarlo) en la elaboración de la respuesta, y para ir relacionando los elementos de los esquemas espacio vectorial y teoría de conjuntos.

[132E] **:** Porque un espacio vectorial, si bien tiene estructura de espacio, ante todo ¿qué es lo que es?

[130ES6] **:** Un conjunto.

Y es aquí en este esquema de conjuntos en el cual procesa y construye tres conjuntos a partir de los cuales usa para construir espacios vectoriales como el generado de esos conjuntos, los que le permitirán elaborar el contraejemplo para la pregunta 5 de la entrevista.

[133ES6] **:** Puede, a ver, déjeme un poquito. Es que a lo mejor podría tomar, generadores.

[136E] **:** Sí.

[134ES6] **:** Puede ser, espéreme un poco.

[137E] **:** Te pueden servir, por supuesto, porque los generadores ¿Qué son?

[135ES6] **:** Son espacios vectoriales.

[138E] **:** Pero no son así, ¿no es cierto?, son ¿de qué categoría? ¿Cómo es un espacio generado?, mi pregunta es ¿es finitos o infinitos?

[136ES6] **:** Infinito.

[139E] **:** Infinito, así que estaría concordando con las ideas que usted tiene.

[137ES6] **:** Claro, porque por ejemplo si yo tengo, no me acuerdo como era la… o sea como, a ver… ah, si yo tengo que V por ejemplo, es el generado por *a* y W es el generado por *b*, entonces V + W es el generado por *a* unión *b*, entonces ahí tengo algo como parecido. Ya ahora voy a tomar V como el uno coma dos y dos coma uno… no yo creo que ese no.

[140E] **:** Le pone "no" entonces.

[138ES6] **:** Voy a tomar V como el uno coma dos no más, voy a tomar W como cero coma tres y Z cero coma tres y uno coma dos, entonces en este caso V + W, esto es uno coma dos y cero coma tres y V + Z también es lo mismo.

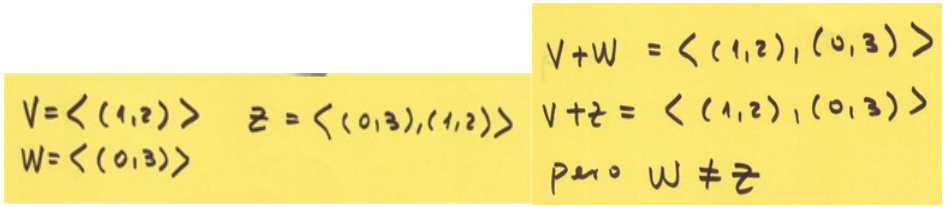


Figura 4. Construcción del contraejemplo en el esquema de espacio vectorial.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados hasta ahora obtenidos muestranlas construcciones y mecanismos mentales que utiliza un estudiante de Pedagogía o Licenciatura en Matemáticas como estrategia cognitiva, para construir conceptos básicos del álgebra lineal. Entre ellos se destacó la construcción del concepto espacio vectorial como objeto, y la construcción del concepto de conjunto como esquema.

En cuanto alas caracterizaciones de las fases intra, inter y trans de los conceptos básicos del álgebra lineal, el análisis de los resultados obtenidos da cuenta que los estudiantes que logran mostrar relaciones, transformaciones y conservaciones en dicho esquema, mostraron evidencias de haber construido las siguientes construcciones y desarrollado los mecanismos mentales asociadas a ellas:

(1) La construcción objeto del concepto de espacio vectorial: Se logra a partir de la coordinación del proceso suma de vectores con el proceso de multiplicar un vector por un escalar, a través de la ley distributiva. Esta coordinación se realiza a partir de la construcción de la combinación lineal de vectores como proceso.

(2) La construcción del concepto espacio generado como objeto: Para ello es necesario coordinar los procesos combinación lineal y conjunto generador a través del cuantificador, que exige que todos los elementos del conjunto generador, sean puestos en combinación lineal. Este proceso se encapsula en el objeto espacio generado Esta encapsulación mostró ser difícil para los sujetos de los casos de esta investigación. Únicamente 5 de ellos dieron muestras en su trabajo de haberlo construido y, durante la entrevista, con la guía de la entrevistadora, dos alumnos más lograron dicha encapsulación.

Las evidencias obtenidas dan cuenta de las dificultades en la construcción del esquema conceptos básicos del álgebra lineal. Claramente, el análisis de los resultados muestra que la no construcción del concepto espacio vectorial como un proceso imposibilita la construcción del esquema conceptos básicos del álgebra lineal.

Una contribución relevante de este trabajo, consiste en mostrar que la construcción del esquema del concepto espacio vectorial, no garantiza que se ha construido la relación que se establece el esquema conceptos básicos del álgebra lineal. Este resultado parece indicar que en los cursos de Álgebra Lineal es necesario llevar a cabo actividades explícitas para poner de relieve el papel de los conceptos básicos en este importante tópico de la matemática.

Con este estudio se propone una primera respuesta a la pregunta de investigación planteada acerca de las construcciones y mecanismos mentales asociados al uso de los conceptos básicos del álgebra lineal. Este estudio proporciona nueva evidencia de que el uso de las estructuras de la teoría APOE permite determinar las construcciones que subyacen a las dificultades de los alumnos y a sus estrategias.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está siendo posible gracias al apoyo recibido del CONICYT para el desarrollo del proyecto Fondecyt Regular No. 1140801.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014).APOS Theory.A framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K.(1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Ed.s) Research in Collegiate Mathematics Education. Vol. 2. Providence, RI: American Mathematical Society. p. 1-32.

Dorier, J. L. (1997). L'enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question. Grenoble: La penséee Sauvage editions.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces, in Dorier (ed.): On the Teaching of Linear Algebra, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 3-81.

Dorier, J. L. Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.), The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study. Kluwer Academic Publisher.Printed in Netherlands. pp. 255-273.

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgraber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: New ICMI Study Series, 7, 255-273.

Dubinsky, E (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht: Kluwer, 95-126.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course, in D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, y W. Watkins, (Eds). Resources For Teaching Linear Algebra, MAA Notes, 42, 85-106.

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une Genèse des Concepts d'Algèbre Linèaire.Cahier de Didactique des Mathèmatiques, 29 IREM de Paris VII.

Sierpinska A. (2000). On some aspects of student's thinking in linear algebra.Dans J-L.Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, 209-246.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). Evaluation of the teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. Recherches en didactique des mathématiques, 19(1), 7-40.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. (2002). A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra.Reporte de Investigación. Montreal, Canadá: Concordia University.

Stake, R. E. (2010). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Arnon, I., Tigueros, M. y Dubinsky E. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL.Disponible en http://pc75666.math.cwu.edu/montgomery/scholar/2002/0731-b-IIawi.pdf

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE LOS NÚMEROS RACIONALES COMO OBJETO DE APRENDIZAJE: UN ESTUDIO DE CASO

Teacher's knowledge of rational numbers as learning object: A case study

Diana Zakaryan[a], Miguel Ribeiro[b] y José Carrillo[c]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [b]Centro de investigação sobre o Espaço e as Organizações (CIEO), Universidade do Algarve, Portugal;[c]Universidad de Huelva, España

diana.zakaryan@pucv.cl[a], cmribeiro@ualg.pt[b], carrillo@uhu.es[c]

Resumen

En esta conferencia presentamos resultados de una investigación desarrollada dentro del Plan de Mejoramiento Institucional de una universidad en Chile. Buscamos caracterizar y comprender el conocimiento del profesor de los números racionales como objeto de aprendizaje, uno de los subdominios del modelo Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) en el caso de una profesora de matemáticas de la enseñanza media chilena, a través de observaciones de aula, cuestionarios y entrevista. Los resultados permiten identificar las necesidades formativas de los profesores y concluir con algunas reflexiones para mejorar la formación inicial de los profesores de matemáticas.

Palabras clave: *conocimiento del contenido matemático como objeto de aprendizaje, conocimiento especializado del profesor de matemáticas, números racionales, formación de profesores.*

Abstract

In this conference, we present results of research developed within the Institutional Improvement Plan in a Chilean university. We seek to characterize and understand the teacher's knowledge of rational numbers as learning object, one of the subdomainsMathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) in the case of a Chilean 8th grade elementary school mathematics teacher through classroom observations, questionnaires and interviews. The results to identify some training needs of teachers and conclude with some reflections for improving the initial training of mathematics teachers.

Keywords: *knowledge of the mathematical content as learning object, mathematics teachers' specialized knowledge, rational numbers, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, teniendo en cuenta las recomendaciones de varios organismos internacionales (e.g., UNESCO, OCDE) y a la luz de los resultados poco satisfactorios de las evaluaciones docentes en Chile (e.g., TEDS-M)**,** algunas universidades chilenas tratan de revisar los planes de estudio en las carreras de Pedagogía (e.g., rediseñar el currículo, fortalecer la vinculación entre la Universidad y el sistema escolar), procurando aumentar el nivel de las competencias profesionales de los futuros profesores, con el fin de poder impactar en la mejora de los resultados de aprendizaje de los alumnos. **U**no de los aspectos a considerar para la mejora de la enseñanza de las matemáticas, es la preparación integral de profesores – tanto en ejercicio como futuros (e.g., Llinares, Valls, & Roig, 2008) para que puedan ofrecer oportunidades de aprendizaje significativas a sus alumnos. La necesidad de aumentar el nivel de las competencias profesionales de los futuros profesores y la

intención de contribuir de manera activa a esa mejora, nos lleva a plantear la pregunta: ¿qué conocimientos necesita un profesor para que la influencia de su práctica en los aprendizajes de los alumnos sea lo más provechosa posible?

Particularmente, nuestro interés en este estudio se centra en caracterizar el conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje de las matemáticas. Investigar acerca de este conocimiento cobra relevancia ya que permite conocer y analizar aspectos del pensamiento matemático de los alumnos (Sosa, Flores-Medrano, & Carrillo, 2015), valorar y seleccionar las tareas o los ejemplos (Llinares et al., 2008), su orden de presentación y las representaciones apropiadas y formas de navegar entre ellas (Ribeiro, 2011). En ese sentido, considerando la importancia y especificidad del conocimiento del profesor en y para los aprendizajes de los alumnos, es esencial comprender ese aspecto de su conocimiento paraplantear una mejora en la formación del profesorado. Con el fin de enfocar esa mejora donde es efectivamente necesaria, además de discutir situaciones matemáticamente críticas (Ribeiro & Carrillo, 2011), urge la necesidad de una comprensión más profunda de los motivos que producen esa criticidad.En este documento presentamos algunas evidencias y discutimos aspectos del conocimiento del profesor, en particular, en lo que se refiere al conocimiento de los números racionales como objeto de aprendizaje, a partir del análisis de la práctica de una profesora de educación media chilena. El foco en los números racionales se debe a que es uno de los contenidos en el que tanto alumnos como profesores revelan dificultades (e.g., Streefland, 1991) correspondiendo, de este modo, a una de las situaciones críticas que requiere especial atención en la formación de profesores.

CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO COMO OBJETO DE APRENDIZAJE

A partir de los trabajos de Shulman (1986, 1987) han surgido distintas conceptualizaciones del conocimiento del profesor (e.g., *Mathematical Knowledge for Teaching* – Ball et al., 2008; *Enfoque Ontosemiótico* – Godino, Batanero, & Font, 2007; Knowledge Quarted – Rowland, Huckstep, & Thwaites, 2005; *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – Carrillo et al., 2013). A pesar de diferencias (en algunos casos sustanciales) en términos de lo que se consideran los aspectos esenciales de cada una de esas conceptualizaciones, la importancia del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de los alumnos es un aspecto común. Poner el foco en el conocimiento del profesor relacionado con las características de aprendizaje derivadas de la interacción del alumno con el contenido matemático permite comprender mejor el conocimiento del profesor acerca del propio proceso de aprendizaje matemático (Flores-Medrano, Escudero-Avila, Montes,& Carrillo, 2014) y como resultado de esa comprensión, atender las necesidades de su formación.

Desarrollamos nuestro trabajo bajo el modelo del MTSK, principalmente por la razón de que ese ataña solo la parte del conocimiento profesional del profesor de matemáticas que está condicionada por la propia matemática, es decir, no incluye otros dominios del modelo de Shulman (1986), también pertenecientes al conocimiento profesional (como el conocimiento psicopedagógico general).

El MTSK (Figura 1) considera seis subdominios de naturaleza diferenciable. Tres de ellos conforman el conocimiento del contenido matemático del profesor: conocimiento de los temas y sus fundamentos (KoT); conocimiento de estructuras y conexiones entre los temas (KSM); y conocimiento de las formas de producir y proceder en matemáticas (KPM). El dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido contiene otros tres subdominios: conocimiento del contenido matemático como objeto de aprendizaje (KFLM), como objeto de enseñanza (KMT) y desde el punto de vista de los estándares que se pueden/deben alcanzar en un determinado momento escolar (KMLS). El MTSK asume un dominio de creencias/concepciones del profesor sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje, el cual está íntimamente ligado a los subdominios anteriores.

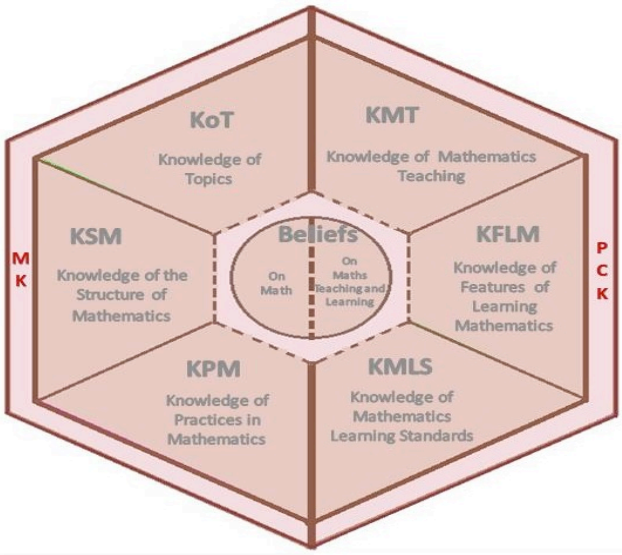


Figura 1. Dominios de Mathematics Teachers Specialised Knowledge (Carrillo et al., 2013, p.2989)

Tal como mencionamos, el enfoque de nuestro trabajo se centra en el subdominio KFLM. Al igual que los demás subdominios de esta conceptualización del conocimiento del profesor, el KFLM pone el foco principal en las matemáticas, en este caso en el contenido matemático como objeto de aprendizaje. Esto no implica que se quite importancia al papel del alumno en el proceso, sino que interesa el conocimiento del profesor relacionado con las características de aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido matemático y no las características del alumno en sí mismo.

Flores-Medrano et al. (2014),a partir de una revisión de la literatura sobre el conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje, resumen las siguientes categorías para el KFLM: (i) *formas de aprendizaje*; (ii) *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*; (iii) *formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático*; (iv) *concepciones de los alumnos sobre matemáticas*. A continuación describimos y ejemplificamos cada una de estas categorías.

(i) *Formas de aprendizaje*, se refiere al conocimiento que posee el profesor acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Incluye el conocimiento sobre el desarrollo cognitivo del alumno tanto para la matemática en general, como para los contenidos particulares. Por ejemplo, un profesor puede conocer, de manera formal o informal, la secuencia de acciones, procesos, objetos y estructuras (Arnon et al., 2014) como explicación del desarrollo cognitivo del alumno cuando éste se enfrenta a la tarea de aprender contenidos de fracciones. Esta categoría considera, además, el conocimiento del profesor en relación con el desarrollo de las competencias matemáticas de los alumnos. Se hace necesario que el profesor conozca un conjunto de premisas para que sus alumnos puedan llegar a desarrollar esas competencias. Por ejemplo, a través de la resolución de problemas, proponiendo tareas de demanda cognitiva diferente que permiten movilizar los conocimientos y destrezas de los alumnos en una variedad de situaciones y contextos (Rico & Lupiañez, 2008; Zakaryan, 2013). En este sentido, el profesor puede conocer qué tipo de tareas son oportunos para el desarrollo del sentido numérico de los alumnos y las fenomenologías que involucran a los números racionales.

(ii) *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje,* tienen que ver con los conocimientos sobre los errores, obstáculos y dificultades asociados tanto a la matemática en general como a los temas concretos. Por ejemplo, concretando en el contenido de los números, podemos referir el conocimiento del profesor sobre los errores que genera la coma en las operatorias (Castro, 2008; Ribeiro, 2009); el conocimiento acerca de las dificultades que presentan los alumnos para ordenar los números racionales o el conocimiento del profesor sobre los obstáculos didácticos,

epistemológicos u ontogenéticos (Brousseau, 1983). Ejemplo de un obstáculo (epistemológico) que consideramos se incluye en el contenido de este subdominio se refiere a que el profesor conozca que, al ser introducidos los números naturales antes de los racionales, los alumnos tienden a transferir, de forma directa, propiedades de las operaciones con naturales a las operaciones con fracciones.

(iii) *Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático*, se sustenta en un conocimiento acerca de los procesos y estrategias de los alumnos, tanto los típicos como los no habituales, y los conocimientos sobre el posible lenguaje o vocabulario usado comúnmente al abordar un determinado contenido (Sosa, Aguayo,& Huitrado, 2013). Por ejemplo, la clarificación del significado de la expresión "correr la coma" para explicar el procedimiento de la multiplicación de un número decimal por una potencia de diez, o los porqués de las diferencias entre sumar o restar dos números decimales no enteros y de su producto (e.g., Ribeiro, 2009).

(iv) *Concepciones de los alumnos sobre matemáticas* considera el conocimiento sobre las expectativas e intereses que tienen los alumnos con respecto a las matemáticas. Esto permitirá al profesor a sustentar su práctica y promover la ampliación del espectro de esas concepciones en sus alumnos, así como a desarrollar el conocimiento que permita a estos, dicha ampliación. Un ejemplo se refiere al conocimiento del profesor sobre las concepciones de facilidad o dificultad que los alumnos asocian a las operaciones con las fracciones.

MÉTODO

Desarrollamos la investigación desde un enfoque interpretativo, a través de un estudio de caso instrumental (Stake, 2007) – considerando el conocimiento del profesor como un objeto de estudio complejo y multidimensional. Nuestra informante es una profesora (Ana) del 8°grado de la enseñanza media chilena (alumnos de 13-14 años), que ha obtenido el título de Profesora en Matemáticas y Licenciada en Educación y tiene una experiencia docente de siete años. Realizamos la recolección de información a través de observaciones no participante de aula de las sesiones dedicadas a los números racionales de la profesora. La identificación del contenido del KFLM, ha sido complementada y contrastada con el análisis de cinco cuestionarios y de una entrevista semi-estructurada, a través de la triangulación de fuentes de datos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado, debido a la limitación del espacio,ejemplificamos con un indicador por cada una de las cuatro categorías del KFLMevidenciados en la práctica de Ana y concluimos con una síntesis de los indicadores observados por cada categoría.

(i) Formas de aprendizaje

En la práctica de Ana no se han evidenciado indicadores relativos a esta categoría, lo que indica, también, en sí, la importancia atribuida a la naturaleza del contenido matemático como un producto final. Por otra parte, durante la entrevista, cuando preguntamos sobre aspectos de las características del aprendizaje de las matemáticas, Ana contesta de manera general e imprecisa– por ejemplo, en lo que se refiere a los estilos de aprendizaje y teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas, contesta:

> "Conocía muchos, pero se me olvidaron todos, pero como para aplicarlos, no", lo que nos lleva también a problematizar la formación, el foco y resultados de la misma.

Esta declaración explícita da cuerpo al hecho de que en su práctica no se haya observado ningún aspecto asociado a las *formas de aprendizaje*. Esa misma idea subyace de manera aún más directa al contestar la pregunta: *¿cómo logra que sus alumnos aprendan matemáticas?*, reconociendo que no tiene constancia de si aprenden o no, al menos inmediatamente.

> Primero, no sé si aprenden o no. Eso, si aprenden o no aprenden, uno se da cuenta al otro año. Por ejemplo, cuando uno ya está en octavo y quieres hacer recuerdo de algo, dicen: "¡ah, sí, el año pasado vimos no sé qué cosa!"

Ana destaca que le resulta difícil detectar las características que le permitan saber si un alumno aprendió o no el contenido matemático, en particular, de números racionales:

> Yo creo que es difícil detectar eso. Si uno le encontrara fuera diría: "¡ah, aprendió!", por lo mismo que te decía antes. Porque tú en la prueba mides lo que estás enseñando en clase, pero si estudian para la misma prueba, cómo se da cuenta de que aprendió o no.

Así, hace alusión a que los alumnos demuestran haber aprendido matemáticas cuando son capaces de aplicar su conocimiento en las situaciones cotidianas. Sin embargo, en sus clases no observamos que se aproveche ese conocimiento para crear situaciones donde los alumnos podrían poner en acción y comprobar sus aprendizajes "en situaciones cotidianas".

(ii) Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje

En cuanto al conocimiento de *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*, Ana destaca la importancia de usar un lenguaje con significado asociado a la cantidad que se desea expresar (el número), mostrando conocer que el hecho de que los alumnos no sepan leer correctamente la notación decimal (y, luego, asociado al desarrollo del sentido numérico) les va a dificultar el transformar un número decimal finito a fracción.

Profesora: …sigue (0,2). , escuché por ahí. ¿Cómo asociar la fracción inmediata de esos números? ¿Cómo se lee? Se supone que el 2ocupa la décima, por lo tanto, ¿cómo se llama ese número?¿No se llama 0,2 [cero coma dos]? Dos décimos. Así como lo nombro. Si usted tuviera, por ejemplo, este otro 0,03. ¿Cómo se lee eso?

Alumnos: Tres centésimos. 3/100

Profesora: Suelen complicarse con saber cuál esla fracción asociada porque no sabemos leer el número.

El (re)conocer esta dificultad de los alumnos en la lectura de números en notación decimal y su correspondiente representación en fracción se relaciona con el conocimiento de Ana sobre el papel de la coma y los errores que genera la coma en las operaciones (Castro, 2008; Ribeiro, 2009).

(iii) Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático

En relación a esta categoría, Ana manifiesta tener el conocimiento de que los alumnos suelen confundir el cómo se forma un número en el sistema decimal con su pertenencia a un sistema numérico concreto y trata de precisar el lenguaje matemático de sus respuestas:

Profesora: ¿Qué números conocen ustedes desde que empezaron a venir al colegio?Ya, deme ejemplos de números.Pero no me los nombre todos de aquí al infinito.

Alumno: Pero, en realidad, solamente sería necesario nombrar nueve, del 1 al 9, y con el 0 serían diez.

Profesora: Tú quieres nombrar lo que forman todos los números.

Ana revela darse cuenta (conocer) de los razonamientos erróneos de sus alumnos y presenta formas que considera poder subsanarlos – dando ella misma la explicación que asume apropiada y corrigiendo los errores. Aunque el periodo de las practicas observadas es relativamente corto, no obstante hay aspectos de la práctica y del conocimiento que son transversales a una secuencia de clases de introducción de un contenido: en las clases observadas son escasas las oportunidades donde los alumnos expresan sus razonamientos.

(iv) Concepciones de los alumnos sobre matemáticas

En el siguiente episodio, donde Ana trata de explorar las operaciones con números racionales mediante un juego de dominó, evidenciamos su conocimiento relacionado con las *concepciones de los alumnos sobre matemáticas*. En concreto, menciona explícitamente durante la clase, que con ese

juego los alumnos van a aprender de una manera entretenida, lo que se asocia a una forma de encarar las expectativas e intereses de los alumnos al/para aprender matemáticas.

Profesora: Para que uno ya empiece a grabárselos en su memoria,mientras estamos jugando. De eso se trata,aprendérselos de una forma más entretenida.

Esta atención atribuida al juego, y a la forma cómo justifica su inclusión (*grabárselos en su memoria* [969]… *aprendérselos de una forma más entretenida* [970]) refuerza también unaconcepción de que la matemática debe ser divertida para los alumnos – en este caso Ana considera que el juego le va a servir para poner en evidencia conocimientos que han sido previamente presentados (Climent, 2005), y, así supuestamente, aprendidos.

Las categorías e indicadores del KFLM

A partir del análisis de las siete sesiones, enfocando esencialmente en las categorías del KFLM, presentamos una síntesis de la los indicadores evidenciados en la práctica de Ana mientras enseña el contenido de los números racionales (Tabla 1).

Tabla1. Indicadores de las categorías del KFLM

Categorías del KFLM	Indicadores
(i) formas de aprendizaje	-
(ii) fortalezas y dificultades en el aprendizaje asociadas al contenido matemático de los números racionales	Conocer que a los alumnos puede presentar dificultad la formalización del concepto de densidad y la justificación del algoritmo para trasformaciones de decimales infinitos periódicos y semiperiódicos a fracción.
	Conocer las concepciones erróneas de los alumnos respecto a la idea que tienen de los números racionales (su asociación con la fracción).
	Conocer que los alumnos pueden quedarse con una idea errónea del concepto, particularmente, de decimal semiperiódico, cuando se les ofrece (solo) un ejemplo concreto respecto a la posición y el número de cifras que podría tener el período.
	Conocer acerca de la importancia del lenguaje asociado al número y el hecho de que los alumnos no sepan leer correctamente la notación decimal les dificulta la transformación de un número decimal finito a fracción.
(iii) formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático de los números racionales	Conocer que los alumnos suelen confundir el cómo se forma un número en el sistema decimal con su pertenencia a un sistema numérico concreto.
	Conocer los razonamientos incorrectos de los alumnos acerca de la confusión que tienen respecto al producto cruzado como procedimiento para sumar dos fracciones con distinto denominador.

	Conocer los razonamientos erróneos de los alumnos al respecto a que asocian la densidad de los números racionales con la infinidad del conjunto.
(iv) concepciones de los alumnos sobre el contenido matemático de los números racionales	Conocer las expectativas e intereses de los alumnos al/para aprender matemáticas: a través del juego de dominó de números racionales el aprendizaje de los números racionales puede resultar más entretenido.

De este modo, se evidencian con más frecuencia los indicadores del KFLM relativos a las categorías (ii) *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* y (iii) *formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático*. Se ha identificado un solo indicador relacionado con (iv) *concepciones de los alumnos sobre matemáticas*, mientras no apreciamos ninguna evidencia del conocimiento de la profesora relativa a (i) *formas de aprendizaje* de los alumnos, lo que, por si, se configura como un resultado importante a tener en cuenta en el contexto de la formación.

CONCLUSIONES

El estudio del caso instrumental nos permite reflexionar sobre cómo refinar cada una de las categorías en el subdominio del KFLM (e.g., análisis de la práctica de la misma profesora en otros contenidos y análisis del mismo contenido impartido por otros profesores – incluyendo distintos contextos tanto locales, como regionales o nacionales). Por otro lado, los resultados nos llevan a cuestionar y reflexionar, en particular, sobre formas de acceder y desarrollar ese conocimiento en los profesores, y en formas de estructurar la formación para que ese desarrollo sea potenciado. Así se hace esencial que, por una parte, las tareas que se exploran en la formación de profesores consideren la especificidad de la actuación docente (e.g., Jakobsen, Ribeiro, & Mellone, 2014, 2014)y que permitan, al mismo tiempo, que los futuros profesores puedan vivir experiencias y dificultades similares a las que sería deseable que pudieran presentar a sus alumnos (e.g., Pinto & Ribeiro, 2013), pero obviamente a un nivel distinto.

La reflexión sobre situaciones de la práctica, a través de discusión de episodios de videos, de episodios transcriptos, de respuestas de alumnos, de las fuentes históricas originales potenciaría un desarrollo y profundización del conocimiento asociado a los indicadores del KFLM. Esto permitiría al profesor sustentar su conocimiento a partir de los comentarios y dudas de los alumnos bien como para anticipar sus posibles errores (explorando el conocimiento de los posibles porqués matemáticos que los pueden fundamentar), siendo conscientes de que éstos aprenden (entienden los porqués) o no, capacitados y conocedores de formas de promover dicho aprendizaje y comprensión.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014).*APOS Theory.A framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Castro, E. (2008) (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Editorial Síntesis.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Unpublished PhD Dissertation, (Publicada en 2005. Michigan: Proquest Michigan University. www.proquest.co.uk).

Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Montes, M., & Carrillo, J. (2015). Dos acercamientos para la caracterización del conocimiento que tiene un profesor acerca del aprendizaje en matemáticas.In I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & Ph. Richard (Eds.), *Proceedings Fourth ETM Symposium* (pp. 473-485). Madrid, España.

Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007).The ontosemiotic approach to research in mathematics education.*ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M. & Mellone, M. (2014).Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task.*Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Llinares, S., Valls, J., & Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20*(3), 59-82.

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos - o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas, 3*(1), 85-105.

Ribeiro, C. M. (2009). Conhecimento Matemático para Ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. *Bolema, 22*(34), 1-26.

Ribeiro, C. M. (2011). Uma abordagem aos números decimais e suas operações no primeiro ciclo. A importância de uma "eficaz navegação" entre representações. *Educação e Pesquisa, 37*(2), 407-422.

Ribeiro, C. M. & Carrillo, J. (2011). The role of beliefs and knowledge in practice.In B. Roesken & M. Casper (Eds.) *Current state of research on mathematical beliefs XVII – MAVI 17* (pp. 192-201). Bochum: Professional School of Education, Ruhr-Universität Bochum.

Rico, L. & Lupáñez, J. (2008).*Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza.

Rowland, T., Huckstep, P.,& Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Sosa, L., Aguayo, L.M., & Huitrado, J. L. (2013). KFLM: Un entorno de Aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M.S. García, J.A. Hernández, & L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). México, D.F.: Diaz de Santos.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. & Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 173-189.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education.A Paradigm of Developmental Research*.Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Zakaryan, D.(2013).El tipo de tareas como oportunidad de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años. En A. Ramirez & Y. Morales (Eds.). *ProceedingsI Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe (I CEMACYC)* (pp. 677-688). Santo Domingo, República Dominicana.

NIVELES DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO BASADO EN LOS NIVELES DE VAN-HIELE. FONDECYT 1090617.

Aravena Díaz, María

Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Básicas.

Universidad Católica del Maule. Talca, Chile

Resumen

La investigación que se presenta fue financiada el Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico FONDECYT 1090617. Se realizó un experimento en el área de la geometría, basado en el modelo de Van Hiele, en alumnos de segundo año de secundaria de establecimientos públicos de estratos vulnerables donde la geometría es trabajada, salvo excepciones, en forma tradicional. La revisión teórica consideró los estudios y propuestas que han utilizado el modelo, dando cuenta de la importancia de éste para analizar los niveles de razonamiento de los alumnos en diversos temas geométricos. La metodología fue de corte cuantitativo, descriptivo interpretativo, de los niveles y grados de adquisición. Para la selección de la muestra se utilizó un muestreo por conglomerados con arranque aleatorio y probabilidad proporcional quedando constituida por 615 estudiantes. A nivel de resultados, se observa que al final de la experiencia el grupo experimental presenta diferencias significativas, con respecto al grupo control. El alumnado del grupo control alcanza un nivel 1 de razonamiento, que es el más básico en el modelo, reconociendo solo atributos físicos de las figuras geométricas, en contraste con el Grupo experimental donde los alumnos razonan en el nivel 2, reconociendo que las figuras geométricas están dotadas de propiedades matemáticas, utilizan y clasifican definiciones y procesos de demostración para validar sus afirmaciones. Se destaca además, que un grupo de estos alumnos llega a razonar en el nivel 3 del acuerdo al modelo.

Palabras clave*: razonamiento geométrico, niveles de razonamiento, educación secundaria.*

Abstract

The research presented was funded by the National Fund for Scientific and Technological FONDECYT 1090617. An experiment was conducted in the area of geometry, based on the Van Hiele model, on sophomores students in high school public institutions of vulnerable strata where the geometry is worked, except, in traditional form. The theoretical review considered studies and proposals that have used the model, realizing the importance of this to analyze reasoning levels of students in various geometric subjects. The methodology was quantitative, descriptive interpretative, of the levels and degrees of acquisition. The sample selection that's utilized was a cluster sampling with random starts and proportional probability leaving constituted for 615 students. In terms of results, it appears that at the end of the experiment the experimental group presented significant differences relative to the control group. Students in the control group reaches a level 1 of reasoning, which is the most basic model, recognizing only physical attributes of geometric figures, in contrast to the experimental group where students reasoning reach a level 2, recognizing that geometric figures are equipped with mathematical properties, use and classified definitions and demonstration process to validate his claims. It also stresses that a group of these students reach a level 3 of reasoning according to the model.

Keywords: *geometric reasoning, reasoning levels, secondary education*

Introducción

El problema del razonamiento en matemática, en la mayoría de los establecimientos tanto públicos como privados, es un punto de tope para obtener mayores logros en las pruebas de mediciones nacionales (SIMCE) e internacionales (PISA). En la prueba PISA (2009) y PISA (2012), Chile estuvo muy por debajo de la media internacional, presentando serías deficiencias en la resolución de problemas y en los procesos deductivos y argumentativos en geometría (Aravena & Caamaño, 2013), donde se puede observar, que sólo un 1% de los estudiantes chilenos alcanza el nivel 5 o 6 declarado por PISA. El problema de la calidad de la enseñanza de la matemática en Chile, desde hace décadas, está directamente relacionado con la segregación de los establecimientos municipalizados (públicos), donde asisten los estudiantes más vulnerables, lo que queda demostrado en diversos estudios que evidencian que este segmento de la población estudiantil presenta serías dificultades y obstáculos en la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos, especialmente en el ámbito de la geometría (Aravena & Caamaño, 2013). El informe de OCDE (2009), ha hecho hincapié en esta problemática y puesto el énfasis en la severa segmentación que existe en la educación chilena y recomienda centrar la atención de forma urgente para corregir las desigualdades de tal manera de lograr la equidad y acceso a la educación superior de estos alumnos, considerando crucial una mejor preparación de profesores para trabajar con alumnos de muy diferentes ambientes y de habilidades mixtas. A pesar de todas las recomendaciones y críticas a la educación chilena, emitidas en dichos informes, la problemática aún no ha sido resuelta.

Cabe destacar que durante los últimos 20 años, en la mayoría de los niveles de enseñanza y también en la formación de profesores, el área de la geometría apenas se trabaja y en los casos que ésta es considerada, en el sistema educativo casi siempre se realiza al final de los cursos. En cuanto a los métodos de enseñanza, es enfocada en forma tradicional, colocando el centro en la memorización y la utilización de mecanismos de resolución, donde no se trabajan elementos que son considerados claves de la matemática como son: la visualización, el razonamiento y la construcción de los objetos geométricos, dejándose de lado las representaciones, la exploración, la modelización, la argumentación y la demostración (Jaime & Gutiérrez, 1996; Aravena et.al, 2011, Aravena & Caamaño, 2013; Ibañes & Ortega, 2004; Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2015). Las pruebas nacionales SIMCE y de ingreso a la educación superior PSU, en las cuales los alumnos de establecimientos públicos obtienen los peores resultados, también están en esta línea tradicional, con lo cual no entregan evidencia sobre la real dimensión del problema.

Las investigaciones muestran que uno de los modelos que ha sido utilizado en varios estudios de enseñanza de la geometría, es el modelo de Van- Hiele, cuyas aportaciones muestran cómo medir, evaluar o describir el nivel de razonamiento de estudiantes (Usikin, 1982; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Burger & Shaughnessy, 1986); analizar la evolución del razonamiento de los estudiantes colocando en práctica secuencias experimentales de enseñanza (Jaime, 1993; Gutiérrez, Jaime & Fortuny, 1991; Guillén, 2004; Aravena y Caamaño, 2013; Cabello, 2013, Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2015) y otros han permitido caracterizar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento (Jaime, 1993; Guillén, 1996; Gutierrez, Pegg &Lawrie, 2004, Aravena & Caamaño, 2013, Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2015). A partir de los trabajos descritos, nos interesamos por este modelo ya que nos permite caracterizar y jerarquizar los niveles de razonamiento de los alumnos de establecimientos públicos de la Región del Maule que presenta los peores resultados en matemática, en particular en geometría en comparación con los establecimientos privados y privados subvencionados (semipúblicos), de tal manera de generar estrategias de acción mediante propuestas de mejora para corregir las desigualdades, para lo cual nos planteamos el siguiente problema de investigación:

¿Cuál es el nivel de razonamiento adquirido por los alumnos de segundo año de secundaria cuando son formados en base al modelo de razonamiento de Van –Hiele?

Para dar respuesta a este problema nos planteamos el siguiente objetivo general: Caracterizar y jerarquizar los niveles de razonamiento de los alumnos de segundo año de secundaria en el contexto del modelo de los Van-Hiele.

Antecedentes.

Se ha considerado importante analizar, en los estudiantes, algunas habilidades que forman parte de los procesos de aprendizaje de contenidos geométricos, entre los que se encuentran los procesos de identificación de propiedades, clasificación, representación, argumentación y demostración (Gutiérrez & Jaime, 2006; Fortuny y Giménez, 1998, Guillén, 2004, Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2015).

Para su identificación, evaluación y análisis, consideramos el modelo de Van Hiele que se describeen detalle en los trabajos de Geddes, Lovett y Tischler (1988) y Gutiérrez & Jaime (1991, 1996). El modelo considera 5 niveles, que en términos generales corresponde a: Nivel 1. Identificación de atributos físicos de las figuras geométricas; Nivel 2. Identificación de propiedades matemáticas, demostraciones empíricas, uso de definiciones con estructura simple; Nivel 3. Demostraciones informales, uso de definiciones con estructura matemática compleja; Nivel 4. Uso y clasificación de definiciones equivalentes, demostraciones formales. Aunque el modelo considera cinco niveles de razonamiento, debido a las características de los estudiantes que hemos analizado, aquí tenemos en cuenta sólo los cuatro primeros niveles.

El modelo nos permite analizar el nivel de razonamiento en el trabajo geométrico, así como para organizar la enseñanza de la geometría mediante la elaboración de actividades según el modelo (Van Hiele, 1957; 1986; Gutiérrez & Jaime 1998; Battista, 2007; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993; Guillén, 1997; Guillén, 2004, Cabello, 2013). Así también, las investigaciones, en base al modelo, nos aportan evidencias sobre los tipos de problemas y las dificultades y errores presentados por los alumnos (Guillén, 2004, Cabello, 2013) y el grado de adquisición alcanzado en cada uno de los niveles (Jaime, 1993; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991;Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2015).

Metodología

La metodología que se siguió en la investigación es de corte cuantitativo descriptiva-interpretativa con pre-prueba, post-prueba y grupo control. En el grupo experimental (GE) se trabajó la secuencia de problemas en base al modelo, donde se capacitó al grupo de docentes de matemática de los diferentes cursos. Por otro lado, en el grupo control (GC) se siguió la metodología tradicional expositiva del profesor y se tuvo la precaución que ninguno de los docentes hubiesen trabajado con el modelo de Van-Hiele.

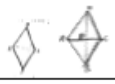
Para el análisis de las respuestas de los estudiantes enlos ítems del pre y postest, se consideraron los 4 niveles de Van- Hiele y los atributos distintivos en los procesos de razonamientoque corresponden a: reconocimiento y descripción, uso de definiciones, formulación de definiciones, clasificación y demostración (Gutiérrez & Jaime, 1998). Para la construcción de los instrumentos, se diseñó una matriz que articula los niveles que abarca cada ítem de los temas geométricos y los procesos evaluativos. Tanto la matriz de niveles como los instrumentos diseñados fueron validados mediante la triangulación de jueces expertos y para la fiabilidad del instrumento se utilizó el Alfa de Cronbach. Las temáticas del pretest fueron las que están en los planes de estudio desde sexto año de Educación General Básica hasta el segundo año de Educación Secundaria y para el postest, el tema de semejanza de figuras planas y espaciales que fue implementada en el experimento.

Para asegurar la equivalencia de los grupos en la partida se utilizó la prueba t-student para muestras independientes y un estudio comparativo de acuerdo al nivel que abarcaba cada ítem y del nivel en

que enmarcaban la respuesta tanto el GC como el GE. Finalmente, se realizó un estudio comparado que interrelaciona los niveles de Van Hiele y los atributos distintivos en los procesos de razonamiento por cada uno de los niveles (Gutiérrez & Jaime, 1998).

A modo de ejemplificación mostramos en la tabla 1, como se utilizó los criterios de evaluación en un ítem para los niveles de razonamiento de los alumnos, en los grados de adquisición altos.

Tabla 1. Codificación grado de adquisición alto o completo de acuerdo al nivel (Aravena & Caamaño, 2013)

ITEM 3: PROPIEDADES DEL ROMBO (niveles que abarca: N1-N2)					Grado adquisición niveles:			
Descriptor (atributos)	Nivel	Tipo	Justificación	Idea de respuesta esperada	N1	N2	N3	N4
Reconocimiento Clasificación exclusiva basada en atributos físicos	1	6 o 7	Lista atributos físicos del rombo	(1) Cuadrilátero de lados iguales, (2) Tiene 4 ángulos iguales (3) Tiene dos diagonales (4) Lados opuestos paralelos.	100	0		
Reconocimiento Uso de definiciones Clasificación exclusiva basada en atributos matemático	2	6 o 7	Utiliza propiedades del rombo Usa definiciones de los cuadriláteros con estructura simple: diagonales de distinta medida Definición de diagonal	(1) es un paralelogramo sus lados opuestos son paralelos (2) sus cuatro lados son de igual medida (3) la suma de los ángulos interiores es de 360, (4) ángulos opuestos congruentes, (5) ángulos adyacentes de distinta medida y suplementarios, (6) diagonales de distinta medida y perpendiculares (7) diagonales son bisectrices y se dimidian 	100	100		

Población y muestra

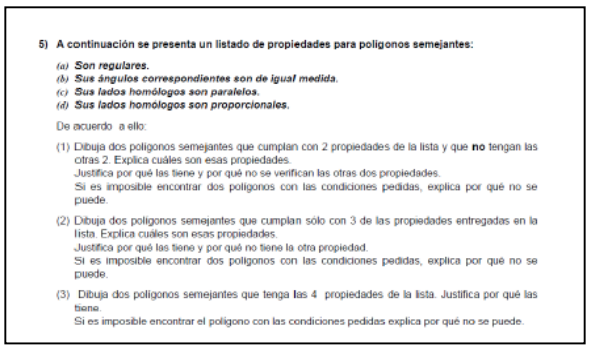
La población para el estudio corresponde a los alumnos de segundo año de educación media (secundaria) de los establecimientos municipalizados (centros públicos de enseñanza) de la Región del Maule, pertenecientes al área científico humanista, de procedencia urbana y que se encuentran en los niveles socio-económico vulnerables. Para la selección de la muestra, se utilizó la técnica de muestreo por conglomerado y posteriormente, se hizo la selección con arranque aleatorio y probabilidad proporcional, quedando constituida por 18 cursos que corresponden a 625 alumnos distribuidos en 5 comunas, de los cuales 315 corresponden al GC y 310 al GE. El tamaño de la muestra se estimó considerando un nivel de confianza del 95% y un error de estimación del 5%.

Resultados y análisis.

Sobre los niveles alcanzados por los estudiantes al final del tratamiento, hemos clasificado las respuestas de ambos grupos por cada nivel y luego se analizó el grado de adquisición (precisión matemática) en cada uno de los niveles. Para explicar cómo se analizaron los datos presentamos un ejemplo de uno de los ítems del postest (tabla 2). El ítem está referido a la asociación de las figuras geométrica con las propiedades matemáticas, siendouna de las habilidades cognitivas importantes a desarrollar en los alumnos y debe estar muy presente en el trabajo geométrico.

Tabla 2. Cantidad de estudiantes en el nivel 2 de razonamiento del ítem 5: reconocimiento de propiedades

			Grupo		Total
			Control	Experimental	
Nivel de razonamiento (Rec. PS)	No responde	Recuento	184	99	283
		% dentro de Grupo	78,0%	43,2%	60,9%
	Análisis	Recuento	52	130	182
		% dentro de Grupo	22,0%	56,8%	39,1%
Total		Recuento	236	229	465
		% dentro de Grupo	100,0%	100,0%	100,0%



5) A continuación se presenta un listado de propiedades para polígonos semejantes:

(a) Son regulares.
(b) Sus ángulos correspondientes son de igual medida.
(c) Sus lados homólogos son paralelos.
(d) Sus lados homólogos son proporcionales.

De acuerdo a ello:

(1) Dibuja dos polígonos semejantes que cumplan con 2 propiedades de la lista y que **no** tengan las otras 2. Explica cuáles son esas propiedades.
Justifica por qué las tiene y por qué no se verifican las otras dos propiedades.
Si es imposible encontrar dos polígonos con las condiciones pedidas, explica por qué no se puede.

(2) Dibuja dos polígonos semejantes que cumplan sólo con 3 de las propiedades entregadas en la lista. Explica cuáles son esas propiedades.
Justifica por qué las tiene y por qué no tiene la otra propiedad.
Si es imposible encontrar dos polígonos con las condiciones pedidas, explica por qué no se puede.

(3) Dibuja dos polígonos semejantes que tenga las 4 propiedades de la lista. Justifica por qué las tiene.
Si es imposible encontrar el polígono con las condiciones pedidas explica por qué no se puede.

Se observa en la tabla anterior que al final de tratamiento, sólo un 22% del GC ubica su respuesta en el nivel 2, de análisis. Por el contrario en el GE, alrededor de un 57% se apoya en propiedades matemáticas para dibujar los polígonos que cumplen con las condiciones pedidas.

Como síntesis global, la enseñanza de la geometría basada en el modelo de Van Hiele ha producido, unos resultados claramente superiores que la enseñanza tradicional, puesto que un alto porcentaje

de alumnos del GE razona en el nivel 2 en contraste con el GC, que sigue razonando en el nivel 1. Sobre los grados de adquisición hay diferencias estadísticamente significativasa favor del GE en todos los niveles,ya que partiendo de grados de adquisición equivalentes, el GE ha mostrado un avance en su adquisición de los niveles de 1 a 3 significativamente superior al GC (Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2015).

Conclusiones e implicaciones didácticas.

Para mejorar la enseñanza de la geometría, se debe incorporar metodologías de este tipo, en todos los niveles de enseñanza, en especial en la formación inicial y continua de profesores, de tal manera que ayuden a introducir a los alumnos, desde los primeros niveles de formación, en la resolución de problemas abiertos, en la formulación de conjeturas, hipótesis, generalización y en procesos de demostración empíricas, informales y formales de forma incremental.Resulta de interés generar espacios de reflexión y comunicación, orientando a los alumnos en la adquisición del lenguaje matemático, la argumentación y la discusión de sus procesos de resolución, permitiendo así la independencia del pensamiento reflexivo (Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2015). Esto es de particular interés en establecimientos vulnerables, donde la educación ha sido por décadas deficitaria (OCDE, 2009). Por último, las universidades formadoras de profesores deben hacerse cargo del problema y cambiar los métodos tradicionales imperantes, en especial cuando estamos a las puertas de una nueva reforma educativa para nuestro país.

Bibliografía.

ARAVENA, M. y CAAMAÑO, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule.*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,16*(2), 139-178.

ARAVENA, M.; GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. (2015). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de Educación Media en Chile. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. En prensa.

BATTISTA, M. T. (2007). The development of geometrical and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, EE.UU.: NCTM.

BURGER, W. F., y SHAUGHNESSY, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry.*Journal for Research in Mathematics Educations, 17*(1), 31-48.

CABELLO, A. B. (2013). *La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de Cabri* (tesis doctoral). Salamanca, España: Universidad de Salamanca.

FUYS, D., GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1988). *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education monograph 3). Reston, EE.UU.: NCTM.

GUILLÉN, G. (1996). Identification of Van Hiele levels of reasoning in three-dimensional geometry. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the P.M.E.* (vol. 3, pp. 43-50). Valencia, España: Universidad de Valencia.

GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20*(2/3), 27-46.

GUTIÉRREZ, A., JAIME, A. y FORTUNY, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237-251.

GUTIÉRREZ, A., PEGG, J. y LAWRIE, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry.*Proceedings of the 28th International Conferencefor the P.M.E.* (vol. 2, pp.511-518). Bergen, Noruega: Bergen University College.

HAREL, G. y SOWDER, L. (1998). Students´ proof schemes: Results from exploratory studies. En E. Dubinski, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education* (vol. 7, pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mathematical Society.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (2004). Origen, nudo y desenlace de una investigación sobre los esquemas de prueba. Aspectos cognitivos. En R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en educación matemática* (pp. 21-57). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática.

JAIME, A. (1993): *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). Valencia, España: Universidad de Valencia. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Jai93.pdf

JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.

MAYBERRY, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(1), 58-69.

OCDE (2004).*Informe Chile 2004.* Recuperado de http://www.scribd.com/doc/19341515/OCDE-Informe-Chile-2004

OCDE (2009). *La educación superior en Chile. Revisión de políticas nacionales de educación*. Recuperado dehttp://www.oecd-ilibrary.org/education/la-educacion-superior-en-chile_9789264054189-es

OWENS, K., y OUTHRED, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement.En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education.Past, present and future* (pp. 83-115). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

PERDIKARIS, S. C. (2004). The problem of transition across levels in the van Hiele theory of geometric reasoning.*Philosophy of Mathematics Education Journal, 18* (revista electrónica sin paginación).

PISA (2009).*Resumen de resultados.* Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación. Ministerio de Educación de Chile. Recuperado de http://www.educacion2020.cl/sites/default/files/resumen_resultados_pisa_2009_chile.pdf

PISA (2012). *Programa internacional de evaluación de estudiantes. Resultados de Chile.* Santiago de Chile: Gobierno de Chile. Recuperado de http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/uploads/2013/04/PISA-Programa-Internacional-de-Evaluación-de-Estudiantes.pdf

SAADS, S., y DAVIS, G. (1997). Spatial abilities, Van Hiele levels, & language use in three dimensional geometry. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st International Conference for the P.M.E.* (vol. 4, pp. 104-111). Lathi, Finlandia: University of Helsinki.

USISKIN, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (ERIC Document Reproduction Service Nº ED 220 288).Columbus, EE.UU.: ERIC.

VAN HIELE, P.M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría* (tesis doctoral). Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

VAN HIELE, P.M. (1986).*Structure and insight.A theory of mathematics education*.Nueva York: Academic Press.

FORMACIÓN INICIAL DOCENTE DE PROFESORES DE MATEMÁTICA DESDE LA PERSPECTIVA DEL LÉXICO DISPONIBLE EN ALUMNOS Y PROFESORES: UN ESTUDIO DE CASO[I]

Initial Teacher Training of Mathematics: from the Perspective of Lexical Available in Students and Teachers: An Case Study.

Del Valle Leo, M.[a], Salcedo Lagos,P.[b]

[a,b]Facultad de Educación, Universidad de Concepción; mdelvall@udec.cl[a], psalcedo@udec.cl[b]

Resumen

Esta investigación se centra en la descripción y análisis del léxico disponible en estudiantes de Educación Superior que se preparan para alcanzar el título profesional de Profesor de Matemática. Por léxico disponible se entiende al conjunto de palabras que se presentan en la mente de un hablante de forma inmediata y natural cuando se trata de un determinado tema. Este índice se ha analizado en 228 de estudiantes de Pedagogía en Matemática que cursan la asignatura de Estructuras Algebraicas en dos Universidades distintas de la Octava Región, obteniendo importantes conclusiones que permitirán generar en una segunda etapa una estrategia pedagógica que puede remediar los bajos resultados históricos de esta asignatura.

Palabras clave: *Léxico Disponible, Formación Docente, Enseñanza de las Matemáticas, Estructuras Algebraicas, Lenguaje y Matemáticas.*

Abstract

This research focuses on the description and analysis of the available lexicon in higher education students preparing to achieve a Math Teacher major. It is understood by available lexicon the group of words that occur immediately and naturally in the mind of the speaker when it comes to a topic. This index has been analyzed in 228 Mathematics Teaching students who are currently taking the Algebraic Structures course in two different universities of the 8th region, obtaining important conclusions that will allow, in a second stage, to generate a pedagogical strategy that can improve the historically low results in this subject.

Keywords: *Lexical availability, Initial Teacher Training, Mathematics Teaching, Algebra Structures, Language and Mathematics.*

ANTECEDENTES

Esta investigación se centra en la descripción y análisis del léxico disponible en estudiantes de Educación Superior que se preparan para alcanzar el título profesional de Profesor de Matemática e indaga acerca de la importancia de la coherencia que éste debiera tener con el léxico disponible en sus profesores. Investigaciones anteriores (Salcedo P. & Del Valle M. et al, 2014) permiten asumir que el lenguaje en sí es de suma importancia en cualquier acto de comunicación y dentro del proceso comunicativo que implica el lenguaje oral y escrito, existen ciertos actores y aspectos a considerar. La comunicación pedagógica con fines de generar aprendizajes es nuestra preocupación puesto que requiere de un código común que sea compartido entre profesor y alumnos. He aquí que el lenguaje juega un rol que no siempre ha sido entendido por los profesores como crucial, importante, decidor para la comprensión e internalización de lo que se ha de aprender. El lenguaje

es un cúmulo de palabras con significado que la experiencia con el medio hace "adquirir". La matemática utiliza un lenguaje complejo constituido por lo dialógico y lo simbólico, situación que requiere una atención especial por sus profesores: el alumno hace un doble esfuerzo. Por una parte debe continuamente aumentar su léxico disponible, pero por otra, debe adquirir una simbología que tiene distinta grafía pero igual significado.

Por léxico disponible se entiende al conjunto de palabras que se presentan en la mente de un hablante de forma inmediata y natural cuando se trata de un determinado tema (Michéa, 1953). Los estudios sobre léxico (Echeverría, M., Sáez, K. y Urzúa, P. (2006) señalan que no siempre las personas tienen un léxico disponible adecuado a las circunstancias de sus vidas por lo que no es difícil admitir que éste es el que se hereda y se lleva a la escuela. Frecuentemente ésta es el lugar que asume la responsabilidad de desarrollar un lexicón admisible para el desarrollo académico. También es posible admitir que el léxico disponible de un estudiante que llega a la Educación Superior no es garante de su éxito futuro porque deberá ser coherente con el exigido por sus profesores. Ante una situación de fracaso permanente, es legítimo preguntarse si ésta variable está incidiendo fuertemente en los resultados académicos de los estudiantes y si así fuere, desarrollar estrategias de apoyo para mejorar no tan sólo su desempeño personal sino en el de sus futuros alumnos, en el caso en que ejercerá como profesor de matemática, cuyos logros a nivel país no están en los niveles esperados.

La sicología señala que a medida que este proceso se desarrolla, se potencia la capacidad de observar, pensar y razonar: se produce un desarrollo cognitivo. En el caso de la expresión oral, este nivel inicia la actividad generando una intención comunicativa en que estarán presentes todos los pasos necesarios para la generación del mensaje correspondiente, tanto alumno-alumno como alumno-profesor.

La comunicación pedagógica se diferencia de la comunicación dialógica común porque tiene como propósito el aprendizaje de los alumnos, por lo tanto el lenguaje utilizado por los profesores en situación de clase debe considerar, por una parte, el lenguaje disponible en sus estudiantes, y por otra, la admisión de un nuevo vocabulario acorde a los aprendizajes en desarrollo en un proceso de negociación permanente sobre vocablos y símbolos porque si hay imposición ésta no existe y eso entorpece el proceso de aprendizaje en los alumnos" (Del Valle, 2012).

Las palabras constituyen el Léxico. El léxico disponible (LD) se recopila a partir de un Test de Disponibilidad Léxica (DL). Los primeros test eran de tipo "listas cerradas", es decir dado un centro de interés tal como "medios de transporte" se solicitaba que en quince minutos se escribieran 20 palabras relacionadas con éste (Aguilera et al, 2013). A pesar de que con el paso del tiempo ya habían omitido los test con listas cerradas, faltaba un punto importante que afinar: el tiempo que se le dedicaba a responder. Se propone entonces utilizar lista sin límite de palabras (lista abierta) pero con un máximo de 2 minutos para escribirlas. A partir de estos datos se define un "índice de disponibilidad léxica" (IDL). Este índice se ha analizado en 228 de estudiantes de Pedagogía en Matemática y Computación y de Pedagogía en Matemática que cursan la asignatura de Estructuras Algebraicas en dos Universidades distintas de la Octava Región (A y B respectivamente, siendo A una Universidad de derecho privado con apoyo del estado y B una Universidad estatal). Estas asignaturas se caracterizan por su alto grado de reprobación y es posible que uno de los factores que están afectando este comportamiento sea el léxico disponible.

ANALISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS POR CURSO Y POR UNIVERSIDAD

Análisis Universidad "A"

El curso de Estructuras Algebraicas se dicta en el segundo semestre de cada año, sin embargo, como la reprobación es muy alta cada vez, también se tienen las oportunidades administrativas de

ser cursado inmediatamente en el semestre de continuidad o en el semestre de verano. Esto tiene como consecuencia que se vaya "fijando" en los alumnos el léxico utilizado en este curso.

A continuación se pueden observar las tablas de Índice de Disponibilidad Léxica detectado en los grupos de alumnos, por curso, en el año 2014. Al mismo tiempo se puede observar el grafo en cada caso lo que permite formarse una opinión sobre el comportamiento del léxico disponible.

Tabla 1. Léxico latente en estudiantes de 2° año. Universidad "A"

Palabras	Anillo	Grupoide	Grupo	Campo	Subgrupo	Monoide	Matriz	Cuerpo	Vector	Álgebra
IDL	0,52	0,44	0,43	0,38	0,36	0,25	0,24	0,24	0,19	0,19

Figura 4. Grafo de palabras mencionadas por los estudiantes de segundo año. U. no Estatal

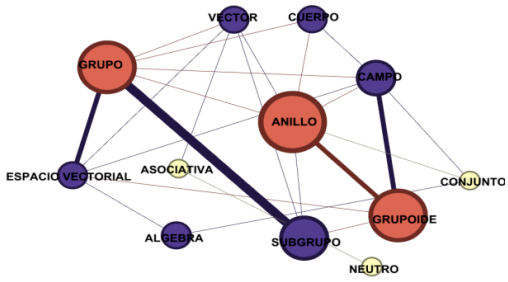


Tabla 2: Léxico latente en estudiantes de 3er año. Universidad "A"

Palabras	Anillo	Grupo	Cuerpo	Demostración	Campo		
IDL	0,59	0,32	0,30	0,25	0,22		
			Difícil	Estructura	Álgebra	Relación	Teorema
			0,21	0,18	0,16	0,15	0,13

Figura 2: Grafo de palabras mencionadas por los estudiantes de tercer año Universidad "A"

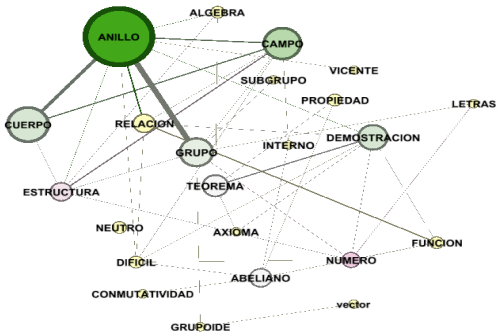


Tabla 3: Léxico latente en estudiantes de 4° año. Universidad “A”

Palabra	Grupo	Anillo	Cuerpo	Conjunto	Operación
IDL	0,76	0,74	0,31	0,25	0,21

Relación	Isomorfismo	Abeliano	Campo	Homomorfismo
0,17	0,15	0,14	0,14	1,13

Figura 3: Grafo de palabras mencionadas por los estudiantes de 4° año Universidad “A”

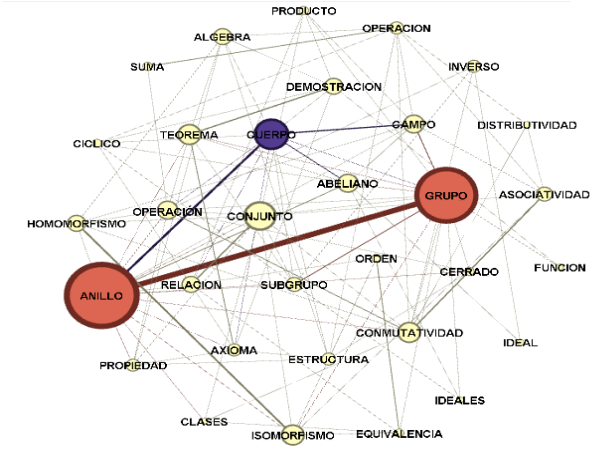
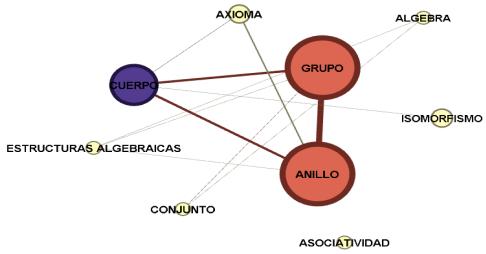


Tabla 4: Léxico latente en estudiantes de 5° año. Universidad “A”

Palabras	Anillo	Grupo	Cuerpo	Estructura Algebraica	Axioma
IDL	0,85	0,80	0,43	0,33	0,26

Álgebra	Conjunto	Isomorfismo	Homomorfismo	Relación
0,18	0,16	0,15	0,14	0,13

Figura 4: Grafo de palabras mencionadas por los estudiantes de 5°. Universidad “A”



Análisis Universidad “B”

En esta Universidad el curso de Estructuras Algebraicas se dicta en el primer semestre de tercer año y en caso de reprobación, los alumnos cursan ésta asignatura en el semestre posterior.

Tabla 5: Léxico latente de los estudiantes de 2° año. Universidad “B”

Palabras	Álgebra	Estructura	Número	Grupo	Orden	Anillo	Letras	Función	Conjunto	Cuerpo
IDL	0,55	0,54	0,33	0,31	0,31	0,29	0,28	0,27	0,25	0,25

Figura 5: Grafo de palabras mencionadas por los estudiantes de 2° año. Universidad “B”

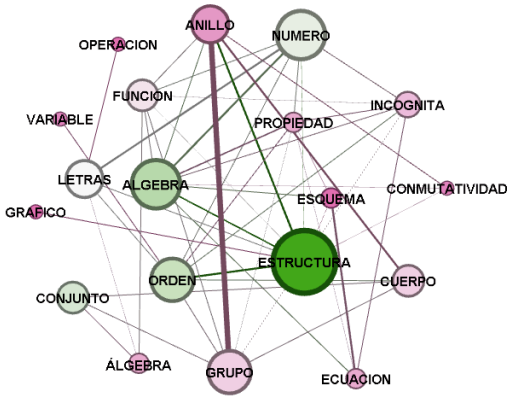


Tabla 6: Léxico latente de los estudiantes de 3er. año. Universidad “B”.

Palabras	Álgebra	Anillo	Cuerpo	Matriz	Estructura
IDL	0,43	O,40	0,31	0,29	0,23

Grupo	Inverso	Conjunto	Transformación	Axioma
0,20	0,16	0,15	0,14	0,13

Figura 6: Grafo de palabras mencionadas por los estudiantes de 3er. año Universidad “B”

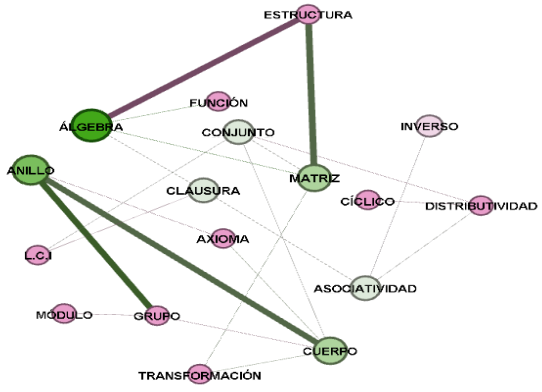


Tabla 7: Léxico latente de los estudiantes de 4°año. Universidad “B”

Palabras	Anillo	Grupo	Cuerpo	Asociatividad	Commutatividad				
IDL	0,89	0,86	0,77	0,25	0,25				
				Subgrupo	Neutro	Axioma	Isomorfismo	Abeliano	
				0,22	0,19	0,16	0,16	0,15	

Figura 7: Grafo de palabras mencionadas por los estudiantes de 4° año U. Estatal

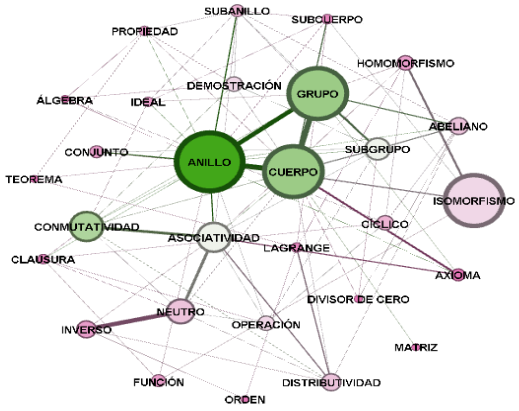
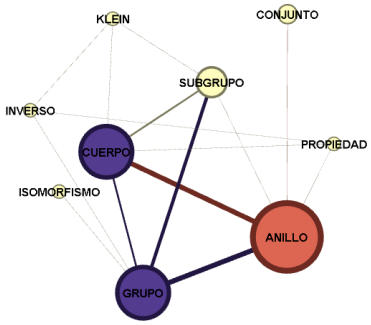


Tabla 8: Léxico latente de los estudiantes de 5° año. U. Estatal

Palabras	Anillo	Grupo	Cuerpo	Subgrupo	Conjunto			
IDL	0,92	0,72	0,65	0,32	0,26			
			Isomorfismo	Abeliano	Propiedad	Klein	Homomorfismo	
			0,23	0,20	0,18	0,15	0,14	

Figura 8: Grafo de palabras mencionadas por los estudiantes de 5° año U. Estatal



Las tablas muestran una progresiva pero potente síntesis en el léxico latente a medida que los alumnos van avanzando en su carrera de tal manera que en quinto año, se observan tres vocablos muy representativos de la asignatura de estructuras Algebraicas.

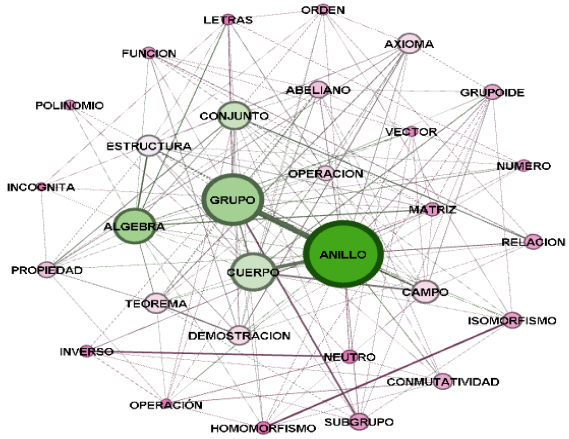
Una descripción global del IDL del alumnado por Universidad se muestra en las tablas 9 y 10:

Tabla 9: Léxico latente en estudiantes de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad "A"

Palabras	fi	fr	IDL
Anillo	74	0,63	0,50
Grupo	59	0,50	0,42
Algebra	47	0,40	0,32
Cuerpo	42	0,36	0,25
Conjunto	31	0,26	0,16
Estructura	24	0,20	0,15
Campo	26	0,22	0,13
Demostración	28	0,24	0,13
Operación	26	O,22	0,11
Axioma	23	0,20	0,11
Relación	19	0,16	0,10
Subgrupo	18	0,15	0,09
Grupoide	16	0,14	0,09
Matriz	14	0,12	0,09
Teorema	22	0,19	0,09
Abeliano	18	0,15	0,08
Número	13	0,11	0,07
Isomorfismo	17	0,14	0,07
Propiedad	18	0,15	0,07
Commutatividad	17	0,14	0,07

El Grafo que representa este comportamiento se muestra a continuación:

Figura 9: Grafo de palabras mencionadas por los estudiantes de Universidad "A"



Se observa que el nodo con menos relaciones es POLINOMIO, con tres relaciones, lo que quiere decir que los estudiantes encuestados de pedagogía en matemática de la Universidad "A", a lo menos escriben tres palabras más por cada palabra mencionada y el nodo con más relaciones es ANILLO, con veinte y dos relaciones, lo que quiere decir que los estudiantes a lo más escriben veinte dos palabras más, por cada palabra mencionada. También se observan solo dos relaciones más fuertes entre las palabras mencionadas más de quince veces, las relaciones son ANILLO, y CUERPO y ANILLO y GRUPO, lo que quiere decir que cada vez que mencionan la palabra ANILLO, enseguida mencionan las palabras CUERPO o GRUPO.

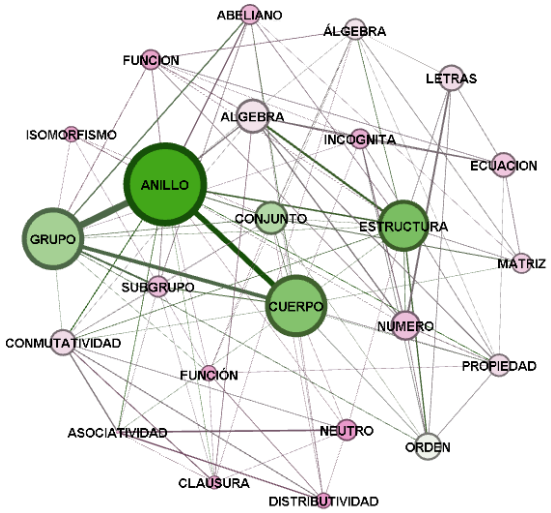
Tabla 10: Léxico latente en estudiantes de Pedagogía en Matemática Universidad "B"

Palabras	fi	fr	IDL
Anillo	69	0,62	0,52
Grupo	51	0,46	0,39
Cuerpo	51	0,46	0,39
Álgebra	45	0,40	0,35
Estructura	42	0,38	0,34
Ecuación	28	0,25	0,20
Función	28	0,25	0,18
Conjunto	27	O,24	0,17

El Grafo que representa este comportamiento se muestra a continuación:

Figura 10: Grafo de palabras mencionadas por los estudiantes de Universidad "B"

Letras	21	0,19	0,16
Número	24	0,22	0,16
Orden	22	0,20	0,15
Propiedad	18	0,16	0,11
Demostración	18	0,16	0,10
Matriz	16	0,14	0,01
Incógnita	16	0,14	0,01
Conmutatividad	21	0,19	0,01
Subgrupo	17	0,15	0,09
Gráfico	12	0,11	0,08
Abeliano	16	0,14	0,07
Asociatividad	17	0,15	0,07



Se observa que todos los nodos tienen a lo menos cuatro enlaces, lo que indica que los alumnos mencionan a lo menos cuatro palabras más, por palabra mencionada. En cambio, la palabra ANILLO tiene diecisiete relaciones con el resto de las palabras, lo que quiere decir que estos estudiantes mencionan a lo más diecisiete palabras más cuando mencionan la palabra ANILLO.

CONCLUSIONES

Los análisis realizados en este documento sobre la descripción de la disponibilidad léxica de los estudiantes de **nuestra** muestra hacen posible afirma lo siguiente:

a) El léxico latente de los estudiantes de pedagogía está influenciado por el eje de algebra, es decir, en su mayoría los alumnos al momento de recordar los conceptos de estructura algebraica se apoyan principalmente en sus conocimientos en algebra, los cuales no son los conceptos específicos requeridos en la asignatura de estructura algebraicas.

b) Dado el listado entregado por los docentes que dictan la asignatura con los conceptos mínimos que los estudiantes deberían manejar al momento de terminar la asignatura, se puede afirmar que la condición de la disponibilidad léxica de los alumnos no es la óptima, pues entre un rango de 0 y 1 en el que se mueve el IDL, donde todas las generaciones analizadas presentan una tendencia más cercana a 0.

c) Dentro de la hipótesis de trabajo se afirmó que el mayor nivel de IDL se encontraría en la tercera generación puesto que era el año que más recientemente había cursado la asignatura, sin embargo, después de analizar los datos se observó que esto no era correcto dado que el curso con mayor IDL lo presentaba el quinto año, curso que tenía la condición de haber finalizado las asignaturas matemáticas del plan de estudio.

d) En relación a las métricas, se pudo observar que en quinto año de la Universidad "B" existe una relación mayor entre las palabras que fueron mencionadas, es decir, es en el último año donde los conceptos nombrados tuvieron una relación significativa entre ellos, dato que se obtuvo de la Densidad del grafo. En cuanto al coeficiente de Clustering se puede apreciar que es segundo año de la Universidad "B" donde este valor tiene mayor significación, puesto que nos muestra la relación que se determina dentro de un conglomerado de palabras que se asocian a un mismo concepto.

e) El conocimiento que se obtiene de las relaciones entre el LD de un grupo, permite estudiar estrategias de enseñanza adaptativa, que con o sin tecnología pueden ser una solución para generar un aprendizaje significativo. En esta tarea trabaja el grupo de investigación en estos momentos.

Referencias

Aguilera, C., Medina, V. y Soto, C. (2013). Análisis descriptivo de la disponibilidad léxica matemática en alumnos de enseñanza media de establecimientos municipales, subvencionados y particulares del gran Concepción. Universidad de Concepción, Chile.

Del Valle, M. (2012). Los procesos interactivos en las clases de matemática y su incidencia en el aprendizaje. Universidad de Concepción.Chile

Echeverría, M., Sáez, K., Urzúa, P. (2006). Disponibilidad Léxica Matemática. Análisis cuantitativo y cualitativo. Universidad de Concepción, Chile: RLA. 311

Michéa, R. (1953). "Mots fréquents et mots disponibles. Un aspect nouveau de la statistique du langage", en Les langues modernes 47, 338-344.

Salcedo, P; Del Valle, M. et al (2014). "Plataforma adaptativa para el fortalecimiento de las competencias matemáticas y pedagógicas a partir del léxico semántico de estudiantes y profesores de pedagogía en matemática". FONDECYT 1140457 (2014-2016).

[I]Fondecyt 1140457 "Plataforma adaptativa online para el fortalecimiento de las competencias matemáticas y pedagógicas a partir del estudio léxico semántico de estudiantes y profesores de pedagogía en matemática"

CONOCIMIENTOS PARA LA ENSEÑANZA DEL NÚMERO EN EDUCADORAS DE PÁRVULOS EN FORMACIÓN DOCENTE INICIAL: CONSTRUCTO, INSTRUMENTOS E INTERVENCIÓN

Knowledge for teaching number in early childhood preservice teachers: construct, instrument and intervention

Goldrine-Godoy, T.[a], Olfos –Ayarza, R.[b], Estrella –Romero, S.[c] y Reyes-Santander, P.[d]
[a,b,c,d] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; [a] tatiana.goldrine@ucv.cl

Resumen

El trabajo propone un constructo sobre el conocimiento docente que incluye el conocimiento de la educadora sobre lógica, número, etapas del aprendizaje del niño y organización de la enseñanza. Se diseñó un instrumento para medir este conocimiento. Se diseñó y aplicó un curso de enseñanza de la matemática, particularmente del número. El curso se basó en metodologías que integran teoría-práctica en la formación inicial: análisis de videos, estudio de caso y estudio de clase. Se usó un enfoque mixto, un diseño cuasi experimental con pre y post test, mapas conceptuales y entrevistas; constatándose diferencias significativas a favor del curso. El estudio provee un marco conceptual y metodologías para la formación docente en enseñanza de la matemática en Educación Parvularia.

Palabras clave: *matemática, conocimiento docente, formación inicial docente, educación parvularia.*

Abstract

The article proposes a construct of early childhood teacher knowledge, including knowledge on logic, number, stage of children's learning and teaching organization. The work designed a test for measure the teacher knowledge. It was implemented a course for mathematics teaching in early childhood. The course applied methodologies as video analysis, case study and lesson study for to integrate theory and practice in pre service teacher preparation. It used a mixed approach, quasi-experimental design with a test of knowledge before and after the course, concept maps and interviews being stated significant differences in favour of the course. The study provides a conceptual framework and methodologies for initial training in education mathematics for early childhood education.

Keywords: *mathematics education, pedagogical content knowledge, pre service teacher preparation, early childhood education.*

INTRODUCCIÓN

El trabajo a presentar corresponde a avances en una línea de investigación de reciente desarrollo en Formación Inicial Docente de Educadoras de Párvulos para la enseñanza de la matemática, llevaba a cabo de manera interdisciplinaria por investigadores de la Escuela de Pedagogía y el Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[viii].

En una reciente revisión sobre la productividad científica en formación de Educadoras para la enseñanza de la matemática temprana, Parks y Wager (2015) encontraron escasez de trabajos al

[viii]Financiamiento: Fondecyt Regular 1111009. Proyecto Interno PUCV 037.449/2015

respecto, recomendado una investigación colaborativa entre especialistas en Educación Matemática y especialistas en Educación Infantil, junto con estudios sobre los programas, cursos y métodos para formar a las futuras docentes.

Evidencias que avalan la necesidad de focalizarse en la formación inicial, vienen dados por los resultados de Inicia e investigaciones con educadoras en servicio. Según Inicia (2012), los conocimientos con que egresan las Educadoras corresponden a un 50% de los conocimientos estimados para la enseñanza. Por otra parte, estudios con docentes chilenas de Educación Parvularia, han evidenciado un distanciamiento entre el lenguaje matemático informal y el lenguaje disciplinar, y predominio del conocimiento cotidiano por sobre el didáctico (Friz, Sanhueza y Samuel, 2008; Friz et al.2009).

Por lo tanto, ¿qué tienen que saber los futuras educadoras para enseñar? y ¿cómo transforman el conocimiento en prácticas de aula que beneficien el aprendizaje de los niños? (Avalos, 2011; Hammerness et al. 2005), son preguntas que motivan el presente trabajo, acotado a la enseñanza de la matemática y específicamente al concepto de número.

CONOCIMIENTO DOCENTE PARA LA ENSEÑANZA DEL NÚMERO EN EL NIVEL DE EDUCACIÓN PARVULARIA

La distinción entre el conocimiento del profesor para enseñar un dominio específico y el conocimiento de ese dominio,llevó a Shulman (1987) a identificar tres componentes del conocimiento requerido para la enseñanza: conocimiento del contenido (CC), conocimiento pedagógico (CP) y conocimiento pedagógico del contenido (CPC).

En este sentido, estudios posteriores sobre el CC y CPC en docentes de infantil (Platas, 2008; Lee, 2010; McCray & Chen, 2012; McCray 2008) aportan sustento para conceptualizar el conocimiento que requiere desarrollar la maestra de infantil durante su formación. Por un lado, Lee (2010) encontró que el sentido del número es la noción de mayor preponderancia en el CPC de docentes de Infantil. Por otra parte, Platas (2008) midió el conocimiento docente sobre el desarrollo matemático de los niños, focalizando la indagación en el ámbito de números y operaciones por ser el más relevante en la educación infantil. Ambas investigaciones coinciden en que las docentes con más años de experiencia, formación general y específica en desarrollo matemático infantil presentan mayor conocimiento para la enseñanza, sugiriendo que las educadoras desarrollen conocimiento de los conceptos matemáticos propios de este nivel educativo; y conocimiento pedagógico del contenido, que incluya una profunda comprensión del desarrollo del pensamiento lógico-matemático infantil; y de las representaciones y estrategias apropiadas para la construcción de los conceptos matemáticos.

En base a los referentes anteriores, los autores del presente trabajo elaboraron un constructo sobre el conocimiento docente para la enseñanza del número compuesto por CC, CPC-Ens y CPC-CRAC (Goldrine et al., 2015a, 2015b), que sugiere que la docente de inicial requiere de un conocimiento especializado de la matemática de este nivel, y un conocimiento de su enseñanza. A partir de lo anterior, el CC abarca el conocimiento docente sobre los conceptos de lógica y número y las representaciones semióticas idóneas de tales nociones para su enseñanza en este nivel. El CPC contiene dos componentes, una acerca de la Enseñanza del número, CPC-Ens, que incluye el conocimiento docente sobre la secuencia de tareas matemáticas para la enseñanza de la lógica y del número, conocimiento del currículo oficial de este nivel educativo, conocimiento de materiales para la representación de nociones lógico matemáticas y creencias docentes sobre la enseñanza y el aprendizaje. La otra componente considera el Conocimiento docente sobre la Relación de los Alumnos con el Contenido, CPC-CRAC, que incluye el conocimiento docente sobre etapas en el aprendizaje de nociones de lógica y número, como por ejemplo, etapas de dominio de la serie oral,

etapas en la simbolización de cantidades; además del conocimiento docente acerca de los errores frecuentes de los párvulos, por ejemplo, errores en el conteo.

En base a este constructo y metodologías innovadoras para la formación del profesorado, se diseñó un curso de enseñanza de la matemática, donde se abordó la enseñanza del número en el nivel de Educación Parvularia. Los contenidos abordaron el desarrollo del número en el niño, conceptos de educación matemática y enfoque de resolución de problemas. La metodología del curso incluyó estudio de clases, estudio de casos y análisis de videos. Estas metodologías favorecen la reflexión sobre la práctica, la articulación de los conocimientos con los saberes de la experiencia, y la innovación pedagógica.

Además, tomando como referencia el constructo anteriormente presentado, se diseñó y sometió a validación un Test de conocimiento para la enseñanza del número en estudiantes de Educación Parvularia. El instrumento presenta dos situaciones de aula de Educación Parvularia, una de lógica y otra de número, sobre las cuales se plantean ítems sobre conceptos matemáticos, organización de la enseñanza y etapas del desarrollo del pensamiento lógico matemático. El test presentó una fiabilidad es de 0,72, considerada aceptable (Nunally y Bernstein, 1995), con 0,61 para la componente CC, 0,50 para CPC-CRAC y 0,52 para CPC-Ens. La validación del instrumento puede consultarse en un estudio previo (Goldrine, Estrella, Olfos y Cáceres, 2015a).

A partir de lo expuesto, el equipo de investigación ha llevado a cabo dos intervenciones en Formación Docente Inicial. La primera (2011-2013) consistió enel estudiodel efecto del curso de educación matemática (anteriormente expuesto) en los conocimientos, creencias y prácticas para la enseñanza del número, en educadoras de párvulos en formación inicial docente. La segunda, en actual desarrollo, está estudiando la efectividad de un sistema de andamiaje articulatorio entre el conocimiento teórico y la práctica docente en la formación de educadoras de párvulos para la enseñanza de la matemática. En lo que sigue se presentaran resultados de la primera investigación. En el apartado de conclusiones se esbozaran avances de la investigación en curso.

MÉTODO

Diseño

En el año 2011, para estudiarel efecto del curso en educadoras en formación, se llevó a cabo una investigación con enfoque mixto y diseño cuasi-experimental con pre y pos test. A partir de los resultados obtenidos, se profundizó la indagación con dos estudios de caso.

Participantes

Se utilizó una muestra no probabilística compuesta por una cohorte de 39 estudiantes de 3° año de la carrera de Educación Parvularia de una universidad chilena, que participaron en elcurso de enseñanza de la matemática. El curso se implementó en el 2011 con 16 sesiones semanales de 90 minutos.

Instrumentos

i) Test de conocimiento para la enseñanza del número en estudiantes de Educación Parvularia.ii) Mapas conceptuales. iii) Entrevista al término del curso. iv) Filmación de una actividad llevaba a cabo por las educadoras en formación. Al video se le aplicó una Pauta de práctica docente.

RESULTADOS

ESTUDIO CUANTITATIVO

Los resultados del test, antes y después del curso, mostraron diferencias en el conocimiento para la enseñanza del número en las futuras educadoras de párvulos. Véase Figura 1.

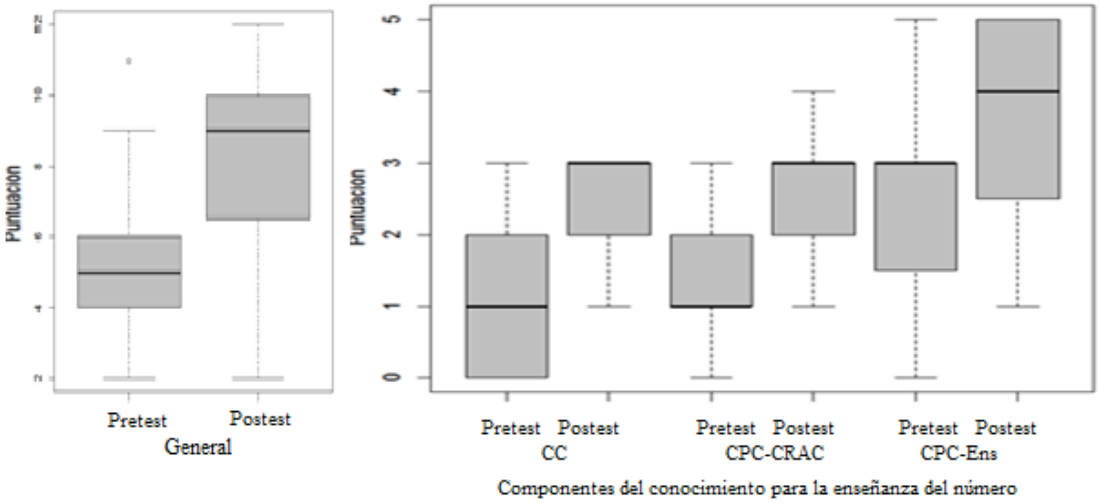


Figura 1. Resultados del test, antes y después del curso.

ESTUDIO CUALITATIVO

Mapas conceptuales

El grafico 1 muestra que los puntajes de los mapas conceptuales tendieron a ser más altoal término del curso.

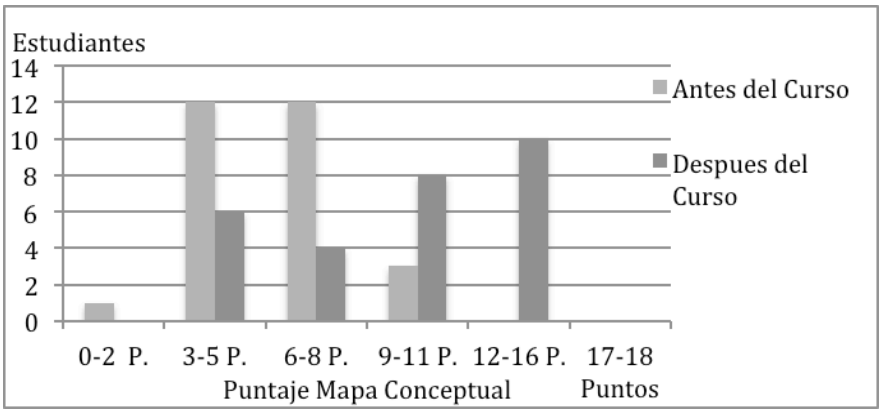


Grafico 1. Puntaje Mapa Conceptual antes y después del curso

Entrevistas

En las entrevistas, las estudiantes señalaron que el curso les brindó herramientas para la implementación de planificaciones con un enfoque de resolución de problema, y para una mejora de la mediación hacia una devolución que no entregue las respuestas a los niños frente a la resolución de las tareas matemáticas. Extracto de entrevista: “Hay que tener mucho ojo con la mediación que uno está haciendo y no darle la respuesta” (Estudiante 8). Con respecto a la metodología del curso,

las estudiantes señalan la vinculación de la teoría con la práctica. Extracto de entrevista: "como fortaleza creo que igual siempre se intentó combinar lo práctico con lo teórico" (Estudiante 13).

RESULTADOS DE DOS CASOS

Por otra parte, para analizar con mayor profundizar el impacto positivo del curso evidenciado en los resultados generales, se seleccionó intencionadamente dos casos, una estudiante con un alto porcentaje de logro en el postest y una con bajo logro, MFA con 93% y MFB con 43%. La tabla 1 sintetiza el porcentaje de logro de las maestras en los instrumentos.

Tabla 1. Porcentaje de logro en los tres instrumentos.

Maestra en Formación	Cuestionario		Mapas conceptuales		Pauta Practica
	Pre	Post	Pre	Post	Post
EPA Alto	65 %	93 %	44 %	83 %	92 %
EPA Bajo	35 %	43 %	28 %	28 %	36 %

En relación a la práctica docente, ambas estudiantes implementaron una actividad matemática en un grupo de Nivel Transición II en una escuela. En su actividad, MFA presenta una situación problema con una pregunta central. En su mediación docente, formula preguntas para motivar el razonamiento infantil. Al final de la actividad, promueve que los niños compartan sus estrategias. Utiliza un material que presenta representaciones icónicas (puntos) y simbólicas (numerales), y regula el ámbito numérico entre 13 y 15.

Por su parte, MFB plantea una actividad de tipo repetitiva para asociar numeral con cantidad. Utiliza materiales concretos y numerales. La actividad no cuenta con un elemento de autocorrección, por lo que la validación depende de la educadora. El material presenta dígitos del 0 al 9, que los niños pueden juntar para armar números de dos dígitos, por lo que el ámbito numérico en la actividad se extiende desde el 1 al 16; lo que provoca que el nivel de dificultad varíe al azar, entre el niño que saca el 1 en contraste con el niño que arma el 16.

El análisis de las creencias permite inferir en MFA indicios de creencias constructivistas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, al resaltar que los niños resuelvan el problema valiéndose de sus estrategias. MFA señala"la resolución de problemas (…), va a ser mucho más significativo si ellos se hacen las preguntas correspondientes, y si a ellos, no les dan las estrategias". Para MFB la enseñanza de la matemática ha de ser llamativa y entretenida, dice "se puede llegar a implementar un sistema en las matemáticas que sea llamativo para los niños".

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

Los autores postulan que la efectividad del curso podría estar asociada a la relación dialéctica que se establece entre el constructo de conocimiento docenteque fundamenta el curso y las tres metodologías de enseñanza que integran teoría y práctica. Estas metodologías, estarían promoviendo la reflexión docente y a través de ésta, la construcción de conocimiento docente en las futuras educadoras de párvulos.

El constructo propuesto retoma las ideas de McCray (2008) y McCray y Chen (2012) en cuanto a fijar la atención en el conocimiento de los contenidos matemáticos apropiados a enseñar conforme a las etapas de los niños y a las estrategias de enseñanza pertinentes a esos contenidos, considerando

las características del desarrollo infantil. Por otro lado, atiende la proposición de Platas (2008) respecto a que las docentes de Educación infantil requieren conocimiento a) de los conceptos matemáticos y sus representaciones, b) del desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los primeros años, y c) de las estrategias de enseñanza que favorecen la construcción de conceptos matemáticos. Dentro de constructo, la componente CPC-CRAC enfatiza el conocimiento que requiere la maestra sobre el desarrollo del pensamiento matemático infantil para proporcionar a los niños experiencias matemáticas enriquecedoras (Platas, 2008; McCray, 2008; McCray y Chen, 2012, Parks y Wager, 2015). En efecto, el conocimiento por parte de la maestra de las particularidades del desarrollo cognitivo en este tramo etario condiciona la efectividad de la enseñanza. Dado lo anterior, este estudio reafirma la necesidad de que las futuras docentes durante la formación docente configuren un conocimiento sobre el pensamiento infantil, comprendan el proceso mental de construcción de los conceptos matemáticos e identifiquen el tipo de experiencias que promueven el aprendizaje infantil.

La reflexión docente generada por las metodologías del curso –estudio de clases, estudio de casos y análisis de videos–, podría estarmovilizando en las futuras educadoras la vinculación de las componentes CC, CPC-Ens y CPC-CRAC, fortaleciendo la construcción del conocimiento para enseñar. De este modo, el curso constituiría, tanto a nivel de constructo, contenidos y metodologías, un recurso curricular innovador para las carreras de Educación Parvularia.En este sentido, el estudio aporta un referente para los programas de formación docente, frente a la escasez de estudios sobre cursos y métodos para la formación de educadores de infantil en enseñanza de la matemática, particularmente, detectada por Parks y Wager (2015).

Los casos expuestos muestran una relación entre conocimientos, prácticas y creencias. MFA se perfila como una docente con los conocimientos necesarios para la enseñanza del número y con indicios de creencias constructivistas. Es factible suponer que estos conocimientos y creencias sostienen la actividad que implementa en el aula, la cual - para los fines de este estudio- cumple con los criterios establecidos para una actividad de enseñanza del número basada en un enfoque de resolución de problemas. En este mismo sentido, MFB corrobora esta relación en sentido inverso, es decir, conocimientos insuficientes, creencias de tendencia conductista que sostiene una actividad con un enfoque empirista de la enseñanza del número (Chamorro, 2005).

Los casos arrojan evidencia para demandar a la formación docente inicial, la presencia de actividades formativas de carácter personalizado, que permitan que estudiantes como MFB tengan mayores oportunidades para desarrollar conocimientos, creencias y practica acordes a una enseñanza constructivista que brinde mayores oportunidades de aprendizaje a los niños. En este sentido, las metodologías usadas destinadas a promover la reflexión docente y la consecuente mejora de la enseñanza, demostraron su pertinencia. En el caso de actividades formativas personalizadas, el análisis de videos de las propias prácticas resulta idóneo para que las docente en formación pueda confrontar sus conocimientos, creencias y prácticas, con miras a la mejora de la enseñanza.

A partir de loshallazgos expuestos, el equipo de investigación estimó la necesidad de continuar estudiando metodologías formativas que permitan integrar conocimientos, creencias y práctica en la enseñanza de la matemática temprana. Para ello, en el año el curso, se está llevando cabo un segundo proyecto destinado a construir un sistema de andamiaje basado en estudios de clases con videos propios y un ciclo de reflexión docente, para fortalecer la capacidad de enseñanza en matemáticas de la Educadora en formación. La validación empíricamente de dicho sistema de andamiajeva a estar dada por la incidencia de las prácticas docentes de las educadoras en el aprendizaje de la matemática de los párvulos, específicamente del concepto de número. Por tanto, en este segundo estudio, además de recopilar datos de las educadoras, se están tomando datos del desempeño matemático de los niños.

En este segundo proyecto, se encuentran participando siete educadoras en formación, que el año pasado cursaron el curso y este año, se encuentran en práctica final. A través de estudios de clases y la conformación de un comunidad de desarrollo profesional docente (compuesta por las estudiantes y académicas especialistas en Educación Matemática), las estudiantes han remirado sus prácticas de enseñanza a través de un ciclo que las ha permitido la reflexión y mejora. El sistema de andamiaje en desarrollo por los investigadores, se suscribe al modelo de reflexión denominado ALACT por sus siglas en ingles Action, Looking back on action, Awareness of Essentials aspects, Creating alternative methods of actions y Trial (Korthagen, 2004; Korthagen, 2005; Korthagen et al, 2001), donde sus siglas corresponden a los diferentes procesos que se viven en la reflexión (A) Acción, experiencia, (L) Revisar la acción, determinando puntos importantes, (A) Toma de conciencia de los aspectos esenciales (C) Buscar y preparar comportamientos alternativos (T) Ensayar nuevamente.

Constituye un desafío para la investigación eneducación matemática y formación docente, lograr desarrollar dispositivos formativos que permitan a las futuras educadoras construir los conocimientos y prácticas efectivas que impacten positivamente en el aprendizaje dela matemática temprana.Futuras investigaciones que ahonden en esta problemática cobran relevancia.

Bibliografia

Avalos, B. (2011). Teacher professional development in Teaching and Teacher Education over ten years.Teaching and Teacher Education, vol.27 (1), 10-20.

Chamorro, M. (2005). Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Pearson.

Friz, M., Sanhueza, S., Sánchez, A., Sámuel, M. y Carrera, C. (2009). Concepciones en la enseñanza de la Matemática en educación infantil. Perfiles Educativos, vol. 31(125), 62-76.

Friz, M., Sanhueza, S., y Sámuel, M. (2008). Conocimiento de las competencias profesionales implicadas en la enseñanza de las matemáticas en Educación Preescolar. Ponencia presentada en el Segundo Encuentro de Educación Inicial, Pontifica Universidad Católica de Chile, Santiago.

Goldrine, T., Estrella, S. Olfos, R., Cáceres, P., Galdames, X., Hernandez H., y Medina V (2015 b). Conocimiento para la enseñanza del número en futuras educadoras de párvulos: Efecto de un curso de didáctica de la matemática. Estudios Pedagógicos, 41 (1), 93-109.

Goldrine, T., Estrella, S. Olfos, R., y Cáceres, P. (2015 a). Prueba de conocimientos para la enseñanza del número en futuras maestras de educación infantil. Educação em Revista, 31(2), 83-100.

Hammerness K., Darling-Hammond L., Bransford J., Berliner D., Cochran- Smith M., Mc Donald M. & Ziechner (2005). How teachers learn and develop. En Hammerness, Darling-Hammond & Bransford J.(Ed). Preparing teachers for a changing world. San Francisco: Jossey-Bass

Korthagen, F. (2004). In search of the essence of a good teacher: towards a more holistic approach in teacher education. Teaching and Teacher Education, 20, 77-97.

Korthagen, F. (2005).Practice, theory, and person in life-long professional learning.En D. Beijaard., P. C. Meijer., G. M. Dershimer y H. Tillema (Eds.) Teacher professional development in changing conditions (79-94). Dordrecht: Springer.

Korthagen, F., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B. y Wubbels, T. (2001).Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lee, J. (2010). Exploring kindergarten teachers' pedagogical content knowledge of mathematics. International Journal of Early Childhood, vol.42 (1), 27-41.

Lee, J. F. (2008). A Hong Kong case of lesson study - benefits and concerns. Teaching and Teacher Education, 24 (5), 1115-1124.

McCray, J. & Chen J. (2012) Pedagogical Content Knowledge for Preschool.Mathematics: Construct Validity of a New Teacher Interview.Journal of Research in Childhood Education, vol.26, 291–307.

McCray, J. (2008). Pedagogical Content Knowledge for Preschool Mathematics: Relationships to Teaching Practices and Child Outcomes. Tesis doctoral no publicada. Loyola University Chicago, Erikson Institute.

Nunally, J. y Bernstein, I. (1995). Teoría psicométrica. México D. F.: McGraw-Hill.

Parks A. & Wager A. (2015). What knowledge is shaping Teacher Prepraction in Eary Childhoos Matehmatics.Journal in Early Childhood Teacher Education. 23. 124-141.

Platas (2008).Measuring Teachers' Knowledge of Early Mathematical Development and Their Beliefs about Mathematics Teaching and Learning in the Preschool Classroom.Tesis Doctoral no publicada.University of California, Berkeley.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, vol.57(1), 1–22.

"METODOLOGÍA PARA EL TRABAJO PEDAGÓGICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA MEDIADA POR EL USO DE TIC PARA PROFESORES DE ENSEÑANZA BÁSICA"

Lorena Espinoza Salfate

Centro Felix Klein

Universidad de Santiago de Chile

Resumen

El trabajo presenta resultados de una investigación que indagó los efectos producidos sobre el aprendizaje de estudiantes de Educación Básica y las prácticas de sus profesores, al utilizar un software educativo de apoyo para la enseñanza de las matemáticas. El software fue desarrolladoa partir de una modelación didáctica que articula nociones de Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) y Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1990). La investigación es de corte cuali – cuantitativo, con un diseño cuasi experimental que utiliza estudio clínico de casos (Leutegger, F, 2000; Flick, 2007). El marco teórico integra una modelización de la calidad de procesos de enseñanza con una modelización de la equidad (Gellert et al, 2013a). El uso sistemático del GREI mostró avances significativos respecto de niños y profesores que no lo utilizaron. Además, identificó variables institucionales clave para el éxito en el uso del software.

Palabras clave: *aprendizaje matemático, prácticas docentes, modelación didáctica, software educativo, educación básica.*

Abstract

The paper presents results of a study that investigates the effects to use the educational software GREI on student learning of Primary Education and the practices of their teachers. The software was developed from an educational modeling articulates notions of Anthropological Theory of Didactic (Chevallard, 1999) and Theory of Didactic Situations (Brousseau, 1990).The research is qualitative - quantitative, with a quasi-experimental design using clinical studies (Leutegger, F, 2000; Flick, 2007). The framework integrates quality modeling of processes of teaching and modeling of equity (Gellert et al, 2013a).The systematic use of GREI showed significant progress on children and teachers who did not use. In addition, it identified key to success in using the software institutional variables.

Keywords: *mathematics learning, teaching practices, didactic modelling, educational software, elementary education.*

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO

El problema que aborda este proyecto se inscribe dentro de la problemática general de los bajos resultados de aprendizaje matemático que logran una parte importante de estudiantes de educación básica chilenos, y se sitúa, más específicamente, sobre el desempeño docente asociado a dicha problemática. Numerosas investigaciones han puesto de manifiesto la débil formación, tanto en los niveles iniciales como continuos, que tiene un elevado porcentaje de docentes de educación general básica del país en matemática y en su didáctica (TEDS-M, 2010; Informe Prueba Inicia del

Ministerio de Educación, 2010), lo que se relaciona con las grandes dificultades que tienen para diseñar y gestionar procesos de enseñanza que promuevan el logro esperado de los aprendizajes matemáticos (Espinoza et al, 2011). Los profesores chilenos, particularmente de educación básica, tienen grandes dificultades para proponer a sus estudiantes actividades de aprendizaje matemático de calidad y, más allá, para organizar secuencias de actividades que promuevan el desarrollo de habilidades y competencias matemáticas. Sumado a ello, los profesores deben atender a una gran diversidad de ritmos, estilos e intereses de aprendizaje dentro del aula, en unas condiciones institucionales que en muchos casos es precaria.

La formación de profesores no ha contribuido suficientemente a que los docentes dispongan de criterios de selección de actividades eficaces para el aprendizaje, y mucho menos de criterios para la elaboración de actividades que incorporen el uso de TIC (OCDE, 2004). Así, difícilmente los profesores pueden revertir la situación antes descrita, la que hoy se considera más grave por las altas demandas que tienen los ciudadanos del siglo XXI para poder integrarse de manera activa y crítica a una sociedad cada vez más tecnologizada. De este modo, se pone en riesgo la efectividad de las políticas públicas que impulsan la integración de TIC a los procesos educativos, que requieren de una gran cantidad de recursos digitales pertinentes y de calidad.

En síntesis, el proyecto aborda el problema del insuficiente desempeño docente en la enseñanza de las matemáticas; la limitada preparación de los profesores para integrar las TIC a la enseñanza; y la escasez de software que apoye y retroalimente a los docentes en su tarea de planificación y elaboración de actividades de aprendizaje interactivas que promuevan el logro de aprendizajes matemáticos de calidad y desarrollo de competencias. Se trata de una problemática sistémica y altamente compleja.

LA PROPUESTA

Se propuso el desarrollo del software on-line llamado "Generador de Recursos Educativos Interactivos GREI", que permite a los docentes y a otros usuarios del ámbito educativo crear, asesorados por el Asistente del software, secuencias de actividades de aprendizaje matemático interactivas que promuevan el logro de aprendizajes de calidad y el desarrollo de competencias. Además, el software GREI permite monitorear sistemáticamente el desempeño de cada estudiante y evaluar su nivel de logro de aprendizaje.

Estas potencialidades del GREI son posibles gracias a que integra en su diseño un Modelo Didáctico consolidado sobre el aprendizaje del Campo de Problemas Aditivo, lo que permite desarrollar una solución innovadora al problema de su enseñanza. El software dispone de un Asistente de apoyo didáctico matemático que orienta a los docentes para que las secuencias de actividades interactivas que elaboren resulten coherentes con los lineamientos curriculares, articuladas y concatenadas progresivamente. El GREI integra, además, las potencialidades de distintos tipos de software, particularmente de manipulativos virtuales, LMS, LCMS, y generadores de actividades on-line que, sumados al modelo didáctico específico, resulta capaz de brindar una asesoría didáctica en el proceso de elaboración de secuencias, y en el análisis de resultados de los estudiantes.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO

Metodología de desarrollo

En términos del desarrollo informático, la solución proponía el desarrollo de un software que permitiese a los docentes: crear secuencias de actividades interactivas, administrar la información sobre la utilización de tales secuencias por parte de los estudiantes, y evaluar los resultados de

aprendizaje. Una de las principales actividades llevada a cabo y que permitió la consecución de los objetivos de desarrollo del GREI y la componente de Asistencia didáctico-matemática, fue la construcción de un Modelo Didáctico del Campo de Problemas Aditivo en el primer ciclo básico, mediante la caracterización del currículo en base a Tareas Matemáticas, Técnicas, Tecnologías y Teorías, asociadas al tema en estudio. Dicho modelo quedó plasmado como producto, en un conjunto de matrices que constituyen el Modelo, que permitió relacionar los Objetivos de Aprendizaje con las Tareas Matemáticas y sus condiciones de realización junto con las Habilidades matemáticas que se desarrollan al resolver cada tarea. La información contenida en esas matrices sirvió de base para el desarrollo tanto de las actividades de aprendizaje interactivas, así como para definir la forma en que el software presta ayuda al profesor en el proceso de elaboración de sus secuencias de actividades y su evaluación.

Uno de los principales desafíos que se abordó en la ejecución del proyecto fue integrar en el diseño del GREI dicho Modelo Didáctico. Para ello, se utilizaron en las actividades de desarrollo de software, nociones de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría Antropológica de los Didáctico (TAD), que permitieron definir las características del GREI tales como: los perfiles que se definieron para agrupar las actividades interactivas respondiendo a distintos tipos de situaciones didácticas; la definición de distintos fines para las secuencias, de acuerdo al propósito didáctico que perseguirá la implementación de cada secuencia; los parámetros modificables y decisiones que deben tomar los docentes para variar las distintas condiciones de realización de las Tareas Matemáticas; los criterios de evaluación de las secuencias que apoyan el proceso de construcción por parte de los docentes.

A su vez, sobre esta modelación didáctica, se llevó adelante la fase de Diseño Arquitectónico del software que generó como producto el Modelo de Datos, que permite al software organizar toda la información y funcionar otorgando a los docentes grados de libertad en el diseño de los procesos de enseñanza-aprendizaje, dejando en manos de ellos las decisiones que llevan a construir un recorrido de las actividades de aprendizaje, pero siempre sobre un entramado bien organizado que permite asegurar relaciones coherentes, combinaciones adecuadas de distintos tipos y una adecuada secuenciación de actividades.

Sobre el modelo de datos y la posterior gestión de información producida por la interacción entre el usuario y la interfaz, se llevó a cabo la programación de las funcionalidades del Asistente que evalúan las secuencias durante el proceso de elaboración, orientando a los docentes para que éstas cumplan con los criterios de calidad preestablecidos en términos didácticos y curriculares. Siguiendo el enfoque teórico, se definieron tres criterios a evaluar: coherencia, completitud y progresión basados en los perfiles de las actividades presentes en la secuencia y en el fin o propósito didáctico de dicha secuencia. Para ello fue necesario extender el Modelo Didáctico, definiendo un conjunto de matrices de relaciones que permitieran la implementación de los criterios de evaluación.

En definitiva, el desarrollo del GREI se llevó a cabo a través de un paradigma de tipo incremental en el desarrollo de los productos de software, de esta forma se generó una primera versión funcional a la que le sucedieron una serie de iteraciones que fueron siendo evaluadas, y que permitieron la refinación del producto y la incorporación de las funcionalidades definidas para cada subsistema y la descomposición en módulos propuesta, llegando a la obtención de una versión final, así como la incorporación de un conjunto cada vez mayor, de actividades de distinto tipo con características específicas sustentadas en la metodología pedagógica.

Metodología de Investigación

La metodología de investigación es de corte cuali – cuantitativo; se aplican técnicas y procedimientos estadísticos inferenciales, técnicas de observación etnográficas y estudios clínicos de casos (Leutegger, F, 2000; Flick, 2007). Los fundamentos teóricos provienen de: Teoría

Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999); Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997); y Teoría de la reproducción de la desigualdad social en el aula (Berstein, 1996). Se configura un marco teórico que integra una modelización de la calidad de procesos de enseñanza con una modelización de la equidad en el acceso al conocimiento matemático (Gellert et al, 2013a; Gellert et al, 2013b).

La investigación postuló tres hipótesis científicas relacionadas con el aporte que podría realizar el GREI a los aprendizajes matemáticos de los estudiantes y al desempeño docente; una hipótesis tecnológica sobre la posibilidad de desarrollar un software con las características planteadas; una hipótesis de uso relacionada con el perfil de los usuarios que podrían utilizar eficazmente el GREI; y tres hipótesis de transferencia relacionadas con las características y efectividad del modelo de transferencia propuesto.

La población objetivo del proyecto son los profesores de Educación Básica, especialmente los que ejercen en Primer Ciclo Básico. El GREI se implementó en 20 establecimientos educacionales de la Región Metropolitana que pertenecían a las instituciones mandantes; 8 particulares subvencionados y 12 municipalizados. En total participaron 146 profesores de 1° a 4° básico, quienes elaboraron con el GREI 1.260 secuencias de actividades de aprendizaje interactivas en total.

La muestra de la investigación se focalizó en 3° año básico, controlando de este modo la variable "contenido curricular" para poder estudiar las variables de interés para el proyecto. Por el tipo de estudio requerido, sólo se abarcaron docentes pertenecientes a la Región Metropolitana. Sin embargo, las escuelas y docentes escogidos resultaron representativos del desempeño y perfil docente de los profesores del país.

Para contrastar las hipótesis científicas se realizaron tres estudios: de aprendizaje (APRE), de desempeño docente y de condiciones institucionales. La muestra quedó constituida por 1.680 estudiantes de 3° y sus respectivos profesores (36 profesores). El estudio APRE consideró un diseño experimental con grupo tratamiento (niños que estudiaron el campo aditivo con uso del GREI) y control (niños que estudiaron sin GREI), a los que se la aplicó un pre – post test. Los resultados de aprendizaje se analizaron a nivel de grupo curso. Se distinguieron tres grupos de docentes de acuerdo al uso del GREI y al tipo de capacitación que recibieron:

- G1: Profesores que Usan el GREI con Capacitación (42 cursos)
- G2: Profesores que Usan el GREI sin Capacitación (8 cursos)
- G3: Profesores que no Usan el GREI (11 cursos)

En total fueron 61 cursos provenientes de 33 colegios, 20 experimentales y 13 escuelas controles, lo que hace un total de 2.240 estudiantes.

Grupo	*Cantidad de estudiantes*
G1	1680
G2	320
G3	440

Como la participación en la investigación del Grupo Control (G3) era voluntaria, resultó complejo poder encontrar escuelas similares a las escuelas experimentales que aceptaran participar en la investigación. Así, las condiciones de entrada de los cursos de las escuelas que aceptaron ser controles, no fueron similares a las escuelas experimentales.

El estudio de desempeño docente consideró una muestra de profesores seleccionados aleatoriamente de las escuelas mandantes, privilegiando diferentes perfiles de adopción de TIC de manera balanceada. Los perfiles se determinaron a través de un cuestionario que permitió clasificar el nivel de competencias TIC de docentes en tres grupos: Grupo I: nivel básico; Grupo II: nivel intermedio; Grupo III: nivel avanzado. Los docentes realizaron previamente un curso de capacitación b-learning que contempló el estudio matemático-didáctico del campo de problemas aditivo, así como el uso eficaz del software.

El grupo control quedó conformado por profesores con similares características a las del grupo tratamiento, considerando como variables de control características de las escuelas a las que pertenecían. Se evaluaron sus conocimientos matemáticos y didácticos del campo de problemas aditivo, así como competencias TIC. Para efectos del estudio del Desempeño Docente, se escogió una sub muestra de acuerdo a los siguientes criterios:

- SG1: Profesores que Usan el GREI con Capacitación (10 docentes)
- SG2: Profesores que Usan el GREI sin Capacitación (10 docentes)
- SG3: Profesores que no Usan el GREI (10 docentes)

Para contrastar las hipótesis sobre el aporte del GREI al desempeño docente, y sobre el aporte del curso de capacitación, se construyó una pauta de observación de clases que permitió caracterizarlas según su contribución al aprendizaje de los estudiantes. Se analizaron las gestiones de los docentes de los tres grupos en cada uno de los momentos de las clases observadas. Complementariamente, se definieron criterios para analizar la calidad de las secuencias de actividades de aprendizaje construidas/propuestas por los docentes de cada grupo, en términos de su completitud, coherencia y progresión.

PRINCIPALES RESULTADOS

Sobre el estudio de Aprendizaje y verificación de hipótesis

Los resultados promedio en la Prueba Inicial y Final de las distintas escuelas fueron:

Grupo	Prueba Inicial	Prueba Final	Avance	% Avance
G1	41	66	25	40%
G2	49	65	16	27%
G3	58	73	15	26%

La diferencia de resultados se ratifica al efectuar un test de Kruskall-Wallis , que rechaza con significancia 0,042, la hipótesis nula que los resultados de la prueba inicial provenga de la misma distribución para los distintos grupos. Los mayores avances los logró el grupo tratamiento, asimismo si consideramos que la brecha de la prueba inicial del grupo tratamiento con el grupo control era de 19%, la brecha de la prueba final se redujo a menos de la mitad siendo de 7%. La brecha inicial del grupo tratamiento con respecto del grupo 2 desapareció en la prueba final. Esto se ve ratificado al realizar los mismo test de Kruskall-Wallis para la prueba final y el avance.

Se concluye que la distribución de resultados para el grupo tratamiento (que era inicialmente más deficitario) se logra llevar a la distribución del grupo control que tenía mejor rendimiento inicial. Como los grupos quedaron balanceados de tamaños similares y con más de 20 observaciones se realizó una ANOVA para determinar el efecto del tratamiento. Los resultados mostraron que el avance del grupo tratamiento es significativamente mayor que el grupo control. Como consecuencia, si bien los cursos del tratamiento parten significativamente de un nivel más bajo, no se diferencian del grupo control en la prueba final, con una leve diferencia a favor del grupo tratamiento, verificándose así la hipótesis H1 sobre el aporte del GREI al aprendizaje de los estudiantes.

Sobre el estudio de desempeño docente y verificación de hipótesis.

A partir del análisis de la información recogida se observó una importante diferencia en la gestión de los momentos de desarrollo y cierre de las clases, que denotan mejoras significativas del grupo G1 con respecto al grupo G3, de modo que los estudiantes que utilizaron el software GREI vivieron procesos de estudio en los que jugaban un rol más protagónico en su aprendizaje. Ello tuvo como consecuencia una mejora en sus resultados de aprendizaje, tal como lo mostró la comprobación de H1. Con respecto al momento de inicio de las clases, no fue posible detectar un avance en la gestión de los docentes de G1 con respecto a los de G3, debido a que la mayoría de los docentes que utilizaron el GREI no incorporaron actividades de exploración o formulación al inicio de sus secuencias, y dedicaban este momento a explicar el propósito de la clase y/o recordar el trabajo realizado en la sesión anterior o en otras clases.

Por otra parte, en base a la caracterización de las secuencias de actividades de aprendizaje propuestas/elaboradas por los docentes con GREI y sin GREI, se constataron mejoras sustantivas del grupo G1 respecto del grupo G3, en cuanto a la planificación de la enseñanza del campo de problemas aditivo. Las secuencias de aprendizaje elaboradas con el GREI resultaron de una calidad considerablemente mayor que las secuencias de aprendizaje propuestas por los docentes en sus clases sin ayuda del GREI. De este modo, sobre la base de ambos resultados, se corrobora la hipótesis H2 sobre el aporte del GREI al desempeño docente.

En cuanto al aporte del curso de capacitación, sólo tres de los docentes que no fueron capacitados lograron construir secuencias de aprendizaje interactivas con el GREI e implementarlas en sus aulas, mientras que el total de docentes capacitados sí logro realizar dicha tarea. Analizando y comparando la calidad de las secuencias, la planificación de la enseñanza y la gestión de las clases entre ambos grupos G1 y G2, no se observa una diferencia significativa en la gestión de los momentos de inicio y desarrollo entre los docentes de ambos grupos. Sin embargo, sí se observa una importante diferencia en la gestión del momento de cierre que denota una mejora en la gestión de la clase del grupo G1 con respecto al grupo G2, medida en términos de la contribución al aprendizaje de los estudiantes. Esto tuvo como consecuencia avances superiores en los desempeños de los estudiantes de G1 respecto al G2.

Por otro lado, de las 7 secuencias elaboradas por los docentes del grupo G2, sólo una de ellas resultó una buena secuencia en términos de su grado de coherencia, completitud y progresión, mientras 4 de ellas no fueron siquiera coherentes con el fin declarado. Mientras que más del 60% de los docentes de G1 logró elaborar secuencias de calidad y gestionarlas adecuadamente con sus docentes. De este modo, se cumple la hipótesis H3.

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

A partir del trabajo realizado, las principales conclusiones obtenidas son:

- Fue posible construir el software GREI con las características deseadas y en los tiempos previstos.
- El software GREI logra aportes significativos al aprendizaje de las matemáticas de las y los estudiantes de Primer Ciclo de Enseñanza Básica.
- El software GREI aporta a las y los docentes para planificar, diseñar y construir secuencias de actividades de aprendizaje que resulten de calidad, y que estimulen la participación y acceso equitativo de las y los estudiantes al conocimiento matemático.
- Obtienen mejores secuencias de actividades de aprendizaje, y también mejores gestiones en aula, profesores con perfil de avanzada adopción de TIC. Esto puede explicarse porque el GREI pone a disposición de las y los docentes actividades de aprendizaje matemático de calidad, gracias a la modelación didáctica del campo aditivo que sirve de bases para su desarrollo. Asimismo, el GREI ofrece a los docentes herramientas, parámetros y criterios para construir buenas secuencias de aprendizaje matemático, y también una orientación específica en la elaboración de secuencias a través de su Asistente. Las y los docentes con perfil avanzado pueden sacarle provecho a todas estas bondades del software.
- Las mayores dificultades en el uso del GREI las presentaron profesores con perfil de adopción de TIC bajo. Sin capacitación previa, solo aquellos docentes con perfil de adopción de TIC avanzado logran un uso efectivo del GREI.
- Las condiciones institucionales y de infraestructura, sin ser categóricas para un buen funcionamiento del GREI en las escuelas, resultan ser imprescindibles para que pueda funcionar eficazmente.

Como Proyecciones del trabajo tenemos contemplado:

- Optimizar el Asistente del GREI.
- Asegurar un uso intensivo del GREI en los procesos de enseñanza aprendizaje.
- Afinar procesos de Transferencia del GREI, ya que en esta investigación se hizo solo un piloto.
- Asegurarse de una adecuada difusión del GREI a nivel nacional e internacional, abriéndonos especialmente hacia otros países de la Región.
- Ir ampliando el GREI hacia otras temáticas y ejes relevantes del currículum de matemática de Enseñanza Básica, tales como geometría y datos y azar.

Referencias

Agencia de Calidad de Educación (2014). SIMCE 2013, Síntesis de resultados 4° básico. Ministerio de Educación, Chile

Beltran, Das y Fairlie, (2006). Do Home Computers Improve Computation Outcomes? Evidence from Matched Current Population Surveys", IZA Discussion Paper, Bon, Deutchland.

Berstein, B (1996). Pedagogy, simbolic, control and identity: Theory, research, critique. Ed. Taylor Francis, London.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics.Didactique des mathématiques, 1970-1990.(N. Balacheff, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 19(2), 22- 266.

Espinoza L., Barbé, J., y Gálvez, G., (2009) Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena. Enseñanza de las Ciencias, 27(2), 157–168

Espinoza L., Barbé, J., y Gálvez, G., (2011) Limitaciones en el desarrollo de la actividad matemática en la escuela básica: el caso de la aritmética escolar. Estudios Pedagógicos. 37(1) pp105-125

Gellert, U., J. Barbé and L. Espinoza (2013a), Towards a local integration of theories: Codes and praxeologies in the case of computer-based instruction. Educational Studies in Mathematics, 82(2), 303-321.

Gellert, U., L. Espinoza and J. Barbé, (2013b). Being a mathematics teacher in times of reform. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 45(4), 535-546.

Pedró, F.(2006). The new Millennium Learners: Challenging on view on ICT and learning. OCDE, Centre for Education Research and Innovation, Paris, FRANCE

Leutenegger, F. (2000), Construction dúne c´linique pour le didáctique: une etude des phenomenes temporels de l'enseignement, Recherches en Didactique des Mathematiques 18(1), pp 34-56

Marshall,G. and Cox, M., (2008). Research Methods; International Handbook of Information Technology in Primary and Secondary Education, pp 983-1002.Voogt and Knezek Eds.

OCDE (2011), Mejores políticas para el desarrollo: Perspectivas OCDE sobre Chile OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264095755-es.

Reeves, T, (2008). Design research from a technology perspective. International Handbook of Information Technology in Primary and Secondary Education, pp 1037-1051. Voogt and Knezek Eds.

Ruz J., Olguín P., Espinoza L., Barbé J., (2013). En Memorias del XVII Taller Internacional de Software Educativo TISE 2013, 1-3 Diciembre, Santiago, Chile pp. 822-825..

SISTEMA DE AUTO SOPORTE PARA EL MEJORAMIENTO DE LAS PRÁCTICAS DOCENTES, PROYECTO FONDEF D11I1009[ix]

Self-Support System to Help Improve Teachers' Practices

Dartnell, Pablo[a]. Araya, Roberto[a]. Bahamondez, Manuel[a]. Hernández, Josefina[a]. Aguirre, Carlos[a]. Castillo, Roberto[a]. Rodríguez, Patricio[a]. Palavicino, María Angélica[a]. Jiménez, Abelino[a]. Van der Molen, Johan[a].

[a]Centro de Investigación Avanzada en Educación, Universidad de Chile; correos electrónicos: dartnell@ciae.uchile.cl, roberto.araya@ciae.uchile.cl, manuel@bahamondez.com, josefina.hernandez@ciae.uchile.cl, carlosaguirre@automind.cl, castillo.n.r.e@gmail.com, prodriguez@ciae.uchile.cl, map@ciae.uchile.cl, jvandermm@gmail.com, abjimenez@gmail.com.

Resumen

El siguiente proyecto de investigación y desarrollo presenta un sistema de retroalimentación continuo que permite al docente de Matemáticas mejorar sus prácticas de enseñanza al transcribir automáticamente el discurso del profesor de una sala de clases a texto y analizar automáticamente la transcripción de cada clase para identificar prácticas docentes y contenidos, logrando un nivel parecido al de un experto humano enfrentado a la misma tarea y con las mismas fuentes de información.

Palabras clave: *Práctica Docente, Retroalimentación, Aplicación Móvil, Aprendizaje de Máquina*

Abstract

This research presents a Self-Support System that helps mathematics teachers detect and improve the different practices they use in their classes. This is performed, by recording all spoken audio in a classroom, transcribing this audio to written text, and analyzing each text in search of 6 different mathematical contents and 17 teacher practices, achieving the same results of a human expert exposed to the same task with the same information.

Keywords:*Teacher Practices, Feedback, Mobile Application, Machine Learning*

INTRODUCCIÓN Y CONTEXTO

Lograr sólidos aprendizajes escolares en matemáticas, y ciencias en general, es de fundamental importancia para el desarrollo futuro y por esto, constantemente se buscan formas de fortalecer y enriquecer la labor docente. Desde los inicios del siglo veinte, investigadores han recopilado información sobre la interacción entre el docente y sus alumnos, por ejemplo, contando la cantidad de preguntas que hace el/la profesor/a a sus estudiantes o calculando la proporción de palabras hablas por el docente respecto a las palabras habladas por los estudiantes (Stevens, 1912). Desde 1946 se ha recogido información estadística sobre diferentes práctica pedagógicas de diversos métodos, como filmando las salas de clases mientras los profesores están en acción (National Education Association, 1946). Sin embargo, a pesar de que algunas prácticas específicas pueden ser útiles con estudiantes de manera individual (por ejemplo, este alumno aprenderá más en este momento si le doy retroalimentación o si lo dejo entender el contenido por su cuenta), la búsqueda de prácticas generales que optimicen la efectividad, eficiencia y atención de los estudiantes es un desafío mayor (Koedinger, et al. 2013).

[ix]Proyecto financiado porXIX Concurso de Proyectos FONDEF I+D 2011

Es difícil calificar apropiadamente una clase de manera automática, debido a la gran cantidad de variables presentes y la diversidad de contextos en la que ella pudo situarse. Sin embargo, la información oportuna respecto a los diversos factores que han estado presentes en sus clases previas puede permitirle a un profesor ajustar sus estrategias pedagógicas de acuerdo al contexto particular en que realiza su labor docente. Es así que proveer al profesor de retroalimentación puede fortalecer y enriquecer la práctica de la enseñanza. Existen diversos métodos para entregar retroalimentación al profesor, tales como la observación en aula o la revisión de videos de sus clases. En particular, actualmente las prácticas docentes son generalmente monitoreadas por observadores entrenados que utilizan rúbricas para asesorar interacciones que se dan en las salas de clases, o revisar videos previamente grabados de las clases (National Board Resource Center, 2010; Pianta, 2003; TIMSS, 2003). Sin embargo, este proceso es lento, tedioso y puede presentar errores, haciendo que sea prácticamente imposible de utilizar para entregar de forma masiva y permanente a los docentes sugerencias inmediatas de estrategias de enseñanza en el asesoramiento del desempeño y necesidades de aprendizaje de los estudiantes (Araya, et al, 2011).

Teniendo en cuenta aquello, el presente proyecto busca producir una herramienta generadora de información y retroalimentación constante e inmediata, con el fin de apoyar la labor de perfeccionamiento docente a través de la autoobservación. Con este objetivo en mente, dado que se busca generar un sistema accesible, se ha propuestoun sistema que comience por la captura del audio del profesor en la clase a través de una aplicación para "Smartphone", lo que permite contar con el contenido verbal de la clase para su estudio y análisis posterior. El sistema funciona de la siguiente forma: **1)** La aplicación registra la grabación del audio de una clase, **2)** Dicha grabación se transcribe automáticamente a texto, y **3)** Finalmente, el texto se analiza para identificar y cuantificar la presencia de los factores en observación. En esta oportunidad se considera la observación de seis contenidos matemáticos, presentes en el currículum nacional, y la de diecisiete prácticas docentes, escogidas por existir amplio acuerdo en su importancia como indicadores de calidad (Araya et al. 2011, Koedinger et al. 2013). El algoritmo de identificación y clasificación ha de ser entrenado antes de poder ser utilizado de manera autosuficiente, es por esto que en primera instancia se utiliza la colaboración de expertos que identifican y clasifican textos de clases de matemáticas que serán utilizados para el entrenamiento del sistema.

Una vez superada la fase de entrenamiento, se comparan los resultados de la identificación y clasificación generada por el algoritmo en nuevos textos y se observa el desempeño en comparación con los expertos. Es deseable que el sistema entregue niveles de acuerdo con los expertos similares o superiores a los exhibidos entre dichos expertos. En este reporte daremos cuenta de las primeras pruebas hechas con el sistema de auto soporte, entregando información respecto al acuerdo entre la información producida por el sistema y las clasificaciones de las mismas clases que expertos han realizado de manera independiente.

METODOLOGÍA

Datos

Para crear y entrenar el modelo de transcripción automática y el modelo de clasificación de la aplicación, 93 profesores registraron el audio de un total de 866 clases para este proyecto. Todos los registros de audio de clases fueron grabados, transcritos y clasificados a través de la aplicación móvil del proyecto. De cada audio de clase se utilizó un extracto de cinco minutos de duración, escogido de manera tal que fueran los cinco minutos con más palabras habladas de toda la clase (a través de la aplicación móvil, de forma automatizada). Se experimentó la captura del audio de profesores en salas de clases con diversos medios, para obtener audio de buena calidad, sin necesidad de procedimientos demasiado engorrosos. Finalmente se decidió que la mejor solución es registrar los audios usando micrófonos alámbricos de manos libres conectados al celular, por lo que la aplicación móvil no permite otra forma de registrar las clases.

Los audios de cinco minutos fueron transcritos manualmente, y luego expertos identificaron, en cada uno de dichos segmentos de clase, la presencia o ausencia de cada práctica y contenido buscado, apoyándose tanto en los textos como los audios para las clasificaciones. De los 866 registros de audio utilizados para entrenar el sistema, 309 clases fueron transcritas y clasificadas por tres expertos contratados para ello, y luego las siguientes 557 fueron transcritas y clasificadas por docentes que estaban utilizando la aplicación.

Para las transcripciones, los transcriptores escuchaban el audio, y debían ir corrigiendo la transcripción automática preliminar propuesta por una versión inicial del sistema, dejándola exactamente igual al audio de la clase.

Los contenidos matemáticos eran: álgebra, aritmética, ecuaciones, fracciones, geometría y proporcionalidad; y las prácticas eran (observar que son diferentes, pero no necesariamente mutuamente excluyentes entre ellas): aclaración de conceptos, realización de cálculos, clasificaciones de conceptos o contenidos, crear buen ambiente en el aula, dinamismo en la exposición, generar espacio para la discusión, trabajo con ejemplos, presentación de explicaciones, hacerle preguntas a los estudiantes, dar instrucciones, interacción con estudiantes, interpelación a estudiantes, nombrar a los estudiantes por sus nombres, desarrollo de razonamiento matemático, reforzamiento de contenidos o habilidades previamente cubiertas, y valoraciones negativas y positivas de los aportes o trabajo de los estudiantes.Para cada categoría, tanto de contenidos como de prácticas docentes, usando unaplataforma web especialmente construida para estos efectos, los clasificadores debían indicar, para cada texto a clasificar, si la categoría estaba presente o no.

Para la transcripción de los audios a texto, se contó con el apoyo de colaboradores del Instituto de Tecnologías del Lenguaje de Carnegie Mellon University (CMU) en el uso del software libre de captura y transcripción de voz, *CMUSphinx* versión 3 (desarrollado por ellos). El software fue adaptado para generar un modelo de lenguaje Castellano chileno, para lo cual se le incorporó información de fonemas asociados a nuestras formas locales de pronunciación y vocabulario, fundamentalmente asociado a las clases de matemáticas.

El identificador automático de contenidos y prácticas fue construido con el algoritmo de aprendizaje automático *Random Forest* (Breiman, 2001). Para esto, primero a cada texto se le eliminan las palabras que no representan contenido, sino más bien juegan un rol formal en el lenguaje, tales como artículos, pronombres, conectores, etc., y luego se agrupan las palabras según su raíz. Posteriormente, para cada categoría de clasificación, el algoritmo *Random Forest* cuenta cuántas veces se repiten las diferentes raíces en cada texto por separado, y a partir de las clasificaciones manuales, le asigna acada raíz de cada texto un peso (importancia), generando así una bolsa de palabras que se asocian a cada categoría de clasificación.

RESULTADOS

Transcripción Automática

Para el *Sphinx* entrenado, su efectividad se mide a través de la diferencia entre las transcripciones de los párrafos hechas por *Sphinx* y aquellas correctas (revisadas por las personas), mediante el indicador *Word Error Rate* (*Basic Concepts of Speech*, n.d.), que consiste en contabilizar y sumar 3 tipos de errores posibles, que son 1) Número de eliminaciones: texto borrado de la posición que corresponde; 2) Número de sustituciones: texto equivocado (sustituido por otro) en la posición que corresponde; y 3) Número de agregados: texto inexistente adicional. Todo esto se expresa como porcentaje sobre el tamaño del trozo de texto correctamente transcrito (transcripción humana), y el porcentaje de acierto logrado es 36.46%.

Identificación de contenidos matemáticos y prácticas docentes

El desempeño de un clasificador automático depende de su capacidad de replicar las identificaciones realizadas por el/los experto(s) en el conjunto de testeo. Para evaluar la clasificación automática, se utilizó el indicador *Alternative Chance-Corrected Coefficient* (AC1) (Blood & Spratt, 2007) que mide el nivel de concordancia entre los expertos y el clasificador automático, tomando valores entre 0 y 1, donde 0 es el menor nivel de concordancia y 1 el máximo. En particular, el AC1 es un índice que trata de corregir el acuerdo por azar.

Como fue mencionado anteriormente, las primeras 309 clases fueron clasificadas por 3 expertos cada una, y las restantes clases fueron clasificadas por una o más personas. Por ende, para los textos que clasificaron los tres expertos, primero se entrenó el sistema con la clasificación de cada experto por separado, utilizando 214 clases para entrenar y 95 para testear. Los niveles de concordancia entre los expertos y el clasificador automático (AC1) de los 3 entrenamientos se muestran en la Figura 1 y Figura 2.

Por consiguiente, se consolidaron las clasificaciones manuales de los tres expertos de manera tal que: (1) si dos o más expertos dicen que una categoría está presente en un texto, entonces se considera presente, mientras que (2) si solamente 1 o ninguno de los 3 dice que está presente, entonces no lo está. Así, se generó una "Clasificación Experta Consolidada", con la que se entrenó también el sistema. En la Figura 1 y Figura 2 se muestra el AC1 obtenido del entrenamiento del sistema con esta consolidación de los juicios expertos, junto a los asociados a cada experto por separado.

Se continuó entrenando el sistema con todos los textos disponibles, aunque no estuvieran clasificados por tres expertos cada uno. Para esto se consideró una categoría como presente en un texto si más de la mitad de los clasificadores de dicho texto considera que la categoría en cuestión está presente. Los niveles de concordancia entre la Base Final de Entrenamiento y el clasificador automático, con 866 textos clasificados por 53 personas en total, se presentan en la Figura 3 a continuación. Por último, utilizando también el indicador AC1, se calculó el acuerdo entre los tres Expertos al clasificar, de a pares y entre los tres. En la Figura N°4 se muestran los valores de AC1 obtenidos, junto a los resultados del entrenamiento final.

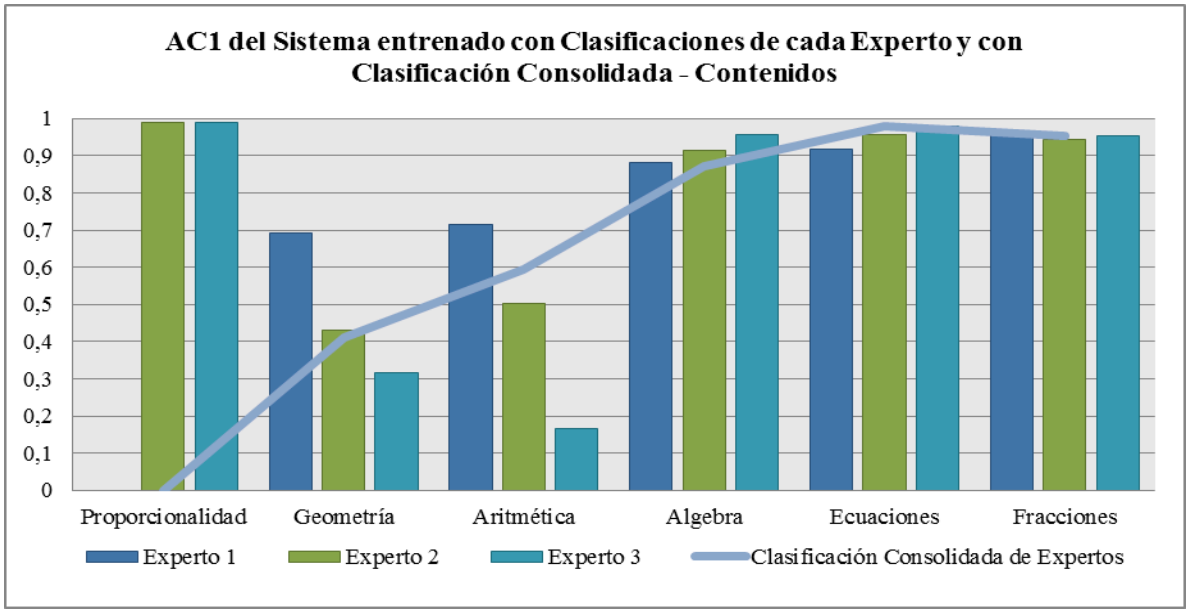


Figura 1. AC1 del Sistema entrenado con Clasificaciones de cada Experto vs. Clasificación Consolidada de los tres Expertos, para Contenidos

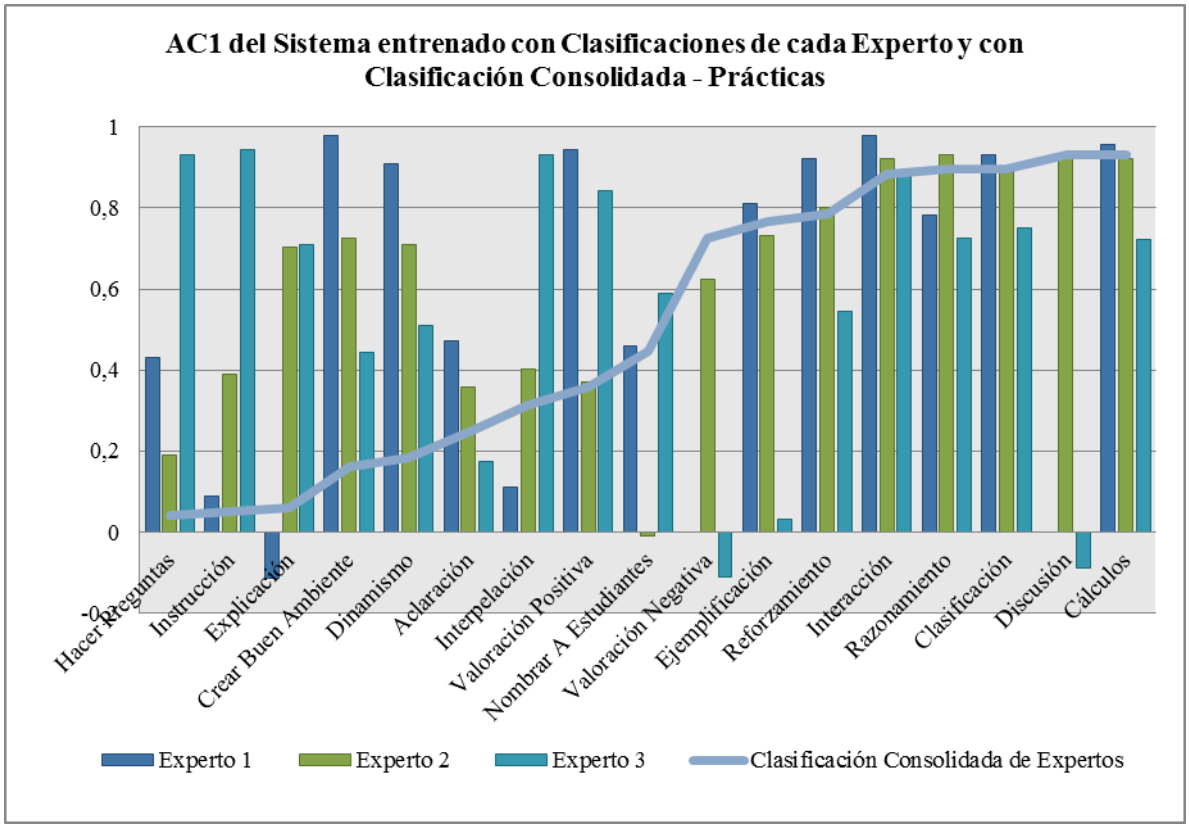


Figura 2.AC1 del Sistema entrenado con Clasificaciones de cada Experto vs. Clasificación Consolidada de los tres Expertos, para Prácticas

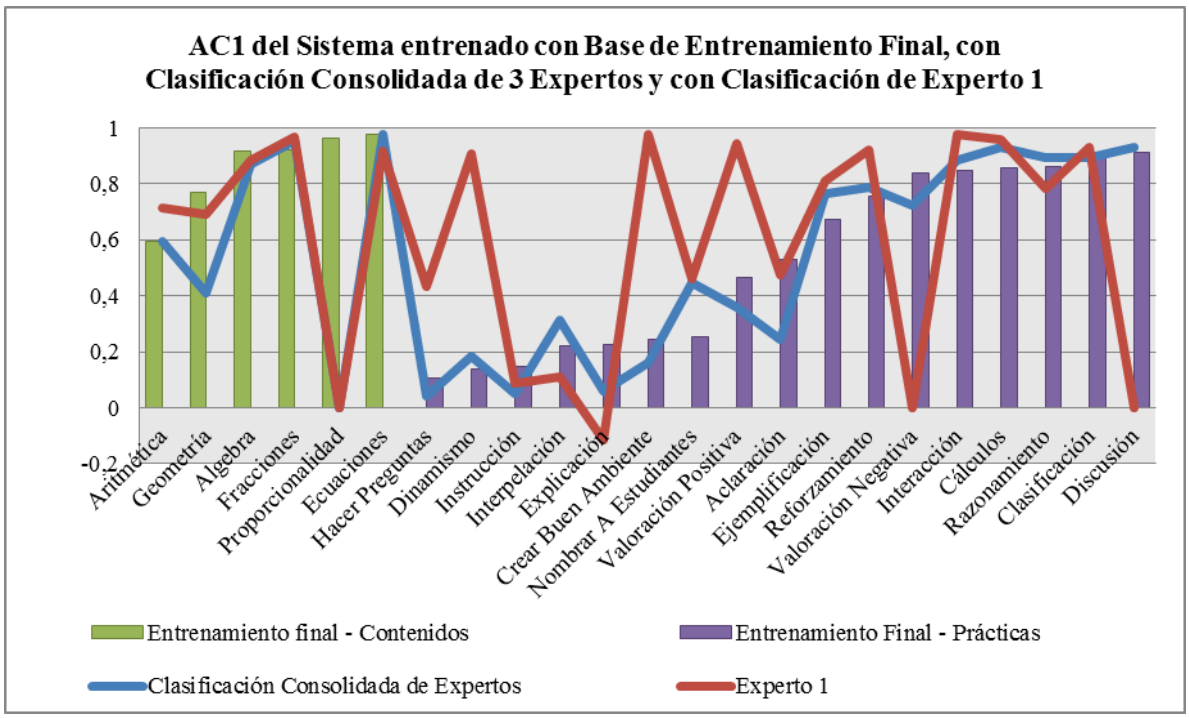


Figura 3.AC1 del Sistema entrenado con Base de Entrenamiento Final, con Clasificación Consolidada de los tres expertos y con Clasificación de Experto 1.

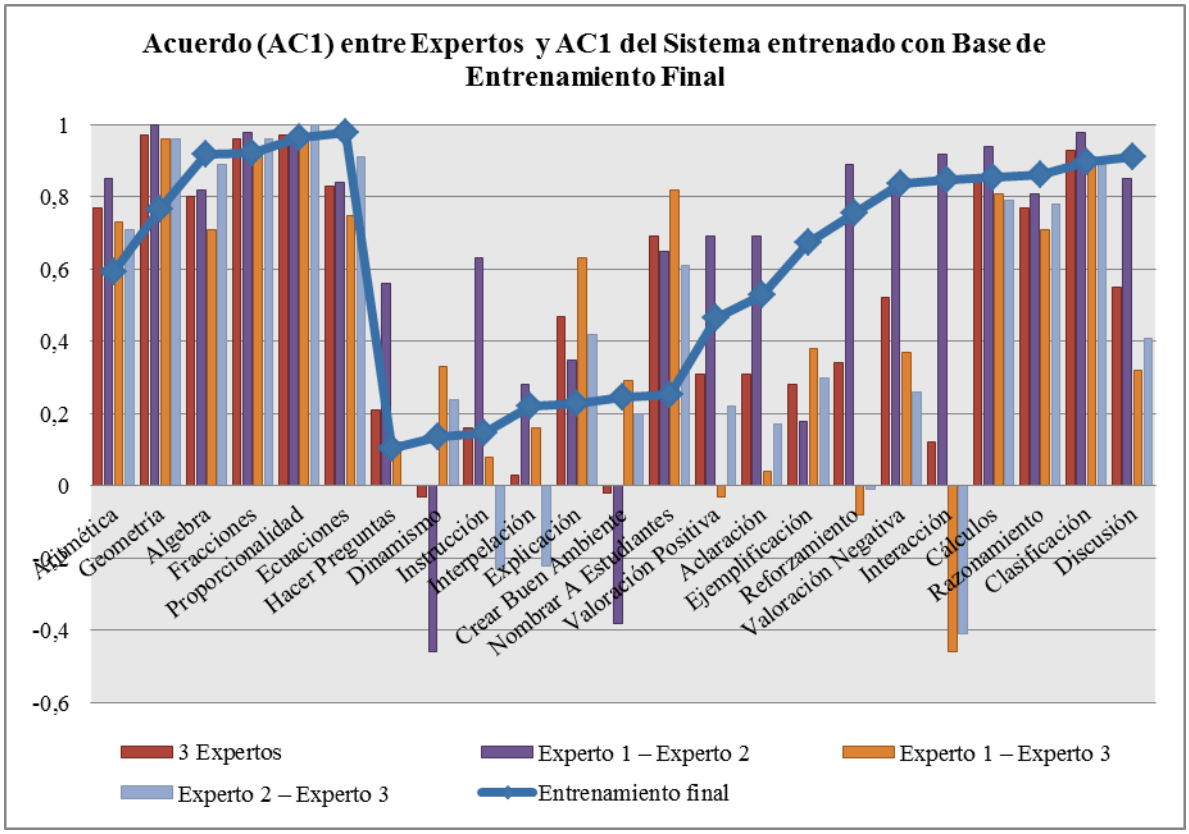


Figura 4. Acuerdo entre expertos y AC1 del sistema entrenado con Base de entrenamiento Final

DISCUSIÓN

Considerando que no teníamos ningún argumento para preferir el juicio de uno de los expertos en particular frente a los otros, primero se entrenó el sistema con cada clasificación por separado para ver el desempeño del clasificador automático según los tres expertos. En la Figura 1 y Figura 2 se observa que el Experto 1 tiene el mayor AC1 para 12 de las 23 categorías, mientras que los Expertos 2 y 3 tienen el mayor AC1 solamente para 3 y 7 categorías respectivamente (y hay una categoría donde los Expertos 2 y 3 tienen el mismo AC1). Por otra parte, se calculó el acuerdo entre los expertos. En los Contenidos, el Experto 1 con el Experto 2 están tan de acuerdo como el Experto 2 con el 3, y en las prácticas, se observa una gran variación en los valores encontrados, habiendo incluso varios valores negativos y otros que están bajo 0.4. Lo anterior se debe a la dificultad que conlleva definir exactamente qué es y cómo detectar una práctica en una clase, y por ende, los expertos inevitablemente interpretan las prácticas de acuerdo a su experiencia personal y no de forma completamente objetiva.

Para tratar de lograr un desempeño más estable e independiente de quién sea el experto que clasifica las clases, se decidió entrenar el sistema con la "Clasificación Experta Consolidada". A partir de la Figura 1 se observa que el entrenamiento de la clasificación de contenidos con la Clasificación Consolidada de los tres expertos tiene un valor promedio de AC1promedio similar al promedio del AC1 obtenido con el entrenamiento de los tres Expertos por separado, y en cuanto a las prácticas, la Figura 2muestra que el valor del AC1 del entrenamiento con la Clasificación Consolidada de los tres expertos es más bajo que el obtenido al entrenar el sistema con los Expertos 1, 2 y 3 por separado, pero al utilizar la Clasificación Experta Consolidada, estamos entrenando el sistema con datos más robustos y objetivos, dada la subjetividad en la detección de prácticas docentes en las clases.

Por consiguiente, dado que los tres expertos clasificaron solamente una parte de las clases disponibles para entrenar el sistema, se decidió seguir entrenando el sistema con todos los textos

disponibles, aunque no estuvieran clasificados por tres expertos cada uno. Lo anterior aumentó los datos de entrenamiento de 214 a 624, y los de testeo de 95 a 242. Así, de acuerdo a los resultados presentados en la Figura 3, el clasificador automático mejoró significativamente su desempeño, sobre todo en aquellas categorías más difíciles de detectar.

En particular, considerando que, hasta el momento el mejor desempeño se había obtenido al entrenar el sistema con las clasificaciones del Experto 1, de la Figura 3 se observa que el entrenamiento final tiene mejor AC1 que el Experto 1 en 11 categorías; y mejor AC1 en 12 categorías respecto a la Clasificación Consolidada de los tres Expertos. Lo anterior es importante porque el sistema en su etapa de producción se deberá seguir reentrenando constantemente a partir de la nueva información que los docentes entregan al utilizar la aplicación grabando y clasificando más clases, y es inviable que un Experto se mantenga de manera permanente encargado de clasificar todas las nuevas clases que se espera ingresar a futuro. Por ende, saber que el clasificador automático obtiene mejores resultados al entrenarlo con clasificaciones realizadas por múltiples personas utilizando la aplicación, hace que este proyecto sea sostenible en el tiempo.

Por otra parte, a partir de la Figura 4 se observa que el sistema entrenado puede clasificar automáticamente los textos y lograr una concordancia con las clasificaciones de los expertos, igual o mejor a la concordancia que logran los expertos entre sí. Dado que la base final de entrenamiento es creada a partir del promedio de los acuerdos entre expertos clasificadores, no es realista pensar que un autómata pueda estar más de acuerdo con los expertos que los expertos entre ellos, y por ende un buen resultado es aquel que se asemeja al acuerdo que logran los expertos entre sí, porque indica que el sistema se puede comportar como un experto más en la clasificación.

Al observar los resultados del entrenamiento final de la Figura 3, de las 23 categorías a clasificar, 5 tienen un valor de AC1 sobre 0.9, 10 están sobre 0.8 y 16 de las 23 categorías están sobre 0.4. Al separar por categorías de Contenidos y Prácticas, tenemos que 4 de los 6 Contenidos están sobre 0.9 y las 6 categorías de contenidos están sobre 0.55. Por último, 8 de las 17 prácticas superan 0.6 y 10 superan 0.4. Estos resultados muestran que sí es posible clasificar tanto contenidos como prácticas de forma automática a partir de un texto. Los resultados son mejores en la identificación de Contenidos que Prácticas. Esto se explica por el hecho de que, a diferencia de un contenido, la presencia o no de una práctica docente puede manifestarse desde muchas dimensiones (por ejemplo, tono de voz, gestos, etc.), siendo el texto hablado solo una de ellas, es probable que se necesite mucho más entrenamiento del sistema para reconocer prácticas docentes con los mismos niveles de AC1 (acuerdo con expertos) que los contenidos, usando solo texto. Asimismo, dada la mejoría en el desempeño al casi triplicar la cantidad de datos de entrenamiento, esperamos que a mayor cantidad de registros de audios, mejor será el desempeño del clasificador automático.

Notemos que existen otros indicadores que pueden ser usados para estudiar la coincidencia o no de los resultados con los juicios expertos. Uno de ellos es el de Kolmogorov-Smirnov (KS) (Arnold & Emerson, 2011). Si bien este es un indicador muy usado en la literatura, en el caso en que las categorías que se reportan presentes (o ausentes) aparecen sólo en porcentajes pequeños de la muestra, el AC1 se comporta mejor. En nuestro caso, para las prácticas docentes, 7 categorías fueron reportadas presentes en promedio en el 46% de los datos, pero otras 10 de ellas el porcentaje promedio de presencia es sólo del 17%, lo que explica entonces nuestra selección del AC1 como indicador. Si bien no lo reportamos en detalle en este manuscrito, cabe señalar que los menores valores de AC1 en nuestros datos tienen asociados en cambio los mejores valores de KS.

Para futuras investigaciones, y por completitud, nos gustaría mejorar y perfeccionar el transcriptor automático para aumentar los aciertos, aunque esto no es esencial dado que nuestros resultados actuales son menores a lo esperado debido a la inexactitud en transcribir las palabras que no tienen relación directa con los contenidos y prácticas buscados, tales como pronombres, artículos, etc. Con esto en mente se está trabajando en pasar el sistema a Sphinx 4, con lo que esperamos un mejor

desempeño. Así también, en el trascurso del desarrollo del proyecto se ha logrado aumentar la cantidad de audios transcritos y clasificados, con lo que el entrenamiento del sistema, tanto enel módulo de transcripción automática como en la clasificación de contenidos y prácticas, ha mejorado sus resultados a medida que aumentan los audios, como efecto de disponer de más datos para el entrenamiento de los algoritmos de clasificación. Por ende, a medida que los algoritmos se entrenen con más clases, el desempeño del clasificador automático de prácticas y contenidos también debería mejorar.

CONCLUSIONES

Se ha podido comprobar que el sistema de auto soporte es capaz de entregar información respecto a contenidos y prácticas docentes en clases de matemáticas que puede ser similar a la proporcionada por expertos respecto a los mismo ítems. Se ha visto además que a medida que el sistema es alimentado con más clases, aprende y la calidad de la retroalimentación continúa mejorando lo que permite esperar que con la masificación de su uso se incremente aún más la calidad de la información que entrega.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo contó con el apoyo de Rita Singh y Bhiksha Raj del Language Technologies Institute at CMU. Agradecemos también a Anita Tobar por su colaboración en la incorporación de fonemas para el sistema de transcripción automática y a Patricio Calfucura por su ayuda en el proceso de toma de datos. El desarrollo de este proyecto ha sido posible gracias al financiamiento del Programa Fondef de Conicyt, a través del Proyecto D11I1009, y al proyecto FB0003 del Programa de Investigación Asociativa de Conicyt.

REFERENCIAS

Araya, R.; F. Plana; Dartnell, P.; Soto-Andrade, J.; G. Luci; E. Salinas; M. Araya (2012) "Estimation of teacher practices based on text transcripts of teacher speech using a support vector machine algorithm". *British Journal of Educational Technology*, 43 (6), 837–846.

Arnold, Taylor B.; Emerson, John W. (2011).Nonparametric Goodness-of-Fit Tests for Discrete Null Distributions. *The R Journal*, 3 (2), 34–39.

Basic Concepts of Speech.(n.d.). Obtenido del sitio web de Carnegie Mellon University Sphinx, http://cmusphinx.sourceforge.net/wiki/tutorialconcepts

Blood E, Spratt KF (2007). Disagreement on agreement: two alternative agreement coefficients. *SAS Global Forum 2007*.

Bouchet-Valat, Milan (08 de Agosto de 2014). Documentation for R package SnowballC. [Sitio web]. Obtenido de https://cran.r-project.org/web/packages/SnowballC/SnowballC.pdf

Breiman, Leo (2001). "Random Forests".*Machine Learning*45 (1), pp 5-32.

Gwet, K. L. (2008). Computing inter-rater reliability and its variance in the presence of high agreement. *The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 61(1), 29–48.

Koedinger, K.; Booth, J.; Klahr, D. (22 de Noviembre de 2013).*Instructional Complexity and the Science to Constrain It*. Science Magazine, 342, 935-937

National Board Resource Center (2010).A quality teacher in every classroom. Sanford, California: Stanford University.

National Education Association (1946).Research bulletin. December 1946, pp. 146–148.

Stevens, R. (1912). *The question as a measure of efficiency in instruction*. New York: Bureau of Publications. Teachers College, Columbia University. pp. 11, 15–17.

Wild, Fridolin (07 de Mayo de 2015). Documentation for R package LSA.[Sitio web]. Obtenido de https://cran.r-project.org/web/packages/lsa/lsa.pdf

ACTIVAR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL AULA[x]

Activating problem solving in the classroom

Felmer, P.[a,b] ,Perdomo-Díaz, J.[a,b] , Reyes,C. [a]

[a]Centro de Investigación Avanzada en Educación. Universidad de Chile, [b]Centro de Modelamiento Matemático. Universidad de Chile; correos electrónicos: pfelmer@dim.uchile.cl;jperdomo@dim.uchile.cl;cristian.reyes@ciae.uchile.cl.

Resumen

En este artículo se presenta una iniciativa de desarrollo profesional que tiene como principal objetivo desarrollar habilidades de Resolución de Problemas en niños y niñas del sistema escolar chileno, mediante talleres de formación continua de profesores. El taller central de la propuesta, llamado RPAULA, es un taller de 30 horas presenciales, pero que se desarrolla a lo largo de un año, con seguimiento vía el análisis de grabaciones en video de las clases de los profesores participantes. En este artículo se da cuenta de las razones por las cuales se espera que esta iniciativa sea beneficiosa para profesores y estudiantes, para apoyar el desarrollo de habilidades en las aulas que exige el currículo nacional.

Palabras clave: *resolución de problemas, desarrollo profesional docente, aulas escolares*

Abstract

This article presents a professional development initiative whose main objective is to develop skills of problem solving, in the children of theChilean school system, through continuous training workshops for teachers. 'RPAULA', the initiative's central workshop, includes 30 contact hours over the course of a year. The teachers involved are monitored via the analysis of classroom video recordings. This article details thereasons why this initiative is expected to be beneficial for teachers and students, focusing on the ways in which it promotes the development of mathematics skills, as required by the national curriculum in Chile.

Keywords:*problem solving, professional development, classrooms*

ANTECEDENTES

El currículo nacional

El actual currículo nacional, descrito en las Bases Curriculares del año 2012, declara tres pilares que sustentan el aprendizaje de la matemática: actitudes, habilidades y contenidos. Cada uno de estos pilares son igualmente necesarios para sostener la educación en matemática de nuestros niños y niñas. En el Ajuste Curricular del año 2009, las habilidades también estaban, pero mezcladas con los contenidos, donde no existía una declaración explícita nivel por nivel, sino que una intención de que se desarrollen en forma transversal. En el actual currículo, las habilidades están valoradas del mismo modo que los contenidos, y explicitado su desarrollo nivel por nivel. Las habilidades matemáticas que plantea el currículo nacional a través de las Bases Curriculares son cuatro:Resolverproblemas, Argumentar y comunicar, Representar y Modelar.

[x]Esta investigación es financiada por el proyecto FONDEF ID14I10338.

Estas habilidades están íntimamente ligadas, no se pueden separar. Uno puede argumentar que las actividades de resolución de problema ayudan a desarrollar las otras tres habilidades. La resolución de problema evidentemente provee oportunidades para representar y modelar, pero además cuando los estudiantes muestran sus resultados a sus compañeros, exponen y discuten diferentes estrategias, argumentan a favor de un resultado, o argumentan por qué funciona cierta estrategia, están desarrollando habilidades de argumentación y comunicación.

De manera explícita las bases curriculares declaran: "La resolución de problemas es el foco de la enseñanza de la Matemática. Se busca promover el desarrollo de formas de pensamiento y de acción que posibiliten a los estudiantes procesar información proveniente de la realidad y así profundizar su comprensión acerca de ella y de los conceptos aprendidos." (Mineduc, 2012, p. 87).

La relevancia que alcanza la Resolución de Problemas en el currículo nacional, es coherente con el currículo de países que marcan tendencia en el aprendizaje de la matemática, ya sea por los buenos resultados obtenidos en pruebas internacionales (Singapur o Finlandia) o por los enormes esfuerzos realizados para mejorar el aprendizaje de matemática de la población escolar (EEUU).

Formación Inicial Docente

A pesar de los recursos e instrumentos destinados a las mejoras en la formación docente en los últimos años, no se han producido mejoras significativas. Las instituciones formadoras de profesores de educación básica han hecho esfuerzos para producir cambios en los programas de formación de profesores, por ejemplo incorporando más asignaturas de especialidades. Sin embargo, en el año 2012 el 28% de estos programas no estaban acreditados y un 49% tenía sólo entre 2 y 3 años de acreditación. En cuanto a la evaluación INICIA, que distingue tres niveles de desempeño: Sobresaliente, Aceptable e Insuficiente, los resultados en el año 2011 indican que el 69% de los egresados está en el nivel insuficiente en la parte disciplinar de la prueba, y el 42% está en el nivel insuficiente en la parte de conocimientos pedagógicos. Esto significa que estos porcentajes de estudiantes no demuestran los conocimientos y habilidades necesarios para iniciar el ejercicio de la profesión docente. Más aún, 21 de las 25 instituciones participantes en la prueba INICIA del año 2011 tienen más del 50% de sus egresados de enseñanza básica en el nivel insuficiente en la dimensión disciplinaria. En el ámbito internacional el informe Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M, 2012), reporta los resultados del estudio TEDS-M, en particular aquellos referentes a las pruebas de conocimiento matemático y conocimiento pedagógico específico de matemática de estudiantes de pedagogía básica a punto de egresar. Entre los 17 países participantes, los cuales incluyen países con realidades tan diversas como Singapur, Taiwan, Botswana, Filipinas y Chile, se reporta que Chile ocupa el lugar 16 en ambas pruebas. Es importante destacar también, que para el año 2008, la gran masa de alumnos de Pedagogía de Enseñanza Básica se encuentra en carreras con un porcentaje de cursos de Matemática de 8% o menos, y que aproximadamente el 50% de los alumnos estudia en carreras que tienen hasta un 6% de cursos de Matemática en la malla curricular (Varas et al. 2008).

Por otra parte, según Ortúzar et al. (2011), para los profesores jóvenes la Formación Inicial Docente (FID) no influye en el desempeño docente y este no explica la asociación entre la FID y rendimiento de los alumnos en matemática. Esto es consistente con un estudio de Larrondo et al. (2007), donde se muestra que la FID cambia muy poco las habilidades básicas en Lenguaje y Matemática en los años universitarios que dura la carrera.

Formación Continua en Chile

Según Cox (2009), los programas de formación continua, a nivel de políticas nacionales, han tenido como obstáculo la respuesta no efectiva por parte de las Universidades y sus facultades de educación, la mayoría notoriamente desconectada de las necesidades efectivas de la docencia

escolar y del nuevo currículo, entre otras. Es decir, la oferta de formación continua ha sido desconectada del aula y del currículo. También afirma que los programas no han sido evaluados en forma rigurosa, por lo tanto no hay forma de reconocer las mejores prácticas y luego expandirlas. Por su parte Beca (2009) propone 10 desafíos fundamentales para la formación continua de los profesores. Uno de esos desafíos es el tránsito de un perfeccionamiento ocasional a la formación permanente, es decir, es necesario transitar desde la formación continua, entendida como unasecuencia de eventos formativos ocasionales hacia una lógica distinta basada en el desarrollo de itinerarios o trayectorias formativas que respondan a propósitos determinados. También afirma el autor que la formación continua de los equipos docentes ofrece grandes oportunidades cuando se realiza dentro de la propia unidad educativa, pues ello favorece a su pertinencia y coherencia. Sin, embargo, ello es difícil de realizar en establecimientos pequeños, en esos casos, instancias locales, resultan más efectivas. En el informe de la OECD (2005) se puede leer: "El desarrollo profesional eficaz, incluye capacitación, la práctica y la retroalimentación, y proporciona el tiempo suficiente y apoyo para el seguimiento. Los programas exitosos involucran a los profesores en actividades de aprendizaje que son similares a los que van a utilizar con sus alumnos, y fomentan el desarrollo de comunidades de aprendizaje entre los docentes. Existe un creciente interés en el desarrollo de las escuelas como organizaciones de aprendizaje, y en las maneras en que los profesores compartan su conocimientos y experiencia de manera más sistemática". A nivel internacional la investigación ha encontrado que el desarrollo profesional tendiente a desarrollar el conocimiento matemático del profesor son más efectivos que programas de desarrollo profesional focalizados solo en habilidades pedagógicas o genéricas (Garet et al 2001, Heck et al,2008)

Estrategias de desarrollo profesional docente en la literatura internacional.

La pregunta fundamental al diseñar una estrategia de desarrollo profesional es ¿qué características debe tener para que sea efectiva? Garet et al. (2001) tomaron datos de programas de desarrollo profesional, principalmente de matemáticas y ciencias, con el objetivo de examinarlas relaciones entre las características que la literatura atribuye a un programa de calidad y el cambio que los docentes reportan sobre sus conocimientos, habilidades y práctica docente. Garetet al. (2001) distinguieron entre características estructurales y características nucleares del programa. Las primeras son aquellas propias del diseño: la forma del programa; su duración; y el nivel de énfasis que se da a la participación colectiva. Las segundas hablan del contenido tratado: el grado en que la actividad tiene foco en el contenido; la medida en que ofrece a los docentes un aprendizaje activo, involucrándolos en el análisis significativo de los procesos de enseñanza y aprendizaje; y el grado de coherencia con los objetivos de desarrollo profesional de los participantes. Entre los resultados de este estudio se encuentra que "es más probable que un programa de desarrollo profesional sea de alta calidad si es sostenido en el tiempo y su duración es de un número sustancial de horas [...] las actividades que dan un mayor énfasis al contenido y que están mejor conectadas con otras experiencias de desarrollo profesional de los docentes y otros esfuerzos de reforma tienen mayor tendencia a producir mejoras en los conocimientos y las habilidades" (p. 933). Estos resultados son corroborados en gran medida por el trabajo posterior de Desimone et al. (2001).

En cuanto a los contenidos, estos deben ser centrados en la disciplina específica. En este sentidoy para docentes de matemática, Borko (2004) señala que las experiencias que sitúan al docente enel rol del estudiante, involucrándolo en actividades como la resolución de problemas sonparticularmente efectivos. Similares aseveraciones han sido hechas por Mason (1989, 1992). Porotra parte, Garet et al. (2001) señalan que la coherencia de las actividades del programa con otrosprogramas realizados por los docentes, influye de manera positiva en el cambio en la prácticadocente. En relación con la coherencia y con las oportunidades de aprendizaje activo, los autoresencontraron la pertenencia de los profesores participantes a un mismo colectivo, algo que

ocurreen el Programa de desarrollo docente, es un factor positivo. En la misma línea, Marrongelle et al. (2013) señalan que las características que hacen más efectivo un programa de desarrollo profesional son: que sea demandante, que se realice de manera regular y conectado a la práctica; que se centre en el aprendizaje de los estudiantes y que se dirija la enseñanza de un contenido; estar alineado con los objetivos y prioridades del colegio; y construir fuertes vínculos entre los profesores. Siguiendo entonces la evidencia que entregan estas investigaciones podemos resumir las siguientes como características que un programa de desarrollo debería tener para que produzcan cambios efectivos:

- Privilegiar actividades de trabajo en grupos de estudio, trabajo con mentores, creación de redes de docentes y proyectos de investigación. Esto en lugar de cursos, talleres o seminarios expositivos tradicionales.
- Propender a cursos de larga duración, con sesiones con más horas y extendidos en el tiempo. Esto en lugar de cursos cortos.
- La participación colectiva de los docentes, en grupos de la misma escuela, municipalidad o comunidad de establecimientos y también que enseñen en el mismo curso. Esto en lugar de participación individual en el curso.
- Los cursos con aprendizaje activo, donde los docentes se involucran activamente en el análisis de la enseñanza y del aprendizaje. Esto en lugar de escuchar o leer sobre teorías, contenidos y metodologías.
- Experiencias coherentes con los objetivos de los docentes, de la escuela y sus directivos, del estado y del currículo.
- Cursos con foco en el contenido, es decir, que la actividad se enfoca a profundizar el conocimiento del contenido y las habilidades matemáticas. Esto en lugar de teorías de aprendizaje o metodologías generales y teorías del aprendizaje de las matemáticas.

NUESTRA PROPUESTA DE DESARROLLO PROFESIONAL

ARPA es el nombre de la iniciativa de desarrollo profesional que se desarrolla en conjunto entre el Centro de Modelamiento Matemático y el Centro de Investigación Avanzada en Educación, ambos de la Universidad de Chile. La iniciativa ARPA (que es el acrónimo de Activando la Resolución de Problemas en el Aula) tiene como objetivo dar las oportunidades y las herramientas para que profesores desarrollen actividades de Resolución de Problemas en sus aulas. Para lograr ese objetivo se han desarrollado tres tipos de talleres: RPAcción, RPAula y RPContenido. El centro de la propuesta de desarrollo profesional es el taller RPAula, que detallamos a continuación en mayor detalle.

RPAula

El objetivocentral de este curso es ofrecer a los profesores oportunidades y herramientas que les permitan incorporar la resolución de problemas en la sala de clases desde dos perspectivas: como actividad matemática de los niños y como estrategia para el aprendizaje de contenidos. Esta incorporación se realiza en forma paulatina, no invasiva y respetuosa de los ritmos escolares propios del establecimiento y del profesor.

El curso de 30 horas se realiza en dos modalidades: anual y bianual. La segunda es una continuación de la primera, donde se profundiza en los diferentes aspectos tratados, y hacia el final hay un énfasis en la creación de comunidad de estudio con existencia más allá del curso. Se establecerán las instancias de discusión y se proveerán oportunidades para que el grupo se organice y mantenga su trabajo colaborativo. Esta es la principal diferencia entre las dos modalidades.

Un curso se constituye con 21 docentes participantes que cumplen con un requisito de coherencia que se manifiesta en alguna de las siguientes características: provienen de una comunidad (fundación o municipio u otra), sus directivos (directores o jefes de UTP) apoyan la introducción de

RP en el aula, ellos están interesados en RP y enseñan en cursos de nivel similar (1º y 2º básico,

3º y 4º básico, 5º y 6º básico). Este curso se sustenta en el hacer y en el reflexionar. Durante el desarrollo del curso se crean oportunidades para que los participantes hagan matemáticas, resolviendo problemas con el apoyo del monitor. Además se crean oportunidades para que los participantes reflexionen sobre su propia capacidad para resolver problemas, sobre el rol del monitor cuando ellos resuelven problemas y sobre cómo se han sentido resolviendo problemas. Se crean oportunidades para que los participantes implementen actividades de resolución de problemas en sus aulas y para que reflexionen sobre los resultados de sus implementaciones, sus dificultades, logros y desaciertos.

La base de la reflexión es el intercambio colectivo de experiencias y entre pares, donde el monitor estimula, pero no da soluciones, pregunta, pero no da respuestas, sugiere caminos de acción en base a las realidades de cada participante, pero no obliga, no impone una visión o una manera de hacer. Para describir esta estrategia usamos la metáfora: 'gota a gota se llena el vaso'. Esta metodología de trabajo del monitor-profesor-actividad modela una metodología profesor-estudiante-actividad. La elección de la resolución de problemas como elemento principal permite trabajar a su vez las otras habilidades propuestas a nivel curricular: modelación, representación, argumentación y comunicación. Como mar de fondo de esta propuesta se encuentra la matemática como disciplina intelectual que puede cultivarse a cualquier edad y que para enseñarla es necesario experimentarla y conocerla profundamente en su especificidad de matemática escolar (Ball et al., 2008) y considerando que esta incluye tanto contenidos como habilidades.

Sesión de inicio: Se realiza durante un día completo (7 horas), idealmente en día sábado. Esta sesión consiste en un taller de resolución de problemas en grupo, donde además se reflexiona sobre la actividad de resolver problemas: estrategias de resolución de problemas, características principales de la dinámica de trabajo del taller y las actividades utilizadas, emociones durante la resolución de problemas, creencias acerca de la matemática, de cómo se enseñan y cómo la aprenden los estudiantes, entre otros. Estos tópicos se van retomando a medida que se avance en taller, en relación con la actividad que cada día se esté trabajando.

Sesiones intermedias: Hay una sesión mensual de 3 horas. En estas sesiones hay instancias de resolución de problemas y de discusión plenaria acerca de alguno de los tópicos mencionados anteriormente. En cada sesión se proponen actividades a ser implementadas por los docentes en sus aulas y que son discutidas en la sesión siguiente. Se revisan colectivamente las actividades implementadas, se trata de descubrir qué fue lo clave para que resulte y también las razones por las que no resultaron. También se analizan videos de dichas implementaciones.

Sesión de cierre: Evaluación colectiva del taller, contando experiencias personales, discutiendo lo que aprendieron, analizando su propia evolución en cuanto a conocimientos y en cuanto a confianza, lo que pasó con los niños, lo que falta por hacer, etc.

RPAcción y RPContenido

El taller RPAcción es un taller de una jornada (4 o 5 horas) en el cual participan un gran número de profesores (100 profesores o más) en un mismo lugar acompañados por varios monitores, en el cual

se resuelven problemas en grupos de tres profesores distribuidos en forma aleatoria y se reflexiona sobre las estrategias utilizadas para resolver problemas, acerca de qué entendemos por un problema, acerca del rol de las preguntas del monitor, y acerca de la factibilidad de realizar actividades de RP en las aulas escolares. El objetivo de este taller es de motivar a las instituciones y profesores a reconocer la necesidad de desarrollar habilidades de RP en los estudiantes.

El taller RPContenido es un curso de 25 horas que se realiza en una semana usualmente en el verano, y que tiene como fin profundizar en los contenidos del currículo mediante estrategias de resolución de problemas. Idealmente este curso es un complemento del RPAula, donde los profesores de aquel taller profundizan contenidos que no se estudian en detalle en el RPAula.

LA INVESTIGACION PROPUESTA

En este momento se están desarrollando 13 talleres RPAula a lo largo del país, se espera que se realicen al menos 6 talleres RPAcción y están ofertados 9 talleres de RPContenido.

Las variables a considerar en la investigación están relacionadas con los siguientes ámbitos:

· En el caso de los profesores, se estudiarán variables relacionadas con (i) las habilidades matemáticas de los profesores, (ii) su concepción de la matemática, su enseñanza y los logros de aprendizaje y (iii) las expectativas que los docentes tienen de sus estudiantes.

· En el caso de la sala de clase, las variables a analizar están relacionadas con la calidad matemática de la instrucción (Hill, Ball & Schilling, 2008), las oportunidades que los estudiantes tienen de experimentar la matemática y, en particular, las oportunidades que tienen de trabajar en resolución de problemas.

· En el caso de los estudiantes, las variables a analizar están relacionadas con (i) sus habilidades matemáticas, (ii) su concepción de la matemática y su aprendizaje y (iii) su percepción sobre su profesor y sobre sí mismo como estudiante de matemáticas.

Recolección y análisis de datos de los profesores

Los instrumentos y el método que se utilizarán para recolectar y analizar la información relacionada con los profesores que participan en los distintos cursos son los siguientes.

· Filmación y grabación en audio de sesiones de los talleres RPAula, talleres RPContenidos y talleres RPAcción y recolección de los documentos escritos por profesores que participanen esos cursos.

El mejoramiento en las habilidades matemáticas de los docentes que participan en los distintos cursos se hará analizando el trabajo que el docente realiza, así como los razonamientos y argumentos que utiliza mientras resuelve problemas.Para ello se filmará, se grabará en audio y se fotografiará el trabajo escrito que el docente realice en el curso.

Por motivos de factibilidad, se analizarán las habilidades matemáticas de una muestra de profesores de cada uno de los tres tipos de curso. En el caso del Curso RPAula, la muestra estará formada por 3 docentes de cada uno de los talleres que se realizarán cada año, elegidos aleatoriamente, lo que supone 1/7 de la población que participa en los Cursos RPAula al año. En el caso de los talleres RPContenido, también se seleccionarán aleatoriamente 3 docentes de cada uno de los cursos que se impartirán cada año, lo que también supone 1/7 de la población. En el caso de los Cursos RPAcción, la muestra para el estudio de las habilidades matemáticas de los docentes, estará formada por 6 profesores de cada uno de los talleres que se impartirán.

Otro de los instrumentos de recolección de datos que se utilizará en esta investigación es el *Cuestionario para profesores sobre prácticas y creencias relacionadas con la resolución deproblemas*, diseñado como parte de la Tesis Doctoral de Valentina Giaconni, estudiante del programa de doctorado en Ciencias de la Ingeniería, con mención en Modelación Matemática, del Departamento de Ingeniería Matemática de la Universidad de Chile. Este cuestionario se aplicará a toda la población participante en la estrategia de desarrollo profesional docente, es decir a todos los profesores que participen en todos los cursos (unos 700 profesores, aproximadamente). Se aplicará en dos momentos: antes y después de participar en los cursos y se hará a través de una plataforma electrónica. Se analizará con estadísticos descriptivos, test de hipótesis y análisis de correlaciones, utilizando el programa de análisis estadístico SPSS.

El análisis se complementará con el diseño y la aplicación de una *entrevista en retrospectiva* cuyo objetivo será indagar acerca del recuerdo que tienen los docentes que participan en este tipo de estrategia de desarrollo profesional, transcurrido un tiempo desde que se vivió la experiencia.

Esta entrevista se hará a los docentes de la muestra creada para cada uno de los cursos, será una entrevista semiestructurada y se aplicará dentro de los 6 meses posteriores a la finalización del curso en el que esté participando el profesor o la profesora.

Recolección y análisis de datos de la sala de clase

Para el análisis de la calidad matemática de la instrucción, las oportunidades que los estudiantes tienen de experimentar la matemática y el trabajo en resolución de problemas (objetivos 3 y 4 del taller RPAula) se filmarán y grabarán en audio 4 sesiones de clase de 90 minutos, de cada uno delos profesores de la muestra creada para el caso del Curso RPAula (3 profesores, elegidos aleatoriamente, de cada uno de los 8 cursos). Dos de esas sesiones serán al inicio del Curso RPAula y las otras dos al final. Con estas grabaciones se hará un proceso de codificación por pares, utilizando dos pautas: la pauta MQI, para la calidad matemática de la instrucción, y la pauta *Observación de Clases*, diseñada y utilizada en el proyecto FONIDE F721209 y con la que se recoge información acerca de las características de la actividad matemática y la interacción que se produce en la sala de clase.

Recolección y análisis de datos de los estudiantes

Para analizar los cambios en la habilidad de resolver problemas de los alumnos y alumnas de aquellos docentes que participan en los talleres RPAula se diseñarán dos pruebas que constarán, cada una, de un máximo de 3 problemas.

Esta prueba se aplicará a los alumnos y alumnas del curso en el que los docentes hayan implementado las actividades propuestas en el taller RPAula y se hará únicamente con los estudiantes de los docentes de la muestra definida anteriormente (3 docentes de cada uno de los talleres, elegidos aleatoriamente). Una de las pruebas se aplicará al inicio del Curso RPAula y otra al final.

También se diseñará un cuestionario dirigido a los alumnos y alumnasde los docentes que participan en los talleres RPAula y que forman parte de la muestra. Este cuestionario se construirá a partir de instrumentos validados a nivel nacional e internacional, como son los cuestionarios de estudiantes asociados a las pruebas SIMCE, TIMSS o PISA. Se realizará un pilotaje del instrumento construido y se aplicará posteriormente a todos los estudiantes con los que los docentes hayan experimentado las actividades propuestas en el Curso RPAula. Se utilizará el mismo proceso de análisis que para el *Cuestionario para profesores sobre prácticas y creenciasrelacionadas con la resolución de problemas,* esto es, se usará el SPSS para analizar estadísticos descriptivos, realizar test de hipótesis y análisis de correlaciones.

COMENTARIOS FINALES

La propuesta planteada está basada en lo que sugiere la literatura internacional y en nuestra experiencia. No es un taller teórico, no es un taller donde el experto enseña. Es un taller en donde se dan las oportunidades para que se desarrollen habilidades, se desarrolle la autonomía, y cambien creencias acerca de la matemática y su aprendizaje. Aun no se sabe si la propuesta cumple esto. En el año 2016 ya se habrá analizado la información recogida en los talleres que actualmente se están llevando a cabo, para ese entonces se podrá mostrar resultados más concretos

Referencias

Beca, C. (2009). Desafíos para una política de formación continua docente. En Sotomayor y Walker (Eds.). *Formación Continua de Profesores*. Editorial Universitaria, pp. 131-145.

Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008).Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education,* 59 (5), 389-407.

Borko, H. (2004). Professional Development and Teacher Learning: Mapping the Terrain. *Educational Researcher*, 33 (8), 3-15.

Cox, C. (2009). Formación Continua de Profesores: La hermana pobre de las políticas educacionales. En Sotomayor y Walker (Eds.).*Formación Continua de Profesores*. Editorial Universitaria, 13-23

Desimone, L., Porter, A.C., Garet, M.S., Yoon, S. & Birman, B.F. (2002). Effects of Profesional development on Teacher's Instruction: Results from a Three-year Longitudinal Study. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 24 (2), 81-112.

Garet, M.S., Porter, A.C., Desimone, L., Birman, B.F. & Suk Yoon, K. (2001). What Makes Professional Development Effective? Results From a National Sample of Teachers. *American Educational Research Journal*, 38 (4), 915-945.

Hill, H.C., Ball, D.L., & Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400

Marrongelle, K., Sztajn, P. & Smith, M. (2013).Scaling Up Professional Development in an Era of Common State Standards.*Journal of Teacher Education*, 64(3), 202-211.

Mineduc, Ministerio de Educación (2009). Objetivos Fundamentales y contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media. *Actualización 2009. Ministerio de Educación*, República de Chile. Santiago.

Mineduc, Ministerio de Educación (2012). Bases Curriculares, 1º a 6º básico. [Descargado de http://www.mineduc.cl/index5.php?id_portal=47 el 3 de mayo de 2015].

Ortúzar, M.; Flores, C.; Milesi, C.; Cox, C. (2009) Aspectos de la Formación Inicial Docente y su Influencia en el Rendimiento Académico de los Alumnos. Book Chapter 3, CAMINO AL BICENTENARIO. PROPUESTAS PARA CHILE, Concurso de Políticas Públicas 2009. Ediciones Universidad Católica.

OECD (2005) Teachers matter. Attracting, Developing and retaining Effective Teachers.Paris.

DISPONIBILIDAD INMEDIATA DE EDUCACIÓN UNIVERSAL DE CALIDAD: MODELO TEÓRICO Y EVIDENCIA EMPÍRICA

World-class Education for All: Theoretical Model and Empirical Evidence

Hojman, Roberto

Tecnologías Educativas Colaborativas rhojman@galyleo.net

Resumen

Se muestra que la falta de dominio – incluso leve – de las Habilidades Elementales en una materia escolar, puede tener un efecto devastador (y aparentemente paradojal) en el desempeño académico de un estudiante sometido a un examen estandarizado. En contraste, el modelo revela que es posible lograr mejoras significativas del rendimiento académico cuando algunos de esos vacíos de conocimiento se resuelven adecuadamente. Se despliega una metodología para diseñar instrumentos de evaluación adaptativa, precisos y confiables que permiten identificar, cuantificar su magnitud y remediar oportunamente esas lagunas de aprendizaje. Se define itinerarios de aprendizaje personalizado para cada estudiante, optimizando su tiempo de recuperación.

Palabras clave: *modelo matemático, vacíos de conocimiento, Habilidades Elementales,diagnóstico*

Abstract

It is shown that -even a slight- lack of mastery of elementary skills in a school subject, can have a devastating (and seemingly paradoxical) effect on the academic achievement of a student subjected to a standardized test. In contrast, the model reveals that it is possible to achieve significant improvements in academic performance when some of those learning gaps are appropriately addressed. A methodology to design adaptive, accurate and reliable assessment tools to identify, quantify its magnitude and timely remedy these learning gaps is deployed. Using a micro managed repository of digital learning objects personalized learning paths are defined for each student, optimizing their recovery time.

Keywords: *mathematical model, learning gaps, elementary skills, assessment*

PREDICCIÓN DEL DESEMPEÑO ACADÉMICO

Consideraciones Generales del Modelo

Exhibimos un modelo que permite cuantificar la dependencia del desempeño académico de un estudiante, en términos de su nivel de conocimiento y de la complejidad de los problemas que constituyen el instrumento de evaluación. Ello posibilita demostrar que presentar un examen dominando la mayoría de (pero no todas) las Habilidades Elementales, puede tener un efecto inesperadamente devastador en el desempeño académico.

Adicionalmente, para fijar ideas, el enfoque se especializa al caso de una materia genérica de corte matemático, aunque como se verá, los conceptos, las definiciones y las conclusiones aquí descritas pueden ser generalizados a otras áreas del conocimiento.

Habilidades Elementales.

El concepto de Habilidad Elemental[xi] (HE) es amplio y ha sido introducido previamente (Hojman, D. y Hojman, R., 2015). Para alumnos de Educación Básica podrían ser cosas como saber sumar números de un dígito, sin reserva. O, saber sumar números de dos dígitos con reserva. Para un estudiante de Educación Media podría ser: saber desarrollar el cuadrado de un binomio. O saber resolver ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios. De ese modo, para resolver una ecuación de 2° grado específica se podría requerir dominar varias Habilidades Elementales, como por ejemplo: (1) conocer la fórmula general de resolución de ecuaciones de 2° grado; (2) saber interpretar los parámetros que aparecen en ella; (3) saber sumar fracciones; (4) saber extraer la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto; (5) conocer el criterio por el cual solo una de las raíces es elegible.

Al resolver un examen (real) de selección para ingresar a la Educación Superior (SAT, Saber, EXANI, PSU), es posible comprobar que - típicamente - los problemas propuestos pueden requerir del dominio de entre una y seis Habilidades Elementales para resolverlos correctamente (en el ejemplo del párrafo anterior se requiere el dominio de cinco Habilidades Elementales).

El número de Habilidades Elementales requeridas para resolver un problema (que llamamos genéricamente *h*) va aumentando a medida que se avanza en los niveles escolares, y en cursos avanzados (en Educación Media, por ejemplo) aparecerán problemas que requieren del dominio de 1, 2, 3 o más Habilidades Elementales para su correcta resolución. La variable *h* se puede entender como una medida de la complejidad de resolución de un problema.

Es posible demostrar que conviene tratar al número de Habilidades Elementales requeridas como una variable continua (aunque estrictamente *h* es una variable discreta), porque de esa forma es posible modelar la variabilidad de la dificultad de resolución que tienen los problemas de un determinado nivel escolar, como un promedio.

Logro

Supongamos que para cursar una materia (o para rendir un examen) del tipo descrito, es necesario resolver cierta cantidad de problemas, sea en diferentes exámenes parciales durante el período lectivo o en un examen final. Para la resolución de los problemas propuestos es necesario (o conveniente) poseer y dominar varias habilidades, competencias o contenidos previos, que hemos llamado, genéricamente, Habilidades Elementales.

Consideremos el conjunto de las *N*Habilidades Elementales que debiera dominar un estudiante adscrito a un determinado nivel. Consideremos por otro lado el conjunto de las *K*HabilidadesElementales que el estudiante efectivamente domina.

Hagamos una estimación del número de problemas diferentes que se pueden formular combinando esos *N*HabilidadesElementales en grupos de 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. y llamemos Q a ese número. Enseguida analicemos cuántos de esos problemas podrían ser resueltos por un estudiante que sólo domina una parte $K(<N)$de las HabilidadesElementales utilizados en la construcción de dichos problemas. Llamaremos Q_K al número de problemas que ese estudiante puede resolver correctamente.

[xi] Elemental se usa aquí en el sentido de básico; no de simple.

Definimos el logro *R* de un estudiante como la razón entre el número de problemas Q_K que es capaz de resolver y el número de problemas Q que es posible construir a partir del conjunto de Habilidades Elementales de ese nivel de la manera descrita. Es decir, $R = \frac{Q_K}{Q}$

Esto una generalización de la forma usual en que calificamos *ex post* a un estudiante cuando presenta un examen. En ese caso decimos que su porcentaje de logro es el número de preguntas que resuelve correctamente dividido en el número total de preguntas del examen. Aquí estamos proponiendo calificarlo *ex ante*, o dicho de otra manera, estamos intentando predecir su logro suponiendo el dominio de una cartera de Habilidades Elementales.

El Logro como función del Conocimiento y de la Complejidad

Es posible demostrar que si:

N es el número de Habilidades Elementalesque se evalúan en un examen;

$h(\ll N)$es el número de Habilidades Elementalesrequeridas para resolver un problema (por el momento supondremos que es el mismo número para todos los problemas) y

K es el número de Habilidades Elementalesque domina un estudiante cualquiera,

entonces el Logro *R* de ese estudiante definido anteriormente está dado por,

$$R_K = \frac{Q_K}{Q} = \frac{K! \cdot (N-h)!}{N! \cdot (K-h)!}$$

Y en el caso en que la variable h es continua,

$$R_K = \frac{\Gamma(K+1)}{\Gamma(N+1)} \cdot \frac{\Gamma(N+1-h)}{\Gamma(K+1-h)}$$

dondeΓ es la función Gamma, por lo que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$.

En las expresiones encontradas, cuando $K = N$, (es decir,cuando el estudiante domina todas las Habilidades Elementales requeridas para resolver correctamente todos los problemas), entonces $R_N = 1$, es decir el Logro resultaría ser 100%, como era de esperar.

Para tener una visión más patente del comportamiento de R_K, veamos cómo varía en función de *K* para varios valores del parámetro *h*.

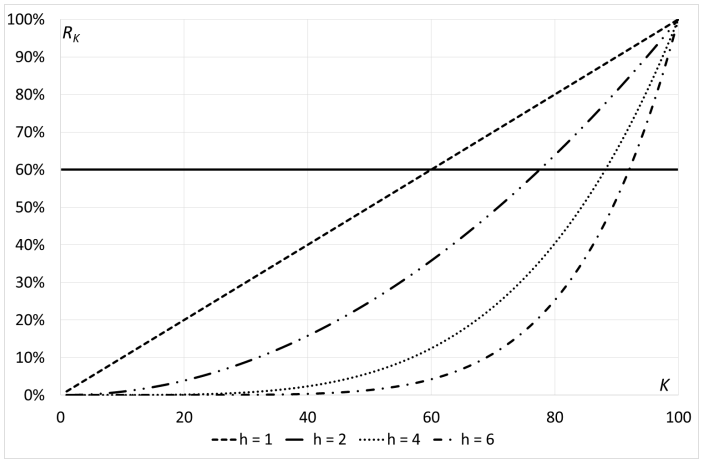


Figura 1. Logro (R_K) en términos de K, para diferentes niveles de complejidad (h)

Notemos que para alcanzar un 60% de Logro (línea horizontal en el diagrama), salvo para $h = 1$, no basta con dominar el 60% de las Habilidades Elementales, como se podría equivocadamente suponer, sino que hay que dominar el 77%, el 88% o el 92% de los Habilidades Elementales según si h (el número de Habilidades Elementales requeridas para resolver correctamente un problema) es 2, 4 o 6.

Dado que el Logro cuando se desconoce unahabilidad elemental (es decir cuando $K = N - 1$) está dado por $R_{N-1} = \left(1 - \frac{h}{N}\right)$, es posible observar que al carecer sólo de unahabilidad elemental del total de las N requeridas, es decir cuando la proporción de vacíos de conocimiento es apenas $1/N$, el Logro disminuye en h/N; es decir, la disminución del Logro es h veces mayor que la proporción de vacíos de aprendizaje, donde $h\ (\geq 1)$ es el número de Habilidades Elementales requeridas por problema y N es el número total de Habilidades Elementales. A modo de ejemplo, si $N = 100$ y $h = 5$, desconocer sólo una de las Habilidades Elementales de las cien requeridas, es decir un 1% de desconocimiento, castiga el Logro en un 5%.

Contrariamente a lo que se podría pensar, esto es más bien una constatación optimista, dado que un diagnóstico preciso y confiable de los referidos vacíos de conocimiento, seguido de un proceso personalizado de aprendizaje coherente con el diagnóstico, puede revertir la situación detectada en lapsos de tiempo inesperadamente breves.

Simulación computacional

Para verificar la validez del modelo teórico se montó un modelo computacional (Miller, J. & Page, S., 2007) que simula un examen de diagnóstico presentado por un grupo de estudiantes de los cuales se conoce de antemano su portafolio de Habilidades Elementales dominadas. La simulación considera un grupo de 10.000 estudiantes dotados del dominio de un número variable de Habilidades Elementales (entre 0 y 100). La asignación de Habilidades Elementales es aleatoria, pero ateniéndose a varias formas de distribución de frecuencia para verificar la robustez de los resultados. De esa manera puede haber en el grupo varios estudiantes que dominan –por ejemplo– 18 Habilidades Elementales, pero ninguno de ellos tiene las mismas 18 Habilidades Elementales que otro.

El examen de diagnóstico simulado cuenta con 75 problemas tales que cada uno de ellos exige el dominio de exactamente 5 Habilidades Elementales para su resolución, del total de 100 Habilidades

Elementales requeridas para presentar el examen diagnóstico y de modo tal que no hay dos problemas que requieran de la misma quina de Habilidades Elementales para su resolución.

En esta versión de la simulación entendemos que cuando un estudiante debe resolver un problema que sólo contiene Habilidades Elementales que domina, entonces *siempre* lo resuelve correctamente, y por el contrario, cuando intenta desarrollar un problema que requiere de al menos un habilidad elemental que desconoce, entonces *nunca* lo resuelve correctamente. Este supuesto es frecuentemente correcto cuando los problemas formulados son con respuestas de selección múltiple, pero es aún más fuerte cuando las respuestas son del tipo rellenar una casilla (*fill in the blanks*).

Es dable incorporar al modelo la posibilidad que el problema lo resuelva sin tener todas las Habilidades Elementales requeridas para ese problema o por el contrario, que encuentre una respuesta incorrecta aún dominando todas las Habilidades Elementales requeridas.

El acuerdo entre el modelo teórico y el modelo computacional es muy alto: la diferencia absoluta entre las predicciones teóricas y la simulación para el promedio de los porcentajes de logro no supera un punto y medio porcentual.

ACUMULACIÓN DE VACÍOS DE CONOCIMIENTO

El currículo escolar establece que al terminar cada grado, idealmente un estudiante debería dominar cierta cantidad de Habilidades Elementales. Sin embargo, por diferentes razones, los estudiantes –en general– no llegan a dominar todas las Habilidades Elementales de ese nivel, de manera que en todos los niveles escolares se van generando vacíos (lagunas) de conocimiento.

Clasificaremos el origen de los vacíos de conocimiento en tres tipos: (1) administrativo o de gestión: tales como ausencia del docente, inasistencia del estudiante (por enfermedad u otro motivo), distracción momentánea, suspensión de clases, desconocimiento del contenido por parte del profesor, etc.; (2) limitación de la capacidad propia de cada alumno; (3) causal: cuando hay Habilidades Elementales con prerrequisitos del período académico anterior que no llegaron a ser dominados.

Si μ es el porcentaje de Habilidades Elementales no dominadas por razones puramente administrativas; ρ es el porcentaje de Habilidades Elementales no dominadas por razones imputables a la limitación de capacidad; y β es el porcentaje de las Habilidades Elementales de cada nivel que están fuertemente construidos sobre Habilidades Elementales del año anterior, entonces es posible demostrar –suponiendo que μ y β no varían de un año al siguiente– que el porcentaje de Habilidades Elementalesno dominadas crece año a año de modo que su valor durante el año *l* es:

$$\Delta K_l = (\mu + \rho)\,\frac{1-\beta^l}{1-\beta}.$$

Es decir, a menos que se introduzcan elementos que reviertan el proceso, año a año la fracción de aprendizajes que cada estudiante no logra dominar, aumenta de acuerdo a la expresión de ΔK_l encontrada.

EXAMEN DE DIAGNÓSTICO Y DETECCIÓN DE VACÍOS DE APRENDIZAJE

La inexistencia de una métrica adecuada para determinar con detalle y precisión el bagaje cognitivo de un estudiante, en conjunción con la ulterior pérdida de visibilidad de la riqueza de la información

capturada como consecuencia de la agregación de los resultados individuales, son los principales causantes de la alarma con que se analizan y difunden los resultados nacionales e internacionales de los test estandarizados. Los mismos hechos inducen a que tanto directivos de los propios establecimientos educacionales que participan en la medición como autoridades locales y nacionales de educación, emitan declaraciones o adopten medidas supuestamente paliativas, que no tranquilizan a la opinión pública ni resuelven el problema de fondo.

Diseñamos un examen de diagnóstico a la usanza de los utilizados en diseño experimental (Brown, A.L. 1992; Cobb, P. *et al*, 2003; Collins, A. *et al*, 2004). Para efectos de modelar el proceso de evaluación de un estudiante, diremos que el estado de dicho estudiante al momento de presentar el examen está definido como una pauta de cotejo de las *N*Habilidades Elementales que se van a evaluar y que las ordenamos arbitrariamente de 1 a *N*. Sólo hay dos alternativas posibles para cada habilidad elemental: la domina (en cuyo caso le asignamos el valor 1) o la ignora (le asignamos el valor 0). De esa manera, el estado del estudiante (aún desconocido) quedaría matemáticamente definido por una cadena ordenada de ceros y unos. En lenguaje matemático se trata de un vector $\vec{X}$, que antes de presentar el examen desconocemos y es justamente lo que queremos determinar una vez que conozcamos el resultado de su examen.

Por su parte, los problemas que conforman el instrumento de diagnóstico también se pueden codificar como una cadena de ceros y unos; estos últimos señalan cuáles son las Habilidades Elementales que se requiere dominar para su correcta resolución. Los problemas en conjunto definen un arreglo bidimensional de números. Matemáticamente se trata de una matriz Hconocida, cuya construcción ilustramos a continuación.

En este ejemplo el examen diagnóstico consta de 75 problemas y está diseñado para evaluar 100 Habilidades Elementales (HE varía entre 1 y 100).

De esa forma, en el ejemplo señalado, para su correcta resolución, el problema 2 requiere del dominio de las Habilidades Elementales 1, 3, 4…y 100. Y no requiere del dominio de las Habilidades Elementales 2, 5,…y 99.

HE →	1	2	3	4	5	…	…	…	100
Problema ↓									
1	0	0	1	0	0	…….	…….	1	1
2	1	0	1	1	0	…….	…….	0	1
.	.	.	.	.	.	…….	…….	…….	.
j	0	0	0	0	0	1	0	…….	…….
.	.	.	.	.	.	…….	…….	…….	.
75	1	1	0	0	1	…….	…….	…….	0
Total	20	20	18	15	12	…….	5	…….	3

Figura 2. Representación matricial del Examen de Diagnóstico en el que cada problema se ha representado como una secuencia de 1's y 0's dependiendo de si para su correcta resolución se requiere o no, dominar una Habilidad Elemental.

Contando el número de 1's en cada columna es posible saber en cuántas oportunidades se requiere el dominio dela Habilidad Elemental correspondiente a esa columna. En el ejemplo, el dominio delaHabilidadElemental 1 se requiere para la resolución de 20 problemas, mientras que el dominio delaHabilidadElemental 100 se requiere para la resolución de solo 3 problemas.

El resultado obtenido por el estudiante al rendir el examen también se puede representar como una cadena ordenada de números, que matemáticamente corresponden a un vector que denotaremos por $\vec{r}$.

Diagnosticar con precisión las Habilidades Elementales que domina un estudiante (y complementariamente sus vacíos de conocimiento) se reduce a resolver un conjunto ecuaciones. Hay tantas ecuaciones como problemas tenga el examen de diagnóstico; las incógnitas son la condición cognitiva del estudiante al momento de presentar el examen. Matemáticamente ello se expresa como una ecuación del tipo $H\vec{X} = \vec{r}$, donde H es la representación matricial del examen de diagnóstico; $\vec{X}$ es el vector que queremos determinar y representa la condición de las Habilidades Elementales del estudiante al rendir el examen y $\vec{r}$ es un vector conocido que se construye a partir del resultado del examen.

Haciendo uso de un algoritmo definido para tal propósito, es posible automatizar la construcción de una evaluación de diagnóstico precisa, (DCSF, 2009) en la medida que se hayan definido con claridad sus objetivos y se disponga de un repositorio suficientemente robusto de ítems, digitalizados y apropiadamente mapeados con las Habilidades Elementales. Del mismo modo es posible determinar con mucha precisión el conjunto de Habilidades Elementales que un estudiante no domina.

Los itinerariospersonalizados de aprendizaje se construyen sobre un repositorio gestionado de objetos digitales personalizados de aprendizaje en diferentes formatos y modalidades, que complementan el trabajo del docente, nivelando continuamente y en tiempo real a los alumnos que presentan rezagos de aprendizaje.

CONCLUSIONES

Desarrollando un modelo teórico que toma en consideración las HabilidadesElementales que domina un estudiante y los compara con los HabilidadesElementales necesarias para presentar un examen, se muestra que los vacíos de aprendizaje tienen un efecto altamente no lineal en los niveles de logro.

El rendimiento preciso del estudiante depende del nivel de complejidad de la materia que está cursando, en el sentido que a mayor complejidad mayor es el número de Habilidades Elementales que se requiere para resolver correctamente un problema.

A modo de referencia, el nivel de desempeño de un estudiante que posee un 80% de las Habilidades Elementalesrequeridas para presentar un examen, podría llegar a ser tan bajo como 50% o aún menor. Si su dominio alcanza el 60% de las Habilidades Elementales, su resultado seguramente será inferior al 20%.

El efecto, aparentemente paradojal, se produce porque unaHabilidad Elemental que no se domina, puede malograr varias preguntas para las cuales es necesaria su utilización. La buena noticia es que un diagnóstico preciso, es decir la identificación detallada de los vacíos de conocimiento, permite definir un itinerario personalizado de aprendizaje que remedie rápida y efectivamente dichos vacíos, con el consiguiente impacto en el desempeño.

Los resultados usualmente difundidos en las evaluaciones estándar, sean estas domésticas o internacionales, son extremadamente limitados, en el sentido que entregan el resultado individual de quienes presentan la evaluación o resultados agregados por institución educativa, distrito, estado, región o país. Los estudiantes, los maestros, los directivos institucionales y los organismos encargados de definir las políticas educativas y de asignar recursos, se quedan con una visión incompleta y en ocasiones distorsionada de la realidad.

Pueden existir razones muy diversas para que dos estudiantes tengan un nivel de desempeño pobre en un tópico, por específico que este sea. Un estudiante puede que no sepa amplificar números quebrados (fracciones) y el otro que no sepa sumarlos. Más compleja es la situación cuando se trata de cursos completos, o de evaluaciones regionales o nacionales.

Sin embargo, gracias a tecnología ya disponible, es posible obtener información muy refinada, oportuna y automática de los niveles de aprendizaje de los exámenes aludidos. Mucho más precisa puede ser la información recabada de un examen de diagnóstico si ha sido apropiadamente diseñado para ello. El monitoreo frecuente permite tener no sólo una, sino múltiples fotografías del desempeño de cada estudiante a lo largo del tiempo y atender sus necesidades individuales en cada momento, respetando su ritmo y su estilo de aprendizaje.

El procesamiento de la información, tanto a nivel individual como agregado, usando herramientas automáticas similares a las de inteligencia de negocios (BI), posibilita adoptar medidas muy eficientes para remediar los vacíos individuales y colectivos.

Por el contrario, si no se detectan oportunamente los vacíos de aprendizaje, ellos se van acumulando en el tiempo en un efecto cascada, dado que sobre ciertas Habilidades Elementales se construyen otras nuevas: la ausencia de las primeras inhabilita la adquisición y el dominio de las siguientes.

La situación es más fácil de salvar de lo que parece a primera vista. Ello porque la detección en tiempo real y precisa de los vacíos de conocimiento posibilita una intervención oportuna y eficaz.

Educación Universal de Calidad

De acuerdo a la definición de UNICEF, las condiciones básicas para la educación de calidad, incluyen estudiantes sanos, bien alimentados apoyados en el aprendizaje por su familia y la comunidad, en ambientes sanos, seguros y protectores; con los recursos e instalaciones adecuadas, con profesores debidamente capacitados que usan metodologías centradas en el alumno y cuyos resultados son conocimientos, habilidades y competencias apropiadas para los propósitos nacionales y una participación positiva en la sociedad (UNICEF, 2000).

En este artículo se muestran los elementos para que grupos masivos de estudiantes (e idealmente la totalidad), en la medida que se satisfagan las condiciones descritas por UNICEF, tengan la oportunidad de alcanzar los conocimientos, habilidades y competencias requeridas para los aludidospropósitos nacionales y participación positiva en la sociedad.

Dada la eficiencia del sistema expuesto para alcanzar los aprendizajes esperados curriculares, el tiempo de estudiantes y docentes se torna más holgado y es posible incorporar otros elementos constitutivos de la educación de excelencia, como el espíritu crítico, la capacidad de expresarse y exponer con claridad las ideas propias y el trabajo colaborativo, entre otras. En otro artículo mostraremos cómo es posible también ocuparse eficientemente de algunos de los aspectos aludidos (Hojman & Hojman, 2015).

Referencias

Brown, A.L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 141–178.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, Vol. 32, No. 1, pp. 9-13

Collins, A., Joseph, D. & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*: 13(1), 15–42.

DCSF, Department for Children, Schools and Families UK (2008). *The assessment for Learning Strategy*.

Hojman, D. y Hojman, R. (2015, en preparación). *Faraway, so close: A quantum theory of knowledge and complexity*.

ICFES, Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (extraído el 24 de abril de 2014) *Presentación de Exámenes* http://www.icfes.gov.co/examenes/pruebas-saber/objetivo

JUNAEB, Junta Nacional de Auxilio Escolar y Becas (extraído el 24 de abril de 2014) *Atlas de Vulnerabilidad*http://www.edinetwork.net/w8/z/017/index.asp?seccion1=contenido&id_web=256&sec=3&id_articulo=

Miller, J. & Page, S. (2007) *Complex Adaptive Systems: An Introduction to Computational Models of Social Life*, Princeton University Press.

Myung, Jay I., Cavagnaro, Daniel R. & Pitt, Mark A. (2013) A tutorial on adaptive design optimization, *Journal of Mathematical Psychology*, 57(3–4), pp 53-67.

UNICEF, United Nations Children's Fund (2000) *Defining Quality in Education.*

LA IMPORTANCIA DE LA PRÁCTICA EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

Theimportance of practice during the mathematics teacher training.

Zamorano-Vargas, A,

Universidad de Tarapacá; azamoranov@uta.cl

Resumen

La práctica de la enseñanza de las matemáticas es un área de investigación relevante para la formación del profesorado. En esta comunicación se presentan las ideas fundamentales de su importancia y su relación con el quehacer cotidiano del profesorado. Para ello se analizaron clases de matemáticas bajo la mirada de aquellas situaciones no planificadas (contingentes). El análisis se realizó siguiendo las características de las situaciones contingentes y la incidencia del conocimiento matemático para la enseñanza en la gestión de la práctica, y se concluye que un profesor o profesora con mayor conocimiento puede responder de manera pertinente a la contingencia y generar aprendizajes efectivos.

Palabras clave: *práctica de la enseñanza, contingencia, conocimiento del profesorado, formación de profesores.*

Abstract

The practice of teaching in mathematics is an area of research relevant for the training of teachers. In this paper the fundamental ideas of its relation to the daily work of teachers. Were analyzed math classes under the theorical framework of contingency situations. The analysis was performed according to the characteristics of contingency and the incidence of mathematical knowledge for teaching in management practice, and concludes that a teacher with more knowledge can respond in an appropriate manner to contingency and create effective learning.

Keywords:*Teaching practice, contingency, teacher knowledge, teacher training.*

INTRODUCCIÓN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

Tal como describe Ponte (2014), la formación del profesorado de Matemáticas es un campo de estudio multifacético. Indica que la formación se desarrolla en diferentes lugares y se ocupa de todas las etapas y roles de la profesión de los futuros profesores en las diversas etapas de su formación. También menciona que la formación se da en procesos de aprendizaje –incluso informales- durante la carrera profesional de un profesor o profesora. Por esta razón el estudio de la práctica de los docentes es un tema de vital importancia para la enseñanza de las matemáticas.

Grossman, Compton, Igra, Rönfeldt, Shahan y Williamson (2009), destacan que aunque es declarada la importancia de la formación sobre la práctica de la enseñanza, existe un bajo número de cursos que tomen en cuenta la práctica clínica en la academia.

En países de reconocidos altos resultados, la práctica es fundamental (Darling-Hammond y Rothman, 2011). Por ejemplo en Ontario, Canadá, la práctica está presente en todas las etapas de la profesión que involucra a los futuros profesores (practicantes). Existe una fase de inducción que incluye los procesos informales de aprendizaje y que tienen lugar durante toda la vida útil de la carrera del profesorado. También está relacionado con los programas y planes de estudio y los

recursos utilizados para la práctica y que son parte de la formación, tal como las políticas y evaluaciones nacionales e internacionales de formación del profesorado.

Teniendo en cuenta la importancia de la práctica y de su estudio, es que este reporte muestra el desarrollo de una investigación que tuvo como objetivo general analizar situaciones de contingencia y la incidencia del conocimiento matemático para la enseñanza del profesor para su gestión y así específicamente, interpretar la gestión que el profesorado lleva a cabo de estas situaciones de contingencia a partir de su conocimiento.

La enseñanza como profesión

Para hablar de la enseñanza como profesión tomamos las ideas de Hargreaves y Fullan (2014):

> "La docencia no es fácil; es difícil. Como la odontología o la arquitectura, no es algo que podamos inventar por el camino o llevar a cabo siguiendo unas normas. Esto no niega que determinadas partes de la profesión, al igual que en otras, puedan ser fácilmente captadas por las personas con una buena capacidad y una mínima formación." (pág. 106)

Hasta ahora la mayor parte de la formación del profesorado está centrada en contenidos –necesarios para la profesión- que no solo forman parte del ser profesor, sino también de otras áreas de conocimiento como en nuestro caso forma parte de la formación de los matemáticos, los ingenieros, los físicos, entre otros. Además, los profesores recién egresados son capaces de mantener el orden y la disciplina y, además de utilizar algunas estrategias para la enseñanza, pero si se les pide innovación o que adapten su enseñanza a diferentes estilos de aprendizaje o que usen la evaluación como un diagnóstico útil para la mejora de los aprendizajes, es altamente probable que tengan dificultades (Hargreaves y Fullan, 2014)

Estos autores también realizan una comparación entre el capital empresarial versus el capital profesional. Indican que el capital empresarial se alimenta y nutre de los estereotipos desgastados de los maestros y la enseñanza: la enseñanza es un don precioso que poseen algunos maestros dotados; es una lista de técnicas sencillas que pueden ser prescritas y ser pautas para que maestros con mínima formación y remuneración modesta pueden ejecutarlas de manera satisfactoria; una llamada sagrada de servicio y sacrificio a la comunidad para el bien común, una vocación, donde su contribución emocional, espiritual y social debe guiar su esfuerzo. En cambio, si nos centramos en el capital profesional, necesariamente entenderemos la enseñanza como profesión, donde existe tanto el:

> "capital colectivo como individual de la profesión para ser más efectivo en su lucha para mejorar el aprendizaje y los logros de todos los estudiantes, desarrollar su bienestar y su carácter, y cerrar la brecha entre aquellos que proceden de entornos favorecidos y desfavorecidos" (Hargreaves y Fullan, pág. 35).

Entonces, para una docencia efectiva el profesorado deberá recibir una formación integral y que también tenga repetidos procesos de práctica que le permita conocer la realidad no solo de la sala de clases, sino del sistema educativo. Por tanto, la enseñanza efectiva lleva años para ser perfeccionada antes de alcanzar estatus de profesional.

En este sentido, una de las líneas de investigación que en educación matemática ha tomado mayor notoriedad en la última década es el crecimiento profesional de los docentes y la mejora de la práctica en el aula. Esto ha traído como consecuencia la creación de revistas especializadas sobre el profesorado, el Journal of Mathematics Teacher Education y la revista Mathematics Teacher Education and Development, que nacen para evidenciar la alta investigación que se produce (Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna, 2005). En el caso de nuestra investigación, seguimos la línea de la indagación sobre la práctica del profesorado de matemáticas.

Para esto nos guiamos por las ideas de Ball, Thames y Phelps (2008) sobre los conocimientos que se ponen en juego mientras se enseña, el Mathematical Knowledge for Teaching y en particular

analizamos una parte de la práctica, la Contingencia, siguiendo las ideas de Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) y del Knowledge Quartet.

El mathematical knowledge for teaching (MKT)

Ball et al. (2008) muestran un estudio que se centra en la tarea de enseñanza y se preguntan, qué necesitan hacer los profesores en la enseñanza, y qué tipo de demandas de razonamiento, comprensión, entendimiento y habilidad deben poner en juego en esos momentos.

De este extenso y exhaustivo análisis desarrollaron una teoría basada en la práctica de los conocimientos que se utilizan y forman parte de la enseñanza de las matemáticas, el MKT, conocimiento matemático para la enseñanza.

Este conocimiento fue organizado y descrito en torno a dos grandes dominios, el Conocimiento de la Materia y el Conocimiento didáctico del contenido, que constituyen dos dominios fundamentales y que a su vez se dividen en tres subdominios cada uno:

- El Conocimiento de la Materia, constituido por el Contenido común del conocimiento (CCK), el Conocimiento especializado del contenido (SCK) y el conocimiento del horizonte matemático (HCK).
- El Conocimiento Didáctico del Contenido, constituido por otros tres subdominios, el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), el conocimiento de los contenidos y la enseñanza (KCT) y por último el conocimiento pedagógico del contenido y el currículum (KCC).

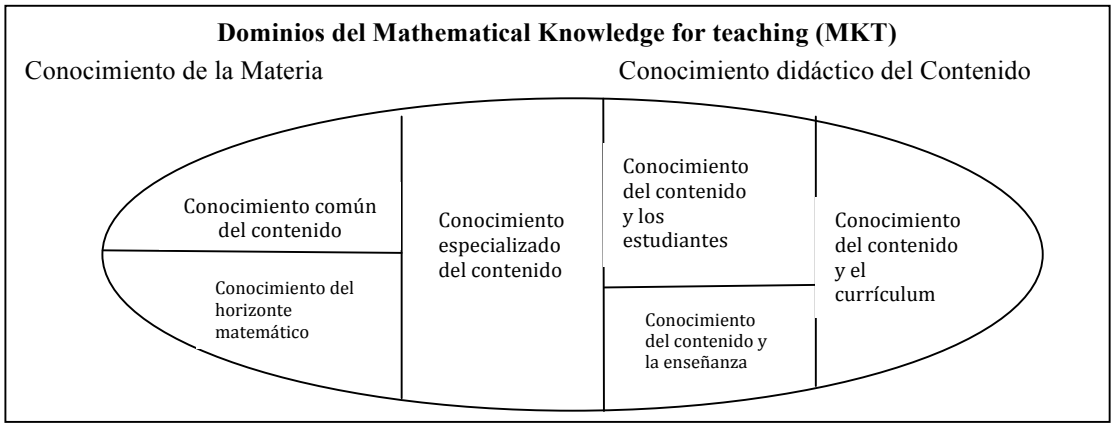


Fig. 1: Dominios del conocimiento matemático para enseñar. Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 403.

El knowledge quartet

Uno de los referentes para la enseñanza de las matemáticas es Rowland y su equipo en la Universidad de Cambridge. Estos investigadores comenzaron a investigar acerca de cómo el conocimiento de los profesores de matemáticas se hace visible durante sus clases. Su investigación buscó detectar si aquellos profesores que poseían un alto conocimiento de la materia lograban hacer una enseñanza de las matemáticas elementales diferentes y si esto era observable en su práctica. De la observación de la práctica construyeron lo que denominaron el Knowledge Quartet (KQ) (Rowland et. al, 2005), que está compuesto por cuatro dimensiones: Fundamentación; Transformación; Conexión; yContingencia.

Para el desarrollo de esta investigación se utilizó la Contingencia, que se presenta en situaciones de enseñanza dentro de la sala de clases y que son casi imposibles de planificar. También se entiende como la capacidad de asistir a los alumnos de manera improvisada a sus preguntas, demandas o reacciones. Es únicamente visible en el aula, ya que se desarrolla principalmente por la interacción entre alumnos y profesor. En definitiva trata de la posibilidad de desviarse de lo planeado y responder a las demandas de los alumnos mientras se enseña matemáticas.

Los últimos trabajos realizados en torno al KQ, muestran la relación entre las cuatro categorías:

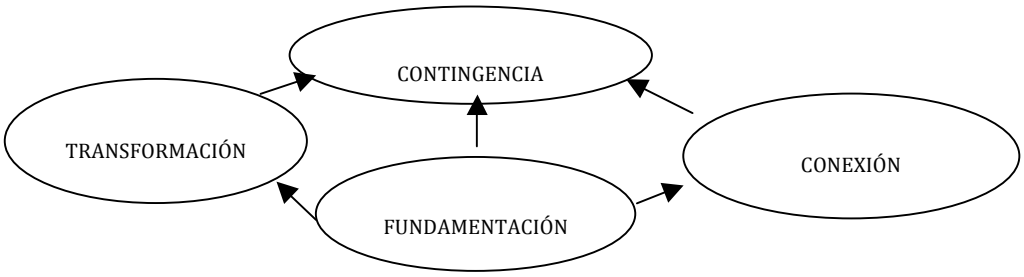


Fig 2: The Knowledge Quartet. Extraído de www.knowledgequartet.org.

La contingencia, la parte genuina de la práctica del aula.

Las situaciones de contingencia se relacionan con lo que Mason y Spence (1999) describen como "el saber y el actuar en el momento". Rowland, Thwaites y Jared (2011) describen que las situaciones de contingencia surgen porque el profesor no puede anticiparse a todos los momentos de la lección y es necesario someterse a un cierto tipo de improvisación. Agregan que estas situaciones contingentes son más difíciles de prever en los profesores noveles y que profesores con mayor experiencia pueden responder de mejor manera a lo no planificado.

Otro aspecto de las situaciones de contingencia, es que la mayoría de estas situaciones se activan mediante contribuciones inesperadas de los alumnos, y que el profesor responde ya sea ignorando, reconociendo pero dejando a un lado, o bien reconociendo e incorporando. Rowland, et al (2011), indican que la contingencia es desencadenada por tres tipos de eventos, que denominamos Desencadenantes de la Contingencia.

El primer desencadenante tiene relación a responder a las ideas de los alumnos, es decir, cuando el docente responde a las ideas y/o contribuciones de los alumnos mientras desarrolla la clase, es posible que no hubiese planificado algunas contribuciones que surgen de la interacción entre los alumnos o debido a la naturaleza de la tarea y por tanto debe improvisar durante la enseñanza.

El segundo desencadenante es iniciado por el propio docente. Se produce cuando durante la clase, producto de la reflexión, visualiza que alguna de sus acciones no está resultando como estaba planificado y debe modificar la tarea para hacerla adecuada y comprensible a sus alumnos. El tercer, y último, desencadenante es resultado de la no disponibilidad de algún recurso o herramienta para realizar la enseñanza y que exige hacer un cambio en la tarea previamente planeada.

Relación entre el MKT y el KQ.

Como vimos ambos modelos surgen del conocimiento del profesorado y se enfocan en la enseñanza de las matemáticas, y aunque tienen una raíz común, ellos buscan responder a preguntas diferentes, por un lado el KQ más que centrarse en los conocimientos se queda en la clasificación de las situaciones donde los conocimientos se movilizan y el MKT busca desarrollar el tipo de conocimientos que se utilizan mientras se enseña. Estos modelos son complementarios para la comprensión de las acciones y los conocimientos que se gestionan mientras se realiza la enseñanza de las matemáticas.

La relación entre los modelos fue desarrollada por Turner (2012), donde establece una correspondencia entre las categorías y los dominios de cada uno de los modelos.

Turner utiliza el KQ para apoyar a los profesores en la reflexión sobre los contenidos matemáticos de la enseñanza, además de ser una herramienta utilizada como un marco analítico para identificar el conocimiento matemático para enseñar a través de las observaciones de la práctica. Al realizar

este trabajo, se constató la necesidad de relacionar el KQ con el MKT y las ideas de Shulman, tal como se muestra en la tabla 1.

	Shulman (1986)	**Shulman (1987)**	**Ball, Thames y Phelps (2008)**
	Formas del conocimiento	**Categorías del conocimiento**	**Categorías del conocimiento**
Contingencia	Conocimiento estratégico (Esta es una forma de conocimiento que solo puede ponerse en juego en la acción de enseñar y que implica la toma de decisiones estratégicas adecuadas mediante el diseño de un estudio de casos de un conocimiento relevante)	Conocimiento de la Materia (SMK) Conocimiento pedagógico del contenido: Teórico y práctico	Conocimiento común del contenido (CCK) Conocimiento especializado del contenido (SCK) Conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) Conocimiento del contenido y los estudiantes (KCL)

Tabla 1. Relación MKT y KQ, según Turner (2012)

Metodología

Para la investigación seguimos el paradigma cualitativo, ya que como indica Stake (2007) los investigadores cualitativos "destacan la comprensión de las complejas relaciones entre todo lo que existe" (pág. 42). Dentro del paradigma cualitativo y siguiendo las ideas de la complejidad de la enseñanza es que optamos por utilizar el método del estudio de casos (Yin, 2006), que nos permitirá dar a conocer una mejor comprensión de los casos estudiados y una mejor interpretación de partir de los marcos teóricos que sostienen la investigación.

Para la obtención de los datos de esta investigación se videograbaron clases de matemáticas en centros educativos públicos de la ciudad de Barcelona en España.

Variados autores indican lo problemático de realizar un análisis de las acciones que desarrolla el profesorado mientras enseña. Schoenfeld (2013) menciona que cuando se analiza la práctica se debe considerar la complejidad de la diferenciación de las dimensiones de la enseñanza y que debe realizarse mediante un análisis reiterado de las actividades, ya sea en episodios aislados o en secuencias anidadas de episodios. Y además, comprendemos que el análisis de la práctica no se realiza mediante la mera observación y por tanto no solo se puede realizar en situaciones escolares en tiempo real (Ball y Cohen, 1990).

Para el análisis de la práctica la disgregamos en unidades menores que denominamos episodios de enseñanza. Los episodios tienen la característica de ser situaciones de contingencia y que para ser analizados se transformarán en nuestros casos de estudio. Los casos están determinados por un claro inicio y un claro final: el inicio del caso está dado por el desencadenante de la contingencia (Rowland et al, 2011) y su término está dado por el término o el cambio definitivo de la tarea realizada y que propició el desencadenante de la contingencia. De esta manera el caso comienza con un desencadenante y finaliza con el término de la tarea y así puede retomar la planificación de la clase que fue desviada por la aparición de la situación contingente.

En esta comunicación mostraremos el análisis de un caso que es desencadenado por las ideas de los alumnos, que nos parecen los más interesantes por la gestión que debe realizar el profesorado.

Análisis de los datos

Para el análisis de los casos, individualizamos el curso donde se desarrolló, el nombre del profesor, la unidad trabajada, el tema de la clase y la duración del caso analizado; a continuación, describimos el desencadenante de cada caso y la gestión realizada por el profesorado.

Cuando observamos nuestros casos es que detectamos una gran diferencia entre el tiempo de duración de cada uno de ellos y decidimos observar por qué unos eran más extensos que otros. En los casos de corta duración detectamos que existía un solo desencadenante de la contingencia y además se producía una interacción menor ya sea entre alumnos o entre profesor y alumnos. Por el contrario, es aquellos casos de mayor duración se desarrollaba una mayor interacción, lo que provocaba que surgieran nuevas contingencia sin que las anteriores fueran resueltas. De esta manera, demarcamos las características de los casos en dos tipos de contingencia, las contingencias simples y las contingencias complejas. Las contingencias simples tienen como característica que son de corta duración, poseen un único desencadenante y una gestión que permite retomar rápidamente la tarea inicial y así termina el caso. Por otro lado están las contingencias complejas, donde se producen contingencias anidadas, es decir se produce la contingencia inicial, y antes de ser resuelta se produce una nueva contingencia con un desencadenante claramente identificable.

Análisis de un caso simple y resultados

La contingencia se origina en la respuesta del alumno a una pregunta dela profesora, a lo que ella responde reconociendo lo que dice el alumno e incorporándolo al desarrollo de la clase.

Nombre Caso:	**Curso:**	**Profesor:**
Regla de tres	Sexto de Primaria	Amalia
Unidad didáctica:	**Tema matemático:**	**Duración:**
Proporcionalidad	Regla de tres	1 minuto 53 segundos

1. A: Así que esto siempre lo pueden hacer así: 4 entradas valen 20, pues 50 entradas no sé. Y multiplico aquellos dos cruzados, los multiplico.

   ¿Ven que esto no está completo?

   Entonces los multiplico y los divido por la otra.

   ¿De acuerdo?

   ¿Lo entienden o no?
2. E1: Sí
3. E2: No
4. A: ¿No entienden esto?
5. E3: No
6. A: ¿Quién dice no? Fernanda. A ver, fijémonos…ah…Es que esto no sé cómo explicarlo
7. E1: Es muy fácil…
8. A: Sí, la mecánica sí. Tú por ejemplo tienes dos valores entonces se multiplican, es lo que se dice regla de tres. Pero a ver Fernanda, otra manera, es decir si 4 entradas valen 20, es lo mismo que eso, pero de una manera más rápida.

   Yo tengo, si 4 entradas valen 20, ¿Cómo averiguo que vale una entrada? Dividiendo 20 entre 4 y ¿qué sale?
9. E4: 5
10. A: Una entrada vale 5 y ahora, ¿Cuánto valen 50 entradas? Pues multiplico el 5 por 50 y nos da 250. Es lo mismo, ¿vale?

    Lo que pasa es que así lo hacemos de una manera más rápida, pero es lo mismo. Es decir cuánto vale una entrada, si 4 valen 20, pues una vale 5. Lo entiendes o ¿no?

Ahora si fuera de esta manera, lo multiplicamos en cruz y dividimos y ya está para hacerlo rápido.

La profesora resuelve el problema mediante la regla de tres, y pregunta a la clase si comprende el procedimiento ante lo que obtiene respuestas de Sí de No. Al parecer no estaba preparada para una respuesta de No, porque lo que ella indica que no sabe cómo explicarlo. Hace el intento de volver a explicar y vuelve al mismo problema, pero intenta resolverlo de una manera equivalente, ya que llegan al mismo resultado. Esta es una situación de contingencia, ya que luego de una pregunta de la profesora, una alumna responde indicando que ella no entiende el procedimiento. La profesora frente a esta respuesta decide incorporarla al desarrollo de la clase. Por tanto el desencadenante de esta contingencia es Ideas de los Alumnos, el alumno responde a una pregunta de la profesora y ésta decide incorporar esta duda al desarrollo de la clase.

Conocimiento matemático movilizado en el episodio

Este episodio trata de la tarea de resolver el problema de las entradas utilizando la regla de tres. Hasta ahora estaban resolviendo problemas de proporcionalidad reduciendo a la unidad, pero la profesora busca ampliar las estrategias de resolución, además de resolver de manera rápida y fácil.

La profesora mientras explica reduciendo a la unidad, utiliza implícitamente la comparación mediante razones y las operaciones que justifican la utilización de la regla de tres. Estas dos formas de resolución, permitió a los alumnos, comparar ambos procedimientos y decidir cuál de ellos era un procedimiento más fácil de aplicar y declaran en voz alta que es más fácil la regla de tres.

Generalmente el algoritmo de la regla de tres es un procedimiento que se utiliza en la resolución de problemas de proporcionalidad, en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que forman parte de una proporción y que permite calcular el valor del cuarto dato de la proporción, aunque a veces su utilización tiene como consecuencia la manipulación aleatoria de los números, además que no siempre se logra dar sentido a lo que se está resolviendo. Por otro lado, enmascara la naturaleza matemática del proceso de encontrar magnitudes proporcionales.

Conocimiento para enseñar del profesor

Conocimiento común del contenido, CCK. Según las características del conocimiento común del contenido, el profesor tiene un manejo de él, es decir, puede calcular el costo de las 50 entradas utilizando el algoritmo de la regla de tres, lo que quiere decir que puede realizar la tarea que pide a sus alumnos.

Conocimiento especializado del contenido, SCK. Este podría manifestarse cuando la alumna indica que no entiende el procedimiento de la regla de tres. La profesora pudo indicar que la regla de tres tiene su justificación en que son magnitudes proporcionales y de esta manera dar una explicación matemática al procedimiento, pero no se pudo evidenciar en este caso.

Conocimiento del contenido y la enseñanza, KCT. Este conocimiento se expresó cuando la profesora hizo una pausa en la clase para indicarle a la alumna que no podía profundizar en la idea matemática del uso de la regla de tres. Además, ella eligió y modificó un ejercicio de manera ad hoc para la utilización de la regla.

Conocimiento del contenido y los estudiantes, KCL. Este conocimiento se refiere a las concepciones y errores comunes que poseen los alumnos sobre la proporcionalidad. Un indicador de su presencia y utilización pudo manifestarse al anticipar lo que podría ser confuso. En este episodio no hay muchas evidencias del uso de este conocimiento, posiblemente porque la profesora no esperaba la respuesta recibida.

CONCLUSIONES

Una gestión de la práctica que entregue oportunidades de aprender a sus alumnos es lo que se espera de la enseñanza. En este caso la profesora intenta ayudar a la comprensión del problema y utiliza al menos dos formas diferentes de resolución, lo que permite que los alumnos interactúen en los diferentes procedimientos, para conocerlos y poder decidir en qué situaciones es mejor usar uno u otro.

El realizar este tipo de análisis permite detectar la dificultad de la práctica de la enseñanza y la utilidad para identificar lagunas de conocimientos que poseerían los profesores. En este caso podemos asegurar que en este caso la profesora no movilizó todos los conocimientos necesarios para la comprensión de los alumnos. Si seguimos perfeccionando el análisis de la práctica y específicamente de las situaciones de contingencia podríamos encontrar mejores herramientas y procedimientos para la formación profesional de los futuros profesores y una herramienta potente para la reflexión de los profesores en ejercicio, donde es meritorio reconocer las ideas de los alumnos y responder hábilmente a los alumnos para que estos creen nuevas conexiones y logren aprender.

Referencias

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. Educational Studies in Mathematics, 60, 359–381.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing Practice, Developing Practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice (pp. 3–32). San Francisco: Jossey Bass.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389–407.

Da Ponte, J. P. (2014). Mathematics teacher education as a multifaceted field of study.Journal of Mathematics Teacher Education, 17(6), 489–490.

Darling-Hammond, Linda, E., & Rothman, Robert, E. (Eds.).(2011). Teacher and Leader Effectiveness in High-Performing Education Systems. Washington, DC: Alliance for Excellent Education and Stanford Center for Opportunity Policy in Education.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E., & Williamson, P. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. Teachers College Record, 111(9), 2055–2100.

Hargreaves, A., & Fullan, M. (2014).Capital profesional (Primera ed.). Madrid: Editorial Morata. Retrieved from http://www.edmorata.es/libros/capital-profesional

Mason, J., & Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: the importance of knowing-to act in the moment. Educational Studies in Mathematics, 38, 135–161.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: the Knowledge Quartet and the Case of Naomi. Journal of Mathematics Teacher Education, 8(3), 255–281.

Rowland, T., Thwaites, A., & Jared, L. (2011).Triggers of contingency in mathematics teaching.In B. Ubuz (Ed.), Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 73–80). Ankara, Turkey: PME.

Schoenfeld, A. (2013). Classroom observations in theory and practice.ZDM. Springer-Verlag.

Stake, R. E. (2007). Investigación con estudio de casos. Madrid: Ediciones Morata.

Turner, F. (2012). Using the Knowledge Quartet to develop mathematics content knowledge: the role of reflection on professional development.Research in Mathematics Education, 14(3), 253–271.

Yin, R. K. (2006).Case study methods. In J. Green, G. Camilli, & P. Elmore (Eds.), Handbook of complementary methods in education research (pp. 111–122). Washington, D.C: American Educational Research Association.

ABORDAR LA CONTINGENCIA EN UNA GESTIÓN ARGUMENTATIVA DE LA CLASE DE MATEMÁTICAS)[xii]

Dealing with contingency in Mathematics Lessons through Argumentative Orchestration

Resumen

Consideramos que una gestión argumentativa de la clase promueve que se den situaciones de contingencia. Para dar evidencia de ello, describimos dos casos de clases de matemáticas que han sido diseñadas con una gestión argumentativa, y que el docente aborda situaciones de contingencia que han sido desencadenadas por errores de los alumnos. Como estrategia para analizar cómo se abordan las contingencias se han utilizado dos prácticas generativas (High Leverage Practices): "Elicitar e interpretar el pensamiento de cada alumno" y "Reconocer patrones particulares comunes del pensamiento de los alumnos", como resultado hemos encontrado que estas HLP son una herramienta eficaz para abordar las contingencias.

Palabras clave: argumentación en el aula de matemáticas, contingencia, prácticas generativas

Abstract

We consider that argumentative orchestration fosters the emergence of contingent moments in lessons. In order to provide evidence for this view, we describe two mathematics lessons designed to include argumentative orchestration and which involve contingent situations triggered by students' mistakes. Two High Leverage Practices (HLP) were used as a strategy for analyzing how contingency is addressed: "Eliciting and interpreting each student's thinking" and "Identifying specific common patterns in students' thinking". It was observed that these HLPs are an effective tool for addressing contingent moments.

Keywords: argumentation in Mathematics Lessons, contingency, High Leverage Practices

INTRODUCCIÓN

Entre las competencias que se declaran en currículos de matemáticas, una de ellas es el desarrollo de la argumentación. En clases donde se promueve la argumentación se genera un contexto de interacción y participación donde los alumnos son protagonistas y el profesor está receptivo para desarrollar la clase en función de las ideas de los alumnos que emergen.

En este contexto, consideramos relevante poner el foco en las situaciones de contingencia que se presentan en el aula y cómo las enfrenta el profesor. La contingencia hace referencia a situaciones imprevistas por el profesor que, en nuestras observaciones, son desencadenadas principalmente por intervenciones de los alumnos que expresan ideas erróneas. En una clase puede haber muchas situaciones que son inesperadas y es el profesor quien toma la decisión, en ese mismo instante, de ya sea seguir con su planificación tal como está diseñada o tratar la nueva situación. Si bien esto puede ocurrir en cualquier tipo de clase, consideramos que, en aquellas donde hay argumentación, esas situaciones se pueden dar con mayor frecuencia, porque el profesor, al buscar que aparezcan diferentes posturas acerca de un resultado o procedimiento, favorece la aparición muchas ideas de

[xii] Esta investigación ha sido financiada por el proyecto Fondecyt 11130675.

los alumnos, algunas de las cuales pueden no haber sido anticipadas. Ante ello, el profesor gestiona las situaciones de contingencia que se presentan en la búsqueda del desarrollo de la argumentación.

A partir de los antecedentes expuestos, analizaremos que de que manera el profesor aborda la contingencia desencadenada por los errores de los alumnos en una gestión argumentativa de la clase de matemáticas.

MARCO TEÓRICO

El *Knowledge Quartet* (KQ) (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) es una teoría de base empírica que distingue entre diferentes tipos de conocimiento matemático: fundamentación, transformación, conexión y contingencia. En este trabajo nos focalizamos en la contingencia que se centra en las acciones del profesor en momentos imprevistos e inesperados. Se ha caracterizado la contingencia a partir de tres tipos de situaciones: respondiendo a las ideas de los alumnos, visión del profesor y respondiendo a la (no) disponibilidad de una herramienta o recurso. La primera situación, respondiendo a las ideas de los alumnos, incluye la capacidad de hacer coherente, razonada y bien informada a las ideas anticipadas o sugerencias de los alumnos y se han identificado tres tipos de desencadenantes: respuesta de los alumnos a una pregunta del profesor; respuesta espontánea de un alumno a una actividad o discusión, respuesta incorrecta del alumno a una pregunta **(**Rowland y Ruthven, 2011; Rowland, Thwaites y Jared, 2011**).** En este reporte de investigación nos centraremos en el tercer desencadenante dado que las situaciones de contingencia más habituales tienen relación con errores inesperados de los alumnos.

Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep (2009) señalan que existe una variedad de posibilidades y de herramientas que están a disposición del profesor con la finalidad de responder a una situación de contingencia: intercambio de ideas entre profesor y alumno, o entre el profesor y un grupo de alumnos; sugerir o repreguntar, antes de responder efectivamente a la idea de un alumno; responder a todas las dudas, preguntas y/o intervenciones de los alumnos. También destacan que hay que tener en mente ciertas características de la enseñanza durante la contingencia, tales como: el reconocimiento de que la idea de un alumno es una acción meritoria; la posibilidad de que un profesor simplemente no responda a todas las preguntas en profundidad por una cuestión de tiempo; el hecho de que una intervención hábil del profesor permite al alumno crear nuevas conexiones con su propio conocimiento. Estas ideas se ejemplifican en Rowland y Zazksi (2013) donde se exponen posibles caminos que puede tomar el docente en situaciones de contingencia, para mostrar la oportunidad que tiene el profesor para indagar en las ideas de los alumnos.

METODOLOGÍA

El estudio se ha realizado en el marco de un seminario de profesores para promover el desarrollo de la argumentación en el aula con profesores de enseñanza básica de establecimientos educacionales de la ciudad de Concepción (Chile). El seminario se llevó a cabo regularmente cada 15 días en los meses lectivos desde abril del 2014 hasta junio de 2015, realizando en total 30 sesiones de 120 minutos. El proceso de formación se realizó bajo una Metodología de Trabajo Docente (MTD) (Solar, Rojas, Ortiz y Ulloa, 2012) cuyo objetivo es que profesores en ejercicio estudien problemáticas en torno a la gestión del aula de matemáticas. En la MTD se promueve el desarrollo de la reflexión del profesor por medio del análisis de la práctica, utilizando grabaciones de clases.

Para analizar cómo se aborda la contingencia, se han utilizado como fuente de datos dos clases de cada una de las tres profesora que fueron diseñadas en el seminario de formación para promover la argumentación. Cada clase se grabó de manera completa (90 minutos) por por medio de una observación no participante y se aplicó una pauta de observación, previamente diseñada de acuerdo con los focos de la investigación: momentos de argumentación y, en el caso de surgir situaciones de contingencia, registro del tipo de desencadenante (ideas de los alumnos, reflexión del profesor, uso de herramientas). De las seis clases observadas se pudo apreciar que en todas ellas efectivamente

aparecieron momentos argumentativos, es decirhubo contraposición de ideas y en cuatro de ellas aparecieron situaciones de contingencia.

En este reporte se ha elegido una clase de una profesora como caso para analizar la forma de abordar la contingencia en contextos de argumentación. Se ha elegido este caso porque se da una situación de contingencia desencadenada por un error inesperado en la respuesta de uno o varios alumnos ante una pregunta del profesor, y que el docente decide escuchar e incorporar en el desarrollo de la clase. Por tanto la profesora modifica la planificación original y sigue las ideas de los alumnos.

La estrategia de análisis para caracterizar cómo se aborda la contingencia se realiza por medio un conjunto de prácticas generativas *High Leverage Practices (HLP) para la (HLP)* (Ball, Sleep, Boerst, y Bass, 2009). Según estos autores,el desarrollo adecuado de estas prácticas incrementa la probabilidad de que la enseñanza sea efectiva para el aprendizaje de los alumnos.

Consideramos que hay dos *High Leverage Practices (HLP)* de especial interés para nuestro estudio[xiii]:

HLP 3.Elicitar[xiv] *e interpretar el pensamiento de cada alumno*: Los profesores formulan preguntas o tareas que promueven en los alumnos compartir sus pensamientos acerca de contenidos académicos específicos con el fin de poder evaluar el pensamiento del alumno, guiar discusiones instruccionales y destacar ideas que pueden beneficiar a otros alumnos. Para identificar este tipo de práctica, decidimos focalizarnos en tres tipos de acciones del profesor en el aula: elaborar preguntas que permitan al alumno explicitar su pensamiento; chequear interpretaciones alternativas de las ideas y métodos de los alumnos (Ej. ¿Cómo lo hiciste para resolver este ejercicio? ¿Por qué crees que eso es así? ¿Cómo resolverías este otro ejercicio?); y permitir la expresión del pensamiento por distintas vías: lenguaje verbal (oral y escrito), representaciones o lenguaje simbólico.

HLP 5. Reconocer patrones particulares comunes del pensamiento de los alumnos: Si bien hay diferencias individuales y culturales entre los alumnos, también se observan patrones comunes en las formas en que los alumnos piensan y en que desarrollan comprensiones y habilidades en torno a determinados temas y problemas. Los profesores que están familiarizados con los patrones comunes de pensamiento y desarrollo de los alumnos y que tienen la habilidad para anticiparlos e identificarlos son capaces de trabajar en forma más efectiva y eficiente cuando planifican e implementan su enseñanza y cuando evalúan el aprendizaje de sus alumnos[xv].Asimismo, para identificar este tipo de práctica, consideramos que podemos focalizarnos en tres tipos de acciones del profesor en el aula: observar la forma de registrar y operar de los alumnos; identificar errores comunes y proceder a su corrección; y reconocer ideas de sus alumnos y organizarlas para precisar un concepto.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Presentamos el análisis mediante el caso de la clase de Mónica en un cuarto básico (9-10 años).

Clase de Mónica

La planificación de la clase fue diseñada en el seminario de formación de profesores; la profesora tenía como objetivo descubrir las regularidades en la multiplicación y división, y en base a esta idea diseñó una clase en que los alumnos tenían que encontrar el número adecuado para que se cumpliera una igualdad.

[xiii] Se mantiene la numeración original dentro de las 18 HLP

[xiv]En castellano se traduce como suscitar, se ha traducido el término del inglés “eliciing” a elicitar por ser un término que se está acuñado al referirse a esta práctica.

[xv]Definición de las HLP disponible en http://www.teachingworks.org/work-of-teaching/high-leverage-practices

En la figura 1 se muestra un extracto de la planificación de la clase. En la actividad A la profesora Mónica espera que los alumnos respondan de manera satisfactoria, escribiendo el 1 como el único número posible para que el resultado sea 1. En cambio, en la actividad B se esperan diferentes respuestas, incluidos varios errores asociados a la posición del cero. Se contempla una gestión de los posibles errores a través de la argumentación.

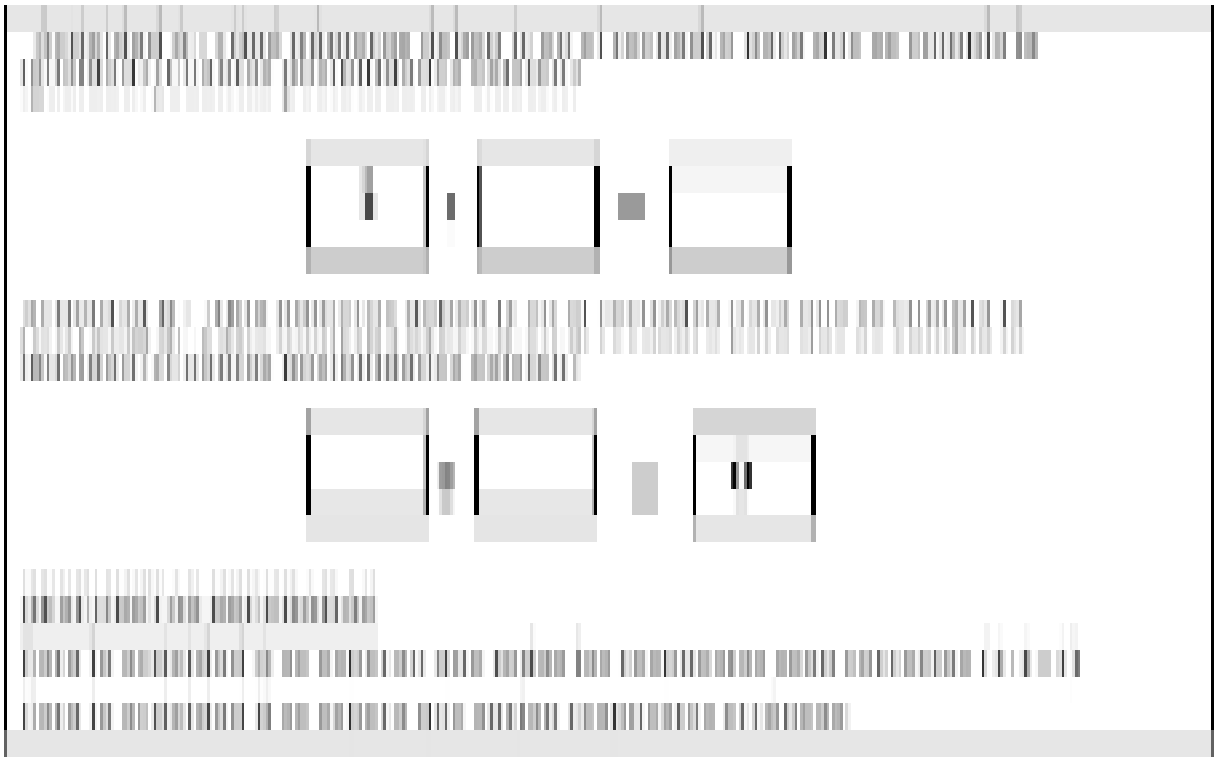


Figura 1: extracto plan de clases Mónica.

En el transcurso de la clase al desarrollar la actividad A, aparecen situaciones de contingencia desencadenadas por respuestas erróneas de los alumnos. La profesora Mónica hace pasar primero a la pizarra a los alumnos que dan como resultado y, mediante una gestión argumentativa, sin validar las respuestas va preguntando al curso si están de acuerdo con esta respuesta, a lo cual Tania responde: "No puede ser dos porque uno no se puede dividir en dos". Se siguen discutiendo diferentes respuestas mediante una gestión argumentativa; entre estas aparece Isabel con otra respuesta: "A nosotros, con Javier, uno entre dos nos dio el resultado de dos", respuesta que también es gestionada por Mónica de manera argumentativa. Cuando Mónica solicita que explique su respuesta, Isabel utiliza como ejemplo una caja con dos galletas para explicar el reparto, ante lo cual Mónica pide que hagan un dibujo de la idea de Isabel y Javier. Este ejemplo, que contiene un modelo de reparto equitativo para la división, es utilizado por Mónica para discutir las múltiples respuestas que irán apareciendo en la clase. Luego interviene Vanessa con la siguiente idea.

Mónica: ¿Quién tiene otro resultado?, a ver… Porque vi muchos resultados. A ver, Vanessa, ¿qué pusieron ustedes?

Vanessa: Que, uno dividido por dos es uno.

Mónica: Uno dividido por dos es uno. Distinto a lo que está ahí. Allá (Muestra otro resultado) pusieron, uno dividido en dos es dos. ¿Qué ocurrió? ¿Cómo lo hicieron ustedes?

Vanessa: Es que, lo dividimos porque la división, como que también es parte de la suma y tuvimos que sumarle, en realidad daría uno.

Se aprecia que Mónica, mediante una gestión argumentativa de las diferentes respuestas no esperadas que van apareciendo, va chequeando las interpretaciones alternativas. Es decir: Mónica, mediante sus acciones, elicita e interpreta el pensamiento de los alumnos.

Hasta ahora los alumnos que han dado sus respuesta han salido a la pizarra a reproducirlas, y han aparecido tres diferentes () y todas han sido gestionadas de forma argumentativa. Ahora Mónica se sitúa en el fondo de la clase en la mesa de Valeria para preguntarle su respuesta.

Mónica: (Mónica está mirando a dos alumnos que están en su asiento) ¿Y acá? ¿Qué tienen ustedes?

Valeria: uno dividido por uno es igual a uno

Mónica: ¿Distinto? ¿Lo pueden pasar a explicar?

(Valeria con su compañero pasan a la pizarra y escriben)

Mónica: Distinto. ¿Por qué ustedes pusieron 1?

Valeria: Dividimos uno por uno porque si nosotros tuviéramos una galletita y pusiéramos en una caja sería solamente uno porque teníamos solamente una galletita.

….

Mónica: Ya, aquí, tiene que haber alguien que tenga la razón. Porque dijimos que era una regularidad, algo que se da siempre, y ahí tenemos muchas cosas. Ah, ya. ¿Qué cree usted?

Daniela: Que la Valeria está correcta.

Mónica: Que la Valeria está correcta. Usted estaba de acuerdo con otra persona.

Daniela: Sí

Mónica: ¿Con quién estaba de acuerdo antes?

Daniela: Con Tania.

Mónica: Con Tania y ahora, ¿Qué le hace cambiar de opinión?

Daniela: Porque uno es uno dividido en uno, y el uno solo se divide una sola vez.

Mónica: Uno dividido es uno es uno, porque el uno se divide una sola vez. ¿Eso era lo que usted estaba diciendo, o no? ¿Es lo mismo? Sí. Valeria, ¿Qué crees tú?

Mónica hace pasar a Valeria con su compañero a la pizarra para que expliquen el resultado y Valeria utiliza el modelo de la galleta para hacerlo. Mónica en vez de validar la respuesta, mediante una gestión argumentativa pregunta al resto del curso quien puede tener la razón. Daniela señala que cambió de opinión y es ella misma quien refuta la respuesta de Tania, con quien estaba de acuerdo antes, señalando que "uno es uno dividido en uno, porque el uno se divide una sola vez".

Como se aprecia en lo que sigue de la clase, cuando Mónica pregunta a otros alumnos si cambiarían la opinión, Fernanda dice que cambia su respuesta de a la dada por Isabel () la cual sigue manteniendo su posición:

Mónica: Kevin, ¿qué crees tú? Nada. Los que están ahí, todos los que están ahí… Eh, Fernanda, ustedes tienen uno dividido en tres es dos. Has escuchado a tus compañeros…. ¿Usted todavía cree que uno dividido en tres es dos, o cree que podrías cambiar de opinión? ¿Podría cambiar de opinión? …

Fernanda: Esa.

Mónica: Por esa (señala en la pizarra) uno dividido en dos es dos. ¿Y la Isabel? ¿Que tenía esa de las galletas? ¿Sigue pensando lo mismo o cambia de opinión?

Isabel: Sigo con lo mismo.

Mónica: Sigue pensando lo mismo. ¿Y acá? Javier. ¿Usted? (Javier no responde) A ver. Una cosa. Vayan a sus puestos a ver las divisiones de allá porque ahí parece que no estamos mirando mucho (están en una esquina de la pizarra y no pueden ver las respuestas). Ya, vamos a esperar la respuesta de Javier. Ya Javier tenía, junto con Isabel, uno dividido en dos es dos. Y ellos lo explicaron con este ejemplo. ¿Sí? Tenían dos galletas, y ¿esas dos galletas donde las fueron a repartir?

(Los alumnos vuelven a los puestos a revisar sus respuestas)

Consideramos que en este episodio aparece otra contingencia desencadenada por la respuesta de Fernanda; entendemos este error como un patrón de pensamiento: al realizar un reparto equitativo, éste debe ser entre una cantidad mayor que uno. Esta forma de repartir es un patrón de pensamiento puesto que, aun habiendo aparecido la respuesta correcta y el razonamiento que hay detrás de ella, aún se mantiene la posición de Isabel, que es compartida, por lo menos, por Fernanda.

Se puede apreciar que Mónica ha realizado diferentes acciones para identificar los patrones de pensamiento: ha observado las diferentes maneras de operar, ha identificado los diferentes errores y, mediante una gestión argumentativa, ha procedido a corregirlos; ha reconocido las diferentes ideas sobre cómo operar con el uno, y ha organizado las multiplicidad de ideas en cuatro respuestas (tres erróneas y una correcta), de las cuales están quedando dos como preponderantes.

En consecuencia, se pueden establecer que se han elicitado e interpretado dos patrones de pensamiento, que corresponden a las respuestas .

Mónica sigue indagando en la respuesta para profundizar en el significado de los términos de la división, y para ello sigue con el modelo de repartir galletas, propuesto anteriormente por los alumnos.

Mónica: La pregunta que voy a hacer, atención: Aquí están repartiendo dos galletas, pero en la división. Si yo tengo una división, ¿qué es lo que voy a repartir, qué cantidad voy a repartir, aquí qué cantidad voy a repartir?

Alumnos: ¡Uno!

Mónica: ¿Uno? ¿Dónde está el dos aquí? Porque aquí hay un uno, la pregunta la vuelvo a hacer, aquí me está diciendo ¿qué cantidad voy a repartir? Una, entonces, ¿puedo poner por ejemplo dos galletas si voy a repartir una? ¿Voy a repartir dos galletas o solo una galleta? Ok, vuelvo a preguntar, en este ejemplo: ¿voy a repartir una galleta o dos galletas? ¿Qué cree usted, en este ejemplo, cuántas voy a repartir?

Daniel: una galleta.

Consideramos que Mónica en este episodio se focaliza en organizar y precisar el concepto de división por medio del reparto equitativo de galletas, es decir, profundizando en los patrones de pensamiento asociados a la relación entre división y la acción de reparto equitativo. En lo que sigue, Mónica continua contrastando los dos patrones de pensamiento.

Mónica: Pero, la pregunta es, chiquillos les voy a pedir por última vez, concéntrense en la pregunta. Aquí, en este ejemplo si esto lo voy a repartir en tantas partes me va a dar un resultado ¿cuántas galletas, diría yo aquí, que voy a repartir?

Daniel: dos

(otros alumnos dicen uno)

Mónica: No hay ningún dos, hay un solo uno. Valeria, ¿qué dices tú?

Valeria: Yo diría que deberíamos dividir la misma que está en la pizarra.

Mónica: ¿Cómo?

Valeria: Deberíamos dividir uno, y en uno…

Mónica escucha una vez más la idea de repartir entre dos, pero en vez de contrastar la respuesta, hace que Valeria explique su razonamiento. Una vez más elicita e interpreta la idea de Valeria para desarrollar el patrón de pensamiento sobre repartir uno entre uno.

En este momento, Mónica hace que todos los alumnos que estaban en pizarra se vayan a sentar, y explicita que la multiplicación es la operación inversa de la división. Recoge las tres respuestas más recurrentes y escribe debajo de ellas le operación inversa: para , escribe ; para , escribe y para escribe . Una vez que tiene los tres pares de operaciones expuestos, pregunta dónde se encuentra la regularidad.

Mónica: En todos estos ejemplos, en éste, en éste y en ese, ¿dónde hay una regularidad?

Alumno: Donde están los 1.

Mónica: Tú dices donde están los 1. ¿Por qué donde están los 1? Porque no cambia el número, porque llegamos a 1. ¿Valeria, qué crees tú?

Valeria: Que la una está correcta

Mónica: Que sería ésta (señala)

Valeria: sí

….

Mónica: ¿Quién sigue pensando que esto sería correcto? (muestra el primer procedimiento donde y algunos levantan la mano) ¿Quién sigue pensando que esto sería correcto? (muestra el segundo procedimiento donde y ninguno levanta la mano) ¿Quién sigue pensando que esto sería correcto? (muestra el tercer procedimiento donde y ninguno levanta la mano) O sea, ¿quién tuvo la razón?

Alumnos: Eh, la Valeria (a coro los alumnos señalan el primer procedimiento).

Mónica: La Valeria tuvo la razón.

Con esta idea compartida por el curso la clase se da por terminada. Es importante considerar que la profesora tenía planificado realizar dos actividades (figura 2). No obstante, al ver que había una multiplicidad de respuestas erróneas a la actividad A que no eran esperadas por Mónica, decide enfrentar estas contingencias por medio de elicitar e interpretar las ideas de todo el curso. Esto llevó a identificar dos patrones de pensamiento que se fueron repitiendo a lo largo de la clase y que llevaron a dos soluciones distintas: una correcta () y otra errónea (). Por medio del modelo de repartir galletas, propuesto por los propios alumnos, y una gestión argumentativa de las ideas, Mónica siguió enfrentando estos dos patrones de pensamiento logrando que algunos alumnos cambiaran de opinión y se inclinaran por aceptar el reparto unitario. La conexión con la operación inversa de multiplicar le permite dar más fuerza al hecho que repartir entre dos o entre tres no es posible, si el resultado tiene que ser uno.

Vemos que las acciones de Mónica de elaborar preguntas que permiten que el alumno explicite su pensamiento de la HLP 3, y la acción de reconocer las ideas de los alumnos y organizarlas para precisar un concepto de la HLP 5, son los más frecuentes en el transcurso de la clase. Consideramos que ambas acciones han sido claves para gestionar las diversas contingencias que aparecieron en torno a los errores de los alumnos.

Otro aspecto interesante a resaltar de la gestión de Mónica es el tiempo dedicado a indagar el pensamiento de los alumnos, que fue prácticamente tres cuartas partes de la clase. Solo cuando Mónica propone la operación inversa de la división como idea para entender el reparto equitativo, casi al final de la clase, ella valida la respuesta correcta de Valeria.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el caso presentadohemos visto que la gestión argumentativa de la clase ha sido clave para abordar la contingencia. Si bien la clase había sido diseña para que la argumentación se diera en cierto momento, se desencadenaron diversas contingencias como producto de errores inesperados de los alumnos que fueron abordadas mediante estrategias que promueven la argumentación. Estas estrategias se asocian a acciones docentes que son propias de dos *High Leverage Practices (HLP)* que consideramos fundamentales para abordar las contingencias: elicitar e interpretar el pensamiento de los alumnos (HLP3), y reconocer los patrones comunes de pensamiento de los alumnos (HLP5).

Las HLP identificadas, nos permiten explicar de qué manera se ha abordado la contingencia: en el caso de la clase de Mónica hemos visto que se han elicitado e interpretado las distintas ideas de los alumnos que han ido apareciendo, lo cual ha permitido reconocer los patrones comunes de pensamiento.

En otros estudios se han señalado acciones del docente para abordar la contingencia en el aula de matemáticas (Rowland et al., 2009; Rowland y Zasksi, 2013), tales como intercambio de ideas entre profesor y alumnos, repreguntar antes de responder y reconocer las ideas de los alumnos. Estas acciones son parte de las acciones descritas de HLP 3 y HLP 5. Consideramos que si el docente tiene en cuenta estas HLP, dispondrá de una herramienta potente para abordar de manera eficaz las contingencias en el aula de matemáticas.

Finalmente, queremos destacar que la conclusión anterior se conecta fuertemente con la idea, planteada al inicio de este reporte, que en una gestión argumentativa de la clase las situaciones de contingencia se pueden dar con mayor frecuencia; en particular, es habitual que aparezcan errores inesperados cuando un profesor indaga las ideas matemáticas de sus alumnos en clase, como lo visto en el caso de Mónica. Ello posibilita la aparición de ideas que pueden contener errores profundos, lo que permite su reconocimiento y gestión por parte del docente. Por lo tanto, las situaciones de contingencia constituyen oportunidades para que se gestionen dichos errores que posiblemente son difíciles de tratar en la clase sin desviarse de la planificación.

Referencias

Ball, D. L., Sleep. L., Boerst, T. y Bass, H. (2009). Combining the development of practice and the practice of development in teacher education.*Elementary School Journal, 109*, 458-474.

Rowland, T. y Ruthven, K. (2011) (Eds.*)*. *Mathematical Knowledge in Teaching.*London and New York: Springer.

Rowland, T. y Zazkis, R. (2013). Contingency in the Mathematics Classroom: Opportunities Taken and Opportunities Missed. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *13*(2), 137-153.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281.

Rowland, T., Thwaites, A. y Jared, L. (2011).Triggers of contingency in mathematics teaching.In B. Ubuz (Ed.).*Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 73-80. Ankara, Turkey: PME.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009).*Developing primary mathematics teaching*. London: SAGE.

Solar, H., Rojas, F., Ortiz, A. y Ulloa, R. (2012). Reflexión docente y competencias matemáticas: un modelo de trabajo con docentes. *RECHIEM: Revista Chilena de Educación Matemática*, *6*(1), 257-267.

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

DISEÑO FORMATIVO PARA DESARROLLAR LA COMPETENCIA DE ANÁLISIS EPISTÉMICO Y COGNITIVO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS[I]

A training design to develop the epistemic and cognitive analysis competence of mathematics teachers

Godino, J. D.[a], Giacomone, B.[b], Wilhelmi, M. R.[c], Blanco, T. F.[d] y Contreras, A.[e]

[a]Universidad de Granada,[b]Universidad Nacional de La Plata,[c]Universidad Pública de Navarra,[d]Universidad de Santiago de Compostela,[e]Universidad de Jaén;

jgodino@ugr.es, belen.giacomone@gmail.com

Resumen

El reconocimiento explícito de los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas es una competencia que el profesor debe desarrollar. Esta competencia permite al docente comprender los procesos de aprendizaje matemático, diseñar y gestionar tales procesos y valorarlos con estándares de idoneidad previamente fijados. Así, el formador de profesores debe diseñar procesos formativos orientados al desarrollo de la competencia profesional mencionada. En este trabajo se describen las dos primeras fases de un diseño formativo orientado al desarrollo de esta competencia con profesores de matemáticas de secundaria, resaltándose el papel de los lenguajes visuales y analíticos en la constitución de tales objetos.

Palabras clave: *conocimiento didáctico – matemático, formación de profesores, diseño didáctico, análisis epistémico, enfoque ontosemiótico*

Abstract

The explicit recognition of objects and processes involved in mathematical practices is a competence that the teacher should develop. This competence allows the teacher to understand the processes of mathematical learning, design and manage such processes and value them with the standards of suitability previously set. Consequently, the teacher educator should design training processes aimed at developing the professional competence mentioned. The first two phases of an instructional design aimed at developing this competence for secondary mathematics teachers are described. The role of visual and analytical languages in the constitution of such objects is emphasized.

Keywords: *didactic – mathematical knowledge, teachers' training, didactical design, epistemic analysis, onto-semiotic approach*

INTRODUCCIÓN

El modelo de conocimientos didáctico – matemáticos (CDM) del profesor de matemáticas (Godino, 2009) establece que el profesor debe ser capaz de prever posibles soluciones de una tarea matemática, distinguiendo las posibles secuencias de prácticas operativas y discursivas que el resolutor podría implementar en cada caso. También debe poder identificar la trama de objetos *ostensivos* (lenguajes y artefactos) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, procedimientos y

argumentos) imbricados en las prácticas matemáticas, así como las relaciones potencialmente conflictivas entre los diversos tipos de lenguajes movilizados y los procesos matemáticos involucrados.

Este análisis es complejo y requiere el desarrollo de una competencia específica en los profesores, mediante intervenciones formativas específicas. Describimos aquí un ejemplo de diseño de una intervención formativa para desarrollar la mencionada competencia en profesores de matemáticas en formación de un Máster en Educación Secundaria. En la sección 2, se describe el marco teórico y el método, así como la descripción de antecedentes de investigaciones sobre la competencia de análisis epistémico y cognitivo. Asimismo, se fundamentan aspectos propios de la visualización y del razonamiento diagramático, aspectos didáctico-matemáticos claves en la experimentación. El diseño concreto propuesto, su interés, objetivos y desarrollo previsto se muestra en la sección 3. Finalmente, se razona la importancia del estudio realizado y su implicación para la formación de profesores.

MARCO TEÓRICO, MÉTODO Y ANTECEDENTES

El planteamiento del problema indicado está apoyado en el modelo de conocimiento del profesor de matemáticas descrito en Godino (2009) como "conocimiento didáctico - matemático" (CDM), el cual desarrolla otros modelos existentes, en particular el MKT (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008), mediante la aplicación de las herramientas conceptuales y metodológicas propuesta por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013).

La metodología aplicada se inscribe dentro del enfoque metodológico del *diseño didáctico* (Kelly, Lesh y Baek, 2008) o *ingeniería didáctica* (Godino et al., 2013), según la cual el diseño se desarrolla en cuatro fases: estudio preliminar, diseño, implementación y análisis retrospectivo. Aunque hemos realizado un diseño completo con 54 estudiantes de un Máster en Educación Secundaria, exponemos aquí, por limitaciones de espacio, únicamente las dos primeras fases. Antes, analizamos algunos antecedentes y un análisis sobre la visualización y el razonamiento diagramático, aspectos didáctico-matemáticos claves en la experimentación.

Competencia de análisis epistémico y cognitivo

En el diseño y análisis didáctico, el docente debe poseer la competencia para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para sintetizar los conocimientos didácticos existentes sobre el diseño, implementación y evaluación de la práctica docente (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012).

Para la enseñanza de las matemáticas, el docente debe: a) tener el nivel de competencia matemática suficiente para llevar a cabo la práctica matemática, operativa y discursiva, en la etapa donde imparte; b) poder analizar y valorar la actividad matemática de los alumnos, identificando los objetos y significados movilizados, con el fin de enriquecer su desempeño y mejorar su competencia profesional. Este análisis permite al docente prever conflictos de significados y establecer distintas posibilidades de institucionalización de los conocimientos matemáticos implicados (Godino et al., 2007), valorando su eficacia y su coste.

La tarea de análisis que proponemos a los profesores en formación en este diseño instruccional supone una evolución en la técnica de análisis ontosemiótico descrita en Godino et al. (2012). Se distinguen dos fases: a) resolución de la tarea y su descomposición en prácticas operativas y discursivas simples o elementales; b) introducción como unidades de análisis ontosemiótico de las prácticas identificadas.

Visualización y razonamiento diagramático

En muchas ocasiones, para favorecer el aprendizaje de las matemáticas se propone el uso de diversas representaciones, visualizaciones, diagramas, materiales manipulativos, etc., con la presunción de que tales materializaciones constituyen modelos de los conceptos matemáticos y de

las estructuras en las cuales se organizan. Se supone que el uso de representaciones materiales es necesario no solo para comunicar las ideas matemáticas, sino también para su propia construcción.
Arcavi (2003) considera que la matemática, como creación humana y cultural que trata con objetos y entidades muy diferentes de cualquier fenómeno físico, se apoya fuertemente sobre la visualización en sus diferentes formas y niveles. Duval (2006) atribuye un papel esencial al tratamiento de los signos dentro de cada sistema y la conversión entre diferentes sistemas de representación semiótica. Dörfler (2003) sostiene que un amplio "inventario" de diagramas, sus propiedades y relaciones, apoya y ocasiona su uso creativo.
El profesor de matemáticas debe ser consciente de las relaciones entre las representaciones visuales, diagramáticas o de cualquier otro tipo, y los objetos matemáticos no ostensivos que les acompañan necesariamente. También debe conocer los usos y limitaciones de los distintos lenguajes, reconociendo las posibilidades epistémicas y cognitivas de los medios visuales de expresión (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2015). Esta hipótesis de trabajo condiciona el diseño instruccional que se muestra a continuación.

DISEÑO INSTRUCCIONAL

Objetivos, contenidos y metodología

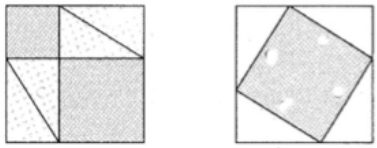
El diseño instruccional se orienta al logro de los siguientes objetivos: en primer lugar, caracterizar la visualización y el razonamiento diagramático (VRD) y analizar su papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; en segundo lugar, identificar y describir los objetos y procesos implicados en tareas matemáticas mediante visualización y razonamiento diagramático.
Los contenidos didáctico – matemáticos implicados son: conocimientos implicados en la conceptualización y uso de diagramas y recursos manipulativos, que impliquen procesos de visualización y de razonamiento diagramático.
Se propone la siguiente metodología instruccional:

1) Lectura y discusión del texto: Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco, y Contreras (2015).
2) En equipos de 3-4, resolver tareas similares a la descrita en la sección 3.2 e identificar los conocimientos matemáticos movilizados en su resolución, distinguiendo los lenguajes visual y analítico, así como los objetos no ostensivos implicados.
3) Presentación y discusión de resultados.

Tarea y análisis *a priori*

En la figura 1 aparece la tarea propuesta.

1) *¿Qué relación piensas que existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B? ¿Cómo se puede usar esta relación para probar el teorema de Pitágoras? Describe el procedimiento seguido, indicando las acciones que se deben realizar y las explicaciones necesarias que justifican las respuestas*.



2) *Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la solución de la tarea.* (Enumera la secuencia de prácticas que se realizan para resolver la tarea, los objetos implicados y sus significados)

Figura 1. Tarea

En la práctica matemática se movilizan objetos *ostensivos* (lenguajes y artefactos) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). El resolutor toma decisiones para garantizar la eficacia de la práctica, en su resolución o para su comunicación. La resolución esperada de la tarea imbrica lenguajes natural, diagramático y algebraico, según estándares de idoneidad (epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica). Así, en la formación inicial de docentes de secundaria, se espera la siguiente secuencia de prácticas operativas y discursivas en la tarea a):

1) Se supone que las figuras trazadas en A y B son cuadrados y triángulos rectángulos cuyos lados tienen como medidas de longitud las indeterminadas a, b, y c (figura 2).

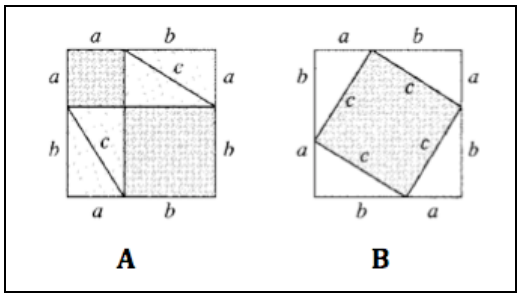


Figura 2. Hipótesis métricas necesarias

2) Los cuadriláteros formados por los segmentos exteriores de las figuras en A y B son cuadrados congruentes porque sus lados tienen igual longitud ($a + b$).
3) Los triángulos rectángulos trazados en A y B son congruentes porque sus lados son iguales.
4) Las figuras sombreadas tienen igual área porque se obtienen quitando a dos cuadrados de igual área cuatro triángulos iguales.
5) El área sombreada de la figura A es la suma del área de los cuadrados de lados a y b, respectivamente, $a^2 + b^2$.
6) El área sombreada en B es el área del cuadrado de lado c, c^2.
7) Las regiones sombreadas se interpretan como las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo, respectivamente (figura 3).

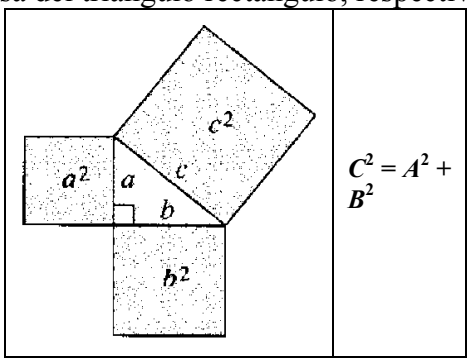


Figura 3. Determinación del Teorema de Pitágoras

8) Luego el área del cuadrado de la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$.

Como síntesis de la respuesta esperada a la parte b), en la primera columna de la tabla 1, incluimos de, manera abreviada, las prácticas textualizadas 1) a 8) mencionadas. En la segunda columna mostramos los objetos matemáticos no ostensivos, los cuales constituyen el contenido (o significado) de las palabras o expresiones que conforman las prácticas. Además de estas funciones semióticas, que relacionan de manera referencial los objetos de la primera con los de la segunda

columna, es posible identificar otras funciones semióticas de carácter operacional que dan cuenta del uso y finalidad de las distintas prácticas y su secuenciación.
No es posible, por limitaciones de espacio, incluir un análisis más completo de la trama de funciones semióticas implicadas en el sistema de prácticas, tanto de tipo referencial (un objeto refiere a otro objeto) como operacional (uso pragmático de los objetos); p. e., los objetos no ostensivos se relacionan con sus respectivas definiciones o enunciados textuales, y desempeñan una función en el seno de las prácticas.
Asimismo, es preciso señalar que en todo el proceso explicativo – demostrativo analítico los procesos de *particularización* (concreción de los conceptos a las figuras particulares) y *generalización* (las figuras concretas son representantes de la clase de figuras semejantes) están presentes.

Tabla 1. Conocimientos implicados en las prácticas

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos: conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos**	**Uso e intencionalidad de las prácticas**
Enunciado: *¿qué relación piensas que existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B?* ...	- conceptos: área; suma y comparación de áreas; figura geométrica.	El texto, con lenguaje natural y diagramático, significael *enunciado* de la tarea. Se pretende una prueba visual del teorema de Pitágoras.
1) Aceptación de que las figuras trazadas en A y B son, respectivamente, cuadrados y triángulos rectángulos de lados las indeterminadas a, b, y c (figura 2).	- conceptos: cuadrado; triángulo rectángulo; lado; longitud; cantidad indeterminada.	Se establecen las hipótesis geométricas y métricas necesarias. El uso de indeterminadas confiere generalidad al razonamiento.
2) Los cuadriláteros formados por los segmentos exteriores de las figuras en A y B son cuadrados congruentes porque sus lados tienen igual longitud (a + b).	- proposiciones: los cuadrados exteriores (triángulos) son congruentes. - argumentos: los cuadrados exteriores tienen el mismo lado ($a+b$); los triángulos son rectángulos y tienen los mismos lados.	Se justifica que los cuadrados A y B son congruentes. ($a+b$) refiere a la suma de las medidas de los segmentos a y b.
3) Los triángulos rectángulos trazados en A y B son congruentes porque sus lados son iguales.	- proposiciones: los triángulos son congruentes. - argumentos: los triángulos son rectángulos y tienen los mismos lados.	Se justifica que los triángulos son congruentes. Es una condición necesaria para la práctica 4.
4) Las figuras sombreadas tienen igual área porque se obtienen quitando a dos cuadrados de igual área cuatro	- concepto: adición de áreas. - proposición: dos áreas son iguales si representan la misma extensión de superficie, aunque	Se justifica la igualdad de las áreas sombreadas. Es una respuesta a la cuestión

triángulos iguales.	las superficies tengan distinta forma.	a).
5) El área sombreada de la figura A es la suma del área de los cuadrados de lados a y b, respectivamente, $a^2+ b^2$.	- concepto: adición de áreas; - proposición y su justificación: basada en la aditividad del área y en el procedimiento de cálculo del área del cuadrado a partir de la longitud del lado.	Se pretende relacionar la parte sombreada en A con la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos . Se expresa esta relación de manera algebraica para darle generalidad.
6) El área sombreada en B es el área del cuadrado de lado c, c^2.	- concepto: cuadrado y su área. - procedimiento: cálculo del área del cuadrado a partir de su lado	Se pretende relacionar la parte sombreada en B con el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.
7) Las regiones sombreadas se interpretan como las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo, respectivamente (figura 3).	- conceptos: cateto, hipotenusa y área de un triángulo rectángulo. - proposición: es posible establecer una relación entre las áreas de los cuadrados de lados el triángulo rectángulo - argumento: gráfico a partir de los diagramas de la figura 2.	Identificación del teorema de Pitágoras.
8) Luego el área del cuadrado de la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$	- concepto: triángulo rectángulo. - proposición: teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$ - argumento: relación entre medidas de áreas de figuras geométricas y valores numéricos de longitud.	Enunciado con lenguaje natural del teorema de Pitágoras y con lenguaje algebraico la fórmula como expresión sinóptica del teorema.

El análisis incluido en la tabla 1 corresponde al sistema de prácticas realizadas para resolver la tarea por un sujeto epistémico y constituye, por tanto, un análisis de tipo institucional. El análisis de las respuestas concretas dadas por estudiantes caracterizaría el significado personal atribuido (análisis cognitivo). La tabla 1 muestra en particular que existe una estrecha imbricación entre los lenguajes diagramáticos y secuenciales, los objetos ostensivos y no ostensivos y los objetos extensivos (particulares) y los intensivos (generales).

Nuestro análisis ha revelado que el uso de diagramas apoya la formulación de conjeturas, pero la intuición y visualización debe completarse con el reconocimiento de la trama de objetos matemáticos no ostensivos implicados en la deducción de las proposiciones geométricas. Así mismo, el uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para argumentar (comunicar, justificar y explicar) el desarrollo de las prácticas y el progreso en la tarea. Además es preciso observar que los medios de expresión son "artefactos" (Lasa, Wilhelmi y Belletich, 2014) que conllevan el uso implícito de un sistema de objetos no ostensivos, que dotan de significado a la actividad matemática concretada en los objetos ostensivos.

Consideramos que el profesor de matemáticas debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos, sistemas de representación y sus relaciones sinérgicas en la práctica matemática escolar. Además, debe ser competente para diseñar y gestionar procesos de materialización e idealización de los objetos matemáticos, junto con los correspondientes procesos de particularización y generalización.

A MODO DE CONCLUSIÓN: UTILIDAD E INTERÉS DEL DISEÑO INSTRUCCIONAL EN LA FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES

El diseño instruccional descrito, basado en el análisis de prácticas, objetos y procesos, lo estamos experimentando con diversos grupos de estudiantes y diferentes problemas matemáticos. La actividad es un reto para los profesores en formación, resultando conflictiva la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados, ya que usualmente supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados.

La actividad de resolución de problemas se complementa con el análisis epistémico – cognitivo provocada por las consignas: ¿Qué matemáticas se pone en juego en la resolución del problema? ¿Qué matemática ha puesto en juego el alumno? La respuesta a estas preguntas es apoyada mediante el uso de las herramientas teóricas del "enfoque ontosemiótico", concretadas en este caso en la noción de configuración de prácticas, objetos y procesos.

El tipo de análisis que hemos descrito en este trabajo debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje. Se trata de diseñar e implementar situaciones didácticas para la formación de profesores cuyo objetivo central sea el meta-análisis (Jaworski, 2005) de un componente clave de la enseñanza: la actividad matemática entendida tanto desde el punto de vista institucional (o socio-epistémico) como personal (o cognitivo).

Siguiendo la propuesta de Font, Planas y Godino (2010), el ciclo formativo que estamos experimentando con los futuros profesores incluye, además de las situaciones de estudio matemático de problemas seleccionados y del análisis de las relaciones duales epistémico-cognitivas, otros tres tipos de análisis: análisis de las interacciones en el aula, reconocimiento de las normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático y valoración de la idoneidad didáctica global de experiencias de enseñanza y aprendizaje.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics.Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), Handbook of research on teaching (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Dörfler, W. (2003).Diagrams as means and objects of mathematical reasoning.Developments in mathematics education in German-speaking countries.Selected papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics.

Duval, R. (2006).A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics.Educational Studies in Mathematics, 61(1–2), 103–131.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010).Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Infancia y Aprendizaje, 33(2), 89-105.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies in Mathematics, 82, 97–124.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education, 39(1), 127-135.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 7(2), 1-21.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013) Didactic engineering as design-based research in mathematics education. En B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (pp. 2810-2819). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. (2015). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (En revisión).

Hill H. C., Ball D.L. y Schilling S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education, 39, 372-400.

Jaworski, B. (2005). Tools and tasks for learning and meta-learning. Journal of Mathematics Teacher Education, 8, 359-361.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.) (2008). Handbook of design research in methods in education.Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching. New York: Routledge.

Lasa, A., Wilhelmi, M. R. y Belletich, O. (2014). Una parcela para Laika. Educaçao Matematica Pesquisa, 16(4), 1089-1110.

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013- 41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España).

SESGOS Y ESTRATEGIAS PARA LA COMPARACIÓN DE FRACCIONES REVELADAS POR ANÁLISIS DE GRUPOS EN SEGUNDO CICLO BÁSICO[1]

Middle schoolers's biases and strategies for comparing fractions revealed by clustering analysis

Gómez, D. M.[a], y Dartnell, P.[b]

[a]Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE), Universidad de Chile,
[b]Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE),
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA (DIM),

CENTRO DE MODELAMIENTO MATEMÁTICO (CMM), UNIVERSIDAD DE CHILE;

CORREOS ELECTRÓNICOS: DGOMEZ@CIAE.UCHILE.CLA, DARTNELL@DIM.UCHILE.CLB

Resumen

Aprender fracciones es un desafío matemático considerable del segundo ciclo de enseñanza básica. Los estudiantes muchas veces usan, intuitivamente, sesgos y estrategias para la realización de tareas como la comparación de fracciones. En el presente trabajo, investigamos la variedad de sesgos y estrategias usadas por 490 estudiantes de segundo ciclo básico para responder a una tarea computarizada de comparación de fracciones. Los resultados promedio indican la presencia de un fuerte sesgo hacia razonar basados sólo en los numeradores y denominadores de las fracciones. Los resultados de un análisis de grupos complejizan esto, revelando que el razonamiento sesgado es sólo uno de al menos cinco diversos modos de razonar en la comparación de fracciones. Finalmente, argumentamos que el descubrimiento de estas diferencias entre grupos de estudiantes es una contribución tanto para la investigación como para la práctica pedagógica.

Palabras clave: *fracciones, comparación, sesgo, estrategia, razonamiento.*

Abstract

Learning fractions is one important mathematical challenge in middle school. Students often intuitively deploy biases and strategies for tasks like fraction comparison. In the present work, we investigated the variety of biases and strategies used by 490 middle schoolers to answer to a computerized fraction comparison task. Average results indicate the presence of a strong bias towards reasoning based on the fractions' numerators and denominators only. Clustering results enrich this picture by revealing that biased reasoning is only one of at least five distinct manners of reasoning in the fraction comparison task. We argue that discovering these differences between groups of students is a relevant contribution for both research and teaching practices.

Keywords: *fractions, comparison, bias, strategy, reasoning.*

INTRODUCCIÓN

Un elemento importante de la competencia matemática es la capacidad para hacer un uso flexible de los conceptos y procedimientos durante el razonamiento matemático, e incluso la ejecución de las operaciones aritméticas básicas está sujeta al uso de una variedad de estrategias (e.g. Ashcraft, 1990). Estas estrategias pueden ser aplicadas por distintos estudiantes en diverso grado. En ocasiones, ciertos estudiantes aplican estrategias incorrectas que reflejan problemas profundos de

concepto, los cuales requieren importantes esfuerzos por parte de los educadores para su identificación y corrección. La relevancia de esta variabilidad en las concepciones y estrategias que poseen los estudiantes crece en modo importante cuando éstos disponen de múltiples representaciones posibles, como es en el caso del aprendizaje de fracciones y números racionales. Los racionales pueden ser comprendidos como razones (ratios), operadores, cuocientes, o medidas, entre otras posibilidades (Kieren, 1976). Se vuelve entonces necesaria, para un correcto aprendizaje de las fracciones, la habilidad para distinguir entre las magnitudes de las fracciones como un todo en sí mismas y las magnitudes de los números naturales que las forman (i.e. sus numeradores y denominadores). Investigaciones con estudiantes en edad escolar muestran que esta distinción está muchas veces ausente (e.g. Gómez, Jiménez, Bobadilla, Reyes, y Dartnell, 2014), e incluso trabajos con participantes adultos y con matemáticos profesionales revela evidencia de una interferencia entre ambos tipos de magnitud (Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof, y Verschaffel, 2013; Vamvakoussi, Van Dooren, y Verschaffel, 2012). Para estudiar el conflicto entre las magnitudes de las fracciones y aquéllas de sus componentes, estos y otros estudios han utilizado tareas de comparación de fracciones en donde el concepto de *congruencia* juega un rol crucial. Decimos que un par de fracciones (de ahora en adelante, un *ítem*) representa una comparación *congruente* cuando las magnitudes numéricas de la fracción, del numerador y del denominador se maximizan todas en la misma fracción. Los ítemes *incongruentes*, en tanto, son aquéllos en los cuales el numerador y el denominador mayores son los que conforman la fracción menor. En la Figura 1 se puede apreciar ejemplos de un ítem congruente y uno incongruente. La idea de base detrás de esta noción de congruencia es la siguiente: la fracción que uno seleccionaría como mayor, en el caso de fijarse sólo en las magnitudes de sus numeradores y denominadores, es la correcta en el caso de los ítemes congruentes y la incorrecta en el caso de los ítemes incongruentes. Este patrón (ítemes congruentes correctos e ítemes incongruentes incorrectos) es exactamente el que se observa en ciertos estudios con escolares (e.g. Gómez et al., 2014). Sin embargo, los análisis realizados por estos investigadores se enfocaron principalmente en los resultados promedio a nivel de grupo en lugar de en las estrategias usadas por los estudiantes. En este artículo, presentamos los resultados de un análisis de grupos (*clustering analysis*) realizado a los datos recolectados por Gómez et al. (2014), buscando agrupar a los estudiantes de acuerdo a sus estrategias para comparar fracciones.

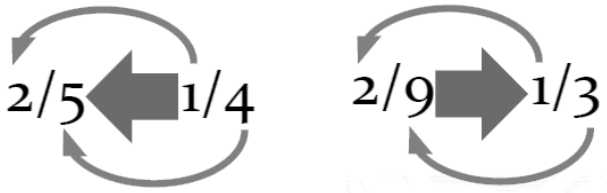


Figura 1. Ejemplos de pares de fracciones representando una comparación congruente (izquierda) y una incongruente (derecha). En el caso congruente, la fracción mayor posee además el numerador y el denominador mayores. En el incongruente, en cambio, la fracción mayor posee el numerador y el denominador menores.

MÉTODO

Participantes

Quinientos dos escolares de 5º, 6º y 7º básico participaron en este estudio, pertenecientes a cinco colegios de comunas periféricas del Gran Santiago.

Tarea de comparación de fracciones

La tarea consistió en 24 pares de fracciones que debían ser comparados, la cual fue presentada a los estudiantes por computador. Siguiendo estudios previos en la materia (e.g. Obersteiner et al., 2013; Vamvakoussi et al., 2012), los ítemes se dividían en congruentes e incongruentes (doce de cada uno). Junto a esto, dentro de cada categoría la mitad de los pares tenía una componente en común (numerador o denominador) mientras que en la otra mitad no había componentes comunes a ambas fracciones.

Los estudiantes tenían que responder, en cada ítem, cuál de las dos fracciones presentadas era la mayor. Para esto disponían de un máximo de 10 segundos por ítem, después de los cuales el ítem se consideraba omitido y el computador pasaba al ítem siguiente. No había lápiz y papel disponible, y se le indicó a los estudiantes que, en caso de dudas, respondieran siguiendo su intuición. Para más detalles sobre la tarea y la lista completa de ítemes, referimos al lector a Gómez et al. (2014).

Análisis de grupos

Del total de estudiantes, descartamos a doce de ellos quienes se demoraron más del tiempo permitido en tres o más ítemes del total de 24. Para los otros 490 estudiantes, calculamos sus porcentajes de respuestas correctas para cada uno de los cuatro tipos de ítem (congruente/incongruente, con/sin componentes en común) y usamos estos puntajes para ejecutar un algoritmo de agrupación (*k*-means clustering; el lector interesado en conocer los detalles y variantes de este algoritmo puede ver la revisión publicada por Jain, 2010) para obtener *k* grupos de estudiantes. Consideramos valores de *k* entre 2 y 10, eligiendo $k = 6$ como la mejor solución gracias a un indicador calculado sobre la base de variables como porcentaje de varianza explicada y desviación estándar media de los grupos, entre otras.

RESULTADOS

La Tabla 1 presenta los resultados de la muestra completa. Para analizar los efectos de la congruencia y de la presencia o ausencia de componentes comunes, utilizamos una regresión logística mixta donde consideramos la congruencia y la presencia o ausencia de componentes en común como factores fijos y a cada estudiante como un factor aleatorio. Esta regresión reveló que el efecto de la presencia o ausencia de componentes comunes no es estadísticamente relevante (*odds ratio* = 0.06, X^2 de Wald = 1.13, grados de libertad = 1, $p = .29$), mientras que el efecto de congruencia sí lo es (*odds ratio* = 1.6, X^2 de Wald = 698.29, grados de libertad = 1, $p < .0001$). Más aún, la diferencia de puntajes entre los ítemes congruentes e incongruentes fue distinta dependiendo de la presencia o ausencia de componentes en común (interacción: *odds ratio* = 0.6, X^2 de Wald = 40.58, grados de libertad = 1, $p < .0001$). Los estudiantes obtuvieron puntajes del orden de 40% en los ítemes incongruentes independientemente de la presencia o no de un denominador o numerador común, y puntajes del orden de 70% y 80% para ítemes congruentes que tenían una componente común o no, respectivamente. Estos resultados generales sugieren que la variable de congruencia juega un importante rol en los resultados de los estudiantes.

Sin embargo, los resultados del análisis de grupos (presentados en la Tabla 2) muestran un panorama bastante diferente. Lo primero que observamos, en línea con los resultados de la muestra completa, es la presencia de dos grupos cuyas respuestas fueron altamente influenciadas por la variable congruencia, los grupos A y E. Los estudiantes del grupo A respondieron, como se esperaba, la gran mayoría de los ítemes congruentes correctamente y la gran mayoría de los ítemes incongruentes incorrectamente. Los estudiantes del grupo E, en cambio, mostraron un patrón menos marcado pero en la dirección opuesta a la esperada y mostrada por la muestra completa (mayores puntajes para los ítemes incongruentes).

El segundo mayor grupo fue el B, que reunía a los estudiantes que tenían los puntajes mayores si se consideraba la tarea completa. Este grupo, sin embargo, presentaba una caída de alrededor de 20% cuando debía comparar ítemes congruentes sin componentes comunes. El grupo D presentaba un patrón similar de respuestas, pero con una caída mucho más pronunciada.

El grupo C estaba compuesto por estudiantes que mostraban un éxito relativo para comparar fracciones siempre que éstas tuvieran una componente en común (numerador o denominador), pero no sabían responder cuando las fracciones no tenían componentes en común. Finalmente, el grupo F mostró un patrón de puntajes bajo 50% para todos los tipos de ítem.

Tabla 1. Resultados promedio de la muestra completa, disgregados por tipo de ítem.

	Congruente	**Incongruente**	**Total**
Con una componente común	82 %	41 %	62 %
Sin componentes comunes	73 %	40 %	56 %
Total	78 %	40 %	59 %

Tabla 2. Grupos, sus tamaños, y puntajes de los estudiantes por cada tipo de ítem

		Con una componente común		**Sin componentes comunes**	
Grupo	**Tamaño**	**Congruente**	**Incongruente**	**Congruente**	**Incongruente**
A	245	93 %	4 %	97 %	2 %
B	84	94 %	94 %	74 %	93 %
C	48	84 %	67 %	57 %	55 %
D	43	89 %	94 %	18 %	96 %
E	38	20 %	85 %	15 %	90 %
F	32	38 %	25 %	48 %	29 %

DISCUSIÓN

El análisis de grupos reveló diferencias importantes entre patrones de respuestas de los estudiantes en nuestra tarea de comparación de fracciones. Un elemento clave es que estos distintos patrones reflejan distintos patrones de razonamiento para la comparación de fracciones, constituyendo así un gran paso adelante respecto de análisis realizados en investigaciones previas que se enfocaron solamente en los puntajes promedio de la muestra completa (e.g. Gómez et al., 2014).

La mayoría de los estudiantes (el grupo A, que contenía la mitad de la muestra total) comparó fracciones guiada por la congruencia de cada ítem, es decir eligiendo sistemáticamente como la fracción más grande aquélla con las mayores componentes. Este patrón de razonamiento era esperado, dada la evidencia disponible con escolares y adultos (Gómez et al., 2014; Obersteiner et al., 2013; Vamvakoussi et al., 2012). No obstante, un grupo más pequeño (E, 8% de la muestra) mostró un comportamiento opuesto, vale decir seleccionó como la fracción más grande aquélla con las componentes menores. Las respuestas de este último grupo, a pesar de no coincidir con lo esperado en el contexto de la congruencia, están en línea con los resultados reportados en un estudio que entrevistó a escolares acerca de los métodos que usaban para comparar fracciones (Stafylidou y Vosniadou, 2004).

Los grupos B y D (los cuales incluyen al 17% y 9% de la muestra, respectivamente) mostraron patrones de puntajes similares, contestando alrededor del 90% correcto todos los tipos de ítem

excepto aquéllos congruentes sin componentes en común. Gómez et al. (2014) propusieron que este patrón puede originarse en una tendencia a seleccionar como la fracción mayor aquélla con el denominador más pequeño. Este método heurístico no es aplicable en los ítemes donde las fracciones tienen el mismo denominador pero, dada nuestra definición de congruencia, responde correctamente todos los ítemes incongruentes e incorrectamente todos los ítemes congruentes sin componentes comunes. Asumiendo que los estudiantes responden los ítemes con un denominador común usando una estrategia *ad hoc*, notamos que los puntajes de los estudiantes del grupo D se alinean muy bien con esta heurística. El grupo B, en cambio, puede ser descrito como presentando un comportamiento mixto entre (a) responder correctamente todos los ítemes y (b) una tendencia a usar la mencionada heurística del menor denominador. Una pregunta de gran interés para la investigación futura se relaciona con examinar cuán claramente distinguibles son los grupos B y D. Es posible que ambos grupos compartan una base de raciocinio similar, fluctuando entre el uso de las dos estrategias/heurísticas recién nombradas, variando solamente en las probabilidades de activación que asignan a cada una de ellas. Es también posible, alternativamente, que ambos grupos difieran de modo cualitativo en su entendimiento conceptual de las fracciones o de la comparación de fracciones.

Los puntajes de los estudiantes del grupo C (10% de la muestra) nos indican que alcanzan relativo éxito sólo cuando comparan pares de fracciones que comparten un numerador o denominador común, y más aún que en estos tipos de ítem muestran un claro efecto de congruencia. Estos estudiantes parecen tener conocimientos básicos acerca de qué son las fracciones, lo cual les permite razonar acerca de los ítemes que comparten una componente, pero carecen del conocimiento, procedimientos y las estrategias necesarias para enfrentar los ítemes más complejos.

Finalmente, el grupo F (7% de la muestra) exhibe un patrón de respuestas difícil de interpretar en ausencia de más información. Es posible que el algoritmo de agrupación haya formado este grupo juntando a los estudiantes cuyos puntajes no eran identificables con los de ninguno de los otros cinco grupos.

Al menos un par de los hallazgos obtenidos de nuestro análisis ponen en duda la idea de que los estudiantes en general sufren de un sesgo que los lleva a razonar de acuerdo a la variable de congruencia, que es el modo como se había interpretado los resultados de varios estudios previos. Primeramente, la existencia del grupo E, donde las respuestas de los estudiantes apuntan en la dirección opuesta a la esperada a la luz de la congruencia. Segundo, los grupos B y D presentan altos puntajes excepto en un tipo particular de ítem, que corresponde precisamente a un grupo de ítemes congruentes (aquéllos que no poseen componentes en común). Estos resultados sugieren, al menos, que un eventual sesgo hacia la congruencia no es en muchos casos la idea fuerza principal del razonamiento de los estudiantes. El uso de estrategias o heurísticas específicas para la comparación de fracciones podría, a cambio, constituir una mejor explicación para algunas de nuestras observaciones. Los estudiantes del grupo A podrían estar respondiendo de acuerdo a una regla de “componentes grandes, fracción grande”; aquéllos en el grupo E de acuerdo a “componentes chicas, fracción grande”; y los del grupo D de acuerdo a “denominador chico, fracción grande”. Es todavía posible que la congruencia juegue un rol apreciable en este contexto, explicando por ejemplo por qué el grupo A es significativamente más numeroso que el E, o bien por qué no se observa la presencia de un grupo similar a C donde los ítemes incongruentes tengan asociados mayores puntajes que los congruentes. Sugerimos al lector revisar un argumento alternativo dado por Gómez y Dartnell (2015) que cuestiona la relevancia cognitiva del concepto de congruencia en el marco de la comparación de fracciones.

VENTAJAS Y LIMITACIONES

En resumen, en este artículo hemos descrito en parte la gran variabilidad que hay en estudiantes de segundo ciclo básico en cuanto a las estrategias que utilizan para comparar fracciones. Queremos hacer notar que la tarea de comparación de fracciones fue capaz de mostrar una rica variedad de posibles modos de razonamiento a pesar de su brevedad. En efecto, la tarea constaba de 24 ítemes y cada uno de ellos tenía un tiempo límite de 10 segundos, lo que significa que la duración total del test fue de aproximadamente 4 minutos. Como esta tarea fue presentada en computador, es posible aplicarla en paralelo a grupos de estudiantes y simplificar la recolección de datos.

La aplicación por computador del cuestionario, junto con la ausencia de lápiz y papel para ayudarse y con el breve tiempo permitido para responder cada ítem, contribuyen de modo importante a sacar a la superficie las intuiciones básicas que los estudiantes tienen acerca de las fracciones. En este contexto, los estudiantes deben responder en modo espontáneo y sin recurrir a algoritmos escritos. Sin embargo, esta ventaja conlleva una limitación: este formato de tarea puede presentar complicaciones mayores para los estudiantes con baja memoria de trabajo (el lector interesado en conocer un ejemplo de investigación que muestra la relación de la memoria de trabajo con el cálculo mental puede revisar Alsina y Sáiz, 2004), quienes se beneficiarían de tener lápiz y papel al menos para poder escribir resultados intermedios. No se sabe tampoco cuánto afecta este formato de tarea a los estudiantes con un cierto grado de ansiedad matemática. Una revisión de la literatura conducida por Ashcraft y Krause (2007) muestra que tareas de dificultad mediana o alta, como es el caso de la comparación de fracciones en un caso general, inducen resultados más bajos en personas con ansiedad matemática. Un tema de interés para la investigación futura consiste, por tanto, en determinar cómo se comparan los resultados en comparación de fracciones usando el formato de tarea aquí presentado o usando uno tradicional de papel y lápiz.

IMPLICANCIAS

La posibilidad de descubrir, al menos indicativamente, los distintos patrones de razonamiento que los estudiantes aplican para comparar fracciones tiene relevancia tanto para efectos de la investigación en Educación Matemática y aquélla en Neurociencia del aprendizaje matemático, como para la práctica pedagógica. En las siguientes secciones, describimos brevemente los beneficios que un enfoque como el utilizado en este artículo podría tener para estas áreas.

Para la investigación cualitativa en educación matemática

Un gran número de investigaciones en Educación Matemática utilizan una metodología cualitativa, donde el uso de entrevistas guiadas o procedimientos de pensamiento en voz alta (*think aloud*) es muy común. Estos estudios aportan elementos importantes desde el punto de vista del entendimiento del razonamiento explícito que los estudiantes realizan, pero requieren una alta inversión en términos de tiempo y de recursos materiales y humanos para la realización de las entrevistas y su posterior análisis. En este contexto, un cuestionario de simple y breve aplicación que permita obtener una indicación preliminar acerca de las estrategias y modos de pensamiento de un gran número de estudiantes permitiría al investigador seleccionar en un modo más dirigido a un subconjunto de ellos para la realización de una entrevista en una sesión posterior. Esta idea permitiría al investigador, a su vez, seleccionar a los entrevistados en modo balanceado desde los distintos grupos revelados por el análisis de grupos, con la ventaja de poder obtener un muestreo más variado de entrevistados y además llegar más fácilmente a los grupos minoritarios.

Para la investigación en neurociencia del aprendizaje matemático

En años recientes ha surgido un creciente interés por estudiar cómo la mente y el cerebro humanos logran hacer matemáticas. Muchos de estos estudios utilizan métodos tecnológicamente avanzados como la electroencefalografía (EEG) y la resonancia magnética funcional (*functional magnetic resonance imaging,* fMRI). Sugerimos al lector interesado en saber más acerca de estas técnicas revisar el libro de Maestú Unturbe, Ríos Lago, y Cabestrero (2007), y los artículos de Barraza, Gómez, Oyarzún, y Dartnell (2014) y de Ischebeck, Schocke, y Delazer (2009) para ejemplos de investigaciones sobre fracciones que utilizan estas técnicas.

La validez de los resultados obtenidos a partir de estos métodos depende del grado en que se cumpla una suposición crucial, a saber el que los participantes de un estudio resuelven un problema matemático en cuestión usando los mismos procesos mentales. En el caso de la comparación de fracciones, sin embargo, observamos que los estudiantes aplican muy diversas estrategias a pesar de presentárseles la misma tarea. Es por tanto necesario que se chequee que los participantes de estudios futuros, especialmente en el caso de trabajar con escolares o con adultos no expertos matemáticos, tengan un mínimo nivel de homogeneidad respecto a sus estrategias utilizadas. En el caso del trabajo sobre fracciones, esto podría lograrse a través de la aplicación de una tarea breve como la presentada en este artículo.

Para la práctica pedagógica

Un elemento crítico para facilitar la interacción de enseñanza y aprendizaje en el aula es el uso de metodologías de evaluación cuyo objetivo sea, más allá de generar un índice de logro o no-logro, proveer información para la práctica pedagógica (Pegg, 2002). Un enfoque como el presentado en este artículo podría ser útil para esto, no sólo en el contexto de la comparación de fracciones. Un cuestionario breve, pero construido para la detección de ciertos errores básicos, puede permitir al docente descubrir grupos de estudiantes que comparten ciertas concepciones erradas. Este conocimiento adicional permite aumentar el conocimiento pedagógico del contenido del docente (e.g. Vergara Díaz y Cofré Mardones, 2014), por cuanto le puede ayudar a comprender las fuentes que causan las respuestas incorrectas. Asimismo, este conocimiento posibilita el diseño de una estrategia pedagógica adecuada para cada tipo de concepción errada, por ejemplo a través de la selección de ejemplos adecuados para su resolución en el aula, que pongan en evidencia por qué cierta estrategia (e.g. "denominador chico, fracción grande" en el contexto de la comparación de fracciones con diferentes numeradores y denominadores) no siempre es válida.

Referencias

Alsina, Á., y Sáiz, D. (2004). El papel de la memoria de trabajo en el cálculo mental un cuarto de siglo después de Hitch. Infancia y Aprendizaje, 27(1), 15-25.

Ashcraft, M. H. (1990). Strategic processing in children's mental arithmetic: A review and proposal. En D. F. Bjorklund (Ed.), Children's strategies: Contemporary views of cognitive development (pp. 185-212). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ashcraft, M. H., y Krause, J. A. (2007). Working memory, math performance, and math anxiety. Psychonomic Bulletin & Review, 14(2), 243-248.

Barraza, P., Gómez, D. M., Oyarzún, F., y Dartnell, P. (2014). Long-distance neural synchrony correlates with processing strategies to compare fractions. Neuroscience Letters, 567, 40-44.

Gómez, D. M., y Dartnell, P. (2015). Is there a natural number bias when comparing fractions without common components? A meta-analysis. En K. Beswick, T. Muir, y J. Wells (Eds.), Proceedings of the 39th Psychology of Mathematics Education conference (Vol. 3, pp. 1-8). Hobart, Australia: PME.

Gómez, D. M., Jiménez, A., Bobadilla, R., Reyes, C., y Dartnell, P. (2014). Exploring fraction comparison in school children. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36 (Vol. 3, pp. 185-192). Vancouver, Canada: PME.

Ischebeck, A., Schocke, M., y Delazer, M. (2009). The processing and representation of fractions within the brain: An fMRI investigation. NeuroImage, 47, 403-413.

Jain, A. K. (2010). Data clustering: 50 years beyond K-means. Pattern Recognition Letters, 31, 651-666.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. A. Lesh y D. A. Bradbard (Eds.), Number and measurement: Papers from a research workshop (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Maestú Unturbe, F., Ríos Lago, M., y Cabestrero, R. (2007). Neuroimagen: Técnicas y procesos cognitivos. Barcelona: Elsevier Masson.

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J., y Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. Learning and Instruction, 28, 64-72.

Pegg, J. (2003). Assessment in Mathematics. En Royer, J. M. (Ed.) Mathematical Cognition (pp. 227-259). Information Age Publishing.

Stafylidou, S., y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. Learning and Instruction, 14, 503-518.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., y Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. The Journal of Mathematical Behavior, 31, 344-355.

Vergara Díaz, C., y Cofré Mardones, H. (2014). Conocimiento pedagógico del contenido: ¿El paradigma perdido en la formación inicial y continua de profesores en Chile? Estudios Pedagógicos (Valdivia), 40, 323-338.

[i] Los autores agradecen a los estudiantes, padres y colegios que participaron en este estudio. Este trabajo fue apoyado económicamente por los programas CONICYT PIA/Basal FB0003 y PAI/Academia 79130029.

ARGUMENTACIÓN DURANTE LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS: ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN EN EL AULA

Argumentationthrough teaching the whole numbers: analysis of the interaction in the classroom

Howard, S.[a], y Solar, H.[b]

Universidad Diego Portales[a], Pontificia Universidad Católica de Chile[b];
correos electrónicos: sebastian.howard@udp.cl, hsolar@uc.cl

Resumen

El presente pretende abordar el análisis de situaciones de enseñanza donde se pone en juego la argumentación en aulas en las que se resuelve un problema de Números Enteros. Dicho análisis se centra en el estudio estructural e interaccional de la conversación en la sala de clases, a través de elementos de análisis cualitativo-interpretativo. Se establecen los modos en que se desarrolla la conversación durante procesos de enseñanza y aprendizaje en los que hay argumentación. El principal resultado es que la profesora, cuando hay argumentación en el aula, evita evaluar las intervenciones de los estudiantes, manteniendo un rol de orquestar la negociación de los argumentos presentados por los estudiantes.

Palabras clave:*argumentación, números enteros, interacciones de aula.*

Abstract

This analysis is intended to address situations where teaching comes into the argumentation in classrooms about whole numbers. This analysis focuses on the structural and interactional study of the conversation in the classroom, through elements of qualitative-interpretative analysis. The ways in which the conversation takes place in teaching and learning processes in which there are argumentation. The main result is that the teacher, when exist argumentation in the classroom, prevents evaluate interventions for students, maintaining the role of orchestrating the negotiation of the arguments presented by the students.

Keywords: *argumentation, whole numbers, classroom interactions*

INTRODUCCIÓN

Las Bases Curriculares reconocen en el aprendizaje de las matemáticas un dominio privilegiado para perfeccionar, entre otras, la capacidad de argumentación. Más específicamente define la habilidad de Argumentar y Comunicar como una de las cuatro habilidades que promueven el desarrollo del pensamiento matemático (Mineduc, 2013). Las mismas Bases definen una de las características principales de dicha habilidad: está íntimamente ligada a la conversación, a tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos, a escuchar, a utilizar metáforas y representaciones. En resumen, el currículum chileno prescribe explícitamente la necesidad de implementar sesiones de clases donde los estudiantes aprendan a argumentar en el aula de matemáticas.

Actualmente hay suficiente evidencia para sostener que la participación en discusiones aporta al aprendizaje de las matemáticas (Conner, Singletary, Snith, Wagner y Francisco, 2014), sin

embargo, todavía sabemos poco respecto de cómo son las interacciones que promueven espacios para que los estudiantes desarrollen sus habilidades de argumentar en el aula de matemáticas.

En el presente se muestran los resultados de un análisis que apunta a averiguar cómo son las interacciones cuando en un aula de matemáticas se promueve el desarrollo de la argumentación.

Antecedentes

En Chile contamos con alguna evidencia que nos permite caracterizar los tipos de interacción que se sostienen en las salas de clases.Radovic y Preiss (2010), en su estudio de patrones de discurso en clases de matemáticas de Segundo Ciclo Básico en Chile, identifican un patrón de interacción compartido, caracterizado por preguntas cerradas y escasa participación de los estudiantes. A su vez, Preiss, Larraín y Valenzuela (2011) concluyen que, no obstante hay cierta diferencia al avanzar los niveles de quinto al octavo básico, las interacciones suelen estar focalizadas en la presentación mecánica de la información y en la resolución mecánica de problemas. Muy escasamente encuentran procesos de razonamiento matemático.

También con la mirada en las interacciones de aula, los trabajos de Villalta y Martinic (2013) ponen su atención en observar aulas de liceos vulnerables que han obtenido alto puntaje SIMCE. Los resultados demuestran que estos puntajes destacados no tienen un reflejo en aula, de interacciones de alto nivel cognitivo. Específicamente, los estudiantes no tienen oportunidad de indagar, realizar generalizaciones, planear estrategias para resolver problemas, evaluar críticamente o levantar hipótesis. Una observación clave de los autores es que el tipo de pregunta cerrada que suelen dirigir los docentes tiene como consecuencia que ellos mantengan el control del conocimiento, en lugar de promover el pensamiento autónomo (Concha & Howard, en prensa).

Por otra parte, Solar y su equipo estudian la argumentación como competencia matemática, cómo se gestiona su desarrollo en el aula de matemáticas (Solar, Azcárate y Deulofeu (2012).

Entonces, pese a contar con algunos hallazgos que nos permiten caracterizar las interacciones en las salas de clases de matemáticas, no contamos con evidencias suficientes que nos permitan describir las características de las interacciones en aulas de matemáticas donde se desarrolla la argumentación. ¿Cómo son esas interacciones? ¿Cómo son las intervenciones que las componen? En otras palabras quién, cómo y cuándo interactúa con otro al momento de desarrollar una clase donde se pone en juego la argumentación.

Marco teórico

Los estudios empíricos referidos a los intercambios, por lo general se refieren a la estructura de diálogo triádico (Wells, 1993). El diálogo triádico se compone de una iniciación (I) generalmente cómo pregunta del profesor, respuesta (R) donde el alumno intenta responder, y retroalimentación (rt) donde el profesor emite algún tipo de evaluación. Según este investigador la mayor parte del discurso del aula correspondería a este tipo de estructura. Mas debemos complementar a esta estructura triádica las “E”, evaluaciones que actúan del mismo modo que las “rt”, pero de un modo específicamente evaluativo, es decir, aparecen cuando el sujeto que retroalimenta ya conoce la respuesta, y la busca en su o sus interlocutores. Además podemos incorporar la distinción entre una respuesta que reinicia (R-I) el intercambio al esperar un cierre y otra que prepara el cierre dando cuenta de lo indicado en el contenido del inicio (R) (Howard, 2004).

Luego, los intercambios describen la conversación entre los sujetos, y para establecer un nivel de análisis interaccionalentenderemos que se pueden componer de rituales de acceso, argumentaciones, reformulaciones y negociaciones (Madagán, 1994).

Los rituales de acceso los denomina Goffman (1983) como exhibiciones rituales que marcan una modificación en la medida del acceso, los más típicos son el saludo y la despedida, aumentando el acceso con el saludo, el que luego disminuye con la despedida. En el ámbito educativo pueden

existir rituales de acceso como dar o pedir la palabra, el "pasar lista", así como el saludo y despedida (sean generales o individuales).

En torno a las coordinaciones de argumentación se reúnen los fenómenos de cierre y expansión de los intercambios, su función es entonces estructurante ya que busca darle completud al intercambio, ya sea permitiendo un cierre final o un cierre para recomenzar. Se relaciona con el concepto de acuerdo, pues cuando se llega a acuerdo queda menos por decirse, mas cuando aún hay desacuerdo debe buscarse completar el intercambio con intervenciones argumentativas que contradigan (dando lugar a un nuevo intercambio), reformulen (equivalente al anterior pero realizada por el mismo sujeto interviniente), o tematicen lo argumentado (para sancionar lo inapropiado de alguna intervención) (Moeschler, 1989).

Para de Gaulmyn (1987) las reformulaciones están marcadas formalmente por la recuperación explícita de una misma estructura de enunciado (recuperación léxica, morfosintáctica o semántica), tiene como variantes la paráfrasis, la definición, la corrección y la repetición. Las reformulaciones son a la vez repeticiones parciales y recuperaciones modificadas que tienen valores de evocación y de invención.

Sin negociación el diálogo es monólogo, la negociación no permite simplemente llegar a un acuerdo, sino que sanciona los reajustes dialogales constantes y necesarios para la continuación y cierre del intercambio. Puede ser anticipada, metadiscursiva y metainteraccional. La anticipada se refiere a aquella que busca anticipar los contraargumentos que se podrían oponer y a rechazarlos por medio de la misma estrategia. La metadiscursiva se refiere a aquellas que buscan interpretar retroactivamente la función de una intervención anterior. La metainteraccional se refiere a los deberes y derechos de los participantes en una interacción (Moeschler, 1989). Así, en el aula podemos ver con frecuencia negociaciones anticipadas en las intervenciones del profesor que buscan predecir dudas o errores de los alumnos, negociaciones metadiscursivas para clarificar el sentido de lo que se ha dicho y negociaciones metainteraccionales que se refieren generalmente al modo en que se interviene, a lo que es o no conveniente en un aula de matemáticas (Howard, 2004).

Por otra parte, para el modelo de argumentación matemática de Toulmin (1958), la estructura de la argumentación en la conversación no sigue la lógica del silogismo, sino que una estructura que contiene: datos, garantía, respaldo, calificador modal, refutadores y conclusión. Cada uno de ellos se puede encontrar en las secuencias donde hay presencia de argumentación.

Metodología

En el contexto de una investigación referida al desarrollo de la argumentación en el aula de matemáticas en Chile, Solar y Deulofeu (2015) observaron ocho clases, correspondiente a seis profesores (dos profesores han sido observados en dos oportunidades) y se seleccionaron las clases en base a la existencia de argumentación desde la estructura de Toulmin (1958).

Los datos utilizados en el presente se derivan de dicha investigación, específicamente se utilizaron las video grabaciones y transcripciones de una clase de séptimo año básico (12-13 años) de una escuela municipalde la ciudad de Concepción en Chile.

Con esos antecedentes se procedió a codificar los intercambios, tanto en sus componentes estructurales: I, R, R-I, rt, rt-I, E, E-I, como en sus componentes interaccionales: coordinaciones de ritual de acceso, argumentación, negociación metadiscursiva, negociación anticipada o negociación metainteraccional. Entonces, para cada intervención, se codificó la función estructural e interaccional que cumple en la conversación, en total se codificaron 366 intervenciones.Para luego analizar los resultados y compararlos con la estructura de Toulmin presentada para ellos por Solar y Deulofeu (2015).

Resultados

Para el presente, utilizamos una secuencia de enseñanza donde se está estudiando los números enteros, la profesora Matilde presenta el siguiente problema "Un número entero y su inverso distan en la recta 12 unidades ¿qué números son?". Solar & Deulofeu (2015) han determinado que en ella se produce un proceso de argumentación, en resumen sus hallazgos son: Los números que Matilde espera que respondan los estudiantes son -6 y 6, para ello dibuja una recta numérica para situar los números; ella escucha que la respuesta genérica de los estudiantes corresponde a los números -12 y 12. La profesora en vez de tratar el error les hace leer nuevamente el problema y pregunta por el significado del término "distan"; varias de las respuestas de los alumnos le dan como significado la distancia entre 0 y un número, en vez de la distancia entre dos números cualquiera; ello puede explicar los valores dados de 12 y -12 que están a 12 unidades de distancia del 0 cada uno. Matilde por medio de varias acciones docentes y de la utilización de la recta numérica, sigue trabajando con los estudiantes el significado de distan, para contrastar la idea instalada de que la distancia se cuenta desde 0 hasta el número; entonces, emerge en uno de los estudiantes que el significado de distan se asocia a la distancia entre dos números, y si se eligen -12 y 12, se debe contar la distancia entre ambos números, que no es 12 sino 24.

Matilde selecciona algunas de las respuestas para ponerlas en común para generar conflicto con la idea instalada de medir la distancia entre 0 y un número, y no pone en común sólo la respuesta de Martín quien señala que la distancia es entre -12 y 12 en vez de 0 y 12, sino que incentiva a que el resto del curso opine sobre su idea. Al obtener solo 3 respuestas, dirige una nueva pregunta a David respecto a qué punto de referencia se mide la distancia, y este sigue sosteniendo que desde el 0 al igual que Roberto y Mario quienes lo apoyan. A continuación Matilde le da la palabra a Francisco quien es el primero en explicar por qué se mide la distancia desde -12 a 12, y asimismo refuta la idea instalada de 0 a 12. Matilde, más que validar la intervención de Francisco, le invita a seguir describiendo su idea para que el resto del curso la escuche; sigue habiendo alumnas, como Isabel, que continúan con la idea de que la distancia es entre 0 y 12, por lo que la profesora pide más opiniones y ante el silencio hace leer nuevamente el enunciado para dilucidar el significado de distan. A partir de su nueva lectura varios alumnos, entre ellos Roberto, señalan que los números tienen que distar 12 unidades, y no del 12 al otro, lo cual contribuye a comprender el enunciado que lo que busca es un número y su inverso cuya distancia es 12 unidades entre ellos. Esta aclaración permite que emerja la idea de Juan, quien dice que debe ser del 0 al 6 para que diste 12 unidades. En este momento, Matilde le incentiva a seguir repitiendo su idea, y Juan señala como respuesta que los números son -6 y 6. Matilde no valida la respuesta sino que sigue promoviendo que otros estudiantes opinen sobre este resultado, entre ellos Roberto quien no está de acuerdo con los números señalados y sigue sosteniendo que la respuesta es -12 y 12. (Solar et. al, 2015)

¿Cómo es la estructura de la interacción en la secuencia analizada?

En la misma secuencia de enseñanza, desde la perspectiva del análisis interaccional, encontramos en su mayoría inicios (I) y reinicios (R-I), que buscan abrir los intercambios. Ellos comprenden más del 85% de los componentes de los intercambios codificados. Dicho de otra manera, la profesora y los estudiantes buscan mantener la conversación, iniciarla y reiniciarla. Veamos este tipo de interacción en el siguiente episodio:

Matilde: Ya, podría ser positivo. ¿Por qué positivo?
Alumno: Porque no está dici…no está diciendo que…no porque dice que son 12 unidades.
Matilde: Son 12 unidades. ¿Qué pasa con estas 12 unidades?
Alumno: Se coloca en el inverso
Matilde: ¿Cómo?
Alumno: Se coloca en el inverso aditivo
Matilde: ¿En el inverso aditivo?

Los alumnos van dando respuesta a la profesora, pero con el objeto de seguir la conversación, de hecho Matilde en sus intervenciones va reformulando lo planteado por los alumnos y luego continúa con el intercambio.

¿Cómo es la interacción conversacional de la secuencia analizada?

En los intercambios analizados encontramos en su mayoría intervenciones donde los participantes argumentan y negocian. Ellos comprenden más del 85% de los componentes de los intercambios codificados. Cabe destacar también que esos espacios de negociación están referidos en su mayoría al contenido de la conversación (metadiscursiva), más que a dirigir u orientar a los participantes en sus deberes y derechos (metainteraccional). Por ejemplo, en el episodio presentado, las intervenciones de Matilde pretenden negociar el contenido de las intervenciones anteriores hechas por los estudiantes.

Por su parte, los Rituales de Acceso utilizado en la secuencia analizada son solo 19 de 366.Casi la totalidad de ellos son utilizados para iniciar o reiniciar intercambios.Los que son parte de un Inicio son utilizados por los alumnos (dos casos) para iniciar un intercambio con la profesora y por la profesora tanto para solicitar la intervención de un alumno en particular, como para solicitar la atención de ellos.

En la secuencia siguiente la profesora Matilde ejecuta dos rituales de acceso de éste tipo: "¿qué opinas Marcelo?" y "¿A ver Ignacio?".Los rituales de acceso que son parte de un Reinicio son utilizados por los alumnos solo en un caso, en que se argumenta para reiniciar un intercambio. Los que son utilizados por la profesora, cumplen la función de solicitar la intervención de algún alumno en particular o de solicitar la atención de ellos. Los Rituales de Acceso usados en el cierre de intercambio, solo son utilizados por la profesora al final de la secuencia, para cerrar la clase.No se aprecian rituales de acceso en las Respuestas.

> Matilde: Ya, ¿qué opinas Marcelo?
>
> Marcelo: Nosotros nos dejamos llevar por…porque dice 12 unidades, por eso estamos haciendo todo con el 12
>
> Alumnos: Si
>
> Marcelo: Y se supone que tiene que, el resultado tiene que dar 12 unidades y ese no es un número
>
> Matilde: ¿A ver Ignacio?
>
> Ignacio: Porque ahí dice un número, no da el número y por abajo dice 12 unidades y nosotros dijimos que era 12, pero no está hablando de esos números la distancia

Las coordinaciones de argumentación utilizadas en la secuencia analizada son 148 de 366.En su mayoría son usados para Reiniciar los intercambios, argumentando y esperando una reacción por parte del otro. Solo una de cada cinco de las argumentaciones presentes en la secuencia se usa para responder a alguna intervención anterior, en la secuencia antes presentada se observan coordinaciones de argumentación en las intervenciones de Marcelo y de Ignacio.Las intervenciones con coordinación de argumentaciónque son parte de un Inicio son solo cuatro, todas emitidas por los alumnos, en ellos presentan argumentos referidos al tema tratado en la secuencia, esperando con ello una confirmación por parte de la profesora o de sus compañeros.

Las que son parte de un reinicio son la mayor parte: 110, un ejemplo de ellas es la primera intervención de Marcelo, que reinicia el intercambio y que es confirmada por algunos alumnos. Las coordinaciones de argumentación son emitidas por la profesora y por los estudiantes. Los alumnos en ellos presentan sus argumentos frente a cuestiones que se preguntan. Buena parte son números o su declaración de acuerdo respecto de una intervención previa "Sí" o "No", en dichos casos están precedidos por una negociación metadiscursiva. También aparecen en ocasiones intervenciones de coordinación de argumentación en los reinicios, donde los estudiantes presentan razones: "Tiene

que ser cualquier número porque dice que disten 12 números, 12 unidades, no está diciendo del…distar de 12 al dos…al 0". Los que son parte de intervenciones de respuesta son 28, todos ellos emitidos por los estudiantes. Trece de ellas corresponden a argumentaciones que responden indicando el acuerdo o no con una intervención previa "Sí" o "No". Aparecen también argumentaciones donde los estudiantes, además de responder, presentan las razones de sus posiciones: "Porque va retrocediendo, no va aumentando para el 0 y del 0 va aumentando a la derecha". Las que son parte de un Cierre son 6, usadas por la profesora y los estudiantes, en ellos tratan de presentar su punto de vista para cerrar un intercambio, estableciendo argumentos que responden a una negociación metadiscursiva anterior.

Las Intervenciones de Negociación utilizadas en la secuencia analizada son 143de 366.Un 85% de ellas son usadas para expandir los intercambios, ya sea en Inicios o en Reinicios. Catorce de las 143 son usadas también en el cierre del intercambio (estas son en su mayoría interaccionales, usadas por la profesora para declarar su acuerdo con el intercambio sostenido).Las que son parte de un Inicio son 46. Nueve de ellas son metainteraccionales, por lo que se aprecia que cerca de cuatro quintos de las intervenciones de negociación en inicios de intercambios son metadiscursivas, donde se privilegia la interpretación de intervenciones previas o se solicita un pronunciamiento respecto de una pregunta, casi la totalidad de las intervenciones de inicio y negociación son preguntas explícitas.Las que son parte de un Reinicio son 76. Dieciocho de ellas son metainteraccionales, en su mayoría como parte de las intervenciones de la profesora, en las que solicita al curso escuchar la intervención de un estudiante. El resto son metadiscursivas (la gran mayoría) en las que los alumnos presentan su posición respecto del objeto de la conversación, o respecto del contenido de una intervención previa de otro estudiante; 43 de ellas son preguntas explícitas de la profesora. Las intervenciones de negociación que son en Respuesta son solo 7, lo que es de esperar, puesto que en las respuestas no se pretende expandir los intercambios, sino que contraerlos, darles cierre respondiendo a las negociaciones y argumentaciones previas. Dos de las siete son metainteraccionales y el resto metadiscursivas. Las que son parte de un cierre son 14, en su mayoría metadiscursivas, donde la docente declara su conformidad con los intercambios sostenidos a través de un marcador: "ya". En una de ellas la profesora presenta la necesidad de trabajar, independiente de que se comentan errores:

> Matilde: ¿Otra opinión? [Silencio] No importa que no nos…eh, no importa que nos equivoquemos, si lo que queremos aquí es solucionar el problema.
> Matilde: Nuevamente [indica que todo el curso lea el problema]

Las intervenciones de Reformulación son 38 de 366.Más de la mitad son usadas en momentos de inicio o de cierre de los intercambios, siendo el resto de reinicios o de respuestas. Dicho de otro modo, las reformulaciones son usadas para expandir y cerrar los intercambios. Prevalecen las intervenciones en que la profesora reformula intervenciones anteriores para iniciar, reiniciar o cerrar intercambios. Aquí se nota, tanto interaccional como estructuralmente, que es ella la que dirige el discurso del aula.

Las reformulaciones que son parte de un Inicio son 7. Solo una de ellas es parte de una intervención de un alumno, en el resto la profesora reformula las preguntas o respuestas dadas por los estudiantes en intercambios anteriores.

Las que son parte de un Reinicio son 14, todas ellas emitidas por la profesora, donde reformula una intervención anterior de un alumno, o una pregunta hecha por ella previamente, con el objetivo de generar una respuesta en los estudiantes. Por otro lado, las que son parte de un cierre son 14, en las que la profesora -vía reformulación- declara su conformidad con el intercambio sostenido, no necesariamente con el contenido de dicho intercambio, en el que algunas veces los estudiantes están en un error, pero ella lo que busca es declarar su acuerdo con los argumentos, no necesariamente con el contenido de ellos.

DISCUSIÓN

A partir de los hallazgos podemos afirmar que la interacción que favorece la presencia de procesos de argumentación está conformada por un tipo de interacción que se construye colectivamente, donde la profesora no interviene con coordinaciones donde argumenta, ni tampoco para negociar o para corregir las intervenciones de los alumnos, sino que negocia metadiscursivamente sus intervenciones buscando la aparición de garantías y refutadores de modo de promover la aparición de los componentes de la argumentación.

Dicho de otro modo, las intervenciones con las que la profesora dirige la conversación cuando enseña la argumentación en el contexto de la resolución de un problema de números enteros, se caracterizan por interpretar retroactivamente la función de una intervención anterior (Moeschler, 1989), así logra que sus estudiantes coordinen argumentos que dan garantías a lo presentado: "porque del cero se empieza a contar de nuevo" o que refuten lo presentado: "es como multiplicarlo por dos, sería veinticuatro".

Los alumnos responden, no para que se les evalúe la pertinencia o corrección de sus intervenciones, sino para configurar una conversación en la que se busca responder a la pregunta de cuáles son los números que, en la recta numérica distan 12 unidades, y uno es el inverso aditivo del otro.

Referencias

Concha, S.& Howard, S. (en prensa) Interacciones verbales en el aula y desarrollo del pensamiento: estado de la situación en nuestro país, análisis y propuestas formativas. En XXXX (pp. Ggg-hhh). Santiago, Chile: Ediciones UC.

Conner, A. M., Singletary, L., Smith, R. C., Wagner, P. A. & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. EducationalStudies in Mathematics, 86, 401-401.

Gaulmyn, M. (1987). Es decir…(reformular). En Madagán, C. (comp.) (1994) Blablablá La conversación. Buenos Aires: La Marca.

Goffman, E. (1983) Los ritos de las relaciones en público. En Madagán, C. (comp.) (1994) Blablablá La conversación. Buenos Aires: La Marca.

Howard, S. (2004) Representaciones sociales de nociones matemáticas en el aula: una mirada desde la interacción. Tesis Doctoral. Pontificia Universidad Católica de Chile.

Madagán, C. (1994) Blablablá La conversación. Buenos Aires: La Marca.

Mineduc (2013) Bases Curriculares Sector Matemática. Santiago: Ministerio de Educación.

Moeschler, J. (1989) Conversación y argumentación. En Madagán, C. (comp.) (1994) Blablablá La conversación. Buenos Aires: La Marca.

Preiss, D., Larraín, A. & Valenzuela, S. (2011) Discurso y pensamiento en el aula matemática chilena. Psykhe, 20(2), 131-146.

Radovic, D. & Preiss, D. (2010) Patrones de discurso observados en el aula de matemática de segundo ciclo básico en Chile. Psykhe, 19(2), 65-79.

Villalta, M. & Martinic, S. (2013) Interacción didáctica y procesos cognitivos. Una aproximación desde la práctica y discurso del docente. Universitas Pscychologica, 12 (1) 221-233.

Solar, H., Azcárate, C. & Deulofeu, J. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. Enseñanza de las Ciencias. 30 (3), 133-154.

Solar, H. & Deulofeu, J. (2015) Condiciones para promover la argumentación en el aula de matemáticas. X I V C I A E M - I A C M E, Chiapas, México

Solar, H., Rojas, F., Ortiz, A. & Ulloa, R. (2012). Reflexión docente y competencias matemáticas: un modelo de trabajo con docentes. RECHIEM: Revista Chilena de Educación Matemática. 6(1) 257-267.

Toulmin, S. (1958).The uses of argument. Cambridge: Cambridge University Press.

HACIA UN MODELO DE FORMACIÓN CONTINUA BASADA EN LA EXPERIENCIA[1]

Towards an experience-based model for teaching education

Ulloa, R.[a], Ortiz, A. [a] y Solar, H.[b]

[a] Universidad Católica de la Santísima Concepción, [b] Pontificia Universidad Católica de Chile.
rulloa@ucsc.cl [a], aortiz@ucsc.cl [a], hsolar@uc.cl [b]

Resumen

Se presentan los resultados parciales de un proceso de investigación que busca proponer un modelo de formación docente, a partir del análisis de aquellas características centrales de una metodología que se ha implementado con éxito en los últimos años. Tal como se observará, una progresión articulada de estudio casos en donde se analiza la práctica de otros y, luego, la propia, permite superar los elementos de un proceso de formación tradicional. Entre las características de la metodología analizada, destacan el estudio de un conocimiento especializado asociado al aula matemática, en donde se elicitan ideas de los profesores en contextos donde la práctica es el foco y el medio para desarrollar conocimientos profesionales.

Palabras clave: *Formación continua, Conocimiento Base para la Enseñanza, Competencias Matemáticas, Argumentación en el aula de matemáticas.*

Abstract

Partial results of a research process aimed to the proposal of a model of in-service teachers education, from the analysis of central features of a successful methodology applied last years. It will be showed that an articulated progression of case studies where practices of others and self are analyzed, surpassing the elements of traditional models. Some characteristics remarks in the related methodology: the study of a specialized knowledge for teaching mathematics, by the elicitation of the teachers' ideas in contexts where the practice is focus and medium for the development of professional knowledge.

Keywords: *In-service Teacher Education, Knowledge Base for Teaching, Mathematical Competences, Argumentation in the mathematic classroom.*

INTRODUCCIÓN

El grupo de investigación COMMAT ha venido realizando investigaciones sobre la formación de profesores, particularmente para el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de enseñanza básica. En particular, nos ha interesado indagar en la formación en prácticas docentes que promueven el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes, especialmente de la argumentación en el aula matemática, y la relación de los procesos argumentativos con la gestión de contingencias (Solar, Deulofeu, Ortiz y Ulloa, 2015). Los resultados se han obtenido en base a la aplicación de una metodología de formación continua llamada Metodología de Trabajo Docente (MTD), la cual se ha diseñado (Solar et al., 2011) y validado en proyectos anteriores, que articula el aprendizaje de un conocimiento didáctico con la reflexión sobre la práctica que se requiere del profesor para apropiarse de dicho conocimiento. La metodología se ha caracterizado por problematizar situaciones de enseñanza por medio de análisis de la práctica de aula, e incentivando la reflexión permanente del profesor, teniendo como objetivo que el profesor profundice en las reflexiones que puede hacer de las prácticas tanto de sus compañeros como de otros, en contexto de

un trabajo colaborativo, en que el formador va colaborando con el docente en la preparación de sus clases y va monitoreando el proceso mediante la observación de sus clases. Dicha metodología se ha llevado a cabo por medio de un ciclo de formación continua con profesores, que más que avanzar linealmente por fases, supone un trabajo en espiral, en que la ejecución de cada fase permite profundizar en las fases anteriores. Los resultados obtenidos nos han llevado a preguntarnos cuáles son las características fundamentales de la metodología que nos permitan formular un modelo más general de formación que vaya más allá del contexto de formación para la promoción de competencias matemáticas. Por tanto, la problemática de esta investigación, enmarcada en la formación permanente de profesores, tiene relación con la identificación y descripción de aquellas dimensiones particulares de la metodología que se pueden postular como centrales para la elaboración de un modelo más general para el desarrollo profesional del profesor que enseña matemáticas, teniendo como consecuencia que este modelo puede potencialmente ser utilizado para promover una variedad de conocimientos didácticos.

MARCO REFERENCIAL

Formación continua de profesores

En los últimos años, se ha puesto un especial foco en la problemática de investigar formas de trabajar con docentes en ejercicio, en el marco de promover su desarrollo profesional. Se ha observado que los profesores muestran grandes dificultades para transferir y poner en práctica los conocimientos adquiridos en los procesos de capacitación, a sus propias prácticas, sobre todo ello supone generar cambios paradigmáticos en sus prácticas. Aquí aparecen grandes dificultades, tensiones y resistencias que han sido ampliamente documentadas en la investigación. Los reportes señalan que aquellos procesos de formación que han obtenido resultados positivos han implicado sustantivamente a los docentes durante el proceso de capacitación. Roesken (2011) señala que el profesor aprende estableciendo relaciones entre la teoría y la práctica, en donde su conocimiento profesional se desarrolla contrastando creencias y experiencias en contextos reflexivos y colaborativos.

Roesken (2011) destaca 4 modelos de formación continua. La *Enseñanza en contexto* (Schoenfeld, 1999), que describe que las acciones de los profesores son acciones realizadas en momentos específicos, con intenciones determinadas por el conocimiento y las creencias del profesor, por lo que el trabajo sobre estos dos elementos es central al proceso. El modelo de aspectos profesionales (Llinares y Kramer, 2006) sitúa al profesor en formación como un actor social, e identifican tres materias de estudio: contenido, contexto y comunidades. Por su parte, Krainer (2002) propone un modelo de cuatro dimensiones de desarrollo profesional: acción, reflexión, autonomía y participación en redes de colaboración. Finalmente, Clarke y Hollingsworth (2002) proponen avanzar desde enfoques tradicionales de formación hacia modelos interconectados de desarrollo profesional, que involucra activamente al profesor en la aplicación y reflexión sobre dominios de conocimiento personales, externos, de la práctica y de resultados.

Como se puede observar, todos estos modelos incluyen al conocimiento como un elemento central de la formación. La calidad y características de aquel conocimiento propio de un profesor de matemática ha sido motivo de amplio debate e investigación de la comunidad académica, en donde destacan los ampliamente conocidos aportes de los modelos del Conocimiento Pedagógico del Contenido o PCP, y el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Considerando la diversidad de modelos posibles de utilizar, en adelante emplearemos el término "conocimiento didáctico-matemático" como concepto aglutinador de estos modelos.

Metodología de trabajo docente

Desde el año 2010, la metodología de trabajo docente se ha utilizado en diversos proyectos de investigación y de desarrollo que han implicado una formación de profesores en la temática de cada uno de estos proyectos, entre otros: FONIDE 511091 (2010-2011): formando profesores en el

desarrollo de competencias matemáticas (Solar et al., 2011); Proyecto de docencia UCSC FAD 01-2013 (2013): utilizada para la formación inicial de profesores en gestión de aula de matemáticas; Fondecyt de Iniciación 11130675 (2014-2015): buscando promover en los profesores el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. En ellos, la metodología ha permitido que los profesores se hayan apropiado de conocimiento didáctico-matemático específico, articulado con prácticas para la gestión del aula matemática, en relación a la promoción del desarrollo de competencias matemáticas. Las experiencias descritas han validado la metodología como modelo para el desarrollo profesional del profesor de matemáticas (Solar et al., 2011; Solar, Rojas, Ortiz y Ulloa, 2012; Solar y Deulofeu, 2015; Solar, Deulofeu, Ortiz y Ulloa, 2015).

La metodología originalmente se constituyó de 3 etapas: a) estudio de un conocimiento didáctico-matemático especializado del profesor que enseña matemática mediante el análisis de la práctica de otros, b) análisis de la propia práctica y el diseño de clases en base al conocimiento en estudio, c) implementación y evaluación de clases con criterios basados en el conocimiento en estudio. Después de varios proyectos de aplicación, hemos visto que es mejor, desde la perspectiva de la progresión del proceso de formación, separar el análisis de la propia práctica con el diseño de clases y unir este último con la aplicación, resultando finalmente que la secuencia de formación se conforme de 4 etapas: a) Estudio del conocimiento, analizando la práctica de otros; b) Estudio del conocimiento, analizando la práctica propia; c) Puesta en acción del conocimiento, a través de la planificación e implementación de clases; d) Evaluación reflexiva de la práctica, bajo criterios dados por el conocimiento en estudio. Hemos identificado además la conveniencia de iterar estas etapas en ciclos dentro del proceso de formación, lo que supone un trabajo en espiral, en que la ejecución de cada ciclo permite remirar y profundizar en las fases anteriores.

La descripción de las distintas etapas muestra cómo opera la secuencia de estudio, que busca la progresión tanto del estudio del conocimiento didáctico-matemático, como de las tareas que los participantes emprenden durante el proceso. Para comprender los criterios bajo los cuales esta metodología se organiza, es necesario también visibilizar los principios orientadores que fundamentan la propuesta. A continuación se indican estos principios, sin una jerarquía u orden particular: a) Un profesor se desarrolla en contextos de trabajo colaborativo con pares; b) El conocimiento requerido por un profesor que enseña matemática es de naturaleza didáctica-matemática; c) El trabajo de un profesor en formación debe articular la teoría con la práctica; d) El estudio de la práctica se realiza con base a evidencias, en especial aquellas propias de su contexto.

Se puede observar que estos principios van en la línea de los modelos destacados por Roesken (2011), en la página anterior. A pesar de lo anterior, dos hechos nos incentivaron a poner a la misma metodología como objeto de estudio. En primer lugar, la convicción que la metodología permitía abordar conocimientos no necesariamente asociados a promover competencia matemática, y luego, la identificación durante la implementación de ciertas características que no estaban reflejadas en los principios originalmente enunciados. En adelante, se describirá el método de investigación a través de los cuales pudimos identificar aquellas características centrales a la metodología, para luego comunicar los resultados de ésta.

MARCO METODOLÓGICO

Como contexto, cabe señalar que el estudio se realizó en el marco del proyecto Fondecyt de Iniciación 11130675, que buscaba estudiar el desarrollo de la habilidad Argumentar y Comunicar en el aula de matemáticas, y su relación con la gestión de eventos contingentes ocurridos durante la clase. Para ello, se implementó un seminario de 1 año y medio de duración, compuesto por 20 sesiones, en los que participaron 10 profesores de educación básica de la provincia de Concepción. Para el diseño del seminario se decidió utilizar la metodología de trabajo docente ya descrita, y se organizó un equipo de trabajo compuesto por el investigador principal y dos formadores de profesores con experiencia en formación inicial y continua.

Es en este escenario que se emprendió un estudio de naturaleza cualitativa, orientado a describir, interpretar y entender el significado del proceso de formación visto como un fenómeno social (Bryman, 2004), el cual no puede estudiarse en forma aislada, sino con métodos que sean respetuosos de la complejidad subyacente, en donde las acciones planificadas por los sujetos pueden verse alteradas por el dinamismo del fenómeno formativo, la que justifica la elección de un diseño de estudio de casos (Stake, 1998), más aun considerando que el seminario va evolucionando en una secuencia que aunque definida a priori, no es estática ni indiferente a su acontecer.

Para analizar las características centrales del proceso de formación, es que se filmaron de forma completa todas las sesiones, en las que además el investigador tomaba el rol de observador no participante, mientras los formadores cumplían el rol de observadores participantes. Se seleccionaron aquellas sesiones en las que se manifestaron actividades de formación cuyos resultados permitieran representar de mejor forma los principios de la metodología, así como sesiones en las que se observaran conductas y respuestas en los participantes, que fuesen evidencia de reflexiones de nivel interpretativo (Solar, Rojas, Ortiz y Ulloa, 2012).

La estrategia de análisis consideró trabajar sobre dos fuentes de datos: las filmaciones de las sesiones seleccionadas, y las producciones de los participantes. Se describieron las características de las tareas asignadas a los participantes, la gestión de los formadores, y las actividades consideradas como transversales o nucleares a cada una de las etapas de la metodología. Los mecanismos de control de calidad de las interpretaciones y resultados utilizados son meta-análisis, multi-método y triangulación (Ruiz Olabuenaga, 2003).

RESULTADOS

Los resultados del análisis de los casos de aplicación de la metodología de trabajo docente en los distintos seminarios de formación han permitido deducir 7 características que tienen la connotación de ser centrales a la metodología, las cuales se presentan a continuación:

Conocimiento del grupo de profesores: presentado en forma original como resultado de un proceso de diagnóstico y, si es necesario, selección de participantes. En el caso de nuestro seminario, se entrevistó a un conjunto de profesores buscando aspectos comunicativos específicos. Es importante señalar que esta característica no es exclusiva del inicio del proceso de formación, sino que se presenta en forma constante, ya que las distintas etapas permiten la manifestación de distintas habilidades y competencias. El proceso asociado a implementar la metodología requiere recopilar información constante sobre los profesores, pues esto permite diseñar sesiones de trabajo que consideren el contexto de sus participantes.

Estudio de un conocimiento especializado asociado al aula matemática: referido al estudio de conocimientos especializados para enseñar matemática, que hemos descrito en general como didáctico matemático. El conocimiento al que se refiere esta característica puede ser objetivo del proceso de formación, o bien, medio para el logro de otros propósitos. La metodología se ha diseñado específicamente para promover el desarrollo de conocimiento didáctico basado en la reflexión. Por otra parte, la reflexión que se propone en esta metodología tiene una base empírica y práctica, y esta base puede ver modificada su estructura al abordar distintas disciplinas.

A modo de ejemplo, en nuestro seminario la metodología se utilizó para estudiar el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. Se observa que en la sesión 1 (ver tabla 1), el conocimiento respecto a argumentación es el foco del objetivo de aprendizaje para los docentes, en donde se busca caracterizar y diferencias ambas acciones. En las sesiones 12 y 16 se utiliza el estudio de ciertos conocimientos pedagógicos de la matemática como un mecanismo para el logro de propósitos más globales. A continuación se muestran algunos ejemplos que ilustran la característica anterior, extraídas de las sesiones del 2014 del seminario “Gestión de la argumentación en el aula de matemáticas”:

Tabla 2. Algunos conocimientos estudiados en el aula matemática

Sesión	Conocimiento	Ejemplo de actividad de formación del seminario
1	Competencia Matemática: la argumentación	Observe los siguientes episodios de clases: CLIP 1: Niños calculando 65+65 en la pizarra. CLIP 2: Niños resolviendo un problema de decrecimiento exponencial. ¿En cuál de los episodios se observan interacciones argumentativas entre estudiantes?
13	Rol de las actividades y de su gestión en el desarrollo de la argumentación.	1. Lea el documento (planificación), y señale cuáles son los elementos que promueven o limitan los procesos argumentativos. 2. Observe el episodio de clases. Analice la gestión de la profesora, respecto de lo planificado. ¿Se observan efectos sobre el proceso argumentativo? ¿Cuáles?

La práctica es foco/medio para desarrollar conocimiento: El estudiar con los profesores conocimiento especializado para enseñar matemática, tal como se describió previamente, se realiza en contextos de estudio de casos, lo que permite el análisis de las prácticas de otros y de la práctica propia. Más aun, el ciclo de implementación de la metodología avanza hacia la preparación e implementación de clases, lo que transforma el análisis de la práctica de otros, en una planificación y reflexión de la práctica propia. Se observa entonces, un conjunto de tareas basadas en acciones que el profesor efectivamente realiza en su práctica, tareas que constituyen una problemática que requiere de acciones y contextos progresivos que van incrementando la complejidad de análisis. Este hecho, se evidencia en el uso de las etapas en el seminario: análisis de la práctica de otros (sesiones 1 a 3), análisis de la práctica propia (sesiones 4 a 14), planificar la práctica propia (15 a 17) y evaluar la práctica propia (sesión 20 del año 1, y sesiones 1 a 3 del año 2).

Elicitar ideas de los profesores: se pudo observar que los profesores participantes logran dar a conocer en profundidad el conocimiento especializado para enseñar matemática para posteriormente poner en acción sus ideas. Lo anterior se logra a través de dos mecanismos: iniciar siempre con una problematización, y la gestión del formador.

El primer mecanismo es iniciar siempre con una problematización, que por su carácter desafiante, promueve la comunicación y discusión de sus ideas, viéndose los profesores en la necesidad de argumentar y precisar sus afirmaciones respecto de sus creencias. Esta problematización se plantea en un contexto específico y real, en donde las tareas y preguntas son formuladas desde una perspectiva de tomar posición respecto a algún elemento. Esto promueve la manifestación de al menos dos elementos que en nuestra opinión son muy relevantes. En primer lugar, se observan manifestaciones de las creencias de los profesores, en vez de emitir respuestas que el docente supone que los formadores esperan. En segundo lugar, permite asignar tareas que van más allá del análisis de la gestión de otros. En la tabla 2 se observan algunos ejemplos de actividades de problematización que responden a estos elementos.

Se observa que las preguntas orientadoras se asocian a problemáticas específicas en contextos reales e inducen la toma de decisiones y a la reflexión, permitiendo la vinculación reflexiva con la práctica propia, con lo que la elicitación de las ideas de los participantes se vuelve natural. Cabe consignar que en las primeras etapas, los elementos recién mencionados no necesariamente se dan en forma

Tabla 2. Ejemplos de primer mecanismo: "Iniciar siempre con una situación problemática"

Sesión	Pregunta orientadora del problema
10	¿Qué elementos de la gestión del profesor observado modificaría usted para promover la manifestación de interacciones en niños que presenten la estructura argumentativa completa? ¿Por qué?
13	Luego de estudiar la planificación de clase, y de observar clase, ¿está de acuerdo con las modificaciones que la profesora realizó respecto de lo planeado? ¿Qué elementos habría mantenido usted, y por qué?

Este segundo mecanismo, la gestión del formador, por su carácter inductivo promueve la comunicación, verificación y reflexión de sus ideas, viéndose en la necesidad de contrastar y modificar sus afirmaciones respecto del marco teórico. El formador no es sólo un mediador, sino que cuestiona y profundiza en las ideas de los profesores, verificando si las interpretaciones son adecuadas, generando debates, buscando comprensión común del grupo para ciertas ideas, ya sean presentadas a priori, o emergentes. Así, es el formador quien busca la reflexión de los participantes sobre tareas que son propias del diseño, implementación y evaluación de secuencias didácticas. A continuación se presenta un extracto de la sesión 13, en donde se observa este mecanismo, en un diálogo entre Blanca y el formador:

Formador: ¿Qué aspecto de la actividad promueve argumentación?
Bernardita: El que se pida que expliquen cómo lo están haciendo.
Formador: ¿Se observa en el video que tu gestión provoca esto?
Bernardita: Yo creo que no porque… No está como directo… Yo vi a un chico resolver, pero no pregunté más generalizado, "¿cómo lo hiciste tú?", como para haber visto más opiniones de los chicos antes de resolver el ejercicio en sí. No aparece ahí que haya habido más opiniones respecto de lo que es la estimación.
Formador: Pero en esta clase ¿revisaste lo que los alumnos tenían en sus cuadernos?
Bernardita: Si, de hecho… Pero… Pienso que debería haber mandado a un chico a la pizarra que la haya hecho equivocado.
Formador: Pero la niña que enviaste no lo hizo equivocado
Bernardita: No, pero primero, debí enviar alguien antes que la niña. Entonces… yo lo hice al revés. Envié a la niña después con el error, pero, a lo mejor, para que hubiera habido más discusión… debí enviar el error primero. Entonces ahí habría podido pedirles a más chicos para que hubiera un debate entre ellos.

El proceso de elicitación de ideas de profesores es planificado en la metodología. Las acciones de diseño y gestión de las sesiones se articulan entre sí. La experiencia del equipo a cargo de estas acciones pasa a ser relevante para la selección de las tareas que los profesores deberán realizar, así como de la elección de los episodios de clases que serán objeto del estudio de caso

Implementar y evaluar propuestas de enseñanza: Es también un elemento central de la metodología. En el caso del seminario, luego de analizar la estructura de la argumentación, el análisis de clases de niños argumentando, evaluando planificaciones y gestión de otros, los docentes planifican una clase que será realizada con sus estudiantes. La lección es planeada en un formato que permita poner énfasis en los elementos de estudio del seminario; en nuestro caso, se pedía incluir, a continuación de la actividad central para promover argumentación en el aula, el conjunto de respuestas y posiciones esperadas que podrían surgir en las y los estudiantes. Aquí no se pedía el

universo completo de respuestas posibles, sino un set de afirmaciones plausibles de ser propuesta por el grupo de alumnos del profesor. A continuación, se solicitaba describir acciones docentes específicas para promover la contraposición de ideas, como por ejemplo, modificar las condiciones

del problema, registrar respuestas seleccionadas en la pizarra antes de su socialización, simular ignorancia o validar momentáneamente la respuesta incorrecta frente a un problema, entre otras. La elección de estas estrategias de gestión tiene un componente empírico, pues se le pide a los docentes que anticipen el escenario a partir del conocimiento que tiene del grupo específico de niños.
El plan de clase es retroalimentado por el equipo de formadores, para luego ser implementada. Esta clase se filma y analiza, identificando los aciertos y problemáticas asociadas a la implementación del plan. Estos elementos son utilizados para la edición de un clip que permita, en sesiones posteriores, analizar y evaluar la implementación por parte del grupo completo de profesores.
A modo de ejemplo, ilustramos brevemente con el caso de Matilde, profesora de un 7mo básico, quien diseñó una clase de clasificación de cuadriláteros. Ella planeó la clase para, entre otras cosas, generar una discusión respecto de la clasificación del cuadrado (ubicado en posición horizontal) y el rombo rectángulo (que es también un cuadrado, ubicado en posición diagonal). La discusión se produjo, pero una respuesta que no esperaba (cuando el rombo gira, se transforma en cuadrado) la obligó a modificar la gestión de la clase, incorporando la nueva respuesta en la discusión de un modo que la dejó insatisfecha. El análisis posterior del evento, por parte del grupo de profesores, permitió evidenciar que la respuesta inesperada incentivó a los niños a participar del debate, lo que generó más desorden (el motivo de fondo de la insatisfacción) pero también obligó a los niños a proveer argumentos más finos a favor o en contra, lo que fue valorado muy positivamente por todos los profesores. La contraposición de opiniones permitió a Matilde valorar desde otra perspectiva el resultado de su gestión, mientras que al resto del grupo permitió comprender la lógica y propósitos detrás de las decisiones de la profesora analizada, teniendo la oportunidad de preguntar de inmediato si esperaba o no ciertas reacciones.

Secuencia progresiva y articulada de temas y casos: Esta característica acompaña la evolución estructural de las distintas etapas de esta metodología. El diseño de las sesiones busca que los profesores vivan un continuo de formación, lo que requiere que las sesiones dentro de cada etapa progresen, tanto en la complejidad del conocimiento como del análisis. Como ejemplo, se muestra la secuencia de tareas asociadas al estudio de casos que permite conectar las etapas 2 y 3 de esta implementación particular de la MTD.

Tabla 3. Muestra de secuencia de tareas de estudio de casos de sesiones consecutivas

ETAPA 2	S12	Análisis de la gestión de las condiciones didácticas de una actividad, que promueven argumentación.
	S13	Análisis de la relación entre las condiciones didácticas de una actividad, y la gestión de aula y acciones docentes que promueven argumentación.
	S14	Frente a una actividad con condiciones didácticas adecuadas, análisis de las características de la gestión especializada de clase para efectivamente promover procesos argumentativos.
ETAPA 3	S15	Frente a una actividad con condiciones didácticas adecuadas, diseñar la gestión especializada de clase para promover efectivamente procesos argumentativos.
	S16	Diseñar una actividad, con condiciones didácticas específicas, y su gestión especializada de clase para promover efectivamente procesos argumentativos.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Hemos presentado las características centrales de la metodología implementada. Aunque en la actualidad estamos discutiendo las dimensiones y principios de un modelo más general de enseñanza a profesores basada en la experiencia, las características propuestas permiten discutir elementos asociados a profesor efectivos de formación continua de docentes en ejercicio.
En primer lugar, se puede asegurar que la metodología de trabajo docente diseñada e implementada ha logrado superar los enfoques tradicionales de formación, los cuales tienen la concepción central

de que primero se deben modificar los conocimientos y creencias de los profesores, y que ello tiene como consecuencia lineal una modificación de sus prácticas (Clarke y Hollinsworth, 2002). En cambio, el estudio del conocimiento y el análisis de la práctica se articulan progresivamente, en el entendido que esta relación continua favorece y nutre los cambios y reflexiones sobre ambos elementos. Esta reflexión y experimentación permite en primer lugar hacer consciente al docente de las decisiones e intenciones detrás de éstas, de modo de poder evaluarlas de forma más transparente. Por otra parte, la metodología ha validado el uso de videos y de estudio de casos como una fuente importante de reflexión sobre la práctica. Más aun, la secuencia de un análisis de la práctica de otros, que avanza hacia el análisis de la práctica de un compañero y, eventualmente, la propia, va dotando de objetividad al proceso, al refinar los criterios de observación y evaluación, lo que es consistente con otros resultados de investigación (Van Es y Sherin, 2010, entre otros). Pero este hecho sólo se debe entender considerando que tanto el diseño de las actividades de formación, como la gestión de las sesiones por parte de los formadores, articulan consistentemente un conocimiento especializado con un análisis reflexivo de la práctica.

Referencias

Bryman, A. (2004) Social Research Metods. Second Edition. Oxford: Oxford University Press.

Clarke, D., Hollinsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. Teacher and Teacher Education, 18, 947-967.

Roesken, B. (2011) Hidden Dimensions in the Professional Development of Mathematics Teachers. In.service Education for an with teachers. Rotterdam: Sense Publishers.

Solar, H., Deulofeu, J. (2015, no publicado). Condiciones para promover argumentación en el aula de matemáticas. BOLEMA.

Solar, H., Deulofeu, J., Ortiz, A., Ulloa, R. (2015, no publicado). Dealing with contingency in Mathematics Lessons through Argumentative Orchestation. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education.

Solar, H., Espinoza, L., Rojas, F., Ortiz, A., González, E., Ulloa, R. (2011). Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM). Informe final Proyecto Fonide 511091. Mineduc: Chile.

Solar, H., Rojas, F., Ortiz, A. y Ulloa, R. (2012). Reflexión docente y competencias matemáticas: un modelo de trabajo con docentes. RECHIEM: Revista Chilena de Educación Matemática, 6(1), 257-267.

Stake, R. (1998). Investigación en estudio de casos. Madrid: Morata.

Ruiz Olabuenaga, J. (2003) Técnicas de triangulación y control de calidad en investigación socioeducativa. Bilbao: Fundación Horreum Fundazioa.

Van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2010). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice. Journal of Mathematics Teacher Education, 13(2), 155-176.

[i] Esta investigación ha sido financiada por el proyecto Fondecyt 11130675.

UN EJEMPLO DE ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO PARA UNA TAREA SOBRE LA ANTIDERIVADA

An example of ontosemioticanalysis for a task onantiderative

Gordillo, W.[a]& Pino-Fan, L.[b]

[a]Universidad Distrital, [b]Universidad de Los Lagos;
wgordillot@udistrital.edu.co[a], luis.pino@ulagos.cl[b]

Resumen

En este trabajo se presenta resultados parciales de una investigación más amplia, en la cual se analiza una tarea matemática, su respectiva solución experta y la soluciones propuestas a la tarea por un grupo de estudiantes, con la herramientas teórico-metodológicas que proporciona el Enfoque Ontosemiótico (EOS), llamada análisis ontosemiótico. El fin es detallar análisis de contenido de la tarea y la solución experta (configuración epistémico) y caracterizar soluciones propuestas por estudiantes (configuración cognitiva). El ejemplo analizado, da argumentos válidos para determinar que la tarea matemática es evaluadora de conocimiento y comprensión parcial de la nociónantiderivada, lo que resulta vital a la hora de construir o diseñar cuestionarios.

Palabras clave: *antiderivada, enfoque ontosemiótico, análisis ontosémiotico, diseño de cuestionarios.*

Abstract

This paper presents partial results of a wider investigation, in which a mathematical task, their respective expert solution and the proposed solutions to task by a group of students with the theoretical and methodological tools provided by the ontosemiotic approach (OSA) analyzed comes, called ontosemiotic analysis. The purpose is to detail the content analysis and expert task (epistemic configuration) solution and characterize solutions proposed by students (cognitive configuration). The example analyzed, giving valid arguments to determine the mathematical task is evaluating knowledge and partial understanding of the antiderivative, which is vital in building or designing questionnaires.

Keywords: *antiderivative, ontosemiotic approach, ontosemiotic analysis, questionnaire design.*

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos un ejemplo de una situacion-problema en torno a la antiderivada, a la cual se propone una solución experta. La tarea y su solución son analizadas con la herramienta *configuración ontosemiotica* (Pino-Fan & Font, 2015), porporcionada por el Enfoque Ontosemiotico (EOS) del conocimieto y la instrucción matemática. en este trabajo utilizaremos la herraminta para realizar detalladamente el análisis de los contenidos que se movilizan en las prácticas necesarias para resolver la tarea y para el análisis de las soluciones plausibles propuestas por el grupo de estudiantes a quienes se les aplico la tarea. Asi mismo enmarcamos la tarea dentro de una significado parcial de donde emerge la antiderivada (Gordillo & Pino-Fan, en prensa).

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA.

Inicialmente se propone una tarea y la solución experta, concretamente utilizamos la noción de *configuración ontosemiotica* (Pino-Fan & Font, 2015), esta configuración pueden ser de carácter epistémico o cognitivo, según se refiera a objetosy procesosmatemáticos institucionales o

personales, respectivamente. En este trabajo utilizaremos la herramienta *configuración ontosemiótica epistémica*(Pino-Fan, Godino& Font, 2011). Esta noción es proporcionada por el marco teórico conocido como *enfoque ontosemiótico,* y se ha utilizado porque permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen y emergen de la práctica matemática sobre antiderivada , así mismo para realizar detalladamente el análisis de los contenidos que se movilizan en las prácticas necesarias para resolver la tarea y la herramienta *configuración cognitiva* para caracterizar las soluciones plausibles propuestas por 137 estudiantes de carreras de matemáticas, pedagogía en educación media matemática e ingeniería civil, de varias universidades en Colombia.

Al mismo tiempo se utilizó un estudio histórico-epistemológico que ubica la tarea en la activación del significado parcial *diferencial- sumatoria* propuesto por Gordillo y Pino-Fan (en prensa).

CRITERIO PARA LA SELECCIÓN DE LA TAREA

Para la selección adecuada de la tarea, de acuerdo con el enfoque teórico que utilizamos, se adopta una mirada compleja sobre los objetos matemáticos y su significados, la cual lleva a pensar no en un objeto simple, sino en un sistema complejo formado por partes o componentes que deben articularse o conectarse entre sí (Rondero& Font, 2015). Recientemente se han publicado trabajos que se han interesado por describir y analizar esta complejidad para el objeto antiderivada. En particular, en Gordillo y Pino-Fan (2015) se ha modelizado el significado de referencia del objeto matemático antiderivada mediante una red de significados parciales en los cuales se activan las siguientes configuraciones ontosemióticas epistémicas: 1) relación geométrica de las tangentes de una curva y la cuadratura de la misma; 2) relación entre fluxiones – fluentes; 3) relación de los diferenciales y las sumatorias; y 4) funciones elementales.

La tareaseleccionada ponen en juego alguno de los tipos de representaciones para la antiderivada (y también para las funciones asociadas a ésta): descripción verbal, gráfica, fórmula (simbólica), tabular, icónico y sinóptico (mapas conceptuales).

De esta forma, la tarea seleccionada ayuda a complementar a otras tareas que se propongan a fin de matizar entre si, aspectos que aprovechen una compresión parcial del objeto matemático.

ANÁLISIS DE CONTENIDOQUE EVALÚA LA TAREA

Esta tarea (Figura 1), es tomada de Delos Santos (2006) y Pino-Fan (2014), explora el conocimiento matemático en relación con otros objetos matemáticos que forman parte del currículo, como lo son: la integral indefinida de una función o el teorema fundamental del cálculo. Las representaciones que el estudiante debe manejar para la resolución de la tarea son: simbólica, gráfica y tabular.

Tarea: Para una función dada $y = f(x)$, continua en $\mathbb{R}$, se cumplen los valores de la siguiente la tabla

x	$f'(x)$
0	0
1	2
1,5	3
2	4
2,5	5

a) Encuentra una función para $f(x)$.

b) ¿Puedes encontrar una segunda expresión, distinta a la anterior, para $f(x)$? ¿Cuál sería? Justifica la respuesta.

Figura 1. Tarea propuesta

Solución Plausible

Existen varias soluciones para cada uno de los apartados de esta tarea, una posible solución de estas se analiza a continuación:

a) Basándonos en los datos proporcionados en la tabla, es posible encontrar un patrón de la siguiente forma:

x	$f'(x)$
0	2(0)=0
1	2(1)=2
1,5	2(1,5)=3
2	2(2)=4
2,5	2(2,5)=5
.	.
.	.
.	.
x	$2(x) = 2x$

Por tanto, dado que $f'(x) = 2x$, y sabiendo que para una función $f(x) = x^n$la derivada está dada por $f'(x) = nx^{n-1}$, entonces una expresión para $f(x)$ sería: $f(x) = x^2$.

b) Sí se puede; para encontrar otra expresión para $f(x)$ distinta a $f(x) = x^2$. Si $f'(x) = 2x$ entonces $f(x) = \int 2x dx = x^2 + C$. De esta forma, $f(x)$ puede ser cualquier función de la familia de funciones $f(x) = x^2 + C$ donde, $C \in \mathbb{R}$.

Análisis Ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, argumentos y procedimientos, y sus significados, que se espera sean activados en la solución de la tarea propuesta.

Elementos Lingüísticos

- El enunciado de la tarea, denota una función indeterminada, en este caso, una función que cumple ciertas condiciones reguladas por una tabla de valores.

- La tabla de valores. Corresponde a la representación tabular de una función de una función desconocida de la cual se le presentan cinco imágenes para los valores de la variable *x* dados en la tabla, lo que proporciona parejas ordenadas del tipo $(x, f'(x))$. Dichas parejas ordenadas pueden ser llevadas al plano cartesiano para dar una representación gráfica a las parejas dadas.
- Las preguntas derivadas del enunciado, refieren a un procedimiento para hallar una función, que al ser derivada cumpla con las condiciones y los valores de la tabla.

Conceptos/Definiciones

- Función de variable real desconocida. Función$f(x)$ que se determinará a partir de su función derivada definida parcialmente por cinco puntos.
- Pares ordenados. Originales e imágenes de la función derivada dada.
- Función derivada de una variable real. Definida parcialmente por cinco puntos cuyas coordenadas se expresan de manera tabular.

Proposiciones/Propiedades

- Reglas de derivación. Concretamente "la derivada de una función constante es igual a cero", la cual permite determinar que la función buscada es cualquiera de la familia $f(x) = x^2 + C$, donde, $C \in \mathbb{R}$.

Procedimientos

- Cálculo de la antiderivada de$y = 2x$, esto se realiza ya sea mediante las reglas de derivación (derivada de la función potencial), o mediante las reglas de integración. Este procedimiento origina la respuesta de ambos apartados de la tarea.
- Ensayo y error. Probando posibles reglas de correspondencia entre los valores de x y los de $f'(x)$, a partir de los valores dados en la tabla. Este procedimiento es de carácter numérico-técnico, centrado en la búsqueda de un patrón que permita establecer la regla de correspondencia que permite definir la función derivada.

Argumentos

- La expresión algebraica de la función derivada es $y = 2x$porque al ir evaluando los puntos dados tubularmente, $(x, f'(x))$; se deduce de manera empírica que es la función derivada.
- La función buscada es $y = x^2 + C$ porque la derivada de esta función es $y = 2x$. Establece la validez para la función $f(x)$ teniendo en cuenta la regla para derivar la función potencial.

Principales dificultades para su resolución

En esta tarea se prevé que el estudiante no identifique la familia de funciones cuando se le solicita encontrar una expresión distinta a la encontrada, proporcionando funciones equivalentes.

ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES

A partir del análisis de las respuestas de los 137 estudiantes, encontramos para la primera parte de la tarea, las respuestas, y por ende, las características que permiten asociar las respuestas a una configuración cognitiva propuesta. La formación de las configuraciones cognitivas, esta dada por similitud de algunos elementos activados (lenguaje, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) en la solución de los estudiantes.

Las configuraciones cognitivas identificadas en el grupo de estudiantes se pueden resumir en los siguientes cuatro tipos:

- **Configuración Cognitiva 1: Gráfica-Técnica.**Respuestas en las que a partir del conjunto de datos dados en la tabla, se proporciona una representación gráfica de la cual se obtiene la expresión algebraica para la función derivada. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos

centrados en las "reglas" de derivación, se encuentra una expresión para $f(x)$.

- **Configuración Cognitiva 2: Numérica-Técnica.**Respuestas en las que a partir del conjunto de datos de la tabla se determina el patrón que permite establecer la regla de correspondencia que permite definir la función derivada. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos centrados en las "reglas" de derivación, se encuentra una expresión para $f(x)$
- **Configuración Cognitiva 3: Numérica-Avanzada.**Respuestas en las que a partir del conjunto de datos de la tabla se determina el patrón que permite establecer la regla de correspondencia que permite definir la función derivada. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos centrados en temas más avanzados en el currículo (como la antiderivada), se encuentra una expresión para $f(x)$.
- **Configuración Cognitiva 4: Gráfica-Avanzada.** Respuestas en las que a partir del conjunto de datos dados en la tabla, se proporciona una representación gráfica de la cual se obtiene la expresión algebraica para la función derivada. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos centrados en temas más avanzados en el currículo (como laantiderivada), se encuentra una expresión para $f(x)$.

Para la segunda parte de la tarea:

- **Configuración Cognitiva 1:** *Interpretación errónea sobre la unicidad de la derivada.* Respuestas en las que se tiene una concepción errónea sobre la unicidad de la derivada en un punto y la función derivada.
- **Configuración Cognitiva 2:** *Funciones equivalentes.* Respuestas en las que de forma explícita o implícita, mediante el uso de funciones equivalentes, hacen evidente que no es posible hallar otra función distinta.
- **Configuración Cognitiva 3:** *Técnica.* Respuestas en las que los procedimientos y argumentos se centran en las reglas de derivación (concretamente en la regla "la derivada de una función constante es cero").
- **Configuración Cognitiva 4:** *Avanzada.* Respuestas en las que los procedimientos y sus justificaciones realizan de forma explícita una conexión con conceptos avanzados en el currículo tales como la antiderivada.

CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo, presentamos el análisis ontosemiótico de una tarea matemática para la antiderivada, este análisis nos permite evaluar y caracterizar el conocimiento y las prácticas matemáticas sobre la antiderivada, de estudiantes de los primeros cursos universitarios en carreras de matemáticas y afines a la matemática en Colombia.

Esta forma pragmática de entender el conocimiento, ha sido considerado en la selección de la tarea matemática, toda vez que para la resolución de una tarea se requieren de la movilización congruente tanto de los diversos registros de representación para la antiderivada (Duval, 1995; 2006), como la diversidad de significados parciales de dicha noción matemática. Significados propuestos en la reconstrucción del significado holístico de la antiderivada (Gordillo & Pino-Fan, 2015).

El análisis ontosemiótico (contenido), y las posibles dificultades en la resolución de la tarea; permite observar, describir y predecir la actividad matemática como un complejoconjunto de prácticas matemáticas realizada por estudiantes universitarios al resolver una tareas propuesta, al rededor del objeto matemático. Práctica donde se pueden identificar, la configuración de objetos matemáticos primarios; propuestos por el marco teórico del EOS, que se ha denominado análisis ontosemiótico.

De igual forma el análisis ontosemiótico (cognitivo), permite organizar la práctica matemática a partir de similitudes, para caracterizar y cuantificar soluciones a una tarea.

Este análisis ontosemiótico, se prevé como una herramienta potente para poder identificar, analizar

y tener un buen grado de validez de contenido en tareas matemáticas. Así mismo, organizar la practica matemática que interviene en la solución. Este análisis ontosemiótico es unaherramienta teórico metodológicas del EOS, que es validada y utilizadas en diseños de cuestionarios (Pino-Fan & Font,2015 ; Pino-Fan, Godino& Font, 2015).

Referencias

Delos Santos, A. (2006).An investigation of student's understanding and representation of derivative in a graphic calculator-mediated teaching and learning environment.(Tesis Doctoral, University of Auckland, New Zealand).Recuperado de https://researchspace.auckland.ac.nz/handle/2292/2161

Duval, R. (1995).Sémiosisetpensée: registressémiotiques et apprentissagesintellectuels. Berne, Switzerland: Peter Lang.

Duval, R. (2006).A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics.Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 103-131.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (en prensa). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. BOLEMA.

Pino-Fan, L. (2014). Evaluación de la faceta epistemica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada.Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., & Font, V. (2015). A methodologolgy for the desing of questionnaries to explore relevant aspects of didactic-mathematical knowledge of teachers. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.), Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.(Vol. 4, pp. 25-32). Hobart, Australia: PME

Pino-Fan, L., Godino, J.D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. Educação Matemática Pesquisa, 13(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. BOLEMA, 29(51), 60-89. doi:10.1590/1980-4415v29n51a04

Rondero, C., & Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. Enseñanza de lasCiencias, 33(2), 29-49. doi:10.5565/rev/ensciencias.138

PICTOGRAMAS EN UNA MUESTRA DE DIRECTRICES CURRICULARES LATINOAMERICANAS

Pictograms in a sample of latin american curriculum guidelines

Díaz-Levicoy, D[a]., Arteaga, P[b]. y López-Martín, M.M[c].

Universidad de Granada

dddiaz01@hotmail.com, parteaga@ugr.es, mariadelmarlopez@ugr.es

Resumen

En este trabajo presentamos resultados parciales de una investigación más amplia que analiza la presencia de los gráficos estadísticos en una muestra de directrices curriculares para la Educación Primaria de diez países latinoamericanos. Esta investigación sigue una metodología cualitativa, de nivel descriptivo y mediante un análisis de contenido. En particular analizamos la presencia de los pictogramas en los distintos currículos analizados, destacando la importancia que asumen estos gráficos en las directrices curriculares, en las cuales su trabajo se sugiere mayoritariamente entre 2º y 4º curso, abordando actividades relacionadas con la lectura, interpretación y construcción de este tipo de gráficos con información proveniente de contextos cercanos a los estudiantes.

Palabras clave: *pictogramas, directrices curriculares, Educación Primaria.*

Abstract

We present partial results of a wider investigation on the presence of statistical graphs in a sample of primary school curricular guidelines in ten Latin American countries. This research follows a qualitative methodology, a descriptive level and is carried out through a content analysis. Specifically we analyze the presence of pictograms in different curricula, highlighting the importance that these graphs assume in the curricular guidelines analyzed, which suggests that their work is mostly recommended between 2nd and 4th courses, addressing activities based on reading, interpreting and building pictograms with information from nearby contexts to the students.

Keywords: *pictograms, curricular guidelines, Primary Education.*

INTRODUCCIÓN

Cada actividad que se desarrolla al interior de las aulas debe buscar que los estudiantes logren aprender conductas, conocimientos y estrategias que les sean de utilidad para comprender los temas que se van a trabajar en el transcurso de los diferentes niveles educativos, y que permitan que los estudiantes logren una adecuada inserción en la sociedad del momento. Muchas de las actividades propuestas en las aulas están diseñadas para dar cumplimiento a contenidos y objetivos que define el currículo, el cual entrega una visión clara sobre lo que deben aprender los estudiantes, lo que deben enseñar los profesores, así como del tipo de ciudadano que se está formando y que, por lo general, corresponde a lo que demanda la sociedad actual.

En la actualidad, los currículos para el área de matemática de diferentes países reivindican la importancia de Estadística y Probabilidad, al incluir contenidos en los diferentes niveles educativos (Batanero, 2001; Font, 2008), lo que da respuesta a la necesidad de comprender situaciones y fenómenos del diario vivir que se representan mediante elementos estadísticos, como por ejemplo: medidas estadísticas, tablas y gráficos estadísticos.

En particular, los gráficos estadísticos son usados frecuentemente en los medios de comunicación, pues permiten transmitir información de forma rápida, ya que con estas representaciones se organizan, describen, comparan y muestran gran cantidad de datos en un espacio reducido (Cavalcanti, Natrielli y Guimarães, 2010). Felisberto de Carvalho (2011) muestra que en ocasiones los gráficos estadísticos pueden ser fácilmente manipulados para sacar ventaja en ciertas situaciones, presentado información sesgada, por lo que es necesario formar a ciudadanos capaces de valorar críticamente las representaciones gráficas presentes en distintos medios.

Los gráficos estadísticos también son considerados elementos importantes de la cultura estadística que todo ciudadano debería poseer (Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011). Muchos son los autores que han tratado de caracterizar la idea de cultura estadística, entre ellos Cazorla y Utsimi (2010) entienden por cultura estadística la comprensión de información estadística que aparece de forma de texto oral o escrito, números, símbolos, gráfico y tabla en diferentes contextos de la vida cotidiana.

Esta investigación muestra los resultados parciales de una investigación más amplia, en la cual, motivados por la importancia de los gráficos estadísticos en nuestra sociedad actual y la necesidad de la formación en este tema de los ciudadanos desde las primeras edades, el objetivo principal es indagar la presencia de los gráficos estadísticos en una muestra de directrices curriculares latinoamericanas para la Educación Primaria. Por cuestiones de espacio, en este trabajo nos centramos en la presencia de uno de los gráficos estadísticos más usados desde los primeros cursos de escolarización como son los pictogramas, para ello analizaremos en los niveles educativos en que se sugiere su trabajo y qué objetivos o actividades se plantean sobre ellos.

ANTECEDENTES

A continuación pasamos a describir los antecedentes que nos serán de utilidad para el desarrollo de nuestro trabajo, los cuales agrupamos en los distintos temas de interés sobre el mismo.

Currículo

Currículo es una palabra que posee diferentes significados. Por ejemplo, Pinkasz y Tiramonti (2006, p. 68) expresan que es el "*resultado de un proceso de selección cultural que establece, para una sociedad en un momento determinado, qué es lo deseable que las nuevas generaciones aprendan*". Para Coll (1992) los elementos del currículo son: (1) qué enseñar; (2) cuándo enseñar; (3) cómo enseñar; (4) qué, cómo y cuándo evaluar. Alsina (2000), por su parte, menciona que el currículo puede ser: (1) oficial: expresado en los documentos oficiales (directrices curriculares); (2) potencial: relacionado con publicaciones que ayudan en el proceso de instrucción (libros de texto y otros materiales didácticos); (3) impartido: parte del currículo que se desarrolla en el proceso de instrucción; (4) aprendido: parte del currículo que el estudiante aprende.

En esta investigación asumimos que las directrices curriculares o currículo oficial establecen los contenidos y las capacidades que se deben enseñar en las escuelas, y en nuestro caso queremos indicar de cómo se pretende trabajar los pictogramas en algunos países latinoamericanos y si existe coherencia con la importancia que se da a estas representaciones por parte de las investigaciones.

Pictogramas

Los pictogramas son gráficos estadísticos los cuales para mostrar información usan representaciones icónicas (imágenes). Martins y Ponte (2010) mencionan que esta forma de representación hace uso de símbolos alegóricos para mostrar los valores de la variable que se está estudiando. El tamaño de cada ícono debe ser proporcional a la frecuencia absoluta, relativa o porcentual de cada categoría de la variable que se estudia, así como también se puede repetir el ícono para representar la frecuencia correspondiente y en el caso de que el ícono represente a más de un elemento o persona esta relación se debe indicar. Según Carvalho (2009) este tipo de gráficos es ideal para trabajar en los primeros años de educación obligatoria, y en ocasiones, estos gráficos

son similares a los gráficos de barras, donde éstas son reemplazadas por el número de íconos o símbolos correspondientes (Díaz-Levicoy, 2014; Martins y Ponte, 2010).

Alaminos (1993) menciona como una de las principales ventajas de estos gráficos el alto impacto visual que provocan, útil para su uso en los medios de comunicación. Este mismo autor señala la existencia de cuatro tipos de pictogramas:

> Primero, aquellos donde cada símbolo representa un valor uniforme y definido. Segundo, pictogramas donde el tamaño de los símbolos es proporcional a los valores representados. Tercero, pictogramas donde un gráfico estándar (línea, barras, sectores, etc.) es decorado con elementos figurativos o donde un gráfico estándar es presentado como de un cuadro más amplio. Y cuarto, pictogramas donde la composición figurativa refleja una relación multivariable (Alaminos, 1993, p. 60).

Por todo ello creemos que son unas representaciones adecuadas para trabajar durante la Educación Primaria, por lo que nos interesamos en ver cómo se introducen en diferentes currículos latinoamericanos, que son los que regularan el trabajo con este tipo de representaciones en los distintos cursos de la Educación Primaria.

Investigaciones sobre orientaciones curriculares

Son varias las investigaciones que han analizado directrices curriculares en distintas áreas de la matemática con el objetivo de concretar y sintetizar las recomendaciones para tratar distintos temas. En nuestro caso, queremos analizar cómo se aborda el trabajo con pictogramas en distintos currículos latinoamericanos, para ello analizamos estudios previos que se han interesado en el análisis de directrices curriculares en distintos países en relación a temas de Estadística y Probabilidad.

Batanero, Contreras y Arteaga (2011) realizan un análisis de temas relacionados con estadística en currículo de Educación Primaria española. Los resultados muestran una tendencia para trabajar actividades exploratorias y que trabajen aspectos intuitivos. El trabajo es ampliado en Batanero, Gea, Arteaga y Contreras (2014) al considerar Educación Primaria, Secundaria y evaluaciones externas. Como resultados se destaca la búsqueda de ciudadanos cultos estadísticamente y que algunos contenidos son complejos para las edades propuestas.

Sobre probabilidad, Vásquez y Alsina (2014) analizan los documentos curriculares americanos, estándares comunes, y Educación Primaria chilena y española. Los resultados muestran los conocimientos que deben poseer los profesores para el proceso de instrucción, además de modelos sobre el conocimiento didáctico y matemático del profesor para garantizar mejoras en estos aspectos.

Pino, Díaz-Levicoy y Piñeiro (2014) analizan los gráficos estadísticos en los currículos de matemática, ciencias naturales y sociales para la Educación Primaria chilena. Los resultados evidencian variedad de actividades sobre el tema y la relación que se establecen entre las áreas por estas formas de representación. Confirmando la idea que los gráficos permiten representar información de diferentes contextos, así como cambios de la sociedad y fenómenos de la naturaleza, y permiten un trabajo interdisciplinario.

En el contexto brasileño, Campos, Cazorla y Kataoka (2011) estudian las directrices curriculares de la Educación Primaria. Dentro de los desafíos que plantean estas directrices destacan la mejora de los libros de texto, superar errores conceptuales y la fragmentación de los contenidos.

Metodología

Este trabajo se basa en una metodología cualitativa, de nivel descriptivo y mediante un análisis decontenido. López (2002) señala que este método es una forma particular del análisis de documentos. Se ha indagado en una nuestra de 10 directrices curriculares de países latinoamericanos, en los cuales se ha realizado una lectura minuciosa de contenidos, objetivos, sugerencias metodológicas y evaluativas que se relacionen con pictogramas en los seis cursos de Educación Primaria de los siguientes países: Ecuador (MINEDUC-Ecuador, 2010a, b), El Salvador (MINED-El Salvador, 2008a, b), Chile (MINEDUC-Chile, 2012), Guatemala (MINEDUC-

Guatemala, 2008a, b), México (SEP, 2011), Nicaragua (MINED-Nicaragua, 2009), Panamá (MEDUCA, 2014a, b), Paraguay (MEC, s.f.), Perú (MINEDU, 2009) y Puerto Rico (DE, 2014)

En cada una de las directrices curriculares anteriores nos hemos fijado en los niveles educativos en que se sugiere el trabajo con pictogramas y las actividades que se declaran sobre los mismos.

Resultados

A continuación describimos los resultados de analizar las directrices curriculares de matemática, para observar la presencia de los pictogramas y las actividades que se pide realizar sobre ellos.

En la Tabla 1 observamos los cursos en que se explicita el trabajo con los pictogramas en las directrices curriculares. Vemos que el trabajo con esta representación se centra entre 2º y 4º curso.

Tabla 1. Niveles en que se sugiere el trabajo con pictogramas por país

País	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Ecuador		X	x			
El Salvador				x		x
Chile	x	X	x	x		
Guatemala			x	x		
México			x			
Nicaragua				x		
Panamá		X				x
Paraguay		X				
Perú			x	x		
Puerto Rico	x	X		x	x	

A continuación pasamos a analizar el caso particular de cada país.

Ecuador

Las directrices curriculares de Ecuador para segundo año de Educación Primaria indican como objetivo educativo "*comprender y expresar informaciones del entorno inmediato en forma numérica y representarlas en pictogramas, para potenciar el pensamiento lógico matemático y la solución de problemas cotidianos*" (MINEDUC-Ecuador, 2010a, p. 71). Dentro de la sección que se denomina planificación por bloque curricular, se explicita para el bloque Estadística y Probabilidad "*comprender y representar en pictogramas datos relativos a su entorno usando objetivos concretos*" (MINEDUC-Ecuador, 2010a, p. 73). Para este nivel educativo se espera que los estudiantes clasifiquen objetos y realicen conteos de los mismos, por ejemplo representar en un pictograma las mascotas que tienen los niños en sus casas. Entre los indicadores de evaluación se mencionan que el estudiante: "*comprende y representa datos de su entorno en el círculo del 0 al 20 en pictogramas*" (MINEDUC-Ecuador, 2010a, p. 87).

En el tercer curso de Educación Primaria se plantea como objetivo educativo "*comprender, expresar y representar informaciones del entorno inmediato sobre frecuencias en forma numérica, en pictogramas, para potenciar el pensamiento lógico matemático y la solución de problemas cotidianos*" (MINEDUC-Ecuador, 2010b, p. 57). Y dentro de los objetivos para el bloque Estadística y Probabilidad se mencionan: "*comparar frecuencias en pictograma*s" y "*realizar combinaciones simples de hasta dos por dos*" (MINEDUC-Ecuador, 2010b, p. 59). En este nivel se debe trabajar con información del entorno (fiestas locales o nacionales, patrimoniales, animales, etc.) de manera que esta información pueda ser representada en pictogramas y se discuta sobre la misma. Se fomenta el trabajo en equipo, compartidas las respuestas y que argumenten sobre ellas, pues permite una mayor compresión de los temas abordados.

El Salvador

En las directrices curriculares de este país se indica que el trabajo con pictogramas se debe desarrollar en dos de los seis cursos; cuarto y sexto de Educación Primaria.

En cuarto curso para la unidad "interpretemos datos" se establece como objetivo trabajar la construcción, lectura y e interpretación de pictogramas para dar solución a problemas sociales. Para cumplir este objetivo se definen indicadores de logro, los cuales mencionamos a continuación:
(1) interpreta los datos presentados en un pictograma de figuras completas, con interés; (2) compara datos utilizando pictogramas con seguridad; (3) lee con seguridad pictogramas que presentan figuras completas, haciendo aproximaciones; (4) lee con seguridad pictogramas que presentan figuras incompletas, haciendo aproximaciones; (5) elabora pictogramas, con seguridad; (6) interpreta y juzga la información presentada en un pictograma (MINED-El Salvador, 2008, p. 103-104).
En el sexto curso, el trabajo con pictogramas no se especifica en los objetivos ni en los indicadores de evaluación, pues se centra en el trabajo con gráficos rectangulares y de sectores, pero se especifica en los contenidos junto a otros gráficos (líneas, barras, rectangulares y sectores), y que están asociados a la elección adecuada del gráfico de acuerdo a los datos que se trabajen (MINED-El Salvador, 2008).

Chile

En la Educación Primaria chilena se observa que el trabajo con pictogramas se desarrollo en los cuatro primeros cursos de Educación Primaria (MINEDUC-Chile, 2012). En los dos primeros cursos se debe trabajar la recolección y registro de información por medio de pictogramas (en primero proveniente del estudiante o su entorno y en segundo a partir de juegos con monedas y dados), también se trabaja la construcción, lectura e interpretación de estos gráficos (en primero pictogramas simples y en segundo con escala). Para el tercer curso se establece trabajar la construcción, lectura e interpretación de pictogramas con escala de información recolectada o que se entrega. Finalmente, en cuarto curso se debiese trabajar la lectura, interpretación de pictogramas con escala, y comunicación de las conclusiones obtenidas.

Guatemala

En el tercer curso de Educación Primaria busca que los niños apliquen "*conocimientos matemáticos en la sistematización de soluciones diversas a problemas de la vida cotidiana*" (MINEDUC-Guatemala, 2008a, p. 104). De esta competencia se establece que los estudiantes deben recoger y ordenar información de diferentes fuentes, para ser presentadas e interpretadas por medio de gráficos estadísticos como los pictogramas.

Para el cuarto de Educación Primaria se busca que los niños expresen "*en forma gráfica y descriptiva la información que obtiene relacionada con diversos elementos y acontecimientos de su contexto social, cultural y natural*" (MINEDUC-Guatemala, 2008b, p. 106). Para abordar esta competencia se pide registrar información cuantitativa que sea extraída de contextos próximos a los estudiantes (por ejemplo las temperaturas máximas y mínimas en un mes, asistencia de estudiantes, resultados de eventos deportivos) para posteriormente representarla e interpretarla por medio de tablas y gráficos estadísticos (pictogramas y gráficos de barras).

México

En las directrices curriculares de México, en el único curso que se menciona el trabajo con pictogramas es en tercero. En este curso se establece como una de las competencias a trabajar la "Representación e interpretación en tablas de doble entrada, o pictogramas de datos cuantitativos *o cualitativos recolectados en el entorno*" (SEP, 2011, p. 72).

Nicaragua

El trabajo con pictogramas se declara solamente en el cuarto curso, en el se menciona como indicador de logro la construcción y lectura de pictogramas. Como sugerencia de actividades se

menciona la resolución de situaciones en que se entreguen datos, por medio de tablas estadísticas, y se debe realizar la construcción de pictogramas (MINED-Nicaragua, 2009).

Panamá

El trabajo con pictogramas se sugiere en dos cursos, segundo y sexto de Educación Primaria. En el segundo grado o curso se define como indicador de logro la construcción de pictogramas de acuerdo a información presentada en tablas estadísticas (MEDUCA, 2014a). Y en sexto curso el pictograma, junto a otros gráficos, se menciona como un contenido conceptual asociado a la construcción e interpretación de gráficos (MEDUCA, 2014b).

Paraguay

En el segundo curso de Educación Primaria, en la unidad "Los datos y la Estadística", se pretende que los niños recolecten, organicen y reprenden información obtenida de encuestas sencillas, por medio de tablas y pictogramas, para comprender situaciones del entorno inmediato (MEC, s.f.). Las capacidades que se han establecido para esta unidad son:

Utiliza técnicas sencillas de recopilación de datos; organiza en tablas sencillas un conjunto de datos según características; representa datos recopilados del entorno mediante pictogramas; interpreta datos representados en pictogramas; emplea la terminología y notación matemática apropiadas al contexto; reconoce la importancia de organizar y representar datos en tablas o pictogramas (MEC, s.f., p. 88).

En las directrices curriculares el trabajo con gráficos estadísticos comienza en este curso y es el único en el que se sugiere explícitamente el trabajo con pictogramas.

Perú

Tras el análisis de las directrices curriculares se observa el trabajo con pictogramas en dos cursos, tercero y cuarto de Educación Primaria. Se establece que en tercer curso se debe trabajar la capacidad de representar e interpretar información numérica por medio de pictogramas y otras representaciones (MINEDU, 2009). En el siguiente curso, cuarto de Educación Primaria, también se hace hincapié en la elaboración e interpretación de pictogramas, tablas de doble entrada, gráficos de barras y líneas, y que tengan relación con la vida cotidiana de los estudiantes.

Puerto Rico

En estas directrices curriculares, observamos que el trabajo con pictogramas está mencionado en cuatro cursos de Educación Primaria (1º, 2º, 4º y 5º). En el primer curso vemos que se debe trabajar la recolección, organización, representación e interpretación de datos por medio de pictogramas, así como formular y responder preguntas simples sobre los datos (DE, 2014). En el segundo curso se pone énfasis en la resolución de problemas, donde se espera que el estudiante alcance la competencia "*utiliza la información presentada en una tabla, gráfica pictórica o de barra para resolver problemas*" (DE, 2014, p. 12). En el cuarto curso se deben abordar las competencias de recolección (con diferentes métodos) y representación de datos en pictogramas. Así como analizar y hacer predicciones basadas en pictogramas, para formular y responder cuestiones en contextos específicos; y seleccionar el gráfico más adecuado al tipo de dato. Finalmente, en quinto curso se menciona la capacidad "*representa, interpreta y compara la información de una gráfica (barra, pictórica, lineal, circular y diagrama de puntos), y tallo y hoja para contestar preguntas sobre una situación dada*" (DE, 2014, p. 26); usando experimentos simples y encuestas.

CONCLUSIONES

En primera instancia confirmamos la importancia de los pictogramas, ya reflejado en investigaciones en medios de comunicación impresos (Cavalcanti, Natrielli y Guimarães, 2010) y libros de texto (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga, López-Martín, 2015) en las que estos gráficos están entre los más frecuentes, junto a los gráficos de barras. Además es una representación recomendada para trabajar desde primeros cursos de Educación Primaria.

En esta investigación hemos podido identificar, en un grupo de directrices latinoamericanas, los niveles en que se sugiere el trabajo con pictogramas y las actividades asociadas a dicha representación, con lo que se logra una aproximación de lo que se debería plasmar en libros de texto y enseñar en las aulas. Entre los resultados destacamos la diversidad de cursos en los que se sugiere el trabajo con pictogramas, así como los años en que se comienza a trabajar con ellos que van desde 1º a 4º de Educación Primaria, centrándose su trabajo de 2º a 4º. Sobre las actividades, estas transitan, mayoritariamente, entre la construcción, lectura e interpretación, además de la recolección, registro y organización de datos. Actividades que deben estar relacionadas con contextos cercanos a los estudiantes, dando lugar al trabajo con proyectos (Batanero y Díaz, 2011).

La investigación entrega información de utilidad para la formación de profesores, a los autores y editores de libros de texto, investigadores en Educación Estadística y personas que puedan aportar a la mejora de las directrices curriculares de cada país.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC), Grupo FQM126 (Junta de Andalucía) y Beca CONICYT PFCHA 72150306.

Bibliografía

Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En J. Goñi (Ed.), El currículum matemático en los inicios del siglo XXI (pp.13-21). Barcelona: Graó.

Alaminos, A. (1993). Gráficos. Cuadernos metodológicos. Madrid: Centro de Investigaciones Sociológicas.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G.R. y Contreras, J.M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. Números, 76, 55–67

Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). Estadística con proyectos. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C., Contreras, J.M. y Arteaga, P. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. EM-TEIA. Revista de Educaçao Matematica e Tecnologica Iberoamericana, 2(2). Disponible en: http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/38

Batanero, C., Gea, M.M., Arteaga, P. y Contreras, J.M. (2014). La estadística en la educación obligatoria: Análisis del currículo español. Revista digital Matemática, Educación e Internet 14(2). Disponible en: http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/

Campos, T., Cazorla, I. y Kataoka, V. (2011). Statistics school curricula in Brazil. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education (pp. 5-8). New York: Springer.

Carvalho, C. (2009). Reflexões em torno do ensino e aprendizagem da estatística. En J. A. Fernandes, F. Viseu, H. Martinho y P. Correia (Ed), Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola (pp. 22-51). Braga: Universidade do Minho.

Cavalcanti, M.R., Natrielli, K.R. y Guimarães, G.L. (2010). Gráficos na mídia impressa. BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 23(36), 733-751.

Cazorla, I. y Utsumi, M.C. (2010). Reflexões sobre o ensino de estatística na educação básica. En I. Cazorla y E. Santana (Eds.), Do tratamento da informação ao letramento estatístico (pp. 9-18). Itabuna: Via Litterarum.

Coll, C. (1992). Psicología y currículum. México D. F.: Paidós.

DE (2014). Programa de Matemáticas. Estándares de Contenido y Expectativas de Grado. San Juan: Autor.

Díaz-Levicoy, D. (2014). Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria española. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y López-Martín, M.M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de Educación Primaria chilena. Educação Matemática Pesquisa, en prensa.

Felisberto de Carvalho, J.I. (2011). Média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. Brasil.

Font, V. (2008). Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. En C. Gaita (Ed.), Actas III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (pp. 21–64). Lima: PUCP.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. XXI. Revista de Educación, 4, 167-180.

Martins, M.E.G. y Ponte, J.P. (2010). Organização e tratamento de dados. Lisboa: DGIDC.

MEC (s.f.). 2º grado. Asunción: Autor

MEDUCA (2014a). Educación Básica General. Programa de segundo grado. Panamá: Autor.

MEDUCA (2014b). Educación Básica General. Programa de sexto grado. Panamá: Autor.

MINED-El Salvador (2008a). Programa de estudio cuarto grado Educación básica. San Salvador: Autor.

MINED-El Salvador (2008b). Programa de estudio sexto grado Educación básica. San Salvador: Autor.

MINED-Nicaragua (2009). Programa de estudio educación primaria cuarto grado. Tomo I. Managua: Autor

MINEDU (2009). Diseño Curricular nacional de la Educación Básica Regular. Lima: Autor.

MINEDUC-Ecuador (2010a). Actualización y fortalecimiento curricular de la Educación General Básica 2010. 2 año. Quito: Autor.

MINEDUC-Ecuador (2010b). Actualización y fortalecimiento curricular de la Educación General Básica 2010. 3 año. Quito: Autor.

MINEDUC-Chile (2012). Matemática educación básica. Bases curriculares. Santiago: Autor.

MINEDUC-Guatemala (2008a). Currículum nacional base tercer grado. Nivel primario. Guatemala: Autor.

MINEDUC-Guatemala (2008b). Currículum nacional base cuarto grado. Nivel primario. Guatemala: Autor.

Pinkasz, D. y Tiramonti, G. (2006). Las oportunidades educativas de las mujeres en la modernización de los 90 en Argentina. En P. Provoste (Ed.), Equidad de género y reformas educativas. Argentina, Chile, Colombia y Perú (pp. 51-97). Santiago: Hexagrama Consultoras, FLACSO, IESCO.

Pino, C., Díaz-Levicoy, D. y Piñeiro, J. L. (2014). Los gráficos estadísticos como articuladores del currículo escolar. Revista Chilena de Educación Científica, 13(2), 9-18.

SEP (2011). Guía para el Maestro Primaria. Tercer grado. Matemática. México D.F.: Autor

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. Números, 85, 5-23.

MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES

Mathematical modelling in initial training of mathematics teachers

Huincahue, J.[a] y, Mena-Lorca, J.[b]

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
jaime.huincahue.a@mail.pucv.cl[a], jaime.mena@pucv.cl[b]

Resumen

Presentamos una propuesta de introducción de la modelación matemática en la formación inicial de profesores de matemáticas en un curso de tercer semestre y en un curso terminal. Se plantea bajo la misma mirada teórica que el ministerio de educación chileno propone. Ésta tiene tres componentes: dos presenciales y uno virtual, las actividades presenciales corresponden a una clase regular de funciones y a un taller de modelación matemática; en cambio, el virtual es principalmente un espacio de reflexión para el estudiante. Los resultados parciales muestran que la ubicación de esta actividad en el curriculum de formación inicial es clave para lograr la necesaria reflexión sobre la modelación matemática como una forma de gestionar conocimientos y desarrollar competencias en los futuros estudiantes.

Palabras clave: *modelación matemática, competencias de modelación, formación de profesores.*

Abstract

We present a proposal for introducing mathematical modelling in the initial training of mathematics teachers both in a third semester course and in a terminal course. This proposal follows the theoretical view that the Chilean Ministry of Education proposes. It contains three components: two presentials and a virtual space, being a regular class on functions, a workshop on mathematical modelling, however, the virtual space is mainly for reflection of the student. Partial results already obtained show that placing this activity in the initial training curriculum is key to achieving the necessary reflection on mathematical modelling as a way to manage knowledge and to develop competences in prospective students.

Keywords: *mathematical modelling, modelling competences, teachers training.*

ANTECEDENTES

Evaluaciones nacionales como SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación) y PSU (Prueba de Selección Universitarias) e internacionales como PISA y TIMSS, ofrecen permanente información de que los procesos de formación inicial de profesores y los de perfeccionamiento no están teniendo los resultados que se esperan. Sabemos que cada prueba tiene sus objetivos específicos como instrumento de medición, por ejemplo, OECD (2014) afirma que:

La prueba PISA usa (y evalúa) el concepto de cultura matemática para referirse a la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar efectivamente la formulación, solución e interpretación de problemas en una variedad de situaciones que involucran conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos o matemáticos. (p. 37)

Tanto la modelación como la resolución de problemas, consideran características como las mencionadas por OCDE, por lo que es indispensable incluir en toda la enseñanza obligatoria chilena.

La "cultura matemática" se pone a prueba –por ejemplo- en un proceso de modelación matemática, en donde se establece una conexión con la matemática para resolver o dar respuesta a una situación real (Morales, Mena, Vera y Rivera, 2012). El problema para un profesor o investigador es cómo crear problemas o situaciones que no se reduzcan a los problemas típicos que se presentan en los textos. Más aún, cómo inducir -en los estudiantes de pedagogía- procesos de modelación matemática para construir contenidos matemáticos y cómo desarrollar otras competencias adicionales, como la de modelación (Huincahue, Morales y Mena, 2015; Morales y Cordero, 2014).
El objetivo es introducir la modelación matemática -en un proceso reflexivo, en espiral- no como una simple aplicación de conocimientos matemáticos previamente presentados, sino como un proceso de matematización e interpretación. Bajo esta perspectiva, se procura que el estudiante "descubra" la fortaleza de la matemática para abordar y resolver problemas que sean "reales" y que sea capaz de concluir, desde resultados matemáticos, inferencias en la "realidad". En el uso de funciones se ve claramente esta conexión. Por ejemplo, en funciones cuadráticas, lineales y exponenciales (y sus inversas), hay variadas sugerencias en este sentido. En la formación inicial universitaria, también se hacen estas conexiones, lamentablemente, en estos procesos de modelación, el centro es la matemática, es decir, este proceso está fuertemente asociado a un contenido.
Algunos fundamentos e hipótesis que formulamos es que el estudiante, al abordar una situación de modelación, ve en forma natural que la matemática le permite enfrentar problemas concretos que tiene sentido para él, que puede discutir con su par, defender sus ideas inicialmente en un lenguaje y una lógica no necesariamente formal (como se exige en la matemática); pero que deberá desarrollar, precisar y convencer a sus compañeros, construyendo saber matemático. Así mismo, se logrará una dimensión de la matemática que la formación actual no necesariamente está alcanzando. Nuestra hipótesis es que existen elementos en el proceso de modelación que pueden ser realzados para lograr la necesaria conexión entre la matemática (símbolos matemáticos y su operatoria) y los modelos matemáticos. Por ejemplo, para lograr así que el estudiante pueda recurrir a toda la formación matemática y otras que ha logrado cuando le sea requerida en cursos superiores o en su desempeño profesional, es decir, lograr conocimiento matemático a un nivel funcional (Morales et al, 2012).
Se espera que la o el participante quiera aprender desde una postura mucha veces desconocida, lo que se entiende por Modelación Matemática, sus diferentes enfoques según los objetivos de aprendizaje que se pretendan fortalecer y sus distintos usos en la enseñanza. Así mismo, se espera que el estudiante de pedagogía se conciba como una persona capaz de reflexionar continuamente sobre sus propias prácticas pedagógicas y didácticas, estableciendo un carácter autocrítico en sus labores docentes y que permanezca en la constante búsqueda de elementos de innovación.

Marco conceptual

En Chile, los Objetivos de Aprendizaje desde el año 2012 consideran transversalmente cuatro habilidades para Matemáticas: resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar y representar; quedando como un constante desafío para la comunidad académica considerar, en la formación inicial y continua de profesores, la inclusión del desarrollo de las habilidades y destrezas, y la integración de los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios (MINEDUC, 2012).
En los últimos 30 años, la Modelación Matemática ha adquirido un rol cada vez más protagónico y esto se ha evidenciado en las investigaciones que han enriquecido las metodologías de enseñanza, líneas de investigación y desarrollo de múltiples programas de estudio en todos los niveles educativos. En 1979, Henry Pollak considera a la Modelación Matemática como una manera de enlazar a la matemática con "el resto del mundo" (Borromeo-Ferri, 2006), estableciendo un primer significado del devenir de progresivas posturas asociadas a la modelación matemática, entendimientos diferenciados dependientes del uso y contexto disciplinar que se le pueda asignar a una tarea de modelación (Barbosa, 2003); a partir de esto es que investigadores en el área han

definido distintos ciclos que describen sus procesos. En el trabajo de Borromeo-Ferri (2006) se reportan algunos ciclos de modelación, destacando sus diferencias y similitudes epistemológicas.
Generalmente, los procesos son descritos a partir de ciclos de modelación, que implican la existencia de varios direccionamientos según el ciclo que eventualmente pueda utilizar y en algunos casos, si las tareas usadas son o no complejas para el estudiante (Borromeo-Ferri, 2006).
Considerar la modelación como una actividad de la persona que resuelve problemas de su realidad utilizando matemática, implica ampliar la postura de modelación, ya que muchas veces dependerá de los objetivos que se tengan en mente como profesor. Estos objetivos pueden tener como foco de importancia el desarrollo, el resultado, la interpretación, la validación, la asignación de hipótesis, las barreras cognitivas, entre otros.
Kaiser y Sriraman (2006) y Blomhøj (2008) definen las perspectivas de modelación: 1) Realista, 2) Contextual, 3) Educacional, 4) Epistemológica, 5) Cognitiva, y 6) Socio-crítica, clarificando que el parcelamiento fáctico es complicado, ya que no es fácil establecer ciertos rasgos de cada perspectiva en una sola tarea y a la vez, una tarea no tiene características de una única perspectiva.
En nuestro caso, creemos que las perspectivas son preocupaciones más cercanas al investigador; ya que al adquirir este conocimiento, el docente es capaz de crear tareas según los objetivos de aprendizaje trazados. Un motivo similar generará interés para el docente.
Para Maaß (2006), las competencias de modelación incluyen destrezas y habilidades para realizar procesos de modelación apropiadamente y orientado a objetivos, así como la voluntad de poner éstos en acción. De esta forma, es posible considerar las competencias y subcompetencias de modelación que definen Blum y Kaiser (1997). Éstas son detalladas en profundidad en Maaß (2006), que son el fiel reflejo de las competencias existentes al transitar por el ciclo de modelación de Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2006, 2010).
Otros autores ya han experimentado con seminarios similares (Borromeo-Ferri y Blum, 2009) en donde la reflexión individual es considerada fundamental para el estudio de los tópicos tratados en el seminario, ya que podrán fundar y/o reformular ideas previas a cada sesión, esperando como un primer impacto a las creencias con respecto a la enseñanza y uso de la Matemática y Didáctica de la Matemática.
El carácter que adquiere la reflexión en el seminario, es fundamental para lograr impacto tanto en las creencias como en los elementos conceptuales y prácticos de la enseñanza de la Modelación Matemática. Por este motivo, se considera un pilar del proceso de evaluación y de conducción hacia el objetivo del seminario, que sería generar profesores más competentes al sistema educacional.
Se pretende abordar transversalmente todos los elementos teóricos, para así, determinar una correlación teórica y práctica de los diseños propuestos y los que serán creados en esta propuesta.

Metodología

La propuesta fue puesta en práctica en dos universidades de la región de Valparaíso, en las carreras de formación inicial de profesores de matemáticas, en diferentes niveles. Llamaremos el caso A, a la puesta en práctica con estudiantes del tercer semestre y el caso B a los de séptimo semestre.
La propuesta es considerada desde ámbitos presenciales (dos veces cada semana durante 14 semanas) y no presenciales (virtual). El primer componente presencial para el caso A, consistió en la construcción de modelos desde el estudio de las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales (con sus inversas) en ambientes matemáticos y cotidianos, aproximándose a través del descubrimiento de resultados (apartando inicialmente el formalismo) y dando prioridad a la construcción de resultados. En el caso B, se consideraron elementos de la Didáctica de la Matemática: Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), Transposición Didáctica (Chevallard, 1980) y Teoría de Representaciones Semióticas (Duval, 1999).

El segundo componente presencial

El segundo componente presencial, en adelante seminario, consiste en un recorrido del estado del arte de la modelación matemática desde: concepciones sobre "realidad" y tipos de ésta, definiciones de modelación matemática, ciclos, perspectivas y competencias de modelación (Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio y Ocampo, 2009; Borromeo-Ferri, 2006, 2010; Blomhøj y Jensen, 2006; Barbosa, 2003; Stillman, Kaiser, Blum y Brown, 2013; Blum, 2002; Kaiser y Sriraman, 2006; Blomhøj, 2008; Maaß 2006; Blum y Kaiser, 1997; Lesh, Galbraith, Haines, Hurford, 2010; Huincahue et al, 2015).

La discusión entre pares y el investigador fue una permanente característica que se mantuvo durante todo el seminario, profundizando en tópicos de interés para los integrantes y para la programación misma. Las estrategias metodológicas para fomentar la reflexión consistieron en mesas redondas, foros, sesiones expositivas, trabajo grupal e individual, con características indagatorias, de exploración, discusión y conclusión, complementado con el estudio personal del estudiante tanto en clase como fuera de ella.

El trabajo colaborativo realizado en cada institución escolar en Chile, define que mesas multidisciplinares deben abordar las problemáticas naturales de un profesor, conformadas idealmente por el director de la institución educacional, encargados de la Unidad Técnica Pedagógica, grupos de profesores por área y nivel y profesionales encargados del apoyo a estudiantes con necesidades educativas especiales (autismo, dislalia, hiperactividad, etc.). Por lo tanto, el ambiente en donde el futuro docente compartirá no será necesariamente con las personas que quisiera trabajar, debiendo adquirir suficiente plasticidad (aludiendo a la metáfora neuroeducacional del uso neuronal del ser humano) para establecer una óptima comunicación en el desarrollo de su quehacer. Desde esta postura, el profesor debe lograr la mayor plasticidad posible tanto para el fecundo trabajo multidisciplinar como con sus estudiantes en el aula. A partir de tal escenario, es que se considera que la elaboración de los grupos de trabajo durante el seminario sea al azar, en no más de 5 estudiantes.

Para el caso A, las diversas situaciones de aprendizaje en ambos componentes presenciales, se ha planteado desde la resolución y/o construcción de tareas de modelación. Lo anterior cobra relevancia, ya que se asume como hipótesis que para la enseñanza de la modelación, es necesario que los estudiantes sepan resolver tareas de modelación. Lo anterior, es considerado suficientemente complejo y por ello se reforzó a través de toda la propuesta; especialmente el proceso de construcción y matematización desde ciertos objetos matemáticos, como fue el caso de los tipos de funciones mencionados anteriormente y componentes matemáticos específicos tratados en el seminario, como por ejemplo los conceptos de proporcionalidad o distancia.

Evaluación

La evaluación del seminario fue significativa para el establecimiento de sus resultados, ya que evidencia los aspectos relevantes para la programación y esquematizó el trabajo esperado durante la experimentación. El proceso evaluativo es mostrado en la Tabla 1.

El proceso de evaluación del Diario de Reflexión se entiende desde una rúbrica dinámica, en donde se solicita a los estudiantes de forma inicial que realicen reflexiones sobre algún tema -no guiado por el investigador- tratado en las clases, ya sea por el profesor o por sus pares, que haya sido discutido en clases y que sea del interés personal del estudiante.

Tabla 3. Proceso evaluativo de la propuesta.

Instrumento	*Ponderación*	*Descripción*
Diario de Reflexión	45%	Documento virtual, en donde solo el estudiante y el profesor tienen acceso. En él, debe poner en evidencia su posicionamiento conceptual de los tópicos tratados en clases. No se espera que sea un resumen de las clases, sino de elementos significativos para el estudiante que han surgido en las clases. Tiene 6 revisiones durante todo el seminario.
Portafolio	20%	Cada grupo de trabajo deberá crear un portafolio, el que evidenciará la reflexión, evolución y logros adquiridos de manera grupal. El portafolio tuvo 2 calificaciones durante el semestre.
Actividades	10%	Existirán actividades individuales y grupales a través del seminario del tipo: resolución de tareas de modelación, ensayos, confección de tareas desde ciertos elementos conceptuales, uso de la microingeniería didáctica en propuesta de tareas, etc.
Trabajo de Investigación	10%	Cada grupo de estudiante debe crear una tarea de modelación desde un objetivo determinado por ellos. Esta tarea debe ser presentada primero en el seminario para ser retroalimentada por sus pares y el profesor guía. La actividad será puesta en práctica en un colegio en donde alguno de los estudiantes esté realizando su práctica profesional. Finalmente, cada grupo realizará un reporte (anexo 2) asociado a su investigación, cuyos resultados serán expuestos frente al seminario.
Prueba Global	15%	Todos los contenidos.

En los procesos de revisión existe un constante lineamiento hacia lo que es la rúbrica final del seminario, la cual demanda reflexiones complementadas y sustentadas con documentos científicos, siendo la innovación una característica en sus escritos, tanto sobre diseños de aprendizaje, opiniones teóricas, prácticas docentes, entre otros. Esta actividad intenta promover la generación de autonomía conceptual, coherencia didáctica y pedagógica y propuestas de innovación de sus ideas, permitiendo una suficiente libertad para profundizar en los temas de interés de cada uno de ellos. Además, se asumió un dinamismo en la rúbrica por la inexperiencia de los estudiantes al reflexionar, ya que son muy pocas las instancias que se les solicita hacerlo en las asignaturas que conforman su formación inicial.

El Portafolio contiene la resolución de todas las actividades que son solicitadas en el transcurso del seminario, junto con las reflexiones que se han podido consensuar en el grupo de trabajo. Un fin del portafolio es la recopilación de información para su futura labor docente para destacar logros y errores que tengan los estudiantes. En éste, existen procesos coevaluativos y autoevaluativos, esperando reflejar el trabajo colaborativo existente al construirlo.

Las Actividades son dadas en las clases, consistiendo en tareas o ensayos a realizar dentro o fuera del horario de seminario, dependiendo de la importancia de la tarea según la planificación realizada. Una tarea que los estudiantes debieron realizar mas de una vez fue la resolución de tareas de modelación, considerando una mejor evaluación la riqueza en las múltiples maneras de resolver las tareas (lo que es explicitado en las instrucciones de las tareas), fomentando las competencias de modelación propias del futuro profesor desde sus capacidades, para posteriormente generar mayor cantidad de visualizaciones de desarrollo de cada una de las tareas que ellos deberán dirigir en sus futuras prácticas (análisis a priori). En total, existieron 8 actividades ponderadas igualitariamente, siendo 4 de ellas, resolución de tareas de modelación.

El Trabajo de Investigación, consiste en la elaboración de una tarea de modelación, usando gran parte de los fundamentos teóricos tratados en el seminario, buscando evidenciar: 1) una actitud crítica con respecto a la práctica docente presente en las aulas chilenas; 2) La manipulación de herramientas teóricas que abordan problemáticas educacionales en Modelación Matemática; refiriéndose a la capacidad de fomentar competencias de Modelación Matemática en su propuesta de innovación y reconocer elementos basales en la realización de tareas; y 3) innovación en las tareas de modelación creadas.

La Prueba Global considera elementos teóricos y prácticos en similar proporción.

El tercer componente fue mediante una plataforma virtual, en donde se presentaron múltiples materiales de apoyo: presentaciones utilizadas en clases, material complementario, foros de discusión y el "Diario de Reflexión". Este último fue individual y pudo ser leído y editado por los investigadores y el estudiante. Su uso tuvo como objetivo que el estudiante reflexione –al menos- semanalmente sobre tópicos que se han discutido en los dos componentes presenciales y que evidencie un avance del aprendizaje individual.

La recolección de datos consideró todos los tipos de evaluación que se consideraron e instrumentos anexos: elaboración y construcción de tareas de modelación, ensayos, portafolio, diario de reflexión, prueba y entrevistas grupales al final del seminario en el carácter de un focus group.

Experimentación

Las experimentaciones A y B fueron realizadas en el transcurso de los meses de marzo y julio de 2015. La contingencia nacional impactó de diferente manera en cada uno de los casos, ya que existieron paralización de actividades académicas en el caso A, dejando en el carácter de incompleta la experimentación; no así en el caso B, ya que ésta fue realizada de forma completa antes de que comenzaran las paralizaciones en la institución.

Caso A

Fueron 14 sesiones programadas de 90 minutos una vez a la semana para ambos componentes presenciales. Asistieron 52 estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas, en donde la gran mayoría cursaba su tercer semestre de la carrera. Paralelamente, realizaban su primera práctica docente en colegios cercanos a la ciudad de Valparaíso, región de Valparaíso.

Alrededor del 30% de los estudiantes dejó de asistir a las clases desde la semana 4, y posteriormente se plasmó en una deserción del orden del 20%. Los que siguieron el seminario se adaptaron al sistema.

La nula posibilidad de establecer la última sesión, hizo que no se pudieran realizar el Trabajo de Investigación y el focus group.

Caso B

Fueron 14 sesiones programadas de 75 minutos una vez a la semana para ambos componentes presenciales. Asistieron 13 estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas y Computación, en donde la totalidad de estudiantes cursaban al menos su séptimo semestre de la carrera. Paralelamente, realizaban su tercera práctica docente en colegios principalmente en el Valle de Aconcagua, región de Valparaíso.

No hubo disminución de asistencia a clase de manera anormal ni deserción en la finalización del seminario.

En ambos casos, los estudiantes que continuaron con el seminario, fueron progresivamente apoderándose del Diario de Reflexión, generando un uso habitual del instrumento, sirviendo de un espacio de reflexión que tuvo trascendencia por sobre los tópicos de la propuesta, ya que fue

utilizado como un instrumento de reflexión general relacionado con la profesionalización docente, el saber matemático y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

CONCLUSIONES

Los estudiantes del caso A, mostraron reticencia a la modalidad de trabajo, esperaban una clase frontal en donde se presentan los resultados matemáticos y se explican. Esperaban preguntas matemáticas claras y tradicionales, en donde el contenido matemático está explícito. La incomodidad del tipo de preguntas desaparecía cuando se obtenía algún modelo real que les permitiera matematizar y así iniciar el ciclo de modelación (en términos del ciclo de Blum-Borromeo, Borromeo-Ferri, 2006, 2010). En el caso B, existió un proceso de adaptación a la propuesta, en donde los estudiantes se sintieron incómodos. Sin embargo, desde la semana 3 o 4 se lograron adaptar al proceso de la propuesta y su evaluación.

La inseguridad que se generó en la forma de ser evaluado y la modalidad de trabajo planteada, provocó la reducción del número de estudiantes asistentes a clase en el caso A. Los que siguieron se adaptaron al sistema. En el caso B no hubo disminución de asistencia a clase ni deserción.

Los procesos de reflexión exigidos en la propuesta, adquirieron una importancia fundamental para definir la participación activa de los estudiantes. En el caso A, los niveles de deserción son relacionados con la falta de conocimiento del rol profesional docente, ya que éstos no tienen y no ven –en general- la necesidad de crear y diseñar propuestas de enseñanza. Los estudiantes del caso A no son conscientes de las competencias logradas en modelación. En el caso B, existió una valoración positiva frente a la propuesta, incluso estudiantes declaran lo positivo de esta instancia dentro de su formación.

Considerando la totalidad de estudiantes que terminaron de forma activa ambas experimentaciones, alrededor de un 20% de ellos evidenciaron un empoderamiento progresivo del Diario de Reflexión, incluyendo a sus comentarios elementos que trascienden de los tópicos abordados en la planificación de la propuesta y siempre relacionados con las prácticas docentes, el rol de las matemáticas para un profesor, la importancia del contexto para la enseñanza y en general, el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El desarrollo y evolución de la creación de tareas de modelación, fue evidenciado en la gran mayoría de los estudiantes que finalizaron el seminario para el caso B. Al inicio del seminario, la creación de tareas eran remitidas a la aplicación de objetos matemáticos ya construidos. Sin embargo, las tareas propuestas en el Trabajo de Investigación destacaban por ser propuestas de construcción del saber matemático, logrando problematizar el saber matemático y desafiando el uso de los conocimientos que se van construyendo, posicionando a la modelación en un estatus capaz de construir conocimiento matemático en el estudiante.

Referencias

Barbosa, J. C. (2003). What is mathematical modelling? In S. J. Lamon, W. A. Parder &. K. Houston (Eds.), Mathematical modelling: a way of life, pp. 227-234. Chichester: Ellis Horwood.

Blomhøj y Jensen, (2006) Teaching mathematical modeling through project work. ZDM 38 (2), pp. 163-177.

Blomhøj M. (2008). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling – Categorising the TSG21 papers. Proceedings of ICME 11, pp. 1-13.

Blum, W. y Kaiser, G. (1997). Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden. Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–Discussion document. Educational studies in mathematics, 51(1-2), pp. 149-171.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. ZDM, Vol. 38, 2, pp. 86-95.

Borromeo-Ferri, R. y Blum, W. (2009). Mathematical modelling in teacher education – experiences from a modelling seminar. Proceedings of CERME 6.

Borromeo-Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behavior. Journal für Mathematik-Didaktik. 31(1), pp. 99-118.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Chevallard, Y. (1980). La Transposition Didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano - registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle.

Huincahue, J., Morales, A. y Mena-Lorca, J. (2015). Postura científica de la modelación matemática y su impacto en la enseñanza y el aprendizaje. En Memoria de la XVIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Oaxaca: CIMATES.

Kaiser G. y Sriraman B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM 38(3), pp. 302-310.

Lesh R., Galbraith P. L., Haines C. R., Hurford A. (2010). Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13. New York: Springer.

Maaß K. (2006). What are modeling competences? ZDM 38(2), pp. 113-142.

MINEDUC. (2012). Curriculum en línea. Recuperado el 5 de mayo de 2015, de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyvalue-49395.html

Morales, A., Mena, J., Vera, F., Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. Enseñanza de las Ciencias. 30(3), pp. 237-25.

Morales, A. y Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la Serie de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17(3), pp. 319-345.

OECD (2014), PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I, Revised edition, February 2014), PISA. OECD Publishing. Doi: 10.1787/9789264201118-en.

Pollak, H. (1979). The interaction between mathematics and other school subject. New Trends in Mathematics Teaching IV, Paris, pp. 232-248.

Stillman, G. A., Kaiser, G., Blum, W. y Brown, J. P. (2013). Teaching mathematical modelling: connecting to research and practice. New York: Springer Science & Business Media.

Villa-Ochoa, A., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, J. y Ocampo, D. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto. Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2(2), pp.159-180.

UN MODELO MULTINTERPRETATIVO PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO TRANSFORMACIÓN LINEAL.

Mulinterpretative model for the study of linear transformation concept.

Maturana I. [a], Parraguez M.[b], Trigueros M.[c]

UPLA. PUCV. Chile ITAM México.

isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl. trigue@itam.mx

Resumen

Realizamos un estudio cognitivo del concepto Transformación Lineal (TL) desde donde obtuvimos indicadores de los elementos constituyentes para la evolución de la construcción mental esquema asociada al concepto. En la investigación propusimos un modelo multinterpretativo que sustentado fundamentalmente por la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014), el que integra interpretaciones del concepto TL, las que permitieron identificar en forma detallada componentes esenciales para la evolución de su esquema.

Palabras clave: *transformaciones lineales, APOE, indicadores, mecanismos del esquema*

Abstract

We conducted a study of cognitive concept Linear Transformation (TL) from where we got indicators of the constituent elements for the development of mental construction scheme associated with the concept. In our research we proposed a multinterpretative model supported mainly by the theory APOE (Actions , Processes , Objects and Scheme) (Arnon , Cottril , Dubinsky , Oktaç , Roa , Trigueros and Weller, 2014) , which integrates interpretations of TL concept that allowed us to identify in detail essential components for the development of their scheme .

Keywords: *linear transformations, APOS, indicators, mechanisms of the scheme.*

INTRODUCCIÓN

Realizamos un estudio profundo del concepto TL, del que concluimos que existen tres formas en que este se presenta en los planes y programas de los cursos de álgebra lineal, estas son: funcional, matricial y geométrica. Ha estas formas las llamamos interpretaciones del concepto, cada una de ellas fue descompuesta en sus elementos fundamentales y articuladas por el concepto combinación lineal; es así que nuestro estudio propuso, y basándose en la metodología propia de la teoría APOE, un modelo Multinterpretativo para su estudio. Esto es, desde la conformación de descomposiciones genéticas para cada interpretación del concepto se obtuvo una descripción detallada de las construcciones y mecanismos mentales para la construcción del esquema del concepto TL, dichas descomposiciones genéticas aparecen especificadas en Alme 27, bajo el título "Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal" (Maturana, Parraguez ,2014) y en acta CIBEM VII, bajo el título "Una Mirada Cognitiva a las Transformaciones Lineales. Articulación entre sus Tres Interpretaciones: Funcional-Matricial-Geométrica" (Maturana, Parraguez ,2013).

Son diversas las investigaciones en didáctica de la matemática que han abordado la problemática de enseñanza-aprendizaje del concepto TL; podemos identificar las contribuciones de Uicab y Oktaç (2006), Molina y Oktaç (2007) sus investigaciones abordan la problemática de aprendizaje en un contexto geométrico, identificando aquellos modelos sustitutivos que pueden tener los estudiantes sobre el concepto TL y el grado de interferencia de estos. Roa y Oktaç (2010) basadas en la teoría APOE proporcionan como resultado de investigación dos formas de construcción para concepto TL en su interpretación funcional. En la interpretación matricial, son los aportes de Bagley, Rasmussen y Zandieh (2012) quienes centran su investigación en la relación conceptual que los estudiantes establecen entre las matrices y las funciones lineales. Nuestra investigación aporta una mirada integradora del concepto, lo que permitió, por una parte identificar indicadores para los niveles del esquema, y por otra los mecanismos involucrados en su evolución.

Teoría APOE

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), desarrollada por Dubinsky y el grupo de investigación RUMEC, que actualmente se presenta en Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014), es un marco teórico cognitivo de la Didáctica de la Matemática, que plantea como una de sus características fundamentales proponer un modelo hipotético de construcción para el aprendizaje de un concepto matemático en estudio. Es así que APOE, como sustento teórico, facilita describir las construcciones y mecanismos mentales que constituyen el esquema de un concepto matemático, en este caso el de TL, en sus tres interpretaciones. En nuestra investigación se documenta en forma detallada dichas construcciones.

Desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por la construcción de las estructuras Acción, Proceso, Objeto y Esquema que constituyen las construcciones mentales. La descripción del paso de una construcción mental a otra se logra mediante la explicitación de los mecanismos, entre los que reconocemos la interiorización, la coordinación, la encapsulación y la tematización. Una acción es una transformación de un objeto, el cual es percibido por el individuo, hasta cierto punto, como algo externo; cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Si individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza transformaciones sobre él (ya sean acciones o procesos) y puede construir esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto, de esta forma, se dice que un proceso ha sido encapsulado.

La noción de esquema se refiere a una colección más o menos coherente de objetos, procesos y otros esquemas. Los esquemas son las construcciones más complejas que podemos determinar de un concepto matemático, y al mismo tiempo, son estructuras inacabadas que evolucionan por la asimilación de un nuevo objeto o proceso y la reacomodación de las estructuras por la construcción de nuevas relaciones entre los componentes del esquema. Una característica fundamental de los esquemas es su coherencia, que alude a la capacidad del individuo para establecer si un esquema le permite solucionar un problema particular.

Diseño metodológico

Como diseño metodológico incorporamos el estudio de caso (Stake 2010) a la metodología propuesta por APOE y el grupo RUMEC, consideramos que la complementa ofreciendo criterios

específicos para la selección de los estudiantes, lo que nos permitió tipificar al caso estudiado. Es así que se entrevistaron a tres estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemática, que fueron seleccionados por mostrar, en un estudio previo, evidencias de poseer construcciones y mecanismos mentales próximos a la construcción mental objeto para cada una de las interpretaciones del concepto. De las entrevistas, se obtuvo el detalle sobre las construcciones y mecanismos mentales puestos en juego en la construcción del esquema para el concepto TL y a la vez, se pudo establecer la evolución en los esquemas mentales de los entrevistados.

El esquema y el modelo multinterpretativo.

Nuestra propuesta para analizar los esquemas de los estudiantes del caso se basa en un modelo multinterpretativo para el concepto de TL. Consideramos que este, como un concepto unificador para el álgebra lineal, incorpora diferentes interpretaciones, razón por la cual para la caracterización de su esquema como construcción mental, proponemos considerar las como construcciones mentales objeto o próximas a la de objeto; pensamos que son indispensables para la evolución del esquema del concepto, y que nos permitirán, a su vez, determinar su coherencia, entendida esta última como la capacidad para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si éste permite solucionar una situación matemática particular, y en tal caso usarlo.

Es así que incorporamos en algunas de las preguntas de la entrevista la noción de isomorfismo de espacios vectoriales, a modo de poner a prueba todas las componentes del esquema del concepto TL. Para ello levantamos indicadores (tabla.1) en términos de las construcciones mentales que evidencian cada uno de los niveles de evolución del esquema del concepto TL.

Tabla .1. Construcciones mentales para determinar el nivel del esquema para el concepto TL.

Intra-TL	*Inter-TL*	*Trans-TL*
-Concepto de espacio vectorial real como objeto.	-Concepto de espacio vectorial real como objeto	-Concepto de espacio vectorial real como esquema.
-Concepto de función como proceso.	-Concepto de función como objeto.	-Concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo como objeto.
-Concepto de combinación lineal como proceso.	-Concepto de combinación lineal como proceso.	-Concepto de función como objeto.
-Concepto de kernel como proceso.	-Concepto de kernel como objeto.	-Concepto de combinación lineal como objeto.
-Concepto de dimensión como objeto.	-Concepto de dimensión como objeto.	-Concepto de kernel como objeto.
-Concepto de MATL como proceso.	-Concepto de MATL como objeto.	-Concepto de dimensión como objeto.
		-Concepto de MATL como objeto.
-Concepto de vector como objeto.	-Concepto de vector como objeto.	-Concepto de vector como objeto.

Por otra parte, deberemos tener en cuenta que un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado. Es posible que en los análisis de las entrevistas encontremos indicadores de algunos esquemas ya tematizados o cercanos a ello.

Las evidencias.

A continuación presentaremos un extracto de los relatos para dar respuesta a una pregunta clave realizada a los tres entrevistados:

Dada la transformación línea $F: A <^{\circ} 2 \rightarrow A' <^{\circ} 3$ *, definida por* $\left[F\right]_A^{A'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$*, donde* $A = \langle (1,0),(1,1) \rangle$ *y* $A' = \langle (1,0,1),(1,1,1) \rangle$*, determine si esta transformación lineal es un isomorfismo. En caso de ser afirmativa su respuesta establezca el isomorfismo. Si su respuesta es negativa, justifique.*

Extracto de la respuesta de E3:

[E3--1] Me dan una transformación lineal, R^2 a R^3, y me dan la matriz asociada. Y tengo que ver si esa transformación es un isomorfismo.

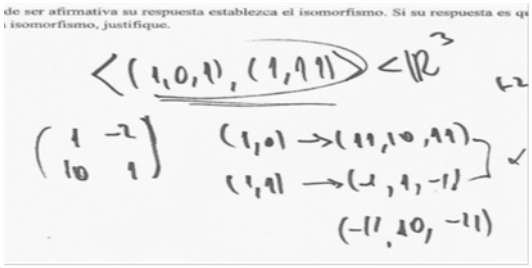


Figura1. Respuesta de E3 a la pregunta.

E3 construye la TL mediante la asignación de los vectores da la base de espacio de partida en imágenes calculadas según la información de las coordenadas dadas en la matriz asociada a la TL, con lo que muestra coordinar la interpretación matricial con la geométrica para dar respuesta. Para calcular dichas coordinadas debió coordinar las construcciones proceso de los conceptos matriz y combinación lineal con el de función. En el diálogo siguiente se profundizan estas ideas.

[Ent-2] ¿Cómo sabes que es un isomorfismo?

[E3--3] Porque si lo restrinjo aquí la imagen. O sea, No. Sí. Entonces, como, el Kernel tendría que ser cero.

E3 mostró una construcción mental objeto para la matriz asociada, sobre la que puede realizar acciones, pero aún no da evidencias que el esquema correspondiente a dicha interpretación haya evolucionado a un nivel *Trans*-TL, pues no determina desde la matriz si la función es un isomorfismo.

Extracto de la respuesta de E9:

[E9--1] La dimensión de los espacios es distinta, así que no puede haber un isomorfismo.

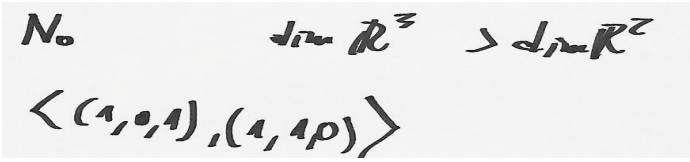


Figura 2. Muestra los argumentos de E9.

[E9--2] No, no es posible, porque si… el espacio en el conjunto es de dimensión 3, así que nosotros, aquí abajo no puede generar todo… Tenemos una base aquí de dimensión 2.

[E9--3] Y en la imagen. Y conjunto de dimensión 2 no puede generar... que tiene que aparecer aquí. Así que no puede haber un isomorfismo aunque sean iguales.

E9 muestra coordinar las construcciones mentales proceso del concepto de dimensión con el concepto de función, mediante el teorema fundamental del álgebra lineal. Esto no alcanza para construir el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales, pues falta coordinar con el concepto de kernel de la TL que le permitiría construir por ejemplo grupo cociente, lo que permitiría a su vez construir un isomorfismo, pero para este caso muestra tener construcciones acción referidas al

grupo cuociente, y en términos generales su esquema para el concepto TL es *Inter*-TL. Los mecanismos que permitirían su evolución no se encontraron presentes durante el transcurso de su entrevista.

Extracto de la respuesta de E18:

[E18-1] Sí es un isomorfismo. Cuando hablamos de isomorfismo, en álgebra II, siempre decían que las cosas tenían que tener igual dimensión.

E18 en este tramo de la entrevista hace alusión al teorema de las dimensiones entre espacios vectoriales. Ha mostrado durante el transcurso de la entrevista no coordinar los procesos asociados a los conceptos de base en el espacio de partida con los de combinación lineal y de función mediante la igualdad. Al continuar el relato de esta pregunta, regresa a su concepción de dimensión y establece las bases para dar respuesta.

[E18-2] Que tiene dimensión 2, entonces sí podría haber.

[E18-3] Es que como es un subespacio de R^3 donde está llegando, tiene dimensión 2, entonces a de dimensión 2 a dimensión .Sí se puede.

[E18-4] Pero si esta matriz es inyectiva… invertible…

[E18-5] Entonces si mi determinante es distinto a cero, puede existir la que es… para el otro lado, entonces sí va a ser isomorfismo, porque va a existir una *F'* que vaya de aquí para allá. Entonces veamos si el determinante es distinto a cero. Pero eso es fácil. Es más 20.

[Ent-6] O sea, existe un isomorfismo aquí…

E18 puede dar respuesta a la pregunta, mostrando una construcción proceso de los conceptos de combinación lineal y coordenadas de la imagen de un vector. Hasta ahora pareciera que posee una construcción mental objeto del concepto matriz asociada a la transformación lineal, pero no del teorema, pues no ha realizado acciones sobre éste.

Estos extractos de las entrevistas son solo muestras pequeñas de un trabajo de horas por cada estudiante, por lo que las conclusiones van más allá de lo mostrado.

Conclusiones generales.

Obtuvimos de las entrevistas que el mecanismo que permite el tránsito entre el nivel *Intra*-TL e *Inter*-TL puede definirse como un mecanismo doble en el que se construye, por una parte, una relación entre el proceso combinación lineal y el proceso asociado al espacio vectorial que estructura al último y, por otra parte, se construye una relación entre el proceso de kernel y el proceso MATL como forma de determinar la inyectividad de la función TL. Por su parte, el mecanismo que permite el tránsito entre el nivel Inter-TL y el *Trans*-Tl radica en la posibilidad de determinar, mediante el uso de la combinación lineal, la existencia de una función TL que relacione los espacios vectoriales incluidos en ella. La coherencia del esquema queda determinada por el reconocimiento del papel del objeto combinación lineal en esta relación. Bajo los indicadores anteriores nos fue posible determinar que dos de los tres entrevistados mostraron una evolución de su esquema para el concepto TL. Y por otra parte, el tercer entrevistado no dio evidencias de evolución su esquema, permaneciendo en un nivel *Intra*-TL.

Desde su estudio, nos fue posible establecer que al analizar el proceso de articulación de las interpretaciones del concepto TL se pone a prueba su esquema. Es así que los tres entrevistados

mostraron, en términos generales, las siguientes construcciones mentales: espacio vectorial, vector, base, conjuntos LI y LD, combinación lineal, función lineal, inyectiva, matriz, coordenada, MATL, dimensión, kernel, isomorfismo, TFA, cada una de ellas como construcciones mentales proceso u objeto sobre las cuales efectuaban acciones; todas dispuestas en nuestras DG, pero la diferencia de sus esquemas se pudo establecer mediante la introducción del concepto de isomorfismo de espacios vectoriales, donde dos de los tres estudiantes entrevistados mostraron que las construcciones mentales de los conceptos de dimensión y kernel eran elementos que marcaban diferencia permitiéndoles responder a problemáticas referidas al concepto de isomorfismo entre espacios vectoriales, no quedando limitados al teorema de la dimensión. Ambos entrevistados trabajaron la interpretación funcional del concepto TL, poniendo énfasis en la estructura algebraica de espacio vectorial, emergiendo el concepto de grupo cociente vinculado a la estructura de espacio vectorial.

Pensamos que estos estudiantes lograron relacionar el álgebra abstracta con el álgebra lineal, mostrando uno de ellos un esquema para el concepto de TL de nivel *Inter*-TL, que en una primera aproximación se pensó podría ser *Trans*-TL, pues logró articular las tres interpretaciones y construir el isomorfismo entre espacios vectoriales, los indicadores antes dispuestos permitieron lograr las evidencias en las dificultades relacionadas con las construcciones mentales asociadas al concepto CL, cuya construcción para lograr una coherencia en el esquema debiera ser objeto, lo que permitiría realizar acciones y desencapsular diferentes procesos involucrados en su construcción. Dicha construcción permite la realización de acciones sobre conjuntos LI o LD a los que se les aplica una TL. Es importante resaltar el papel que juega el objeto CL, tanto en la evolución del esquema TL como en su coherencia. La dinámica de evolución del esquema y el hallazgo del papel que juega en ella constituyen una aportación de este estudio.

Referencias.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory. New York: Springer.

Bagley, S., Rasmussen, C., & Zandieh, M. (2012). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. In (Eds.) S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, and M. Oehrtman, Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics.

Maturana, I., Parraguez, M. (2014). Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27, 771-778. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maturana, I., Parraguez, M. (2013). Una Mirada Cognitiva a las Transformaciones Lineales. Articulación entre sus Tres Interpretaciones: Funcional-Matricial-Geométrica. En SEMUR (Ed), Acta VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 1993-2000. Uruguay.

Molina, G., y Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. En Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (1), pp. 241-273.

Roa, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (1): 89-112.

Stake, R.E. (2010). Investigación con estudio de casos. Barcelona: Labor.

Ubicab, R., Oktaç, A. (2006). Transformaciones Lineales en un ambiente de geometría dinámica. Tesis de doctorado, CICATA-IPN, D.F., México.

IMPACTO DEL CAPITAL CULTURAL EN EL RENDIMIENTO ESCOLAR EN MATEMÁTICA. UN ESTUDIO AL TÉRMINO DE LA ENSEÑANZA MEDIA

Cultural capital impact on school performance in mathematics. an application to the term of teaching media

"Estudios Socioculturales en Educación Matemática"

Cortés Toledo M[a]. y Negrete León S[b]

Universidad Central de Chile;
m.cortes.toledo@gmail.com, slf.negreteleon@gmail.com

Resumen

El estudio está enfocado a detectar si existe algún grado de influencia del capital cultural en el rendimiento escolar en matemática de enseñanza media. Se consideró el capital cultural según lo establece Pierre Bourdieu y su nivel se especificó en una escala porcentual. Se experimentó en un establecimiento educacional de la región metropolitana, en estudiantes que terminan enseñanza media.

Palabras clave: *capital cultural, rendimiento escolar en matemática, correlación lineal, relación de causalidad*

Abstract

This document is concentrated in detect if exist some grade of influence of cultural capital to the school performance in the mathematics discipline. It is considered the cultural capital by words of Pierre Bourdieu, and the level was specified by a porcentual scale. Also, was experienced in a educational department of the region Metropolitan, to be more specific, in students about to end his required school year.

Keywords: *Cultural capital, School performance in mathematics, linear correlation, causal relationship*

INTRODUCCIÓN

La educación matemática en Chile presenta grandes desafíos. Uno de ellos guarda relación con la interpretación del éxito o fracaso escolar en esta materia, atribuibles a diversos factores. Este trabajo se centra en el concepto de capital cultural como factor de impacto.

Según J. Martínez "El capital para Pierre Bourdieu se puede entender como cualquier tipo de recurso capaz de producir efectos sociales, en cuyo caso es sinónimo de poder, o como un tipo específico de recurso, con lo cual sería un tipo de poder."

Pierre Bourdieu afirma la presencia de diversos capitales que se relacionan con la definición del fragmento anteriormente citado. Particularmente, esta investigación se centra en la idea de capital cultural entregada por este autor, considerando la participación de tres dimensiones: capital cultural incorporado, objetivado e institucionalizado.

Para Bourdieu (1979) "El capital cultural puede existir bajo tres formas: en el estado incorporado, es decir, bajo la forma de disposiciones duraderas del organismo; en el estado objetivado, bajo la forma de bienes culturales, cuadros, libros, diccionarios, instrumentos, maquinaria, los cuales son la

huella o la realización de teorías o de críticas a dichas teorías, y de problemáticas, etc., y finalmente en el estado institucionalizado, como forma de objetivación muy particular, porque tal como se puede ver con el título escolar, confiere al capital cultural —que supuestamente debe de garantizar— las propiedades totalmente originales." (pág. 2)

En la investigación se consideraron las tres dimensiones como variables constructoras del concepto central de capital cultural. Estas se monitorearon y evaluaron mediante un test cuyos resultados se analizaron en una escala continua en el intervalo [0, 1] que permite determinar el nivel porcentual de capital cultural.

Para llevar a cabo la investigación se sometió en un establecimiento mixto, con dependencia particular subvencionada católica de la comuna de Independencia, Santiago, Chile. En ella participaron tres cursos del último nivel de enseñanza media constituyendo una muestra de 90 estudiantes. A cada estudiante que rindió el test se le considero su rendimiento escolar, el cual se extrajo de los archivos del liceo.

La variable rendimiento escolar se monitoreo discretamente en el periodo académico, primer semestre 2015 determinando un promedio final de rendimiento. Según Jiménez Fernández se entiende el concepto como: "nivel de conocimientos demostrado en un área o materia comparado con la norma de edad y nivel académico".

Posteriormente, tras el tratamiento de datos se analizó la correlación entre la variable capital cultural y el rendimiento escolar en matemática, a modo de poder establecer una idea de relación lineal entre ambas.

Marco teórico

La investigación abarca conceptos abstractos y genéricos, lo que conlleva a la necesidad de explicar cada uno de ellos, para así entender la dirección propia del escrito. Por esta razón se expondrán distintas interpretaciones de autores para cada uno.

El concepto de rendimiento tiene distintas definiciones, siguiendo la línea de la educación. Tonconi define el rendimiento académico como:

"El nivel demostrado de conocimientos en un área o materia, evidenciado a través de indicadores cuantitativos, usualmente expresados mediante calificación ponderada en el sistema vigesimal y, bajo el supuesto que es un "grupo social calificado" el que fija los rangos de aprobación, para áreas de conocimiento determinadas, para contenidos específicos o para asignaturas." (Tonconi (2010), pág. 12)

Otro autor que expresa su visión de rendimiento académico es Chadwick, que lo da a entender como:

"El rendimiento académico es la expresión de capacidades y características psicológicas del estudiante que se actualizan a través de un proceso de aprendizaje." (Chadwick (1979), pág. 13)

Dentro de esta línea Montes plantea que:

"Para entender el problema del rendimiento académico de manera científica se debe encontrar la relación de correspondencia existente entre el trabajo realizado por los profesores y estudiantes y la educación, es decir, la perfección intelectual y moral lograda por éstos, dado un contexto socioeconómico y cultural en el que se desenvuelven." (Montes , pág. 14)

Como el concepto de capital cultural es complejo y además es una de las ideas de la investigación, es necesario dejar en claro su definición, por ende nos basaremos en el autor creador del concepto mismo quien es Bourdieu que lo presenta de la siguiente forma:

“Podría denominarse consumo de bienes culturales sofisticados o consumo de alta cultura, al considerar entre sus indicadores la asistencia a la ópera y museos, tipo de música preferida, etc. En ambos trabajos se sustenta la hipótesis de que el capital cultural es una variable determinante del éxito escolar y, por tanto, de la reproducción cultural y social.” (Bourdieu (1977), pág. 18)

Además existe otra interpretación de capital cultural la que fue trabajada con el tiempo, la cual indica que:

“La noción de capital cultural es utilizada como un elemento que contribuye a explicar el proceso de reproducción social por la vía del sistema educativo. Las perspectivas culturalistas de las teorías de reproducción buscan explicitar que las funciones reproductoras del aparato educativo no se limitan a la función económica o de asignación a posiciones sociales y laborales predeterminadas, vía la transmisión diferenciada de habilidades específicas para distintas posiciones.” (Bracho T., pág. 16)

Dentro de lo que es capital cultural tenemos sus ramificaciones que son: capital cultural incorporado, objetivado e institucionalizado. Respecto a estos estados Bourdieu plantea:

“El capital cultural se presenta en tres estados: incorporado, objetivado e institucionalizado. El capital cultural en estado incorporado está ligado al cuerpo y supone su incorporación; en estado objetivado el capital cultural es transmisible en su materialidad en soportes tales como escritos, pinturas, monumentos, etc.; por último, encontramos el capital cultural en estado institucionalizado, la objetivación del capital cultural bajo la forma de títulos es una de las maneras de neutralizar ciertas propiedades que debe al hecho de que, estando incorporado, tiene los mismos límites biológicos que su soporte.” (Bourdieu, pág. 2)

Dentro de la investigación se considera al “sexo” como variable explicativa, a la luz de lo cual se deja en claro su definición y su diferencia con respecto de lo que es género, la cual se presenta de la siguiente forma:

“Se propone una distinción conceptual y sostienen que hay una diferencia entre sexo y género. El primero apunta a los rasgos fisiológicos y biológicos de ser macho o hembra, y el segundo a la construcción social de las diferencias sexuales (lo femenino y lo masculino). Así, el sexo se hereda y el género se adquiere a través del aprendizaje cultural. Esta distinción abre una brecha e inaugura un nuevo camino para las reflexiones respecto a la constitución de las identidades de hombres y mujeres.” (Montecino, pág. 2)

Ya teniendo cada una de las definiciones que respaldan la investigación y direccionan a esta con una visión más acabada, se puede dar paso al trabajo mismo de ella.

Metodología

La primera etapa de la investigación se centró en recopilar datos que sirvieran de ayuda en el planteamiento de la variable capital cultural, considerando un test debidamente validado utilizando en la tesis de Donoso J. “Relación del capital cultural de los estudiantes y su puntaje en la PSU en el área de lenguaje”.

Las características de dicha población cumplen con poseer estudiantes de cuarto año medio de un colegio particular subvencionado mixto de la región metropolitana, con un alto rendimiento SIMCE sin ser un establecimiento educacional emblemático, además de ser multicultural. La muestra de 90 estudiantes es representativa dicha población.

Este trabajo se centra en la metodología de muestreo llamada técnica de medición rápida, que se basa en manejar información (datos) extraída de archivos (virtual o físicos), dicha metodología sirvió para extraer las calificaciones que representan el rendimiento académico en la investigación. También se trabajó con la recopilación de información mediante encuestas semi-cerradas.

Los tres factores considerados como dimensiones del capital cultural fueron representados en el test mediante preguntas que apuntaban a ellas, además de considerar el género del sujeto encuestado.

La simbología utilizada para la investigación será:

CC INC: Capital cultural incorporado

CC OBJ: Capital cultural objetivado

CC INST: Capital cultural institucionalizado

CC: Capital cultural

REND: Rendimiento escolar

G: Género

Las respuestas a las preguntas se trabajaron con tres tipos de escalas distintas, las que posteriormente se modificaron bajo una transformación lineal para obtener mediciones porcentuales de cada factor

Tabla 1: Clasificación de preguntas según el factor

	N° de pregunta
CC INC	2-3-4-5-7-8-9-10-11-12-13-20
CC OBJ	14-15-16-17-18-
CC INST	6-19

La metodología de esta investigación trata de la construcción de la variable capital cultural mediante los tres factores que inciden en ella. Variable que puede estar relacionada con el rendimiento escolar de un estudiante de cuarto medio.

Para establecer dicha relación, primero se debió construir la variable capital cultural de la siguiente forma:

$$CC = \frac{CC\ INC + CC\ OBJ + CC\ INS}{3}$$

Todas las variables con la misma ponderación.

Luego, considerando la variable REND, se estableció una correlación para observar la presencia de alguna relación lineal entre ambas variables. Posteriormente se estableció una función lineal que representa dicha relación.

Consecutivamente, se consideró una posible función lineal abarcando también la variable género en la relación anteriormente mencionada.

También fue posible observar el grado de significancia de cada uno de los tres factores en la variable definida como capital cultural

Resultados

Partiendo de un análisis preliminar, es posible establecer la presencia de significancia que tienen los factores que construyen CC con el REND. Estos resultados se observan en la tabla 2:

Tabla 2: Correlaciones entre los factores de CC con el REND

		CC INCO	CC OBJ	CC INST	Rendimiento
CC INC	Correlación de Pearson	1	,102	,071	,024
	Sig. (bilateral)		,339	,503	,824
	N	90	90	90	90
CC OBJ	Correlación de Pearson	,102	1	,073	,087
	Sig. (bilateral)	,339		,496	,414
	N	90	90	90	90
CC INST	Correlación de Pearson	,071	,073	1	,139
	Sig. (bilateral)	,503	,496		,193
	N	90	90	90	90
Rendimiento	Correlación de Pearson	,024	,087	,139	1
	Sig. (bilateral)	,824	,414	,193	
	N	90	90	90	90

De la tabla se puede observar que existe una mayor influencia del factor CC INST en la relación entre CC y REND. También es posible afirmar que el factor CC INC es quien tiene una relación más débil.

Para construir una medida de la variable CC se consideró el promedio de las tres mediciones de las variables que la definen, en virtud de lo cual se detecta una correlación entre CC y REN que podrían establecer una relación lineal entre ambas variables.

Esta correlación, pese a ser leve r = 0,143 es significativa. En efecto:

Tabla 3: Correlación entre REND y CC

		Rendimiento	CC
Rendimiento	Correlación de Pearson	1	,143
	Sig. (bilateral)		,178
	N	90	90
CC	Correlación de Pearson	,143	1
	Sig. (bilateral)	,178	
	N	90	90

En la hipótesis

$$H_0: \rho = 0 \quad versus \quad H_1: \rho > 0$$

El estadístico: $$T = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

Bajo hipótesis nula distribuye segúnt_{n-2}, entrega evidencia suficiente para rechazarla con probabilidad de error tipo I de 10% dado que Pr (t<T)=0,089. Esto indicaría, pese a lo débil, la existencia de una relación lineal de causalidad de CC hacia REND

Considerando el estadígrafo:

$$\frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} \sim t_{(n-2;\alpha)}$$

Para probar la hipótesis se trabajó con un análisis de correlaciones bivariadas mediante el software SPSS, el cual arrojó la probabilidad de significancia bilateral de un 0,178, sin embargo, al ser bilateral es importante considerar el valor de la cola superior como 0,089. Bajo un nivel de significancia de 0,1 y siendo éste mayor que 0,089; existe suficiente evidencia para rechazar la hipótesis inicial.
Por ende, es importante mencionar que existe una relación entre CC y REND.
La tabla 4 muestra esta relación y los estadígrafos para su análisis

Tabla 4: Estimación y análisis de la regresión lineal sin genero

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error estándar	Beta		
1	(Constante)	4,394	,480		9,151	,000
	CC	,920	,676	,143	1,359	,178

a. Variable dependiente: Rendimiento

Al introducir la variable género como variable que impacta en el rendimiento, se obtiene una reestimación, según se indica en la tabla 5

Tabla 5: Estimación y análisis de la regresión lineal con genero

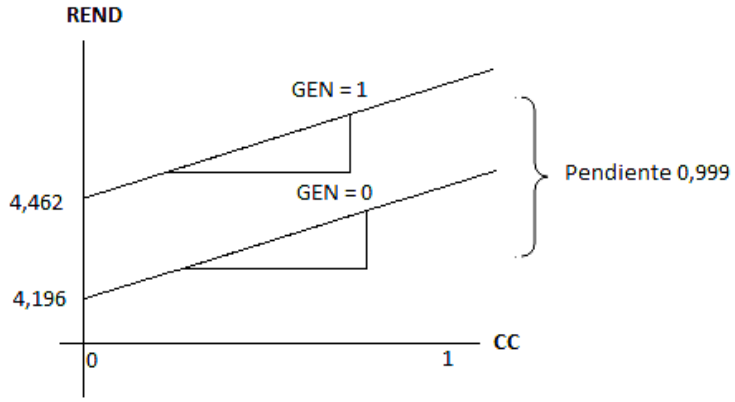
Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error estándar	Beta		
1	(Constante)	4,462	,479		9,308	,000
	CC	,990	,674	,154	1,470	,145
	Genero	-,266	,182	-,153	-1,459	,148

a. Variable dependiente: Rendimiento

$$REND = 4{,}462 + 0{,}990CC - 0{,}266G$$

Relación que permite deducir que bajo esta configuración existe una diferencia de 0,266 puntos de rendimiento según sexo.

Figura 1: Descripción gráfica de la incidencia de la variable género en la relación CC versus REND



Discusión de resultados

La educación hoy en día es parte esencial de la vida, no sólo como generadora de conocimiento y resultados, más bien favorece la construcción de aprendizajes significativos, por ende es importante considerar los múltiples factores que inciden en un mal rendimiento académico en las distintas áreas del saber durante la escolaridad obligatoria. Tras la observación de diversos fenómenos que pueden influenciar en la escases de aprendizajes en un tiempo determinado, se pudo apreciar la influencia de la familia y de las condiciones que rodean a un estudiante, es por esto que se consideró el concepto de capital cultural que refleja estas características y se acerca a una idea de fenómeno social que influyen en determinados espacios de la vida escolar. Tras diversos análisis fue posible concluir varios resultados que arrastraron la idea de relación entre el capital cultural y el rendimiento escolar.

Uno de los primeros resultados indicó que efectivamente se puede plantear la existencia de una relación lineal entre las variables, dicha conclusión fue posible comprobar mediante una prueba de hipótesis anteriormente expuesta. Tras la existencia de dicha relación fue también viable modelar esto por medio de una función lineal que la reflejaba. Por lo tanto, es pertinente afirmar que la variable capital cultural guarda una leve relación con el rendimiento escolar de un estudiante, lo que plantea un futuro análisis sobre cómo un estudiante es capaz de enfrentarse a la asignatura de matemática conociendo los factores que definen el capital cultural.

Fue posible también observar el comportamiento de los factores CC INC, CC OBJ y CC INS en la leve relación entre capital cultural y rendimiento escolar. Del estudio, se puede observar que el factor más influyente en dicha relación viene de la mano del capital institucionalizado, y el que menos influencia entrega es el capital incorporado. También se puede afirmar que la variable género no aporta ninguna significancia en la relación.

Esta investigación queda abierta a otros análisis y tratamientos de los datos recopilados, por ejemplo, tras los distintos grados de influencia de los factores es posible hacerlos relacionarse de una forma diferente (distinto al promedio considerado) para construir la variable capital cultural.

Bibliografía

Bracho, T. (1990). Capital cultural: impacto en el rezago educativo. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos. México.

Bourdieu P. (1979). Los tres estados del capital cultural. Universidad Autónoma de México. Azcapotzalco, México.

Chadwick (1979) Definición del rendimiento académico. Extraido de: http://www.eafit.edu.co/institucional/calidadeafit/investigacion/Documents/Rendimiento%20Ac%3%A1demico-Perrspectiva%20cuantitativa.pdf. Hora: 13:30 Fecha: 22 de Julio

Donoso J. (2011). Relación del capital cultural de los estudiantes y su puntaje en la PSU en el área de Lenguaje. Tesis de Magíster en Educación. Universidad de Chile. Santiago, Chile.

Martínez J. (2006) Las clases sociales y el capital en Pierre Bourdieu. Un intento de aclaración. Materiales de trabajo. Universidad de Salamanca. Salamanca, España.

Montecino S., Rebolledo L. (1994) Conceptos de género y desarrollo. Series apuntes docentes. Universidad de Chile. Santiago, Chile.

Montes I., Lerner J. (2011). Rendimiento Académico de los estudiantes de pregrado de la Universidad EAFIT (perspectiva cuantitativa). Universidad EAFIT. Medellín, Colombia.

Tonconi J. (2010) Factores que influyen en el rendimiento académico y la deserción de los estudiantes de la facultad de ingeniería económica de la UNA-PUNO. Universidad Nacional del Altiplano de Puno. Perú.

PRÁCTICA DE FIGURACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS GRÁFICO Y ALGEBRAICO: UN CASO DE ESTUDIO CON ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA.

Figuration practice in construction of graphic and algebraic models: a case study with student teachers in mathematics.

Perez-Vera[a], I

Universidad de las Américas[1],
ivan.perez@udla.cl[1]

Resumen

Esta investigación en el marco de la Educación Matemática y desde la perspectiva teórica del enfoque socio epistemológico, da cuenta de las características de los usos estudiantiles de figuraciones previas a la construcción de modelos gráfico y algebraico ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia. En particular se aborda el estudio de los procesos del uso de gráficas, colocando en escena una situación problema de modelación del movimiento que permite estudiar un fenómeno de cambio a través de los registros gráficos. Se explicitan los resultados obtenidos en términos de los niveles de análisis que van desde las visiones locales y globales de la gráfica, siguiendo con la noción de práctica socio escolar de figuración, recurriendo a nociones teóricas provenientes de la teoría de la imagen y de los análisis semánticos que permitieron su caracterización.

Palabras clave:*gráficas cartesianas, modelación del movimiento, registros.*

Abstract

This research in the context of Mathematics Education from the theoretical perspective of socio epistemological approach, realizes the characteristics of student applications prior to the construction of graphic and algebraic models a phenomenon of variation of time and distance configurations. In particular the study of processes using graphical addresses, putting on stage a problem situation modeling the movement that allows to study a phenomenon of change through graphic records. The results obtained in terms of the levels of analysis ranging from local and global views of the graph, along with the notion of figuration partner school practice, drawing on theoretical notions from the theory of image and explicit analysis which enabled semantic characterization.

Keywords: *Cartesian graphs, modeling the movement, registers.*

INTRODUCCIÓN

En el escenario educativo actual en Chile, resulta de interés abordar la producción en el trabajo matemático, con el uso de las gráficas y su desarrollo en la enseñanza secundaria como una práctica institucional que aporte a la comprensión y funcionalidad de la matemática. En particular, como objeto matemático la gráfica cartesiana escolar es la principal herramienta matemática para la figuración del cambio. Sin embargo el marco de referencia que el sistema escolar ha privilegiado para las gráficas en general, no permite que estas puedan ser consideradas como un medio de argumentación en sí mismas y solo son la representación de la función; las tareas que los

estudiantes hacen, se restringen a hallar la función sin desarrollar un lenguaje gráfico. (Flores, Bello, Millán, 2002; Buendía, 2012)

La manera de dar cuenta del uso e interpretación de las gráficas que hacen los estudiantes, supone naturalmente, la adopción de una postura epistemológica que permite la interpretación que se hace del trabajo del alumno. En la actualidad, la socio epistemología contempla el binomio modelación-graficación(Suarez & Cordero, 2008) y representa un eje para desarrollar acciones en el sistema didáctico a través del diseño de situaciones de modelación del movimiento, ofreciendo una posibilidad de acceder a una situación de aprendizaje, que permite estudiar un fenómeno de cambio a través de las gráficas.

En base a lo propuesto en el estándar número tresdel eje sistemas numéricos y algebra del documento"matemáticas para la formación inicial de profesores de enseñanza media"(Felmer, Varas, & Martínez, 2010), el futuroprofesor o profesora está capacitado para conducir el aprendizaje de los estudiantes en la comprensión del concepto de función, propiedades de ellas y de los principales ejemplos de funciones a nivel de enseñanza media: lineales, afines, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas, valor absoluto, polinomiales, entre otras, utilizando diferentes representaciones. Promueve en sus estudiantes el desarrollo habilidades de cálculo, de resolución de problemas, de representación y argumentación.

En este marco, el objetivo de la investigación es caracterizar los usos estudiantiles de figuraciones previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia, y la pregunta que guía el estudio es la siguiente: ¿cuál es el rol que cumplen las figuraciones realizadas por estudiantes, previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia?. Responder esta interrogante permitió manejar nociones teóricas provenientes de la teoría de la imagen y de los análisis semánticos e ilustrar la incorporación de una práctica matemática donde la herramienta principal es el uso de la gráfica.

Antecedentes teóricos

El estudio del uso de las gráficas se está consolidando como una línea de investigación en la que se estudian las prácticas de referencia asociadas a la graficación en el discurso matemático escolar (Suárez & Cordero, 2010). Según Buendía (Buendía, 2006) las tareas que el profesor de matemáticas tiene que desarrollar, en el marco de referencia que el sistema educativo brinda a las gráficas cartesianas, están referidas a lograr la correcta articulación de los elementos semióticos que la componen, favorecer el tránsito desde un registro gráfico hacia el analítico, lograr la adecuada interpretación. Ante ello, lo que se adquiere –incluyendo al profesor– es un uso instrumental de los símbolos matemáticos inmersos sin entender los conceptos representados. Le cabe al profesor entonces, proponer tareas que promuevan lo que Duval (2006)ha señalado como conversiones directas entre registros de representación.

Los trabajos orientados hacia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un ambiente tecnológico de Torres (2004), Flores (2005) en Suarez y Cordero (2010) y de Cen (2006), han aportado información sobre el tipo de gráficas que se encuentra actualmente en la educación básica y secundaria, proporcionando evidencias de que el uso de ellas tiene un desarrollo que sustenta una construcción de conocimiento matemático. En estos estudios de uso de las gráficas (Cordero & Flores, 2007) existe una intención de caracterizar a la graficación como un conocimiento con estructura propia y de desarrollo susceptible.

Específicamente, Cen (2006) en el marco de un estudio socioepistemológico, señala que la construcción de gráficas permite al estudiante colocar en juego actitudes de argumentación, es

decir, se puede construir y explicar un conocimiento matemático mediante la graficación, del mismo modo que la actividad de graficación se puede incorporar en las prácticas institucionales en el modelo de conocimiento, dando cuenta del conocimiento matemático y las causas reales de tal conocimiento. Por su parte Torres (2004) señala que los significados y sistemas simbólicos se encuentran directamente en las gráficas. Estos significados pueden detectarse a través del análisis cualitativo de las gráficas de la posición y de la velocidad. Los significados se verán reflejados en las relaciones que los estudiantes logren establecer, es decir, a través de las gráficas de la posición y de la velocidad se pueden identificar intervalos que indiquen cuándo el movimiento es más lento, más rápido o el cuerpo se detiene, y cuándo la velocidad es positiva o negativa.

Para la presente investigación, se ha decidido tomar como marco teórico la aproximación socio epistemológica (Cantoral & Farfán, 1998) que sostiene que la construcción de conocimientos debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana. En lo que atañe a las gráficas, la dimensión epistemológica es la que tiene que ver directamente con el contenido matemático de enseñanza, el cual debe estudiarse desde las perspectivas de su origen y su funcionamiento, es decir, cuáles son las formas que se utilizan en la enseñanza escolar para poder graficar, y cuáles son las concepciones que tienen los estudiantes al estudiar los aspectos globales y locales de las gráficas.

Por su parte, para el análisis de las producciones de los estudiantes, se escogió una situación de aprendizaje que tiene que ver con la modelación gráfica del movimiento, el que se realizó considerando dos niveles. Un primer nivel de análisis basado en el modelo propuesto por Torres (2004), que busca identificar las visiones locales y globales de la gráfica, cuyo uso significativo y articulado a lo largo de un sistema didáctico involucra reconocer el comportamiento inicial de la gráfica (conocer un todo en un cierto margen), complementando con una visualización global de la información geométrica. Un segundo análisis que describe cada figuración a partir del grado de iconicidad. Para Carrasco y Diaz (2012) Las figuraciones previas a la gráfica cartesiana son entendidas desde las prácticas socio escolares como modos de operar compartidos por los actores escolares, para la construcción y la interpretación de figuraciones de entidades asociadas a un fenómeno.

Metodología

Estudio de casos (cualitativo). Sandín(2003) justifica el estudio de casos principalmente porque el tipo de análisis apunta al conocimiento de formas de pensamiento, cuestión que tiene un carácter individual y comprensivo del que se espera generar teoría. Esta metodología, presupone que el conocimiento es esencialmente un producto social que se extiende o cambia continuamente de la misma manera que cambia la realidad concreta y no está separado de la práctica.

Muestra: La implementación exploratoria, en el marco de un estudio de caso, aborda un caso de análisis, compuesto por cuatro estudiantes de la Carrera Pedagogía en Matemática y Estadística de la Universidad de las Américas de la sede Providencia, que cursan la asignatura

Instrumentos

Secuencia: Se utilizará una actividad propuesta en una secuencia tomada de los Paquetes Didácticos (Suárez et al., 2005) diseñados por la Academia Institucional de Matemáticas Instituto Politécnico Nacional de México. Esta actividad pide a los estudiantes transitar por un ciclo de exploraciones gráficas.

“Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, lo que la obligó a recuperar estos instantes”. La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de música en el patio circular, que tiene 500 metro”

En esta actividad se busca que los estudiantes comprendan el problema, y puedan construir una gráfica que represente los cambios de posición con respecto al tiempo, transitando por un ciclo de exploraciones previas a la construcción de ella. Básicamente, en el momento de realizar esta tarea los estudiantes deben tomar decisiones sobre las variables que intervienen, la escala de la gráfica, las distancias recorridas en distintos instantes.

Entrevista:

“La entrevista, es una técnica cuyo objetivo es obtener información de forma oral y personalizada, sobre acontecimientos vividos y aspectos subjetivos de la persona en relación con la situación que se está estudiando” (Bisquerra, 2004). En el estudio, se empleó la entrevista con los siguientes propósitos: (1) como un dispositivo exploratorio para ayudar a identificar variables y relaciones explicativas entre las mismas y (2) para complementar otros métodos haciendo un seguimiento de los resultados. Se destaca entre las características de la entrevista el ser: (a) una relación entre dos personas, (b) bidireccional, preferentemente oral, (c) con unos objetivos conocidos y prefijados, al menos por el entrevistador y (d) con una asignación de roles que significa un control de la situación por parte del entrevistador. En particular se realizara una entrevista semiestructurada que permita integrar la actividad emergente que surja de la interacción entre entrevistador y entrevistado.

Observación:

definida por Bravo (1984) como la inspección y estudio realizado por el investigador, mediante el empleo de sus propios sentidos, con o sin ayuda de aparatos técnicos, de las cosas o hechos de interés social, tal como son o tienen lugar espontáneamente. Van Dalen y Meyer (1981) consideran que la observación juega un papel muy importante en toda investigación porque le proporciona uno de sus elementos fundamentales; los hechos. Este análisis se realizará sobre la entrevista y observaciones. Se procederá a transcribir las entrevistas y observaciones obteniendo una gran cantidad de información.

Resultados y análisis

Se presentan los modelos algebraicos generados por los estudiantes, como característica general plantean modelos en base a funciones por ramas (Segmentadas) que identifican los distintos momentos en que se desarrolla el fenómeno de movimiento, dependiendo de la interpretación individual de la situación.

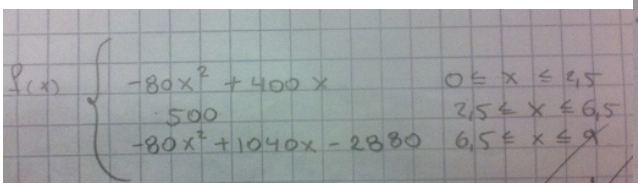


Figura 1. Modelo Algebraico Estudiante (A)

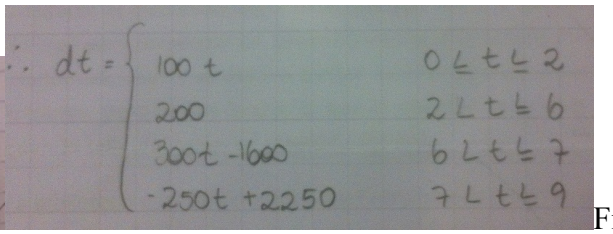


Figura 2. Modelo Algebraico Estudiante (B)

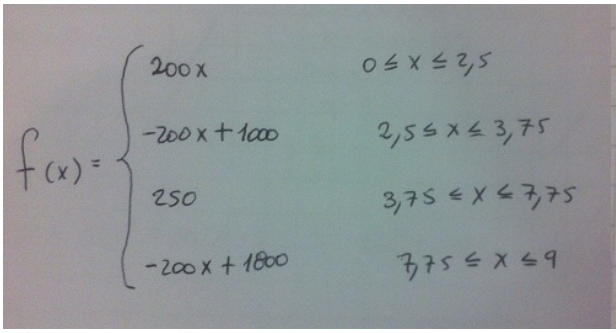


Figura 3. Modelo Algebraico Estudiante (C)

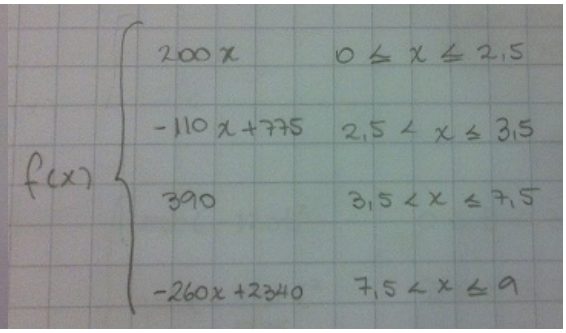
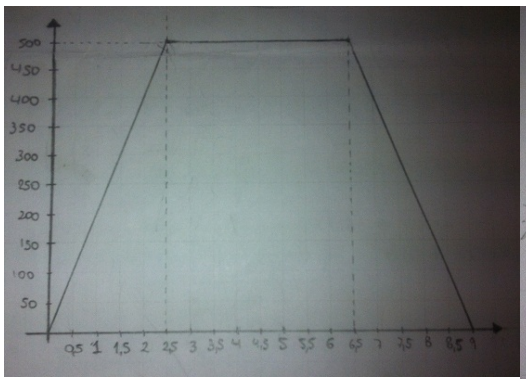


Figura 4. Modelo Grafico Estudiante (D)

Primer nivel de análisis: modelo grafico de la situación de movimiento



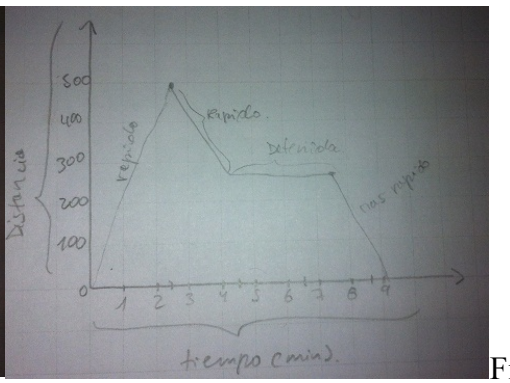
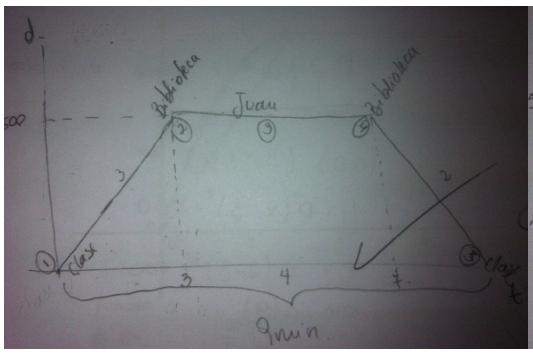


Figura 5. Modelo Grafico Estudiante (A)Figura 6. Modelo Grafico Estudiante (B)



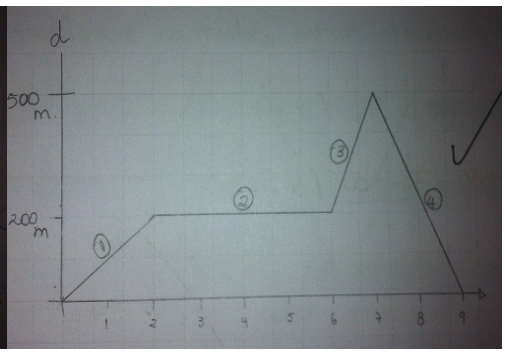
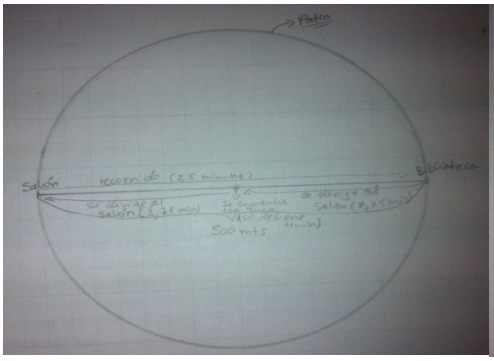


Figura 7. Modelo Grafico Estudiante (C) Figura 8. Modelo Grafico Estudiante (D)

Respecto de la visión global del fenómeno, todos los estudiantes representan cambios de posición, sin embargo en esta etapa no presentan trazos curvos que den cuenta de los cambios de velocidad. De forma local, en la construcción de su gráfica cartesiana los estudiantes plantean el trabajo en base a dos ejes (tiempo/distancia), se presentan casos en los cuales los ejes están graduados y otros en los que señalan solo los puntos donde la gráfica cambia. Los estudiantes complementan con información textual, observando en las gráficas los cambios de dirección, marcando todos cinco puntos de cambio de la curva. Identificando en ella la nulidad de movimiento durante cuatro minutos, distribuida de diferentes formas según el entendimiento del problema de cada estudiante a lo largo de los nueve minutos en los que transcurre la acción.

Segundo nivel de análisis: características de las prácticas socioescolares de figuración



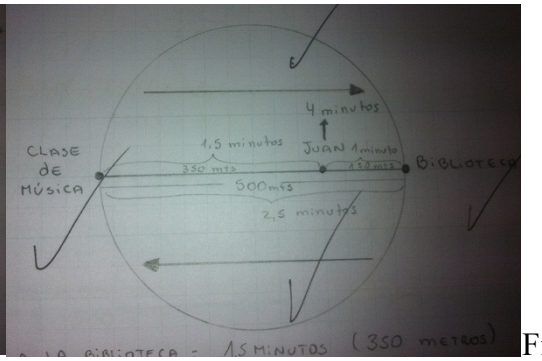
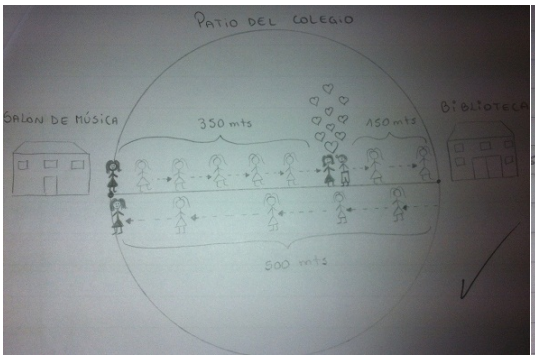


Figura 9. Figuración Previa Estudiante (A) Figura 10. Modelo Grafico Estudiante (B)



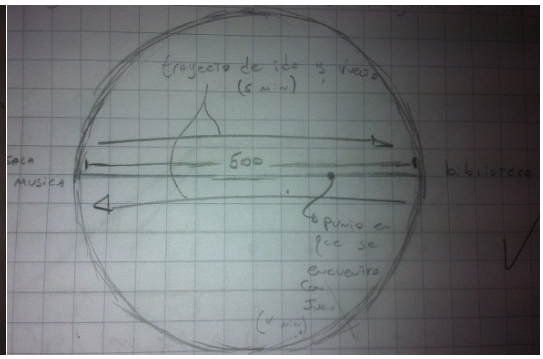


Figura 11. Modelo Grafico Estudiante (C) Figura 12. Modelo Grafico Estudiante (D)

Recurren a descripciones del espacio y la traza del movimiento, dejando implícito aspectos de ello. Representanel movimiento que envuelve a la acción. La porción de realidad que figuran los estudiantes responde al escenario donde se realiza el movimiento, realizando una representación gráfica de la descripción. El repertorio de elementos lo constituyen el patio circular, el diámetro con su medida, y textualidades para señalar la ubicación del salón y la biblioteca, además de aportar información al contexto.

Representan el patio circular y de la ubicación de la sala de música y de la biblioteca da encuadre y espacialidad a la zona en que se figuran los movimientos que realiza Valentina. Se constituyen en fondo y marco de la figura, que permiten al estudiante focalizar en un contexto la mirada en las trayectorias de Valentina. Marcan en los puntos en que cambia el movimiento con los valores numéricos presentes en el enunciado y así indican las distancias a recorrer por Valentina. El movimiento, queda implícito en las líneas, las cuales invitan a ojo a recorrer una trayectoria en la imagen. Recurren a la línea para expresar los movimientos de Valentina.

En particular, en la situación de movimiento que se reporta, cada figuración previa a la gráfica cartesiana cumple con funciones específicas desde su forma particular, manifestando además las necesidades del estudiante en la comprensión del fenómeno que se pretende modelar, de manera tal que se presenta una figuración cuya función es identificar o establecer un contexto para el fenómeno de movimiento, ejecutándose por medio de la descripción visual del contexto.

CONCLUSIONES

A modo de conclusión proponemos establecer las prácticas de figuraciones previas a la gráfica cartesiana como elementos que dan significado al fenómeno y permiten establecer las características de este que necesitan los estudiantes para la construcción del modelo gráfico, identificando una necesidad particular de cada individuo bajo una instucionalidad escolar.

Como unidad de análisis del fenómeno realizado por el estudiante, las figuraciones previas a la gráfica cartesiana pueden presentarse con mayor o menor frecuencia según la necesidad de cada individuo, además de apuntar a una cualidad especifica del fenómeno que necesita ser comprendida, por lo que si bien cada figuración ha de tener sus propias características se hace necesario englobarlas a todas en un mismo análisis como una escala previa realizada por los estudiantes en la construcción de un modelo gráfico, de modo que los funcionamientos y formas individuales de cada figuración permitan establecer y puntualizar tanto el camino como las necesidades presentadas por los estudiantes en la construcción del modelo gráfico final.

Referencias

Bisquerra, R. (2004). Metodología de la investigación educativa (Vol. 1). Editorial La Muralla.

Bravo, R. S. (1984). Ciencias sociales: epistemología, lógica y metodología: teoría y ejercicios. Thomson-Paraninfo.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 9(2), 227–251.

Buendía Ábalos, Gabriela. (2012). El uso de las gráficas cartesianas: Un estudio con profesores. Educación matemática, 24(2), 9-36. Recuperado en 27 de octubre de 2015, de http://www.scielo.org.mx

Cantoral, R., Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Epsilon, 42(3), 854–856.

Carrasco, E., Diaz, L. (2012). Dos casos de figuración para lo que varía. Documento interno de trabajo Postgrado en Educación Matemática, Universidad de los Lagos, Chile.

Cen, C. (2006). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctiva institucional en el bachillerato. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cordero, F., Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar: Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 10(1), 07–38.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española, 9(1), 143–168.

Felmer, Varas, Martínez. (2010). Estandares de matemáticas para la formación inicial de profesores de enseñanza media (Informe Final). Universidad de Chile.

Flores, J. I. L., Cantoral, R. (2005). La socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad.

Flores, C. D., Bello, G. A., & Millán, D. F. A. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 5(3), 225-250.

Sandín, M. P. (2003). Investigación cualitativa en educación: fundamentos y tradiciones. McGraw-Hill Interamericana de España.

Suarez, L., Cordero, F. (2008). Modelación-Graficación. Una categoría en Cálculo para resignificar la variación en una situación de modelación del movimiento. ICME 11.

Suárez, L., Cordero, F. (2010). Modelación–graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. Relime.

Suárez, L., Cordero, F., Daowz, P., Ortega, P., Ramírez, A., & Torres, J. (2005). De los Paquetes Didácticos hacia un Repositorio de Objetos de Aprendizaje: Un reto educativo en matemáticas. Uso de las gráficas, un ejemplo. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 8(1-2), 307–333.

Torres, A. (2004). La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. (Tesis no publicada del Programa de Maestría). CICATA-IPN., Mexico.

EL CONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LA ESTIMACIÓN DE MEDIDA DE LOS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA[i]

[i] La investigación que se presenta ha sido financiada por el Proyecto: Caracterización del conocimiento disciplinar en matemáticas para el grado de educación primaria: matemáticas para maestros, I+D, RETOS, Dirección General de Investigación (ref. EDU2013-4683-R).

Knowledge of mathematics teaching of estimation measurement of primary teachers[i]

Pizarro, N.[a], Albarracín, L.[b]

[a, b,] Universitat Autònoma de Barcelona;
ruthnoemi.pizarro@uab.cat[a], lluis.albarracin@uab.cat[b]

Resumen

En esta aportación presentamos un estudio sobre el conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida. Indagamos en cómo los maestros utilizan algunas actividades de estimación de medida presentadas en los Planes y Programas proporcionados por el MINEDUC el año 2012, dado que en la literatura en educación matemática el concepto no está claramente definido ni diferenciado del concepto general de estimación que incluye otras tareas del quehacer matemático. Encuestamos a 112 profesores de Educación Básica durante su formación continua del año 2012 en Santiago de Chile. Mediante un análisis cualitativo-descriptivo observamos que los docentes aplicarían las actividades como medición, estimación de medida o respuesta aleatoria.

Palabras clave: *conocimiento de la enseñanza, estimación de medida.*

Abstract

In this contribution we present a study about knowledge of mathematics teaching of measure estimation. We seek to understand how teachers use certain activities of measure estimation given by the Chilean government's guidelines, inasmuch as the literature of mathematical education defines the concept neither clearly nor differentiated from that of general estimation, which includes other arithmetic tasks. We surveyed 112 practising schoolteachers during their continuing training course that took place in Santiago de Chile in 2012. By means of a qualitative-descriptive analysis, we noted that teachers would apply these activities as measuring, estimation measurement or random response.

Keywords: *Knowledge of Mathematics Teaching, estimation measurement.*

ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

Desde principios de los años ochenta del siglo pasado la enseñanza de la medida ha tomado un mayor protagonismo respondiendo a las directrices de organismos internacionales vinculados a la enseñanza de la matemática (NCTM, 1980; Informe Cockcroft, 1982). La última reforma curricular en la enseñanza básica (Decreto 439) de nuestro país da un rol protagónico a la medida, considerándola un nuevo eje curricular.

Parte del proceso de aprender a medir, es aprender a estimar medidas. Por consiguiente, las Bases Curriculares 2012 para Enseñanza Básica incluyen diez Objetivos de Aprendizaje y ocho Objetivos de Evaluación que involucran la estimación de medida tanto en el eje de Medición, como en el Números (medidas discretas) y Geometría (medidas continuas).

Sin embargo, previo a estas Bases Curriculares, no hubo espacio para la estimación de medida en los programas de estudio de la formación inicial. Por lo tanto, posiblemente el concepto de estimación de medida se ha instalado en el currículo sin proporcionar a los docentes una formación concreta al respecto. Frente a esto nos preguntamos ¿Cómo los profesores tratarían actividades de estimación en el aula?

Para responder a esta pregunta, a partir de diferentes investigaciones sobre estimación de medida, como por ejemplo Segovia et al (1989) y Clements y McMillen, (1996), entre otros, reconstruimos el concepto de estimación de medida y considerando el marco del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (*Mathematics Teachers' Specialised Knowledge, MTSK*) propuesto por Carrillo, Climent, Contreras, Escudero-Ávila, Flores-Medrano y Montes (2014).

Con los antecedentes anteriormente planteados, realizamos una investigación cualitativa-descriptiva en Santiago de Chile con 112 maestros de educación básica en ejercicio docente que han enseñado o deben enseñar estimación de medida discreta o continua a sus estudiantes.

De este modo, consideramos realizar una tesis doctoral sobre el conocimiento didáctico del contenido de los profesores de educación básica sobre estimación de medida. En el presente documento, presentamos una pequeña parte de la investigación que corresponde al siguiente objetivo:
Caracterizar cómo los docentes de educación básica usarían las actividades de estimación de medida propuestas en los programas gubernamentales.

Referentes teóricos

El conocimiento del profesorado

Shulman (1986) plantea la importancia sobre el quehacer y el conocimiento técnico involucrado al momento de enseñar una disciplina. A partir de la idea del Conocimiento Didáctico del Contenido (*Pedagogical Content Knowledge,* PCK), es decir, del cómo los docentes representan y formulan los contenidos con el fin que sean comprensibles para los estudiantes, comenzó una nueva mirada sobre el conocimiento que debía poseer un profesor. Después de estudiar diversos marcos desarrollados a partir de la propuesta de Shulman (1986), consideramos el MTSK es el marco más apropiado para dar respuesta a nuestro objetivo.
El MTSK comprende el contenido del conocimiento de profesor desde la contribución de Shulman (1986, 1987) y distingue dos componentes, una referida al conocimiento del contenido disciplinario a enseñar, llamada MK (*Mathematical Knowledge*), que es un renombre del Subject Matter Knowledge (SMK) propuesto por Shulman en 1986 y otra relativa al conocimiento didáctico del contenido, el PCK.
El MTSK no es sólo una propuesta teórica para modelar el conocimiento del profesor de matemática, también es una herramienta metodológica, con la cual es posible analizar la práctica, en la amplitud de su palabra, del maestro de matemática por medio de sus categorías (Flores, Escudero y Aguilar, 2013). Desde la mirada del MTSK el conocimiento profesional sustenta el desarrollo del maestro y además, es el producto de este desarrollo y la reflexión sobre su práctica, que no sólo transcurre en el aula (Climent, Escudero-Ávila, Rojas, Carrillo, Muñoz-Catalán y Sosa, 2014, p. 42).
El conocimiento de la enseñanza de la matemática (*Knowledge of Mathematics Teaching*, KMT) es uno de los subdominios del PCK del MTSK. Este conocimiento tiene el foco en la enseñanza y está ligado sólo con los conocimientos matemáticamente dependientes entre sí, no con conocimientos pedagógicos. El conocimiento sobre los recursos de enseñanza, los materiales, las formas de

presentar el contenido, el uso de ejemplos adecuados tanto en el contenido, como en el contexto y la intención corresponden a este subdominio.

Por su parte, el KMT contempla tres categorías: las teorías personales o institucionalizadas de la enseñanza, que corresponden a las teorías específicas de la educación matemática que un profesor puede conocer o bien a las analogías, los ejemplos típicos o las metáforas que para los profesores son ideales y potentes al momento de poner en juego el contenido matemático; los recursos materiales y virtuales, que son los conocimientos del docente sobre recursos materiales y virtuales que favorecen la enseñanza de las matemáticas y por último, las actividades, tareas, ejemplos que tienen una intencionalidad de enseñanza en un tema determinado, por ejemplo, hay maestros que tienen un ejemplo ideal para el tratamiento de cierto contenido.

Estimación de medida

Para comprender en qué se entiende, en la literatura en educación matemática, por estimación de medida y qué habilidades se desarrollan al estimar una medida, observamos que en diversas definiciones el concepto de estimación responde a diversos tipos de tarea matemática. A continuación presentamos las definiciones más relevantes del concepto de estimación en orden cronológico:

Tabla 1. Definiciones de estimación de medida

Definición	Observaciones
"Proceso de llegar a una medición o a una medida sin la ayuda de herramientas de medida. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos" (Bright, 1976, p.89)	Al estimar no se utilizan instrumentos de medida, sin embargo tiene aspectos visuales y manipulativos.
"Habilidad para evaluar si es razonable el resultado de un cálculo o de una medida; la capacidad de hacer juicios subjetivos acerca de una variedad de medidas" (Informe Cockcroft ,1982, pp 22-23).	La estimación permite evaluar tanto un cálculo como una medida, se caracteriza por ser una capacidad individual
"Juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias individuales de quien lo emite" (Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989, p.18)	Juicio subjetivo sobre una medida o una operación numérica, capacidad individual.
"habilidad para conjeturar sobre el valor de una distancia, costos, tamaños, etc. o cálculo" (Clayton, 1996, p. 87).	Al conjeturar, el estimador debe tener algún indicio de la medida utilizada, en el área matemática correspondiente.
"Se refiere a un número que es una aproximación adecuada para un número exacto dado el contexto particular, que se sustenta en algún tipo de razonamiento" (Walle, Karp y Bay-Williams, 2010, p. 241).	Sinónimo de aproximación adecuada, en cualquier contexto matemático que se sustente en algún razonamiento, por lo tanto no es un número azaroso.

Podemos deducir que las definiciones anteriormente mencionadas tienen en común que describen distintas tareas, por ejemplo, Bright (1976) se refiere concretamente a la estimación de medida, en cambio el Informe Cockcroft (1982), Clayton (1996) y Van de Walle, Karp y Bay-Williams (2010) se refieren a tareas relacionadas con distintas áreas de la matemática.

Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), con el propósito de distinguir en el aula las tareas de estimación, afirman que la estimación de medida se distingue de la estimación computacional por razones metodológicas. Quince años más tarde, Hogan y Brezinski (2003) distinguen tres tipos de estimaciones: estimación computacional, estimación de numerosidades y estimación de medida.

Hogan y Brezinski (2003) concluyen que la estimación computacional es una habilidad que se desarrolla en conjunto con el resto de habilidades aritméticas o las habilidades desarrolladas

habitualmente en la escuela. Sin embargo, *numerosity* y la estimación de medida requieren en conjunto, el mismo tipo de habilidades, que se relacionan con aspectos perceptivos y deberían separarse, conceptualmente, de la estimación computacional.
Para definir medida consideramos las ideas del trabajo perceptivo (Hogan y Brezinsky, 2003; Callís, Fiol, Luca y Callís, 2006; Clements, y Sarama, 2009), característica que diferencia a la medición con la estimación, dado que el uso de los sentidos no permite la iteracción directa de la unidad de medida con el objeto correspondiente. Por otra parte, el desarrollo de imágenes mentales, a modo de referencia, fundamentan la tarea para que el trabajo se relacione con el razonamiento lógico, no dando lugar a la respuesta aleatoria (Hogan y Brezinski (2003), Clements y McMillen (1996), Joram (2003), y por último, la valoración numérica, porque es parte del desarrollo del sentido numérico en la estimación de medida (Bright, 1976; Boulton-Lewis, Wils, y Mutch, 1996; y Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam, 2005).

A partir de estos referentes, consideramos por estimación de medida la siguiente definición: "*asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad correspondiente a una cantidad de magnitud discreta o continua por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa a algún objeto auxiliar"* (Pizarro, Gorgorió, Albarracín, 2014, p. 528). De este modo, el concepto se sustenta en tres componentes: valorización numérica (V), percepción (P) y referencia (R). La estimación en la educación

La estimación de medida en la escuela

Las habilidades planteadas en el apartado anterior, comienzan en los primeros años de escuela, con el desarrollo de habilidades perceptivas (Informe Cockcroft, 1982; Hogan y Brezinski, 2003), además conlleva reconocer las unidades de medida y comprender las herramientas necesarias para realizar mediciones. Es probable que al adquirir la habilidad se desarrollen también componentes de enumeración, cantidad y pensamiento tridimensional (Boulton-Lewis, Wils, & Mutch, 1996).

Sin embargo, Forrester y Piké (1998) observaron que en el discurso de los docentes en el aula, se apreciaba una notoria separación entre medida y estimación. Observaron que la estimación de medida se trataba como hipótesis predictiva, en forma vaga y superflua, carente de respuestas satisfactorias para resolver situaciones a las que sólo podía dar respuesta un instrumento de medida. Estos autores observaron que la estimación se trataba por medio "del pensamiento sensato" que conllevaba a adivinanzas más que juicios de valor a partir de referentes, dejando poca evidencia de la comprensión del concepto y dando cuenta que matemática es sinónimo de rigor y exactitud.

Por otro lado, Jones, Forrester, Gardner, Grant, Taylor y Andre (2012) al investigar sobre cómo estiman los estudiantes, observaron, a modo de discusión, que no se sabe si los maestros están enseñando habilidades para estimar medida de manera implícita o explícita, tampoco si esto afecta al desarrollo de las habilidades que involucran la estimación de medida. Por consiguiente, no se sabe si los maestros enseñan a estimar medidas o bien sólo están llevando a cabo actividades en las que no se requiere ninguna atención particular.

EL ESTUDIO

Por medio de un cuestionario de diez preguntas abiertas que preguntaban por la definición, aplicación y ejemplificación de la estimación de medida, encuestamos a 112 profesores de educación básica en ejercicio docente de Santiago de Chile. La toma de datos se llevó a cabo durante sus estudios de post titulo en educación matemática, con lo que conforman una muestra representativa del profesorado interesado en la mejora de su práctica docente como profesores de matemática en educación básica.

De los 112 docentes, 64 dijeron no haber trabajado la estimación de medida en su etapa escolar, y sólo 7 de los 47 que dijeron haberla tratado, dieron ejemplos que involucraban la percepción (P), la

referencia (R) y la valoración numérica. En cuanto a la formación universitaria, 67 dicen no haberla tratado, de los restantes, sólo dos explicaron ejemplos que sustentan en (P), (R) y (V).

En el cuestionario realizado a los docentes, consideramos dos actividades (Figura 1 y Figura 2) de estimación de medida presentes en los Planes y Programas del MINEDUC. En cada una de estas actividades les preguntamos a los docentes ¿Qué estrategia utilizaría usted para desarrollarla en el aula?

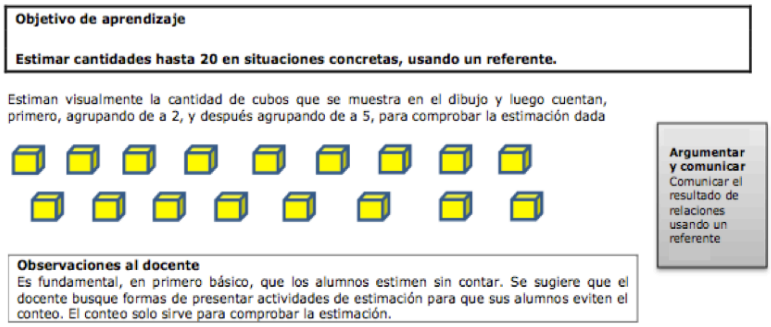


Figura 5. Actividad 1 de estimación de medida (A1)[i]

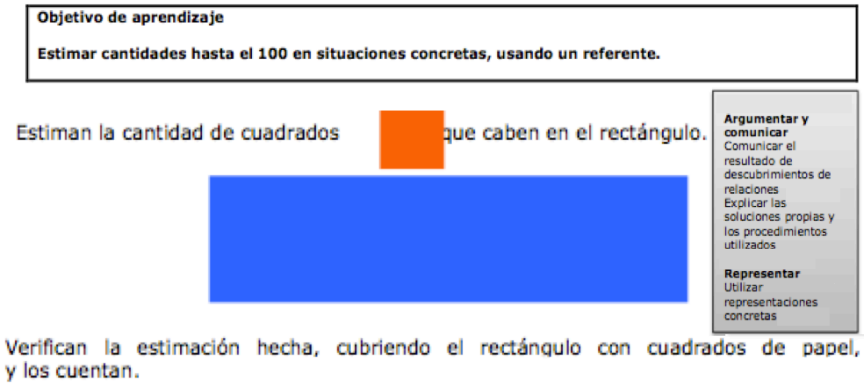


Figura 6. Actividad 2 de estimación de medida (A2)[iii]

Análisis y resultados de los datos

Las respuestas de los maestros se digitalizaron y se trataron con el programa de análisis de datos cualitativos NVivo 10. En cada una de las respuestas buscamos indicios de algunos de los subdominios del KMT, las encontramos en dos de las tres categorías mencionadas en el marco teórico: Teorías de Enseñanza y Materiales y recursos.

Teorías de enseñanza

Las teorías de enseñanza mencionadas por los maestros se clasifican en dos grupos: las vinculadas a la estimación de la medida y las vinculadas a la medición.

De los 112 docentes, 23 indicaron estrategias vinculadas a la estimación de medida, donde (P), (V) y (R) se ponen en juego. Un ejemplo de ello es la siguiente respuesta sobre A2: "*Niños y niñas en la pizarra pueden observar un cuadrado rojo y un rectángulo azul. Sin ponerse de pie, como ustedes quieran, desde su puesto, estimen cuántas veces cabe el cuadrado rojo en el rectángulo azul, colocando los cuadrados uno al lado del otro"* En esta respuesta, el docente impide la iteración directa, dado que ambas figuras están en la pizarra, por lo tanto, hay evidencia de (P), ambas figuras corresponden a (R) y al solicitar cuántas veces, se evidencia (V).

Siete profesores trabajarían las actividades con *numerosity*, es decir, estimar visualmente un número de objetos dispuestos en un plano durante un tiempo limitado. Por ejemplo un maestro explicó que

en A1 permitiría a los estudiantes observar los cubos por un tiempo determinado para que los estudiantes estimaran la actividad: *"Juntaría los cubos y los taparía con un papel y les diría a los niños que rápidamente observen los cubos y estimen cuántos creen que hay".*

Los 112 profesores, 33 respondieron que utilizaría el uso de referentes al desarrollar A1: "*Les presentaría una cantidad pequeña y luego aumentaría; les diría que se compararan y finalmente que estimen cuántos hay"*. Podemos observar que en esta respuesta el profesor prepara a los estudiantes, utilizando (R) para lograr (V). En este caso, hay evidencia explícita del uso de la percepción, por lo tanto, no la interpretamos como estimación de medida.

Once profesores consideran que es necesario impedir el conteo, como en la siguiente respuesta a la A1: "*Con alumnos de primero que llevaría a cabo esta actividad les pediría los cubos más desordenados para que no los cuenten"*. Nueve docentes trataron la actividad como una tarea de comparación, sin evidenciar (P) ni (R), por ejemplo, para la A1:*"¿Existen más de 10 elementos".*

La categoría con mayor frecuencia, de 39 docentes, corresponde a los maestros que utilizaron la valoración numérica sin que pudiésemos interpretar el uso de percepción o de una referencia, como podemos apreciar en este ejemplo de A1: "*Por ejemplo, preguntar cuántos de estos cubos completan una caja (se muestra la caja). Se puede preguntar si sobrarán cubos o si faltarán"* y en este ejemplo de la A2: "*Primero les mostraría este rectángulo y luego a cada niño le entregaría un papel lustre y les pediría que estimen cuántos cuadrados caben en el rectángulo".*

Las actividades también serían tratadas como actividades de medición, dado que treinta docentes consideraron las actividades correspondían a medir, por ejemplo en respuesta a A2: "*Necesitamos saber cuántos cuadrados necesitamos para cubrir el rectángulo. Construimos el rectángulo y con cuadrados iguales a este, cubrimos el rectángulo".* En este caso el cuadrado es considerado como una unidad de medida que se itera en una cantidad de magnitud. Otro ejemplo se da en A1: "*indicaría que los agruparan en grupos de 2 o de 6 y vieran cuántos grupos salen y calculan mentalmente el resultado"*. En esta respuesta, se trata la tarea como un conteo por agrupación.

Por otro lado, 30 docentes indicaron que comprobarían el trabajo realizado por medio de la medición, como parte del cierre de la clase: En A1 "*Luego tacharía los cubos al ir contando para corroborar que lo que estimaron era lo correcto"* y en A2 "*Luego recubren las imagen y de esa manera verifican si su estimación están correcta"*
De los 112 maestros, 27 manifestaron que no tenían preparación para tratar el contenido, como en esta respuesta: *"Creo que la estimación muchas veces se mal entiende de parte de los profesores y de los planes curriculares, la razón es que desde la base de formación docente se siente o hay un vacío de contenidos"*

Materiales y recursos

Los materiales y recursos utilizados por los profesores para estimar medidas las categorizamos en dos categorías: manipulables y no manipulables. La primera de ellas es bastante común, dado que los docentes buscan materializar la actividad presentada, como por ejemplo en A1: "*Trabajar con material concreto manipulando y haciendo agrupaciones de diferentes cantidades en diferentes formas (hileras, montones)"* y en A2: "*Con una hoja de block y papeles lustres*[16] *los pediría estimar la medida de la hoja"*. De los 112 participantes, 59 consideró utilizar material manipulable.
Por otro lado, en la segunda categoría, material no manipulable, observamos que los docentes consideran que el material no manipulable es idóneo porque impide la iteración directa, de esta forma se propicia (P). Por ejemplo, en A2: "Les entregaría el material en forma individual, tal como se presenta, sin contar, impreso", "Esta actividad la presentaría mostrando el cuadrado y pegarlo en la pizarra para que vean el espacio que ocupa y, luego pego el rectángulo bajo el cuadrado una vez

que ellos ya estimaron la cantidad de cuadrados que caben en el rectángulo". En A1: "Con imágenes mediante TIC, ya que no tendrían oportunidad de contarlos".

CONCLUSIONES

En el apartado anterior podemos observar que las actividades presentadas en los Programas de Estudio podrían tener diversos desarrollos en las aulas. Por ejemplo, en 23 de las 224 respuestas, encontramos las tres componentes que sustentan la estimación de medida. En otros casos, los docentes desarrollan la percepción (P) o la referencia (R), gracias al trabajo de *numerosity*, al impedimento del conteo o bien con a la familiarización de ciertas cantidades de los objetos involucrados.

En la mayoría de los casos, observamos que los maestros utilizan sólo la valoración numérica (V), dando espacio a que el estudiante mida, estime o entregue una respuesta aleatoria, coincidiendo así con el estudio de Forrester y Piké (1998). Por otro lado, hay profesores que desarrollan las actividades como si fueran tareas de medición o conteo. De esta forma, las habilidades involucradas en la estimación de medida no forman parte del quehacer de los estudiantes, por tanto es posible que en las aulas la estimación de medida no tenga una atención particular (Jones et al., 2012).

De este modo, observamos que, posiblemente, en muchas aulas escolares, las actividades de estimación de medida no están desarrollando las tres componentes que la sustentan, dado que se confunde con medición o bien desarrolla tareas aleatorias. En algunos casos, los maestros manifestaron no tener formación al respecto y no contar con conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida, eso se evidencia al no encontrar indicios del subdominio actividades, tareas y ejemplos.

Por lo tanto, consideramos que la construcción del conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida, debe comenzar, por lo menos, con una definición en el currículo, donde éste se ejemplifique y contraejemplifique. Con estas intervenciones curriculares y una formación continua pertinente, posiblemente se podría mermar la cantidad de maestros que desarrolla otras tareas como estimación de medida. En caso contrario, los Objetivos de Aprendizaje podrían no desarrollar las habilidades involucradas en las aulas.

A raíz de lo anteriormente planteado, creemos que tanto en la formación inicial y continua de los profesores se deben entregar herramientas adecuadas para la reflexión disciplinar y didáctica teniendo en cuenta situaciones como las descritas en este documento.

Referencias

Bright, G.W. (1976). Estimation as Part of Learning to Measure. National Council of Teachers of Mathematics Yearbook, 38, (pp. 87-104). Reston, VA: NCTM.

Boulton-Lewis, G., Wils, L., & Mutch, S. (1996). An analysis of young children's strategies and use of devices for length measurement. Journal of Mathematical Behavior, 15, 329–347.Callís, J., Fiol, M., Luca, C., & Callís, C. (2006). Estimación métrica longitudinal en la educación primaria. factores implícitos en la capacidad estimativa métrica. Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas, 43, 91-110.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. & Montes, M. (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva

Clayton, J. G. (1996). A criterion for estimation tasks. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 27(1), 87-102.

Clements, D. & Sarama, J. (2009). Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children. New York: Routledge.

Clements, D & McMillen, S. (1996). Rethinking "concrete" manipulatives. Teaching Children Mathematics, 2, 270-279.

Climent, N., Escudero-Ávila, D., Rojas, N., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M.C. & Sosa, L. (2014). El conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, M. Montes (Eds), Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK (p. 42). Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva

Cockcroft, W. H. (1982). Mathematics counts. London: Her Majesty's Stationery Office.

Forrester, M. A., & Pike, C. D. (1998). Learning to estimate in the mathematics classroom: A conversation-analytic approach. Journal for Research in Mathematics Education, 29, 334-356.

Flores, E., Escudero, D.I., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.). Actas del CERME 8 (pp. 2055-3064). Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME.

Hogan, T. P., & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? Mathematical Thinking and Learning, 5(4), 259-280.

Joram, E. (2003). Benchmarks as tools for developing measurement sense. In D. H. Clemens y G. Bright (Eds.) Learning and teaching measurement 2003 yearbook (pp. 57-67). Reston, VA: NCTM.

Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., & Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. Journal for Research in Mathematics Education, 36(1), 4-23

Jones, M. G., Forrester, J. H., Gardner, Grant. E., Taylor, A.R., & Andre, T. (2012). Students' Accuracy of Measurement Estimation: Context, Units, and Logical. Thinking. School Science and Mathematics, 112 (3), 171-178.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980).An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s.Reston, Virginia: NCTM.

Pizarro, N., Gorgorió, N. & Albarracín, L. (2014). Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 523-532). Salamanca: SEIEM

Segovia, I., Castro, E., Castro, E., & Rico, L. (1989). Estimación en cálculo y medida. Madrid: Síntesis.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2010). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally. USA: Pearson.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

[i] La investigación que se presenta ha sido financiada por el Proyecto: Caracterización del conocimiento disciplinar en matemáticas para el grado de educación primaria: matemáticas para maestros, I+D, RETOS, Dirección General de Investigación (ref. EDU2013-4683-R).

[ii]Unidad de Curriculum y evaluación, (2012). Programa de estudio matemática. Primero Básico. Santiago de Chile: MINEDUC. p.72

[iii] Unidad de Curriculum y evaluación, (2012). Programa de estudio matemática. Segundo básico. Santiago de chile: MINEDUC. P.6

ANÁLISIS DE LA PROBABILIDAD Y SUS SIGNIFICADOS EN EL CURRÍCULO ESCOLAR Y EN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN BÁSICA

Analysis of probability and its meaning in the school curriculum and textbooks of basic education

Vásquez, C.[a] y Alsina, A[b].

[a]Pontificia Universidad Católica de Chile, [b]Universidad de Girona

cavasque@uc.cl, angel.alsina@udg.edu

Resumen

En los últimos años la probabilidad se ha incorporado en los currículos de Educación Básica para poder proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde las primeras edades. Desde este prisma, en primer lugar se revisan las orientaciones curriculares del National Council of Teachers of Mathematics, y del los currículo de matemáticas de Chile en relación con la probabilidad; y en segundo lugar se analizan los conocimientos que se trabajan en una colección de libros de texto chilenos. Se concluye que el trato que se da a la probabilidad en los libros de texto no está siempre en concordancia con las directrices curriculares.

***Palabras clave**: probabilidad, enseñanza de la probabilidad, currículo de matemáticas, libro de texto, Educación Básica.*

Abstract

Lately, probability has been incorporated into Elementary Teaching curricula so as to provide students with a stochastic experience from early the earliest stages. Following this perspective, first curriculum guidelines of the National Council Mathematic Teachers are revised together with the Chilean mathematic curriculum regarding probability. Secondly, contents which are present and used in a Chilean textbook collection is analyzed. The conclusions suggest that the way probability is worked in textbooks is not always aligned with curriculum guidelines.

Keywords: *probability, probability education, mathematics curriculum, textbook, elementary teaching.*

1. INTRODUCCIÓN

La educación matemática es una disciplina atenta a los cambios sociales y procura darles respuesta. Es desde esta perspectiva que en las últimas décadas se incorpora con fuerza la probabilidad en los currículos de Educación Básica, con el objeto de promover que los alumnos aprendan conocimientos probabilísticos que les sirvan de base para la recogida, descripción e interpretación de datos. En definitiva, se trata de ofrecerles herramientas que faciliten la toma de decisiones en situaciones en las que la incertidumbre es relevante, para que progresivamente sean ciudadanos bien informados y consumidores inteligentes. En este sentido, el *National Council of Teachers of Mathematics* incluyó a "Datos y Azar" como área temática en *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics* (NCTM, 1989), reforzando esta iniciativa en *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000), que contemplan que los programas de enseñanza deberían capacitar a los alumnos para aprender conocimientos relacionados con el análisis de datos y la probabilidad a partir del nivel *Pre-K* (tres años). Esta tendencia, como decíamos, se ha reflejado en los currículos de matemáticas de muchos países, entre ellos Chile, que han incorporado la

probabilidad en Educación Básica para promover un enfoque experimental que proporcione una experiencia estocástica desde las primeras edades (Mineduc, 2012). Por otro lado, el desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad ha dado lugar a la coexistencia de distintos significados que cobran gran relevancia en el contexto de la matemática escolar (Figura 1).



Figura 1. Significados de la probabilidad en el contexto de la matemática escolar (Vásquez y Alsina, 2015, p. 443)

Estos significados han permitido fundamentar y desarrollar la Teoría de la Probabilidad, que otorga modelos para fenómenos donde la falta de certeza en los resultados es notable. Desde esta perspectiva, en la enseñanza de la probabilidad es fundamental adoptar una perspectiva de modelización en que sus significados se complementen, pues una comprensión adecuada del concepto no puede limitarse a uno de ellos (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). La transformación curricular y la evolución de la Teoría de la Probabilidad hasta su estado actual requieren profesorado capacitado, es decir, maestros con una sólida base de conocimientos tanto disciplinares como didácticos, que les permita enseñar de forma idónea el objeto matemático "probabilidad" a partir de sus distintos significados. Sin embargo, muchos profesores de Educación Básica no han tenido formación sobre probabilidad y su didáctica (Vásquez y Alsina, 2014), por lo que, para compensar este déficit formativo, se apoyan en los libros de texto conformándose en el recurso para interpretar el currículo y seleccionar tareas matemáticas para los alumnos (Styliandes, 2009). De esta forma, el libro se convierte en el agente fundamental, sino único, para enseñar probabilidad (Remillard, 2000), ya que expone de manera concreta una transposición didáctica del saber (Chevallard, 1991). Desde este enfoque, en este trabajo, se revisan en primer lugar las orientaciones curriculares vinculadas al estudio de la probabilidad en Educación Básica del NCTM, y en el currículo chileno. Y en segundo lugar se analiza qué conocimientos sobre la probabilidad se acaban enseñando, tomando los libros de texto como principal recurso para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

2. LA PROBABILIDAD: SUS SIGNIFICADOS Y SU PRESENCIA EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN BÁSICA.

Como se ha indicado, coexisten distintos significados de la probabilidad:

- Significado intuitivo: utiliza diversos términos (imposible, probable, seguro) para hacer referencia a la incerteza o certeza de determinados sucesos, y expresar, por medio de frases coloquiales, el grado de creencia en relación a sucesos inciertos.
- Significado laplaciano: considera que la probabilidad de un suceso es "la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean

igualmente probables" (Laplace, 1985). Esta definición aparece en muchos textos escolares dada su simplicidad para el cálculo de probabilidades, aunque no puede ser aplicada en experimentos con un número infinito de posibilidades o cuando el espacio muestral es finito pero no simétrico, es decir, no cumple con la condición de equiprobabilidad.

- Significado frecuencial: plantea la asignación de probabilidades de un suceso a partir de la frecuencia relativa observada en un gran número de repeticiones, lo que permitiría estimar la probabilidad del suceso. Este teorema, denominado "Ley de los Grandes Números", indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque tanto como queramos a la probabilidad teórica del suceso, puede aproximarse suficientemente a uno, sin más que aumentar el número de pruebas.
- Significado subjetivo: se fundamenta en la confianza que una persona deposita sobre la verdad de una determinada proposición, por lo que no está unívocamente determinada. En este caso, pues, la probabilidad depende del observador y, de lo que éste conoce del suceso en estudio.
- Significado axiomático: concibe la probabilidad como un tipo especial de medida, vinculándola con la teoría de la medida. Bajo este enfoque no se define explícitamente cómo calcular probabilidades, sino que se establecen las reglas que debe satisfacer (debido a la rigurosidad matemática que este significado conlleva, se desaconseja su estudio en Educación Básica).

En relación a las orientaciones curriculares contemporáneas sobre probabilidad, éstas hacen alusión a los siguientes conocimientos:

Tabla 1. Contenidos de probabilidad en las orientaciones curriculares del NCTM.

	Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos	**Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad**
Pre K-2 (3-8 años)	Discutir sucesos probables e improbables relacionados con las experiencias de los alumnos.	
3–5 (9-11 años)	Proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en datos, y diseñar estudios para investigarlas más a fondo.	Describir sucesos como probables o no probables, y discutir su grado de probabilidad usando expresiones como seguro, igualmente probable e improbable; Predecir la probabilidad de resultados de experimentos sencillos, y someter a prueba tales predicciones; Comprender que la medida de la probabilidad de un suceso puede representarse por un número comprendido entre 0 y 1.
6–8 (12-14 años)	Utilizar observaciones relativas a las diferencias entre dos o más muestras, para formular conjeturas sobre las poblaciones de las que se han extraído; Formular conjeturas sobre las posibles relaciones entre dos características de una muestra, a partir de nubes de puntos de los datos y líneas de ajuste	Comprender y utilizar la terminología apropiada para describir sucesos complementarios y mutuamente excluyentes; Utilizar la proporcionalidad y una comprensión básica de la probabilidad para formular y comprobar conjeturas sobre los resultados de experimentos y simulaciones; Calcular probabilidades de sucesos compuestos sencillos, utilizando métodos

	aproximadas; Utilizar las conjeturas para formular nuevas preguntas y programar nuevos estudios para contestarlas.	como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área.

En la tabla anterior se exponen los contenidos para alumnos de edades comprendidas entre 3 y 14 años porque se presentan de esta forma en los estándares de contenidos de "análisis de datos y probabilidad" americanos, por lo que debe considerarse que en ambos extremos hay contenidos que deberían enseñarse en los niveles educativos anteriores y posteriores a la Educación Básica respectivamente. En relación a la etapa educativa que nos ocupa (6-12 años), el desarrollo de los conocimientos básicos de probabilidad pasa por diferentes fases: a) se inicia de manera informal, introduciendo el vocabulario vinculado por medio de actividades centradas en los juicios que emiten los alumnos con base en sus propias experiencias, llevándoles a responder preguntas sobre la probabilidad de sucesos, cuyas respuestas consideran el empleo de términos como: más probable, menos probable o imposible; b) sigue con la realización de experimentos aleatorios con material concreto como bolitas, fichas de colores, monedas, ruletas, etc., para empezar a aprender cómo cuantificar la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso, que oscila entre 0 (imposible) y 1 (seguro); y c) finaliza con el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos sencillos, dejando para la siguiente etapa educativa el cálculo de probabilidad de sucesos dependientes e independientes, así como conceptos de mayor complejidad.

Respecto al currículo chileno, las "Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática" (Mineduc, 2012) recogen los siguientes contenidos probabilísticos, dentro del eje de "Datos y probabilidades":

Tabla 3: Orientaciones curriculares en el currículo chileno para la Educación Básica.

Nivel	**Objetivo de Aprendizaje**	**Indicadores de Evaluación Sugeridos**
1º básico	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.	Registran datos, usando bloques y tablas de conteo. Recolectan y organizan datos, usando material concreto, registros informales y tablas de conteo. Responden preguntas, utilizando la información recolectada.
2º básico	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas. Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.	Recolectan datos acerca de lanzamientos de dados y monedas. Registran datos en una tabla de conteo acerca de datos de lanzamientos de monedas y dados. Registran datos acerca de lanzamientos de dados y monedas, usando cubos apilables. Responden preguntas en el contexto de juegos con monedas, usando registros expresados en cubos apilables. Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas en tablas. Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas en gráficos de barra simple.

3º básico	Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos.	Realizan juegos aleatorios con dados de diferentes formas y monedas, registrando los resultados en tablas de conteo y diagramas de punto.
4º básico	Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.	Realizan experimentos con dados de distintas formas. Extraen naipes al azar con y sin devolver. Reconocen que los resultados de experimentos lúdicos no son predecibles. Realizan repeticiones de un mismo experimento, determinan la frecuencia absoluta y la representan en gráfico. Usan software educativo para simular experimentos aleatorio.
5º básico	Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando los términos seguro – posible - poco posible - imposible. Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.	Describen eventos posibles en el resultado de un juego de azar. Se refieren a la posibilidad de ocurrencia de un evento, mediante expresiones simples como seguro, posible, poco posible o imposible. Ejemplifican eventos cuya posibilidad de ocurrencia es segura, posible, poco posible o imposible. Ejemplifican eventos cuya probabilidad de ocurrencia es mayor que la de otros eventos, sin calcularla. Juegan a lanzar dados o monedas y, frente a eventos relacionados con estos lanzamientos, dicen, sin calcular, cuál es más probable que ocurra. Hacen apuestas entre alumnos y dicen, sin calcular, quién tiene más probabilidad de ganar.
6º básico	Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.	Enumeran resultados posibles de lanzamientos de monedas o dados con ayuda de un diagrama de árbol. Realizan de manera repetitiva experimentos con monedas para conjeturar acerca de las tendencias de los resultados. Conjeturan acerca de porcentajes de ocurrencia de eventos relativos a lanzamientos de monedas o dados.

Como puede apreciarse en la Tabla 3, es posible distinguir también tres etapas orientadoras del proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad para la educación básica: 1) plantear distintos tipos de situaciones y preguntas, en un contexto familiar y de interés para los alumnos, que les permita distinguir los datos que son pertinentes para responder; b) organizar y analizar datos a través de distintos registros que permitan realizar inferencias y predicciones para responder a las situaciones y preguntas; c) adquirir nociones básicas de probabilidad para su aplicación en situaciones de la vida diaria y para su estudio con mayor profundidad en etapas posteriores

En síntesis, las orientaciones curriculares de la asociación norteamericana de profesores de matemáticas -que sirven de base para el diseño de los currículos de matemáticas de la mayoría de países- sugieren que en la didáctica de la probabilidad en Educación Básica deberían considerarse tres fases correlativas: en primer lugar, la adquisición de lenguaje probabilístico elemental (términos como imposible, probable y seguro); en segundo lugar, la cuantificación de la probabilidad, considerando que la posibilidad de ocurrencia de un hecho oscila entre 0 (cuando es imposible) hasta 1 (cuando es seguro); y en tercer lugar, el cálculo de la probabilidad de ocurrencia de un hecho. Este proceso de adquisición de conocimientos probabilísticos, en el caso del currículo chileno, se contempla de forma menos profunda y con una menor amplitud en los contenidos, ya que solo se aborda la probabilidad desde un punto de vista intuitivo y más bien ligada a una visión frecuentista.

3. LA PROBABILIDAD: SU PRESENCIA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN BÁSICA

Se han examinado una colección de libros de texto chilenos pertenecientes a la Editorial Pearson Educación de Chile Ltda (Rodriguez y Carreño, 2013) y la Editorial Galileo (Rocamora, Riquelme, Ainardi, Aldunate, Falconi y Chala, 2013), que el Ministerio de Educación distribuye gratuitamente a más de tres millones de alumnos para la asignatura de matemáticas, formada por seis libros de texto (uno para cada nivel).

Para evaluar tales libros de texto se han seguido algunos pasos de la metodología de Cobo (2003): a) selección de capítulos que abordan la probabilidad; b) lectura minuciosa de los capítulos que tratan el tema, clasificando y agrupando las definiciones, propiedades, representaciones y justificaciones prototípicas e intentando determinar los elementos de significado con base en los objetos matemáticos identificados en las orientaciones curriculares. Siguiendo estos pasos, revisamos el desarrollo de contenidos de probabilidad de cada texto, obteniendo una aproximación de los contenidos de probabilidad que desarrollan. Se observa que en algunos libros los contenidos se presentan de forma explícita en unidades y lecciones completas (2º, 4º y 5º). En cambio en otros se presenta de manera implícita, como en el texto de 3º, que desarrolla la probabilidad a través de problemas vinculados a otras unidades. Cabe señalar que los libros de texto de 1º y 6º no presentan contenidos de probabilidad, en disonancia con el currículo. En las figuras siguientes se muestran algunos ejemplos de actividades:



Figura 5. Definición asociada al concepto de sucesos seguro, probable e imposible (Matemática 2º Básico. Rodríguez y Carreño 2013, p. 238)

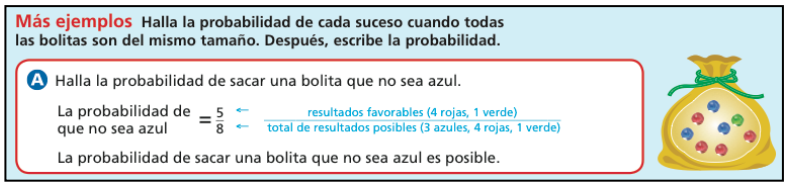


Figura 9. Representación numérica de probabilidad (Matemática 5º Básico. Rocamora, et. al, 2013, p. 377).

A partir del análisis realizado en relación a distintos objetos matemáticos (situaciones problemáticas, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos) presentes en los libros de texto de Educación Básica se infiere que la probabilidad es abordada, principalmente, desde un enfoque intuitivo, para luego incluir de manera progresiva los significados frecuencial y laplaciano, e incluyéndose también en algunos casos puntuales un leve acercamiento a la interpretación subjetiva de la probabilidad.

4. CONCLUSIONES

La enseñanza de la probabilidad a partir de libros de texto se realiza desde una perspectiva sobre todo intuitiva en la que se otorga gran importancia al uso de lenguaje cotidiano e informal. Este enfoque favorece el desarrollo del pensamiento probabilístico a partir de un contexto familiar y cercano, sobre todo en los primeros cursos de básica, pero progresivamente se debería avanzar hacia un lenguaje probabilístico que permita alcanzar un aprendizaje en profundidad (Chapman, 1995). Bajo esta perspectiva, es necesario que los libros presenten situaciones problemáticas adecuadas que permitan adquirir los conceptos y propiedades claves asociadas a un estudio integral de la probabilidad desde su diversidad de significados, aspecto que se da de forma desigual en las dos colecciones analizadas. Adquiere, pues, gran importancia el enfoque dado al proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, que debería evolucionar desde las ideas intuitivas e informales (intuiciones primarias) que tienen los alumnos sobre probabilidad y azar hasta adquirir la rigurosidad matemática asociada a la cuantificación y el cálculo de probabilidades (intuiciones secundarias). Las intuiciones primarias sobre el azar están presentes en los niños antes de los 7 años, y es después de esta edad cuando los niños alcanzan, poco a poco, una estructura conceptual distinta y organizada que desempeña un rol fundamental para el desarrollo completo del razonamiento probabilístico. Asimismo, es importante considerar las múltiples aplicaciones de la probabilidad tanto en la vida cotidiana como en otras disciplinas en que es necesario tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

De lo anterior, es posible deducir ciertos aspectos a contemplar para una enseñanza idónea de la probabilidad en Educación Básica, que debería contemplar las particularidades de los distintos niveles escolares:

- Nociones previas sobre azar y/o aleatoriedad y probabilidad.
- Diversidad de significados de la probabilidad asociados a distintas aplicaciones en la vida diaria.
- Vinculación del cálculo de probabilidad de ocurrencia de un suceso con la realización o simulación de experimentos.
- Cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso o evento.
- Distinción entre probabilidad teórica y empírica.

En síntesis, pues, aún sin haber analizado otras colecciones de libros de texto, puede concluirse que, en términos generales, el trato que se da a la probabilidad en los libros de texto no está siempre en

absoluta concordancia con las directrices curriculares. Se hace necesario, pues, un replanteamiento riguroso en los textos escolares respecto a los contenidos matemáticos en general, y los de probabilidad en particular, para que los alumnos aprendan lo que deberían aprender, sobre todo considerando que el libro de texto sigue siendo el recurso mayoritario para enseñar matemáticas en Educación Básica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.

Chapman, A. (1995). Intertextuality in school mathematics: The case of functions. *Linguistics and Education*, 7(3), 243–262.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada.

Laplace, P. S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades.* Madrid: Alianza Editorial (trabajo original publicado en 1814).

Mineduc (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática.* Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.: NCTM.

Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning?. *Elementary School Journal*, 100(4), 331-350.

Rocamora, P., Riquelme, M., Aldunate, V., Falconi, P. y Chala, J. (2013). Matemática 5º básico. Galileo.

Rocamora, P., Riquelme, M., Aldunate, V., Falconi, P. y Chala, J. (2013). Matemática 6º básico. Galileo.

Rodríguez, M. y Carreño, C. (2013). Matemática 1º básico. Pearson Educación de Chile Ltda.

Rodríguez, M. y Carreño, C. (2013). Matemática 2º básico. Pearson Educación de Chile Ltda.

Rodríguez, M. y Carreño, C. (2013). Matemática 3º básico. Pearson Educación de Chile Ltda.

Rodríguez, M. y Carreño, C. (2013). Matemática 4º básico. Pearson Educación de Chile Ltda.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Revista Números*; Volumen 85, p.5-23.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, v. 19, n. 2, p. 441-462.

PROBABILIDAD CONDICIONAL COMO HERRAMIENTA PARA LA TOMA DE DECISIONES: UNA SECUENCIA DIDÁCTICA

Conditional probability as a decision making tool: a didactic sequence

Elicer, R.[a] y Carrasco, E.[b]

[a]Universidad Austral de Chile, [b]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación;
correos electrónicos: raimundo.elicer@uach.cl[a], ecarrasc@gmail.com[b]

Resumen

La apuesta y la estrategia son las vías para tomar decisiones ante la incertidumbre, de la que ciertamente no se puede rehuir. En particular, la probabilidad condicional surge como herramienta de análisis de una estrategia que se amolda a las nuevas condiciones. En el marco de la ingeniería didáctica, se entregan los elementos del análisis a priori de una secuencia didáctica que intenciona este uso. Se propone una secuencia que utiliza el problema de Monty Hall como juego diacrónico, que pone en juego la probabilidad condicional. Se conjetura el uso de elementos socioemocionales y una incorrecta percepción del espacio muestral por parte de los estudiantes, y se espera que de múltiples simulaciones emerja la necesidad de calcular correctamente la probabilidad de éxito según cada decisión.

Palabras clave: *probabilidad, condicional, decisiones, ingeniería, didáctica*

Abstract

Bet and strategy are the paths for decision making under uncertainty, a reality that one cannot avoid. Particularly, conditional probability arises as a tool for analyzing a strategy that molds to new conditions. Under the framework of didactic engineering, elements of the a priori analysis of a didactic sequence which emphasizes this use are given. A sequence which utilizes the Monty Hall problem as a diachronic game, jeopardizing conditional probability, is proposed. One can conjecture that students will use socioemotional elements and a wrong perception of the sample space to make decisions. It is likely to expect that after several simulations of the game the need for a correct calculation of success probability under each possible decision will arise.

Keywords: *probability, conditional, decisions, engineering, didactic*

INTRODUCCIÓN

Actualmente se reconoce la importancia de ser competente en probabilidad y estadística debido a la necesidad de un actuar en situaciones de riesgo o incertidumbre, cada vez más incorporadas a distintos entornos laborales y de vida. Al decir de Morin: "lo nuevo brota sin cesar; nunca podemos predecir cómo se presentará, pero debemos contar con su llegada" (Morin, 1999, pág. 11), ante lo cual precisa el autor que "importa (…) comprender la incertidumbre de lo real, saber que hay un posible aún invisible en lo real". Ignorar esta incertidumbre o intentar minimizarla nos puede llevar a tomar decisiones frágiles, que pueden generar un impacto negativo apenas el escenario cambie (Taleb, 2012).

Se entenderá que situaciones de incertidumbre son aquellas en las cuales se debe tomar una decisión sin conocer el estado o evolución de todos los aspectos involucrados. Podemos considerar que el cruzar una calle transitada, en la cual el comportamiento de los demás conductores o peatones no es necesariamente conocido, es una situación de incertidumbre. Más claro es cuando se debe invertir

en acciones de empresas a varios años y no podemos establecer de modo certero la evolución de cada variable económica. Esto amerita tener que optar por decisiones diferentes que claramente tendrían consecuencias diversas.

Lo anterior, en particular el segundo caso, implica tener que medir y controlar el nivel de incertidumbre para poder tomar una mejor decisión bajo riesgo. Esto ha sido estudiado desde los años 40, conformando una matemática en la cual la probabilidad y la estadística son elementos centrales para la toma de decisiones.

Sin embargo, es un área del saber matemático que muestra, en Latinoamérica, bajos resultados. En PISA 2012 se muestra que más del 80% de los estudiantes evaluados no supera el segundo nivel de logro en el área de datos y azar (OECD, 2014). Es decir, en el mejor de los casos entienden y usan conceptos de probabilidad básicos en situaciones familiares como lanzamientos de dados y de monedas, no evidenciando la capacidad de realizar razonamientos en contextos simples.

Se suma a lo anterior que la probabilidad en las aulas se limite fuertemente al trabajo con juegos de azar y en particular al cálculo de la probabilidad de las diversas opciones de jugadas. Sin un enfoque hacia la toma de decisiones con información relevante. Esto se refleja en lo reportado por un estudio exploratorio respecto de estudiantes que prefieren mantener una decisión a pesar que la evidencia de probabilidad les muestra que es la con menor probabilidad de éxito. Al decir de algunos estudiantes: "me ha pasado que me cambio por dudar y pierdo", "estaría más seguro quedándome con lo que elegí al principio, por el simple hecho de no arriesgar más", "yo creo que ocurrió por azar solamente". Esto supone la necesidad de innovar en situaciones de enseñanza y aprendizaje que permitan a los estudiantes constituir a las nociones de la probabilidad en una herramienta matemática para su actividad.

El presente reporte propone el diseño de una situación de enseñanza que involucra el estudio de la probabilidad en un contexto de toma de decisiones. En particular, se entregan los elementos del análisis preliminar y a priori, en el marco de la ingeniería didáctica.

Marco teórico y metodología

La probabilidad para la toma de decisiones

Entenderemos una situación de decisión bajo incertidumbre o riesgo como aquella en que no podemos tener toda la información respecto de las variables que impactarán en el desarrollo de los acontecimientos. Se suele separar una situación de riesgo (se conocen las probabilidades de todos los escenarios) de una situación bajo incertidumbre (no se conocen estas probabilidades) (Leitgeb y Hartmann, 2014). Pero utilizaremos indistintamente ambos conceptos, dado que en el contexto educativo intencionamos el uso de la probabilidad. Cruzar una calle transitada es una situación de incertidumbre en cuanto uno no conoce el comportamiento de todos quienes por ella circulan. Entonces la decisión respecto de que hacer se hace con la mejor información y conjeturando posibles comportamientos. En otro aspecto, los juegos de azar configuran situaciones de incertidumbre cuando, aun conociendo la probabilidad de los posibles sucesos, no es posible predecir los acontecimientos futuros. O en economía, una inversión ha de ser una apuesta en el corto o mediano plazo, pero conociendo no solo su rentabilidad esperada, sino además su variabilidad, esta apuesta cambia de valor.

Morin propone una salida para evitar el bloqueo ante estos escenarios. Lo primero es la conciencia del carácter de apuesta que tiene la acción. Le sigue la noción de estrategia, que debe prevalecer sobre el programa, puesto que se adapta a las nuevas condiciones y se diseña examinando las certezas e incertezas, las probabilidades e improbabilidades (Morin, 1999, pág. 48). De aquí se desprende la necesidad de contar con herramientas para modelar, medir y controlar la

incertidumbre, configurando así la probabilidad y la estadística como herramienta para la toma de decisiones.

Una estrategia se amolda a lo que va aconteciendo. En ese sentido, a medida que se adquiere nueva información sobre la situación en la cual se requiere tomar decisiones en escenarios inciertos, la noción de probabilidad condicional permite incorporar cambios en los grados de creencia sobre los posibles resultados, mejorando la toma de decisiones sobre la base de predicciones. De este modo se amplía el rango de experimentos a considerar en el aula. Esto mejora las oportunidades para una mayor comprensión y razonamiento sobre las nociones involucradas en el estudio de la inferencia estadística, así como de la asociación entre variables, la regresión y los modelos lineales (Batanero y Díaz, 2007).

Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica como método de investigación y diseño contempla cuatro fases: (1) análisis preliminar, (2) análisis a priori, (3) aplicación y (4) fase de contraste y rediseño (Ferrari, 2008). El análisis preliminar se construye desde una mirada socio-epistemológico en la cual se considera (a) la faceta histórico-epistemológica, que busca establecer una epistemología de la noción de probabilidad; (b) la faceta cognitiva, que se propone establecer aspectos propios del conocer de los estudiantes respecto de la probabilidad; (c) la faceta didáctica, que aborda el discurso matemático escolar presente en Chile respecto de la probabilidad; y (d) finalmente el aspecto sociocultural, que se imbrica en los tres anteriores, responde a considerar que la construcción de saber matemático, es un proceso sociocultural, normado por prácticas relacionadas con la probabilidad y la toma de decisiones. Esto permite avanzar en el desarrollo de una epistemología de prácticas en torno a la probabilidad.

A partir de esta epistemología se construye la secuencia didáctica que busca involucrar a los estudiantes en situaciones didácticas que promuevan las prácticas identificadas en la etapa anterior y las conjeturas respecto de los efectos didácticos de la secuencia (etapa que se reporta en esta ponencia). Para cada fase de la secuencia diseñada, se presuponen actuaciones estudiantiles identificando posibles estrategias que emergen en cada tarea y como los diversos momentos de la secuencia promueven la emergencia de lo proyectado.

Finalmente la aplicación y posterior contraste posibilita el rediseño de la secuencia, como la construcción de saber didáctico respecto de la construcción de las herramientas de probabilidad para la toma de decisiones.

En el análisis preliminar, los elementos histórico-epistemológicos se obtienen mediante la selección de autores y sus obras significativas en el desarrollo de la probabilidad, en particular, Pascal y Huygens. El análisis de la obra de cada autor se hace a partir de la construcción de una crónica del autor, de su contexto sociocultural y de su obra. Sobre ellos se sistematizan las prácticas que dan necesidad y sentido a la noción de azar y toma de decisiones. Respecto del análisis cognitivo, se recurre a tests exploratorios respecto de las concepciones de probabilidad de grupos de estudiantes, y su intuición para la toma de decisiones en el juego de Monty Hall (Batanero, Fernandez y Díaz, 2009). El análisis didáctico se realiza sobre los textos de enseñanza que entrega el gobierno de Chile a la Educación Pública y Particular Subvencionada, que cubre el 80% de su matrícula.

Para el análisis a priori, se asume una aproximación al problema de estudio en una espiral creciente de profundidad. Sobre esta base se han establecido dos etapas. En la primera, las conjeturas surgen de la sensibilidad teórica de los autores, mediada por el análisis preliminar construido. La segunda etapa es la aplicación a un grupo reducido de estudiantes y realización de un primer contraste entre las conjeturas iniciales y las actuaciones del grupo.

Estas actividades, si bien implican una primera vuelta a las facetas de la ingeniería didáctica, no abordan una situación de enseñanza en escenario escolar, sino a nivel experimental de grupo reducido. Esto posibilita una adecuación tanto de la secuencia, como de las conjeturas levantadas con miras a su aplicación en escenario escolar.

Para la aplicación a un grupo reducido se seleccionan al azar seis estudiantes de segundo semestre de bachillerato en ingeniería civil, conformando dos grupos de tres estudiantes. La secuencia se aplica en horario alterno a su jornada escolar. Para el registro de datos se usan grabadoras de audio en cada grupo, la filmación de su trabajo y la recopilación de todas las producciones estudiantiles.

Se transcriben los diálogos estudiantiles conformando el primer insumo de análisis. Luego se describen, de modo sintético, las actuaciones de los estudiantes para cada fase de la secuencia identificando aspectos relevantes de la actividad según los propósitos indagativos.

Finalmente partir del contraste entre la actividad identificada y las conjeturas, se ajusta tanto la secuencia, como las conjeturas levantadas en el primer momento.

RESULTADOS

Análisis preliminar

El análisis preliminar, reportado en Elicer y Carrasco (2015), establece a la noción de lo probable como algo que puede ocurrir y en la decisión del juego, cualquier alternativa posibilita el éxito. Con miras al diseño a priori, destacamos los siguientes elementos:

- **Histórico-epistemológicos.**

  El análisis de la probabilidad, surge en la toma de decisiones proyectivas, es decir, en la necesidad de prever un reparto justo, o de dar una estrategia al jugador para apostar con ventaja. Este juego justo emerge antes de la noción de apostar con ventaja. El análisis de casos favorables v/s totales se constituye a partir de conocer todos los casos posibles. Luego la asociación de Huygens (Basulto, Camuñez, Ortega, y Pérez, 2004) entre situaciones de predicción, como el pronóstico de vida, con el juego de azar, permite resignificar la idea de probabilidad en el juego a la probabilidad a posteriori. Así los casos posibles se constituyen en los casos conocidos desde estadísticas.

- **Cognitivos.**

  Los estudiantes recurren a razones no matemáticas para tomar su decisión, en que no suelen calcular una probabilidad, los casos obtenidos son los casos posibles, y no se ponderan. Reconocen que su decisión sería distinta en el escenario del juego, en el cual no se pide una decisión a priori, sino una in situ.

- **Didácticos.**

  La principal actividad propuesta en el programa de estudio y los textos escolares, refiere a cálculos de probabilidad, no a la toma de decisiones ni a la predicción con "ventaja" de resultados de un juego.

Análisis a priori: diseño de la secuencia

De este modo, para el diseño de la secuencia se adoptan como central lo siguiente:

- **Apuesta con ventaja.**

  Poder valorar comparativamente (ojalá cuantitativamente), cuál de las diversas opciones que se tienen lleva al éxito con mayor probabilidad o, eventualmente, certeza.

- **Juego justo.**

  Identificar si un juego o reparto es justo, ponderando no solo la probabilidad de ocurrencia de un evento, sino además su beneficio o costo para cada parte. Se puede intencionar en casos en que los distintos escenarios son equiprobables.

- **Juego diacrónico.**

  Diferenciar entre la toma de decisión instantánea, condicionada a la realización de una primera etapa, de la decisión estratégica prospectiva a los eventos que pueden ocurrir posteriormente.

- **Espacio muestral.**

  Resignificar el espacio muestral a priori, de modo que no sean los estados finales de las variables los casos posibles, sino cada trayectoria o rama que lleva a ellos.

El primer momento busca que los estudiantes vivan situaciones de juegos de azar, creciendo en el nivel de complejidad del espacio muestral. Como devolución de la situación, el desafío inicial debe ser definir si el juego es o no justo, y posteriormente definir una estrategia que lo haga injusto a favor, es decir, para apostar con ventaja. Estos juegos serán:

1. Lanzamiento de 1, 2 y 3 monedas, en que cada jugador gana según cada cara o sello obtenido. Se busca definir en cada caso y en cada etapa, si el juego es justo con determinado pago. Posteriormente, se pide identificar el valor justo de la apuesta si el juego es interrumpido.
2. Juego de Monty Hall. El propósito no es buscar el juego justo, sino identificar las posibles ventajas, desventajas o indiferencia de la opción de cambio de puerta.

En el segundo momento, se les pedirá que argumenten el tipo de decisiones que tomaron los equipos de trabajo para que establecer estrategias y actuaciones en el juego que fueron más ventajosas. Para ello se usará una simulación del problema de Monty Hall. Los estudiantes deben decidir si se cambian de la puerta escogida en un principio cuando el animador lo ofrece. Deben señalar qué elementos los ayudaron a decidir. Se recurre a una planilla electrónica para la simulación y registro de los resultados del concurso. Posteriormente se usarán videograbaciones del concurso en versiones ocurridas en televisión, para situarlos de modo más realista.

Análisis a priori: conjeturas

Se presentan las conjeturas generales de la secuencia. Se espera que las decisiones tomadas por los estudiantes incorporan variables sociales y de empatía respecto del animador. Como argumentos principales para la mantención o cambio de puerta surgirán las tonalidades emocionales del animador del juego, así como su propia percepción respecto del posible fracaso en el juego. Los cálculos y análisis de probabilidades no emergerán naturalmente al ser enfrentado, pues considerarán que cada una de las dos puertas restantes tiene la misma probabilidad de ser exitosa, como al inicio del juego.

En la segunda etapa, a través de una simulación con planilla electrónica, las variables empáticas y emocionales respecto del juego no emergen. Los estudiantes construirán una estrategia basada en las probabilidades a posteriori del juego. Sin embargo, se espera que en las recomendaciones finales emerjan, en menor medida, algunos aspectos socioemocionales como parte de la estrategia.

En la revisión del juego en el escenario televisivo real, se espera que aumente la cantidad de estudiantes que deciden cambiarse de puerta respecto a su primera decisión, buscando algún modelo

o representación de la situación que calce con los resultados. Esto puede ser un diagrama de árbol, cálculo de probabilidades totales o análisis de qué significa ganar en cada decisión.

A partir del contraste de estas conjeturas con lo obtenido, se evidenciará el rol que toma el saber probabilístico en la toma de decisiones de los estudiantes, incluyendo la redefinición del espacio muestral que sugiere un juego diacrónico, bajo el concepto de probabilidad condicional. Adicionalmente, se intenciona la relación entre la probabilidad calculada a priori o teórica, que establece un espacio muestral finito, y la probabilidad a posteriori estimada según los resultados de los ensayos realizados.

CONCLUSIÓN

Lo avanzado en la metodología de la ingeniería didáctica ha posibilitado una mirada compleja a la constitución de la probabilidad como herramienta para la toma de decisiones.

En particular, podemos destacar cómo el diferenciar una decisión en una situación específica, es decir en el caso, de una decisión proyectiva que posiciona al estudiante en el fenómeno, muestra necesario trabajar situaciones didácticas que localiza a los estudiantes en escenarios de toma de decisión. Vivir el caso involucra mayores variables que cuando el fenómeno es analizado. Este último, ha vivido una constantificación de variables para su análisis (los mensajes corporales del animador en un concurso, los sentimientos respecto de una mala decisión, entre otros), que posibilita su modelación probabilística. Marca una diferencia además el que la decisión no se toma, solo se aconseja.

La probabilidad como herramienta para la toma de decisiones impacta principalmente en el análisis proyectivo de la ocurrencia de sucesos, y resta entonces indagar cómo este tipo de análisis en futuros profesionales, puede modificar sus actuaciones en la toma de decisiones específicas.

Referencias

Batanero, C., y Díaz, C. (2007). Probabiliad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Granada.

Batanero, C., Fernandes, J. A., y Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicancias didácticas. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas(62), 11-18.

Basulto, J., Camuñez, J., Ortega, F., y Pérez, M. (2015) La correspondencia entre los hermanos Huygens en 1669: vida media frente a vida mediana. En Historia de la probabilidad y la estadística (II). Delta Publicaciones, 57-69. España.

Elicer, R., y Carrasco, E. (2014). Juegos de azar diacrónicos: un espacio para el encuentro entre las creencias subjetivas y las probabilidades condicionales. XVIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática (pág. 86). Santiago: Sociedad Chilena de Educación Matemática.

Elicer, R., y Carrasco, E. (2015). La probabilidad condicional como herramienta para la toma de decisiones. Comuniación presentada en la Vigésima Novena Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 29). Ciudad de Panamá: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME).

Ferrari, M. (2008). Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico de multiplicar sumando a una primitiva. Tesis doctoral no pulicada.

Leitgeb, H., y Hartmann, S. (19 de Mayo de 2014). Introduction to Mathematical Philosophy. Chapter 6: Decision. München, Alemania: Ludwig-Maximilians-Universität.

Morin, E. (1999). Los siete saberes necesarios para la educaión del futuro. París: UNESCO.

OECD. (2014). PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do - Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I, Revised edition, February 2014). PISA: OECD Publishing.

Pascal, B (1983) Cartas de Pascal a Fermat. En Blaise Pascal obras escogidas. Ed. Alfaguara 657-673. Madrid.

Taleb, N. N. (2012). Antifragile: Things that gain from disorder (Vol. 3). Random House Incorporated.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ESTUDIOS DE CASOS QUE PROMUEVEN ARGUMENTACIÓN EN EL AULA MATEMÁTICA

Design and implementation of studies argument that promote in the classroom mathematics

Victoria Arriagada Jofré[a], Horacio Solar Bezmanilovic[b], Andrés Ortiz Jiménez[c].

Universidad Católica de la Santísima Concepción[a], Pontificia Universidad Católica de Chile[b], Universidad Católica de la Santísima Concepción[c]

varriagada@magisteredu.ucsc.cl[a]; hsolar@uc.cl[b]; [c]aortiz@ucsc.cl[c]

Resumen

Una de las competencias matemáticas corresponde a la argumentación matemática, que a través del modelo de Toulmin se promueve en estudiantes de la carrera Pedagogía Básica con Mención en Matemática y Ciencias de la Universidad Católica de la Santísima Concepción que cursan un optativo de profundización denominado "Gestión del Aula Matemática". Este artículo muestra la implementación de un proyecto de intervención pedagógica que evidencia cómo a través de los estudios de caso se puede identificar con mayor facilidad procesos argumentativos, procesos explicativos y elementos del Modelo de Toulmin.

Palabras clave: *Competencia matemática, argumentación matemática, modelo de Toulmin, estudio de casos, formación inicial de profesores de matemática en básica.*

Abstract: *One of the math skills corresponds to mathematical argumentation, that via Toulmin model is promoted in basic education students with a major in mathematics and Sciences Catholic University of the Holy Conception attending a deepening elective called "Mathematical classroom management". This article shows the implementation of a project of pedagogical intervention that shows how through the case studies can identify more easily argumentative processes, explaining processes and elements of the Toulmin model.*

Keywords: *Mathematical literacy, mathematical argumentation, Toulmin model, case studies, Initial teacher training in basic math.*

INTRODUCCIÓN

Definir argumentación matemática, no es tarea fácil, pues ha sido discutida por variados autores. Según el Ministerio de Educación (2012) en sus Bases Curriculares define argumentación matemática de la siguiente forma: *"habilidad de argumentar que se aplica al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos".*

Este documento, pretende mostrar los resultados de un proyecto de intervención pedagógica desarrollado en la Universidad Católica de la Santísima Concepción de acuerdo a los requisitos que establece el programa de Magíster en Educación Superior con Mención en Pedagogía Universitaria de dicha Institución. El proyecto se denomina "Diseño e implementación de estudios de casos en alumnos y alumnas de Pedagogía Básica con Mención en Matemática y Ciencias, enfocados en argumentación en el aula matemática a través de un electivo de profundización llamado Gestión del Aula matemática".

El trabajo se inicia al recopilar datos a partir de los alumnos y documentos oficiales, se presenta el diseño del proyecto que permite enriquecer a los alumnos de herramientas en argumentación

matemática dentro del aula y muestra cómo los estudiantes enriquecen su formación como docentes en argumentación en el aula matemática a través de los estudios de caso.

El proyecto consiste en diseñar tres casos directamente relacionados con argumentación en el aula matemática, que posteriormente se implementan en el electivo de profundización "Gestión del aula matemática" durante el segundo semestre del 2014. Este electivo de profundización se imparte por primera vez y se orienta a estudiantes de la carrera Pedagogía Básica con Mención en Matemática y Ciencias en su último año de formación, por lo que ya poseen una valiosa formación matemática y didáctica. Sin embargo, su formación profesional no incluye situaciones de aprendizaje de contexto profesional que promuevan el análisis de la argumentación en el aula matemática, es decir, faltan oportunidades para promover y estudiar la interacción argumentativa en las asignaturas primarias de la carrera. Por tal motivo, el principal objetivo del proyecto es elaborar herramientas para la gestión de las interacciones argumentativas en el aula de matemáticas por medio de estudios de casos en estudiantes de la pedagógica básica con mención en matemática y ciencias. Este objetivo se puede cubrir, mediante dos específicos. En primer lugar se diseñan estudios de casos para analizar la práctica de otros docentes, con el fin de mejorar y perfeccionar la propia práctica en gestión de interacciones argumentativas en el aula matemática. En segundo lugar, los casos se implementan con el fin de reconocer procesos argumentativos, procesos explicativos y diferenciarlos correctamente en el aula matemática.

Marco teórico

Argumentación en el aula de matemática

En la actualidad de nuestro país, en el marco curricular de Enseñanza Básica se desarrollan las competencias matemáticas, estando involucradas cuatro habilidades interrelacionadas: *resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar.* Todas ellas tienen un rol importante en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos para resolver los problemas propios de la matemática (rutinarios y no rutinarios) y de otros ámbitos (MINEDUC, 2012). Este trabajo está enfocado en la habilidad de argumentar.

Según el Ministerio de Educación (2012) en sus Bases Curriculares define argumentación matemática de la siguiente forma: *"habilidad de argumentar que se aplica al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos"*. La argumentación y la discusión colectiva sobre la solución de problemas, escuchar y corregirse mutuamente, la estimulación a utilizar un amplio abanico de formas de comunicación de ideas, metáforas y representaciones, favorece el aprendizaje matemático.

La argumentación *involucra procesos de pensamiento lógicamente arraigados que exploran y vinculan los elementos de un problema para hacer inferencias a partir de ellos, comprobar la justificación provista, o proporcionar una justificación de las declaraciones o de las soluciones a los problemas* (OECD, 2013, p.30).

Desde una perspectiva educacional, la argumentación matemática se está considerando un aspecto del diseño curricular. Es considerada tanto desde una perspectiva de las competencias como de los estándares de proceso. En la enseñanza básica, se apunta principalmente a que los alumnos establezcan progresivamente deducciones que les permitirán hacer predicciones eficaces en variadas situaciones concretas. Se espera, además, que desarrollen la capacidad de verbalizar sus intuiciones y concluir correctamente, y también de detectar afirmaciones erróneas (MINEDUC, 2012).

Modelo de toulmin

Principalmente el análisis de argumentación en el aula se sustenta en el modelo de argumentación propuesto por Toulmin (1958), que sigue un proceso lineal que comienza en los datos y llega a las conclusiones. Toulmin crea este modelo en el marco de los discursos sociales, para lo cual considera que un argumento es una estructura compleja de datos organizados en un proceso. Implica alguna combinación de las *conclusiones* (declaraciones cuya validez se está creando), *datos* (apoyo proporcionado por las conclusiones), *garantía* (declaraciones que conectan los datos con las conclusiones), las *refutaciones* (declaraciones que describen las circunstancias en que las conclusiones no serían válidas), los *calificadores* (declaraciones que describen la certeza con la que se hace posible la conclusión) y *fundamentación* (por lo general no declarada, que trata del ámbito en el que se produce el argumento) (Conner, Singletary, Smith & Francisco; 2014).

De acuerdo a lo que plantea Alvarado y González (2010), este modelo también ha sido utilizado para:

- Analizar y documentar los progresos del aprendizaje en el aula.
- Crear un contexto que permita utilizar la argumentación en el aula.
- Comparar y analizar desde un punto de vista cognitivo diferente estructura relativa a la argumentación y la demostración.
- Producir textos argumentativos y crear ensayos y artículos de investigación en educación.
- Para analizar los distintos tipos de persuasión en la evaluación de argumentos matemáticos por parte de estudiantes y matemáticos, destacando el papel del cualificador modal y las objeciones.

En este presente documento, se pretende trabajar la primera, segunda y cuarta utilización, es decir, para analizar el aprendizaje en el aula, utilizar la argumentación en la sala de clases y producir el presente artículo de investigación.

Metodología

El problema se enmarca en estudiantes de la Carrera de Pedagogía Básica con Mención Matemática y Ciencias pertenecientes a la Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC) y que cursan su último año de formación (cuarto año). Por haber cursado asignaturas de la mención, tienen claridad del concepto de argumentación y explicación, no así de los elementos del modelo de Toulmin. Además, en los programas de actividades curriculares, si bien se menciona la habilidad de argumentar, no es suficiente la presencia de resultados de aprendizaje que involucren la argumentación como competencia, por lo que en consecuencia de estas acciones es que los egresados de la carrera no reconocen la importancia de las interacciones argumentativas en el aula matemática, no gestionan el desarrollo de esta habilidad y no la comprenden. Sin embargo, por primera vez, desde el año 2014 se imparte un optativo de profundización llamado "Gestión del aula matemática" donde se implementa el proyecto de intervención.

Diseño e implementación del proyecto

Las actividades se clasifican en tres grandes etapas: optimización y análisis de casos utilizados anteriormente en el mismo curso (etapa 1), diseño de tres casos clínicos (etapa 2) e implementación de los casos clínicos en el optativo de profundización "Gestión del Aula Matemática" (etapa 3).
En la primera etapa se analizan casos clínicos que ya están diseñados e implementados en el optativo de profundización previo al diseño de los casos de este proyecto.
En la segunda etapa se graban clases de docentes de Enseñanza Básica con conocimiento en argumentación matemática, debido a que participaron ese mismo año de un proyecto Fondecyt 11130675 denominado *"Tratamiento de la contingencia desde el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas"*. Estas clases intencionadamente se planifican para

promover la argumentación en el aula. Luego, se seleccionan las clases y episodios que promueven efectivamente argumentación matemática de acuerdo al modelo de Toulmin, se analizan estos episodios por medio de una pauta de observación que permite identificar el nivel de logro de los distintos indicadores de argumentación, para luego diseñar cada uno de los casos. Estos casos, incluyen preguntas donde los alumnos identifican, caracterizan y elaboran procesos argumentativos. Posterior al diseño de los casos, continua el proceso de construcción de pautas de corrección para cada uno de ellos.

En la tercera etapa se implementan los casos clínicos como parte del optativo de profundización "Gestión del aula matemática". Estos casos se implementan por el docente de dicho optativo en dos sesiones por caso, siendo los últimos del curso, ya que antes de la implementación de estos casos, se implementaron otros 5. En la primera sesión de cada caso, los estudiantes observan la grabación del episodio, se comentan de forma general cada una de las preguntas del caso con los estudiantes (quienes respondieron a las preguntas del caso en grupos de 4 a 5 personas) y finalmente se da espacio a la discusión del episodio en aproximadamente una hora. En esta discusión se analizan los videos y las posturas de los estudiantes del optativo, donde cada uno de ellos defiende con argumentos sólidos sus respuestas, generando finalmente unificación de ideas. La sesión siguiente, cuando ya ha pasado una semana desde la sesión anterior, cada grupo ha discutido lo suficiente como para tener una postura clara y bien definida, haciendo entrega de su caso para la posterior corrección. En esta tercera etapa, también se encuentra la última sesión del curso, donde se implementó el tercer caso a cargo del proyecto de intervención, que corresponde a un caso de cierre y que además de argumentación incluye comunicación matemática. Sin embargo, en este documento solo se hará referencia a la argumentación matemática. Esta última sesión también contiene la aplicación de una escala de apreciación descriptiva para medir el grado de satisfacción de los estudiantes con respecto al optativo de profundización y específicamente al aprendizaje proveniente de los tres casos diseñados e implementados por el proyecto de intervención incluido en este optativo.

Descripción de los casos

Cada uno de los tres casos se diseña con base en la grabación de una clase real de profesoras que pertenecen a establecimientos de la ciudad de Concepción y que imparten docencia en Enseñanza Básica. La característica de estas docentes, es que dominan la argumentación en el aula matemática por lo que su planificación de clase se diseña para generar situaciones argumentativas en sus alumnos.

Cada clase se analiza y se seleccionan episodios que promuevan con mayor riqueza argumentación en el aula. Luego se revisa el episodio una y otra vez para analizar las características de la clase, las preguntas de la profesora, las respuestas de los alumnos, etc. Una vez que se identifica el foco de la clase, se procede a diseñar el caso en escrito. En esta etapa se introduce el caso teóricamente. Se presenta el contexto de la clase, que es de vital importancia para los alumnos del optativo pues indica el curso, la unidad y otros aspectos relevantes de la clase. También se presenta la situación de clase que en algunos casos fue una pregunta, una imagen, un diálogo, etc. Finalmente continúan las preguntas del caso donde siempre la primera pregunta (o las primeras) están relacionadas con el contenido matemático en cuestión y las siguientes con argumentación matemática. Por ejemplo, el primer caso diseñado contiene la siguiente situación de clase: "Camila y Yenny, trasladan un triángulo a través de una cuadrícula y de acuerdo a instrucciones entregadas en la guía de trabajo, lo hacen partiendo por el vértice A del triángulo.

> B1: Denisse: y si uno empezara desde un punto que no sea ese…¿igual va a llegar a la figura en el mismo lado?"
>
> B2: Camila: sí, porque las medidas son las mismas y como no cambia nada siempre va a quedar en el mismo lado

A continuación de la situación de clase, las siguientes preguntas: a) Explique la pregunta que hace Denisse a sus compañeras. b) Describa la técnica utilizada por Camila y Yenny para trasladar un triángulo en una cuadrícula. ¿Está de acuerdo con esta técnica? c) ¿Cuál es el conocimiento matemático que sustenta la técnica de Camila-Yenny? ¿Qué restricciones tiene la técnica de Camila-Yenny? d) Identifique los elementos de la estructura de Toulmin para el diálogo entre Denisse y las dos alumnas que trasladan la figura en la pizarra. e) El diálogo entre Camila y Denisse es de carácter explicativo o argumentativo? Fundamente. f) Considerando el contexto del diálogo entre Camila y Denisse, invente una interacción comunicativa que permita evidenciar todos los elementos de la estructura de Toulmin.

Una vez que los casos ya están diseñados, se procede a confeccionar las pautas de corrección respectivas a cada caso.

Análisis y resultados

El estudio de la implementación del proyecto se realiza en dos grandes etapas: en primer lugar el análisis de los casos utilizando las pautas de corrección y en segundo lugar el impacto que la implementación causa en los estudiantes que cursaron este optativo de profundización.

Análisis de las respuestas de los estudiantes en formación inicial

Para analizar la información, se graban todas las clases del optativo desde que comienza hasta que termina (un semestre) y se analizan los casos resueltos con sus respectivas pautas de corrección. Las respuestas de los estudiantes a las preguntas de los casos se clasifican en: *"Se cumple de forma excelente (E)", "se cumple de manera aceptable (A)", "se cumple de manera deficiente (D)" y "no se cumple (N)"*. El análisis se realiza pregunta por pregunta, determinando en cada una de ellas en qué nivel se cumple la respuesta.

El primer caso, se focaliza en octavo básico que está comenzando la Unidad de transformaciones isométricas. El episodio corresponde a la segunda clase de la unidad, que retoma el trabajo realizado en la primera, en donde se realizaron traslaciones de figuras planas a través de una cuadrícula. El objetivo de la clase consiste en trasladar figuras a través de una cuadrícula. El episodio, es sólo una parte de la clase y ocurre cuando dos alumnas, Camila y Yenny, pasan a la pizarra a realizar una de las 3 traslaciones y una tercera alumna, Denisse, hace una pregunta: y si uno empezara desde un punto que no sea ese… ¿igual va a llegar a la figura en el mismo lado?". Camila responde: sí, porque las medidas son las mismas y como no cambia nada siempre va a quedar en el mismo lado.

De manera genérica, se observa que en promedio el 67% los estudiantes en formación inicial responden manera excelente a las preguntas matemáticas del caso. Un 19% lo realiza de manera aceptable, un 4% de manera deficiente y un 10% no lo logra. Al momento de identificar elementos del modelo de Toulmin, se observa que el 100% de los estudiantes reconocen los elementos del modelo de Toulmin, con la excepción de la conclusión que sólo un 53% de ellos la identifican claramente. Cuando los estudiantes deben identificar episodios explicativos o argumentativos, en promedio el 82% lo hace de manera excelente y un 18% no lo hace. Esto para la mayoría resultó fácil de identificar, pues si hay refutación entonces hay argumentación. En caso contrario sólo es una situación explicativa. La última pregunta del caso requiere inventar una fundamentación y una refutación para una situación explicativa que no poseía esos elementos. El 36% de los estudiantes lo hace de manera excelente, el 12% lo hace de manera aceptable, el 12% de manera deficiente y el 41% no lo hace.

El segundo caso, está focalizado en un octavo básico que está comenzando con la unidad de números. La clase comienza con un problema presentado por la profesora y lo proyecta en la pizarra para trabajarlo con los alumnos: Un número entero y su inverso distan en la recta 12 unidades ¿Qué número es?

En promedio un 57% de los estudiantes del curso responde de manera excelente a las preguntas matemáticas del caso, un 31% de manera aceptable y un 12% no lo logra. Esto se puede relacionar con que el contenido matemático era desconocido para los estudiantes del optativo. Al momento de seleccionar un episodio explicativo, un 66% lo hace de manera excelente, un 2% lo hace de manera aceptable, un 13% de manera deficiente y un 19% no lo hace. Cuando los estudiantes deben identificar un proceso básico potencialmente argumentativo y determinar cómo se podría potenciar para que sea argumentativo, un 53% lo hace de manera excelente, un 29% de manera aceptable y un 18% no lo logra. Cuando los estudiantes deben identificar procesos argumentativos, un 77% lo hace de manera excelente y un 23% no lo hace.
El tercer caso se desarrolla en un cuarto básico, donde se observa una discusión respecto de si la figura cambia de nombre cuando cambia de posición. Los alumnos deben identificar un par de figuras que tengan la misma forma. Uno de los estudiantes defiende que una figura no cambia de nombre al cambiar la posición (un cuadrado al girarlo sigue siendo un cuadrado, no un "diamante"). El 100% de los estudiantes responde correctamente la pregunta matemática "si un cuadrado se gira en 45º ¿Se transforma en un rombo?" y el 100% de los estudiantes identifica correctamente los elementos del modelo de Toulmin. La excepción corresponde al 63% que identifica la conclusión de la situación argumentativa de manera excelente y el 37% que lo hace de manera aceptable.

Análisis del impacto en los estudiantes

Para poder registrar el impacto que este proyecto causo en los estudiantes del optativo de profundización, se construye una escala de apreciación descriptiva que fue respondida por 16 de los 17 alumnos del curso, presentes el día de la aplicación. Los resultados permiten apreciar la impresión o grado de satisfacción que existe en los alumnos en relación a los acasos diseñados y posteriormente implementados en el curso.
El 94% de los estudiantes está "muy de acuerdo" en que los análisis de casos les servirán para mejorar su desempeño dentro del aula, sin embargo, el 31% de los estudiantes está "muy de acuerdo" en que se sienten más preparados para enfrentar la argumentación en el aula matemática, lo que genera una contradicción por parte de los estudiantes. El 81% de los estudiantes está "muy de acuerdo" con que los casos implementados han sido adecuados para ser analizados con respecto a la argumentación matemática, el 88% de los estudiantes con que los casos implementados han sido adecuados matemáticamente para ser analizados, el 63% de los estudiantes con que los casos implementados han sido adecuados para generar aprendizajes en los alumnos, el 88% de los estudiantes con que los casos implementados los han ayudado a comprender un proceso argumentativo, el 88% de los estudiantes con que los casos implementados les han servido para lograr identificar elementos de un proceso argumentativo y el 75% de los estudiantes con que los casos implementados les han servido para diferenciar argumentación de explicación.

Resultados

Uno de los resultados importantes es que los estudiantes del curso (optativo de profundización) demuestran gran facilidad para identificar los elementos del modelo de Toulmin, salvo la conclusión. De la misma forma, no les resulta complejo diferenciar procesos explicativos de los argumentativos. Esto ocurre porque los estudiantes tienen claro que si no existe refutación en un proceso que si presenta dato, garantía y conclusión, entonces el proceso es simplemente explicativo y en caso de existir refutación, entonces el proceso es argumentativo. Presentan mayor dificultad cuando al existir un proceso argumentativo incompleto, deben proponer una forma de gestionar la clase donde se busque completar dicho proceso.
Las preguntas que se relacionan con el contenido matemático en cuestión, son vitales para la discusión habitual de las sesiones, pues permiten generar discusión, confrontación de ideas y al mismo tiempo generar procesos argumentativos en el aula.

Los estudiantes demuestran gran conformidad con los resultados de la implementación. Gran parte de ellos está "muy de acuerdo" con que los casos implementados han sido adecuados para ser analizados matemática y argumentativamente, considerando que han generado nuevos aprendizajes. Los estudiantes defienden firmemente que los casos implementados han ayudado a comprender un proceso argumentativo, lograr identificar elementos de un proceso argumentativo y naturalmente también diferenciar argumentación de explicación.

Un porcentaje muy alto de estudiantes consideran que los estudios de caso les servirán para mejorar su desempeño dentro del aula, pero un porcentaje muy bajo se siente más preparado para enfrentar la argumentación en el aula matemática. Esto genera cierta confusión al interpretar los datos porque las respuestas son contradictorias. Sin duda, los estudios de caso son sólo un paso para poder generar situaciones argumentativas en el aula, lo que no significa que logren promoverla efectivamente de inmediato.

Es de gran relevancia, destacar que se evidencia un gran avance en los resultados del primer caso implementado por este proyecto y el último. A medida que los casos avanzan, los niveles de logro de las respuestas que se cumplen de manera deficiente y de los que no se cumplen disminuye, mientras que los niveles de logro de las respuestas que se cumplen de manera excelente y aceptable aumentan.

CONCLUSIONES

La implementación del proyecto y los resultados de él, llevan a concluir que existe evidencia para indicar que el diseño de estudios de casos ha mejorado el discurso y el conocimiento de interacciones argumentativas en el aula matemática. Esto es, porque los resultados de la revisión de los 3 casos diseñados y posteriormente implementados por el profesor que imparte, indican que los estudiantes son capaces de identificar elementos de un proceso argumentativo. El total de los estudiantes identifica la falta de refutador, la falta de fundamentación en un proceso argumentativo y la existencia del calificador de un proceso argumentativo. Los resultados indican que sólo entre un 43% y un 71% de los alumnos identifican correctamente la conclusión de una situación argumentativa.

Esto deja a los estudiantes muy conformes porque conocían sólo la explicación en el aula matemática y que el concepto de argumentación sólo lo conocían en la vida diaria o en otras asignaturas, pero no en matemática. Los resultados muestran que los alumnos son capaces de reconocer procesos argumentativos y procesos explicativos, ya que tienen claridad de que para que exista argumentación, debe existir refutación, siendo este un elemento esencial al momento de identificar si un proceso es argumentativo o no. De manera simultánea, los estudiantes tienen claridad de que "en la explicación los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento (Duval, 1992). Una explicación no contiene refutación, por lo que la totalidad de los estudiantes son capaces de identificar un proceso explicativo. También tienen claro que están en presencia de argumentación al "tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos" (MINEDUC, 2012).

Los estudiantes expresan que los contenidos matemáticos se afianzan con los casos, que sirven para profundizar aún más los contenidos y para relacionar el lenguaje matemático con el lenguaje que utilizan los alumnos. Consideran que los casos son apropiados para ser analizados tanto argumentativa como matemáticamente. Esto se puede explicar, porque las clases grabadas fueron previamente planificadas para que hubiese argumentación dentro de ella y los contenidos y preguntas matemáticas fueron confeccionadas de acuerdo al conocimiento que el profesor del electivo tiene de los alumnos, tanto en su formación matemática como personal. Es decir, las preguntas tenían cierta intención y se podían predecir las respuestas de los alumnos para generar discusión en la clase.

Finalmente, mediante la escala de apreciación los estudiantes transmiten qué tan conformes quedaron con el proyecto. Ellos demuestran gran satisfacción con la implementación realizada

porque se sienten más cercanos a la realidad docente, se sienten más preparados, pueden identificar errores y saben dónde poner más atención.
Para que los resultados sean aún más exitosos, se podría realizar un convenio donde en la práctica progresiva del estudiante, se pueda implementar una determinada cantidad de clases que promuevan argumentación en el aula matemática. Esto podría satisfacer a las necesidades del 31% de los estudiantes que indican estar "muy de acuerdo" en que se sienten más preparados para enfrentar la argumentación en el aula matemática, lo que genera una contradicción por parte de los estudiantes.
En general, los buenos resultados de la implementación se deben a diversos factores. En primer lugar y como factor más importante, fue la gestión del profesor al implementar los casos y su experiencia. La metodología utilizada ya era conocida por los estudiantes, por lo que fue fácil generar discusión entre ellos, prever posibles respuestas y por sobre todas las cosas, no entregar respuestas a los estudiantes sino que ser un guía en la discusión de las preguntas. Por otra parte los alumnos son muy participativos, analíticos y responsables con las tareas asignadas. Son parte importante de esta implementación y sin ellos, tal vez los resultados no hubiesen sido los mismos. Otro factor importante fue la elección de los contenidos matemáticos, pues debido a las características de los estudiantes se generó discusión y controversia entre los estudiantes.

Referencias

Alvarado, A. & González, M. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. In Enseñanza de las Ciencias (Vol. 28, pp. 0073-84).

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. Educational Studies in Mathematics, 86(3), 401-429.

Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive. Petit x, 31, 37-61.

Mineduc (2012). Bases curriculares 2012. Matemática Educación Básica. Chile: autor.

Alvarado Monroy, A., & González Astudillo, M. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. Enseñanza de las Ciencias (Vol. 28, pp. 0073-84).

OCDE (2013). PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I), PISA, OCDE.

Toulmin, S. (1958). The Uses of ArgumentCambridge University Press. Cambridge, UK.

TRAYECTORIAS CONSTITUIDAS Y EMERGENTES EN PRÁCTICAS DE MODELACIÓN DESDE UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Constituted and emerging and trajectories in modelling practices from a socio-epistemic approach

Sepúlveda, C[a].,Arrieta,J[b]., Díaz,L.[c]

[a]Universidad de las Américas, Chile;[b]U. Autónoma de Guerrero, México; [c]U. de Valparaíso, Chile
[a]csepulvedah@udla.cl, [b]jaime.arrieta@gmail.com, [c]leonora.diaz@uv.cl

Resumen

Se reportan diversas trayectorias de actividades que conducen a la articulación de entidades lineales numéricas, gráficas y algebraicas, que están presentes en el discurso matemático escolar. En esta línea, una trayectoriapresente en cursos de Geometría Analítica parte de una ecuación lineal, sigue con una tabla de datos numéricos y termina punteando una recta en el plano cartesiano.Trayectorias emergentes que articulan entidades lineales son construidas en el ejercicio de prácticas de modelación. Estas trayectorias emergentes se analizan y contrastan con las constituidas.

Palabras clave: *Trayectorias, algoritmos, modelación, lineal, Socioepistemología.*

Abstract:

The present work analyses a range of trajectories, paths and activities that lead to the articulation of numeric, graphic and algebraic linear entities present within the mathematical pedagogical[17] *discourse. In this line, the trajectory that originates from a linear equation, passing by a chart of figures, and ends tracing a straight line within the Cartesian plane, is a current strategy in analytic geometry courses. Emerging trajectories that articulate linear entities are a result of modelling practice exercises. The latter are analyzed and contrasted with the former.*

Key words:*trajectories, algorithms, modelling, linear, socio-epistemology.*

LA PROBLEMÁTICA

En este trabajo, instalados en la problemática que emerge de preguntarse cómo las prácticas de modelación se incorporan al aula de matemáticas y cobran cotidianidad, analizamos actividades que se desarrollan cotidianamente en el aula de matemáticas y actividades que se proponen para incorporarse al discurso matemático escolar. Algunas de estas actividades propuestas al paso del tiempo viven en el aula con modificaciones y otras no logran sobrevivir. Nos preguntamos sobre ¿cuáles son los procesos donde actividades que se incorporan al aula cobran cotidianidad?

Desde esta problemática incorporamos constructos que nos permitan analizar dichas actividades. Un constructo que ha resultado muy funcional es el de trayectorias de actividades. Dada una

actividad se desmenuza en sus actividades que la componen y se plantean las posibles rutas de ellas por medio de trayectorias de algoritmos de predicción.

De estás trayectorias de actividades distinguimos las constituidas de las emergentes. Las constituidas son aquellas que han cobrado cotidianidad y que con pocas variantes se encuentran en diferentes sistemas educativos. Las emergentes son las que se proponen para incorporarse al discurso matemático escolar, y que pueden constituirse a lo largo del tiempo y de la iteración de la trayectoria.

Por ejemplo, en los cursos de Geometría Analítica una trayectoria constituida que está presente, es la que parte de dar dos puntos al estudiante y a partir de estos datos, se grafica una recta y posteriormente se obtiene su ecuación o se obtiene la ecuación dela recta. Otro ejemplo de una trayectoria constituida es la de la figura 1, parte de la ecuación, los estudiantes construyen una tabla numérica dándole valores a *x,* se grafica la recta y posteriormente, en ocasiones, se ven diversas aplicaciones.

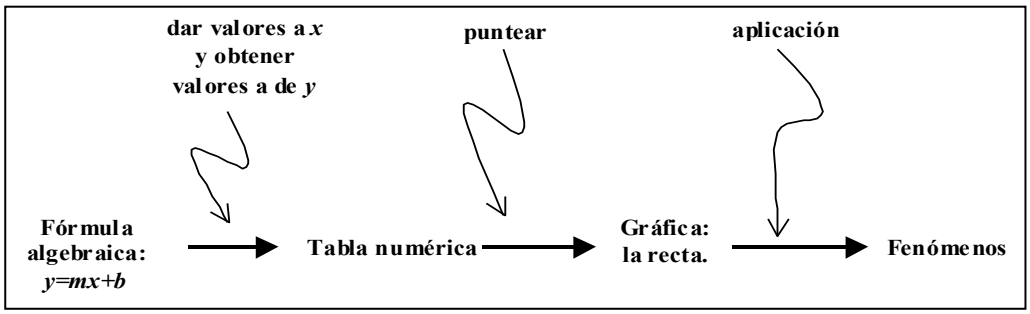


Figura 1. Trayectoria constituida. (Arrieta, 2003)

Socioespistemología

El marco teórico que soporta el presente trabajo es la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Según señala Cantoral (2013), esta aproximación responde a la construcción de nuestros sistemas conceptuales desde tres planos. El primero trata sobre la naturaleza misma del saber. Hablar del saber no se limita, en esta perspectiva, a definir la relación que este guarda con los objetos matemáticos, sino a posicionar al ser humano, en sus distintas dimensiones, en el acto mismo de construcción de sus sistemas conceptuales, su problematización. El segundo plano se ocupa de la práctica social como normativa de la actividad humana y como base de la construcción de nuestros sistemas conceptuales. Sus mecanismos funcionales. El tercer plano, el plano teórico, se ocupa de caracterizar las articulaciones teóricas, con una fuerte evidencia empírica, de nociones, procesos y términos del modelo de construcción social del conocimiento (Cantoral, 2013).

Desde la mirada socioepistemológica, nos distinguimos de perspectivas que aluden a las nociones matemáticas como objetos que precisen ser enseñados desde la obra matemática. En esta investigación privilegiamos la matemática como herramienta además provista de intenciones, de procedimientos y argumentaciones. Una matemática que propicia formas de actuar en contextos específicos.

La Socioepistemología es una aproximación sistémica que articula cuatro dimensiones principales para explicar la construcción y reconstrucción del conocimiento, a saber, lo epistemológico, lo cognitivo, lo didáctico y lo sociocultural (Figura 2).

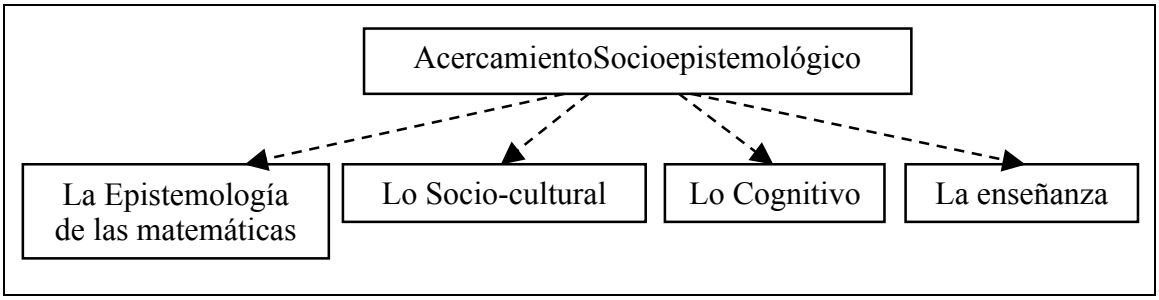


Figura 2. Acercamiento Socioepistemológico

Del mismo modo, Cantoral (2013), reafirma lo anterior diciendo que los estudios que involucran la Socioepistemología reportan características del ejercicio de prácticas que anteceden y acompañan la producción o construcción de conocimiento: nociones y conceptos, procedimientos y propiedades, que a su vez evolucionan hacia formas del saber socialmente establecidos.

Pudiendo así afirmar que la aproximación teórica Socioepistemológica involucra tanto a los estudiantes como a los profesores. Ambos actores construyen significados, construyen sus identidades, construyen sus realidades y su propia cognición.

Modelación

Desde nuestra perspectiva la modelación es una práctica recurrente que vive en diversas comunidades. Concebimos a la modelación como una práctica que articula dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas, llamado lo modelado, a partir de la otra, llamado el modelo. La diversidad, tanto de las entidades que intervienen en la articulación como de la naturaleza de la intervención, hacen posible identificar a la modelación como una práctica recurrente en diferentes comunidades (Arrieta y Díaz, 2015).

Una entidad se convierte en modelo cuando el actor lo usa para intervenir en la otra entidad, por lo que deviene en herramienta. Los entes matemáticos al modelar, son herramientas. Desde esta perspectiva el modelo no existe independiente de la actividad de quién modela.

La articulación de los entes iniciales da lugar a un nuevo ente, al modelo, *mo*, que resulta adherido a lo modelado, *ma*. Tal articulación constituye una nueva entidad para la vivencia de quien modela y que podemos denotar (*ma, mo*) y que nominamos ***dipolo modélico*** (DM).

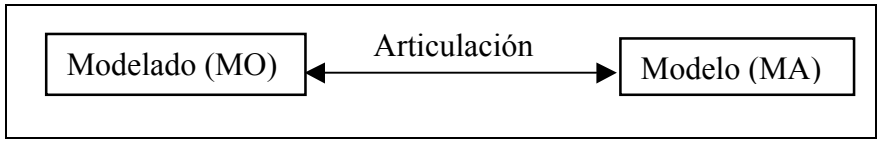


Figura 3. Acto de Modelar

Nos distinguimos de perspectivas de la modelación que entienden a esta como un acto de representar o bien a la realidad o bien a los objetos matemáticos.

> *Podemos dizer que, de modo geral, o termo 'modelagem matemática' refere-se à busca de umarepresentação matemática para um objeto ouum248fenómeno que pode ser matemático ounão* (De Almeida e Ferruzzi, 2009)

Para nosotros, la naturaleza de la modelación radica en la potencia que imprime la articulación y la intencionalidad de intervenir. Esto implica la necesidad de interactuar con la entidad en la que se desea intervenir, es decir la necesidad de la experimentación en sentido amplio. Sin embargo, la interacción con lo que se pretende modelar, no es suficiente para caracterizar a las prácticas de

modelación, esta suficiencia se establece con el acto de articular dos entes con la intención de intervenir en uno a partir del otro.

Lo lineal

Hacemos una distinción entre el objeto matemático función lineal y la red de modelos lineales articulada con el fenómeno modelado que llamamos ***lo lineal***. En este sentido, desde nuestra perspectiva, los modelos no solo lo son las expresiones analíticas, sino que lo son también las tablas de datos numéricos y las distintas gráficas.

Según señala Méndez (2008)

"Modelar linealmente un fenómeno, significa ejercer la práctica de modelación creando modelos lineales, como herramientas para predecir el comportamiento de éste. Algunos modelos lineales son los de carácter gráfico, numérico y algebraico."

Lo lineal corresponde a una red de prácticas y herramientas que se ejercen y construyen durante la práctica de modelación, esta red se muestra en la figura 4.

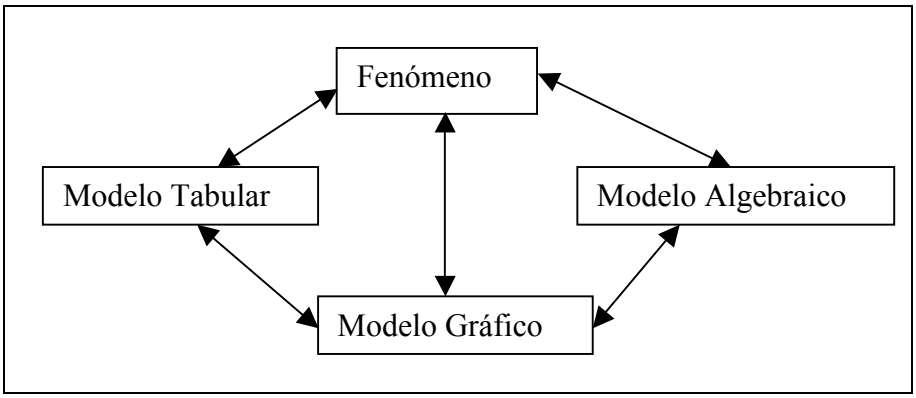


Figura 4. Lo lineal

Trayectorias emergentes

Hoy día la modelación ha cobrado relevancia en la matemática educativa, enseñanza de la matemática o didáctica de la matemática. Diversas aproximaciones y propuestas se han elaborado. Las trayectorias de actividades también son una herramienta que nos permite distinguir entre diferentes aproximaciones a la modelación en el sistema escolar a partir de las actividades propuestas a desarrollar en el aula.

Por ejemplo, analizamos la actividad que se presenta a continuación, extraído del libro de primero medio SM, entregado por el Ministerio de Educación el año 2014. (Libro SM, Ministerio de educación de Chile, 2014:134).

"*Marta y Samuel están realizando un experimento para aplicar la ley de Hooke, suspendiendo masas distintas en un resorte de un material determinado y registrando la fuerza ejercida por este y el estiramiento que se produce en él. A continuación se muestran los resultados."*(Figura1)

Fuerza (N)	Estiramiento(cm)
6	1,0
9	1,5
12	2,0
15	2,5
18	3,0

¿Con qué función se puede modelar la Ley de Hooke?



Figura1. Ejemplo Libro primero medio SM

En este ejemplo no sólo llama la atención los datos que se presentan en la tabla, sino también la forma que al estudiante se le presenta el problema y el modo de modelar la elasticidad de los resortes, ya que luego del enunciado se reduce el ejercicio a desarrollar dos pasos los cuáles se le presentan del siguiente modo:

"Paso 1: Identifica la relación de dependencia"

"Paso 2: Modela la situación con lenguaje algebraico y exprésala como función".

Se añade que primero deben calcular la constante de proporcionalidad que corresponde al cociente entre los correspondientes valores de la deformación y la fuerza, para luego obtener que la longitud del estiramiento se obtenga multiplicando la fuerza por la constante determinada en el segundo paso y de ese modo se representa la función asociada a tal fenómeno.

Identifica la relación de dependencia → **Modela la situación con lenguaje algebraico** → **Expresa la función que representa la elasticidad del resorte**

Esta forma de "modelar", en la cual el estudiante sigue una trayectoria algorítmica de tres pasos que va de los datos numéricos al lenguaje algebraico y a la función se distingue de otras.

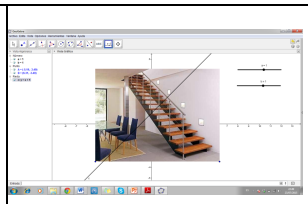
Otro ejemplo, del análisis de una actividad propuesta es la siguiente:

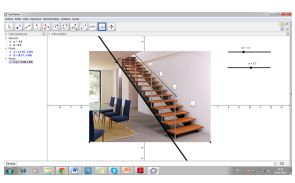
- ✓ Tome una fotografía de una escalera
- ✓ Pegue esta fotografía en una hoja de Geogebra
- ✓ Mueva los parámetros a y b de la ecuación $y = ax + b$ hasta que la recta se encime a la escalera

¿Cómo podrías saber la altura de la escalera?

Esta actividad está guiada por una trayectoria de actividades que emerge al implementar la modelación en el aula.







Emergencia del Modelo algebraico

Figura 6. Trayectoria de actividad emergente

Trayectorias de algoritmos de predicción en elmodelado del llenado de unrecipiente cilíndrico

Analizamos con detalle un diseño de aprendizaje basado en la modelación lineal del llenado de un recipiente cilíndrico (Méndez, 2008). Este trabajo lo delimitamos al análisis de las fases I y II del diseño, la Experimentación, y la Predicción. Delimitamos nuestro trabajo a estudiar las trayectorias de los algoritmos de predicción que los estudiantes construyen.

Hacemos hincapié en que no es lo mismo seguir algoritmos que construirlos, ya que para construirlos se tiene que entender cómo se realizan las tareas a profundidad para desmenuzarlas en acciones y volver a integrarlas, estructurándolas.

En el diseño de aprendizaje que analizamos distinguimos una trayectoria de actividades que lo soporta, particularmente en la fase de predicción, que si bien no es explícita, nosotros la reconstruimos (figura 7). Sin embargo, cuando se pone en escena el diseño esta trayectoria no es seguida por todos los actores. Existen diferentes rutas, que si bien llevan de un modelo numérico a un algebraico, esta no es única. Los estudiantes exponen sus diversas formas de predecir y en el debate surgen diversas formas de predicción y algunas prevalecen sobre otras.

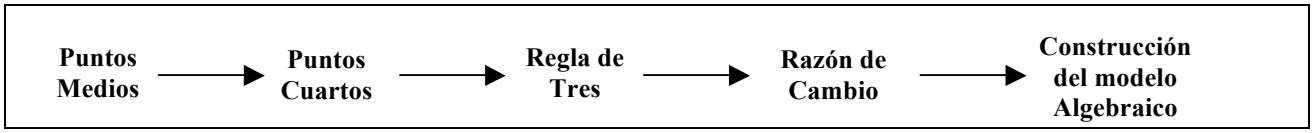


Figura 7. Trayectoria de algoritmos de predicción del diseño "Llenado de un recipiente cilíndrico"

El diseño se puso en escena con estudiantes de segundo año medio, de un Colegio Particular pagado de la ciudad de Santiago de Chile. La dinámica de la puesta en escena es trabajo en equipo, conformando 8 equipos de tres estudiantes cada uno de ellos, donde posteriormente se realizó una discusión grupal donde cada uno de los grupos presenta las formas de predecir a sus demás compañeros. El trabajo se realizó en un aula de matemáticas durante cuatro sesiones de 45 minutos cada una de ellas, donde el docente del curso de matemática, es participante de ésta investigación. Las producciones de los estudiantes que se recogieron son de tres tipos, documentos físicos, grabaciones de audio y de video. A partir del análisis de las producciones de los estudiantes se construyeron las diferentes trayectorias de algoritmos de predicción que los estudiantes construyen. Estas trayectorias de algoritmos no necesariamente son iguales a la planteada por el diseño.

A continuación se presentan las trayectorias construidas por los equipos:

Tabla 1. Trayectoria de algoritmos de predicción de los equipos 1, 2, 3 y 4

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
✓ Promedio ✓ Promedio del Promedio ✓ Puntos Décimos ✓ Razón de Cambio ✓ Construcción del modelo algebraico	✓ Puntos Medios ✓ Puntos Cuartos ✓ Puntos Quintos ✓ Razón de Cambio ✓ Construcción del modelo algebraico ✓ Uso del modelo	✓ Puntos Medios ✓ Puntos Cuartos ✓ Regla de tres ✓ Regla de tres ✓ Construcción del modelo algebraico ✓ Regla de tres	✓ Puntos Medios ✓ Puntos Cuartos ✓ Razón de Cambio ✓ Razón de Cambio ✓ Construcción del modelo algebraico ✓ Uso del modelo

✓ Uso del modelo algebraico ✓ Construcción del modelo gráfico (sin considerar posición inicial)	algebraico ✓ Construcción del modelo gráfico	✓ ____	algebraico ✓ Construcción del modelo gráfico

Tabla 2. Trayectorias de algoritmos de predicción de los equipos 5, 6, 7 y 8

Equipo 5	Equipo 6	Equipo 7	Equipo 8
✓ Puntos Medios /Regla de tres ✓ Puntos Cuartos /Regla de tres ✓ Regla de tres ✓ Regla de tres ✓ ____ ✓ Regla de tres ✓ Construcción del modelo gráfico	✓ Puntos Medios ✓ Puntos Cuartos ✓ Puntos Décimos ✓ Razón de Cambio ✓ Acercamiento a la construcción del modelo algebraico ✓ Uso del modelo algebraico ✓ Construcción del modelo gráfico	✓ Puntos Medios ✓ Puntos Cuartos ✓ ---- ✓ ---- ✓ ---- ✓ __ ✓ __ ✓ ___	✓ Puntos Medios ✓ Puntos Cuartos ✓ Puntos Décimos ✓ Razón de Cambio ✓ No logran la construcción del modelo algebraico ✓ Razón de cambio (sin considerar posición inicial) ✓ Construcción del modelo gráfico

En la tabla 1 y 2 se ilustran las trayectorias de actividades que articula un modelo numérico (tabla de datos numéricos) con el modelo algebraico a partir de diferentes algoritmos de predicción tal como ya se ha reportado en Sepúlveda, Arrieta y Díaz (2014), donde la trayectoria de algoritmos que emerge de la implementación de una práctica de modelación lineal en el aula corresponde a puntos medios, puntos cuartos, puntos décimos, razón de cambio, construcción y utilización del modelo algebraico y algunas variantes de lo anterior, siendo ésta trayectoria también utilizada por los equipos 6 y 8 en ésta investigación. El equipo uno construye otra trayectoria: promedio, promedio del promedio, puntos décimos, razón de cambio y construcción del modelo algebraico. Las trayectorias de los equipos 2 y 4 se acercan a la trayectoria de algoritmos implícita en el diseño. Las trayectorias de los equipos tres y siete no concluyen con la construcción del modelo algebraico. Las trayectorias de los seis equipos restantes siconfluyen en el modelo gráfico pasando por el modelo algebraico.

CONCLUSIONES

En este trabajo se muestra como el constructo de trayectoria de actividades es funcional para el análisis de las actividades de un diseño de aprendizaje basado en modelación lineal. En este sentido, al implementar la modelación lineal en el aula, se despliega el abanico de trayectorias que los estudiantes siguen al participar en la puesta en escena del diseño.

Una diferencia importante entre las trayectorias constituidas presentadas y las que emergen de la puesta en escena del diseño es su diversidad, sin llegar a impedir la construcción de consensos al

compartir y debatir acerca del actuar de los diferentes equipos. Si bien los equipos 3 y 7 no construyen los modelos algebraico y gráfico, en el debate ellos se apropian de los modelos construidos por los demás equipos.

En la discusión grupal donde se presentan las diferentes formas de predecir, que los estudiantes construyen, logra prevalecer una forma de predecir sobre las otras. Por ejemplo, el equipo 2, 6 y 8 presentan su forma de predecir de puntos medios, cuartos y décimos, sin embargo en el debate estos cambian a la forma de predecir que presentan los equipos 1 y 4 de razón de cambio, por su simplicidad y rapidez para hacerlo. Este proceso de cómo unas formas se retiran y otras prevalecen nos da indicios de cuáles son los mecanismos de la constitución de trayectorias de actividades emergentes, aun cuando, reconocemos, estamos lejos de ser concluyentes al respecto.

Referencias

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula (Doctoral dissertation, Tesis doctoral no publicada) México:Cinvestav.

Arrieta, J., Diaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18(1), 19-48. doi:10.12802/relime.13.1811

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa

De Almeida, L. y Ferruzzi, E. (2009). UmaAproximaçãoSocioepistemológica para a Modelagem Matemática. ALEXANDRIA Revista de EducaçãoemCiência e Tecnologia, 2 (2), pp.117-134.

Ministerio de Educación de Chile (2014) Matemática primero medio SM, Chile.

Méndez (2008). Un estudio de la evolución de las prácticas: la experiencia de modelar linealmente situaciones análogas. Tesis de Maestría en Ciencias no publicada. Guerrero, México: Universidad Autónoma de Guerrero.

Sepúlveda, C., Díaz, L., y Arrieta, J. (2014). Concurrencia de predicción y algoritmia en la modelación. Alme 27, Buenos Aires, Argentina: 1483-1490

UN ESTUDIO DE LAS INECUACIONES LINEALES DESDE EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

A study of linear inequalitiesfromspacemathematicalwork

Arévalo, B[a]. yRojas, T[b].

U. de Valparaíso, Chile
belen.arevalo9@gmail.com, tamara.rojas9@gmail.com

Resumen

Basándonos en la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), iniciada por Houdement y Kuzniak (1999, 2006) y más tarde ampliada por Kuzniak (2011), exponemos un estudio de las inecuaciones lineales, el cual tiene por objetivo principal analizar el espacio de trabajo matemático personal de los estudiantes, a través de situaciones que involucran el concepto de inecuación lineal, para elaborar una propuesta de enseñanza aprendizaje que potencie el espacio de trabajo personal de los estudiantes.

Palabras claves: *(Espacio de trabajo matemático, Inecuaciones lineales, Desigualdades)*

Abstract

Based on the theory of Mathematical Working Space (MWS), first postulated by Houdement and Kuzniak (1999, 2006) and later extended by Kuzniak (2011), a study of lineal inequations is here in exposed. Its main objective is to analyze the personal mathematical working space of the students through situations that involve the concept of "linear inequation" in order to elaborate a teaching/learning proposal that would upgrade the students' personal work space.

Keywords:*(mathematicalworkspace , linear inequalities , inequalities)*

INTRODUCCIÓN

En el sistema educativo Chileno, el tema de inecuaciones lineales es tratado en cuarto año de enseñanza media, donde los alumnos aprenden a resolver inecuaciones a través de algoritmos establecidos, por lo que el desarrollo de este conocimiento es principalmente de carácter procedimental.

En este sentido la problemática que abordamos en esta investigación gira en torno al concepto de la inecuación lineal a nivel escolar donde observamos se privilegia un tratamiento algebraico, es decir, se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas que buscan "despejar" una variable, tal como se hace para las ecuaciones, pero cuidando respetar las propiedades de la desigualdad, como la multiplicación por -1, lo cual genera que las inecuaciones carezcan de sentido.

Las preguntas que guían nuestro estudio son las siguientes:

- ¿Qué concepciones tienen los estudiantes de enseñanza media y universitaria sobre el concepto de inecuación lineal?
- ¿Cuáles son los tipos de tareas que se presenta a los estudiantes tanto en evaluaciones nacionales (PSU) como en los documentos oficiales: Programa de estudio y textos escolares que involucran el concepto de inecuación lineal?

- ¿Cómo es el trabajo matemático de los estudiantes de enseñanza media y estudiantes universitarios respecto a las inecuaciones lineales?

El sustento didáctico con el que abordamos la problemática descrita es el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), teoría que considera el trabajo matemático como el resultado de un proceso progresivo de génesis que permite la articulación interna de los planos cognitivos y epistemológicos.

Para el desarrollo de nuestro estudio adoptamos elementos de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) como metodología de investigación en el siguiente sentido:

- En el análisis preliminar, se realiza un estudio del concepto inecuación lineal, considerando el marco curricular vigente, programas de estudio, actividades sugeridas en los textos escolares. Además de investigaciones que dan cuenta de obstáculos y dificultades en el aprendizaje y enseñanza de este concepto y aspectos epistemológicos asociados.
- Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, esta fase consta de dos etapas aplicación de cuestionario exploratorio y elaboración de una propuesta de enseñanza aprendizaje a partir de los resultados del instrumento exploratorio
- Experimentación y análisis a posteriori, en esta fase se implementa la propuesta y se realiza un análisis de las producciones de los estudiantes a la luz de nuestro marco didáctico ETM.

Espacio de trabajo matemático

Como elemento teórico tomamos la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), iniciada Houdement y Kuzniak (1999, 2006) llamada Paradigmas y Espacio de Trabajo Geométrico y más tarde ampliada a otros dominios de la matemática por Kuzniak (2011), donde se distinguen dos planos, el cognitivo y el epistemológico, la articulación de estos dos planos es mediante un conjunto de Génesis: Génesis Semiótica, Génesis Instrumental y Génesis Discursiva.

El plano epistemológico del ETM, contempla tres componentes: representamen, artefactos y referencial teórico. El plano cognitivo contempla las componentes: visualización, construcción y prueba. Tanto las génesis, como las componentes de los planos, deben ser reinterpretadas dependiendo del dominio matemático en cuestión.

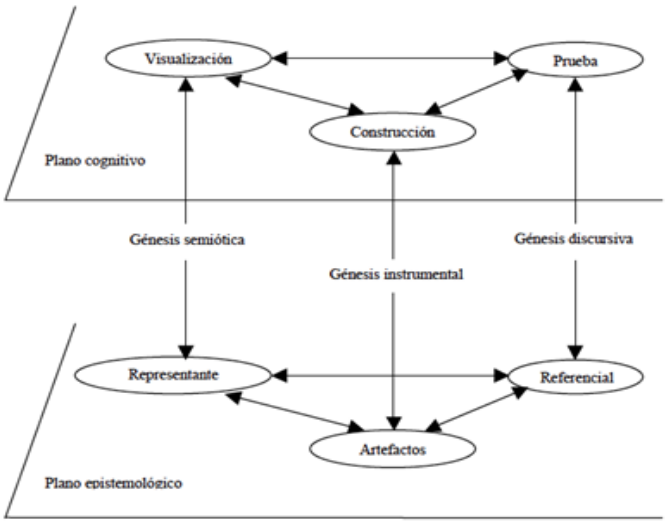


Figura 1. Esquema del ETM (Kuzniak, 2011)

A partir de la definición de las componentes, junto a las génesis que las articulan, se definen tres tipos de Espacio de Trabajo Matemático:

- *ETM- de referencia*: Se refiere al espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios matemáticos. Se dice que el utilizador es un experto epistémico. Se puede considerar como el ETM institucional de la comunidad de los matemáticos.
- *ETM- idóneo*: Se refiere al espacio definido en términos didácticos, es decir, en este espacio se concibe la reflexión sobre la reorganización didáctica de las componentes del espacio de trabajo.Un utilizador natural de este ETM es el profesor.
- *ETM- personal*: Se refiere al espacio definido por el fruto de la reflexión entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica por el geómetra, de acuerdo a sus conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas.Un utilizador natural de este ETM es el alumno.

En este estudio analizaremos las tareas y producciones de los estudiantes, desde el es *ETMpersonal*, pues enfrentaremos al propio individuo a tareas que involucran el concepto inecuación lineal y estudiaremos su propia circulación por las componentes del *ETM.*

Ingeniería didáctica como metodología de investigación

Nuestro estudio se apoya en fases de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), método de investigación de corte cualitativo que se caracteriza fundamentalmente porque sus productos son construidos a partir de un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, y además se ubica en los registros de los estudios de caso y cuya validación es interna, es decir, basada entre la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

El proceso experimental de la Ingeniería Didáctica consta de cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, experimentación y finalmente el análisis a posteriori y evaluación.

En este estudio se desarrollan algunas de sus fases considerando nuestro objetivo principal, analizar el espacio de trabajo matemático personal de los estudiantes, a través de situaciones que involucran el concepto de inecuación lineal, para elaborar una propuesta de enseñanza aprendizaje que potencie el espacio de trabajo personal de los estudiantes.

Fases de la investigación

- Análisis preliminar

En el programa de estudio y en los textos escolares se da cuenta que el trabajo propuesto para las inecuaciones es más bien de tipo algebraico, es decir, se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas que buscan "despejar" una variable, tal como se hace para las ecuaciones. Además, podemos observar que el desarrollo propuesto para el tema de las inecuaciones no favorece el estudio de las gráficas cartesianas, al respecto solo hemos encontrado el uso del dibujo de los intervalos para encontrar el conjunto solución de una inecuación.

El tema de las inecuaciones ha sido tratado en diversas investigaciones relacionadas con su enseñanza. Borello (2010), trata el problema de la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones, señalando que las inecuaciones se tratan como un tema desvinculado de las desigualdades, lo cual genera que carezcan de significado y que al momento de operarlas se trabaje inapropiadamente como una ecuación.

Por su parte Alvarenga (2006) realiza una propuesta para la enseñanza de las inecuaciones, señalando que "la enseñanza-aprendizaje del concepto inecuación en los últimos años de la escuela primaria, secundaria, preparatoria y de la licenciatura debe abarcar actividades que involucren resolución en el contexto gráfico, uso de tablas, relación con las funciones, aplicaciones prácticas, empleo de las propiedades de los reales, análisis de equivalencias e implicaciones, uso de calculadoras gráficas o computadora." (p.151).

- Concepción y Análisis a priori de las situaciones didácticas

Con el objetivo de caracterizar el espacio de trabajo matemático personal de los estudiantes en torno al concepto de inecuación lineal, se elabora un cuestionario exploratorio considerando tipos de tareas propuestas en textos escolares, programas de estudio y de prueba de selección universitaria (PSU).

Para la implementación de este cuestionario se invita a dos estudiantes de primer año de la carrera de Matemática y ocho estudiantes de primer año de la carrera de Informática de una Universidad estatal de la región de Valparaíso.

Por otro lado se considera a estudiantes de tercer año de enseñanza media, invitando a dos estudiantes de un liceo municipal y seis estudiantes de un establecimiento particular subvencionado.

En cuanto a la metodología de trabajo fue mediante binomios, ya que esto nos permitió ver la interacción entre los estudiantes al enfrentarse a este tipo de problemas.

De los resultados obtenidos pudimos evidenciar que para la resolución de inecuaciones lineales los estudiantes solo realizan procedimientos algebraicos, presentando deficiencias para interpretar las soluciones obtenidas, lo cual permite inferir obstáculos referentes a la argumentación teórica, además de presentar falencias para modelar situaciones a través de inecuación lineal.

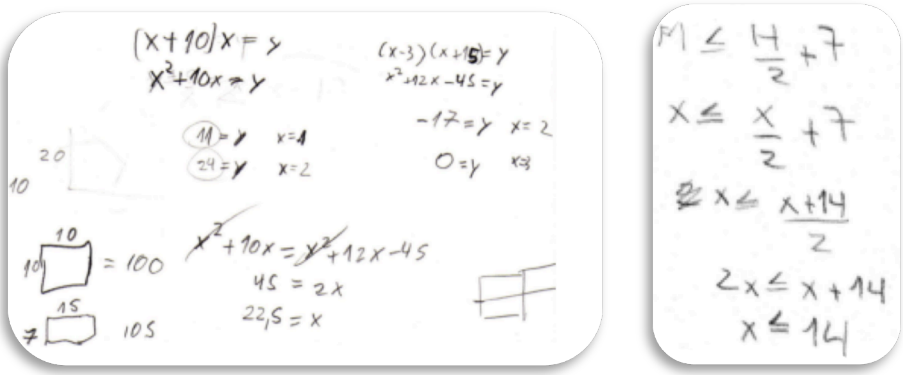


Figura 2. Producciones Binomios

Para el caso particular de la pregunta cuatro del cuestionario aplicado solo a estudiantes universitarios, se observa que estos presentan dificultades a la hora de trabajar desigualdades a partir de su representación gráfica, pues solo un binomio logró acercarse a lo esperado.

En términos teóricos, desde el ETM, se evidencia que existe una desarticulación entre las tres génesis, potenciándose tanto la génesis instrumental como la génesis semiótica, quedando debilitada la génesis discursiva.

Además con el fin de conocer las concepciones que tienen los estudiantes respecto a los conceptos de desigualdad e inecuación lineal, se pide a los estudiantes responder dos preguntas en forma individual: la primera de ellas ¿Cómo defines una desigualdad?¿Y una inecuación? y la segunda ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

De lo anterior pudimos dar cuenta respecto al concepto de desigualdad que todos los estudiantes tienen la noción de que se trata de "cosas distintas", además de dar cuenta de que los estudiantes no tienen una noción clara del concepto de inecuación y que para desarrollar una inecuación lineal describen solo procesos algebraicos y gran parte de los estudiantes indican explícitamente que se desarrolla "casi igual" que una ecuación.

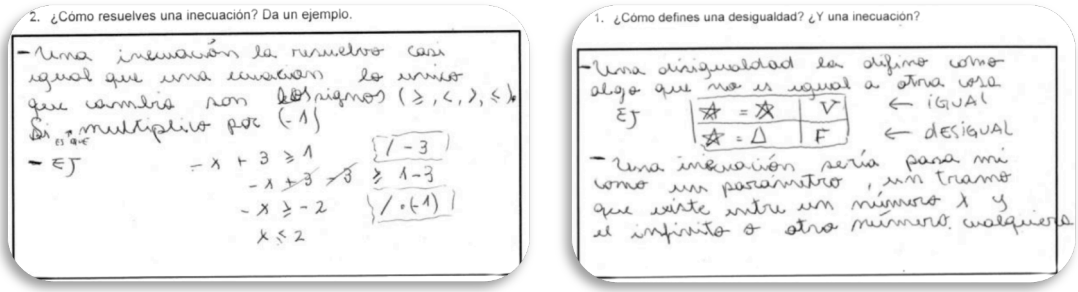


Figura 3. Producciones Binomio Universitario

- Elaboración de la Propuesta

A partir de los resultados del cuestionario se elaboró una propuesta de enseñanza-aprendizaje cuya finalidad es trabajar en el análisis de inecuaciones lineales bajo un enfoque gráfico cartesiano, con el fin de dar sentido a las inecuaciones lineales, además de justificar el método algebraico utilizado por los estudiantes. Desde el punto de vista del ETM, al incorporar el enfoque gráfico al trabajo algebraico, se busca la activación de la *génesis discursiva*, para así favorecer la articulación entre las tres *génesis*.

Esta propuesta de enseñanza-aprendizaje consta de dos momentos, en un primer momento los estudiantes deben analizar por medio del software GeoGebra el comportamiento gráfico de las funciones, para posteriormente hallar el conjunto solución de una inecuación lineal a partir de la gráfica.

Para el segundo momento se espera que el estudiante encuentre el conjunto solución de una inecuación lineal sin contar con su expresión algebraica, para ello en primera instancia se hace entrega de dos gráficas en mica por separado, con el fin de que las superpongan. Posteriormente se hace entrega de dos gráficas por separado sin la posibilidad de superponerlas.

- Experimentación y análisis a posteriori

La implementación de la propuesta se desarrolló en dos días distintos para cada momento respectivamente, en donde los estudiantes se tomaron el tiempo que estimaron conveniente. Esta fue aplicada a cuatro estudiantes de tercer año de enseñanza media de un liceo municipal, la metodología de trabajo fue en binomios.

Para el momento uno se pudo evidenciar que el Binomio 1 desconocía que para graficar rectas en el software GeoGebra bastaba con escribir dicha recta en la "entrada", por lo que ellos optaron por realizar una tabla de valores para hallar puntos y de esta manera graficar las rectas en GeoGebra. En un principio utilizaron tabla de valores y la gráfica respectivamente para dar respuesta a lo pedido, pero después solo se apoyaron en la gráfica, salvo para el último ítem en donde realizaron un trabajo algebraico para encontrar lo solicitado, utilizando la gráfica solo como un método de comprobación.

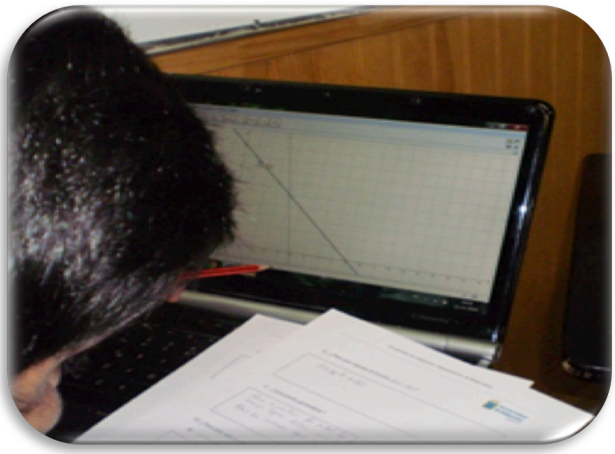


Figura 4. Producciones Binomio 1

El Binomio 2 no presentó ninguna dificultad para graficar en el software GeoGebra, apoyándose sólo en la gráfica para dar respuesta a lo solicitado salvo cuando tenían que tratar con números que no eran enteros, recurrían hacer trabajo algebraico.

Mientras que para el momento dos los binomios de estudiantes una vez entregada las gráficas en mica inmediatamente las superpusieron, encontrando así el conjunto solución, de igual manera para las dos preguntas restantes en las cuales no tenían la posibilidad de superponer las gráficas, no presentaron dificultades para hallar el conjunto solución.



Figura 5. Producciones Binomio 2

CONCLUSIONES

El presente estudio sustentado de un marco teórico, ETM, que apunta a potenciar distintos trabajos matemáticos que se dan a partir de una tarea, nos permitió abordar a nuestra problemática

La entrevista semiestructurada, nos permitió identificar que tanto estudiantes de enseñanza media como universitarios dominan parcialmente el concepto de desigualdad, ya que lo asocian con la noción de "cosas distintas" pero no logran precisar con exactitud dicho concepto.

Por otro lado se evidenció que los estudiantes no tienen una concepción clara del concepto de inecuación lineal, ya que para dar una definición recurren a explicar el conjunto solución, haciendo énfasis en que no se obtiene un único valor sino un conjunto de valores, además relacionan

fuertemente la ecuación con la inecuación lineal, indicando que esta última se resuelve "casi igual" que una ecuación cuidando de respetar las propiedades de desigualdad.

El cuestionario aplicado a estudiantes universitarios y de enseñanza media, permitió caracterizar e identificar el trabajo matemático de estos se evidenció que para la resolución de inecuaciones lineales los estudiantes solo realizan procedimientos algebraicos, presentando deficiencias para interpretar las soluciones obtenidas, lo cual permite inferir obstáculos referentes a la argumentación teórica, además de presentar falencias para modelar situaciones a través de inecuación lineal. Para el caso particular de la pregunta cuatro del cuestionario aplicado solo a estudiantes universitarios en donde debían trabajar con gráfica de funciones, se observa que estos presentan dificultades a la hora de trabajar desigualdades a partir de su representación gráfica, pues solo un binomio logró acercarse a lo esperado.

Tomando en cuenta los resultados arrojados se evidenció que el estudio de inecuaciones lineales muchas veces es reducido a un algoritmo repetitivo, es decir, se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas que buscan "despejar" una variable, tal como se hace para las ecuaciones, lo cual ocasiona que los estudiantes a pesar de ser capaces de encontrar el conjunto solución no consigan justificar el algoritmo utilizado y que las inecuaciones lineales carezcan de significado. Es por ello elaboramos una propuesta de enseñanza-aprendizaje bajo un enfoque gráfico (cartesiano) con el fin de dar significado a las inecuaciones lineales, además de justificar el método algebraico utilizado por los estudiantes. Desde el punto de vista del ETM, al incorporar el enfoque gráfico al trabajo algebraico, se busca la activación de la *génesis discursiva*, para así favorecer la articulación entre las *tres génesis.*

Los resultados obtenidos de la propuesta de enseñanza-aprendizaje aplicada a estudiantes de enseñanza media fueron satisfactorios, ya que los estudiantes rápidamente comprendieron cómo obtener el conjunto solución a partir de la representación gráfica de funciones contando con las expresiones algebraicas y en otras solo el trazado de las rectas entregados en gráficos distintos, durante su desarrollo no se presentaron grandes dificultades, más bien el trabajo se dio de forma natural. Permitiendo a los estudiantes dar sentido al trabajo algebraico y a su vez dotar de significado a las inecuaciones lineales

Referencias

Balacheff N. (1987). Processus de preuveetsituations de validations.Educationalstudies in mathematics, 18 (2), 147-176.

Borello M. (2010). Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico. (Tesis para obtener el grado de Doctorado en matemática educativa, Instituto Poltécnico Nacional) Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/borello_2010.pdf

Borrello M. (2007). Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte. (Tesis para obtener el grado de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa). Recuperada de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/borello_2007.pdf

Breindenbach, D. et al. (1992). Development of the process of function.Educational Studies in Mathematics, vol.23,247-285.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiquesenseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221–266.

Duval, R. (1995).Sémiosisetpenséehumaine.Éditions Peter Lang, coll. Berne: Exploration, Recherches en sciences de l'éducation.

Houdement C. &Kuzniak A. (2006).Paradigmesgéométriques et enseignement de la géométrie. Annales de didactique et de sciences cognitives,11, 175-193.

Houdement C., Kuzniak A. (1999). Géométrie et paradigmesgéométriques. Petit x, 51, 5-21.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de TravailMathématique et sesgenèses. Annales de didactique et de sciencescognitives, 16, 9-24.

Ministerio de Educación, (2009). Marco Curricular Enseñanza Media (Actualización 2009), Santiago, Chile.

Peirce, C. (1978). Ecrits sur le signe. Paris: Seuil.

Rabardel, P. (1995). Les Hommes et les Technologies. Une approchecognitive des instruments contemporains. París: ArmandColin.

APROXIMACIÓN A LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN EN EL MARCO DEL ESTUDIO DE CLASES

Approach to the construction of the multiplication concept under lesson study

Avilés, P.[a], Cisternas, A.[b], Millie, M.[c], Olfos, R.[d], Rojas, G.[e], Romero, C.[f], Tapia, M.[g]

[a]Escuela Palestina; [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
escuelapalestina@gmail.com[a]; raimundo.olfos@pucv.cl[b]

Resumen

Este artículo da cuenta de una investigación que se centró en dos aspectos confluyentes: el mejoramiento de la enseñanza del concepto de multiplicación, que los alumnos evidencian haber aprendido de modo inadecuado e incompleto, y el desarrollo profesional de profesores de educación básica de establecimientos de dependencia municipal. La investigación acción buscaba favorecer el desarrollo de las capacidades de los profesores para elaborar e implementar una propuesta de enseñanza efectiva del concepto de multiplicación en el marco de Estudio de Clases. El estudio se sustentó en los fundamentos teóricos de la Teoría de la Transposición Didáctica y el Estudio de Clases. Los resultados reportados muestran progresos de los profesores en la profundización en el concepto de multiplicación y en el mejoramiento de las capacidades de enseñanza para la construcción del concepto de multiplicación en los alumnos.

Palabras clave: *concepto de multiplicación, Estudio de Clases, desarrollo profesional colaborativo.*

Abstract

This article reports on an investigation that focuses on two converging aspects: improving teaching the concept of multiplication, evidence that students have learned so inadequate and incomplete, and the professional development of teachers basic education establishments dependence municipal. The action research sought to promote the capacity building of teachers to develop and implement an effective teaching proposal multiplication concept under Lesson Study. The study was based on the theoretical foundations of the theory of didactic transposition and Lesson Study. The reported results show progress of teachers in deepening the concept of multiplication and improvement of teaching skills to build the concept of multiplication in students.

Keywords: *concept of multiplication, lesson study, self-improvement*

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo nace como respuesta a la necesidad identificada por profesores, que se desempeñan en escuelas municipalizadas, que atienden a niños y niñas en situación de vulnerabilidad. Reconociendo desde la practica en las aulas como problemática de investigación el escaso o incompleto aprendizaje del concepto de multiplicación observado en los alumnos. En esta investigación se articulan dos procesos: la elaboración de una tesis de Magíster en Didáctica de las Matemáticas y la implementación de un plan de perfeccionamiento docente, inserto en el Proyecto de Mejoramiento Educativo de una escuela municipalizada, como una acción para mejorar la

efectividad de la enseñanza de los conocimientos matemáticos y así elevar los niveles de aprendizaje de los estudiantes.

En este contexto se constituyó un equipo conformado por seis profesoras, con el objetivo llevar adelante una investigación acción basada en el Estudio de Clases. Los profesores participantes realizaron una revisión de la información sobre el tema constatando que los resultados en el aprendizaje de la multiplicación muestran deficiencia en estudiantes de distintos países (Castro, 1995; Fernández, 2007; Chamorro, 2011; Redondo, 2011), la enseñanza se encuentra centrada en la repetición y memorización del algoritmo estándar (Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007; Lotero et al, 2011). Además, informes internacionales señalan que los profesores trabajan aisladamente y sin vinculación con sus pares, evidenciando una ausencia de reflexión y crítica colaborativa que enriquezca la práctica docente (Barber y Mourshed, 2007; UNESCO, 2013).

Una de las preguntas de investigación fue ¿cómo podemos facilitar el proceso de construcción del concepto de multiplicación en los alumnos? El objetivo general de la investigación fue: "favorecer el desarrollo de las capacidades de los profesores para elaborar e implementar una propuesta de enseñanza efectiva de la multiplicación en el marco del Estudio de Clases". También, a partir del marco teórico, establecimos los siguientes objetivos específicos: 1) Favorecer en los profesores del equipo de Estudio de Clases una comprensión más profunda del concepto de multiplicación; 2) Promover en los profesores del equipo Estudio de Clases mejoramiento de las capacidades de enseñanza; y 3) Elaborar e implementar una propuesta de enseñanza efectiva para la construcción del concepto de multiplicación en los alumnos. En este artículo nos referiremos a los objetivos específicos 1 y 2.

Marco teórico y metodológico

Los fundamentos teóricos utilizados para sustentar nuestro proceso de investigación y generar una propuesta de enseñanza efectiva de dicho conocimiento matemático, fueron la Teoría de la Transposición Didáctica y el Estudio de Clases japonés.

La teoría de la Transposición Didáctica facilitó a los investigadores una manera nueva de ver la problemática a estudiar: el reconocimiento del fenómeno didáctico de la "irresponsabilidad matemática de los alumnos". El contrato didáctico utilizado en las aulas a investigar entregaba toda la responsabilidad al profesor. Al compartir la investigadora principal la teoría de Transposición Didáctica con las profesoras participantes, éstas profundizaron en el conocimiento matemático desde una perspectiva epistemológica y didáctica para generar una propuesta de enseñanza que favoreciera una aproximación que responsabiliza a los alumnos en la construcción del concepto de multiplicación. Las profesoras fueron cuestionadas en relación a su comprensión acerca del concepto de multiplicación (suma iterada, cantidades de grupos, noción de unidad, repetición o amplificación de la unidad), diferenciándolo del algoritmo para multiplicar, constatándose un cuestionamiento epistemológico.

El Estudio de Clases Japonés, como marco teórico que explica el cambio en la comprensión del profesor a partir de la reflexión colectiva en el "estudio" de una clase, ha evidenciado ser efectivo como instancia de perfeccionamiento continuo entre los profesores, permitiendo llevar a la práctica una enseñanza de calidad para todos los estudiantes. La efectividad se puede inferir de los excelentes resultados obtenidos por los alumnos japoneses en las mediciones internacionales sobre conocimientos matemáticos (Isoda, Arcavi & Mena, 2008).

El equipo de Estudio de Clases estaba conformado por tres de profesoras de educación básica y tres profesoras de educación diferencial que se desempeñan en Programa de Integración Escolar (P.I.E.). Los alumnos que participaron en las implementaciones de las clases fueron de cuatro

escuelas básicas que aceptaron nuestra invitación, permitiendo al equipo de profesores ingresar a la sala de clases.

Los instrumentos que se utilizaron para recoger la información en el proceso de la investigación para su posterior análisis fueron: pre y postest para profesores en base a un cuestionario (anexo 1), grabaciones de las clases implementadas y sus respectivos planes, pre y postest para alumnos, registros escritos de los alumnos durante la clase. En este artículo abordaremos los resultados de pre y postest para profesores.

a) Pre y postest para profesores para determinar variaciones en las concepciones respecto al objeto matemático: multiplicación constituido por cuatro ítems, se establecieron cuatro categorías de análisis en directa relación con los objetivos y preguntas del instrumento. Las categorías son: 1) Ideas sobre la multiplicación; 2) Análisis los procedimientos de los alumnos; 3) Ideas sobre la enseñanza de los conocimientos relacionados con la multiplicación (tablas de multiplicar, algoritmo, propiedades, uso y/o funcionalidad); y 4) Representaciones de los profesores relacionadas a la palabra veces. De ellas, 1 y 4 tienen su foco en el concepto de multiplicación, permitiendo dar respuesta al objetivo específico "favorecer la comprensión más profunda del concepto de multiplicación en los profesores del equipo de Estudio de Clases"; 2 y 3 permitirán establecer si se cumple el objetivo específico "promover el mejoramiento de las capacidades de enseñanza en los profesores del equipo Estudio de Clases". Para la revisión se realizó análisis de contenido de las respuestas de cada profesor en cada pregunta. Se diseñó una rúbrica de avances o progresos a partir de las categorías de análisis (ver anexo 2), las respuestas en relación a los progresos o cambios fueron valorados de la siguiente manera: Mantiene= 0; Progreso poco significativo= 1; y Progreso significativo= 2. De acuerdo estos puntajes también, se pueden identificar los progresos respecto a los objetivos específicos sumando las puntuaciones en las categorías: 1 y 4 para el primer objetivo; 2 y 3 para el segundo objetivo, los resultados son valorados: Mantiene= 0; Progreso poco significativo= 1; Progreso Significativo= entre 2 y 3; Progreso muy significativos= 4.

b) Grabaciones de las clases implementadas y sus respectivos planes. Usando los vídeos los profesores revisan y analizan las clases e introducen las modificaciones en el plan. Se espera que en la comparación de los planes preparados reconocer la evolución de la clase hasta estabilizarse, consiguiendo que las actividades y preguntas que la estructuran se mantengan porque ser coherentes y precisas en la consecución del objetivo como una propuesta de enseñanza que favorece la construcción del concepto de multiplicación.

Cabe señalar que los datos cualitativos que emergieron para el análisis fueron de naturaleza predominantemente verbal y de carácter local, pues las experiencias implementadas se realizaron para responder a la problemática reconocida desde nuestras propias prácticas en las salas de clases a partir de la estructura recursiva del Estudio de Clases como un tipo de investigación acción, esto es, preparación de la clase, implementación y revisión para introducir modificaciones en el plan de clase, y volver a repetir el ciclo sucesivamente hasta estabilizar el plan.

La investigación acción se inicia en octubre de 2014 con una charla realizada por el profesor guía de tesis sobre el Estudio de Clases. Durante la preparación del plan el equipo realiza 11 sesiones. En esta etapa lo más difícil fue dar continuidad a las sesiones y conseguir que un profesor asumiera la responsabilidad de hacer la primera clase. En la etapa de implementaciones de la clase, lo que presento mayor dificultad fue encontrar la escuela en que el profesor a cargo de la clase se sintiera con un cierto nivel de agrado y confianza; también, conseguir que la Dirección del establecimiento elegido por el profesor abriera las puertas de su escuela para que el equipo de profesores ingresáramos a observar y grabar la clase. La primera clase se realizó en el mes de abril de 2015, el equipo de profesores contó con el apoyo del profesor guía de tesis en la discusión de la clase, constituyéndose en el momento más significativo del proceso que estábamos viviendo. Incluso los

profesores relacionaron esta experiencia con la evaluación docente y la forma de observar una clase para introducir mejoras y enriquecer la enseñanza. Se realizaron 4 implementaciones de la clase con sus respectivos planes. Desde la tercera clase el Plan se estabiliza.

Resultados

Para determinar el impacto de la experiencia vivida mediante el proceso de Estudio de Clases en los profesores, se procedió a comparar sus respuestas en pre y postest para identificar si se mantenían o modificaban sus ideas, respecto al concepto de multiplicación y su enseñanza, entendidas como progresos o avances cualitativos.

En la comparación de las respuestas del Profesor 1 en pre y postest, se observa: Progresos poco significativos con ideas sobre la multiplicación centradas en la relación con la suma y como una operación que aumenta, asimismo, incorpora la idea de repetición. Progresos significativos para el análisis de procedimientos usados por los alumnos, al principio no veía o no entendía las maneras de resolución usada por los estudiantes, en el postest cambia pasando a valorar las distintas formas de procedimiento. Progresos significativos en la enseñanza de conocimientos relacionados con la multiplicación, para las tablas de multiplicar agrega la repetición, para el algoritmo en ambas oportunidades señala estrategias genéricas y agrega las partes, mantienen las ideas para la enseñanza de las propiedades, transita de lo lúdico a la problematización para uso y/o funcionalidad. Mantiene las representaciones relacionadas a la palabra veces.

Al comparar las respuestas del Profesor 2 en pre y postest, se observa: Progresos poco significativos las ideas sobre la multiplicación inicialmente están centradas en la suma y en la estructura, después pasa a incorpora la idea de unidad y la representación geométrica. Progresos poco significativos en el análisis de procedimientos usados por los alumnos mantiene sus ideas respecto a la posibilidad de resolver una multiplicación de formas distintas. Progresos poco significativos para la enseñanza de conocimientos relacionados con la multiplicación, para las tablas de multiplicar incorpora la idea de grupos; para el algoritmo agrega consensuar otorgando un rol más activo y más responsabilidad a los alumnos; para las propiedades, uso y funcionalidad mantiene las mismas ideas. Progresos significativos agrega dos nuevas representaciones asociada a palabra veces.

En las respuestas del Profesor 3 en pre y postest, se observa: Progresos significativos en las ideas sobre la multiplicación al inicio estaban centradas en la técnica, en el postest han pasado a centrarse en el concepto, también, mantiene la idea de la economía de la suma y como un trabajo más simple. Progresos significativos para el análisis de procedimientos usados por los alumnos, transita de no reconocer pasando a valorar los distintos procedimientos empleados. Progresos significativos en la enseñanza de conocimientos relacionados con la multiplicación, para las tablas de multiplicar identifica la regularidad; para el algoritmo mantiene el foco en la técnica; para las propiedades cambia de lo general a lo particular; y transita del uso a funcionalidad. Mantiene sin asociar la palabra veces con multiplicación.

La siguiente tabla muestra los progresos desde los objetivos específicos de la investigación.

Tabla 1. Respuestas de los profesores a partir de los objetivos

OBJETIVOS ESPECÍFICOS					
1.- Favorecer la comprensión más profunda del concepto de multiplicación en los profesores del equipo de Estudio de Clases			2.- Promover el mejoramiento de las capacidades de enseñanza en los profesores del equipo Estudio de Clases		
Ítem 1	Ítem 4	Progresos	Ítem 2	Ítem 3	Progresos

P1	1	0	Poco significativo	2	2	Muy Significativo
P2	1	2	Muy Significativo	1	1	Significativo
P3	2	0	Significativo	2	2	Muy Significativo

CONCLUSIONES

Al finalizar este artículo basado en una investigación acción en el marco del Estudio de Clases, retomamos la pregunta ¿cómo podemos facilitar el proceso de construcción del concepto de multiplicación en los alumnos? **y** el objetivo general "favorecer el desarrollo de las capacidades de los profesores para elaborar e implementar una propuesta de enseñanza efectiva de la multiplicación en el marco del Estudio de Clases", sustentada en la consecución de objetivos específicos, siendo posible a la luz de los resultados obtenidos en el transcurso de la investigación concluir que:

Para el primer objetivo específico, "favorecer la comprensión más profunda del concepto de multiplicación en los profesores del equipo de Estudio de Clases", considerando las respuestas en pre y postest a las preguntas 1 y 4, que indagaban en el concepto de multiplicación, específicamente, en las ideas relacionadas a la multiplicación y las representaciones asociadas a la palabra veces, los resultados indican que los tres profesores tienen progresos, que nos llevan a señalar que el proceso de trabajo colaborativo y reflexivo entre los profesores ha permitido enriquecer o modificar sus ideas respecto a este conocimiento matemático. Los profesores han ganado en su conocimiento disciplinario que podrán poner en juego en la preparación de la enseñanza.

Para el segundo objetivo específico, que buscaba "promover el mejoramiento de las capacidades de enseñanza en los profesores del equipo Estudio de Clases", tomando en cuenta las respuestas de los profesores a las preguntas 3 y 4, que apuntaban a reconocer ideas en torno a la enseñanza, es posible señalar que los profesores presentaron avances significativos y muy significativos para este objetivo. Esto nos permite afirmar que han incorporado o modificado sus ideas acerca de la enseñanza de los conocimientos asociados a la multiplicación lo que debería influir positivamente en el proceso de aprendizaje de los alumnos. Los profesores han ganado en su conocimiento pedagógico didáctico.

Dados los resultados es posible sostener que se ha cumplido con los objetivos específicos, lo que conlleva el logro del objetivo general de la investigación. También debemos señalar que Estudio de clases es una poderosa herramienta para mejorar la calidad de la enseñanza de matemáticas como proceso de autoperfeccionamiento entre profesores en ejercicio en escuelas de dependencia municipal.

Referencias

Barber, M. y Mourshed, M. (2008). ¿Cómo hicieron los sistemas educativos con mejor desempeño del mundo para alcanzar sus objetivos? Recuperado de http://www.oei.es/pdfs/documento_preal41

Bosch, M.; Castro, E.; Segovia, I. (2007). El pensamiento multiplicativo en los primeros niveles. PNA, 1(4), 179-190.

Boggino, N. y Rosekrans, K. (2004). "Investigación-acción: reflexión crítica sobre la práctica educativa. Orientaciones prácticas y experiencias". Homosapiens Ediciones.

Castro, E.; Rico, L.; Castro, E. (1995). "Estructuras aritméticas elementales y su modelización". Grupo editorial Iberoamérica. México.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona, Spain: ICE/Horsori.

Isoda, M (2011) El estudio de clases: enfoques sobre la resolución de problemas en la enseñanza de matemáticas en la experiencia japonesa. "Mejoramiento escolar en acción". Centro de Investigación Avanzada en Educación. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Salesianos impresiones S.A. Chile.

Isoda, M, Arcavi, A. & Mena, A. (2008) "El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global". Ediciones Universitarias de Valparaíso. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Lara, B.; Mizala, A.; Repetto, A. (2010). Una Mirada a la Efectividad de los Profesores en Chile. Revista Estudios Públicos, vol. 120, 147-182. Recuperado de http://www.cepchile.cl/dms/archivo

Lotero, L.; Andrade, E.; Andrade, L. (2011). La crisis de la multiplicación: Una propuesta para la estructuración conceptual. Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, Vol. 2, N° especial, 38-64. Recuperado de http://www.dialnet.unirioja.es/descarga/articulo

UNESCO. (2013). Antecedentes y Criterios para la Elaboración de Políticas Docentes en América Latina y el Caribe. Recuperado de http://www.unesdoc.unesco.org

Anexo 1

CUESTIONARIO PARA PROFESORES

Nombre:……

Curso en que trabaja:…… Años experiencia docente:……..……..

1.- Escriba en 6 líneas, lo más que pueda, acerca de la MULTIPLICACIÓN.

2.- ¿Qué opina de los siguientes procedimientos usados por los estudiantes?

Estudiante A 37 x 41

37
148
1517

Estudiante B 37 x 41

123
287
1517

3.- Complete la siguiente tabla.

APRENDIZAJE DE:	¿CÓMO ENSEÑA O ENSEÑARÍA A ?
Tablas de multiplicar	
Algoritmo de la Multiplicación	
Propiedades de la multiplicación	
Funcionalidad o uso de la multiplicación	

4.- Muestra tres maneras de representar "3, cuatro veces".

Anexo 2

Rúbrica para Cuestionario de Profesores

Rúbrica con indicadores de avances o progresos a partir de las categorías de análisis, las respuestas en relación a los cambios son valorados: Mantiene=0; Progreso poco significativo=1; y Progreso significativo=2.

Pregunta 1 **Categoría: Ideas sobre la multiplicación**		
MANTIENE	**PROGRESO POCO SIGNIFICATIVO**	**PROGRESO SIGNIFICATIVO**
Mantiene ideas iniciales acerca de la multiplicación.	Incorpora ideas no centradas en el concepto de multiplicación.	Incorpora ideas centradas en el concepto de multiplicación.

Pregunta 2 **CATEGORÍA: Análisis de los procedimientos de los alumnos**		
MANTIENE	**PROGRESO POCO SIGNIFICATIVO**	**PROGRESO SIGNIFICATIVO**
En pre y postest reconoce los procedimientos usados por los alumnos.	Pasa de no reconocer a identificar uno de los procedimientos.	Pasa de no reconocer a identificar los dos procedimientos.

Pregunta 3 **CATEGORÍA: Ideas sobre la enseñanza de los conocimientos relacionados con la multiplicación**		
MANTIENE	**PROGRESO POCO SIGNIFICATIVO**	**PROGRESO SIGNIFICATIVO**
Mantiene las ideas de enseñanza en todos los conocimientos relacionados con la multiplicación.	Incorpora ideas de enseñanza en uno o dos conocimientos relacionados con la multiplicación.	Incorpora ideas de enseñanza en tres o más conocimientos relacionados con la multiplicación.

Pregunta 4 **CATEGORÍA: Representaciones de los profesores relacionadas a la palabra veces.**		
MANTIENE	**PROGRESO POCO SIGNIFICATIVO**	**PROGRESO SIGNIFICATIVO**
Mantiene las representaciones para la palabra veces.	Incorpora una nueva representación para la palabra veces.	Incorpora dos o más representaciones para la palabra veces.

CONSTRUCCIÓN DE TEORÍAS LOCALES SOBRE LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VARIABLE: UN CASO DE ESTUDIO DE CLASES

Autor: Sergio Morales[a],Raimundo Olfos[b], y Soledad Estrella[c]
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Correos electrónicos: Sergio.morales.candia@gmail.com, raimundo.olfos@pucv.cl, soledad.estrella@gmail.com

Resumen

Esta investigación se focaliza en un caso de estudio de clases que aborda la enseñanza del concepto de variable como número generalizado. El estudio busca identificar y describir los conocimientos y actividades de aprendizaje que desarrollan profesores durante el proceso de estudio de clases sobre el concepto de variable como número genérico, identificando la teoría de enseñanza local (TLE) que emerge en dicho proceso. Para recolectar datos se emplearon cuestionarios, entrevistas, y notas de campo de las sesiones de estudio de clases, dando como resultado una TLE que sustenta las actividades definidas por los docentes para que un alumno avance enla construcción de la variable como número genérico. La investigación da orientaciones sobre el potencial del Estudio de Clases para que los profesores desarrollen conocimientosy teorías para la enseñanza de la matemática.

Palabras clave: e*studio de clases, variable, algebra elemental, teoría local de enseñanza.*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas distintos investigadores han realizado estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental, evidenciando con ello que la matemática escolar es reducida frecuentemente a la simple aritmetización. En este sentido el álgebra escolar es interpretada como aritmética generalizada dado que involucra la formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas (Socas, 2011). Esta noción de álgebra como aritmética generalizada, promueve comprensiones erróneas y limitadas del uso de los símbolos algebraicos y genera obstáculos en la comprensión del concepto de variable. Kieran (1989) señala que al iniciar el estudio del álgebra, los alumnos ya cuentan con nociones y enfoques empleados en aritmética, que utilizan para generalizar la aritmética al álgebra. La autora agrega que el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética pues requiere de un cambio en el pensamiento del alumno desde las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones, y que por esto, extender las nociones y enfoques empleados en aritmética conlleva obstáculos en la comprensión del álgebra elemental.

Un ejemplo de ello fue extraído durante la observación de una clase. Aquí un profesor pregunta en voz alta al curso "¿puedo transformar 9 plumones a un término algebraico?" recibiendo como respuesta de un alumno "9p". Tanto la pregunta como la respuesta evidencian una interpretación de la letra como etiqueta que está presente en el discurso en las aulas escolares, y que aleja al alumno del sentido algebraico del término "9p" entendido como la concatenación de "9xp" (Kieran, 1989) y del uso de "p" para representar una variable.

Anterior al trabajo de Kieran (1989), Küchemann (1981) había encontrado que la mayoría de los alumnos trataban las letras en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas –número desconocido- más que como números generalizados o como variables. Este autor menciona en su estudio que el 55% de los niños de 13 años encuestados afirmaron que la igualdad L+M+N=L+P+N

nunca es cierta. Booth (1982, 1983) encontró una fuerte resistencia de los alumnos para asimilar la noción de letra como número generalizado. Ya en 1983, Kieran evidenció que algunos alumnos no pueden asignar significado alguno a "a" en la expresión a+3 porque la expresión carece de un signo igual y de un miembro de la derecha. Love (1986), mencionó que el álgebra tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son esencialmente algebraicos, como por ejemplo, manejar lo desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. El autor agrega que ser consciente de esos procesos, y controlarlos, es pensar algebraicamente.

A partir de los años noventa, el panorama de la investigación reflejaba una insatisfacción generalizada sobre las formas tradicionales de la enseñanza del álgebra, dadas las dificultades y errores que tenían los alumnos.

Kieran (2006) organiza en tres grandes núcleos los trabajos asociados a la enseñanza del álgebra realizados en las tres últimas décadas de investigación: transición de la aritmética al álgebra, uso de herramientas tecnológicas, y el pensamiento algebraico en los alumnos. Adicionalmente, Kieran (2007) aporta una revisión de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria, mostrando formas de construir significados para los símbolos algebraicos y su manipulación.

En otros estudios vinculados al uso y comprensión de la variable algebraica Martz (1982), Usinski (1988) y Trigueros (1999) señalan que a los alumnos les cuesta apropiarse de la esencia del concepto de variable, debido a que se utiliza en diferentes contextos con diferentes significados. Atendiendo a ello, dependiendo del contexto tratamos el concepto de variable de diferente manera. Como consecuencia de la variedad de significados asociados a este concepto, los alumnos manifiestan dificultades para pensar de manera flexible entre los distintos usos de la variable reportados por Ursini (1994) a los que se refirió como incógnita, número generalizado y relación funcional. En la misma línea, Ursini (2008) ofrece una propuesta de enseñanza del álgebra elemental y un breve análisis del álgebra impartida en secundaria, describiendo los distintos usos dados a las letras o variables en un contexto de álgebra elemental.

Los antecedentes anteriores no solo dan cuenta de las contribuciones de los investigadores en cuanto a la comprensión de problemáticas asociadas al aprendizaje del álgebra como lo es la comprensión del concepto de variable, si no también dan cuenta de la preocupación permanente por aportar con teorías de enseñanza y aprendizaje. A pesar de los estudios asociados al aprendizaje y la enseñanza del álgebra, Socas (2011) advierte que son muy pocos los países y profesores que interpretan y desarrollan propuestas curriculares que incorporan aspectos relevantes de los resultados de la investigación. Esto hace necesario poner atención a las dificultades que existen actualmente para que los profesores puedan aprender de los hallazgos de la investigación y puedan aplicarlos en la instrucción, pues los profesores carecen de tiempo para buscar resultados de las investigaciones e integrarlos a sus prácticas. Por tanto, es fundamental buscar alternativas que permitan a los profesores aprovechar los conocimientos construidos por otros, o bien buscar espacios de colaboración para que los profesores, por si mismos, construyan conocimientos y teorías sobre la enseñanza de la matemática que den solución a las problemáticas de su propio contexto.

Este estudio se enfoca en la problemática de la enseñanza y aprendizaje del concepto devariable como número general (en adelante nos referiremos a él como variable) y busca evidenciar que los profesores a partir del Estudio de Clases son capaces de construir por sí mismos conocimientos y teorías acerca de la enseñanza y aprendizaje de la variable.

Estudio de clase

Una alternativa eficaz y viable para que los profesores transformen sus prácticas y consigan aprendizajes efectivos en sus alumnos es el Estudio de Clases japonés. Autores como Stewart y Brendefur (2005) han indagado en sus potencialidades, llegando a afirmar que el Estudio de Clases

ofrece una oportunidad para generar auténticos logros de aprendizaje en los alumnos. Corcoran y Pepperell (2011) complementan la idea anterior reportando que el Estudio de Clases también fomenta el desarrollo colectivo del conocimiento matemático en los profesores. Los autores anteriores ponen de relieve la potencialidad del Estudio de Clases para abordar problemáticas como la propuesta en este estudio desde toda su complejidad, dado que además de permitir que los profesores construyan colectivamente conocimientos sobre un concepto matemático, su enseñanza y aprendizaje, también podría contribuir a una transformación de la enseñanza tradicional de la matemática generando así verdaderas oportunidades de aprendizaje en los alumnos.

Teoría de instrucción local

El Estudio de Clases consiste en una actividad científica que desarrollan profesores, al interior de una escuela, buscando construir sus propias teorías para desarrollar y compartir buenas prácticas (Isoda, 2012). Esta definición hace referencia al uso del Estudio de Clases en el desarrollo de teorías para construir buenas prácticas. En esta investigación utilizaremos el concepto de "Teoría de Enseñanza Local" (TLE), el cual varios autores han definido como un marco de referencia que dirige la toma de decisiones de un profesor respecto de la selección y diseño de actividades de enseñanza, es decir, las TLE no se refieren a las actividades de enseñanza que funcionan, sino a una descripción de cómo funcionan dichas actividades (Cobb et al., 2003; Edelson, 2002; Gravemeijer & Cobb, 2006).Para Gravemeijer (1998) las TLE[18] son producto de la investigación del diseño de secuencias de enseñanza desarrolladas en un proceso iterativo de constante experimentación y revisión, es por eso que resulta posible establecer una relación directa entre una TLE y el Estudio de Clases, ya que este último es una actividad científica que permite construir lecciones de enseñanza por medio de un proceso cíclico basado en la experimentación y revisión continua de una clase. En este sentido el Estudio de Clases puede constituirse en un medio para que los profesores construyan, desde la escuela, TLE que sustenten el diseño de lecciones prototípicas para enseñar por ejemplo, el concepto de variable.

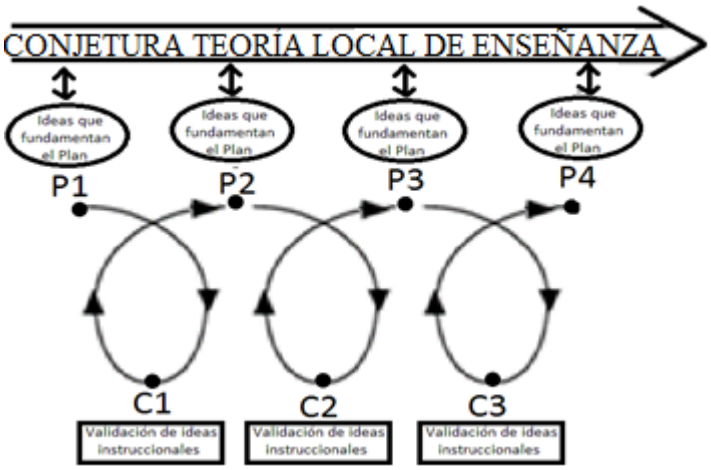


Figura 1: Proceso de construcción de una Teoría Local de Enseñanza (TLE) a partir del Estudio de Clases

La Figura 1 describe el proceso con el cual un grupo de profesores que implementa un Estudio de Clases construye una TLE respecto de la enseñanza:

En la Figura 1, se observa comoel plan de clases inicial (P1), es mejorado consecutivamente (P2, P3 y P4) en función de la implementación sucesiva de las clases C1, C2 y C3. Cada Plan de Clases es sustentado por las ideas de enseñanza de los profesores que lo diseñaron, las que son validadas a partir de su respectiva implementación. Estas ideas constituyen marcos de referencia que guían la toma de decisiones de los profesores respecto del diseño y organización de una lección plasmada en el plan, los cuales pueden ser entendidos como el núcleo de una TLE, que a medida que se pule durante el proceso de Estudio de Clases permite ir construyendo –robusteciendo- una TLE respecto del diseño de una clase prototípica que cumpla con cierto objetivo.

[18]Gravemeijer se refiere a las TEL como "Local Instruction Theory".

Cada implementación valida las ideas instruccionales que sustentan el plan de clases. La insatisfacción de los profesores respecto del cumplimiento del objetivo propuesto lleva a invalidar algunas de las ideas de enseñanza que fundamentaban el plan, esto implica un análisis de parte de los profesores con el objetivo de comprender las razones por las cuales la clase no funcionó como estaba prevista, llevando a modificar el plan. Como resultado del proceso, las ideas de enseñanza que fundamentaban el éxito del plan cambian, ya sea porque son mejoradas o porque son sustituidas por otras. En cambio, cuando el objetivo de la clase satisface las expectativas de los profesores, el proceso se estabiliza. Lo cual indica que las ideas de enseñanza que fundamentan el plan han orientado adecuadamente la toma de decisiones de un grupo de profesores para construir una clase efectiva. En este nivel, las ideas de enseñanza o más bien el marco que sustenta la propuesta corresponde a una TLE, respecto del cumplimiento de un cierto objetivo, que ha sido construida y validada a partir de la investigación y práctica al interior de una escuela.

Metodología

El presente estudio centra su interés en analizar cómo algunos profesores de Chile podrían llegar a construir conocimientos y teorías para la enseñanza del álgebra elemental desde la escuela. Los antecedentes evidencian que las investigaciones y actividades de enseñanza propuestas por investigadores para abordar la aritmetización del álgebra escolar parecen no tener mayor influencia en la escuela. Es por ello que con el fin de determinar un medio para que los profesores, por si mismos, construyan conocimientos y teorías sobre la enseñanza fue seleccionado un grupo de profesores que implementa Estudio de Clases, dentro de su escuela, con el objetivo de interpretar y describir la TLE del concepto de variableizado que construyen los profesores durante el proceso.

Para llevar a cabo este estudio nuestro trabajo se basó principalmente en la observación y la toma de registro, esto permitió mirar e inspeccionar rigurosamente el proceso de estudio de clases para así identificar los conocimientos que construyen los profesores durante este proceso.

La investigación es de carácter cualitativa, y el caso en estudio corresponde a un Estudio de Clases que experimenta un grupo de profesores sobre el concepto de variable.

Dadas las características del grupo, la actividad científica que desarrollan, y la accesibilidad del investigador a la institución y al GEC-INSUCO es que este grupo es considerado ideal para llevar a cabo el estudio. El GEC-INSUCO está compuesto por 8 profesores de matemática, 5 mujeres y 3 hombres, cuya experiencia como profesor de aula varía entre 1 y 41 años, de los cuales serán estudiados solo dos profesores, con 1 y 13 años de experiencia como profesor respectivamente. Las sesiones fueronsemanales, con una duración aproximada de 60 minutos.

El proceso de estudio de clases se extendió por 13 sesiones. Se obtuvo dos versiones del plan de clase (una inicial y una final) que se implementaron en dos cursos diferentes, con una semana de diferencia entre cada implementación.

Las clases fueron implementadas por los mismos profesores, y observadas por 7 de los 8 profesores que participaron en la planificación uno de ellos se encargó de filmarlas y el resto asumió tareas como contrastar la implementación con el plan de clase, indagar en las producciones de los alumnos en búsqueda de dificultades, errores no previstos en el plan, entre otros.

Para recoger datos se aplicó un cuestionario, una entrevista, y se recogiólos Planes de Clases. El cuestionario y la entrevista fueron elaborados con las mismas preguntas de base y aplicados a cada profesor con dos semanas de diferencia con el objetivo de validar la estabilidad del discurso de los informantes. Cada instrumento buscaba por un lado identificar aquellos conocimientos asociados a las actividades o tareas clavesque debían experimentarlos alumnos durante la clase, y por otro, identificar las justificaciones o fundamentos que dan los profesores a dichas actividades o tareas. A partir de lo anterior el investigador conjeturó la TLE acerca de la variable construida por los profesores, para dar fundamento a las actividades o tareas claves de la clase diseñada.

Para analizar el cuestionario,el texto fue dividido en unidades de análisis compuestas por ideas centrales identificadas por el investigador, con ellas fue construido un discurso descriptivo respecto las actividades o tareas consideradas por los profesores como claves para una clase sobre la variable, y teorías personales acerca de la enseñanza de la variable.

A partir del Plan de Clases fueron identificadas las principales actividades o tareas que experimentaban los alumnos en la clase que los llevan a comprender el concepto de variable, así como el orden en el que debían ser planteadas; lo cual fue complementadocon los datos recogidos previamente en el cuestionario.El producto resultante corresponde a una conjetura sobrela trayectoria de aprendizaje sobre el concepto de variable, que según los profesores, debían seguir los alumnos para comprender dicho concepto.Esta trayectoria compuesta por actividades y tareas consideradas como claves por los profesores, sería utilizadaposteriormente en la entrevista, para identificar las teorías personales de enseñanza, de los profesores, sobre el concepto de variable.

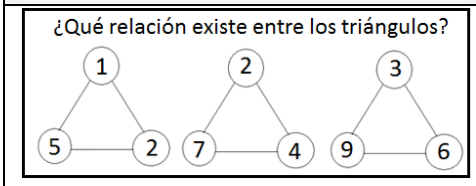
La entrevista realizada dos semanas después de aplicado el cuestionario permitió por un lado identificar nuevamente las teorías personales de enseñanza del concepto de variable, las cuales fueron utilizadas para complementar y validar las TPE de la variable identificadas a partir del cuestionario, y por otro, permitió identificar y describir la TLE sobre la variable construida por los profesores durante el proceso de estudio de clases.

La validación de las teorías personales de enseñanza sobre el concepto de variable se realizó mediante cuadros comparativos que ayudaron a analizar la estabilidad del discurso de los profesores entre el cuestionario y la entrevista. La estabilidad en el discurso de cada informante dio viabilidad a la teoría personal de enseñanza y contribuyó a su robustecimiento. Finalmente, las teorías personales de enseñanza complementadas, dieron origen a laTLE sobre el concepto de variable construida por los profesores durante el proceso de estudio de clases.

CONCLUSIONES

Se observó que, en el transcurso de 14 días, las teorías personales de enseñanza de cada integrante, sobre el sentido y los fundamentos de las actividades y tareas claves de la clase eran estables en un 100%, esto evidencia una construcción de conocimientos tanto en P1 como en P2.

El cuadro siguiente compara los fundamentos que dan P1 y P2 respecto de una de las actividades consideradas como claves para la clase:

<table>
<tr><td colspan="3">Actividad f de la trayectoria de aprendizaje diseñada por el grupo de profesores


¿Cuál es el triángulo de lugar 65?</td></tr>
<tr><td>Informante 1</td><td>Informante 2</td><td>Componentes invariantes</td></tr>
<tr><td>Esta actividad aumenta el nivel de dificultad, dado que el alumno debe buscar un triángulo que está más lejos. Fue pensada para que algunas de las estrategias empleadas en casos anteriores no fueran prácticas de usar, y así estimular a los alumnos para que establezcan relaciones entre los vértices de cada triángulo, lo</td><td>La actividad aumenta la complejidad, preguntando por un triángulo que está más alejado para evitar que construya uno a uno para dar con la respuesta. Lo anterior busca focalizar la atención del alumno en las relaciones entre los</td><td>1) Aumenta el nivel dificultad al preguntar por un triángulo que está más alejado. [hay fluctuaciones en el nivel de dificultad]
2) Busca evitar el uso de estrategias que no son prácticas para este caso, como por ejemplo, aquella que implica construir uno</td></tr>
</table>

cual le permitirá responder más rápido.	vértices de cada triángulo.	a uno para dar la respuesta. 3) El foco de la actividad está en estimular al alumno para focalizar su mirada en las relaciones que hay entre los vértices de cada triángulo.

En el recuadro se observan coincidencias en los fundamentos de P1 y P2 declarados para la actividad "f", evidenciando así una construcción colectiva de conocimientos teóricos comunes, entre los integrantes del Grupo de Estudio de Clases, en este caso acerca de los fundamentos y del sentido de la actividad "f"; las coincidencias en el discurso de P1 y P2 también se observan al comparar los fundamentos que dan del resto de actividades y tareas claves que componen la clase.

Estos hallazgos dan evidencia de la capacidad de los profesores para diseñar propuestas de clases con fundamentos, construidos mediante la investigación en el proceso de Estudio de Clases, y que apuntan a la solución de problemáticas de enseñanza y aprendizaje complejas, como lo es el del concepto de variable. Problemáticas escolares que muchas veces no son resueltas por las investigaciones científicas tradicionales.

En resumen, se observó que en el transcurso de 14 días las teorías de enseñanza personales de cada integrante, que se refieren al sentido y los fundamentos de las actividades y tareas de la clase, eran estables en un 100% esto evidencia una construcción de conocimientos tanto en P1 como en P2. También, se observó que las teorías personales de enseñanza construidas por cada profesor en el marco del Estudio de Clases, eran comunes entre sí, en un 100%. Lo cual sienta las bases para el desarrollo de esta teoría dentro de la misma institución escolar que le dio vida. Estableciendo una posible línea de fortalecimiento profesional que apunte al desarrollo de conocimientos y habilidades para abordar problemas complejos de la enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental.

Agradecimientos a FONDECYTNº 11140472

Referencias

Booth, L. (1982). Developing a teaching module in beginning algebra. Proceedings of the Sixth International Conference for the Phychology of mathematics Education. Antwerp.

Booth, L. (1983). A diagnostic teaching programme in elementary algebra: Results and implications. En Hershkowitz, (eds.), 307-312.

Cobb, P., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2003). Learning about statistical covariation. Cognition and Instruction, 21(1), 1–78.

Corcoran, D., & Pepperell, S. (2011). Learning to Teach Mathematics Using Lesson Study. In Rowland, T & Ruthven, K., (Eds.), Mathematical Knowledge in Teaching, New York: Springer.

Edelson, D. C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. Journal of the Learning Sciences, 11, 105–121.

Gravemeijer, K. (1998). Developmental research as a research method. En J. Kilpatrick & A. Sierpinska (Eds.), Mathematics education as a research domain: A search for identity, 277–295. Dordrecht: Kluwer Academic.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from the learning design perspective. En J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Eds.), Educational design research, 17–51. London: Routledge.

Kieran, C. (1983). Relationships between novices's views of algebraic letters and their use of symmetric and asymmetric equation-solving procedures. En Bergeron y Herscovics, (eds.), Proceedings of the 5 th Annual Meeting of PME-NA, 161-168, Montreal, Canada: Universite´de Montreál.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran. Research agenda for mathematics education: Vol. 4. Research issues in the learning and teaching of algebra, 33-56. Hillsdale: Erlbaum.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education, 11-50. Rotterdam: Sense.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. En Lester, F. K. (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. 707-762. Reston: NCTM e IAP.

Kuchemann, D. (1981). Algebra Un Hart. En M.B.K, Children's understanding of mathematics, 102-119. London: John Murray.

Lewis, C., & Tsuchida, I. (1997). Planned educational change in Japan: The case of elementary science instruction. Journal of Educational Policy, 12, 313-331.

Love, E. (1986). What is algebra?. Mathematics Teaching, 117, 48-50.

Martz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En D. Sleeman & J. S. Brown (Eds.), Intelligent tutoring systems, 25-50. New York: Academic Press.

Socas, M. (2011). La enseñanza del algebra en la educación obligatoria. Números, 77, 5-34.

Stewart, R. A., & Brendefur, J. L. (2005). Fusing lesson study and authentic achievement: A model for teacher collaboration. Phi Delta Kappan, 86(9), 681-687.

Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). La Conceptualización de la Variable en la Enseñanza Media. Educación Matemática, 27-48.

Ursini, S. (1994). Pupils' Approaches to Different Characterizations of Variable in LOGO. PhD Thesis. University of London Institute of Education.

Usinski, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Virginia: The Council.

VALIDACIÓN DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL CONCEPTO DE INDUCCIÓN MATEMÁTIC[1]

Validation of a genetic decomposition of the concept of mathematical induction

García-Martínez, I.[a], Parraguez-González, M[b].

Universidad Católica del Norte, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; correos electrónicos: igarcia@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

Con base en la descomposición genética hipotética de inducción matemática presentada en el trabajo de García y Parraguez (2015),se analizan las producciones de doce estudiantes universitarios, para sustentar cuáles de las construcciones mentales que propone la descomposición genética hipotética, muestran los estudiantes. El análisis de los resultados de la aplicación de los instrumentos, indica que la descomposición genética reformulada es viable. A partir de dicha descomposición genética, se sugieren elementos para una secuencia de enseñanza de inducción matemática en la universidad.

Palabras clave: *inducción matemática, teoría APOE, descomposición genética, validación.*

Abstract

Based onthe hypothetical genetic decomposition presented in the work of Garcia and Parraguez (2015), the productions of twelve undergraduate students are analyzed to support which of the constructions proposed by the hypothetical genetic decomposition, are shown by the students. The analysis of the results of applying instruments indicates that the hypothetical genetic decomposition is viable. From that genetic decomposition, elements for a teaching sequence of mathematical induction in college are suggested.

Keywords: *mathematical induction, APOS framework,genetic decomposition, validation.*

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta el desarrollo de la tercera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE, que corresponde al análisis y verificación de los datos. Para este propósito, se considera la primera componente del ciclo, análisis teórico, como base fundamental (García y Parraguez, 2015). En la Figura 1 se muestrala descomposición genéticahipotética expuesta en dicho trabajo. Para validar dicha descomposición genética, se aplica un cuestionario y una entrevista en profundidad, a estudiantes universitarios.

A continuación se presenta la teoría APOE (acción, proceso, objeto, esquema), que es el marco teórico que fundamenta este trabajo y se explicita el ciclo de investigación asociado a este marco teórico.

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE, cuya sigla significa **A**cción, **P**roceso, **O**bjeto y **E**squema, fue creada por Ed Dubinsky (1996) y está basada en la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento.Posteriormente se ha seguido desarrollando por el grupo RUMEC (Research in UndergraduateMathematicsEducationCommunity) y otros investigadores (Arnon et al., 2014).

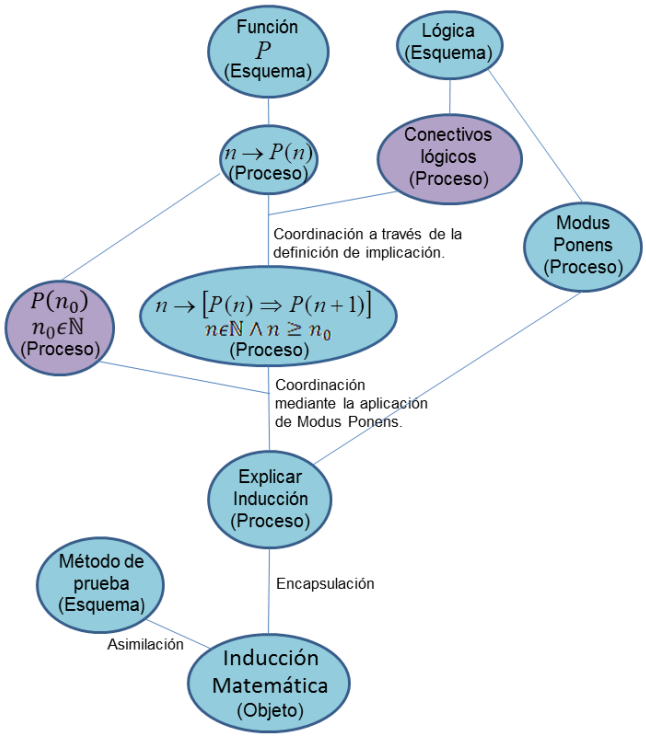


Figura 7. Descomposición genética hipotética del concepto de inducción matemática (García y Parraguez, 2015)

Según esta teoría todos los conceptos matemáticos pueden representarse en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas.Las acciones son transformaciones de los objetos que el estudiante percibe, en general, como externas. El estudiante precisa realizar todos los pasos para resolver determinado problema y debe ser guiado.Cuando una acción se repite y el estudiante reflexiona sobre ella, ésta se interioriza y se obtiene un proceso, aquí el estudiante ya no precisa más del estímulo externo, es capaz de resolver un problema sin necesidad de realizarlo paso a paso. También se puede obtener otro proceso al coordinar dos o más procesos.Cuando el estudiante es capaz de pensar el proceso como un todo y actuar sobre él, se dice que ha encapsulado el proceso en un objeto. También se puede realizar la operación contraria que es la desencapsulación que consiste en volver al proceso que generó cierto objeto, para coordinarlo con otros procesos y encapsularlos en nuevos objetos.Un esquema es un conjunto de acciones, procesos y objetos relacionados con un concepto matemático y las relaciones entre éstos. Un esquema es una estructura coherente e inacabada ya que un esquema puede asimilar un nuevo objeto que se reacomoda a las estructuras existentes. Por otro lado, un esquema puede ser visto como un objeto, en dicho caso se dice que el esquema se ha tematizado.

Las acciones, procesos, objetos y esquemas se denominan construcciones o estructuras mentales, éstas no se dan necesariamente, en forma lineal.

La forma como se pasa de un estado de construcción de conocimiento a otro se denomina mecanismo mental. La interiorización, la coordinación, la encapsulación, la desencapsulación y la tematización son mecanismos mentales. La Figura 2, precisa como se entrelazan las estructuras con los mecanismos mentales.

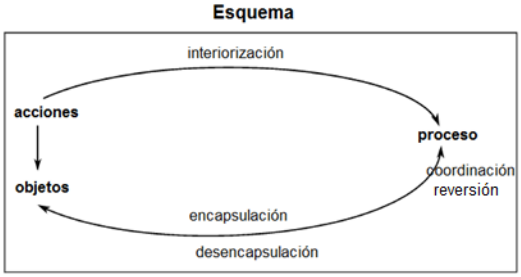


Figura 2: Construcciones y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014).

CICLO DE INVESTIGACIÓN DE LA TEORÍA APOE

La teoría APOE también proporciona un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: análisis teórico o descomposición genética; diseño y aplicación de enseñanza; y análisis y verificación de los datos.

Análisis teórico o descomposición genética

El ciclo comienza analizando el concepto matemático con base en los libros de texto, en la epistemología, en la experiencia docente, en el propio conocimiento del investigador,en resultados previos, etc., para, a partir de ahí, diseñar una descomposición genética para dicho concepto.

En el libro APOS Theory (Arnon et al., 2014) se explica qué es una descomposición genética de la siguiente forma: “Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico.” (p. 27)

El objetivo principal de la descomposición genética es proponer a priori un modelo para el aprendizaje de un determinado concepto matemático.Asiala et al. (1996) plantean dos preguntas que deben guiar el trabajoen esta componente: ¿Qué significa comprender un conceptomatemático? y ¿cómo esa comprensión puede ser alcanzada por unindividuo?Estas preguntas promueven la reflexión sobre el significado de comprender un concepto matemático determinado y las implicancias que tiene dicha reflexión en la forma en que un estudiante concibe dicho concepto.

Esta descomposición genética se prueba, se analiza y en caso de ser necesario se vuelve a la descomposición genética y se refina. Se sigue este ciclo las veces que sea necesario. Es importante resaltar que para un mismo concepto matemático pueden existir varias descomposiciones genéticas,las cuales pueden ser todas viables, ya que cada una puede representar un camino diferente de construcción mental de dicho concepto (vea, por ejemplo Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

Diseño y aplicación de enseñanza

A partir de la descomposición genética de un determinado concepto matemático, se diseñan actividades que serán aplicadas a los estudiantes para determinar si siguen el camino cognitivo que allí se describe.

Estas actividades, generalmente se diseñan con un ciclo de enseñanza denominado ACE (actividades, discusión en clase y ejercicios), asociado a la teoría APOE.En este ciclose elaboran actividades (que se realizan en forma colaborativa) a partir de una descomposición genética, para ayudar a los estudiantes a hacer las construcciones mentales sugeridas en dicha descomposición. El objetivo de esta fase es incentivar la abstracción reflexiva. Luego se discuten en clase las actividades realizadas en la etapa anterior y finalmente se elaboran ejercicios para que los estudiantes refuercen lo que han hecho en las otras dos etapas. (Arnon et al., 2014).

Análisis y verificación de los datos

Una vez diseñada la descomposición genética hipotética para un concepto matemático, se debe determinar su viabilidad. Ésta se puede realizar a partir de las observaciones efectuadas en la aplicación de las actividades de la componente anterior o, diseñando y aplicando instrumentos para comprobar si los informantes muestran las construcciones mentales que allí aparecen.En esta componente se analizan los resultados obtenidos, observando si todos los elementos que allí aparecen han sido considerados en la descomposición genética y si todos los elementos considerados en la descomposición genética fueron percibidos en los instrumentos. A partir de este análisis, se determina si la descomposición genética debe ser o no refinada.

En este trabajo, se aplica esta tercera componente del ciclo de investigación. Se diseñan, aplican y analizan instrumentos para determinar la viabilidad de la descomposición genética que se muestra en la Figura 1.

METODOLOGÍA

Esta investigación está situada en el paradigma hermenéutico o interpretativo, el método empleado es el estudio de casos (Stake, 2010) y las técnicas de recogida de datos son cualitativas (cuestionario y entrevista en profundidad), pues permiten obtener información relevante y en profundidad acerca de las estructuras y mecanismos mentales que muestran los estudiantes respecto al concepto de inducción matemática.

Esta investigación se desarrolló en el primer semestre del 2014 en una universidad de Chile. Los casos son los siguientes:

Caso 1: 9 estudiantes de primer año de pedagogía o licenciatura en matemáticas, etiquetados como E1, E2,…, E9.

Caso 2: 2 estudiantes de magíster en matemáticas, etiquetados como E10 y E11.

Caso 3: 1 estudiante del último año de licenciatura en matemáticas, etiquetado como E12.

Los instrumentos diseñados y aplicados fueron validados por el grupo cognitivo de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile).

Para validar o refinar la descomposición genética propuesta en la Figura 1, se aplicaprimeramente un cuestionario(que consta de 3 preguntas, con varias partes cada una) y después de analizar los resultados del mismo, se elaboray aplica una entrevista en profundidad (con 7 preguntas). En el cuestionario se indaga sobre los conceptos de lógica, función y métodos de prueba, los cuales se consideran requisitos previos al concepto de inducción matemática. Con la entrevista se pretende validar los fragmentos de la descomposición genética que no fueron abarcados por el cuestionario, pero además, la entrevista en profundidad permite obtener una mejor información acerca de las construcciones mentales de los estudiantes, de su forma de pensar, lo cual es fundamental en esta investigación por encontrarse bajo el marco de la teoría APOE.

De los once estudiantes que participaron en el cuestionario, se seleccionó a cuatro que fueron los que mostraron tener algún conocimiento de conceptos previos al concepto de inducción matemática, como son método de prueba, *Modus Ponens*, conectivos lógicos (incluido el implica), sucesiones y funciones. Por problema de espacio, en este trabajo se analizan las producciones de dos de los estudiantes en la entrevista, ya que uno de ellos parece comprender el principio de inducción matemática y otro no lo hace, y luego se discute que la diferencia radica en la presencia o falta de una construcción mental en particular que aparece en la descomposición genética refinada.

ANÁLISIS Y VERIFICACIÓN DE LOS DATOS DE ESTA INVESTIGACIÓN

Estudiante 2

En la pregunta 1 de la entrevista (*Decida si la siguiente proposición es verdadera o falsa: Si hoy es viernes, entonces mañana es domingo*), conjeturamos que E2 muestra una concepción acción de implica, ya que realiza una tabla de verdad para este conectivo y continúa con la respuesta que se muestra en la Figura 3. (Observación: la entrevista no se realizó un día viernes).

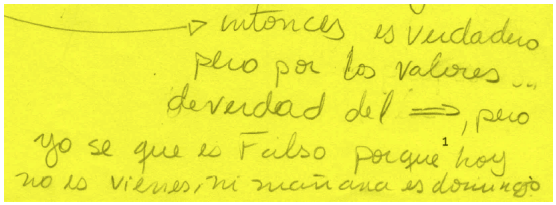


Figura 3: Respuesta de E 2 a la pregunta 1.

El estudiante E2 muestra una concepción acción del paso base y del paso inductivo, pero no los coordina para explicar inducción, como se aprecia en un fragmento de la entrevista a E2, respecto a la pregunta 4.b (*Suponga que después de explicarle al estudiante* (el principio de inducción matemática), *le muestra un ejemplo y él todavía no entiende, ¿cómo lo convencería de que es cierto, por ejemplo para* $n = 1000000$*?*). Observación: ENT se refiere al entrevistador, que en este caso es una de las autoras.

[122E2]: Pero ni siquiera yo sé por qué es verdadera para todo, porque así es la inducción, po, no, no sé.

[122ENT]: ¿No sabes por qué?

[123E2]: Porque, es que no sé porque esos pasos hacen que sea verdadero para todos.

[123ENT]: mmm

[124E2]: Yo no sé, entonces no podría decirle porque no, no sé. Pero le diría que lo evalúe en n =100000 en 1000000 y debería ser verdadera.

[124ENT]: Claro, pero la idea de inducción de matemática es justamente no tener que probar en cada valor, sino que al hacer esto se cumple para todos.

[125E2]: Pero tendría que ser, para el valor que sea, para el siguiente si es, entonces para el siguiente y para el siguiente,…o sea para todos.

Estudiante E12

En la entrevista en profundidad, el estudiante E12 muestra una concepción proceso de $p \Rightarrow q$ cuando señala que la proposición de la pregunta 1 es verdadera.

Además coordina el paso base con el paso inductivo (como procesos) para obtener el proceso explicar inducción; el cual encapsula en el objeto inducción matemática, ya que resuelve correctamente todos los problemas desde el 2 hasta el 6 y es capaz de explicarlos correctamente. Se puede afirmar además, que al encapsular el proceso explicar inducción en el objeto inducción matemática, lo hace asimilando método de prueba, ya que el estudiante fue capaz de discernir entre

varios métodos de prueba y escoger el de inducción matemática para resolver el ejercicio de la pregunta 5.

Los resultados del cuestionario y de la entrevista en profundidad, dan cuenta de que:

Los estudiantes que no muestran una concepción proceso de $n \rightarrow P(n)$ y de "conectivos lógicos", no son capaces de coordinarlos para obtener $n \rightarrow [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ como proceso, ni siquiera en el caso (E2) que muestra una concepción proceso de $n \rightarrow P(n)$.

El estudiante E12 muestra una concepción proceso de $P(n_0)$ y de $n \rightarrow [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$, los cuales coordina, a través de *Modus Ponens*, para obtener como proceso "explicar inducción", el cual se encapsula en el objeto "inducción matemática".

Los resultados dan cuenta de que el estudiante E2 que no muestran una concepción objeto de "inducción matemática", tampoco muestran una concepción objeto de "lógica", ni concepción proceso de "conectivos lógicos" y en particular de "implica". Al contrario de lo que sucede con el estudiante E12 que sí muestra una concepción objeto de "inducción matemática". Por lo que sugerimos que para poder encapsular "inducción matemática" en un objeto, es necesario que "implica" se muestre como construcción mental proceso.

En relación con este último punto, Ernest (1984) sugiere que las implicaciones son una causa de las dificultades para entender inducción matemática.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

El estudiante (E12) muestra las construcciones y los mecanismos mentales dispuestosen la descomposición genética plasmada en la Figura 1, por lo que parece ser que la DG hipotética da cuenta de los mecanismos mentales necesarios para el aprendizaje del principio de inducción matemática. Aunque, de acuerdo a lo que muestra dicho estudiante, parece no ser necesario que "función", "método de prueba" y "lógica" estén como construcción mental esquema, sino "función" y "método de prueba" como construcción mental proceso y "lógica" como construcción mental objeto. De todos modos, es necesario continuar la investigación aplicando el cuestionario y la entrevista a un mayor número de estudiantes para tener evidencia de su viabilidad.

Por lo pronto, se puede realizar un refinamiento de la descomposición genética hipotética (Figura 1) con los cambios que se acaban de mencionar respecto a "función", "método de prueba" y "lógica".

Una propuesta para la enseñanza de este concepto, es aplicar el ciclo de enseñanza ACE con la descomposición genética refinada, diseñando actividades de modo que los estudiantes muestren el concepto de "inducción matemática" como construcción mental objeto, a través de las estructuras y los mecanismos mentales sugeridos en dicha descomposición genética. Por lo que, las autoras consideran que una secuencia didáctica para el concepto de inducción matemática no puede dejar de contener actividades de aula como las que se indican:

Donde se trabaje con el conectivo lógico implica. (Estudiar qué tipo de actividades son apropiadas, es tema para futuras investigaciones.)

Donde se realicen pruebas con distintos métodos.

Demostraciones con inducción matemática en ejercicios geométricos.

Ejercicios en los cuales se cumpla el paso inductivo, pero no el paso base.

Actividades para que los estudiantes entiendan la importancia del paso inductivo.

Ejercicios en los cuales los estudiantes establezcan conjeturas y luego las prueben por inducción.

El primer punto de estas actividades es de gran relevancia, debido a lo que se pudoobservar en los resultados de esta investigación y a lo que afirman otros autores (véase, por ejemplo Ernest, 1984; Reid, 1992), a saber el conectivo lógico implica puede ser una de las causas importantes en las dificultades del aprendizaje de inducción matemática. Consideramos este un tema relevante para abordar en futuras investigaciones.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014).APOS Theory.A framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996).A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds.) Research in Collegiate Mathematics Education. Vol. 2 (p.1-32). U.S.A.: American Mathematical Society.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educaciónmatemática, 8 (3), 25-41.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. Educational Studies in Mathematics, 15(2), 173-189.

García, I. y Parraguez, M. (2015). Refinamiento de una descomposición genética para el concepto de inducción matemática. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28, 765-773. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Reid, D. (1992). Mathematical induction.An epistemological study with consequences for teaching.(Thesis for the degree of Master of Teaching Mathematics). Montreal: Concordia University.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación linear. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (1), 89-112.

Stake, R. (2010). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

[1]Parcialmente financiado por Proyecto Fondecyt Regular Nº1140801.

HECHOS DIDÁCTICOS SIGNIFICATIVOS EN EL ESTUDIO DE FIGURAS PLANAS. ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA DE PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE

Meaningful didactical factin the study of figuresplane.analysis of professionalexperience teaching practice

Rivas, H[a]; Vásquez,C[b]; Pincheira, N[c].

[abc]Pontificia Universidad Católica de Chile; correos electrónicos: hrivasa@uc.cl,cavasque@uc.cl npincheirah@uc.cl

Resumen

Se utiliza la noción de "hecho didáctico significativo" para analizar la fase de implementación de una experiencia de práctica profesional docente que involucra el estudio de figuras planas en 5° grado de educación primaria. Los hechos didácticos significativos son interpretados teniendo en cuenta las dimensiones y componentes de la idoneidad didáctica lo que permite caracterizar el proceso de estudio implementado, identificando: (a) contenidos que fueron abordados, (b) patrones de interacción entre docente y discentes, (c) modos de integración de recursos, y (d) conflictos que tuvieron lugar y la forma en que fueron abordados. El proceso de instrucción fue diseñado e implementado por un estudiante de Pedagogía en Educación General Básica durante el desarrollo de su práctica profesional, siguiendo los lineamientos de los programas de estudio y empleando recursos disponibles en la escuela.

Palabras clave: *Hecho didáctico significativo, Práctica profesional, Educación Básica, Figuras planas.*

Abstract

*The notion of "*Meaningful didactical fact*" is used to analyze the implementation phase of an experience of teaching practice that involves the study of plane figures in 5th grade of primary education.Meaningful didactical fact are interpreted taking into account the dimension and components of the didactic suitability allowing characterize the process , identifying: (a) content , (b) patterns of interaction between teacher and students, (c) modes of integration of resources, and (d) conflicts that took place and how they were addressed.The teaching process was designed and Implemented by a student of pedagogy in basic education for the overall development of Their professional practice, considering the lines of the curricula and using resources available at the school.*

Keywords: *Meaningful didactical fact, Professional practice, Elementary education, planefigures geometric*

INTRODUCCIÓN

Una de las fases de las investigaciones que se centran en el estudio del diseño e implementación de procesos de instrucción matemáticos, es el análisis de la implementación. Tanto la ingeniería didáctica (Artigue, 1989; 2011) desarrollada en la escuela francesa como la investigación de diseño de la corriente anglosajona (Kelly, Lesh y Baek, 2008) contemplan esta fase en sus procesos metodológicos. Recientemente, en el marco del enfoque ontológico – semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS) se ha desarrollado un tipo particular de Ingeniería Didáctica basada en el Enfoque Ontosemiótico (ID – EOS) (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014),

en la cual, se ha empleado la noción de hecho didáctico significativo (HDS) como herramienta para analizar y describir la implementación de un proceso formativo. En este estudio se aplica la noción de HDS para analizar y describir la fase de implementación de un proceso de estudio sobre figuras planas, llevado a cabo por un futuro profesor de educación básica que se encuentra en su proceso de práctica profesional. Estos HDS han sido interpretados según las dimensiones y componentes de la idoneidad didáctica lo que ha permitido realizar análisis sistémico de la experiencia.

Antecedentes y problemas de investigación

Durante su práctica profesional los futuros profesores de educación básica se ven enfrentados a la necesidad de diseñar, implementar y evaluar procesos de estudio matemáticos en entornos naturales de enseñanza. En la mayoría de los casos esta tarea se realiza siguiendo principios y lineamientos propuestos en documentos curriculares (planes, programas de estudio,…), junto al apoyo de un profesor de aula del establecimiento y de un profesor supervisor de la universidad. Estas condiciones parecen suficientes para implementar trayectorias didácticas idóneas; sin embargo, la tarea de enseñar es una actividad sumamente compleja que requiere de un análisis reflexivo que den cuenta de sus alcances y limitaciones. Siguiendo la conceptualización de la ID-EOS, el problema que abordamos en este trabajo, puede ser descrito en los siguientes términos:

_ ¿Qué objetos y procesos presentes en las prácticas matemáticas institucionales son movilizados a través de las tareas propuestas? ¿Qué tipo de relaciones se establecen con elementos del entorno en se realiza el proceso educativo?

_ ¿Qué prácticas, objetos y procesos matemáticos ponen en juego los estudiantes para resolver las tareas propuestas?¿Cuáles de estas prácticas, objetos y procesos matemáticos son válidos desde la perspectiva institucional?¿Se tienen en cuenta aspectos afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los estudiantes con relación a los objetos y proceso matemáticos estudiados?

_ ¿Qué interacciones didácticas son implementadas para promover los aprendizajes matemáticos?¿Cómo se gestionan los recursos técnicos y temporales para favorecer los aprendizajes?

Marco teórico

Este trabajo se sustenta en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) de Godino y colaboradores; en particular, aplicamos la noción de "hecho didáctico significativo" introducida en el EOS como herramienta que permite analizar y describir trayectorias didácticas implementadas (Godino et al., 2014; Rivas y Godino, 2015).

Estos autores consideran que,

> "un hecho didáctico es significativo si las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función, o admiten una interpretación, en términos del objetivo instruccional pretendido. La significatividad se puede entender desde el punto de vista del docente, del estudiante, o bien desde un punto de vista institucional externo al sistema didáctico, es decir, del sujeto que ha realizado el estudio preliminar y el diseño instruccional" (Godino, et al., 2014, p. 7)

La identificación e interpretación de hechos didácticos significativos requiere del uso de herramientas teóricas que permitan analizar estos procesos de manera adecuada. La noción de idoneidad didáctica, desarrollada en el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), es una de las herramientas que pueden ser utilizadas. En esta noción se distinguen seis dimensiones o facetas (figura 1), cada una de las cuales se desagrega en componentes e indicadores que aportan elementos para el análisis y reflexión en torno a un HDS.

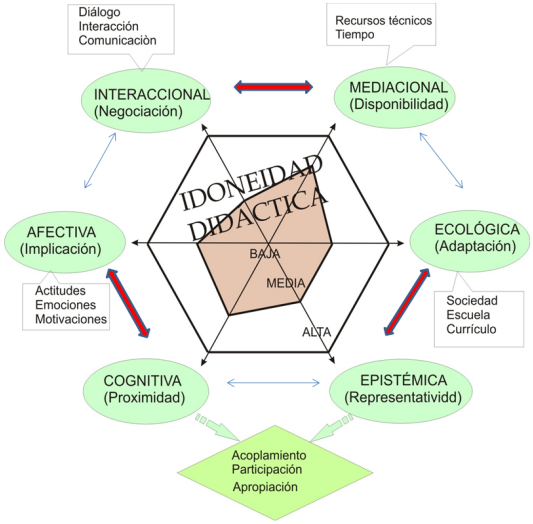


Figura 1. Facetas de la idoneidad didáctica (Godino, 2014, p. 42)

A continuación se describen sucintamente los seis tipos de hechos didácticos significativos interpretados desde las facetas y componentes de la idoneidad didáctica:

_ Epistémico, hechos que reflejan el tipo de tareas (problemas), lenguajes, reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos) y argumentos puestos en juego.

_ Ecológico, hechos que dan cuenta de las conexiones del proceso de estudio con elementos del entorno en que se realiza (currículo, medio socio-cultural y profesional, conexiones intra e interdisciplinares). Se tienen en cuenta la innovación y la formación en valores.

_ Cognitivo,hechos que muestran las relaciones que se establecen durante el proceso de instrucción con los aprendizajes previos, las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales diferencias individuales y los aprendizajes alcanzados.

_ Afectivo,hechos que expresan la forma en que se recogen los intereses y necesidades de los estudiantes para implicarlos en el proceso de estudio.

_ Interaccional, hechos que dan cuenta de la interacción entre el profesor y los estudiantes y de los estudiantes entre sí, observando en qué medida dichas interacciones permiten identificar y resolver conflictos de significado.

_ Mediacional, sucesos que reflejan la forma en que se integran los recursos materiales, la distribución del espacio físico, organización de los estudiantes y la gestión del tiempo para la enseñanza.

Metodología

Esta investigación corresponde a un estudio de caso, en el que aplicamos la técnica de análisis de contenido (cualitativo) para extraer y sistematizar los HDS observados durante la implementación de un proceso de estudio referido a figuras planas en un 5° año de educación básica (alumnos de 10-

11 años de edad). Este proceso de estudio fue llevado a cabo por un futuro profesor de educación general básica durante el desarrollo de su práctica profesional.

Para el análisis se han identificado primeramente unidades de análisis que representan HDS teniendo en cuenta la teoría de la idoneidad didáctica.Luego, estas unidades de análisis fueron clasificadas e interpretadas según las dimensiones epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional lo que ha permitido describir de manera sistémica la trayectoria didáctica implementada.

Diseño del proceso de instrucción

El diseño e implementación de la experiencia se ha realizado teniendo en cuenta los objetivos de aprendizaje propuestos en los programas de estudio del Ministerio de Educación para la unidad de geometría (MINEDUC, 2012); específicamente, los que apuntan al reconocimiento de las figuras 2D (triángulos y cuadriláteros) a partir de sus propiedades en situaciones estáticas y dinámicas; como así también, al estar representadas sobre el primer cuadrante del plano cartesiano. Estos elementos se constituyen en los significados institucionales de referencia para el diseño e implementación de la actividad didáctica realizada.

Análisis de la trayectoria didáctica implementada

La clase se desarrolló en un periodo de 45 minutos (una hora pedagógica). El profesor utilizó como recurso una presentación en PowerPoint que contenía las tareas y los principales conocimientos que fueronintitucionalizados.En lo que sigueanalizamos la trayectoria didáctica implementada teniendo en cuenta de algunos HDS transcurridos durante el proceso de estudio.

HDS 1:

P: En la clase de hoy trabajaremos en el reconocimiento de figuras 2D al estar representadas sobre un plano cartesiano. ¿Alguien recuerda lo que es un plano cartesiano?
E1: Son líneas.
E2: Nos permiten dibujar figuras.
E3: Son puntos dentro del plano […].

Este primer HDS puede ser interpretado como cognitivo e interaccional. El profesor retoma aprendizajes previos y genera una instancia de dialogo con sus alumnos. Desde el punto de vista cognitivo se busca que los alumnos recuerden conceptos estudiados relativos al plano cartesiano. En las respuestas dadas por E1 y E3,el significado personal de los alumnos da cuenta de un cierto grado de comprensión respecto al significado institucional del objeto matemático por el que se pregunta.

HDS 2:

P: […] Bien, veamos la figura (se muestra un plano cartesiano). Un plano cartesiano se compone de dos rectas perpendiculares que se interceptan, llamados ejes “x” e “y”. El plano cartesiano se divide en cuatro cuadrantes. Las coordenadas se escriben entre paréntesis donde el primer número pertenece a el eje “x”, y el segundo número al eje “y”. Por ejemplo, el punto (2,5) se encuentra en el plano, donde el 2 pertenece al eje “x”, y el 5 al eje “y”.

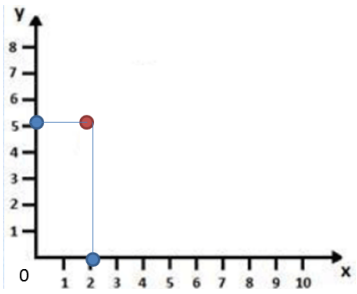


Figura2. Plano cartesiano presentado por el futuro profesor

Este es un HDS de tipo epistémico e interaccional. Desde el punto de vista epistémico, se dan a conocer algunos conceptos básicos deltema de estudio y se muestran las representaciones de uso convencional del plano cartesiano.Alintroducireste constructo, el docente alude a la notación para nominar los ejes de coordenadas, en lugar de usar el lenguaje técnico requerido (eje de las abscisas y eje de las ordenadas). Así mismo, no indica la intersección de las rectas como el punto de origen, ni la finalidad del plano cartesiano (describir la posición de los puntos). Se observa también, que no hace referencia a la notación matemática P(x, y) para designar los puntos. En el ámbito interaccional, el profesor interviene para dar un status oficial alos contenidos tratados.

HDS 3:

P: […] Ahora, en parejas, realizarán la siguiente actividad: Dibujar un plano cartesiano y encontrar los siguientes puntos: **a.** (2,12) - (2,16) - (8,12) - (8,16); **b.**(2, 6) - (6, 2)-(10,6) - (6,10); **c.** (10,8) - (10,12) - (14,8) - (14, 12); **d.** (12,2) - (16,2) - (14,6)¿cuál es la figura que resulta?

La asignación de esta tarea, en sí misma, alude a un HDS de tipo epistémico. Es una tarea que apunta a reforzar los principales conceptos, procedimientos, lenguajes, propiedades y argumentos involucrados en el tema de estudio. En su resolución, el profesor propone un trabajo en parejasque promueve el intercambio de información entre estudiantes, por lo que pude ser interpretadocomo unHDS de tipointeraccional.

HDS 4:

P: […] Bien, veo que la mayoría ha terminado su trabajo. Revisaremos ahora las respuestas. ¿Qué figuras hemos obtenido? (se muestra la siguiente solución, figura 2):

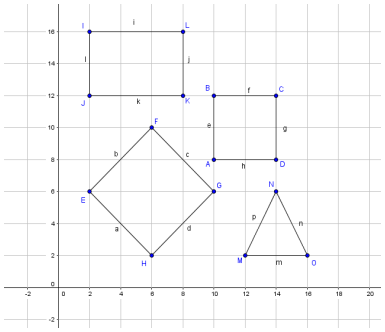


Figura 3. Respuesta espaerada presentada por el futuro profesor

E1: En la primera un rectángulo, en la segunda un rombo...

E2: Después un cuadrado.

E3: Y un triángulo.

P: ¿Están de acuerdo los demás? (la mayoría de los estudiantes responde afirmativamente).

P: La segunda figura no es un rombo.

E1: Pero profesor es un rombo. (Esta afirmación nuevamente es compartida por varios estudiantes).

P: Es un cuadrado, ya que tiene sus cuatro ángulos rectos.

Este es un HDSde tipo cognitivo. El significado personal que asignan los estudiantes al rombo difiere del significado institucional. Se trata de un conflicto que ha sido abordado en diferentes estudios,en el cual, la figura es reconocida a partir de su forma, sin tener en cuenta sus propiedades. En su intervención, el profesor alude a una de las propiedades del cuadrado (cuatro ángulos rectos), pero no profundiza en las propiedades del rombo ni tampoco en las demás propiedades del cuadrado para establecer la diferencia.

HDS 5:

P: […] Como hemos podido comprobar, dadas ciertas coordenadas, podemos formar múltiples figuras en el plano cartesiano; por ejemplo, las siguientes (figura 3):

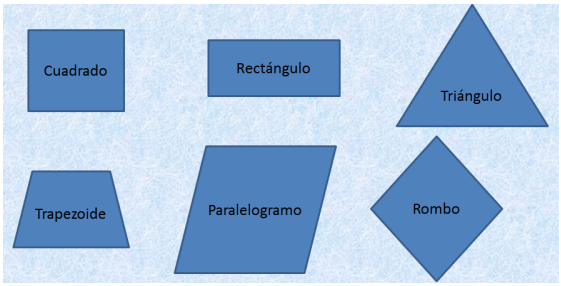


Figura 3. Institucionalización de las figuras geométricas realizada por el futuro profesor

Este HDS es de tipo interaccional. El profesor Institucionalizacontenidos relativos a los objetivos de aprendizaje. Sin embargo, en esta institucionalización se describen las figuras geométricas de manera limitada y en cierto modo, errónea. Las figuras son presentadasteniendo en cuentasolamente su forma y en una orientación que puede conducir a errores al momento de reconocerlas. Como es el caso del triángulo que aparece representado con un lado horizontal paralelo al lado de la parte inferior de la pantalla y el rombo, apoyado sobre uno de sus vértices.Vinner y Hershkowitz (1980) refieren a estos aspectos como uno de los principales distractores para la apropiación de estos conceptos.

Reflexiones finales

El análisis de los HDS identificados, nos ha permitido describir la trayectoria didáctica implementada. Desde el punto de vista epistémico hemos podido reconocer los conceptos, representaciones, proposiciones, procedimientos y argumentos que han sido tratados en clase y aquellos que requieren ser incorporados. Los HDS de tipo cognitivo, muestran la progresión de los aprendizajes y también los puntos conflictivos que se presentan en los estudiantes; algunos de estos conflictos son reconocidos y abordados por el profesor y otros,requieren de una mayor atención. En este estudio destacan las dificultades para reconocer las figuras a partir de sus propiedades, lo que se observa es que existe un cierto predominio por identificarlas a partir de sus formas. En el ámbito interaccionalprevalecela transmisión del conocimiento por sobre la indagación autónoma por parte

de los estudiantes y la posibilidad de trabajar en grupos. En esta misma dimensión se manifiestanerroresen la institucionalización de algunos contenidosy se requiere prestar atención a los objetos y procesos matemáticos que deberían ser movilizados a través de las tareas propuestas. Destacamos que en la enseñanza de la geometría, y en particular, en el reconocimiento de las figuras geométricas se debe tener en cuenta lasdistintas propiedades y no limitar su enseñanza a los atributos de sus formas, sin dejar de lado la importancia que tiene la orientación de las figuras geométricas.

Finalmente, en el tratamiento de estos contenidos consideramos necesario incluir recursos que permitan analizar las propiedades de las figuras en situaciones dinámicas.

Referencias

Artigue M. (2011). L'ingénieriedidactiquecommethèmed'étude. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck y F. Wozniak (Eds.), En amont et en aval des ingénieriesdidactiques (pp. 15-25). Grenoble: La PenséeSauvage.

Artigue, M. (1989). Ingénieriedidactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9 (3), 281-308.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education.ZentralblattfürDidaktik der Mathematik, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014) . Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 34 (2/3), 167-200.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.) (2008). Handbook of design research in methods in education.Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching. New York, NY: Routledge.

Mineduc (2012). Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

Rivas, H. y Godino, J. D. (2015). Hechos didácticos significativos en el estudio de nociones probabilísticas por futuros maestros. Análisis de una experiencia formativa. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 339-346). Granada, 2015.

Vinner, S., &Hershkowitz, R. (1980).Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts.Proceedings of the 4th PME Conference, Berkeley, USA, 1980.

UN MODELO COGNITIVO PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES[1]

A cognitive model for improving learning composition of functions

Valdivia, C.[a], Domínguez, C.[b] yParraguez, M.[c]

[a]Universidad Austral de Chile, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso;
cristobal.valdivia.s@gmail.com[a], carolina.dominguez.garcia@gmail.com[a],
marcela.parraguez@pucv.cl[b]

Resumen

Con base en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) como referente teórico y metodológico, se investigó sobre la manera en que un estudiante construye la composición de funciones reales de variable real, a través del diseño de un modelo cognitivo, denominado Descomposición Genética (DG), que supone un camino viable para la comprensión profunda del concepto. Los datos fueron obtenidos de 35 estudiantes de dos universidades chilenas, agrupados en tres casos de estudio. Los resultados muestran que la construcción del objeto composición de funciones, depende de dos procesos fundamentales que ocurren de manera separada en el razonamiento de los estudiantes: la composición de las ecuaciones de dos funciones (g o f); y la condición necesaria para componer ambas funciones $\mathrm{Re}c(f) \subseteq Dom(g)$.

Palabras clave: *composición de funciones, descomposición genética, teoría APOE.*

Abstract

Basing on the APOS theory (Action, Process, Object and Schema) as a theoretical and methodological reference, we investigated about the manner in which a student builds the real function composition of real variable, through the design of a cognitive model called Genetic Decomposition (GD), that supposes a viable path through the deep comprehension of the concept. The information was obtained from 35 students of two Chilean universities, grouped in three study cases. The results show that the construction of the function composition object depends on two fundamental processes that occur in a separately way in the students reasoning: the composition of the equations of two functions (g o f); and the condition needed to compose both functions $\mathrm{Re}c(f) \subseteq Dom(g)$.

Keywords: *composition of function, genetic descomposition, APOS theory.*

INTRODUCCIÓN

En la mayor parte de los programas de pregrado de las universidades chilenas, los estudiantes deben aprobar cursos de cálculo diferencial e integral en una variable real. En estos cursos, generalmente semestrales, se estudian gran cantidad de conceptos cuya comprensión, por parte de los estudiantes, progresivamente se vuelve hacia la operatoria algebraica y la memorización de los procedimientos necesarios para resolver problemas, con el único objetivo de aprobar.

No es de extrañar, entonces, que un estudiante apruebe el curso sin comprender los conceptos matemáticos estudiados, y pierda el potencial que pueden aportar al momento de resolver problemas, por ejemplo, de ingeniería, física, química, entre otros.

En consecuencia, se hace necesario mejorar los procesos de enseñanza de la matemática para estimular aprendizajes significativos y comprensiones más profundas sobre los conceptos estudiados en cursos de cálculo. En particular, uno de los conceptos que tiene dificultades en su comprensión es la composición de funciones reales de una variable real.

Antecedentes

En la literatura existen pocas investigaciones –documentadas– que abordan específicamente problemáticas en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto composición de funciones (Webster, 1978; Thoo, 1995; Hassani, 1998; Meel, 1999; Horvath, 2008). Otras, en cambio, emprenden el estudio de conceptos matemáticos donde la composición de funciones se presenta en forma inherente (Clark et al., 1997; Cotrrill, 1999; Capistran, 2005; Gordon, 2005; Uygur y Ozdas, 2007; Kabael, 2010; Maharaj, 2013; Valdivia y Parraguez, 2013). En todas ellas queda en evidencia varias dificultades, errores y obstáculos que giran sobre la comprensión de la composición de funciones.

Por ejemplo, Meel (1999) halló evidencia de que existe una fuerte tendencia, por parte de el grupo de futuros profesores entrevistados, a negar las funciones constantes como funciones. Esto repercute directamente cuando ellos se enfrentan con funciones compuestas en las que intervengan funciones constantes. Otro hallazgo relevante, obtenido por el investigador, es que más de la mitad de los entrevistados consideraba la composición de funciones como una multiplicación (Figura 1), de modo que pensaban en la igualdad $F\big(g(x)\big) = F \cdot g(x)$, en vez de evaluar $g(x)$ en la función F.

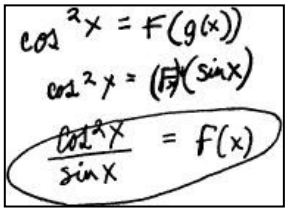


Figura 8. Ejemplo del uso inapropiado de la notación funcional (Meel, 1999, p. 6).

Por su parte, Horvath (2008) concluyó que la notación (expresión algebraica) que aparece en el teorema de la regla de la cadena, crea dificultad y malentendidos a la hora de aplicar la fórmula para derivar diferentes tipos de funciones compuestas. Por su parte, Clark y su grupo (Clark et al. 1997) mencionan que la composición y la descomposición de funciones son un pilar fundamental para construir dicha regla.

En este mismo sentido, pese a la importancia del concepto que nos convoca, varios investigadores concuerdan en que algunas de las dificultades que tienen los estudiantes con la regla de la cadena (en una o varias variables), podrían atribuirse a las dificultades del conocimiento de la composición de funciones (Capistran, 2005; Uygur y Özdas, 2007; Kabael, 2010; Valdivia y Parraguez, 2013).

Estos antecedentes permiten observar que, aunque se ha realizado investigación en torno al aprendizaje de la composición de funciones, aún no hay claridad sobre cómo es aprendido por los estudiantes. De ahí que es necesario profundizar mediante más investigación para conocer la manera en que construyen la composición de funciones, desde un punto de vista cognitivo. De forma natural emergieron las siguientes preguntas que guiaron este estudio: ¿Cómo construyen cognitivamente los estudiantes la composición de funciones reales en una variable real? y ¿Cuáles son las estructuras mentales que son requisitos para poder construir la composición de funciones?

En búsqueda de respuestas se planteó, como objetivo general, documentar evidencia empírica que describa la manera en que un estudiante construye cognitivamente la composición de funciones y cuáles son los conceptos que son necesarios para dicha construcción.

Marco teórico: la teoría APOE

La investigación se sustenta de un marco teórico de carácter, esencialmente, cognitivo. Este referente atiende el estudio de los procesos de aprendizajes de un estudiante sobre conceptos matemáticos, lo que sin duda se condice con el objetivo general propuesto y la problemática planteada.

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) fue creada por Ed Dubinsky (1991), en respuesta a identificar la manera en que se construyen o aprenden los conceptos matemáticos. Esto ocurre mediante un modelo, denominado Descomposición Genética (DG), que está constituido por estructuras (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, tematización y asimilación), que representa un camino viable para la construcción de conceptos matemáticos.

Las investigaciones que se realizan con la teoría APOE, suponen la DG como la hipótesis de investigación del concepto en estudio, la cual contiene a priori los constructos que son necesarios para modelar el aprendizaje de conceptos matemáticos que pasan por tres etapas básicas: Acción, Proceso y Objeto.

En adelante se dirá que un estudiante muestra una **concepción acción** cuando él realiza transformaciones a un objeto, que lo percibe como algo externo, y que están originadas por estímulos de terceros, que le entregan indicaciones precisas sobre qué debe hacer (Trigueros, 2005).

Por otro lado, se dice que un estudiante muestra una **concepción proceso** cuando las acciones se repiten y el sujeto reflexiona, incorporándolas en su conciencia (*interiorización*). En esta etapa de construcción del concepto el estudiante no tiene la necesidad de instrucciones externas, sino que "puede intuir un resultado sin tener que realizar la totalidad de los cálculos, además es capaz de invertir los pasos de una determinada transformación sin tener que volver a realizarlos" (Parraguez y Oktaç, 2012, p. 106). Dos o más procesos pueden generar un nuevo proceso mediante el mecanismo mental de la *coordinación*.

Además, un estudiante da evidencias de una **concepción objeto** cuando *encapsula* un proceso, gracias a la reflexión que él realiza sobre las transformaciones u operaciones que se aplican a un concepto. En esta etapa de construcción, su accionar no está limitado a instrucciones externas, ya que tiene la capacidad de identificar porqué ocurren las transformaciones, sin la necesidad de aplicarlas. De forma inversa, se puede desencapsular un objeto cuando se identifica el o los procesos que le dieron origen.

Ahora bien, Dubinsky (1991) se refiere a Abstracción Reflexiva como un mecanismo para pasar de una estructura mental a otra. Esta noción constituye el mecanismo principal en la construcción del conocimiento matemático, y corresponde al proceso mediante el cual un individuo realiza acciones sobre los objetos que son fuente de estudio y, a partir de ello, se establecen relaciones o propiedades. El conjunto de acciones constituyen los mecanismos mentales de interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, tematización y asimilación.

Metodología

La estructura general de la investigación está determinada por la teoría APOE, que incluye el ciclo de investigación, y consta de tres etapas secuenciales (Asiala et al., 1996): análisis teórico o descomposición genética; diseño y aplicación de instrumentos; análisis y verificación de datos. La aplicación de este ciclo supone diseñar una DG de la composición de funciones que sea validada por la evidencia empírica, o bien se obtengan antecedentes que indiquen una o más modificaciones (refinamiento).

En la primera etapa del ciclo de investigación se realizó un análisis teórico, desde la propia matemática, sobre los conceptos que están involucrados en la composición de dos funciones. Tales

conceptos, que constituyen las construcciones y mecanismos mentales, fueron incorporados a la DG de la composición de funciones, y articulados mediante la experiencia docente de los investigadores de este estudio.

Participantes

Para recoger la evidencia empírica necesaria para validar o refinar la DG de la composición de funciones, fueron seleccionados 35 estudiantes de dos universidades del país, que se trabajaron como casos (Stake, 2010). Los estudios de casos fueron incorporados en el ciclo de investigación según características comunes que presentan los estudiantes, agrupados según el tipo de carrera profesional al cual pertenecen: pedagogía en matemática; licenciatura en matemática; ingeniería. Los criterios utilizados para la selección fueron: haber aprobado, a lo menos, un curso de álgebra o cálculo que incluya el estudio de composición de funciones reales de variable real; participar voluntariamente en la investigación; accesibilidad de los investigadores; avance curricular adecuado, es decir, que los estudiantes no estén cursando el primer semestre de su carrera.Los 35 estudiantes con los que se trabajó fueron etiquetados como E1, E2, …, E35.

Análisis teórico o descomposición genética de la composición de funciones

Antes de iniciar la descripción de las relaciones mentales que generan la construcción objeto de la compuesta de dos funciones, la definición consensuada a la que llegaron los investigadores es una adaptación de la definición de Pérez (2006): Supongamos que f y g son funciones reales de variable real, verificando que $\mathrm{Re}c(f) \subseteq Dom(g)$. En tal caso, la función h dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in Dom(f)$ se llama composición de g con f y se representa por $g \circ f$.

A continuación se describe el tipo de concepciones que un estudiante universitario (a priori) puede construir para comprender la compuesta de dos funciones reales de variable real.

Concepción Acción: Para iniciar, el estudiante debe contar con ejemplos de funciones reales, mediante las cuales pueda verificar el resultado propuesto. Por ejemplo, el estudiante puede considerar entre su colección ejemplos primarios –u otros análogos– como los siguientes:

$$\text{Si } f(9) = 10 \; y \; g(6) = 9, \text{ entonces } (fog)(6) = f(g(6)) = 10$$

$$\text{Si } f(x) = 2x + 1 \; y \; g(x) = 3x, \text{ entonces } (fog)(2) = f(g(2)) = 13$$

En estos ejemplos –y otros más– puede haber una variación, tanto de los valores reales elegidos, como también del tipo de funciones (polinómicas, logarítmica, exponencial, lineal, cuadrática, constante, entre otras), de tal manera que el estudiante pueda establecer cuáles de esas funciones pueden componerse y cuáles no. Esto se puede hacer por la aplicación de acciones específicas sobre los elementos dados, realizando la composición entre las funciones; y por otra parte, especificando en la medida de lo posible los gráficos de las funciones y su compuesta. En esta concepción, es posible que el estudiante establezca una fórmula para la compuesta de las funciones, posiblemente de manera mecánica, sin reparar en las condiciones que se deben atender para lograr componer dos funciones.

Ejemplo de lo anterior son las funciones $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = \sqrt{x - 16}$, cuya composición $(g \circ f)$ no está definida, ya que $Rec(f) \cap Dom(g) = \phi$. Sin embargo un estudiante puede obtener dicha composición en forma algebraica, incurriendo en un error ya que se está trabajando con funciones reales de variable real, y sólo se podrá escribir la composición cuando ésta exista.

Una forma de provocar la *interiorización* de las acciones que un estudiante realiza sobre ejemplos primarios, es mediante la variación de los tipos de funciones, diferentes a las canónicas (las más frecuentemente usadas), o las que se utilizan en los textos de estudio, por ejemplo, Larson y Edwards (2010) y Leithold(2000);el cambiar los tipos de funciones, puede llevar al estudiante a

investigar y poner énfasis sobre las condiciones que deben cumplir los dominios y recorridos de las funciones, para que la composición de las funciones esté bien definida.

Una concepción acción de la compuesta de funciones reales de variable real, como se puede ver, no es una construcción inmediata. Por lo menos, el estudiante debe conocer los algoritmos necesarios y tener presente el concepto dominio y recorrido de las funciones, para componerlas.

Concepción Proceso: Cuando el estudiante empieza a considerar las restricciones que verifica la compuesta de funciones, con ciertas condiciones, y ha generado composiciones de funciones con diferentes tipos de funciones, ha *interiorizado* estas acciones en un *proceso*, ya que puede determinar cuáles son las condiciones asociadas a las funciones que precisa componer, las que le permiten validar la compuesta de dos funciones, al considerar la pertinencia de ciertos dominios y recorridos, y al aceptar que una misma expresión algebraica puede dar origen a diferentes funciones asociadas.

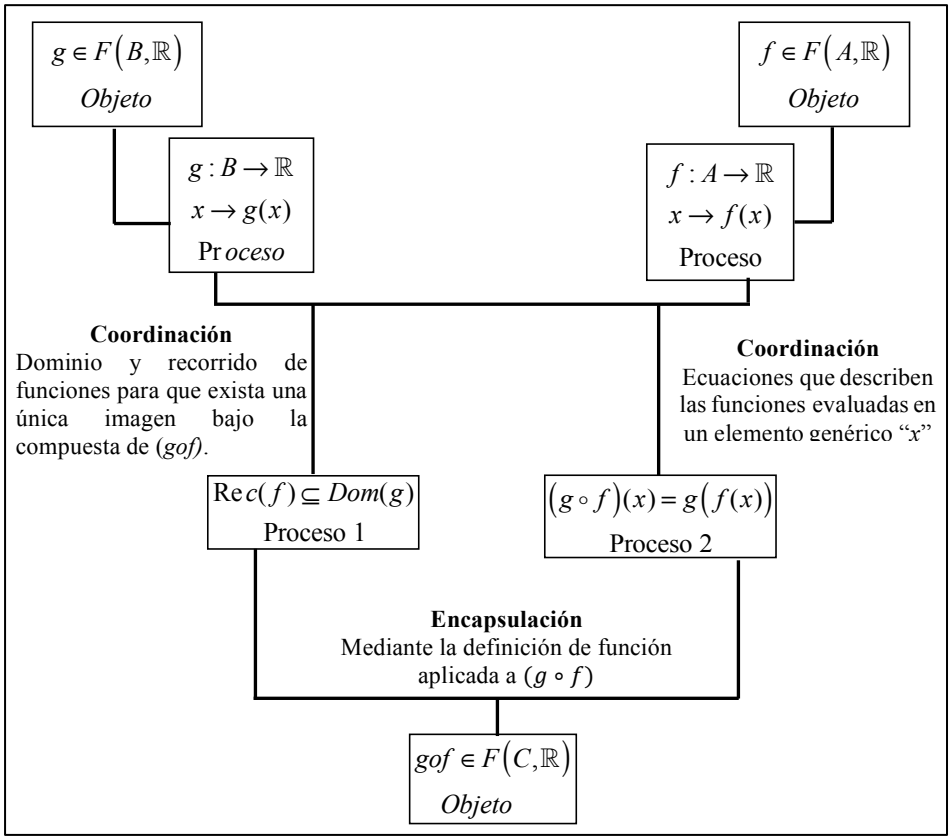


Figura 9. Descomposición Genética hipotética de la composición de funciones reales de variable real.

Esta construcción está determinada por la comparación de dos objetos; estos objetos son el resultado de la encapsulación de dos procesos que parecen construirse de manera independiente. Por un lado la composición de las ecuaciones de dos funciones reales, que determinan una ecuación de una nueva función (ver Figura 2), y por otro, la ecuación algebraica sobre la cual se precisan las condiciones $\mathrm{Re}\,c(f) \subseteq Dom(g)$, que determinan *(gof)(x)*.

En el caso de la composición de dos funciones reales de variable real, el estudiante debe determinar qué condiciones deben establecerse sobre *f*y *g*para ser compuestas, dichas condiciones son los coordinadores entre los procesos de las funciones*f* y *g*. Es por tanto necesario que el estudianteposea una concepción objeto de función, *f*, no solo para desencapsularla en su proceso como función, sino para que además le permita al estudiante realizar acciones de *g* sobrelos elementos*f(x)* para generar un nuevo elemento, *g(f(x))* mediante su encapsulación, que es el objeto $gof \in F(C,\mathbb{R})$, como se muestra en la Figura 2.

Resultados

A continuación se presenta, a modo de ejemplo, el análisis de algunas respuestas que hubo en lapregunta 4del cuestionario y que dieron lugar a tres resultados relevantes y no triviales para la investigación.

En las respuestas a la pregunta 4 (Figura 3) ocurrió que 32 de los 35 estudiantes procedieron, en primer lugar, a determinar la expresión algebraica de la compuesta entre*f* y *g*,y luego hallaron el dominio. Esto se interpreta, en términos de las construcciones dispuestas en la DG, que el 91% de los estudiantes *coordinan* las ecuaciones de las funciones *f* y *g* para obtener un nuevo *proceso,* la ecuación de$(g \circ f)(x)$.Posteriormente, este grupo de estudiantes determinó el dominio de aquella composición.

4. Considerando las funciones $f(x)$ y $g(x)$, hallar $(g \circ f)(x)$ y $Dom(g \circ f)$

a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = e^x$

b) $f(x) = x - 3$ y $g(x) = \ln(x + 5)$

c) $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = \sqrt{x - 16}$

Figura 10. Pregunta cuatro del cuestionario.

Un claro ejemplo de lo anterior son las producciones del estudiante E11 (Figura 4), que primero realiza las cuatro composiciones algebraicas y, posteriormente, sólo determina el dominio de dos de ellas, y como procedimientos separados.

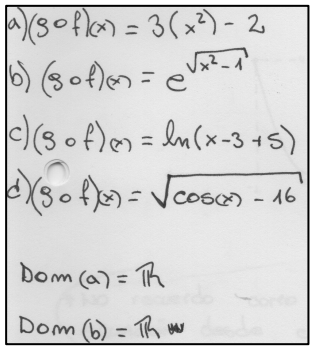


Figura 11. Respuesta del estudiante E11 a la pregunta 4 del cuestionario.

En cambio, el estudiante E28 (Figura 5)explicita el dominio y recorrido de las funciones *g* y *f*,cuya composición no está definida. Esto se interpreta desde la DG como que el estudiante ha *encapsulado* el *proceso 1* y el*proceso 2*, en el *objeto* compuesta de dos funciones, y de esa forma argumentó correctamente los cuatro incisos de la pregunta 4 del cuestionario.

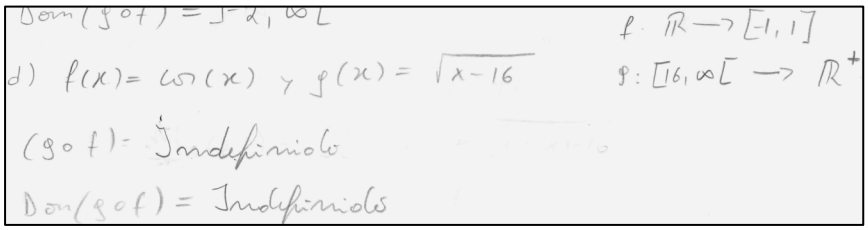


Figura 12. Respuesta del estudiante E11, en el inciso d)de la pregunta 4 del cuestionario.

Por otro lado, se encontró que 4 de los 35 estudiantes confundieron la condición para componer dos funciones con el dominio de la propia compuesta. Por ejemplo, el estudiante E2, en el primer inciso de la pregunta 4,muestra conocer cómo determinar el dominio de la composición entre *g* y *f* (Figura 6), sin embargo, E2 confunde el dominio de la composición con la condición de la propia compuesta.

En términos de APOE, el estudiante E2 muestra una *concepción proceso 2*, ya que es capaz de generar diferentes funciones con distintas ecuaciones; sin embargo, no muestra *concepción proceso 1*, puesto que no puede determinar correctamente cuáles condiciones permiten componer y, en consecuencia, no ha interiorizado cuáles son los dominios y recorridos pertinentes para componer. Esto conlleva a que el estudiante E2 no construye el *objeto* composición de funciones, ya que hay una disociación entre los *procesos 1* y *2*.

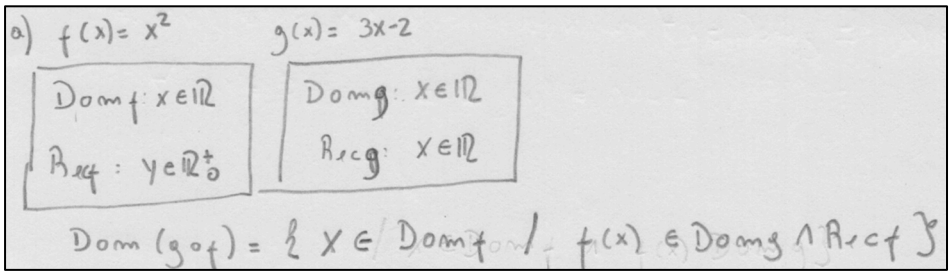


Figura 13. Respuesta del estudiante E2, en el inciso a) de la pregunta 4 del cuestionario.

A MANERA DE DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

El objetivo de esta investigación fue describir la manera en que un estudiante construye mentalmente la composición de funciones, e indagar en los conceptos que están involucrados en su aprendizaje. En esa línea, se encontró que las estructuras y mecanismos mentales, dispuestos en la DG hipotética de la composición de funciones, efectivamente están presentes en la construcción que hace cada estudiante que formó parte de los estudios de casos.

En lo específico, para construir el *objeto* composición de funciones, se vuelven de vital importancia dos mecanismos mentales: uno que permita *coordinar* el dominio y recorrido de dos funciones (digamos *gof*), de modo que $\mathrm{Re}c(f) \subseteq Dom(g)$ (*Proceso 1*); y una *coordinación* de las ecuaciones de las dos funciones, de modo que ocurra la evaluación de una función en la otra (*Proceso 2*).

La evidencia obtenida del análisis de los resultados muestra que los procesos 1 y 2 se construyen de forma separada: el 94% de los estudiantes logró *coordinar* las ecuaciones de dos funciones g y f, para obtener la ecuación de la función $g \circ f$. Esto ocurrió tanto con acciones sobre valores reales específicos como con elementos genéricos "x"; no obstante, sólo el 33% de los estudiantes logró *coordinar* los dominios y recorridos de las funciones g y f, para identificar correctamente la condición necesaria ($Rec(f) \subseteq Dom(g)$) de modo que $(g \circ f)(x)$ esté bien definida, para cada x en el respectivo dominio.

También se encontró que hay una tendencia de los estudiantesque, al componer dos funciones, sólo se realicela composición de las ecuaciones(*proceso 2*). El *proceso 1* se realiza cuando es solicitado en la misma pregunta, de lo contrario, los estudiantes no lo hacen. Aunque este primer estudio no permite concluir que siempre ocurre, se hace necesario realizar más investigación, incorporando una entrevista que permita profundizar el modo en que cada uno de ellos razona.

Referencias

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996).A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Shoenfeld, E. Dubinsky (Eds.) Research in collegiate mathematics education. Vol.2. Providence, RI: American Mathematical Society. P.1-32.

Capistran, R. (2005). Concepts of the chain rule for first term calculus: A comparison across students, instructors, and professors. Unpublished doctoral dissertation, University of Minnesota, Minneapolis.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John; D., Tolias, G. y Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The case of the chain rule. Journal of MathematicalBehavior, 16(4), 345–364.

Cottrill, J. (1999). Students` Understanding of the Concept of Chain Rule in first year Calculus and the Relation to their Understanding of Composition of Functions. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, Indiana.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Gordon, S. (2005). Discovering the chain rule graphically. Mathematics and Computer Education. 39(7), 627–635.

Hassani, S. (1998).Calculus students' knowledge of the composition of functions and the chain rule. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Normal.

Horvath, A. (2008). Looking at calculus students' understanding from inside-out: The relationship between the chain rule and function composition.Proceedings of the 11th Annual Conference on Research in undergraduate Mathematics Education, San Diego, CA.

Kabael, T. (2010). Cognitive development of applying the chain rule through three worlds of mathematics.Australian Senior Mathematics Journal, Vol. 24, N°2, 14-28.

Larson, R. y Edwards, B. (2010). Cálculo 1 de una variable. México: Mc Graw Hill.

Leithold, L. (2000). El cálculo. México: Universidad Iberoamericana

Maharaj, A. (2013). An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. South African Journal of Education, 33(1), 1–19.

Meel, D. (1999). Prospective teachers' understandings: Function and composite function. Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal. 1, 1-12.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2012). Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial. Paradigma. 33(1), 103-134.

Pérez, J. (2006). Cálculo Diferencial e Integral. Recuperado de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/perez-calculo1.pdf

Stake, R. (2010). Investigación con estudio de casos. Madrid, España: Ediciones Morata

Thoo, J. B. (1995). Composition and the chain rule using arrow diagrams on achievement in applying the chain rule. PRIMUS, 17(2), 131–147.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en Matemática Educativa a nivel superior. Educación matemática Santillana. 5-31. Recuperado el 14 de Julio de 2015, de http://www.redalyc.org/pdf/405/40517101.pdf

Uygur, T. &Özdas, A. (2007). The effect of arrow diagrams on achievement in applying the chain rule. PRIMUS, 17(2), 131–147.

Valdivia, C. y Parraguez, M. (2013). Una descomposición de la regla de la cadena: un modelo cognitivo para la construcción del concepto. Flores R. (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26, 825-834. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Webster, R. J. (1978). The effects of emphasizing composition and decomposition of various types of composite functions on the attainment of chain rule application skills in calculus. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University, Tallahassee.

[1] Este trabajo fue financiado por el Proyecto DID S-2015-01, de la Universidad Austral de Chile.

ESTADÍSTICA TEMPRANA EN LOS GRADOS K A 4: TRANSNUMERACIÓN EN KÍNDER[1]

Early statistics in grades K-4: transnumeration

Estrella, S.[a], Estrella, P[b]., Goldrine, T[c]., Morales, S[d]., Olfos, R[e]., Vidal, P.[f]

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; soledad.estrella@pucv.cl

Resumen

En este escrito se presentan algunos resultados de una investigación en curso, se exponen los abordajes e instrumentos que han permitido captar y analizar los procesos transnumerativos. Para el desarrollo de esta investigación se utiliza la metodología de Estudio de Clases con profesoras de kínder a cuarto grado, que permitió la emergencia de situaciones abiertas de análisis de datos. Dichas situaciones fueron trabajadas en el aula y sus resultados se plasman en las representaciones producidas por alumnos de nivel kínder. El análisis se enfoca específicamente en los procesos de transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999) de tres niños, esto es, en las estrategias usadas por los aprendices al cambiar entre representaciones de los datos para obtener más comprensión del fenómeno a analizar. Los resultados muestran algunas de estas técnicas transnumerativas en las producciones de los alumnos, evidenciando una estadística temprana en el aula de preescolar.

Palabras clave: *transnumeración, representaciones estadísticas, análisis de datos, preescolar.*

Abstract

In this paper the guidelines of the current investigation are presented, the approaches and instruments that have allowed capturing and analyzing processes are discussed. The Lesson Study methodology with teachers through kinder and fourth grade, allowed the emergence of open situations about data analysis. Such situations were worked in the classroom and whose results are reflected in the representations produced by students from kindergarten grade. The analysis focuses specifically on transnumeration processes (Wild and Pfannkuch, 1999), that is, the strategies used by learners when switching between representations of the data for further understanding of the phenomenon to be analyzed. The results show some of these transnumerativs techniques in the productions, giving evidence of an early statistics in the preschool classroom.

Keywords: *transnumerations, statistical representations, data analysis, preschool.*

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se centra en las características del pensamiento estadístico y los procesos activados cuando se cambia de representación, esto es, la habilidad de transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999) de los aprendices enfrentados a una situación que aborda la emergencia de representaciones estadísticas. Dicha situación ha sido construida por un grupo de profesores de primaria en el marco del Estudio de Clases japonés, llevado a cabo por los mismos enseñantes para el mejoramiento de la clase diseñada, los cuales han adoptado en su enseñanza el ciclo investigativo conocido como PPDAC (Wild y Pfannkuch, 1999), que muestra la Figura 1.

La situación presentada al curso ha sido diseñada para el nivel de kínder, es innovadora en cuanto propone el análisis de datos pese a que el currículo actual no lo explicita. A continuación se detalla

la matemática que exige el actual marco curricular chileno para este nivel, luego se precisa el proceso de transnumeración que se observará en las producciones de los niños, y la metodología de Estudio de Clases que adoptaron los profesores.

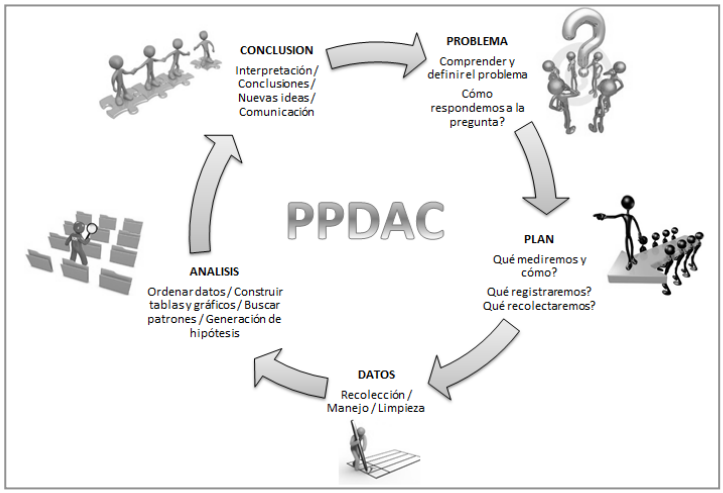


Figura 1. Ciclo investigativo PPDAC como modelo de enseñanza, (elaboración propia).

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Matemática en el segundo nivel de transición

La organización curricular de Educación Parvularia, establece en sus bases curriculares aprendizajes esperados en diversos ámbitos, núcleos y ejes. Específicamente el núcleo de "Relaciones lógico matemáticas y cuantificación" considera los diferentes procesos de pensamiento de carácter lógico matemático a través de los cuales los niños intentan interpretar y explicarse el mundo. En este núcleo corresponde la interpretación de relaciones causales y aplicación de procedimientos en la resolución de problemas de su vida cotidiana (Mineduc, 2005).

En el tramo etario hacia los 6 años, se espera que el niño utilice diversos cuantificadores al comparar cantidades de objetos: más que, menos que, o igual que; que clasifique elementos por tres atributos a la vez; que emplee los números para identificar, ordenar, representar cantidades y contar uno a uno, al menos hasta el 20; pudiendo ordenar secuencia de objetos.

Con este marco orientador del currículo, en específico en el núcleo de cuantificación, se aprecia la importancia de la adquisición del número a esta edad, y especialmente el papel que tiene el conteo en la construcción del número.

Por otra parte, el currículo enuncia que la educadora en el segundo nivel de transición, debiera poseer la función de mediadora en los conflictos socio cognitivos de los niños, mediante la puesta en común, de modo de organizar el intercambio, el debate, la argumentación, la confrontación, y la validación, entre otros.

Además, la educadora requiere reconocer las cinco competencias que poseen los niños cuando tienen que hacer frente a la tarea de contar, a saber: (1) correspondencia término a término, donde cada elemento de la colección que se va a contar debe corresponderse, de manera únivoca, con una, y sólo una, palabra-número de la cantinela; (2) orden estable, la cantinela que se escoja para contar deber ser recitada siempre de la misma forma, siguiendo un orden estable; (3) abstracción, contar una colección supone interesarse solo por el aspecto cuantitativo de la misma, dejando de lado las características físicas de los objetos contados; (4) no pertinencia del orden, el número obtenido al

contar una colección no depende del orden en el que se enumeran sus elementos; (5) cardinalidad, el número enunciado en último lugar representa al elemento correspondiente y al total de la colección.

En relación a la manera de enfrentar la resolución de un problema matemático, el documento de trabajo (Mineduc, 2005) orienta a que la situación problema planteada debiese permitir que los niños descubran las estrategias para resolverlo. Esta puede presentarse como datos de situaciones cotidianas en que los niños determinen los diversos caminos que se pueden tomar para resolver la situación, utilizando los números y aplicando operaciones matemáticas.

En cuanto al docente, en los estándares nacionales en la formación inicial, se espera que la futura educadora de párvulos demuestre el logro del estándar "maneja estrategias pedagógicas basadas en su comprensión de las nociones fundamentales de las matemáticas" (Mineduc 2012, p. 54) especialmente en el manejo de nociones teóricas y de la didáctica de las matemáticas para la educación de la primera infancia, a saber, entre otros: comprender el concepto de número; comprender nociones de datos y azar (estadística descriptiva, conceptos básicos de probabilidades y sistemas de representación de información cuantificable); conocer y aplicar estrategias didácticas que favorezcan en los niños la resolución de problemas matemáticos mediante procesos mentales de conteo, comparación, agrupación, ordenación, estimación y abstracción de reglas.

Transnumeración en los aprendices

Este término, que identifica al proceso de "cambiar de representación para generar comprensión" (Wild & Pfannkuch, 1999, p. 227), responde a que algunas veces en la exploración de datos una representación pone de manifiesto algo nuevo y desconocido, entregando más comprensión del problema. Un atributo connatural a las representaciones es la transnumeración, este proceso que hace referencia a los elementos de pensamiento involucrados en la comprensión de la información relativa a las diferentes representaciones de los datos en sus diversas modalidades (representación tabular, cálculo de resúmenes estadísticos, representaciones gráficas, etc.). Pfannkuch y Rubick (2002, p.5) identificaron instancias específicas de transnumeración en el pensamiento estadístico: toma de medidas que capturen las características de la situación real; transformación de los datos iniciales en otras representaciones –tales como datos ordenados, gráficos, tablas y medidas estadísticas de resumen– para buscar el sentido en los datos; y comunicación a los demás en términos del sentido de la situación real. Shaughnessy (2007) señala, en todo caso, que transnumeración es un término que necesita más precisión, y que una cultura de aprendizaje y enseñanza que la estimule podría evolucionar si profesores y desarrolladores curriculares consideraran las recomendaciones avaladas por investigaciones que indican la necesidad de que los alumnos tengan más oportunidades de construir sus propias representaciones de datos más que trabajar en tablas y gráficos ya hechos (Estrella y Olfos, 2015).

Estudio de Clases con los enseñantes

En el Estudio de Clases inicialmente un grupo de docentes preparan una clase o un conjunto de clases, seleccionando materiales relevantes para llegar al objetivo definido; luego discuten, y diseñan su plan de clase. Posteriormente, uno de los docentes participantes en el diseño implementa la clase de estudio o de investigación, en la cual el grupo que diseñó la clase participa como observador crítico; además, pueden presenciar la clase otros profesionales del ámbito de la educación. En la ejecución de la clase, el profesor comienza con la revisión de la sesión anterior, luego presenta el problema del día, el desafío en forma de pregunta; los estudiantes deben comprender el problema, luego trabajan de forma individual o grupal, discuten los métodos de resolución descubiertos, finalmente se genera la puesta en común con discusión y argumentación, desde la cual surgen las conclusiones.

En el Estudio de Clases y en el plan de la clase es posible evidenciar algunos procesos reiterativos que debiese realizar el profesor, esto es, monitorear, anticipar y seleccionar. Esto significa monitorear cómo los alumnos exploran y resuelven la tarea, las estrategias y representaciones que usan; anticiparse a los errores o las demandas de la tarea, lo cual requiere que el profesor haya hecho la tarea, buscando más de una estrategia de solución (reparando tanto en correctas como erróneas); y seleccionar a los alumnos que compartirán sus estrategias y representaciones distintas y promoverán la discusión, según el monitoreo realizado durante la clase (Estrella y Olfos, 2013).

Los componentes del modelo se evidencian en la operacionalización del Plan de Clases que precisa; en nuestro caso: la situación problema de Estadística y las preguntas claves (conceptos estadísticos fundamentales, datos reales, e indagación); la anticipación a las posibles respuestas de los alumnos (comprensión del razonamiento de los alumnos y argumentación estadística); la intervención docente (monitoreo, explorar y aprender desde datos, y argumentación estadística); y la evaluación de la marcha de la clase (evaluación formativa).

METODOLOGÍA

La clase

Los datos como una de las ideas fundamentales en Educación Estadística, fueron reales y motivadores, ver Figura 2, y corresponden a las actividades físicas preferidas de cada uno de los 28 alumnos.



Figura 2. Datos de las actividades físicas preferidas de los alumnos del kínder.

Las preguntas que guían esta investigación son ¿Qué representaciones producen los alumnos de K a 4 cuando se enfrentan a tareas de análisis de datos? Y nos preguntamos ¿Qué esquemas mentales subyacen a las representaciones producidas por los alumnos?

Perspectiva teórica para analizar las tareas

El marco de transnumeración propuesto por Chick (2004) se aplica a los datos con el objetivo de encontrar y mostrar su comportamiento. Cada técnica trasnumerativa (ver Tabla 1) involucra algún "cambio en la representación", creando una nueva variable, organizando los datos en forma diferente, o representándolos en una forma visual. Tanto graficar, tabular como cambiar de representación son tipos de transnumeración.

Tabla 1. Marco de técnicas trasnumerativas (Chick, 2004)

Técnica	Descripción
Ordenamiento	Los datos se ordenan por algún criterio. No surgen nuevas variables.
Agrupamiento	Los datos se agrupan de acuerdo a algún criterio. Esto crea una nueva variable. El cambio de variable puede involucrar de antemano un tipo de transnumeración.
Selección de subconjunto	Un subconjunto de datos se selecciona para una transnumeración.
Cambio de tipo de variable	Una variable numérica se piensa en términos categóricos o una variable categórica se piensa en términos numéricos u ordinales.
Cálculo de frecuencia	Las frecuencias de ocurrencia de valores de una variable categórica. Crea una nueva variable.
Cálculo de proporción	Proporciones, fracciones en relación al todo. Esto crea una nueva variable.
Graficación/tabulación	Algunas o todas las variables en los datos (en su forma presente) son graficadas o tabuladas.
Cálculo de tendencia central	Una medida de tendencia central (la media, e. g.) para una variable. Puede crear una nueva variable.
Cálculo de medida de dispersión	Alguna medida de dispersión de los valores asociado con una variable numérica. Puede crear una nueva variable.
Otros cálculos	Término genérico, reconocer que son posibles otros cálculos estadísticos sobre los datos (suma, coeficientes de correlación, e. g.).

Sujetos

Se muestra un caso de un grupo de tres niños, de nivel kínder, un curso de 28 alumnos de un establecimiento subvencionado mixto de la región de Valparaíso. Los tres niños trabajan en equipo para responder a la situación problema planteada.

Los 28 alumnos de este nivel kínder produjeron un total de 8 poster, creados en grupos de 3 o 4 alumnos.

Procedimientos

La situación propuesta en el grupo de cuatro docentes de Estudio de Clase giraba en torno a la pregunta "¿Cómo podemos organizar los datos de nuestra actividad física preferida, para saber cuáles son las actividades físicas preferidas del kínder B?".

En el modelo PPDAC, los datos producidos por los alumnos fueron recogidos en la clase anterior, en ella se les presentó a cada alumno una hoja con 6 imágenes de actividades físicas, de las cuales solo podían elegir y recortar la más preferida por cada uno. Estas imágenes recortadas son los 28 datos que los mismos alumnos pegaron en un papel craft exhibido en su sala. En la clase que se expone en este escrito, la profesora ofrece a cada grupo dos hojas para recortar.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Análisis preliminares: transnumeración en la producción

El grupo conformado por dos niños varones (A1 y A3) y una niña (A2), presentan en un papel craft la representación de los datos en forma horizontal (Ver Figura 3). La representación de los datos que produjeron los alumnos A1, A2 y A3 se muestra en la Figura 3. Un momento planificado de la clase en que los alumnos comparten las ideas y estrategias de resolución con el pleno del curso, se muestra en la Figura 4. El episodio transcrito de este momento, detalla el diálogo y preguntas que realiza la docente, y las acciones y argumentos escritos y orales de estos alumnos.



Figura 3. Producción del grupo conformado por los alumnos A1, A2 y A3.



Figura 4. Frente al pleno, alumno A1 escribe la frecuencia de cada categoría de la variable.

Cada grupo presenta y explica lo realizado al pleno del curso, para ayudar a la verbalización la profesora reitera la pregunta central de la clase, ¿Cuál es la actividad física preferidas del kínder B? Antes de explicar el alumno A1 expresa que quiere contar.

Profesora: cuénteles a sus compañeros [lo que hicieron].

A1: Íbamos a contar esto [indica una fila de datos] para saber cuál tiene más.

Profesora: Usted quiere contar, para saber qué tiene más. Aquí tengo un plumón, tenga…

A2: esta…la bicicleta tiene más!

A1: [comienza a contar horizontalmente y escribe la cantidad al final de la fila]

Profesora: ¿Qué hizo el compañero? Chicos? [preguntando al pleno del curso]

Otra alumna [del pleno]: Le puso los números!

Profesora: ¿Cómo lo hicieron?

A2: Los agrupamos.

Profesora: Muy bien, los agruparon.

Profesora: Así como lo tiene este grupo [indicando el poster con la representación] yo puedo saber cuál es la actividad física preferida de esta mesa [dice mesa en vez de el Kinder B]?

A3: La bicicleta

Profesora: ¿Por qué tú piensas que la bicicleta es la favorita?

A1: porque son más!

Tabla 2. Técnicas trasnumerativas evidenciadas por los alumnos A1, A2 y A3.

Técnica	Descripción
Ordenamiento	En cada categoría, A1, A2 y A3 ordenan horizontalmente los datos.
Agrupamiento	A1, A2 y A3 agrupan los datos según las distintas seis categorías de actividades físicas.
Cálculo de frecuencia	La frecuencia de ocurrencia de valores es usada por A1 de una variable categórica nominal: actividad física. El alumno permite crear una nueva variable numérica: la frecuencia.
Graficación/tabulación	A1, A2 y A3 usan todos los datos de la variable actividad física del kínder y las representan en un gráfico.
Cálculo de tendencia central	A2 señala "la que tiene más", estableciendo a la moda de forma visual. La alumna solo requiere la visualización de la representación gráfica.
Otros cálculos	A1 usa el conteo sobre los datos para reconocer "cuál tiene más".

Este grupo de alumnos ha podido expresar sus ideas frente a los compañeros, A2 y A1 muestran distintas estrategias: uno no requiere determinar cardinalidad para responder la pregunta central de la clase, en cambio el otro, requiere el conteo para establecer la cardinalidad, (que en términos estadísticos citamos como frecuencia de la categoría de la variable).

A modo de conclusiones preliminares

La descripción y las evidencias de las técnicas trasnumerativas que los alumnos pusieron en juego al intentar explicarse e interpretar el comportamiento de los datos de la situación de actividades físicas, son detalladas en la Tabla 2. Desde el marco de análisis de las diez técnicas propuestas por Chick (2004), en la representación gráfica tipo pictograma-barra producida por estos alumnos de kínder y la verbalización de sus argumentos, se observan seis de estas técnicas.

Respecto a las interrogantes investigativas ¿cómo los alumnos tratan de construir significados desde los datos? y ¿qué representaciones producen cuando se enfrentan a una tarea de análisis de datos? son analizadas desde las técnicas transnumerativas, como señalaban Estrella y Olfos (2012) los

esquemas que se evocan no solo son matemáticos, sino estadísticos, donde los datos y el contexto se integran, y las representaciones toman relevancia para comunicar los hallazgos.

La situación problema de final abierto ha permitido a estos alumnos apreciar el uso del número y del conteo, al reinterpretar y reexplicarse estos saberes que han obtenido al aplicar el sentido común en esta experiencia con datos reales y motivadores. Valoramos que el reconocimiento de las técnicas y del proceso de transnumeración entrega un conocimiento al educador que relevan el sentido de organizar los datos para obtener información. Al pesquisar las técnicas transnumerativas en las producciones hemos evidenciado una estadística temprana en el aula de preescolar.

Referencias

Chick, H. (2004). Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation. Mathematics education for the third millennium: Towards 2010, 167-174.

Estrella, S., & Olfos, R. (2015). Transnumeración de los datos: El caso de las tablas de frecuencia. En XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Chiapas, México.

Estrella, S., & Olfos, R. (2013). Estudio de clases para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística en Chile. En A. Salcedo (Ed.), Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas (pp. 167 – 192). Programa de Cooperación Interfacultades. Universidad Central de Venezuela, 2013. ISBN: 978-980-00-2744-8.

MINEDUC (2012). Estándares orientadores para Carreras de Educación Parvularia. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

MINEDUC (2005). Bases Curriculares de la Educación Parvularia. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

Pfannkuch, M., & Rubick, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. Statistics Education Research Journal, 1(2), 4-21.

Shaughnessy, J.M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F.K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 957-1009). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), 223-248.

[1] Esta investigación ha sido realizada con el financiamiento de CONICYT a través del proyecto Fondecyt N°11140472, "Análisis de datos estadísticos y sus representaciones en los niveles kínder a cuarto grado: el caso de las tablas."

COMUNICACIONES BREVES

FOMENTO DE HÁBITOS SALUDABLES MEDIANTE UN PROYECTO ESTADÍSTICO

Díaz-Levicoy, D.[a], Sánchez, J.C.[b] y Cortés, C.[c]

[a]Universidad de Granada, [b]Colegio Proyección Siglo XXI, [c]Editorial Cal y Canto
dddiaz01@hotmail.com[a], jcarlos163@hotmail.com[b], camict@gmail.com[c]

Resumen

En esta comunicación se presentan los resultados de una experiencia pedagógica de aula desarrollada con estudiantes de primer curso de Educación Secundaria en Chile, que está basada en la realización de un proyecto estadístico de análisis del Índice de Masa Corporal de los alumnos del colegio y la realización de afiches publicitarios de acuerdo a los resultados obtenidos. Por medio de esta experiencia se valora positivamente el aporte del trabajo con proyectos estadísticos, el trabajo en equipo y la utilización de datos reales; así como reforzar habilidades extra-matemáticas.

Palabras clave: *proyectos, estadística, experiencia de aula, publicidad*

INTRODUCCIÓN

El desafío de enseñar matemática, y la estadística en nuestro caso, hacen que se busquen metodologías que faciliten al estudiante la comprensión de los contenidos disciplinarios, que promueva la investigación, así como el uso de tecnologías de la información y comunicación, el trabajo en equipo, que atiendan problemas de la vida cotidiana y, que en lo posible, trabajen con datos reales. En el caso de la experiencia de aula que describimos a continuación, se basa el análisis del Índice de Masa Corporal con elementos de estadística básica y el diseño de afiches publicitarios a partir de los resultados obtenidos, donde se ha realizado un trabajo mediante proyectos que describen Batanero y Díaz (2004, 2011).

En esta experiencia aprovecha las cualidades de la estadística al permitir abordar problemas reales y de interés para los estudiantes, conlleva la toma de decisiones y desarrollo de habilidades comunicativas, y favorece el trabajo en equipo. Por otro lado, el uso de los proyectos aproxima a los estudiantes a procesos de investigación, y es una herramienta didáctica, pedagógica y metodológica potente para abordar distintos temas del currículo oficial, que tiene relación con teorías de aprendizaje, pues los estudiantes tienen un rol central en su aprendizaje, el profesor tiene un rol mediador y el entorno del estudiante es una fuente para acceder a información sobre el tema investigado (Díaz-Levicoy, Aguayo y Cortés, 2014).

La actividad se desarrolló con estudiantes de primer año de Educación Secundaria, que tenía como objetivo "Aplicar conocimientos básicos de Estadística en el análisis del IMC de los estudiantes del colegio, promoviendo el desarrollo de investigaciones sencillas y crear afiches publicitarios—que contengan contenidos matemáticos—de acuerdo a la información obtenida".

En los siguientes apartados describimos aspectos teóricos sobre el uso de proyectos, la descripción de la experiencia y los principales resultados.

ANTECEDENTES

La estadística basada en proyectos

La enseñanza de la estadística tiene la facilidad de tener un carácter práctico, donde el estudiante salga de la posición estática que tradicionalmente ha tenido en el aula y en su proceso de formación. Es así como el trabajo con proyectos es una herramienta clara para aplicar los contenidos teóricos que se trabajan en clases; permite trabajar habilidades investigadoras; permite el trabajo en equipo, entregar opiniones, respetar diferentes puntos de vista y llevar a consensos; y comunicar ideas.

Algunas de las ventajas del trabajo con proyectos, según Batanero y Díaz (2004), son:

- Requiere el dominio de diversos contenidos: aplicaciones de la estadística; conceptos y propiedades; notaciones y representaciones; técnicas y procedimientos; actitudes.
- Motiva a los estudiantes, porque abordan situaciones con datos reales.
- Permiten trabajar el razonamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999).

En el desarrollo de un proyecto, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística, se siguen las etapas propias de un trabajo de investigación: plantear un problema, discutir sobre los datos a recoger (y su viabilidad), recolectar y analizar los datos, concluir aspectos relevantes del trabajo. Lo que Batanero, Díaz, Contreras y Arteaga (2011) señalan que:

> Los proyectos se conciben como verdaderas investigaciones, donde tratamos de integrar la estadística dentro del proceso más general de investigación. Deben escogerse con cuidado, ser realistas (incluso cuando sean versiones simplificadas de un problema dado), abiertos y apropiados al nivel del alumno (p. 22).

En algunos casos, ya sea por la limitación del tiempo o por que el profesor quiere enfatizar en algún aspecto, puede suceder que el proyecto no implique la recogida de datos y que estos sean entregados por el profesor; por lo que no tiene una estructura rígida. En el caso que el proyecto conlleve el desarrollo de las etapas de una investigación, el profesor debe guiar a los estudiantes en la definición del problema y pregunta de investigación, pues se considera una de las fases de mayor dificultad (Batanero, Díaz, 2004; Batanero, Díaz, Contreras y Arteaga, 2011). También, el profesor, es el encargado de guiar a los estudiantes en lo que deben aprender; así como motivarlos para usar diferentes fuentes para recoger información, uso de diferentes técnicas y variables. En el caso de muestra experiencia, los estudiantes recurrían a los profesores de Educación Física, quienes les facilitaron las datos de peso y altura de los estudiantes de cada curso, mediciones que realizan al comenzar cada semestre.

Matemática y publicidad

El término publicidad no tiene una definición consensuada en el ámbito comunicacional (Méndiz, 2007), pero suele entenderse como un género de carácter discursivo que se ha desarrollado con la finalidad de persuadir y convencer a un público; usando con frecuencia los medios de comunicación para lograr persuadir a quienes va dirigida la publicidad.

Por otro lado, las unidades educativas deben generar los espacios para que sus estudiantes vean la utilidad de la matemática en diferentes contextos, es decir, mostrar a personas que hacen matemática y mostrar a quienes las usan en ciencias naturales y sociales, artes y tecnología (MINEDUC, 2009). Tal como los explicitan los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Propuesta Ajuste Curricular (MINEDUC, 2009): "[proporcionar] herramientas conceptuales para analizar la información cuantitativa presente en las noticias, opiniones, publicidad y diversos textos, aportando al desarrollo de las capacidades de comunicación,

razonamiento y abstracción e impulsando el desarrollo del pensamiento intuitivo y la reflexión sistemática" (p. 2).

Pese a que es común ver elementos matemáticos en la publicidad, ya sea para reforzar ideas, ser precisos con la información para llamar la atención; debemos tener cuidado, pues muchas veces su uso se hace en forma absurda y errónea (Muñoz, 2005). Por ejemplo, Cavalcanti, Natrielli y Guimarães (2010), indagan sobre los gráficos estadísticos en diarios y revistas, mostrando que estos eran comunes en la publicidad, pero presentaban errores en las escalas, ausencia de títulos y no presentan leyendas.

Descripción de la experiencia

La experiencia pedagógica de aula se desarrolló con alumnos de 1º año de Educación Media (Secundaria) del Colegio Proyección Siglo XXI de Osorno (Chile). Colegio particular subvencionado y de modalidad humanista-científico, que entrega formación a los tres niveles educativos —pre-básica (infantil), básica (primaria) y media (secundaria) —. El curso con el que se trabajó tenía 11 estudiantes, los que se dividieron en cuatro equipos según afinidad. La tarea tenía como objetivo analizar estadísticamente datos reales y comunicar sus resultados y conclusiones, para lograr esto los estudiantes debieron pedir a los profesores de Educación Física los datos de peso y altura de los alumnos del colegio y obtener el IMC, para ello, a cada grupo de trabajo se le asignaron 3 o 4 cursos para realizar su estudio. La división de los cursos analizados fue:

- Equipo 1. Tres estudiantes. Pre-kinder, Kinder y 1º de Educación Primaria (4–7 años).
- Equipo 2. Tres estudiantes. 2º, 3º, 4º, 5º de Educación Primaria (7–11 años).
- Equipo 3. Dos estudiantes. 6º, 7º, 8º de Educación Primaria (11–14 años).
- Equipo 4. Tres estudiantes. 1º, 2º, 3º, 4º de Educación Secundaria (14–18 años).

La experiencia de aula se desarrolló en el primer semestre del 2013, desde el 12 de abril al 5, con una de julio, los días viernes, durante el Taller de Matemática cuya duración era de 90 minutos. Las etapas principales de este proyecto fueron: planificación del trabajo de cada equipo; definición del problema; definir elementos teóricos que sustentarán el trabajo; obtención de datos, cálculo de IMC, resumen en tablas y gráficos y su posterior análisis; entrega de avances del informe para que el profesor los corrija; diseño de afiches con contenidos matemáticos según resultados (selección de curso, ya sea por sobrepeso o bajo peso); presentación de los afiches a los cursos elegidos; entrega borrador de información al profesor; presentación frente al curso y profesor de los resultados obtenidos.

En el desarrollo de la experiencia se realizaron diferentes evaluaciones, entre ellas:

- **Formativa:** revisión de avances entregado por cada equipo, en las que se sugieren mejoras.
- **Sumativa:** al finalizar cada equipo presenta sus resultados mediante un informe escrito y una presentación oral frente al curso donde se exponen los resultados del análisis de datos y las creaciones publicitarias.
- **Co-evaluación:** los estudiantes de forma individual valoran el trabajo realizado por sus compañeros en la exposición, así como el trabajo de cada integrante de su equipo.
- **Auto-evaluación:** el estudiante valora el trabajo que realizó al interior de su equipo.

RESULTADOS Y EVIDENCIA DE LA EXPERIENCIA

Informe escrito

Cada equipo debe preparar un documento escrito con los resultados de su trabajo de investigación, el cual debe seguir una estructura aproximada a un reporte de investigación: portada (identificación de la institución, título del trabajo, alumnos, fecha); índice del informe; introducción y objetivos; elementos teóricos; exposición de los resultados (tablas, gráficos y su respectiva interpretación); conclusiones; referencias bibliográficas.

Tras el análisis de los informes de observa que algunos no presentan índice y bibliografía; en la introducción algunos no mencionan los objetivos y/o estructura del escrito; en lo antecedentes teóricos exponen los conceptos fundamentales para el trabajo, aunque se observa que los estudiantes extraen ideas textuales de internet, sin interpretarlas e indicar la fuente.

Sobre la organización y representación de los datos, se observa que los usados con mayor frecuencia son los gráficos de barras y sectores, así como se observa ausencia de elementos que faciliten la lectura de los gráficos como título del gráfico, titulo de los ejes (gráfico de barras) o leyenda (gráfico de sectores).

Creaciones publicitarias

Tras en análisis de los IMC, cada equipo elige un curso como público para crear afiches publicitarios para promover la alimentación saludable y/o la actividad deportiva, podría ser un curso en el que los estudiantes tuvieran sobrepeso o bajo peso. La condición que debe cumplir el afiche publicitario es que contenga contenidos matemáticos que sean comprendidos por los estudiantes a los que va dirigido.

Como ejemplo podemos observar un afiche diseñado por el Equipo 1 (Figura 1), grupo que decidió que la publicidad estaría dirigida a todos los niños que les tocó analizar ya que presentan características similares. En ella, debido a que la matemática que manejan es casi nula, se inténtala establecer “relaciones” entre el consumo de frutas y verduras (representada por una zanahoria) y la felicidad del conejo, y la relación entre el consumo excesivo de dulces y la tristeza del conejo.



Figura 1. Creación publicitaria grupo 1

En la Figura 2, mostramos en ejemplo de uno de los afiches realizados por el Equipo 2. En él se usa los contenidos de adición y potencias, y donde se observa a Bob Esponja con sobrepeso producto del consumo excesivo de chocolate. Como dificultad se observa el uso de una potencia de exponente dos, pues recién podría ser comprendido en quinto de Educación Primaria.

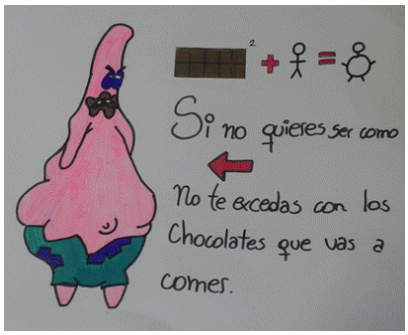


Figura 2. Creación publicitaria grupo 2

CONCLUSIONES

En la experiencia pedagógica de aula, basada en el trabajo con proyectos, ha permitido que los estudiantes trabajen con datos reales (peso y talla de los alumnos del colegio), apliquen contenidos matemáticos (estadísticos) que han trabajados con anterioridad, y realizar afiches publicitarios según los resultados del análisis de datos y que en su elaboración usen elementos matemáticos. Del mismo modo, el trabajar la creación de publicidad con contenidos matemáticos permite trabajar habilidades no matemáticas, exigiendo dominio de un contenido matemático (generalmente sencillo) y capacidad para articular coherentemente el mensaje publicitario y los elementos matemáticos.

REFERENCIAS

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. P. Royo (Ed.), Aspectos didácticos de las matemáticas (pp.125-164). Zaragoza: ICE.

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). Estadística con proyectos. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M. y Arteaga, P. (2011). Enseñanza de la Estadística a través de Proyectos. En C. Batanero y C. Díaz (Eds.), Estadística con Proyectos (pp. 9- 46). Granada: Universidad de Granada.

Cavalcanti, M.R., Natrielli, K.R. y Guimarães, G.L. (2010). Gráficos na mídia impressa. BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 23(36), 733-751.

Díaz-Levicoy, D., Aguayo, C.G. y Cortés, C. (2014). Enseñanza de la estadística mediante proyectos y su relación con teorías de aprendizaje. Premisa, 16(62), 16-23.

Méndiz, A. (2007). Diferencias conceptuales entre publicidad y propaganda: una aproximación etimológica. Questiones Publicitarias, 12(1), 43-61.

MINEDUC (2009). Propuesta Ajuste Curricular. Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios: Matemática. Santiago: Consejo Superior de Educación.

Muñoz, J. (2005). 25^2 líneas: las matemáticas en la televisión. Comunicar, 25(2). Recuperable en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=15825223

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), 223-265.

LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN EN EL ESTUDIO DE LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

Batanero, C.[a], López-Martín, M.M.[b], González-Ruiz, I[c], Díaz-Levicoy, D.[d]

[a]Universidad de Granada (España), [b] Universidad de Cantabria (España)
batanero@ugr.es, mariadelmarlopez@ugr.es, ignacio.gonzalezruiz@unican.es, dddiaz01@hotmail.com

Resumen

Dentro del conjunto de medidas utilizadas en el análisis de datos encontramos las medidas de dispersión. Aunque estas medidas son esenciales para obtener conclusiones sobre algunas de las herramientas empleadas tanto en la estadística descriptiva como en la inferencia estadística, las investigaciones sobre ellas en educación estadística son escasas. En el currículo español vigente, dentro de los diversos niveles educativos, su estudio se introduce, inicialmente, vinculándolo al concepto de distribución de un conjunto de datos para posteriormente generalizarla, de forma progresiva, al estudio de las distribuciones de probabilidad, estimación de parámetros y el contraste o prueba de hipótesis. La finalidad de este trabajo es analizar cómo se introduce y desarrolla el concepto de dispersión en el estudio de la inferencia estadística en el currículo de segundo curso de bachillerato de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales.

Palabras clave: *Inferencia estadística, medidas de dispersión, currículo de bachillerato.*

INTRODUCCIÓN

Las medidas de variabilidad, o comúnmente conocidas como medidas de dispersión, juegan, junto a las medidas centrales, posición y forma, un papel importante en el análisis de datos. La presencia de dispersión en valores, tanto poblacionales como muestrales, es un hecho real presente en cualquier investigación. Estepa y del Pino (2013) justifican la importancia que tiene la dispersión citando a Cobb y Moore (1997), quienes indican que los datos no son sólo números, sino que son números con un contexto.

El estudio de dichas medidas alcanza una gran relevancia en la formación estadística. Por ejemplo, Snee (1990) establece que el estudio de la dispersión es un concepto fundamental en estadística. Otros autores, como Wild y Pfannkuch (1999) indican que este tipo de medidas adquieren gran relevancia como uno de los componentes básicos en el pensamiento estadístico. En este sentido, Moore (1990, p. 135) lista cinco elementos fundamentales en el pensamiento estadístico, de los cuales tres están asociados a la variabilidad aleatoria: (1) percepción de su ubicuidad en el mundo que nos rodea; (2) competencia para su explicación, identificando los factores de las que depende; (3) habilidad de cuantificarla que implica comprender y saber aplicar el concepto de dispersión.

Aunque, tal y como han puesto de manifiesto Sánchez, Borim y Coutinho (2011), la dispersión es un tema fundamental dentro de la estadística, las investigaciones en Educación Estadística sobre estas son escasas. La finalidad de este trabajo es analizar cómo se trata la dispersión dentro de la inferencia estadística con el fin de orientar a los profesores en su labor docente.

Fundamentos teóricos y metodología

El análisis realizado en este trabajo se fundamente sobre las ideas del enfoque onto-semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), que asume que los objetos matemáticos surgen de las prácticas (acciones u operaciones) como respuesta a situaciones problemáticas extra o intra matemáticas. En

este enfoque, el término "objeto matemático" tiene un significado muy amplio y puede verse como el conjunto de prácticas asociadas a dicho objeto y puede ser asimismo institucional y personal.

De acuerdo con nuestro referente teórico, las prácticas matemáticas se caracterizan mediante los objetos que intervienen en ellas, que pueden ser de diferente naturaleza: situación-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Todos estos objetos están relacionados, entre sí, formando configuraciones, que serán epistémicas si son propias de una institución matemática o de enseñanza y cognitivas si son específicas del alumno. El aprendizaje del alumno depende sustancialmente del significado institucional presentado en la enseñanza, por lo que es importante analizar el significado institucional de referencia fijado en las directrices curriculares para poder prever las posibles dificultades del aprendizaje del estudiante.

Nuestro trabajo es un estudio de tipo teórico. Para llevarlo a cabo se analizó el contenido de las directrices que fijan el currículo (MECD, 2015), centrándonos en el segundo curso de bachillerato de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, donde aparece el tema. Con un proceso inductivo, típico de la metodología cualitativa, se analizaron los objetos matemáticos implícitos en la descripción de contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje descritos en dicho documento. Posteriormente se analizaron recursos interactivos en Internet que podrían aplicarse en el estudio del tema.

INFERENCIA ESTADÍSTICA

El estudio de las medidas de dispersión dentro del ámbito de la inferencia estadística aparece, de una forma más detallada, en el segundo curso de bachillerato de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales (ver Tabla 1); coincidiendo con el momento en que el alumno comienza a familiarizarse con contenidos propios de la inferencia estadística.

Tabla 1.Contenidos relacionados con inferencia estadística (MECD, 2015)

2º Bachillerato, Ciencias Sociales	Población y muestra. Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra. Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual. Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.

En este contexto, los principales problemas de interés radican en: (1) estimar los parámetros de las distribuciones de probabilidad en una población (particularmente sobre la distribución de la media muestral en una población normal, la distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes) partiendo de la información que se extrae de una muestra aleatoria obtenida de la misma población; (2) contrastar una hipótesis sobre los parámetros de la distribución de la población mediante intervalos de confianza o test de hipótesis –en concreto, calcular un intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida, un intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes–. Este tipo de problemas van asociados a la introducción de nuevos conceptos relacionados con la idea de dispersión, como pueden ser, distribución muestral, error de estimación e intervalo de confianza.

Dado que el razonamiento inferencial parte de los datos para detectar tendencias o fuentes de variabilidad con el fin de extrapolar los datos y realizar inferencias de muestras a poblaciones, el

alumno deberá tener claro los instrumentos necesarios para conseguir tal objetivo. Sin embargo, la adaptación a los nuevos conceptos y razonamientos, relacionados con las medidas de dispersión, conllevan ciertas dificultades de entendimiento (Vallecillos y Batanero, 1997; Castro Sotos, Vanhoof, Van den Noortgate y Onghena, 2007; Canal y Behar, 2010).

En general, la principal dificultad que encuentran los estudiantes cuando se enfrentan a actividades de inferencia estadística es saber qué variable está siendo estudiada y, como consecuencia, determinar la distribución con la que se distribuye dicha variable. Las distribuciones más empleadas en esta tarea son: (1) la distribución de los datos de la muestra seleccionada con el fin de realizar inferencia sobre la población. En esta situación las medidas que describen dicha distribución son la media aritmética (o media) $\bar{x}$ y la desviación típica de la muestra S_x; (2) la distribución de probabilidad de la población. En general, éste suele seguir una distribución gaussiana o normal de parámetros μ y σ los cuales, en la mayoría de los casos pretendemos estimar o contrastar; (3) la distribución de probabilidad de la variable aleatoria media muestral. De todas las muestras, del mismo tamaño, que se extraen de una población se verifica que la media muestral es una variable aleatoria con una distribución de probabilidad. Por ejemplo, si consideramos una población que se distribuye según una distribución $N(\mu,\sigma)$ y consideramos una muestra aleatoria simple de tamaño n, se tiene que la variable media muestral, denotada habitualmente como $\overline{X}$, se distribuye según una distribución normal con media μ y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es decir, $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Por otro lado, dentro de este contexto, la estimación de los parámetros desconocidos de una población, con una fiabilidad o un error prefijado (por estimación puntual o por intervalos), genera ciertas dificultades de entendimiento. Ejemplo de ello son:

- La relación que existe entre el aumento o disminución del tamaño de una muestra y la precisión (o error de estimación) que se tiene a la hora de obtener una estimación aproximada del parámetro en estudio, mediante su correspondiente intervalo de confianza. Dado que en un intervalo de confianza, el error en la estimación está inversamente relacionado con el tamaño muestral, se tiene que a medida que aumenta el tamaño de la muestra ganamos precisión en la estimación del parámetro. Este hecho provoca que la dispersión existente entre el verdadero valor del parámetro y su correspondiente estimador sea menor o mayor en función del tamaño muestral.
- La relación existente entre la varianza (o desviación típica) de la variable de la población y la varianza (o desviación típica) de la variable media muestral en función al tamaño muestral considerado. En este caso se tiene que a medida que aumenta el tamaño de la muestra seleccionada la dispersión de la distribución de la variable aleatoria, media muestral, es inferior que la descrita por la distribución de la población (suponiendo que la población se distribuye según una distribución gaussiana).

Es necesario señalar que, aunque son muchos los estudiantes que aprenden a realizar los cálculos necesarios para obtener estimaciones de los parámetros puntualmente, por intervalos o por test de hipótesis, no siempre consiguen comprender todos los procesos ni los conceptos que llevan a cabo dichos cálculos. Este hecho, con origen en las enseñanzas de bachillerato, perdura en el ámbito universitario, lo cual nos advierte de la importancia que supone una introducción óptima de los conceptos inferenciales. Algunas de las investigaciones que dan fe de estas observaciones son las llevadas a cabo por Alvarado (2007), Olivo (2008) y Vallecillos (1994), que describen dificultades de comprensión del teorema central del límite, el intervalo de confianza y el contraste de hipótesis, respectivamente.

IMPLICACIONES DIDÁCTICAS DE LA DISPERSIÓN EN INFERENCIA ESTADÍSTICA

La dificultad que encierra la percepción que pueden tener los estudiantes con respecto a la dispersión asociada a los conceptos de la inferencia estadística, puede ser resuelta hoy en día a través de un ambiente computacional, resultando más atractivo si se trabaja en contextos de datos reales (Sánchez, Borim y Coutinho,2011). De esta forma, mediante un razonamiento informal el estudiante desarrolla los conceptos necesarios para comprender, por ejemplo, el efecto directo que tiene un aumento o disminución del tamaño muestral en la precisión de la estimación de los parámetros poblacionales mediante intervalos de confianza, de un modo más sencillo e intuitivo.

Como recursos de apoyo para los procesos de enseñanza-aprendizaje destacamos las posibilidades de los simuladores. Estas herramientas digitales sirven de apoyo en los procesos de transferencia de conocimiento permitiendo asimilar de una forma más correcta los conceptos estadísticos. Ejemplo de ello lo encontramos en www.rossmanchance.com/applets/samplemeans/samplemeans.html, donde el alumno puede simular la distribución de la media muestral y ver como varía la dispersión de la distribución en función del tamaño seleccionado (véase Figura 1). En diferentes ventanas el simulador representa la distribución poblacional (izquierda-superior), la distribución de datos en la última muestra simulada (derecha-superior), la distribución muestral empírica de todas las medias que se van obteniendo en sucesivas muestras (izquierda – inferior) y la misma distribución muestral estandarizada, que se va aproximando a la distribución normal n (0,1) cuando se repite el proceso de muestreo.

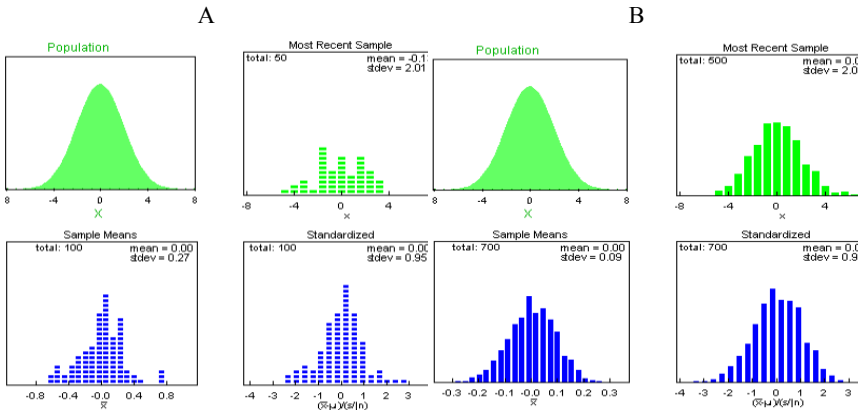


Figura 14. Simulación A: *n*=50 y B: *n*=500

CONCLUSIONES

A lo largo de los niveles educativos, el currículo recoge desde la Educación Primaria el primer contacto con la idea de dispersión desde una perspectiva descriptiva, en el que el principal interés de estudio radica únicamente en analizar un conjunto de datos sin llegar a generalizar los resultados del análisis. Una vez que el estudiante cursa el segundo año de bachillerato de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales debe haber comprendido los diversos significados de la dispersión con el fin de construir un significado global de la misma y para que no aplique una serie de fórmulas que quizás no comprenda. En esta etapa los estudiantes han de manejar a la vez variables estadísticas y variables aleatorias, junto con sus distribuciones y las distribuciones muestrales. Por lo que el uso de herramientas informáticas y simuladores puede servir como hilo conductor entre los contenidos que los estudiantes deben aprender y los significados de éstos.

En resumen, es importante que el profesor sea consciente del papel destacado de la dispersión en estadística. Puesto que, como indicó Moore (1990), la estadística es la ciencia de los datos y estos están caracterizados por la variabilidad, la habilidad para percibir, medir y explicar la dispersión de los datos y de los modelos que utilizamos para describirlos es la clave del razonamiento estadístico.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupoFQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Alvarado, H. (2007). Significados del Teorema Central del Limite en la Enseñanza de la Estadística en Ingeniería. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Canal, G. y Behar, R. (2010). The confidence intervals: a difficult matter, even for experts. En C. Reading (Ed.), Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics.Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Castro Sotos, A. L., Vanhoof, S., Van den Noortgate, W. y Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. Educational Research Review 2, 98-113.

Cobb, G. W. y Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching.The American Mathematical Monthly, 104, 801-823.

Estepa, A., y del Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. Números, 83, 43-63.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education.ZDM. International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135.

MECD (2015). Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: Autor.

*Moore, D. S. (1990). Unc*ertainty.En L. A. Steen (Ed.), On the shoulders of giants: New approaches to numeracy (pp. 95–137). Washington, D. C.: NationalAcademyPress.*

Olivo, E. (2008). Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Sánchez, E., Borim, C. y Coutinho, C. (2011). Teachers' understanding of variation. En C. Catanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education (pp. 211-221). New York: Springer.

Snee, R. D. (1990). Statistical thinking and its contribution to total quality.American Statistician, 26, 116-121.

Vallecillos, A. (1994). Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Vallecillos, A. y Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. Recherches en Didactique des Mathematiques, 17, 29–48.

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999).Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), 223-263.

EFECTO DE UN DISPOSITIVO DE FORMACION INICIAL DOCENTE SOBRE EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMATICAS EN ESTUDIANTES DE PEDAGOGIA.[1]

Hernán Morales Paredes[a] y Ricardo González Méndez[b].

Facultad de Educación, Universidad Católica de la Santísima Concepción
hmorales@ucsc.cl[a], rgonzalez@ucsc.cl[b].

Resumen

El proceso de formación en didáctica de la geometría realizado en la UCSC a estudiantes de pedagogía media en matemática, debería tener alguna consecuencia en su sistema de prácticas en la escuela. Así, esta investigación da cuenta de aquellos aspectos del proceso de enseñanza que los estudiantes aplican a los alumnos en el liceo y que son correspondientes y coincidentes con el proceso de formación recibido en la UCSC. Para ello se diseña y aplica un dispositivo de formación fundamentado en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. La utilización de este dispositivo en el liceo por parte del estudiante permite observar la influencia de la formación inicial sobre el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes.

Palabras clave: *formación inicial, dispositivo de formación, gestión de aula, metodología del soporte.*

PROBLEMÁTICA Y MARCO TEÓRICO

¿Qué influencia tiene el proceso de formación de un profesor de matemáticas que se realiza en la universidad, en su posterior desempeño laboral en la escuela? Esta pregunta se plantearon los académicos investigadores, y para responderla propusieron una estructura diseñada para tal efecto. Para iniciar la investigación, dieron cuenta que el proceso de formación en la asignatura de didáctica de la geometría (Facultad de Educación, 2011) en la Facultad de Educación de la UCSC, se ha realizado considerando el desarrollo de la competencia propuesta en su programa "diseña e implementa situaciones de aprendizaje sustentadas en modelos de la didáctica de la matemática, en contextos simulados o prácticas guiadas considerando el conocimiento de la disciplina y la reflexión de su propia práctica" (Facultad de Educación, 2012). Para el desarrollo y logro de esa competencia, y consecuentemente responder a la pregunta de esta investigación, se propuso un dispositivo de formación llamado "modelo del soporte", que consiste en una estructura de gestión de una clase fundamentado en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), (Brousseau, 1986). Este modelo se presenta en la asignatura señalada, y en esta investigación, suponemos que el estudiante universitario debe aplicarlo durante el proceso de su práctica pedagógica profesional en el establecimiento educacional, a sus alumnos, en el escenario real.

INICIO	1. Aprendizaje Esperado: el profesor declara lo que él quiere que el alumno aprenda, considerando los contenidos y habilidades que se desean desarrollar.
	2. Comienzo: Se inicia la clase con la etapa respectiva al saludo y la organización de los aspectos que el profesor considere necesarios para la organización de la clase y/o la disposición psicológica de los alumnos. Se hace presente el contrato didáctico.
	3. Presentación del soporte: el profesor llama la atención de los alumnos, mostrándoles

	un objeto o actividad concreta de la vida diaria, esquemas, videos, fotos, etc., y realizando preguntas respecto de ella. La finalidad es captar la atención y dialogar con los alumnos para reflexionar, proponer y descubrir.
	4. Expresión libre y espontánea de los alumnos: Los alumnos responden las preguntas realizadas por el profesor. Ellos se expresan, ya sea en forma individual o grupal, verbalizando las respectivas respuestas.
	5. Presentación del Título de la Clase: a partir de las respuestas dadas por los estudiantes, el profesor induce e informa el título de la clase, lo escribe, lo repite y luego consulta a los alumnos asegurándose que haya quedado claro.
DESARROLLO	6. Situación de investigación: el profesor presenta una situación problema en una guía llamada Nº1. El trabajo del estudiante es individual. Él debe enfrentarse a la situación con su propio medio <S - M>. Situación de Acción.
	7. Comunicación y confrontación de respuestas: en esta etapa los alumnos son los únicos protagonistas de la clase, en forma individual primero, y luego grupal comparten y comunican las respuestas a la situación problema a sus compañeros de grupo. Situación de Formulación. Luego como una presentación oral y breve, y con el resto del grupo curso, cada grupo presenta confrontan las respuestas expresadas anteriormente, mientras el profesor cita, categoriza u ordena las respuestas en la pizarra. Situación de Validación.
	8. Elaboración de una síntesis: el profesor señala las confrontaciones de las respuestas ya escritas en la pizarra, aclara las dudas, corrige los errores y expone claramente las respuestas a la situación problema, induciendo las habilidades a lograr y el aprendizaje de los contenidos, definidos previamente en la etapa del aprendizaje esperado. Institucionalización.
CIERRE	9. Aplicaciones: Es una guía llamada Nº 2 de actividades de situaciones problemas, para que sea aplicada y resuelta. Además, permite cerciorarse que el estudiante aprendió correctamente lo enseñado; de no ser así es el momento en el cual el profesor debe disponer de tiempo necesario para realizar la devolución, hasta lograr el aprendizaje. Se hace presente la clasificación PISA.

Tabla 1

El modelo, Tabla 1, está pensado para ser desarrollado en un aula de un liceo, durante una clase de geometría y considera los momentos de desarrollo de esa clase propuestos por el Ministerio de Educación de Chile: inicio, desarrollo y cierre (MINEDUC, 2012). Junto con esto, y dado que el modelo del soporte en sus inicios se fundamentó en la TSD de Brousseau, considera como elemento principal de una clase en el liceo, la relación <sujeto – medio> como clave para gestionar la clase de geometría en un liceo. En un proceso y actitud dialógica del profesor hacia el alumno, el profesor presenta un objeto concreto vinculado al aprendizaje esperado propuesto por el MINEDUC (2012), cautelando el contrato didáctico (Brousseau, 1986); y así se inicia la clase. Posteriormente se dan las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización. El modelo presentado a los estudiantes en el proceso de formación, considera las partes señaladas en la Tabla 1.

La propuesta de actividades de la guía Nº2 se fundamenta en la propuesta de competencias PISA (OCDE, 2006), agrupadas en los niveles de reproducción, conexión y reflexión. Así, esta guía debe poseer ejercicios o problemas con la presencia de los tres niveles.

Con estos elementos teóricos, del modelo y de las competencias PISA, se realizaron durante la formación en un escenario simulado, el diseño de actividades de enseñanza, planificación de clases, diseño de unidades didácticas, acciones de gestión de aula, simulaciones de procesos de enseñanza, siempre en el contexto de enseñanza de contenidos del eje de Geometría. Con esto, los estudiantes universitarios adquirieron el modelo propuesto para gestionar el proceso de enseñanza en el aula, estructurada y fundamentada explícitamente desde el punto de vista didáctico. Nuestro supuesto es que luego, en el escenario real, los estudiantes aplicarían esta estructura.

Marco metodológico

El diseño de investigación fue de carácter exploratorio, descriptivo, desde un paradigma cualitativo y se utilizó un método de estudio de caso con observaciones sobre el terreno (Lamoureux, 2006). Se establecieron las categorías e indicadores de análisis a partir del marco teórico, y que son las siguientes:

Categorías	Indicadores o Categorías Propias de las Clases Observadas.
Gestión de la clase	Situación de acción, Formulación, Validación e Institucionalización.
Actuación del profesor	Contrato didáctico, Devolución, Paradigma tradicional.
Competencias PISA	Reproducción, Conexión, Reflexión.

Tabla 2

El estudio de caso se hizo con un estudiante, durante 10 clases. Para obtener la información necesaria, durante la realización de la asignatura práctica profesional, en que el estudiante va al liceo a realizar la enseñanza de la matemática, fuimos a observar al aula y a grabar en videos lo que él realizaba, bajo una técnica de observación no participante del desempeño del profesor en formación en el aula escolar. La información obtenida se comparó y analizó con los criterios e indicadores señalados usando el software QDAminer, a través de la frecuencia de ocurrencia en el total de las 10 clases. Así, se hizo el análisis de la información lo que permite dar cuenta de la influencia que tiene el proceso de formación de un profesor de Matemática que se realiza en la universidad, en su posterior desempeño laboral en la escuela.

Resultados obtenidos.

A continuación, a modo de ejemplo, se presenta un extracto de una transcripción desde las cuales se analizó la información:

1. Profesor: ya pero vamos a ver toda esta idea de aquí, que esto puede ehh, esto o se agranda o se achica pero nunca pierde las dimensiones ya, muy bien ¿Conocen alguna técnica para dibujar en un papel un objeto, respetando la relación entre sus dimensiones originales?
2. Alumno 1: a escala
3. Profesor: A escala ya muy bien, ¿quién fue?, ¿quién dijo eso? Muy bien ya. ¿Todos recuerdan qué es lo que es el trabajo a escala o no?
4. Alumno 2: no
5. Profesor: No todos, a ver vamos a preguntar a Sebastián Núñez, joven usted ¿recuerda cuando hacía trabajos a escala de qué se trata eso?...

En el análisis de los resultados para cada categoría, una de las formas de análisis fueron los porcentajes de ocurrencia. En las siguientes tablas se muestran los resultados de Gestión de la Clase, Actuación del Profesor y Competencias PISA, respectivamente:

Categorías	Indicadores y % de Ocurrencia
Gestión de la clase	Situación de acción (1,1%), Formulación (1,8%), Validación (6,5%) e Institucionalización (1,1%).
Actuación del profesor	Contrato didáctico (22,6%), Devolución (52,9%), Paradigma tradicional (11,4%).
Competencias PISA	Reproducción (68%), Conexión (100%), Reflexión (33%).

Tabla 3

CONCLUSIONES

Este estudio ha permitido develar que desde el proceso de formación en el aula universitaria al que son sometidos los futuros profesores de Matemática en la UCSC, específicamente en el eje de geometría, es posible visualizar el nivel de transferencia de que éstos realizan al aula escolar de los procesos didácticos con los cuales son formados en el escenario simulado del aula universitaria. Esta transferencia en el escenario real del aula escolar ha sido observada en las tres categorías ya señaladas. De este modo se ha podido constatar, que existe un bajo nivel de transferencia de los elementos constitutivos de la dimensión Gestión de Clase, en que el mayor ratio de presencia entre las etapas descriptas en este ámbito corresponde a un 6,5% de frecuencia de ocurrencia en todas las sesiones, en la situación de validación, que equivale a socialización grupal de resultados, presentando las restantes situaciones de: acción, equivalente al trabajo individual de procesamiento de la información; formulación, equivalente a comunicar resultados a sus pares; e institucionalización, equivalente a transferencia de contenidos por parte del profesor, ratios inferiores al 2%: Así, es posible señalar que el nivel de transferencia de esta categoría es disímil y mínimo, focalizándose en habilidades de trabajo en grupo, y no en un proceso de enseñanza para el aprendizaje. Esto significa que los efectos de transferencia del aula universitaria al aula escolar son débiles, y el estudiante opta por un método tradicional, distinto del propuesto por la estructura.

Respecto de la categoría Actuación del Profesor, ha sido posible constatar logro de ratios de presencia de los aspectos constitutivos de estas; Contrato Didáctico, Devolución y Paradigma tradicional con la inducción de la respuesta por parte del estudiante al alumno. Esta categoría

evidencia un aspecto de fuerte presencia en el escenario de enseñanza real de las relación <S-M>, lo que es una buena señal, ya que se aleja de un paradigma tradicional de enseñanza (Godino, J., Batanero, C., & Font, V. 2003). Esto sugiere ser considerado un canal de vinculación y transferencia de alto impacto entre el aula de formación universitaria y el aula escolar.

También ha sido posible constatar la presencia dispar de los elementos constitutivos de las Competencias PISA con fuerte presencia de actividades relacionadas con la conexión, con ratios de 100%, es decir una fuerte relación entre el mundo real como lo señala Freudhental (Gravemeijr & Terwel, 2000) y el contenido de geometría , de reproducción del 66% y con baja presencia de actividades que promueven la reflexión (ratio del 33% de presencia), lo que evidencia los énfasis desarrollados por los profesores en el aula real para el desarrollo de aprendizajes, centrados en niveles de competencias básicas, es decir reproducción y presencia del mundo real. Es clara la ausencia del nivel reflexión que propicia mayores desarrollos de procesos cognitivos y habilidades matemáticas. Esto difiere de los énfasis desarrollados en los desempeños de cercano acompañamiento en el aula universitaria en escenarios simulados.

En síntesis, ha sido posible determinar cómo transita la estructura del diseño didáctico de una clase particularmente en el eje de Geometría desde el aula de formación universitaria en escenarios simulados al contexto de desempeño real en el aula escolar, qué aspectos perseveran y cuáles se diluyen, lo que evidencia a su vez, los aspectos que requieren ser revisados en el proceso de formación de modo de propiciar un mayor nivel de transferibilidad de los aspectos teórico – formativos en el ámbito de la Didáctica en el eje de Geometría para un mejor desarrollo y logro de la competencia de formación declarada. Como proyección de esta investigación, entre los aspectos que requieren ser revisados es la praxeología (Chevallard, 1999) de la escuela que influencia al estudiante, y una mirada antropológica de la misma.

Referencias

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), 33-115.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221-266

Educación, F. d. (2012). Programa de Estudio Geometría en el Plano y su Didáctica. Concepción: Facultad de Educación, UCSC.

Facultad de Educación, U. (2011). Planes y Programas Pedagogía Media en Matemáticas. Concepción: Facultad de Educación.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Granada: Universidad de Granada.

Gravemeijr, K., & Terwel, J, (2000). Hans Freundenthal, un matemático en didáctica y teoría curricular. J. Curriculum Studies, 32(6), 777 - 796

Lamoureux, A. (2006). Recherche et méthodologie en sciences humaines. Quebec.

MINEDUC. (2012). Programas de Estudio. Santiago.: Ministerio de Educación, Gobierno de Chile.

OCDE. (2006). PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.: OCDE.

---

[1] "Este trabajo se ha realizado con los aportes de la Dirección de Investigación de la UCSC y vinculado al Proyecto de Investigación DIN 04/2013".

ANÁLISIS DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS PROPIEDADES DE UNIÓN, INTERSECCIÓN Y COMPLEMENTO DE UN EVENTO EN PROBABILIDAD

Daniela Aros Ibaceta[a], Nicole Astudillo Cabrera[b], Elisabeth Ramos Rodríguez[c] y Felipe Ruz Ángel[d]

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso;
correos electrónicos: daniela.aros@outlook.es[a], nalejandra121@gmail.com[b], elisabeth.ramos@pucv.cl[c], Felipe.ruz.angel@gmail.com[d]

Resumen

La memorización de algoritmos para la optimización del tiempo en la resolución de problemas es una problemática común en la enseñanza de las matemáticas (Gómez, 2000). Es por ello, que se busca a través de una propuesta de aula diseñar tareas de aprendizaje que promuevan la utilización de registros de representación en la comprensión del objeto matemático, considerando las limitaciones de aprendizaje, develadas a partir del análisis didáctico (Gómez 2007), como un aspecto necesario para prever situaciones que pueden ocurrir durante la implementación. Además se debe reconocer que es indispensable que el docente lleve a cabo un análisis de las dificultades y errores asociadas al uso de diversos registros al diseñar una propuesta de aula. Esto permite tener un objetivo claro y definido, evitando ambigüedades, reconociendo que una actividad no puede estar exenta de limitaciones.

Palabras clave: *tareas de aprendizaje, limitaciones de aprendizajes, análisis didáctico, registros de representación*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

En la literatura se describen ciertas problemáticas asociadas al aprendizaje de las probabilidades, razón por la cual, el docente debe diseñar tareas priorizando la comprensión del objeto matemático, lo cual, se consigue con el uso en primera instancia de diferentes sistemas de representación. Sin embargo, como menciona Duval (2006), el paso de un registro a otro es una dificultad predominante a la que se enfrentan los estudiantes durante su escolaridad debido al estudio, de manera independiente, de las distintas representaciones de un objeto matemático, por lo cual dicha dificultad debe ser considerada por el docente.

La enseñanza de las probabilidades está en mano de los profesores de matemática, en este sentido "la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística y de la Probabilidad (…) se ve afectado por el área de formación del docente y por el escaso desarrollo de herramientas metodológicas" (Osorio, Suarez y Uribe, 2011, pág. 373), por ende se hace necesario un trabajo colegiado de los docentes, para definir herramientas específicas en el estudio de la probabilidad, evitando una inadecuada adaptación del contenido matemático en el contexto escolar.

Asimismo, el docente debe evitar un "aprendizaje meramente memorístico –»hechos, nombres y fórmulas»– y fomentar en él un aprendizaje comprensivo y analizador –»enseñar a pensar»–, es decir, un aprendizaje significativo" ¨(Gómez, 2000, pág. 55), porque el proceso de aprendizaje implica, no solamente la replicación de algoritmos, sino que también dar sentido al objeto de estudio en sus distintas representaciones.

A partir de los antecedentes presentados, podemos explicitar la problemática de estudio como el abuso en la utilización de las fórmulas de unión, intersección y complemento de un evento en probabilidad (Gómez, 2000). Por ello, nos planteamos como objetivo diseñar e implementar una

propuesta de aula que priorice el razonamiento por sobre la memorización en el cálculo de las probabilidades.

Marco de referencia

El marco de referencia que sustenta este estudio se basa principalmente en tres aspectos: la teoría de registros semióticos (TRS), la teoría de situaciones didáctica (TSD) y el análisis didáctico.

De acuerdo a la problemática definida, se pudo identificar que los alumnos tienden a la memorización de algoritmos asociados a las propiedades de probabilidad, lo que se debe principalmente a que no estudian el concepto en sus diferentes representaciones y/o contextos (Gómez, 2000). Es por ello, que se considerará la TRS como la principal teoría a utilizar en el diseño de la tarea.

Al diseñar una tarea de aprendizaje basada en la TRS se hace fundamental tener presente que "(…) el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones, bajo estas condiciones una representación proporciona el acceso al objeto representado" (Prieto y Vicente, 2006, pág. 205). Para que el estudiante reconozca un objeto matemático debe estudiarlo en sus diferentes registros de representación, pudiendo así concluir que la esencia del objeto matemático es más que, por ejemplo, la expresión algebraica que lo define y/o los valores que toma. Además, para el diseño de la clase se propone el uso de las cuatro fases de la TSD.

Por otro lado, el Análisis Didáctico es una herramienta metodológica para planificar en profundidad que propone cuatro sub-análisis (Gómez, 2007): el *Análisis del contenido*, en donde se abordará la estructura conceptual, los sistemas de representación del objeto matemático, la fenomenología, y la definición matemática y escolar, el *Análisis cognitivo*, que involucra las expectativas de aprendizaje presentes en los documentos oficiales de educación, las limitaciones de aprendizaje propias del objeto de estudio, el progreso de dicho concepto a lo largo del currículo y las tareas que promueven el logro de los objetivos, el *Análisis de instrucción*, en donde el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje, y el *Análisis de actuación* en el que el profesor luego de implementar la clase, analiza los instrumentos de recogida de información utilizados.

Metodología

El paradigma cualitativo bajo el cual se realiza esta investigación es un proceso inductivo que, según Hernández, Fernández y Baptista (2006), busca explorar y describir situaciones a las que se enfrenta un grupo de personas pertenecientes a un contexto específico. Para lo cual, se debe recolectar información que permita rescatar las experiencias individuales de los participantes, sin generalizarlas, obteniendo resultados que no serán objetivos puesto que los investigadores son participantes activos y toda intervención que realicen traerá consecuencias sobre los resultados y su respectivo análisis. Luego de llevar a cabo la investigación, se propone una reformulación de los procesos.

Para el análisis de la información se utilizaron tres instrumentos: a) las grabaciones de video, que permitieron tener una mirada panorámica de la implementación, b) las bitácoras, referidas a la descripción del contexto y ambiente donde se desarrolla la investigación y c) las hojas de respuestas con la tarea de aprendizaje en donde los estudiantes plasmaran sus estrategias de resolución.

Por otra parte, el contexto donde se llevará a cabo la implementación del plan de acción corresponde al Colegio San Vicente ubicado en Valparaíso. Dicho establecimiento educacional es

particular de subvención compartida, que imparte Educación Parvularia en el Segundo Nivel de Transición; Educación Básica y Enseñanza Media Científico – Humanista. Específicamente se escogió al tercer año medio, curso que cuenta con 22 alumnos.

RESULTADOS Y DESARROLLO DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

A. Análisis del contenido

Para abordar este estudio se presentarán diferentes sistemas de representación para las propiedades de unión, intersección y complemento de un evento en probabilidad, a saber: Conjuntista referido al uso del diagrama de Venn, Algebraico-Simbólico que se denota como una aplicación de la función de probabilidad a las propiedades, Numérico-Simbólico ejemplificando las propiedades a través de conjuntos de números, Natural caracterizando las propiedades por medio del lenguaje escrito y Pictórico en donde mediante casos particulares de la vida cotidiana, se representa la definición de cada propiedad. Por otra parte se presenta la estructura conceptual de dichas propiedades, su fenomenología, considerando contextos y situaciones en las que se les da sentido a las propiedades y finalmente se comparan las definiciones matemáticas formales de los conceptos con las definiciones que se presenta a los estudiantes en el nivel escolar.

B. Análisis cognitivo

Se estructura en torno a cuatro organizadores: expectativas de aprendizajes, en las cuales se identifica lo que el currículum considera pertinente que el estudiante aprenda en un nivel escolar determinado. En segundo lugar se presentarán las limitaciones de aprendizaje que hacen referencia a las dificultades y errores que poseen los estudiantes frente al estudio de la probabilidad. Luego se expone un análisis curricular para presentar los contenidos previos a los que se ven enfrentados los alumnos. Finalmente se presentan las oportunidades de aprendizaje, tareas asignadas para cumplir con el objetivo propuesto y evitar o resolver los errores y dificultades encontrados.

Algunas de las principales dificultades en el estudio de las probabilidades se debe a "nuestro afán de anticiparnos a los hechos para prever consecuencias muchas veces nos puede llevar a conclusiones equivocadas producto de un análisis apresurado" (Jiménez y Rupin; 2014; pág. 160), generando una dificultad en el aprendizaje del concepto que puede llevar a un error. Por ejemplo, al lanzar una moneda en 3 ocasiones obteniendo en todas "sello", el alumno puede tender a decir que al lanzar por cuarta vez obtendrá "sello", así la noción de dependencia propia de la cotidianeidad generará una dificultad en la comprensión del concepto.

Por otro lado, es importante reconocer que durante el estudio de las probabilidades, los alumnos necesitan manejar ciertas disyunciones que no tienen el mismo sentido en el lenguaje natural que en el matemático. En la Guía didáctica del docente de segundo medio, se presentan algunos errores frecuentes en el sentido que "puede ocurrir que los estudiantes, en primera instancia, asuman que la disyunción "o" es excluyente, pues así suele ser en el lenguaje natural. Así, pueden pensar que si decimos que una persona tiene corderos o vacas significa que sólo tiene un tipo de animal, no ambos" *(*Jiménez y Rupin*,* 2014, pág. 165). Entonces, los usos comunes del lenguaje literal generan una dificultad al estudiar la probabilidad. De esta forma "el análisis de errores es una potente herramienta de aprendizaje, ya que permite analizar procesos y reconocer en ellos posibles equivocaciones y las formas de abordarlos para corregirlos" (Jiménez y Rupin, 2014; pág.165).

C. Análisis de instrucción

El tener en cuenta todo el proceso que vive el concepto nos permite diseñar tareas de aprendizaje que tengan una mayor consistencia. La tarea de aprendizaje es la siguiente:

El dueño de un minimarket ha observado que de sus potenciales clientes consumidores de fruta, el 0,6 prefiere comprar frutillas; por otra parte, un 0,3 prefiere ciruelas, mientras que sólo un 0,15 prefiere amas frutas. Si se selecciona aleatoriamente un comprador de fruta, resuelva las siguientes preguntas mediante dos estrategias distintas.

a) ¿Cuál es la probabilidad que no prefiera frutilla?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera ambas?

c) ¿Cuál es la probabilidad que prefiera al menos un tipo de fruta?

A modo general se espera que el alumno utilice distintos registros de representación, como el diagrama de Venn para potenciar la comprensión por sobre la memorización. Además, el tener en consideración el proceso cognitivo del objeto matemático, permite enfocar de mejor manera la tarea de aprendizaje que se presentará a los estudiantes facilitando el logro de los objetivos planteados.

Mediante esta implementación de 90 minutos, buscamos desarrollar la habilidad de interpretar y caracterizar las propiedades de unión, intersección y complemento de un evento en probabilidad.

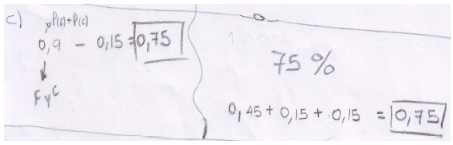
Durante el desarrollo de la clase, se considerarán las cuatro fases definidas por la TSD. En la etapa de acción se mostrará el problema principal, donde los estudiantes enfrentarán el problema de forma individual, haciendo uso, en el mejor de los casos, de dos registros de representación. En la segunda fase, de formulación, los alumnos formarán grupos estableciendo estrategias de resolución para responder a las interrogantes y, luego, en la etapa de validación, presentarlas a sus compañeros. Finalmente, la institucionalización, recae en manos del docente, quien deberá explicitar la definición del objeto matemático involucrado en la tarea propuesta.

D. Análisis de actuación

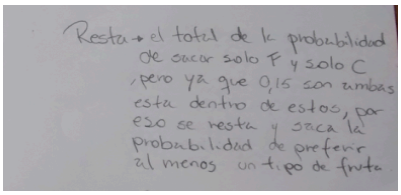
Luego de la implementación, se pudo notar que la actividad en sí necesita la secuencia dada para la mejor comprensión de las dos preguntas finales, la cual no era respetada, produciéndose un desorden y confusión al momento de resolverlas. Con respecto a las estrategias, se destacan 3 categorías:



Conjuntista



Numérico Simbólico



Natural

Se observó que sólo 4 alumnos de un total de 20 recurrieron al registro gráfico como una estrategia de resolución, en comparación con el resto del curso que prefirieron expresar la respuesta en lenguaje natural y de manera algebraica. Por otro lado, a pesar de no poseer los conocimientos previos, 12 alumnos fueron capaces de dar respuestas a las interrogantes de manera correcta, utilizando las estrategias que se categorizaron anteriormente.

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

Con el desarrollo de esta investigación se logró el objetivo general, puesto que la tarea de aprendizaje que se diseñó permite el uso de un registro de representación distinto al algebraico evitando que la enseñanza del objeto matemático, en este caso las propiedades de probabilidad, se redujera a la replicación de un algoritmo, fomentando la comprensión por parte del estudiante de conceptos claves en probabilidad, como por ejemplo a qué se refiere el complemento de un evento. Es importante destacar que, la tarea de aprendizaje propuesta puede ser más orientadora aun para el logro de los objetivos, si se incluyera un esquema con el diagrama de Venn en blanco, de tal forma que el estudiante inmediatamente enfoque sus estrategias de resolución a este sistema de representación, optimizando el tiempo de trabajo y reduciendo las posibilidades de que los estudiantes se desvíen del objetivo de la clase. Por otra parte, si los estudiantes no saben utilizar el diagrama de Venn se realizará una institucionalización local, es decir, se presentará un ejemplo del uso del diagrama de Venn.

Se pudo comprobar a partir de este estudio, que resulta indispensable que el docente lleve a cabo un análisis de las dificultades y errores asociados a cada concepto matemático considerando que una actividad no puede estar exenta de limitaciones de aprendizaje, puesto que algunas son propias del concepto y otras son propias de la concepción del estudiante, permitiendo así prever situaciones que pueden ocurrir durante la implementación, y definir acciones del docente en respuesta a éstas.

Finalmente, se espera aportar a la enseñanza de las propiedades en probabilidad con centro en el estudiante y los procesos involucrados en la comprensión de este contenido, e incentivar en las futuras generaciones a plantear cuestionamientos sobre cómo enseñar contenidos potenciando la comprensión, más que la resolución mecánica de procedimientos, teniendo en cuenta las complicaciones que surgieron durante la implementación de nuestra tarea, puesto que son inherentes de la realidad chilena en el aula.

Referencias

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, 143-168.

Gómez, S. (2000). ¿Para qué enseñar fórmulas pudiendo enseñar procedimientos? Una propuesta didáctica para el tratamiento de la Probabilidad en Bachillerato. Suma 35.

Gómez, P. (2007). El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemática de secundaria.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (1997-2006). Metodología de la Investigación. Canadá.

Jiménez, L. y Rupin, P. (2014) Guía didáctica del docente. Matemática segundo año medio.

Osorio, M., Suarez, A. y Uribe, C. (2011) Revisión de aspectos asociados a la problemática del aprendizaje de la Probabilidad. Fundación Universitaria Católica del Norte. Medellín, Colombia.

Prieto, F. y Vicente, S. (2006). Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería. Universidad nacional de la palma república Argentina.

TEXTO GUÍA DE CÁLCULO DIFERENCIAL PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN CHILE, SU ESTADO DEL ARTE Y ACTUALIZACIÓN

Jonathan Rojas-Valero[a], Elisabeth Ramos-Rodríguez[b],BetsabéGnzález Yáñez[c],Patricia VásquezSaldías[d]

[a,b,c,d]PontificiaUniversidad Católica de Valparaíso
jonathan.rojas.valero@gmail.com[a], elisabeth.ramos@pucv.cl[b],
betsabe.gonzalez@pucv.cl[c]patricia.vasquez@pucv.cl[d]

Resumen

Este trabajo tiene por objetivo mostrar parte del estado del arte y el rediseño -con el alero de la didáctica de la matemática- del primer capítulo del texto guía para futuros ingenieros, recién ingresados a la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Bajo el paradigma cualitativo, abordamos el estado del arte y el rediseño del texto actualmente empleado. Los resultados muestran una diversidad de formas en que se usa el texto, desde una simple sugerencia para el estudiante universitario, hasta un apoyo explícito, clase a clase. Por otro lado, se evidencia un empleo de textos que poseen un fuerte componente disciplinario (de la matemática), en desmedro de lo didáctico. Se presenta el rediseño de un texto que intenta impulsar la conexión entre la matemática y su didáctica como un medio que fortalezca el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática a nivel superior.

Palabras clave: *tareas matemáticas, texto guía, cálculo diferencial.*

INTRODUCCION

Históricamente, una herramienta empleada para favorecer el aprendizaje de los alumnos de primer año de Universidad en la asignatura de CálculoI (cálculodiferencial para ingeniería) es el texto de apoyo diseñado hace dos décadas atrás por Arancibia y Mena (1996). Este textos e diseñó sin contar con una mirada explícita desde la didáctica de la matemática, pero el grado de profundidad con el que la matemáticas trata y la gama de aplicaciones que contiene para la Ingeniería le ha otorgado a lolargodelosaños,unreconocimientotantoanivel local (ya lleva 2 décadas siendo el texto guía en todas las Carreras de Ingeniería de nuestra Universidad) como a nivel nacional (por ejemplo, la Universidad Diego Portales lo tiene en varios de sus programas de estudios como texto de referencia) e internacional (en Universidades de extranjeras, como la Universidad Nacional de Córdova).

Por otro lado, el docente de nuestra Institución tiende a una enseñanza tradicional y conductista. Estudios realizados (por ejemplo, Guzmán, Ramos y Mena, 2009) ennuestra Universidad, nos evidencia que, en el caso de la axiomática de los números reales (tema que pretendemos tratar en este proyecto), los profesores la presentan con una metodología expositiva, para que, finalmente no sea materia que consideren en las pruebas. Nos planteamos, pues, el fortalecimiento de la enseñanza impartida a partir de las sugerencias que se proponenen el textoguía. Este trabajo además de presentar elementos del estado del arte para desarrollar un Experimento de Enseñanza (Plomp, 2010) (es decir, el diseño, planificación y análisis de una unidad didáctica) avanza en el diseño del capítulo primero del texto propiamente tal, como herramienta para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de los futuros ingenieros, recién ingresados a nuestra casa de estudios. La nueva versión contempla sistemas de reforzamiento, seguimiento y evaluación, así como aspectos relativos a estrategias de aprendizaje.

Los resultados de esta experiencia nos permitirá visualizar en qué grado la reformulación del textoguía apoya la propuesta de enseñanza basada en él y por consecuencia, aportan al proceso de inserción a la universidad de las nuevas generaciones de estudiantes. Aprovecharemos los beneficios que la didáctica de la matemática nos entrega para el rediseño de un texto que se utiliza desde ya dos décadas en una gran cantidad de estudiantes novatos, en específico de las Carreras de Ingeniería de la universidad.

Marco de referencia

Para la construcción del texto, en específico, para la selección de tareas matemáticas, nos basamos en la clasificación de tareas propuestas por Stein y colaboradores ((Stein, Smith, Henningsen y Silver, 2000). Una descripción de cada nivel de demanda cognitiva se ilustra en la tabla 1, sintetizada a partir del trabajo de Stein y colaboradores.

Tabla 4.Niveles de demanda cognitiva de las tareas

Nivel	Tipo	Descripción
Baja demanda cognitiva	Memorización	Tareas para el aula automáticas, sólo se requiere la memoria, sin realizar procedimientos.
	Procedimientos sin conexiones	Algoritmos que requieren uso de un procedimiento, pero no demandan establecer conexiones entre conceptos matemáticos.
Alta demanda cognitiva	Procedimientos con conexiones	Involucran varios conceptos matemáticos subyacentes, con múltiples representaciones, que ayudan a desarrollar el significado de la tarea.
	Haciendo matemáticas	Demanda un pensamiento complejo y no algorítmico, en el que se debe explorar y entender la naturaleza de los conceptos matemáticos.

Se destaca la demanda cognitivapuesta en juego en las tareas, distinguiendo tareas de nivel cognitivo bajo (memorísticas, procedimientos sin conexión) y alto (procedimientos con conexión y haciendo matemáticas). Este marco de tareas referente al nivel cognitivo puesto en juego en ellas, pone el énfasis en la actuación del profesor en clase, qué se materializa en las tareas que selecciona y la forma de gestionarlas, determinará maneras en que su instrucción apoya o inhibe la participación de los estudiantes en procesos de alto nivel cognitivo, y con ello en qué grado su actuación repercute en el aprendizaje del alumno.

Metodología

Con una metodología cualitativa se enmarca este trabajo descriptivo (Bisquerra, 2004; Hernández, Fernández y Baptista, 2010). El instrumento de recogida de información esun cuestionario. Además se recoge información de los libros de apoyo a la asignatura de cálculo, dediferentes universidades chilenas y del texto guía para estudiantes de cálculo diferencial de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

El estudio se encuadra bajo el enfoque de la *Investigación basada en el Diseño*, ilustrado por Plomp (2010) en tres etapas: investigación preliminar, diseño de prototipos, y, evaluación; para este trabajo detallaremos lo acontecido en la etapa 1 y en parte, la etapa 2.

Para el diseño de prototipo de enseñanza (de acuerdo a la investigación basada en el diseño) nos enfocamos en un texto que emerja del capítulo primero de la versión actual de texto guía (Arancibia y Mena, 1985). Se emplea la validación interna para el instrumento diseñado (cuestionario), considerando expertos tanto del área matemática como didáctica de la matemática.

RESULTADOS

Los resultados se plasman a través de la etapa 1 y 2 de la investigación basada en el diseño.

Investigación basada en el diseño, etapa 1: estado del arte

El estado de arte se plasma en Ramos, Vásquez, Rojas y González (2015), donde detallamos la apreciación y uso que tiene el texto actualmente empleado por los docentes de nuestra universidad. Se observa una tendencia a considerar el texto como elemento secundario en el proceso de enseñanza aprendizaje, otorgándole un valor relevante a su estatus matemático más que al didáctico. Bajo la consigna de mejorar los aprendizajes de los estudiantes, se hace necesaria una modificación y rediseño del texto inicial, con el objetivo de generar un instrumento que sea consistente en relación al quehacer de los docentes y las herramientas disponibles para el avance curricular y aprendizaje de los estudiantes de Ingeniería, constituyéndose el texto de esta forma, como un puente que permita lograr una transposición didáctica acorde al contexto de cada curso.

También en Ramos, Vásquez, Rojas y González (2015), estudiamos textosguía empleados en otras universidades, en donde solo uno de ellos, aldara conocer la estructura de cuerpo, ordenado y completo, menciona la densidad de los números racionales o irracionales. Al comparar el tratamiento de los textos complementarios con los del textoguía, vemos que hay diferencias en esto, debido a que el textoguía lo hace de manera formal. La mencionada modificación al texto guía, debe contemplar sin duda, una dualidad entre los aspectos formales o matemáticas puros y modelos matemáticos aplicados en diversos contextos, lo cual permitan tanto al profesor como a los estudiantes, dar sentido a la matemática con la cual trabajan en cada una de sus clases, logrando de esta forma, un aprendizaje de los contenidos encuestión.

Investigación basada en el diseño, inicio de la etapa 2, reformulación del texto

Teniendo en cuenta el estado del arte, se establecen directrices para el rediseño del capítulo 1. A continuación mostraremos algunos ejemplos de los elementos relevantes que componente este nuevo capítulo.

- Desafío inicial. Se diseña cada capítulo del texto considerando un desafío inicial, tomando de base la noción de situación didáctica planteada por Brousseau (1986), nos atrevemos a plantear a l inicio de cada tema un desafío que permita al alumno enfrentarse a sus conocimientos previos y a partir de ellos construir los nuevos junto al docente. En la figura 1 se ilustra uno de los desafíos propuestos en el texto.

Dos personas salen simultáneamente de dos ciudades, A y B, una en dirección de la otra. La primera persona camina $2\,\frac{km}{h}$ más de prisa que la segunda y llega al lugar de donde partió B una hora antes de que llegue B al lugar de donde partió A. Si ambas personas distan, inicialmente, $24\,km$. ¿Cuántos *km* recorre cada una de ellas en una hora? (Ayuda: $\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$).

Si consideramos $v\,\frac{km}{h}$ la velocidad de A, entonces la velocidad de B será de $\left(v-2\right)\frac{km}{h}$.

a. Expresa, en términos de *v*, el tiempo t_1 que demorará A.

b. Expresa, en términos de *v*, el tiempo t_2 que demorará B.

Completa las siguientes tablas colocando distintos valores a "*v*" cuando corresponda:

V									
t_1									

V									

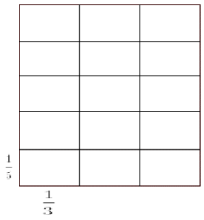
Figura 1. Ejemplo de desafío inicial del tema "axiomas de cuerpo"

- Demostraciones. A raíz de las observaciones de los profesores encuestados en Ramos, Vásquez, rojas y González (2015) se decide concretar menos demostraciones en la nueva versión de capítulo, considerando indispensable la demostración de que √2 es un número irracional y la que menciona que entre dos números racionales existe al menos un racional.
- Ejemplos y ejercicios. Éstos contiene un relevante elemento didáctico, se enfoca en la tipología de tareas propuesta por Stein y colaboradores (Stein, Smith, Henningsen y Silver, 2000). Un ejemplo de tarea del tipo "procedimiento con conexiones" se ilustra en figura 2.

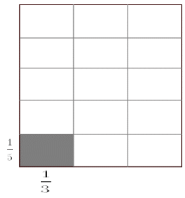
¿Cómo multiplicar $\frac{1}{3}$ con $\frac{1}{5}$?

Consideremos el cuadrado de lado una unidad.

Uno de los lados lo vamos a dividir en 3 y el otro en 5



Así se obtiene que el área de uno de los rectángulos que se forman es $\frac{1}{15}$



Como 15 de ellos "completan" el cuadrado ... (1) ... se tiene que el área del rectángulo ...

Figura 2. Ejemplo de tarea de tipo "procedimiento con conexiones"

Un ejemplo de tarea sin producción se presenta en la figura 3.

Para la expresión algebraica $P(x) = \frac{2x+5}{6x+13}$, indique cual es la restricción y cuál es el conjunto Restricción o de Definición.
Por la axiomática vista, $P(x)$ tiene sentido como número real si y solo si $6x + 13 \neq 0$, esto es $x \neq -\frac{13}{6}$. Por tanto el Conjunto de Definición o Restricción es $\mathbb{R} - \left\{-\frac{13}{6}\right\}$.

Figura 3. Ejemplo de tarea del tipo "procedimientos sin conexiones"

CONCLUSIONES

Los elementos estudiados en el estado del arte –etapa 1 de la investigación basada en el diseño- referente al tema, nospermitió posicionarnosalahoradereconstruireltexto guía, etapa 2 de la investigación basada en el diseño.

Su rediseño obedece a varios aspectos. En primer lugar a una mirada actual a las demostraciones, qué relevancia tiene en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática de nivel superior. En segundo lugar a las tareas matemáticas desarrolladas o propuestas, de qué índole deben ser y cuáles seleccionar. Y por último, a la forma de introducirnos en cada tema, considerando la noción de situación didáctica planteada por Brousseau (1986). Todos estos elementos esperamos nos abra el camino hacia la mejora de losaprendizajes delasnuevasgeneraciones deestudiantesdenuestra universidad.

Referencias

Arancibia, S. y Mena, J. (1996). Cálculo Diferencial para Ingeniería, primera edición. Ediciones Universitarias.

Bisquerra, R. (2004). Metodología de la investigación educativa. Madrid: La Muralla.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches. En Didactique des Mathématiques. Vol 7. Nº 2. 33 - 115.

Guzmán, I., Ramos, E. y Mena, A. (2009). ¿Cómo se enseña en la Universidad? El caso de los Números Reales. En Orus P., Zamora L. y Gregori P. (Ed.), Teorías y Aplicaciones del Análisis Implicativo. España.

Hernández, R., Fernández C. y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación. México: McGraw-Hill.

Plomp, T. (2010). Educational design research: An introduction. En T. Plompy N. Nieveen (Eds.), An Introduction to Educational Design Research (pp. 9-35). Enschede, the Neth- er lands: SLO.

Ramos-Rodríguez, E., Vásquez, P. Rojas, J. y González, B. (2015). Un experimento de enseñanza basado en la actualización del texto guía de Cálculo Diferencial para estudiantes de Ingeniería en Chile, su estado del arte. En XXII Congreso Internacional de Educación y Aprendizaje. España.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. y Silver, E. A. (2000). Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development. Reston: NCTM.

REFLEXIÓN DE DOCENTES NOVELES A PARTIR DE SUS TAREAS PROPUESTAS EN UN CURSO DE FORMACIÓN CONTINUA [i]

Corrial-Ayala, C[a]. y Ramos-Rodríguez, E[b].

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
[a]carlos.corrial.a@gmail.com, [b]elisabeth.ramos@pucv.cl

Resumen

La investigación a presentar se desarrolla en un curso de perfeccionamiento docente destinado a profesores de educación básica y educación media, llamado: "Didáctica de la matemática, teoría y práctica desde la reflexión docente" dirigido por dos profesoras de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. El objetivo de este curso fue fortalecer la práctica docente a partir de la reflexión de esta misma (Schön, 1983). El trabajo presentado estudiará la reflexión de un grupo de docentes en términos de dos aspectos y la evolución de éstos: la coherencia y la demanda cognitiva manifestada en las tareas matemáticas propuestas por los docentes, quienes se plantearon como problemática: ¿Cómo tener una clase basada en la resolución de problemas para deducir la representación algebraica de una circunferencia? A partir de un análisis cualitativo de los datos, se observa como los docentes evolucionan en el proceso reflexivo promovido en ellos.

Palabras clave: r*eflexión sobre a práctica, docentes noveles, educación continua, ecuación de la circunferencia*

INTRODUCCIÓN

El desarrollo profesional del docente se puede percibir a través de los cambios en su actuación respecto de cómo interactúa con los diversos elementos que involucran su práctica, en palabras de Eraut (1977), implica un proceso natural de crecimiento profesional, en que un profesor va adquiriendo gradualmente confianza, ganancias de nuevas perspectivas, incrementando en el conocimiento, descubriendo nuevos métodos y asumiendo nuevos roles.

En Chile, en enero del 2015, hemos realizado un curso de perfeccionamiento que tuvo por dinámica el trabajo colaborativo entre docentes, divididos en grupos. Cada uno de éstos debió abordar una problemática, una situación conflictiva para ellos. Los grupos de profesores abordaron distintos temas, este trabajo se centra en uno de éstos y estudiará la reflexión de los docentes en términos de la evolución de dos aspectos, relativos a las tareas matemáticas propuestas por ellos: la coherencia y la demanda cognitiva. En este trabajo mostramos el proceso reflexivo llevado a cabo por uno de estos grupos que se plantea como problemática ¿Cómo tener una clase basada en la resolución de problemas para deducir la representación algebraica de una circunferencia?

Nos hemos propuesto para este reporte de investigación analizar los procesos de reflexión de este grupo de docentes, en específico, analizar sus procesos de reflexión, respecto de la coherencia y desde la demanda cognitiva, desde una propuesta didáctica inicial en contraste con la versión final. Este estudio se enmarca dentro de otro más amplio que busca caracterizar un proceso basado en la investigación basada en el diseño.

Marco de referencia

El marco de referencia se basa en el proceso reflexivo ALACT y las tareas matemáticas.

Dentro de los modelos utilizados en educación matemática, hemos seleccionado uno surge desde la psicología cognitiva (Korthagen y Verkuyl, 1987). Nos referimos al modelo reflexivo *ALaCT* de Korthagen. Este autor describe el proceso destinado al aprendizaje reflexivo, al que denomina proceso *ALaCT*, como un proceso cíclico en el que se pueden distinguir cinco etapas o fases.



Figura 15. Modelo *ALaCT* (Korthagen, Kessel, Koster y Wubbels, 2001)

Sobre las tareas matemáticas partiremos con las ideas de Doyle (1983) quien señala que una tarea escolar se define considerando un propósito o meta, que debe ser logrado por el estudiante. Ponte, Boavida, Graça y Abrantes (1997), concretan los componentes de Doyle, señalando que la *tarea* apunta a un determinado *contenido matemático*, aspecto que agregamos a su caracterización. Es decir, los aspectos matemáticos implicados (hechos, conceptos, procedimientos, ideas) del currículo, buscando afrontar de manera sugerente los conceptos y procedimientos, proporcionando a los alumnos una buena oportunidad para implicarse en tareas matemáticas.

Otro aspecto relevante de una tarea matemática es la *coherencia* o adecuación de la tarea con la planificación previa de los *contenidos* y *propósitos* de aprendizaje, y la previsión de *errores* y *dificultades* que se haya realizado. Entenderemos que una tarea es coherente si tras el análisis de ésta se pueden describir y articular los elementos anteriormente señalados. Hablaremos que una tarea tiene baja, mediana o alta coherencia dependiendo del grado en que los elementos anteriores se hacen presentes y se articulan.

Metodología

El estudio realizado es de corte cualitativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), porque la riqueza de la investigación está en la visualización de eventos que detonan los procesos reflexivos y que a su vez son interpretables. En este caso, un curso que se llevó a cabo en cinco días, en el que los profesores participantes revisan una problemática, seleccionada por ellos, ya sea experimentado en aula o desde la teorización, ya que muchos de ellos son profesores noveles (con menos de 5 años de ejercicio docente). De este problema seleccionado por los docentes, estos son invitados a realizar y proponer una situación con orientaciones didáctica para abordar dicha problemática. Con este foco de trabajo los profesores mediante procesos de reflexión y reformulación son guiados a lograr un producto depurado y con enfoques de problema abierto. Los sujetos informantes son profesores de matemática que participaron del curso de perfeccionamiento.

Las evidencias se extraen de diversas fuentes: portafolio, presentaciones, exposiciones con apoyo de diapositivas, una bitácora de reflexiones, discusiones grupales, previa a las exposiciones, registradas en audio y planes de clases. El método de análisis de estos datos es el análisis de contenido (Krippendorff, 1990). Las categorías de análisis son: coherencia y demanda cognitiva.

ANÁLISIS

Para el análisis se considera la coherencia y la demanda cognitiva.

Coherencia

Los docentes parten reflexionando y preguntándose ¿Qué situación les generó conflicto en sus estudiantes y deseen tratarla? Uno de los docentes del equipo comparte una experiencia personal y el grupo decide tomar dicha experiencia como problemática a desarrollar, aquí evidenciamos la primera fase de ALaCT, Acción (Action). Se pone en manifiesto, la siguiente fase, el "mirar hacia atrás en la acción (looking back on the action)", cuando en la reflexión grupal se definieron los acontecimientos concretos ocurridos en el suceso, y se contrasta la expectativa con lo ocurrido realmente, lo que permite delimitar la situación de manera objetiva.

Si bien el equipo no redacta un objetivo específico para la actividad planificada, los profesores deciden buscar un objetivo de clase e "encubrirlo" de forma que los estudiantes comprendan lo que se espera de ellos, sin saber específicamente el objetivo real. En este punto reconocemos la tercera fase de ALaCT (awareness of essential aspects). El grupo fue capaz de delimitar y definir lo esencial de su propuesta y como se desarrollaría. Con los lineamientos claros, los profesores formulan una actividad pertinente a lo planteado. La presentación de la actividad a los demás profesores (oyentes) abre un debate respecto de cómo abordar una clase con este tipo de problemática. En la cuarta fase, si bien los profesores presentaron una tarea coherente al planteamiento inicial, son poco precisos a la hora de explicitar un plan de aula. Esto genera una reflexión global respecto del inicio de la clase asociada al objetivo y al momento destinado a ello, así también se alude al cierre de la clase y como es que se evaluará o evidenciará el logro del objetivo planteado, con el fin de verificar la coherencia no solo a nivel de contenido y problemática sino también en la gestión de la clase. Con el debate instaurado los profesores (expositores) presenta un objetivo previamente conversado entre ellos: deducir la fórmula del lugar geométrico a base de la distancia euclidiana. Si bien guarda relación con la problemática presentada originalmente, cambia un tanto la terminología matemática. Aunque existe este cambio, el objetivo y la problemática son amplios en su expresión, ya que habla de "resolución de problemas", "representación algebraica" y de "circunferencia", aunque la tarea mantiene nexo con el objetivo, éste en sí mismo no es conciso.

Después de la puesta en común y con una visión más amplia de la situación los docentes son capaces de incorporar las retroalimentaciones a sus propuestas pudiendo "comprobar en una nueva situación (trial)". Posterior a la reflexión, ya en la presentación final (al final del curso) los profesores exponen la problemática: ¿cómo gestionar una clase basada en la resolución de problemas para deducir la ecuación cartesiana de la circunferencia? Y el objetivo asociado: deducir la expresión algebraica de la circunferencia mediante la definición de distancia euclidiana. Asocian una tarea más pulida en su contexto y preguntas que evidencian un trabajo reflexivo a la hora de evaluar críticas y comentarios en el debate. Se pudo corroborar coherencia entre su problemática inicial y su versión final de la situación, así en el proceso se puedo registrar que el proceso ALaCT llevado a cabo el primer día, fue el inicio de otros ciclos reflexivos.

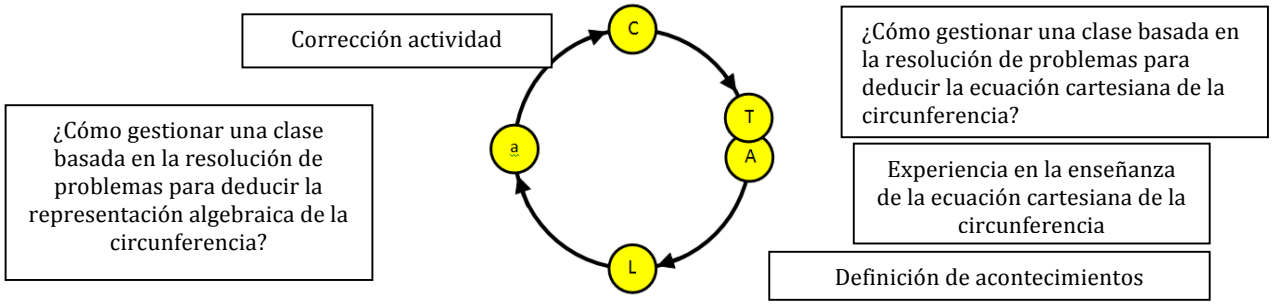


Figura 16. La coherencia en el proceso reflexivo ALaCT

Demanda cognitiva

La tarea propuesta no presenta coherencia en sus preguntas a la hora de generar la deducción, ya que por ejemplo, no obliga al estudiante a pensar en representaciones algebraicas solo invita al cálculo. Es por esto que en el debate los profesores (oyentes) enuncian estas asperezas. Esta actividad nace desde una vivencia de uno de los docentes, el cual en su clase de corte tradicional presento un objetivo similar con una actividad sin contexto (1era y 2da fase de ALaCT) y los estudiantes en un punto presionaban al profesor con: "denos la fórmula y nosotros evaluamos en ella". El profesor reconoce importante mantener la exigencia durante la actividad, ya que ésta es motor en la creación de conocimiento en particular aún, de la deducción. Dentro del debate planteado, surgen propuestas adicionales de entregar dibujos respecto del contexto del problema, pero estos son descartados por lo profesores ya que esperan que los estudiantes los realicen (3era fase de ALaCT).

Los profesores, esperan que sus estudiantes utilicen los cuadrados del plano cartesiano como referencia para el proceso de cálculo y para la deducción. Si no es lograda se inducirá mediantes preguntas guiadas, lo que denota una baja en la demanda cognitiva.

Con la problemática descrita y el objetivo medianamente definido, los profesores son conscientes de que la tarea debe ser desafiante para los estudiantes. Al iniciar la clase los profesores entregarán un objetivo modificado que enuncie lo que se espera de ellos (tercera fase ALaCT) sin aludir directamente a lo que realizarán, ya que están atentos a no bajar la demanda cognitiva. Si bien el problema original presentado posee falencias de redacción, éste posee preguntas del orden del cálculo, las que son posibles de desarrollar sencillamente con el teorema de Pitágoras.

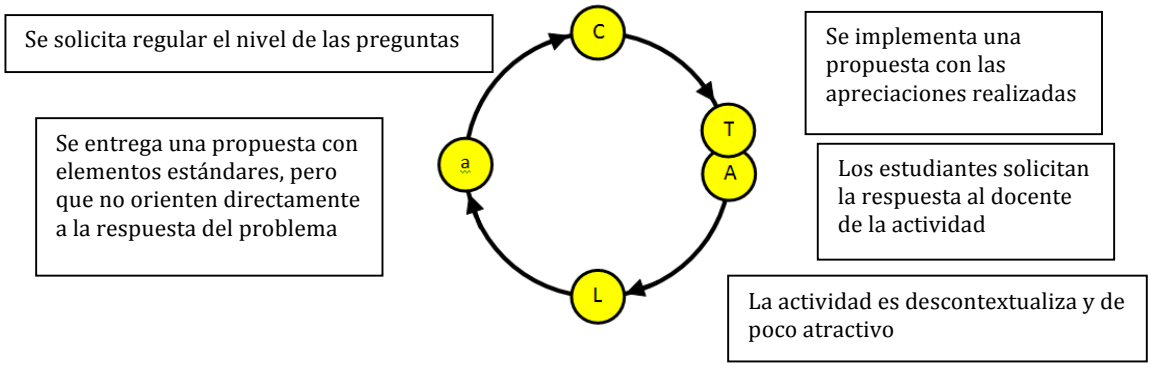


Figura 17. Demanda cognitiva en el proceso reflexivo ALaCT

El problema posee una última pregunta con un "salto cognitivo" significativo, ya que se solicita la deducción y la generalización de los pares ordenados que satisfacen la relación solicitada. Sus pares y formadoras hacen referencia a este punto, sobre el cual los docentes toman constructivamente dichas aseveraciones (4ta y 5ta fase del proceso reflexivo ALaCT). El contexto del problema alude a los puntos cardinales, los profesores creen conveniente homogeneizar el conocimiento respecto a la rosa de los vientos entregando ellos mismos una representación, comprendiendo que esto no está dentro del objetivo planteado, por lo que para la tarea de enseñanza no significa problema. Pero así también se añade un plano cartesiano, el cual inmediatamente sí induce a una estrategia de resolución, orientando el proceso cognitivo del estudiante y esperando que utilice éste como herramienta.

CONCLUSIÓN

El análisis realizado nos da luces sobre cómo docentes realizan un proceso de reflexión. En este proceso, los profesores van evolucionando su mirada sobre la coherencia de las tareas matemáticas involucradas en su problemática. También se observa cómo evoluciona la demanda cognitiva.

Observamos como el trabajo colaborativo favoreció en el curso y fue gestor de algunas fases del proceso ALaCT. También se puede ver como los docentes manifiestan una necesidad por mejorar sus prácticas y avanzar hacia una reflexión en torno a ellas.

El estudio realizado nos muestra cómo profesores noveles reflexionan en torno a su práctica, sobre un tema específico de su enseñanza, la ecuación de la circunferencia. La forma en que los docentes se involucran con su proceso reflexivo, nos impulsa para continuar llevando a cabo cursos de formación que promuevan, en sus participantes, procesos de reflexión cada vez más profundos, de modo que puedan apropiarse de esta forma de actuar en su práctica futura.

Referencias

Doyle, W. (1983). Academic work. Review of Educational Research, 53(2), 159-199.

Eraut, M. (1977). Strategies for Promoting Teacher Development. British Journal of in service Education, 4(12), 95-99.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación. México: McGraw-Hill.

Korthagen, F.A.J., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B. y Wubbels, T. (2001). Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Korthagen, F.A.J. y Verkuyl, H. S. (1987). Supply and Demand: Towards Differentiation in Teacher Education, Based on Differences in Learning Orientations. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Washington. D.C.

Krippendorff, K. (1990). Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica. Barcelona: Paidós.

Ponte, J.P., Boavida, A.M., Graça, M. y Abrantes, P. (1997). A dinâmica da aula de Matemática. En J.P. Ponte (Ed.), Didáctica da Matemática (pp. 71-96). Lisboa: Ministerio da Educaçao.

Schön, D. (1983). La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones. Madrid: Paidós.

[I] este trabajo es parte del proyecto "investigación basada en el diseño para la creación, implementación y evaluación de un curso de formación. Construyendo un escenario para estudiar la reflexión sobre la práctica de profesores noveles de matemáticas", financiado por la unidad de mejoramiento de la docencia universitaria de la pucv.

LA TRANSICIÓN EN MATEMÁTICAS DESDE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA A LA UNIVERSIDAD: ¿ENTIENDEN LOS UNIVERSITARIOS LOS CONCEPTOS ABSTRACTOS?

Nagel, Kathrin[a] y Reiss, Kristina[b]

TUM School of Education, Technische Universität München; kathrin.nagel@tum.de, kristina.reiss@tum.de

Resumen

La transición en matemáticas desde la educación secundaria a la universidad es difícil para universitarios. Especialmente el entendimiento de conceptos abstractos, que es una de las premisas para razonar matemáticamente, causa problemas. En un estudio empírico con N=200 universitarios hemos analizados dos cuestiones: (1) ¿Cómo es la comprensión de conceptos? (2) ¿Hay diferencias de entendimiento entre los conceptos? Las probabilidades de acierto y el coeficiento de Alfa de Cronbach podrían enseñar que el conocimiento conceptual de los conceptos abstractos no es tan profundo como el de los concretos. Estos resultados muestran que la educación secundaria intenta tratar conceptos que aparentemente los estudiantes no pueden entender en profundidad, lo que haría necesario una cambio en el modo de impartir las clases en la enseñanza secundaria.

Palabras clave: *transición, formación inicial del profesorado, conocimiento conceptual*

ENTENDIMIENTO DE CONCEPTOS ABSTRACTOS AL ENTRAR A LA UNIVERSIDAD

La transición e incorporación desde la educación secundaria a la universidad en matemáticas resulta difícil para muchos universitarios (Hoyles, Newman & Noss, 2001). Especialmente el razonamiento en matemáticas les causa problemas y por lo tanto es necesario analizarlo en detalle. Una premisa de razonamiento es el conocimiento conceptual (Healy & Holyes, 2000) que es el centro de esta investigación. Los conceptos nuevos de la matemática académica generalmente parecen abstractos para algunos universitarios y por eso les es más difícil entenderlos. En la literatura hay diferentes interpretaciones de la abstracción matemática. Aquí usamos la interpretación que dice que existe una dualidad entre el *proceso conceptual* y el *objeto conceptual* (Sfard, 1991). Tanto el proceso como el objeto son partes de un mismo concepto, pero lo describen desde perspectivas diferentes: el proceso conceptual describe una entidad potencial que existe cuando hay una secuencia de acciones y por eso tiene un carácter concreto. El objeto conceptual describe una entidad actual que incluye relaciones con otros objetos y es más estructural y por eso tiene un carácter más abstracto (Sfard, 1991). En esta investigación son conceptos concretos los que son entendidos desde la perspectiva del proceso conceptual y conceptos abstractos los que son entendidos desde la perspectiva del objeto conceptual. Hasta que los universitarios no entiendan los conceptos desde las dos perspectivas no podrán trabajar con éstos flexiblemente como en el caso de problemas de razonamiento.

Según Vinner (1991, p. 68) un concepto tiene dos partes: el "concept image" y el "concept definition". El "concept image" describe la estructura cognitiva que está conectada a un concepto e incluye todas sus imagénes, experiencias y modelos mentales (Tall & Vinner, 1981). El "concept definition" consiste en las palabras formales que caracterizan y describen ese concepto (Tall & Vinner, 1981). El "concept image" está conectado con el proceso conceptual, ya que ambos pueden visualizar el concepto y pueden hacerlo más palpable. Por otro lado el "concept definition" está conectado con el objeto conceptual, ya que ambos son más abstractos e incluyen las propiedades formales de un concepto. La combinación de "concept image" y "concept definition" no es fácil,

especialmente para conceptos abstractos: aquí puede faltar inicialmente el "concept image" y tan sólo existir la definición formal. Una reducción del nivel de abstracción es necesaria para crear el "concept image" y combinarlo con el proceso conceptual.
En primeros niveles de la enseñanza secundaria los objetos matemáticos son concretos; por el contrario en niveles más avanzados éstos se vuelven más abstractos. Para aprobar los exámenes por lo general es necesario el uso de algoritmos conocidos, como desde la perspectiva de un proceso conceptual (Arias Tenico & Rodríguez Ramírez, 2014). Ésto se puede convertir en un problema en la universidad, ya que aquí para resolver problemas matemáticos no es suficiente un proceso conceptual. En la universidad es necesaria una profunda comprensión de conceptos ya que en caso contrario influirá negativamente en el razonamiento matemático.
Bruner (1966) propone una teoría con tres modos básicos de representación: actuante ("en-activo"), icónico y simbólico. Aquí se sugiere que el entendimiento de conceptos es más fácil si se aprende siguiendo los modos de representación en ese orden, de actuante a icónico y después a simbólico. Es decir, en general es más fácil para un estudiante explorar un concepto activamente con sus manos que aprenderlo al principio sólo con imágenes. Cuando está familiarizado con un concepto, puede seguir con el modo icónico: en este nivel el concepto está representado con imágenes y es un poco más abstracto. Después puede entenderlo a nivel simbólico, donde el símbolo representante podría incluso no ser similar al concepto.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y HIPÓTESIS

Hasta ahora no existen muchos estudios que traten el conocimiento conceptual de universitarios. Resultados de estudios con estudiantes de los primeros niveles de enseñanza secundaria demuestran que ellos no entienden los conceptos profundamente (Healy & Hoyles, 2000). Pero al llegar a la universidad los estudiantes pueden haber adquirido durante los niveles mas altos de la enseñanza secundaria un nivel más profundo de comprensión que les hace posible poder combinar el proceso conceptual con el objecto conceptual y comprender mejor los conceptos. Por eso nos interesa (1) ¿cómo es la comprensión de conceptos de los universitarios?
Además creemos que los conceptos abstractos, no son tan bien entendidos como los conceptos concretos, porque es más difícil crear y combinar "concept image" y "concept definition". Por eso nos interesa también la cuestión: (2) ¿Hay algunas diferencias en el entendimiento de los conceptos?

METODOLOGÍA: ESTUDIO EMPÍRICO DE UNIVERSITARIOS

Fue realizado un estudio en el marco de una tésis de un doctorado. Éste estudio contiene conceptos de la enseñanza secundaria, que son partes del curriculum obligatorio. Por lo tanto todos los participantes teoréticamente pueden resolver los ítems.

PARTICIPANTES

En el estudio participaron 200 universitarios del primer semestre (76 femininos) de los estudios de matemáticas y educación matemática de dos universidades en Alemania, donde los cursos eran los mismos para ambos estudios. Los universitarios tienen un título escolar equiparable, que habilita para estudiar en las universidades alemanas. La media de su edad fue de 19.7 años (DT=2.46) y su nota media en la enseñanza secundaria fue de 2.0 (DT=0.62), que es un poco más alto que la media alemana general. En Alemania las notas se imparten desde 6 hasta 1, siendo 1.0 la mejor nota.

DISEÑO E ITEMS

El estudio transversal consistió en una prueba de aptitud y tuvo cinco ejercicios. Cada uno de éstos a su vez con cuatro ítems conectados con cuatro conceptos matemáticos de geometría: mediatriz, triángulo isósceles, vector/representante y dependencia lineal.
Los dos primeros conceptos (mediatriz, triángulo isósceles) provienen de los primeros niveles de la enseñanza secundaria. A estos niveles los estudiantes tratan los conceptos de una forma práctica por

medio de ejercicios y ejemplos. Es decir domina el proceso conceptual y por eso los podemos denominar "concretos".

Los dos otros conceptos (vector/representante, dependencia lineal) se tratan en los niveles posteriores de la enseñanza secundaria, donde se introducen ya definiciones formales. Es decir en este caso domina el objeto conceptual y por eso los podemos denominar conceptos "abstractos".
Los primeros tres ejercicios (E1, E2, E3) del estudio transversal miden el conocimiento conceptual (señalar un ejemplo, delimitar con referencia otros conceptos, conocer propiedades). Si un universitario resuelve un ítem correcto, recibe un punto; en caso contrario no recibe puntos. Los otros ejercicios siguientes (E4 y E5) analizan el razonamiento matemático (señalar un ejemplo de un teorema conocido, justificar una teorema conocido).

A causa de restricciones de tiempo (30 min) se eligió un diseño rotatorio: cada universitario resolvió sólo tres de cuatro ítems de cada ejercicio. De esta forma los ítems de mediatriz fueron trabajados por 156 universitarios, los del tríangulo isósceles por 135, los del vector/representante por 155 y los de la dependencia lineal por 154. Los ejercicios E1, E3 y E4 constaron de preguntas de elección múltiple (con cuatro o séis respuestas posibles). Los ejercicios E2 y E5 eran abiertos. El análisis de los resultados aún no ha concluido, por eso aquí sólo presentaremos resultados de los ejercicios: E1, E2 y E3.

Tabla 5. Ejercicios E1, E2 y E3 del estudio

Ejercicios	*E1*	*E2*	*E3*
Definición	Elige el ejemplo o los ejemplos correcto(s) que simboliza(n) el concepto buscado.	Explica porque el ejemplo dado no representa el concepto buscado.	Elige la respuesta o las respuestas correcta(s), que se refiere(n) a las propiedades del concepto buscado.
Ejercicios parciales	a. Mediatriz b. Triángulo isósceles c. Vector/representante d. Dependencia lineal	a. Mediatriz b. Triángulo isósceles c. Vector/representante d. Dependencia lineal	a. Mediatriz b. Triángulo isósceles c. Vector/representante d. Dependencia lineal

Ejemplo del ejercicio E3a véase figura 1.

Elige la respuesta o las respuestas correcta(s), que se refiere(n) a las propiedades de ...

a) mediatrices de un triángulo:
□ Siempre son ejes de simetría del triángulo.
□ Siempre dividen el triángulo en dos triángulos de igual área.
□ Siempre biseccionan los ángulos opuestos.
□ Siempre forman un ángulo recto con los lados del triángulo.
□ Siempre biseccionan los lados del triángulo.
□ Siempre pasan por un vértice del triángulo.

Figura 18. Ejemplo del ejercicio E3

RESULTADOS PRELIMINARES

Cada uno de estos conceptos fue analizado con diferentes procedimientos que arrojan interesantes resultados: las frecuencias de acierto son altas en los ejercicios de conceptos concretos (74.4%) y más bajas en los de abstractos (44.8%). Véase figura 2 con los resultados completos.

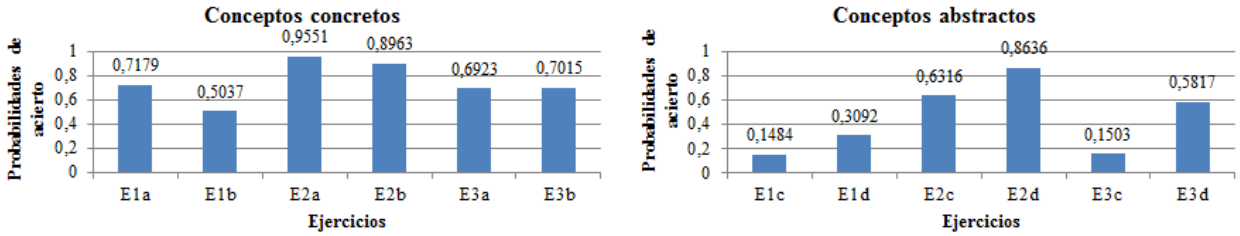


Figura 19. Frecuencias de acierto de los ejercicios de conceptos concretos y abstractos

La prueba U de Mann-Whitney confirma así mismo una diferencia entre las frecuencias de acierto de los conceptos concretos y abstractos (p=.065).

Especialmente el ejericio E2 fue fácil para los universitarios. Por el contrario en los ejercicios E1 y E3 el resultado fue bueno en el caso de conceptos concretos y peor en el de conceptos abstractos. Las probilidades de acierto en los ejercicios parciales E1c y E3c fueron incluso menos del 16%. El Alfa de Cronbach señala que la fiabilidad de las cuatro escalas en los tres ejercicios para el análisis de conceptos concretos (α=.61, α =.51) es aceptable, sin embargo no lo es en las de los conceptos abstractos (α =.38, α =.17), véase tabla 2.

Tabla 6. Resultado de Alfa de Cronbach (α) de las escalas de conceptos concretos y abstractos

		α
Conceptos concretos	Mediatriz	0.61
	Triángulo isósceles	0.51
Conceptos abstractos	Vector/representante	0.38
	Dependencia lineal	0.17

DISCUSIÓN

Los resultados preliminares corroboran que en general los universitarios disponen de una profunda comprensión de conceptos concretos, donde la probabilidad de acierto fue superior al 0.50 en todos los ítems y tienen problemas con los ejercicios de los conceptos abstractos, especialmente con E1c, E1d y E3c, donde la probabilidad de acierto fue menor al 0.31. La diferencia de probabilidades de acierto entre los ítems de conceptos concretos y abstractos no fue singnificativa, pero todavía visible. Los resultados de los ejercicios E1c y E1d muestran que los universitarios no estuvieron seguros de que ejemplos representaban los conceptos vector/representante o dependencia lineal de vectores dados. La respuesta del ejercicio E3 no sólo contenía propiedades necesarias para la definición del concepto preguntado sino también propiedades relacionadas con otros conceptos. Por eso para la respuesta de este ejercicio se necesita un mayor nivel de conocimiento conceptual.

Aparentemente los universitarios tienen un déficit en los conocimientos conceptuales de éstos conceptos. La probabilidad de acierto del ejercicio E2 fue más alta, también para los conceptos abstractos (más del 0.63). Ésto muestra que los universitarios ya poseen un conocimiento conceptual básico de los conceptos.

Los diferentes resultados de los ejercicios E1, E2 y E3 podrían ser causa del diseño: E1 y E3 son ejercicios de elección múltiple y por ello más difícil de resolver correctamente ya que las respuestas posibles contienen también representaciones falsas de los conceptos.

Para resolver los ejercicios E1 y E3 es necesario un conocimiento conceptual profundo. Aparentemente los universitarios poseen un conocimiento profundo de conceptos concretos, aúnque el objeto conceptual de estos conceptos no se implemente explicítamente en la enseñanza secundaria. Parece que los universitarios desarrollan su conocimiento conceptual de los conceptos mediatriz y triángulo isósceles durante la escuela, aúnque inicialmente sólo se trabajen de una forma visual. Este resultado podría señalar que sería mejor indcluir conceptos (también los abstractos) de perspectiva del proceso y con aplicaciones, también en sentido de Bruner en los niveles altos de la enseñanza secundaria.

El coeficiente del Alfa de Cronbach disminuye con los conceptos abstractos. Generalmente hay que ser cauteloso con estos resultados, porque las escalas de los coeficientes del Alfa de Cronbach sólo constan de tres ítems. Sin embargo los resultados podrían indicar que los tres ítems (E1c, E2c, E3c respectivamente E1d, E2d, E3d) no miden lo mismo y la fiabilidad entre ellos es baja. Una explicación posible es que los universitarios no tengan la misma comprensión de conceptos que los que eligieron los ítems para el estudio. Los universitarios aparentemente no tienen un conocimiento conceptual profundo suficiente sobre los ítems del estudio.

Para mejorar el conocimiento conceptual de universitarios y estudiantes sería suficiente introducir conceptos nuevos (concretos y abstractos) desde la perspectiva del proceso. Universitarios y estudiantes deberían trabajar con éstos activamente y la estructura más abstracta de estos conceptos debería de introducirse más tarde. En los primeros niveles de la enseñanza secundaria el contenido ya está implementado de una forma intuitiva. Esta forma intuitiva debería de introducirse tambien en niveles altos de la enseñanza secundaria y/o en la universidad. De otra forma resultará dificil llegar a conocimientos nuevos si no se dominan los básicos.

Referencias

Arias Tenico, F., & Rodríguez Ramírez, K. (2014). Formación matemática en la educación secundaria desde la perspectiva de los estudiantes que inician estudios en la Universidad de Costa Rica. Paradigma, 35(2), 129-154.

Bruner, J. S. (1966). Toward a Theory of Instruction. Harvard University Press.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), 396–428.

Hoyles, C., Newman, K., & Noss, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32(6), 829-845.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics. 12(2), 151-169.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ANÁLISIS DIDÁCTICO PARA IDENTIFICAR ERRORES Y DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES EN EL TRATAMIENTO DE SUCESOS INDEPENDIENTES

Bizet Leyton, V.[a]; Ramos-Rodríguez, E.[b]; Ruz Ángel, F.[c].

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
valeb0@hotmail.com[1]; elisabeth.ramos@pucv.cl[2]; felipe.ruz.a@pucv.cl[3].

Resumen
El presente escrito tiene como objetivo indagar en los errores y las dificultades que presentan alumnos entre 16 y 17 años sobre el concepto de Sucesos Independientes a partir de lo desarrollado en el Análisis Didáctico. Bajo el paradigma cualitativo, se lleva a cabo un estudio exploratorio(Baptista, Fernández, & Hernández, 2006), considerando como sujetos de estudio estudiantes de un liceode la quinta región de Chile.Se diseña el instrumento de recogida de información en base al Análisis Didáctico(Rico, 1998). El análisis de los datos se lleva a cabo bajo el método de análisis de contenido(Krippendorff, 1990)constatando la existencia de diversos errores y dificultades que aparecen en la literatura (Batanero, 2001; Cid, 2009). También se observa otras dificultades que emergen de las producciones de los estudiantes. Estos resultados nos dan evidencia de la naturaleza compleja del contenido en cuestión, abriendo nuevos desafíos para su tratamiento en la enseñanza escolar.
Palabras clave: *Sucesos Independientes, Análisis Didáctico, Errores y Dificultades.*

INTRODUCCIÓN Y PROBLEMÁTICA

Ésta investigación se centra en indagar las dificultades que surgen en el aprendizaje del concepto Sucesos Independientes, en estudiantes de educación media. Dicho interés nace en la práctica como docentes en formación, al notar algunos problemas. Es común que los estudiantes losconfundancon eventos excluyentes, como también los definan a través de la regla del producto, pudiendo ocurrir que la probabilidad sea cero y el evento no ser vacío, y aplicando dicha regla produce creer que se comprueba la independencia(D'Amelio, 2004).*Al respecto, en la investigación de* Sánchez y Hernández (2001)*, se obtuvoque sólo un* 28% *de*jóvenes mexicanos con edad promedio 16 años*, respondieron* correctamente a la pregunta sobreidentificar *dicho tipo de sucesos.*

Sobre la concepción de independencia, Batanero (2001), *afirma que, desde el ámbito de la didáctica, requiere un análisis por sí solo y alude a la* discordancia *producida entre la teoría y* práctica, *pues en la vida cotidiana las personas no logran aplicar* la regla del producto *en situaciones concretas*.

A partir de lo anterior, planteamos la pregunta de investigación ***¿Qué errores y dificultades de estudiantes, sobre Sucesos Independientes en problemas asociado al cálculo de Probabilidad, se pueden reconocer al desarrollar un análisis didáctico?.*** *Es así que para desarrollar ésta investigación,nos centramos en el estudio del concepto Sucesos Independientestomando como marco de referencia elAnálisis Didáctico,para construir el instrumento de recogida de información y analizar los resultados.*

Marco de referencia: análisis didáctico

El Análisis Didáctico,"es un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos dediseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje"(Gómez , 2005,

pág. 3)Está compuesto por cuatro sub-análisis (figura 1), organizados de manera secuencial(Gómez , 2005)

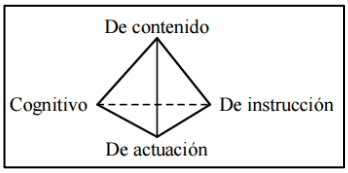


Figura 1. Análisis que componen el análisis didáctico(Gómez , 2005, pág. 12).

Este análisis parte con el Análisis de Contenido, se centra en examinar un objeto matemático desde el punto de vista teórico, estudiando sus representaciones, fenomenología, además de procedimientos y relaciones existentes con otros conceptos(Gómez , 2005). Para indagar en las representaciones, desde un enfoque semiótico, utilizamos la Teoría de Representación Semiótica. Su autor, Duval (1999), analiza la relación entre la semiosis y la noesis, en el proceso cognitivo desarrollado por el sujeto, y su inferencia en el aprendizaje de un concepto matemático, pues afirman, lacomprensión integral de un concepto se fundasobre la coordinación de al menos dos registros de representación (Duval, 1998). Según esta teoría para que exista comprensión de un objeto matemático debe haber tratamiento y conversión de distintos registros de representación.

En el Análisis Cognitivo, según Lupiáñez (2009) se estudia el aprendizaje a lograr en los estudiantes fundamentándose en el currículo, el docente identifica los conocimientos previos que poseen estos para la construcción del nuevo concepto, reconoce las dificultades a las que pueden enfrentarse sus alumnos.

Continúael Análisis de Instrucción, procedimiento centrado en la elaboraciónde tareas, para el logro de aprendizajes fijados previamente, analizando las posibles resoluciones a desarrollar los estudiantes al momento de abordarlas y construyendoel plan de clase en que se trabajarán (Lupiáñez, 2009).

Finalmente se lleva cabo el Análisis de Actuación. Gómez (2005) menciona que éste se focaliza en analizar la implementación del plan de clase, es decir el logro de aprendizajes en los estudiantes y contraste entre lo previsto en él con lo ocurrido en la práctica en el aula.

Metodología

Este estudio tiene un enfoque de investigación cualitativo(Baptista, Fernández, & Hernández, 2006, pág. 18), donde los sujetos de estudio fueron 29 estudiantes del nivel 3° medio (16 a 17 años), de un liceo de modalidad científico- humanista, subvencionado de la quinta región de Chile.
Se diseña el instrumento de recogida de información, una tarea de aprendizaje en base al Análisis Didáctico (Rico, 1998)y el análisis de los datos se lleva a cabo bajo el método de análisis de contenido(Krippendorff, 1990).Los resultados se plasman a través del desarrollo de los cuatro sub-análisis del análisis didáctico descritos anteriormente(Gómez , 2005).

RESULTADOS

ANÁLISIS DIDÁCTICO, ANÁLISIS DE CONTENIDO

Sistemas de representación

De acuerdo conDuval(1998), es necesario que el estudiante conozca distintas maneras de representar un mismo objeto matemático, ya que facilitará la compresión del contenido a aprender. Entre los sistemas de representación del concepto Sucesos Independientesdestacan: gráfico (Diagrama de Árbol); simbólico (Sea$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$diremos que los sucesos $A, B \in \mathcal{A}$son independientes si y sólo si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$o $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$); algebraico numérico$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b^2}\right)$ y verbal (lenguaje usual).

Análisis fenomenológico

Según Rincón(2007), el aprendizaje de un concepto matemático es más fácil si se basan en el contexto de la vida real en que se presenta o en situaciones que dan sentido. En este caso, algunos de ellos son: situaciones biológicas (genética mendeliana); situaciones físico-química, (comportamiento de moléculas de gases); Situaciones de juegos de Azar (ejemplo considerar una baraja de Naipes Español, y plantear la interrogante ¿Cuál es la probabilidad de obtener una carta par de figura espada?), etc.

Estructura conceptual

Elaboramos un mapa conceptual del objeto matemático *Sucesos Independientes* (figura 2). Se inicia con los tres elementos que componen un espacio de probabilidad e identificamos dentro la σ-álgebra $\mathcal{A}$: los Sucesos Independientes, ligados directamente con la regla del producto según la definición expuesta anteriormente.La incorporación al mapa de nuevos conceptos y procedimientos relacionados al tema de estudio, permitió expresar con mayor claridad la complejidad de la estructura conceptual de éste.

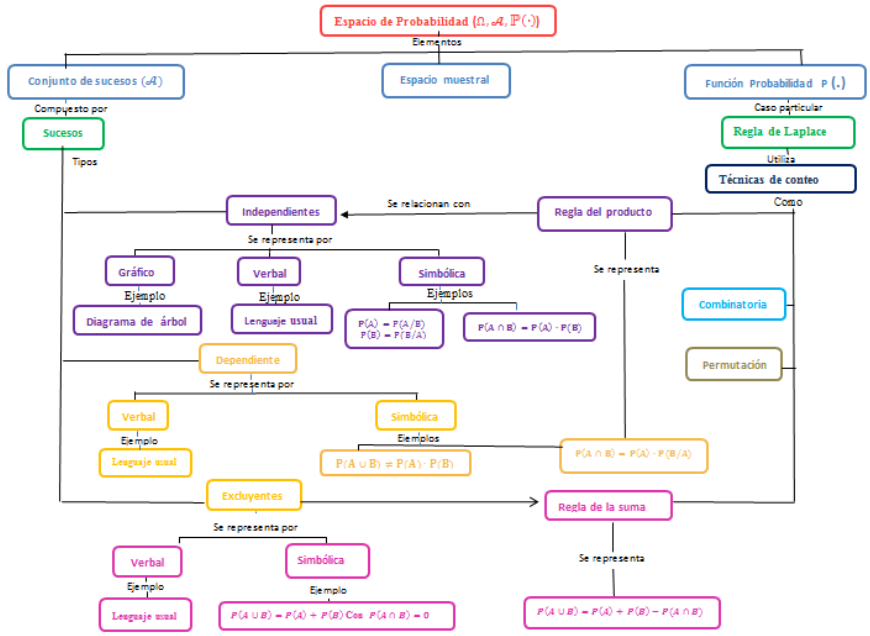


Figura 2.Estructura conceptual del objeto matemático Sucesos Independientes.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, ANÁLISIS COGNITIVO

Para identificar los errores y dificultades que trae consigo el tratamiento de los Sucesos Independientes, hemos recurrido a los autores que han trabajado dicho tema. De ésta forma hemos encontrado diversos errores y dificultades, a detallar a continuación, según los autores identificados. Destacamos las dificultades identificadas porCid (2009)quien hace referencia a la dificultad de distinguiro determinar si dos sucesos son independientes;Azcárate, Cardeñoso y Serrado(2005) mencionan la dificultad en construir el significado de la noción de independencia; y Sánchez(2009)observa que hay dificultades en diferenciar entre eventos excluyentes e independientes.

Sobre los errores relativos a este concepto, *D'Amelio* (2004) abordan el error de confundir la regla del producto con la regla de la suma demostrándose la independencia de sucesos si cumplen $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{B})$. Por su parte, Darrigrandi, Ramos y Zañartu (2012) mencionan el error de asumir la igualdad $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{B})$como válida siempre.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

Siguiendo los lineamientos que nos ofrece el análisis de contenido y cognitivo, se elabora una tarea de enseñanza considerando como fenomenología el juego de azar. Consta de dos partes. La primera, aborda dos situaciones de juegos de azar, en una de ellas se trabaja con sucesos independientes y en la otra se pierde ésta condición. La segunda, consistió en 5 preguntas sobre cada situación. La situación que analizaremos en este documento se presenta en la tabla 1.

Tabla 1: Tarea de aprendizaje a implementar.

Se extra una carta al azar de una baraja inglesa (52 cartas de 4 pintas: trébol, pica, corazón y diamante o rombo. Cada pinta tiene los números del 2 al 10 y las cartas A, J, Q y K).
¿Cuál es la probabilidad de extraer una carta par de pinta corazón? ¿Cuáles sucesos podría definir en cada situación?¿Influye o afecta la ocurrencia de un suceso en la ocurrencia del otro suceso? ¿Por qué?
¿Cuál es el valor de$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$?

ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

En lo que sigue exponemos el análisis de las producciones de los estudiantes, así como el contraste entre lo previsto y lo ocurrido en la puesta en práctica.

La figura 3 muestra que un estudiante logra calcular la probabilidad de la intersección de los dos sucesos involucrados en la situación 1 utilizando la regla del producto, aunque en ningún momento en su trabajo menciona o corrobora la hipótesis que debe cumplirse para usarla, no justifica su procedimiento. En ésta respuesta es posible observar que el alumno en su proceso de aprendizaje cometió el error mencionado por Darrigrandi, Ramos y Zañartu(2012).

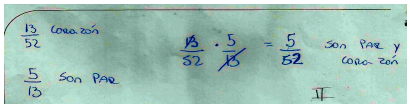


Figura 3. Respuesta a la pregunta 1 sobre situación 1 de un estudiante.

Por otro lado, en la figura 4 se evidenció que los estudiantes definen los dos sucesos de la situación 1 como uno solo, presentandodificultad en reconocer los sucesos involucrados en un experimento, debido a que no poseen una comprensión del objeto matemático Sucesos.

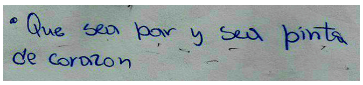


Figura 4. Respuesta a la pregunta 2 sobre situación 1 de un grupo de cuatro estudiantes.

Por último, la evidencia de la figura 5 muestra que tres estudiantes no logran identificar correctamente el espacio muestral y los casos favorables de cada suceso, dando una respuesta errónea a la pregunta.

Esto lo asociamos al hecho de no tener claridad del significado de sucesos en probabilidad.

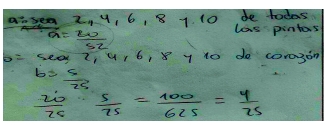


Figura 5. Respuesta a la pregunta 4 sobre situación 1 de un grupo de tres estudiantes.

CONCLUSIONES

De acuerdo al trabajo realizado por los estudiantes y análisis desarrollados bajo sustento teórico, es posible afirmar que la comprensión del concepto matemático Sucesos Independientes es complejo para ellos, por ende en su proceso de aprendizaje se enfrentan a dificultades que el docente debe prever.

En esa misma línea, las principales dificultades detectadas se pueden resumir como identificar sucesos involucrados en un experimento, determinar espacio muestral y casos favorables de un suceso.

Creemos que es de suma importancia que el profesor no solo conozca estas sino que también las aborde en clase, pues de no hacerlo impide que los estudiantes adquieran aprendizajes significativos, así como también no permite profundizar en contenidos probabilísticos que ayudan a desarrollar el pensamiento lógico matemático y entregan conocimiento para comprender información en la vida cotidiana.

Referencias

Azcárate , P., Cardeñoso, J., & Serrado, A. (2005). Los obtáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. International Association for Statistical Education, 4(2), 59-81.

Baptista, P., Fernández , C., & Hernández , R. (2006). Metodologia de la Investigación. México: McGraw-Hill, Interamericana.

Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadistica. Granada: Universidad de Granada.

Cid, E. (2009). Guía didáctica para el profesor de Matemática 2° medio. Santiago: Santillana.

D'Amelio, A. (2004). Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes: concepciones y dificultades. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17, 138-144. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C

Darrigrandi, F., Ramos, M., & Zañartu, M. (2012). Texto para el estudiante matemáticas 2° educación media. Santiago: Santillana.

Díaz , F., & Hernández, G. (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. México: McGraw-Hill Interamericana.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle.

Gómez , P. (2005). El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Málaga: Comunicación presentada en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática (1 de diciembre de 2005).

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y disdeño curricular en matemáticas. Revista EMA, 7(3), 251-292.

Hernández , R., & Sánchez , E. (2001). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Exploración de Problemas Asociados a la Regla del Producto en Probabilidad. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 14, 86-395. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Krippendorff, K. (1990). Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.

Lupiáñez, J. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada: Universidad de Granada.

MINEDUC. (2009). Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media. Santiago: Chile.

MINEDUC. (2011). Matemática Programa de Estudio Segundo Año Medio. Santiago : MINEDUC.

Rico, L. (1998). Complejidad del Currículo de Matemáticas Como Herramienta Profesional. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1(1), 22-39.

Rincón, L. (2007). Probabilidad y Estadistica. Ciudad de México: Facultad de Ciencias UNAM.

Sánchez , E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. Revista Scielo, 21(2), 39-77.

ANÁLISIS DE LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA RESPECTO A LA INCORPORACIÓN FORMAL DE LA MEDIA ARITMÉTICA EN EL CURRÍCULO NACIONAL CHILENO

Ruz-Ángel, Felipe[a], Olivares-Valencia, Carolina[b]

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
felipe.ruz.a@pucv.cl[a], carolina.olivares.valencia@gmail.com[b]

Resumen

La enseñanza de la estadística en Chile ha tomado un interés particular durante los últimos años, luego que en la actualización del Marco Curricular (2012) se aumentó la presencia de contenidos asociados a este eje y con ello, la cantidad de horas propuestas a su trabajo durante los años que se prologa la educación escolar. Por lo anterior, basados en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), buscamos aportar en el proceso alfabetizador de la estadística,a través de un análisis de la organización matemática desarrollada en los documentos ministeriales oficiales (programa de estudio, texto escolar y cuaderno de trabajo), observando la incorporación formal de la media aritmética y su tratamiento en el currículo escolar chileno.Se concluye acerca de un trabajo asociado únicamente a la praxis, dejando sin indicaciones ni referencias al bloque del saber, lo que sumado a impertinencias teóricas importantes, podrían generar obstáculos para el correcto aprendizaje de esta medida descriptiva, que más allá de su importancia en la estadística, tiene un sin número de erróneas interpretaciones sociales.

Palabras clave: *educación estadística, currículo chileno, media aritmética, análisis de textos*.

INTRODUCCIÓN

Tomando en consideración lo mencionado por Silva (2013), los textos escolares y programas de estudio, representan un recurso pedagógico que complementa la función del profesor y la investigación sobre ellos permite medir su calidad asociada a una "adecuada bajada y cobertura del currículo oficial" (Vidal, 2010, p. 2).

Por lo anterior, con esta investigación nos interesa indagar el modo en que se implementan las directrices curriculares sobre la media aritmética. Se describe el proceso de identificación y evaluación de los elementos praxeológicos presentes en la incorporación de este concepto en el currículo escolar chileno, tomando como base la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

MARCO TEÓRICO

La Teoría Antropológica de lo Didáctico, en lo que sigue TAD, es elegida como *los anteojos* para observar los elementos fundantes de esta investigación (programas y textos de estudio), por lo mencionado por Chevallard (1999), *la TAD sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales* (pag. 1).

Esta teoría, admite que *toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que resume con la palabra praxeología (praxis + logos)* (Chevallard, 1999, p.2). A lo que agregan Bosch *et al* (2006):

- El nivel de la *praxis* o del "saber hacer", es el que engloba un cierto *tipo de tareas (T)* y cuestiones que se estudian, así como las *técnicas (ô)* para resolverlas.
- El nivel del *logos* o del "saber", se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, denominados *tecnologías* (θ). Y dentro de este mismo "saber", se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación, que se denomina *teoría* (Θ).

Estos elementos praxeológicos conforman una *organización praxeológica*, que dependiendo del grado de complejidad de sus componentes puede ser de diferentes tipos: *Praxeologías puntuales (*[$T / \hat{o} / \theta / \Theta$]*); Praxeologías locales*; *Praxeologías regionales*; *Praxeologías globales (*[$T_{ijk} / \hat{o}_{ijk} / \theta_{jk} / \Theta_k$]*).*

Por último, Chevallard (1999, pp. 27-29) establece criterios explícitos para estudiar en qué grado los elementos praxeológicos (tareas y técnicas) satisfacen una determinada organización. Estos criterios son:

- *De Identificación:* Los tipos de tareas *T*, ¿Están claramente *despejados* y bien identificados?.
- *De las razones de ser:* El motivo de los tipos de tareas T_i, ¿Están explicitadas?.
- *De Pertinencia*: Los tipos de tareas considerados, ¿proporcionan una buena muestra de las situaciones matemáticas encontradas?.

METODOLOGÍA

Esta investigación centra su tarea en analizar cómo se presenta formalmente, el concepto de media aritmética y su tratamiento en el currículo escolar. En esta labor, se llevan a cabo tres etapas de análisis: (1) *identificar* los elementos praxeológicos presentes en cada documento analizado, determinando las organizaciones praxeológicas que ellos constituyen. (2) *evaluar* dichos elementos según los criterios mencionados en el marco teórico. (3) *analizar* el grado de asociación entre dichos documentos.

RESULTADOS

Dentro del currículo escolar, el concepto de *media aritmética* se presenta por primera vez de manera explícita en el quinto año de educación básica, en el sector de matemáticas, bajo el eje temático de *Datos y probabilidades*. Por esta razón, hemos seleccionado como representantes del currículo los documentos oficiales suministrados por el MINEDUC, a saber, el programa de estudio año 2012, el texto del estudiante para la generación 2015, y el cuaderno de trabajo para este nivel educativo, año 2013. Por lo anterior, daremos paso a exponer los principales resultados de la implementación de este estudio.

Identificación y evaluación de tareas

Se identifican 4 tipos de tareas, que buscan desarrollar las habilidades de calcular, interpretar y aplicar el promedio en diversos contextos. A modo de resumen, se presenta en la Tabla 1 cuáles de esas tareas se localizan en cada documento.

Tabla 7. Tipos de tareas presentes en los documentos analizados.

Tarea	Programa	Texto	Cuaderno de Trabajo
Calcular el promedio de datos	**X**	**X**	**X**
Calcular el promedio de datos registrados en tablas de frecuencia	**X**	**X**	**X**
Interpretar el promedio	**X**		**X**
Usar la media para calcular datos faltantes		**X**	

en una muestra			

Al momento de evaluar estas tareas, según el criterio de *identificación*, podemos apreciar que las tareas de cálculo están presentes en los tres documentos, sin embargo, la interpretación de la media en el contexto de interés se ausenta en el texto de estudio, en donde se incorpora una aplicación del cálculo del promedio para determinar datos faltantes de una muestra. En el mismo sentido, respecto al criterio de *razón de ser*, únicamente en el Cuaderno de Trabajo es donde se intenta de manera breve explicitar el motivo de por qué esta medida puede calcularse para representar el comportamiento de los datos, lo que se muestra en la Figura 1.

El número obtenido en la actividad anterior es 8 y se denomina **promedio**; permite representar a un conjunto de datos. Se puede decir que el promedio es un número alrededor del cual se encuentra la mayoría de los datos. El promedio corresponde a la suma de los datos, dividido por la cantidad de datos.

Figura 20. Extracto de la *razón de ser* para el cálculo del promedio (MINEDUC 2013, pp. 13-14)

Al evaluar el criterio de*pertinencia* de las tareas identificadas, detectamos que las propuestas dentro del programa de estudio, no satisfacen esta condición, como se muestra en la Figura 2

Calculan promedios de datos registrados en tablas y lo interpretan. Por ejemplo, en la siguiente tabla se muestran los resultados de 14 clientes respecto del servicio telefónico celular:

Categoría	Frecuencia
Muy conforme	2
Conforme	8
Disconforme	3
Muy disconforme	1

A partir de esta información:
- determinan el promedio de las frecuencias
- interpretan el promedio obtenido

Figura 21. Tarea sobre *calcular e interpretar el promedio* presente en el Programa (MINEDUC 2012, p. 148)

En este caso, se solicita calcular e interpretar el promedio de las frecuencias absolutas de datos provenientes de una variable cualitativa agrupados en una tabla. Reconocemos su impertinencia con el nivel educativo y contenido de estudio, ya que en el procedimiento para desarrollar esta tarea, no es claro por cuánto dividir la suma de las frecuencias. Si lo hacen por el total de observaciones, el resultado es 1 y su interpretación no aporta información acerca del estudio; si lo hacen por el número de categorías, la única interpretación posible sería en el sentido de reconocer el promedio como un valor esperado, concepto asociado a variables aleatorias que son parte del currículo desde segundo medio, al relacionar el valor promedio de una variable con su *esperanza.* Asociamos esta preocupante situación, al querer calcular esta medida a una variable de origen cualitativo, lo que puede generar obstáculos para el correcto aprendizaje de este valor, que más allá de su importancia en la estadística, tiene un sin número de erróneas interpretaciones sociales, como la mancionadas por De la Cruz (2007).

Identificación y evaluación de técnicas

Continuando, en la Tabla 2 se presentan las técnicas localizadas, que corresponden a los procedimientos para calcular el promedio a datos presentados en tablas de frecuencias sobre variables cualitativas y cuantitativas discretas.

Tabla 8. Tipos de técnicas presentes en los documentos analizados.

Técnica	Programa	Texto	Cuaderno de Trabajo
Procedimiento para datos provenientes de una variable cualitativa			X
Procedimiento para datos provenientes de una variable cuantitativa discreta		X	X

Al evaluar este elemento praxeológico, notamos que respecto al criterio de *identificación,* se presentan técnicas de manera explícita únicamente en los documentos destinados a la ejercitación por parte de los estudiantes, no aportando indicaciones de este estilo dentro del programa de estudio. Por otro lado, en cuanto a la *razón de ser* de estas técnicas, no se detallan fundamentos teóricos asociados al motivo de por qué el cálculo del promedio se desarrolla de la manera en que se menciona. Lo anterior, tiene directa relación con la ausencia de sentido que tienen los estudiantes al enfrentarse a la interpretación de esta medida descriptiva.

Por último, en cuanto a la *pertinencia* de las técnicas detalladas, es de principal preocupación la manera en que el Cuaderno de Trabajo describe la técnica para el cálculo de la media aritmética cuando los datos se presentan organizados en una tabla de frecuencias para variables cualitativas, que se muestra en la Figura 3.

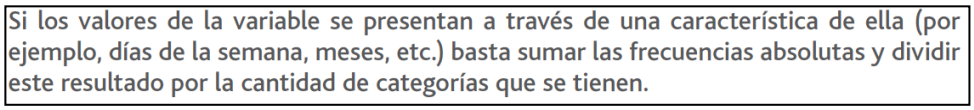

Si los valores de la variable se presentan a través de una característica de ella (por ejemplo, días de la semana, meses, etc.) basta sumar las frecuencias absolutas y dividir este resultado por la cantidad de categorías que se tienen.

Figura 22. Técnica sobre *calcular* el promedio a una tabla de categorías presente en el cuaderno de trabajo (MINEDUC 2013, p. 17)

Como se mencionó en la evaluación de las tareas sugeridas, se indica a los a los estudiantes que calculen el promedio aún cuando la naturaleza de la variable de interés no lo admite.

Identificación y evaluación de tecnologías y teorías

Este bloque praxeológico asociado a la idea del *logos* (saber), como lo denomina Chevallard (1999), no se presenta de manera directa ni indirecta en todos los documentos estudiados. Por esta razón, se detecta la principal falencia de los instrumentos utilizados por el MINEDUC, que omiten cualquier tipo de referencia, indicación o comentario sobre el nivel teórico que se espera sea alcanzado en esta incorporación formal del concepto de media aritmética, en la implementación del currículo escolar.

CONCLUSIONES

Las principales conclusiones obtenidas tras este estudio pueden ser resumidas según:

- La incorporación de la media aritmética al currículo escolar chileno apunta a desarrollar únicamente tareas de *cálculo* e *interpretación*, omitiendootras habilidades cognitivas de orden superior como la de *razonamiento.*

- Se identifican errores disciplinares en el tratamiento del concepto de promedio, lo que podría provocar dificultades para abordar los contenidos que continúan dentro del currículo escolar.
- En ninguno de los documentos estudiados se identifica un bloque praxeológico[$T/\hat{o}/\theta/\Theta$]completo, desarrollando únicamente la *praxis* del concepto estudiado y no su *logos*.

Finalmente, proyectamos esta investigación a futuros estudios que tomando como insumo estos resultados, diseñen e implementen situaciones de aprendizaje y documentos que aporten herramientas para la labor profesional docente.

Referencias

BOSCH, M., GARCÍA, F., GASCÓN, J., HIGUERAS, L. (2006) La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría antropológica de los didáctico. Educación matemática, año/vol. 18, nº002, Santillana (pp. 37-74). México

CHEVALLARD, Y (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de los didáctico. Recherches en Didactíque des Mathématiques, Vol 19, nº2, pp. 221-266.

DE LA CRUZ, A. (2007) Un estudio sobre la construcción social de la noción de promedio en un contexto probabilístico. Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional, México.

MINEDUC (2012) Bases Curriculares Educación Básica. ISBN 978-956-292-353-8, 1º edición, Santiago, Chile.

MINEDUC (2012) Programa de Estudios Quinto año básico. Unidad de Currículum y Evaluación. ISBN 978-956-292-374-3, pp. 139-155.

MINEDUC (2013) Módulo Nº4: Datos y Probabilidades, Cuaderno de Trabajo 5º básico. Nivel de educación básica, División de Educación General.

MINEDUC (2014) Texto para el estudiante, Matemática 5º básico. Ed. Galileo Libros Ltda., ISBN 978-956-8155-18-6, pp. 256-270.

SILVA, M.B.E. y GUIMARÃES, G. (2013). O conceito de escala em livros didáticos de matemática do 4º e 5º ano do ensino fundamental. XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, Brasil.

SOCHE (2011) Recomendaciones para el currículum escolar del eje de Datos y probabilidad. Sección de Educación Estadística.

VIDAL, R. (2010). El libro de texto de matemáticas en Chile en el último siglo 1910–2010. Cuadernos de Educación, 27, 1-21.

CREENCIAS DEL ESTUDIANTE EN FORMACIÓN INICIAL SOBRE LA FORMA DE ENSEÑAR LA ADICIÓN[i]

Pamela Reyes-Santander[a], Paz Iturrieta[b] y Soledad López[c]

[a, b, c] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
pamela.reyes@ucv.cl [a] ; paz_itur@hotmail.com [b] ; soledadlopezf7@gmail.com [c]
Campo de investigación: Formación inicial de Profesores, Nivel educativo: Superior.

Resumen

Los estudiantes en Formación Inicial Docente tienen creencias sobre la forma de enseñar la adición, las cuales son producto de su formación escolar, esto se debe a sus propias experiencias en las metodologías utilizadas durante su aprendizaje. En su formación inicial se replantean o reafirman sus creencias sobre cómo aprender la adición, debido a las competencias que adquieren sobre el conocimiento matemático y didáctico. El objetivo de este trabajo es presentar un proyecto en curso que nos dé cuenta sobre las creencias que poseen los estudiantes conforme a cómo enseñar y aprender la adición, ya sean creencias propias de su experiencia de vida y también aquellas que se encuentran erróneas. Se realizará una investigación descriptiva, no experimental y con enfoque mixto.

Palabras clave: *Creencias, formación inicial docente, educación básica, adición.*

INTRODUCCIÓN

El estudio TEDS-M 2008 (Blömeke, Suhl y Kaiser, 2011) muestra que la mayoría de los profesores y estudiantes en FID chilenos, están muy por debajo de la media internacional y que hay ciertas creencias predominantes que debería ser transformadas. Interesados en la preparación de los profesores de Educación Básica y preocupados por los resultados de esta prueba internacional, se quiere profundizar en el estudio de las creencias que tienen los estudiantes en formación sobre la forma de enseñar matemática y precisar sobre las creencias adecuadas para este fin. Existe la necesidad de fortalecer la formación de los futuros docentes de Educación Básica y varios investigadores (Ernest, 1989; Törner y otros, 2010) insisten en el abordaje de los contenidos y de las creencias en la FID, por considerarlas importantes en los procesos de aprendizaje y enseñanza, como también, para entender la acción y decisiones de estudiantes en FID y profesores en servicio. Dada la importancia de comenzar con las operaciones aritméticas de adición y sustracción, es preciso conocer en la formación inicial docente cuales son las creencias de los estudiantes al respecto de enseñar la adición y la sustracción. Esto nos permite formular la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué creen los estudiantes en FID sobre la forma de enseñar la adición y la sustracción?

De esta forma la pregunta da origen a este estudio, el cual tiene por objetivo caracterizar las creencias de los estudiantes en FID en Educación Básica, sobre la forma de enseñar la adición y sustracción, para "rescatar" las ideas fundamentales de las creencias y valorarlas. Así, la solución propuesta contempla diagnosticar las creencias arraigadas en FID de Educación Básica, por medio de un cuestionario y de entrevistas, esperando dar una caracterización de las creencias, identificando las ideas fundamentales involucradas en estas creencias y detectando cambios de las creencias durante la FID.

Estado del arte

Las creencias se han descrito como un constructo confuso con diferentes acepciones, de hecho el término creencia aún no se ha definido claramente (Törner y otros, 2010). Según Schoenfeld (1998, pág. 19), describe las creencias como "Beliefs are mental constructs that represent the codifications of people's experiences and understandings". Más aún, el mismo autor (1998; 2000), considera que una clase de matemática se concretiza y se desarrolla en una interacción entre las creencias epistemológicas de los profesores, sus teorías subjetivas sobre aprender y enseñar, sus objetivos y sus conocimientos específicos. Según Törner y otros (2010), las creencias del profesor sobre el contenido matemático y sobre la naturaleza de la matemática, como también la forma de enseñar y aprender matemática tiene una influencia sobre lo que se hace en la sala de clases y sobre las decisiones que se toman en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Estrada (2002, Citado en Chavez, Castillo y Gamboa 2008) asegura que el dominio afectivo y aprendizaje no va en un solo sentido, ya que los efectos de un proceso de aprendizaje esta acompañado de afectividad y que estos condicionan el comportamiento y la capacidad de aprender, y viceversa el proceso de aprendizaje provoca reacciones afectivas. Chavez y otros (2008) propusieron unos descriptores básicos tales como: las "creencias", la reacción "emocional" y las "actitudes" pues éstas tres se encuentran relacionadas de forma cíclica, puesto que los estudiantes tienen ciertas *creencias* sobre la disciplina y sobre sí mismo con respecto a su potencial para enfrentar su aprendizaje. Flores (1995), da cuenta de una investigación que se basó en el pensamiento del futuro profesor, y se interesa por las creencias y concepciones de éstos mismos. Esta investigación describe como los estudiantes para profesor, analizan sus creencias y concepciones de carácter epistemológico y didáctico, con lo cual nos muestra como las creencias están fuertemente arraigadas en la FID.

Las creencias son consideradas dentro de las competencias del quehacer professional (Baumert y Kunter, 2006), y para Ernest (1989) las creencias sobre las matemáticas son determinantes en los cambios curriculares, solo considerando las creencias "arraigadas" y partiendo desde ellas se pueden generar cambios curriculares. Como las creencias son parte de las competencias del quehacer profesional, estas competencias deben ser desarrolladas durante la FID, particularmente estas se deben desarrollar o transformar. Siguiendo la línea de lo que propone Ernest, en la FID en el área disciplinar de la matemática, es posible distinguir tres creencias o puntos de vista sobre la matemática: el instrumentalista, donde la matemática es una acumulación de propiedades, reglas y procedimientos, los cuales son utilizados para algún fin externo; el platónico, donde la matemática es cuerpo de conocimiento cierto, estático y unificado y el constructivista, donde la matemática se genera a partir de problemas y de la solución de ellos, la matemática es dinámica, es un cuerpo de expansión continua de creación humana y un producto cultural.

Las creencias necesitan un constructo sobre el cual estas se puedan valorar y clasificar en adecuadas o inadecuadas, para esto y como punto de soporte en este estudio, se consideran las ideas fundamentales (IF) que denotan interpretaciones sustantivas de los objetos matemáticos (definiciones, operaciones y relaciones), estas son un constructo para localizar las habilidades de traducción desde el mundo real al mundo matemático y el tratamiento de este constructo en la enseñanza de la matemática es determinante para producir aprendizaje significativo (vom Hofe, 1995; Wittmann, 1998). Vom Hofe describe tres características principales para las IF (1) La constitución de un significado de un concepto matemático, (2) La generación de una representación del concepto, (3) Capacidad de aplicación de la IF de un concepto al mundo real.

De esta forma, se tienen las 3 dimensiones de este estudio sobre las creencias de los estudiantes en FID sobre enseñar la adición y sustracción (1) Constitución del significado, considerando la primera característica de las IF, al enseñar la adición o la substracción se tiene una constitución de un significado de adición o substracción proveniente de la vinculación a experiencias, por ejemplo en

el trabajo con material concreto: agregar, juntar o sacar. Determina, roles y acciones del profesor y el tipo de actividades matemáticas que se proponen. (2) Generación de representaciones, considerando la segunda característica de las IF, al enseñar la adición o la substracción se genera una representación de adición y de substracción, que es mental y que corresponde matemáticamente al concepto, permite levantar desde esta representación las reglas de monotonía e invariancia y de conmutatividad (solo adición), permiten las acciones operativas, las relaciones entre adición y substracción, el cálculo mental, el cálculo flexible y el cálculo formal. (3) Capacidad de modelación, considerando la tercera característica de las IF, al enseñar la adición o la substracción se considera la aplicación de la adición y la substracción al mundo real, en el sentido de modelar una situación, donde es posible reconocer la estructura de la situación con la adición y la substracción.

Diseño metodológico

Esta investigación es no experimental transeccional de enfoque mixto secuencial (Teddlie y Tashakkori, 2009), esto es, contempla un proceso que recolecta, analiza y vincula datos cuantitativos y cualitativos, para hacer inferencias de los resultados de lo cualitativo y de lo cuantitativo. Se considera una etapa de conceptualización previa, que es dada por el marco teórico previamente presentado, con este marco se realiza la primera intervención o recogida de datos, al final de esta fase, se hace el análisis y se realiza las inferencias que promueven la segunda conceptualización, para luego terminar con la etapa de inferencias del estudio y la triangulación. El estudio mixto da una amplitud a los constructos, aquí estudiados, una multiplicidad y la posibilidad de valorar las creencias según las IF.

Para la recolección de datos, se ha pensado en dos tipos de instrumentos: (i) cuestionarios, se ha considerado el diseño de un cuestionario mixto. Con preguntas de respuesta a escala y de preguntas abiertas, que propician la obtención de información abundante y podrían sugerir algunas consideraciones que no están estipuladas previamente, las preguntas de respuesta a escala nos daran información sobre el grado de apropiación de ciertas creencias y las preguntas abiertas nos darán información sobre la descripción de la forma de enseñar. (ii) entrevistas. En este caso, se ha considerado el diseño de una entrevista del tipo general guiada o semiestructurada (Op. cit., 2009), donde los tópicos y algunas las preguntas están previamente preparadas, pero el orden y la profundización, queda por determinarse en el transcurso de la entrevista.

En el caso de las preguntas abiertas, se hará un análisis de contenido, que es una técnica de investigación, objetiva, sistemática y cuantitativa del contenido expresado en las comunicaciones. Este análisis tiene como objetivo interpretarlas bajo la mirada de constructos teóricos, en este estudio se utilizarán las categorías de análisis previamente presentadas: (i) Constitución del significado / rol (transmisor, facilitador, explicador, otras) / acciones (tipo de estrategias de clases) / actividades matemáticas (aplicación, constructivas, platónicas, otras). (ii) Generación de representaciones. (iii) Capacidad de aplicación del contenido.

Los datos de preguntas abiertas, que son considerados dentro de las categorías anteriores darán origen a la segunda etapa de conceptualización que corresponde a un estudio cualitativo, relacionado la descripción de las creencias e identificación de ideas fundamentales de los estudiantes en formación inicial en las formas de enseñar la adición y sustracción, con su conexto y realidad. La elección de estudiantes para las entrevistas se hará luego del análisis de las encuestas y se considerarán los estudiantes que representan los extremos del estudio y los que representan el promedio del estudio.

Algunos resultados

Uno de los resultados que se tienen hasta el momento es la elaboración de ítems que constituirán el cuestionario. En la tabla 1, se muestra parte de la estructura del cuestionario según la dimensión 1 presentada en el marco teórico.

Tabla 1: Estructura del cuestionario.

Dimensión	Categorías	Ejemplos de preguntas
Dimensión 1: Constitución del significado	Constitución del significado para la adición, acciones.	De respuesta a escala. Yo creo que al enseñar la adición… 1. esta debe tener un significado asociado con la realidad de los niños. 2. esta debe ser fundamentada desde la matemática
	Vinculación del significado para la adición a experiencias de acción, acciones-actividades.	Abierta. Describa cómo cree usted que comenzaría a enseñar la adición
	Proyecciones a otras operaciones, acciones.	De respuesta a escala: Yo creo que al enseñar la adición… se puede generar conocimiento para la sustracción se puede generar conocimiento para la multiplicación se puede generar conocimiento para la división

También se han sometido los ítems a juicio de expertos, quienes debieron emparejar ítems con dimensiones (Martínez, 1995), con el objetivo de caracterizar y categorizar los criterios respecto de las creencias que poseen los estudiantes de educación básica sobre enseñar y aprender matemática. Estos resultados están siendo sometidos a un análisis utilizando el coeficiente de Kappa (Fleiss, generalizado).

Referencias bibliográficas

Baumert, J. y Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9, 469–520.

Blömeke, S., Suhl, U. y Kaiser, G. (2011). Teacher education effectiveness: Quality and equity of future primary teachers' mathematics and mathematics pedagogical content knowledge. Journal of Teacher Education, Vol. 62, 2, 154-171.

Chavez, E., Castillo, M. y Gamboa, R. (2008). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Número 4, 3, 29-44.

Ernest, P. (1989). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics. En P. Ernest (Ed.), Mathematics Teaching: The State of the Art. Falmer Press: London. 249-254.

Estrada, A. (2002). Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado. Tesis doctoral en didáctica de las Matemáticas. Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències. Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.

Flores, P. (1995) Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza. Tesis doctoral inédita. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum.

Martinez, R. (1995). Psicometría: teoría de los test psicológicos y educativos. Madrid: Editorial Síntesis.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. Issues in Education, Vol. 4, 1, 1-94.

Schoenfeld, A. H. (2000). Models of the teaching process. Journal of Mathematical Behavior, Vol. 18, 3, 243-261.

Teddlie, Ch. y Tashakkori, A. (2009). Foundations of Mixed Methods Research, Integrating Quantitative and Qualitative Approaches in the social and Behavorial Sciences. California: Sage.

Törner, G., Rolka, K., Rösken, B. & Sriraman, B. (2010). Understanding a Teacher´s Actions in the Classroom by Applying Schoenfeld¨s Theory Teaching-in Context: Reflecting on Goals and Beliefs. En B. Sriraman & L. English (Eds.), Theories of Mathematics Education, Seeking New Frontiers. Berlin: Springer-Verlag. 401-420.

Wittmann, E. Ch. (1998). Standard Number Representations in Teaching Arithmetic. Journal für Mathematikdidaktik 18, S. 149-178.

[i] Este trabajo está siendo financiado por el proyecto DI INICIACIÓN PUCV 037.424/2015

ESTUDIO DE CASOS: UNA ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN PROGRAMAS DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES

Barrera González, L[a].yMongeRogel, R[b].

Universidad de Las Américas;
lbarrera@udla.cl, rmonge@udla.cl

Resumen

El presente trabajo describe la propuesta metodológica utilizada en el curso de "Matemática Aplicada a la Educación" de la Facultad de Educación de Universidad de Las Américas, en el contexto de sus programas de formación inicial de profesores y educadores, donde la matemática se utiliza con los propósitos formativos deenriquecer la comprensión de la realidad en contextos escolares y desarrollar la capacidad de confrontar y construir estrategias para la resolución de problemas propios de la actividad profesional del docente.

Palabras clave: *estrategias de enseñanza, estudio de casos, educación matemática.*

INTRODUCCIÓN

La Matemática ocupa un importante lugar en la historia del pensamiento y de la cultura. Por su aplicabilidad en todos los ámbitos del diario quehacer se encuentra presente tradicionalmente en la mayoría de las mallas curriculares de formación profesional.

En este contexto, el curso de *Matemática Aplicada a la Educació*nes parte del currículum de las carreras de formación de profesores y educadores de Universidad de Las Américas (UDLA), que de acuerdo a su disciplina y/o especialidad no tendrán la función de enseñar el currículum de Matemática en el sistema escolar. Por tanto son programas de formación pedagógica donde la matemática tiene el propósito formativo de enriquecer la comprensión de la realidad, favorecer la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo de los estudiantes.

Cabe destacar quetodas estas carreras[19]declaran en sus perfiles de egreso dos resultados de aprendizaje común a los cuales tributa esta asignatura. El primero, de carácter genérico que establece que sus titulados serán capaces de identificar, plantear y resolver problemas, dejando de manifiesto la capacidad de tomar decisiones de forma autónoma en su ejercicio docente y el segundo, del ámbito pedagógico que indica que sus egresados serán capaces de aplicar de forma eficiente las tecnologías de información y comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje, para reforzar su gestión profesional.

El curso forma parte del ámbito de formación general de la malla curricular, es de carácter transversaly declaracomo objetivo que los estudiantes desarrollen habilidades de razonamiento cuantitativo y de resolución de problemas que les permitan comprender situaciones contextualizadas en ambientes escolares, trazar un plan de solución (modelo), ejecutar el plan (resolver) e interpretar adecuadamente las soluciones obtenidas.

[19]Pedagogía en Educación Física; Pedagogía en Inglés; Pedagogía en Lengua Castellana y Literatura; Pedagogía en Historia, Geografía y Educación Cívica; Educación Parvularia; Educación Diferencial; Psicopedagogía.

La asignatura de Matemática Aplicada a la Educación no intenta enseñar nuevos contenidos temáticos, sino más bien que a través de la resolución de casos y situaciones de contexto educativo, el estudiante revise, active, utilice y profundice diversos temas de la matemática escolar como:operatoria con números naturales, enteros, fracciones y decimales, potencias y notación científica, cálculo de porcentajes, razones y proporciones, valuación de fórmulas, resolución de ecuaciones, distribuciones de frecuencias, medidas estadísticas y representaciones gráficas.Asimismo, el curso busca que los estudiantes usen adecuadamente el lenguaje matemático, adquieran soltura en el cálculo aritmético y apoyados por el uso del Excel organicen, presenten e interpreten datos a través de tablas y gráficos. La asignatura considera la utilización de distintos recursos tecnológicos como: calculadora y software de aplicaciones.

MARCO CONCEPTUAL

Análisis de contexto

El mundo que viven nuestros estudiantes seguramente es muy distinto al que conocieron y en el que se formaron sus profesores. Hoy vivimos en un mundo tecnológicamente más desarrollado, saturado de información y mucho más competitivo, todo esto mientras las instituciones y las políticas públicas buscan el modo de garantizar la calidad de vida de las nuevas generaciones. Existe un cierto nivel de acuerdo que la escuela no puede seguir entregando únicamente contenidos, obligando a los estudiantes a memorizar información y adiestrándolos para rendir exitosamente evaluaciones estandarizadas como el SIMCE y la PSU. Acceder a la información ya no es problema, hoy necesitamos desarrollar en los estudiantes otras capacidades, como por ejemplo: manejar y discriminar información, resolver problemas reales, tomar decisiones, generar soluciones. En esta nueva mirada del aula del siglo XXI el rol del profesor es fundamental, la validación de estas nuevas destrezas implican que tendrá que repensar el proceso formativo, innovar en sus metodologías y avanzar en la enseñanza de habilidades del pensamiento superior.

Una manera de enfrentar este nuevo escenario educativo es a través de la incorporación en el aula de métodos, metodologías y estrategias de enseñanza pertinentes y eficientes, donde el estudiante tome un rol más activo y significativo en su aprendizaje, como por ejemplo: el estudio de casos, el aprendizaje basado en problemas,el debate,el juego de roles, etc.

El modelo pedagógico de UDLA

La dimensión pedagógica del Modelo Educativo UDLA corresponde al Modelo Pedagógico de la Universidad y está constituida por tres componentes: el estudiante, el diseño curricular y el docente.Dado que el estudiante es el foco de la dimensión pedagógica, se espera que el docente centre su atención en las actividades que el estudiante debe realizar para aprender, con lo cual pone su trabajo al servicio del educando. Asimismo, se espera que el diseño curricular se levante con miras a facilitar y potenciar los procesos de aprendizaje del estudiante, con lo cual cualquier acción curricular que se emprenda busca impactar positivamente la calidad del aprendizaje. (UDLA, 2015)

UDLA reconoce tres métodos de enseñanza en sus procesos formativos(UDLA - UGC, 2015b, pág. 27), que a saber son:

- Método tradicional: A través de este método, el docente informa a los estudiantes sobre diversos saberes (conceptuales, procedimentales y actitudianles) mediante clases expositivas y demostraciones, complementadas por libros de texto.
- Método facilitador de la comprensión: Mediante este método, el docente ayuda a los estudiantes a construir significado para comprender ideas y procesos claves; los guía en discusiones en torno a problemas complejos, textos, casos, proyectos o situaciones mediante el cuestionamiento, el establecimiento de pruebas y la reflexión sobre procesos.
- Método de revisión de desempeño: A través de este método, el docente evalúa el trabajo autónomo de los estudiantes mediante la demostración o simulación de saberes profesionales vinculados al mundo laboral. Para esto el docente informa a los estudiantes

respecto de los resultados de aprendizaje relacionados con desempeño que evaluará y controlael desarrollo de las habilidades a través de instancias de retroalimentación permanente.

El "estudio de casos" como estrategia de enseñanza

Entenderemos como estrategia de enseñanza al conjunto articulado de acciones que el docente determina para él y para sus estudiantes, con el fin de conseguir que estos últimos alcancen un determinado resultado de aprendizaje.(UDLA - UGC, 2015a, pág. 6)

La principalestrategia de enseñanza declarada en el programa de la asignatura de Matemática Aplicada a la Educaciónes el "Estudio de Casos".

El "Estudio de Casos" corresponde a una estrategia de enseñanza asociada al método controlado por el estudiante (o de revisión de desempeño) y que puede ser desarrollada en un entorno virtual de aprendizaje del tipo colaborativo.

En esta estrategia se identifica un problema real, se simplifica, y se motiva al estudiante a resolverlo en un proceso de toma de decisiones. El docente orienta a los estudiantes para que busquen soluciones y logren determinados resultados de aprendizaje. Esta estrategia permite perfeccionar las aptitudes y hábitos de dirección del estudiante, además de sistematizar, profundizar y ampliar sus conocimientos(SENA, 2015).

Según Wasserman (1994), los casos son instrumentos educativos complejos que tienen la forma de relatos o narrativa. Un caso incluye información y datos psicológicos, sociológicos, científicos, antropológicos, históricos y de observación, además de material técnico(Wassermann, 1994).

Este mismo autor indica que aunque la enseñanza basada en el método de casos admite alguna variación(Wassermann, 1994, pág. 19), para que pueda llamarse así se deben cumplir con algunas condiciones de forma y estilo, que a saber son:

- Basarse en el caso como herramienta educativa;
- Incluir una pregunta crítica que estimule habilidades de indagación en los estudiantes;
- Considerar el trabajo en pequeños grupos;
- Incorporar preguntas para estimular la discusión en los estudiantes en torno al caso; y
- Añadir actividades de seguimiento.

LA PROPUESTA METODOLOGICA

Para la implementación de la propuesta metodológica de la asignatura de Matemática Aplicada a laEducación, se elaboró un modelo con las siguientes cinco etapas:

Etapa 1: diseño y creación de casos de estudio

En esta primera etapa un equipo de profesores del Instituto de Matemática, Física y Estadística de UDLA (con especialidad en educación matemática), desarrollaron los casos de estudio que se utilizarían en el curso. Asimismo, diseñaron mini-casos (para usarlo como ejercicios, tareas y controles) y los guiones de los videos interactivos que se incluirían en el aula virtual.

Los casos de estudio fueron escritos en un formato estandarizado que incluyó: contenido temático asociado, nombre del caso; modalidad (asamblea, alterna, de grupo); tiempo estimado (en semanas); presentación del caso; insumos (datos, tablas, valores de parámetros, etc.), guía de trabajo y actividades (20 en promedio).

Todos los casos incorporan en su resolución contenido matemático de nivel escolar (que está definido previamente), incluyen fotografías de contexto, están disponibles en formato PDF y los alumnos deben bajarlos e imprimirlos para su resolución. Asimismo, cada caso incorpora actividades desafiantes para los estudiantes y que requieren el uso de la intuición y el ingenio para su resolución.

Los casos no tienen solución única y se espera que los estudiantes lleguen a resultados distintos dentro de un rango probable. Los casos incluyen actividades que deben ser resueltas en la planilla electrónica Excel (proyecto de la Facultad de Educación de tranversalización de las TIC).

Etapa 2: levantamiento de aula virtual

En la segunda etapa un par de profesores del equipo del proyecto diseñaron y levantaron un aula virtual usando las potencialidades de la plataforma Moodle, disponible por la universidad a través de su campus virtual (http//ecampus.udla.cl).Esta aula dispone todos los recursos y actividades necesarios para el desarrollo de la asignatura, funciona como e-supporty forman parte de la materialización de los entornos virtuales de aprendizaje (EVA) que UDLA promueve como nuevas formas de aprender y gestionar aprendizaje (UDLA, 2015, pág. 19)

El aula virtual de la asignatura tiene la siguiente estructura: bloque presentación del curso; bloque descripción de la metodología de "estudio de casos"; bloque unidad de aprendizaje (uno por cada unidad); bloque de capacitación de profesores. También, se incorpora el programa de la asignatura, el syllabus semanal y enlaces a sitios de interés como el del National Center for Case Study Teaching in Science(http://sciencecases.lib.buffalo.edu/cs/).

Los bloques correspondientes a cada unidad de aprendizaje incluyen un video interactivo con un mini-caso introductorio, la descripción del caso, la descarga del caso y una carpeta con documentos anexos.

Etapa 3: capacitación de profesores y ayudantes

En esta tercera etapa se realizó una capacitación de todos los profesores y ayudantes que dictarán los cursos en las distintas carreras, campus y modalidades.

La capacitación fue dictada por el equipo que diseñó los casos, tuvo carácter presencial, fue desarrollada en modalidad taller y replicada en dos periodos distintos (enero 2015 y agosto 2015). La certificación de la capacitación fue condición para la validación de docentes asignados al curso (se incorporó como característica del perfil docente) y se entregó a los participantes previa entrega de una tarea, que consistió en construir en caso o resolver alguno de los presentados en la jornada.

Etapa 4: ejecución

La cuarta etapa se está desarrollando durante el periodo académico 2015-20 (segundo semestre). En la actualidad se dictan 31 secciones (cursos) de la asignatura, con una cobertura de 1000 estudiantes (inscritos).

Etapa 5: seguimiento y evaluación

La última etapa incluye el seguimiento y evaluación del proyecto. Hasta ahora se han realizado las siguientes acciones: aplicación de encuesta (percepción de la Matemática) a estudiantes, pruebas nacionales, ejercicios calificados, que consisten en trabajos grupales donde se espera que los estudiantes resuelvan colaborativamente algún caso propuesto y donde la calificación involucra una autoevaluación del estudiante, una coevaluación de sus compañeros de grupo y la heteroevaluación del profesor o ayudante.

Por las características y cobertura de la asignatura, se estableció la figura de un profesor con función de líder académico, quien es el responsable del diseñar la secuencia didáctica del curso, coordinar a los profesores y estar atento a la gestión del aprendizaje de los estudiantes.

REFLEXIONES Y COMENTARIOS

El estado de avance y los resultados parciales en la implementación de la nueva propuesta metodológica para la asignatura de Matemática Aplicada a la Educación de la Facultad de Educación de UDLA, nos permite presentar las siguientes reflexiones y comentarios:

Respecto de la construcción de casos:

a. La construcción de casos no es una tarea inmediata y natural al profesor de Matemática, requiere de entrenamiento y experiencia.
b. Un mismo caso puede tener distintas versiones donde su complejidad varía de acuerdo a las actividades propuestas. Asimismo, un caso puede evolucionar a partir de su versión original, agregando nuevas actividades.
c. La narrativa del contexto del caso es vital para el entendimiento del mismo. Debe estar redactado en un lenguaje simple, incluir datos reales, debe ser pertinente y propio de la actividad profesional del docente.

d. El caso debe ser verosímil y evitar caer en la construcción de una situación didáctica.

Respecto del aula virtual:

a. El aula virtual es un recurso que los estudiantes y profesores valoran como soporte. Sin embargo, se debe avanzar en su utilización como medio pedagógico y de gestión de los aprendizajes.
b. La construcción de algunos recursos digitales requiere disponer de competencias profesionales y software especializado (ejemplo: manejo de Camtasia).

Respecto del proceso de capacitación de profesores y ayudantes.

a. La capacitación es fundamental para que los docentes se integren al proyecto y logren derribar los paradigmas clásicos de la enseñanza de la Matemática.
b. La metodología utilizada en la capacitación es la misma que los docentes deben replicar con sus estudiantes, es decir, resolver un caso.

Respecto de la ejecución.

a. La retroalimentación, comentarios y opiniones de los profesores que dictan los cursos ha permitido corregir y mejorar los casos.
b. Inicialmente los comentarios de los docentes y ayudantes son positivos respecto de la implementación de la metodología y existen altas expectativas de sus resultados.
c. Los estudiantes han reaccionado favorablemente a la metodología.

Respecto de la evaluación y seguimiento.

a. La tarea del líder académico es fundamental en la coordinación de las actividades propuestas en el programa y syllabus, especialmente en la regulación de los tiemposnecesarios para resolver una actividad.
b. Para la resguardar la homogeneidad en las evaluaciones nacionales (pruebas de cátedra) de las distintas secciones de la asignatura, se ha optado por utilizar un mismo caso y dejar la responsabilidad a cada profesor de proponer las actividades de acuerdo a un estándar.

Referencias

Dee Fink, L. (2005). A Self-Directed Guide to Designing Courses for Significant Learning. Instructional Development Program University of Oklahoma.

Herreid, F.C. Selected Articles, National Center for Case Study Teaching in Science. .Obtenido el 5 de Septiembre de 2015 de http://sciencecases.lib.buffalo.edu/cs/teaching/publications/

Meyer D. (2001) The Three Acts of A Mathematical Story.Obtenido de http://blog.mrmeyer.com/2011/the-three-acts-of-a-mathematical-story/

SENA. Manual de estrategias de enseñanza aprendizaje. Obtenido el 5 de Septiembre de 2015 de Servicio Nacional de Aprendizaje, Medellin, Colombia: http://www.cepefsena.org/documentos/METODOLOGIAS%20ACTIVAS.pdf

UDLA - UGC. (2015a). Guía de métodos y estrategias de enseñanza aprendizaje. Santiago.

UDLA - UGC. (2015b). Guía para elaborar y usar programas de asignatura UDLA. Santiago.

UDLA. (2015). Modelo Educativo UDLA. Santiago.

Wassermann, S. (1994). El estudio de casos como método de enseñanza. Buenos Aires: Amorrortu Editores.

VISIÓN DE LOS DOCENTES RESPECTO A SUS PRÁCTICAS Y DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Valentina Giaconi[a], Patricio Felmer[b], Armando Peri[c], Carmen Gloria Espinoza[d]

[a]Centro de Modelamiento Matemático y Centro de Investigación Avanzada en Educación, Universidad de Chile, [b] Laboratorio de Ciencias de la Educación, Universidad de Grenoble, Francia
correos electrónicos: pfelmer@dim.uchile.cl

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis estadístico descriptivo de una encuesta acerca del uso de resolución de problemas (RP) y los factores que dificultan su implementación en el aula. La encuesta fue respondida por una muestra de conveniencia formada por 286 docentes de matemática de educación básica. Los docentes de la muestra reportaron usar frecuentemente la RP, y que en su uso aplican prácticas centradas en el alumno y menos frecuentemente prácticas centradas en el profesor. Por otro lado, reportaron que las principales dificultades para aplicar la RP son la falta de cursos de desarrollo profesional, formas de evaluar el trabajo en RP y problemas adecuados para sus alumnos.

Palabras clave: *Resolución de problemas, Docentes de Educación Básica, Prácticas de enseñanza*

INTRODUCCIÓN

A nivel nacional e internacional, la resolución de problemas (RP) ha ido adquiriendo un rol cada vez más importante en los currículos escolares. En el caso del currículo chileno, se plantea que "la resolución de problemas es el foco de la enseñanza de la Matemática y que es tanto un medio como un fin para lograr una buena educación matemática" (Mineduc 2012). Desde un punto de vista internacional, la prueba PISA del año 2012 incluyó una evaluación respecto a resolución creativa de problemas, mostrando la relevancia que tiene resolver problemas para desenvolverse en el mundo actual. En esta prueba de resolución de problemas Chile, a pesar de ser líder de la región, fue el país OECD con menor desempeño y estuvo muy por debajo del promedio OECD (OECD 2014). Respecto al uso que docentes chilenos hacen de la resolución de problemas en el aula, el estudio FONIDE realizado con docentes de enseñanza media noveles mostró que utilizan poco la RP (Felmer, Perdomo-Díaz, Cisternas, et al., 2015).

En este estudio nos enfocamos en el uso que docentes de educación básica hacen de la RP y cuáles son las dificultades que ellos perciben para implementar la RP en sus aulas. Se decidió trabajar desde un enfoque cuantitativo a través de un cuestionario autorreportado que permite obtener la visión del docente. Las preguntas de investigación son, a partir de sus autorreportes en el cuestionario: ¿Cuánto y cómo usan la RP los docentes? ¿Qué factores son los que generan más dificultades para usar la RP?

MARCO TÉORICO

Para estudiar las prácticas de RP reportadas por los docentes, se construyó un cuestionario basado en prácticas concretas de aula en las que se basa la RP. Específicamente se consideraron cuestionarios sobre el aprendizaje basado en la indagación (Engeln , Euler & Maass 2013), de aprendizaje centrado en el estudiante (Swan 2006) y de implementación de un clima de apoyo a la autonomía (Leroy, Bressoux, Sarrazin & Trouilloud, 2007). Para indagar sobre cuales son los factores que dificultan el uso de RP, consideramos elementos reportados en la literatura como: el currículo, las evaluaciones masivas, el tiempo, las presiones externas y los recursos. Estos se consideran muy importantes en el establecimiento de un enfoque de aprendizaje basado en la

indagación (Engeln et al., 2013) y en la enseñanza centrada en el alumno (Swan, 2006; Leroy et al., 2007). Además hemos incluido circunstancias particulares de Chile que son relevantes para las decisiones que toman los docentes, como por ejemplo la importancia que se le da a la prueba SIMCE en la escuela.

METODOLOGÍA Y MUESTRA

Cuestionario

El cuestionario fue evaluado psicométricamente con datos de un estudio piloto (N=55) y a partir de esto se eliminaron y redactaron nuevamente algunos ítems. El cuestionario se diseñó para medir el reporte de docentes en ejercicio respecto a sus prácticas en aula sobre la RP y variables relacionadas con la RP. Las secciones del cuestionario usadas en este trabajo se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1: Descripción de las secciones del cuestionario

	Escala de medición	Nro Items
Frecuencia de uso de RP	Frecuencia	1
Frecuencia de uso de diversas prácticas durante la RP	Frecuencia	19
Dificultades con factores externos	Acuerdo	17

Muestra

La muestra está formada por 286 docentes de educación básica asistentes a un Taller de Resolución de Problemas, de una duración de medio día, realizados en 2014 en tres ciudades: Santiago, Valdivia y Puerto Montt. En el taller de Santiago los docentes respondieron el cuestionario vía online, antes del taller. Para los talleres de Valdivia y Puerto Montt, los cuestionarios se respondieron en papel, a la mitad del taller. En la muestra un 77.3% son mujeres y un 22.7% hombres, el promedio de años de experiencia fue M=12.37 (DT=11.61).

RESULTADOS

Uso de la resolución de problemas: Cuánto

Los docentes reportan usar frecuentemente problemas no rutinarios en sus clases. Más del 75% de ellos reportó usar una vez a la semana, todas o casi todas sus clases problemas no rutinarios.

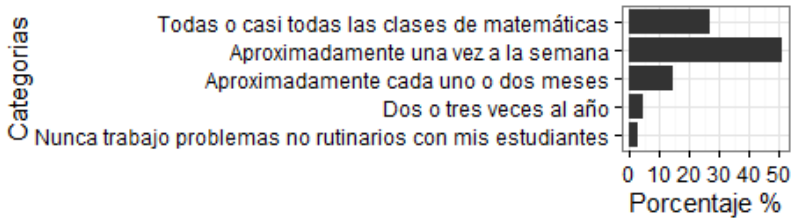


Figura 1. Distribución de respuestas en la pregunta sobre la frecuencia de actividades de RP

Por el contrario menos del 8% reportó usar problemas no rutinarios dos a tres veces al año o nunca, ver Figura 1.

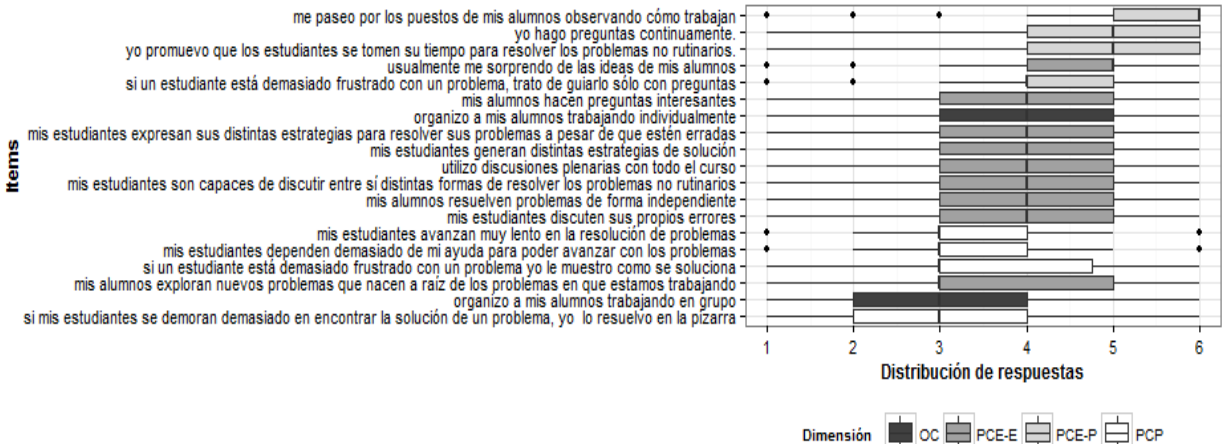


Figura 2. Distribución de las respuestas de los profesores para cada ítem de la pregunta respecto a las prácticas que utilizan en RP. La escala es 1 “Nunca”, 2 “Rara vez”, 3 “De vez en cuando”, 4 “A menudo”, 5 “Casi Siempre” y 6 “Siempre”. Los ítems están ordenados por promedios.

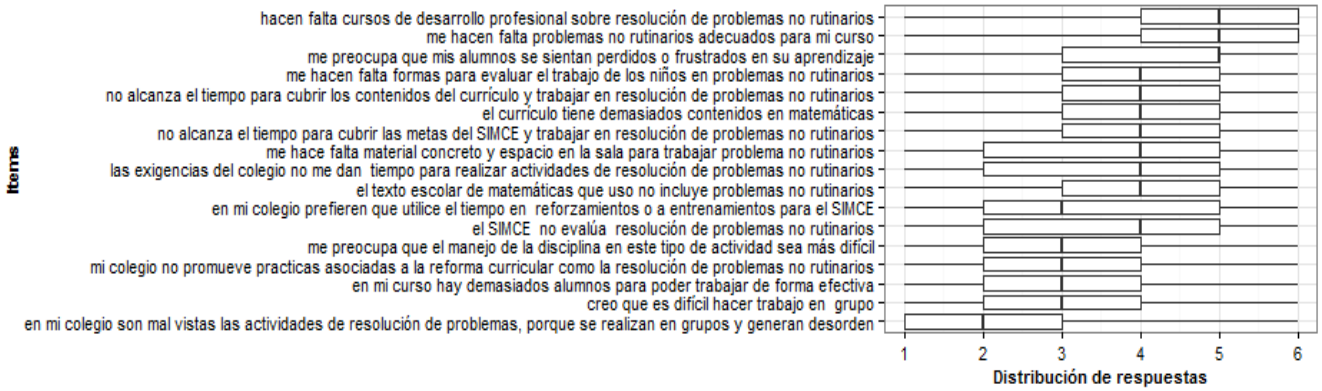


Figura 3. Distribución de las respuestas de los profesores para cada ítem de la pregunta respecto a las dificultades para implementar RP en el aula. La escala va de 1 “Muy en desacuerdo”, 2 “En desacuerdo”, 3 “Algo en desacuerdo”, 4 “Algo de acuerdo”, 5 “De acuerdo” a 6 “Muy de acuerdo” . Los ítems están ordenados por promedios.

En esta sección se presentan los resultados a la pregunta del cuestionario "Cuando usted utiliza resolución de problemas, usted: ...", donde se pregunta sobre la frecuencia de uso de las distintas prácticas durante la RP, ver Figura 2. Los ítems de esta parte están clasificados en cuatro dimensiones, las que provienen de un análisis factorial realizado en un estudio previo (Felmer, Perdomo-Díaz, Giaconi, et al. 2015). Estas dimensiones son: Prácticas centradas en el estudiante desde la posición del profesor (PCE-P); Prácticas centradas en el estudiante desde la posición del estudiante (PCE-E); Prácticas centradas en el profesor (PCP) y Organización de la clase (OC), ver Figura 2.

Las PCE-P fueron las que se reportan como más frecuentes. En particular, la práctica más frecuente es pasearse observando el trabajo de los estudiantes, donde la mediana está ubicada en "Siempre". Respecto a las PCE-E, en la mayoría de los ítems se aprecian distribuciones similares donde la mediana fue "A menudo". Esto se repite en todos los ítems salvo en "me sorprendo de las ideas de mis estudiantes" y "estudiantes exploran nuevos problemas" donde la mediana es "Casi siempre" y "De vez en cuando", respectivamente. Las prácticas menos frecuentes fueron las PCP, donde la alternativa elegida más común es "De vez en cuando". Por último los ítems de OC muestran que docentes usan más trabajo individual que grupal durante la RP, ver Figura 2.

Dificultades para aplicar la resolución de problemas

En esta sección se presentan los resultados de la pregunta "Tengo dificultades para implementar actividades de resolución de problemas no rutinarios porque…". En estos ítems los docentes indican qué tan de acuerdo están con que un factor o circunstancia es una dificultad para implementar RP, ver Figura 3.

Respecto a las principales dificultades reportadas por los docentes, más del 75% de los docentes está "Algo de acuerdo" y "De acuerdo" en que necesitan cursos de desarrollo profesional y problemas no rutinarios adecuados para sus cursos. Más del 50% de los docentes encuestados están "Algo de acuerdo" y "De acuerdo" en que les preocupa que sus estudiantes se frustren, les faltan formas de evaluar el trabajo en RP y que existen factores externos que limitan el trabajo con RP. Entre estos factores tenemos el tiempo y los materiales. El tiempo es un factor importante por la extensión de currículo en contenidos, las metas SIMCE y exigencias del colegio. Así como también la falta de materiales, espacio en la sala y textos escolares con problemas no rutinarios, ver Figura 3. En contraste, la mayoría de los docentes reportan que los siguientes factores no son una dificultad: la cantidad de alumnos; el trabajo en grupo; el manejo de la disciplina y que en sus colegios sean mal vistas las actividades de RP, ver Figura 3.

DISCUSIÓN

El primer ítem de este cuestionario muestra que los docentes reportan en su mayoría el uso de la RP en sus clases una vez a la semana o más, ver Figura 1. Más aún, en la segunda parte del cuestionario reportan el uso de prácticas docentes con características que debería tener una buena clase en la que se trabaje RP, ver Figura 2. Estos resultados contrastan con los hallazgos de Felmer, Perdomo-Díaz, Cisternas, et al. (2015) donde se encuentra que una muestra de 30 docentes nóveles de educación media ofrecen pocas oportunidades a sus estudiantes para desarrollar la habilidad de RP, cuando se observan clases regulares. También contrastan con los resultados de los estudiantes chilenos en las pruebas PISA y otras en las que obtienen bajo desempeño en resolución de problemas. El alto reporte de uso de RP por parte de los docentes de este estudio puede estar influenciado por la naturaleza de la muestra de docentes, los que han tenido el interés de participar por iniciativa propia en el taller (Puerto Montt y Santiago). Por otra parte, en el caso de los docentes de Puerto Montt y Valdivia, el cuestionario fue llenado en el intermedio del taller, por lo que sus respuestas pueden estar influenciadas por el trabajo del mismo taller. Finalmente, es posible que las respuestas estén

influenciadas por una concepción errónea de problema no rutinario, y asociado a ello, una práctica que hemos observado en varios establecimientos, en la que los docentes dedican un tiempo muy corto al inicio de la clase, a resolver un problema. Todo lo anterior hace necesario profundizar los estudios sobre el uso de RP en el aula, cuestión que abordaremos en estudios futuros.
Por otra parte, en un trabajo donde se comparó el mismo cuestionario usado aquí, con observaciones de clases, existe una correlación positiva entre lo autorreportado y las prácticas observadas (Felmer, Perdomo-Díaz, Giaconi, et al. 2015). Por lo que, a pesar de que las respuestas puedan estar sesgadas, el cuestionario ordenaría a los docentes según la frecuencia de uso de RP y de distintas prácticas.

Dentro de las prácticas usadas en el trabajo con problemas no rutinarios, los docentes reportan trabajar más frecuentemente con los estudiantes de manera individual que de manera grupal, siendo que ellos mismos reportan que el trabajo en grupo no les representa una dificultad. Esto podría indicar que no ven un beneficio a usar trabajo en grupo versus trabajo individual durante la RP.

Con respecto a las principales dificultades expresadas por los docentes, que corresponde a la tercera parte del cuestionario, cuyos resultados aparecen en la Figura 3, son llamativos los primeros cuatro ítems: falta de cursos de desarrollo profesional, falta de problemas no rutinarios, preocupación por los estudiantes y carencia de instrumentos de evaluación, en que las primeras tres tienen una mediana "De acuerdo" y la cuarta "Algo de acuerdo". Esto es interesante pues muestra que a pesar que los docentes reportan usar RP en sus aulas y tener prácticas acorde con la RP, centradas en el estudiante, manifiestan la necesidad de mejorar sus propias capacidades. Esto es coherente con un autorreporte posiblemente sesgado hacia RP y los antecedentes mencionados arriba. La gran mayoría de los otros ítems están levemente volcados hacia "Algo de acuerdo", de manera consistente con lo anterior.

Como conclusión de este estudio podemos decir que los docentes de la muestra tienen una actitud muy favorable hacia la RP, posiblemente su autorreporte está sesgado hacia RP, y muestran una clara necesidad de desarrollar capacidades para su implementación a través del desarrollo profesional.

AGRADECIMIENTOS.
P.F., A.P. y C.G.E. han sido parcialmente financiados por proyecto Fondef ID14I10338, CIAE Project FB 0003 from the Associative Research Program of CONICYT y BASAL-CMM projects. V.G. ha sido parcialmente financiada por CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional/2013 21130684.

Referencias

Engeln, K., Euler, M., & Maass, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: A comparative baseline study of teachers' beliefs and practices across 12 European countries. ZDM Mathematics Education, 1-14.

Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisternas, T, Cea, F., Randolph, V & Medel, L. (2015a) La resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente. Revista Estudios de Política Educativa, volumen 1, pags. 64-105, 2015

Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Giaconi, V. & Espinoza, C. (2015b) Problem Solving Teaching Practices: Observer And Teacher's View. Ponencia presentada en el 9th Congress of European Research in Mathematics Education, Praga, República Checa. Obtenido de www.cerme9.org/products/wg19/

Leroy, N., Bressoux, P., Sarrazin, P., & Trouilloud, D. (2007). Impact of teachers' implicit theories and perceived pressures on the establishment of an autonomy supportive climate. European Journal of Psychology of Education, 22(4), 529-545.

MINEDUC (2012). Bases Curriculares 2012. Educación Básica. Matemática. Santiago: Ministerio de Educación, República de Chile.

OECD (2014), PISA 2012 Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V), PISA, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264208070-en.

Swan, M. (2006). Designing and using research instruments to describe the beliefs and practices of mathematics teachers. Research in Education, 75(1), 58-70.

CLASES DE MATEMÁTICAS VISTAS POR NIÑOS DE 5° BÁSICO A TRAVÉS DE SUS DIBUJOS

Bárbara Berger[a], y María Victoria Martínez[b]

[a b] Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE). Universidad de Chile
barbara.berger@ciae.uchile.cl[a], mvmartínezv@ciae.uchile.cl[b]

Resumen

El presente trabajo da cuenta del uso de los dibujos de los alumnos al momento de evaluar intervenciones en las aulas de matemáticas. Esta investigación se llevó a cabo en el marco de un proyecto de cooperación internacional entre Chile y Finlandia donde se trabajó en 10 cursos con sus respectivos maestros en resolución de problemas de final abierto. Se solicitó a los estudiantes que dibujen su clase al inicio y fin del proyecto, con fin de comparar con un grupo control y evaluar posibles efectos en cómo los estudiantes perciben su clase. Los resultados arrojaron diferencias positivas, las que coinciden con lo recolectado con otros instrumentos, validando el uso de los dibujos como instrumento metodológico.

Palabras clave: *dibujos, matemáticas, investigación*

INTRODUCCIÓN

En este último tiempo, se ha producido un incremento en el interés por considerar la perspectiva de los niños dentro del ámbito educativo. Este movimiento se entiende desde el nuevo concepto de infancia, donde se piensa al niño como un actor social de pleno derecho, agente de su proceso de aprendizaje. Considerando que la investigación en educación centra su estudio sobre acciones, creencias o pensamientos, más que en realidades físicas u objetos, se generó la necesidad y el interés por integrar la experiencia y visión infantil sobre su vivencia escolar (Argos, et al., 2011).

Con este objetivo en mente, se ha promovido que se exploren nuevas y diferentes herramientas para llegar al mundo infantil, poder conocer mejor la experiencia de los niños y permitirles tener una voz. Esto debido a que se considera que incluir la perspectiva de los niños amplía la visión que el investigador tiene de la realidad educativa (Argos et al. 2011).

En este trabajo se presentan los resultados de una investigación donde se emplea el dibujo para acceder a la percepción de estudiantes de quinto año básico de sus clases de matemáticas.

Problema

Los dibujos empleados en este estudio forman parte del proyecto bilateral de investigación entre Chile y Finlandia que comprendió los años 2010 a 2013. En este proyecto, se buscó introducir los problemas de final abierto en las clases de matemáticas de 10 profesores con el objetivo de mejorar el nivel de comprensión, el rendimiento y la creatividad y autoconfianza de los alumnos y sus maestros. En este marco, se les pidió a los alumnos realizar un dibujo al inicio y al final del proyecto para investigar la influencia de su participación en la percepción acerca de las clases de matemáticas, en comparación a otros niños que no formaron parte del proyecto (grupo control).

METODOLOGÍA

El dibujo de los niños como instrumento de investigación

Es un desafío para la enseñanza de las matemáticas el desarrollo de métodos de investigación que sean apropiados para niños y que consideren su perspectiva. El dibujo es una forma alternativa de

expresión, que tiene la ventaja de ser considerada una actividad lúdica y predominantemente agradable para el mundo infantil. Es una herramienta de fácil aplicación y bajo costo (Torres-Nerio et al., 2010), capaz de abrir un canal no verbal que entrega una cantidad importante de información, con diversas posibilidades de análisis, convirtiéndose en el soporte ideal para trabajar y conocer el mundo interno y externo del niño: actitudes, intereses, aptitudes, aprendizajes, relaciones, hábitos, deseos o estados de ánimo, etc (Jiménez & Mancinas, 2009).

El dibujo es un método indirecto y no estructurado de recolección de información, debido a que el niño no tiene conocimiento sobre los aspectos del dibujo que serán posteriormente considerados. Esto ayuda a prevenir que el niño acomode su respuesta a lo que cree que el investigador desea, o acorde a la deseabilidad social (Tikkanen, 2008). Otra ventaja relacionada es que los dibujos permiten evaluar la formación de conceptos, aun cuando el niño no sepa que lo sabe, como suele ocurrir con ciertas creencias y prejuicios (Zagalaz, 2001), resultando muy útiles también como complemento a otros instrumentos o para realizar una triangulación de perspectivas (Argos, et al, 2011). Además este método permite evitar las barreras de lenguaje, facilitando la comparación internacional (Torres-Nerio et al., 2010; Pehkonen, Ahtee, Tikannen & Laine, 2011).

En términos particulares de las clases de matemáticas, los dibujos han sido considerados una manera holística de evaluar y monitorear la comunicación dentro de la clase a la vez que entrega información que permite aprehender el clima emocional dentro del aula (Pehkonen et al., 2011; Laine, et al., 2012). Los dibujos también son un método confiable para evaluar los conceptos sobre la enseñanza de las matemáticas que pueden tener los alumnos (Dahlgren & Sumpter, 2010). Varios investigadores concuerdan en que los dibujos ofrecen más oportunidades de demostrar una opinión más personal que las respuestas a cuestionarios, donde existe la posibilidad de que el lenguaje empleado no sea interpretado en el mismo sentido por el niño y el investigador. (Stiles, Adkisson, Sebben & Tamashiro, 2008 en Pehkonen, et al., 2011; Harrison, Clarke & Ungerer 2007 en Laine, et al., 2012).

Implementación

La aplicación del instrumento era dirigida por cada profesor, en horario de clases, bajo la consigna: "Dibuja tu clase de matemáticas, tu profesor y tus compañeros en una clase de matemáticas. Usa burbujas de diálogo y pensamiento para describir conversaciones y pensamientos. Márcate en tu dibujo como (YO)". Esta metodología se enmarca dentro de lo que se llama el dibujo temático, la cual en dibujos cuyas consignas han sido pensadas y elaboradas de acuerdo a un objetivo investigativo el que permite indagar acerca de conceptualizaciones, emociones y otros en relación a lo propuesto a representar (García, 2014).

Para esta presentación fueron seleccionados los dibujos realizados a fines del proyecto, cuando los alumnos cursaban 5to año básico. Estos conformaron la muestra experimental, mientras que el grupo control fue conformado por 11 cursos de 5to año básico que no habían participado en el proyecto. Se prefirieron los dibujos de esta edad debido a que evolutivamente los niños se encuentran en una etapa de grafismo llamada "realismo", en la cual buscan representar la realidad lo más fielmente posible, dibujando objetos y paisajes tomando en cuenta la tercera dimensión, pero también sensaciones y emociones (Jiménez & Mancinas, 2009).

El sistema de codificación empleado fue construido según el manual de categorización elaborado por Tikannen (2008). Según este trabajo, un dibujo es un dato observacional que puede ser dividido en categorías de contenido que reúnen ciertos fenómenos. Según cada categoría los dibujos fueron luego doblemente codificados en secuencia temporal para asegurar confiabilidad. Cada categoría es especificada en subcategorías descriptivas según un método inductivo, conduciendo a las siguientes categorías y respectivas subcategorías:

En relación al trabajo en aula, se crearon cuatro categorías: **actividades pedagógicas**, **posición relativa del profesor**, **comunicación profesor-alumno** y **comunicación entre alumnos**. Las actividades pedagógicas se dividieron en actividades activas y pasivas. Dentro de las activas, se encuentran: pasar a la pizarra, responder ejercicios en voz alta, trabajar en grupos y hacer una pregunta al profesor en voz alta. Las pasivas comprendían: copiar materia del pizarrón, hacer ejercicios en el computador y realizar ejercicios individualmente en silencio. La posición del profesor se subcategorizó en: cerca de la pizarra, en el escritorio, entre los alumnos. A todas las categorías debió sumarse una última, llamada no reconocible. No se abarcarán las categorías relativas a la comunicación, debido a que éstas no arrojaron resultados significativos debido a la escasez de burbujas de diálogo en los dibujos en general.

En cuanto a los factores afectivos, de acuerdo al contenido de las burbujas de diálogo o pensamiento y a cómo fue dibujada la expresión facial, delimitada a la zona de la boca, se armaron cuatro categorías: **humor del profesor**, **humor de los alumnos**, **afectividad del discurso del profesor** y **disposición emocional general del aula**. Las subcategorías de los elementos afectivos fueron 4: positiva, ambivalente, negativa y neutra. A estas se les suma una quinta subcategoría: no identificable, que responde a no poder reconocer expresiones faciales por falta del dibujo del rostro o por no identificar al profesor, por ejemplo.

A continuación demostraremos el proceso de codificación con un breve ejemplo:



Imagen 1. Dibujo alumno anónimo

En la Imagen 1 la profesora se encuentra a un lado de la pizarra, con la boca neutra y sin burbujas de diálogo. No se ven las caras de los alumnos, pero si se leen sus burbujas. Entonces consideramos que en términos de métodos de trabajo, el profesor enseña al lado del pizarrón mientras algunos alumnos piensan en torno a la matemática (“yo lo sé”, “mm…”) y una expresa su gusto por la asignatura (”me gusta esta materia”). En lo afectivo se aprecia un humor neutro de la docente, ausencia de discurso, y no se puede identificar el humor de los alumnos ni el clima en el aula.

Dificultades asociadas al uso de dibujos como método de investigación

Trabajar con dibujos como instrumento de investigación implica ciertas dificultades, ya que al ser una actividad no estructurada, es necesario controlar posibles desviaciones en la aplicación del instrumento, con el fin de que se ajusten a lo requerido. Algunas de ellas serían variaciones en la

consigna, en el tiempo o en el ambiente designado a la tarea. En este caso particular, se encontraron dibujos que no representaban una clase de matemática o donde no se distinguía al profesor o no había burbujas de diálogo. Esto trae como consecuencia un empobrecimiento de los resultados a obtener (Laine et al., 2012).

Una dificultad que es propia de la herramienta es la pobreza del grafismo que se puede hallar en algunos dibujos, particularmente: personajes de palito, personajes flotando sin una escena de fondo y/o sin cara. También, en este estudio se obtuvo una gran cantidad de dibujos que, por la perspectiva de la sala, lo que se veía era el docente, el pizarrón y las nucas de los alumnos. Esto nos aporta información en tanto confirma la idea de que la disposición predominante de las clases de matemáticas incluye un profesor protagonista al frente de sus alumnos. Sin embargo, hace imposible codificar la disposición emocional de los alumnos y el clima en el aula.

Resultados

Respecto a los métodos de trabajo retratados por los alumnos, se observan diferencias significativas entre los grupos experimental y control respecto al tipo de actividad predominante en los dibujos ($F= 12{,}787$, $p>0{,}05$). En el grupo control el 82% de los dibujos mostraban actividades de participación pasiva, contra un 64% en el grupo experimental. Las actividades de participación activa en el grupo experimental doblan a las del grupo control, siendo un 36% contra un 18%. Estos porcentajes se logran luego de eliminar los dibujos donde no se reconocía actividad, ya sea por la pobreza del dibujo o porque no dibujaban una sala de clases.

En términos de elementos afectivos, se aprecian diferencias significativas entre los grupos en la representación del humor del profesor. Si no se consideran los dibujos donde esta variable no es reconocible (eliminando el 30% de ellos), se percibe que no hay diferencias entre los grupos respecto a un humor positivo del profesor. Sin embargo, sí se encuentra en el grupo experimental un mayor porcentaje de dibujos de profesores en humor neutro. En el grupo experimental no existen profesores con humor negativo, los cuales equivalen al 6,2% de los dibujos del grupo control.

Respecto al ambiente de la clase, también se apreciaron diferencias significativas entre los grupos ($F= 18{,}438$ $p<0{,}01$). Si se toman en consideración y se comparan sólo los dibujos en los que si se reconoce una sala de clase, es fácil observar que en los dibujos del grupo experimental predomina un ambiente positivo (58.8%), en cambio en los dibujos del grupo control destaca el ambiente neutral (50,7%) y un mayor número de dibujos con ambientes negativos o ambivalentes.

Discusión

Los datos nos permiten observar que después de tres años de experiencia resolviendo problemas de final abierto los estudiantes perciben sus aulas más participativas, con un ambiente de trabajo positivo y con profesores que mantienen una disposición neutra o positiva hacia la clase. Si esta información se triangula con información recolectada en entrevistas a los profesores participantes, datos que están siendo procesando en paralelo, la percepción de los estudiantes y los profesores en las aulas coinciden en estos aspectos.

Considerando esto cabe destacar la relevancia de este instrumento en la investigación en educación. Los dibujos nos permiten acceder a la percepción que tienen los estudiantes respecto a la implementación de ciertas experiencias en las salas de clases, más allá de lo que puede lograrse con instrumentos externos tipo pruebas. Los dibujos dejan el espacio libre para que emerjan ideas no previstas por el investigador, las cuales quedarían fuera al utilizar instrumentos externos a la subjetividad de los participantes, como pruebas o cuestionarios.

En este estudio el uso del dibujo permitió comparar grupos control y experimental para evaluar los efectos de las intervenciones realizadas en el marco del proyecto Chile-Finlandia. Recoger la percepción de los estudiantes participantes hizo posible evidenciar que las salas participantes son

percibidas por sus alumnos como clases donde existe mayor participación y diálogo entre los alumnos, profesores con mejor disposición emocional y un clima más positivo, en donde los profesores ceden el lugar protagónico a sus estudiantes.

Es así como se ha demostrado que en el contexto educativo chileno, el uso del dibujo en la investigación educativa ha significado un valioso aporte, en tanto es un instrumento sencillo y de alto valor informativo, con un sistema validado para el análisis de los datos recogidos.

Referencias

Argos, J., Ezquerra, M.P. & Castro, A. (2011). Escuchando la voz de la infancia en los procesos de cambio e investigación educativos. Aproximación al estudio de transiciones entre las etapas de educación infantil y educación primaria. Revista Iberoamericana de Educación, 54, 5, ISSN: 1681-5653

Dahlgren, A. y Sumpter, L. (2010). Childrens' conceptions about mathematics and mathematics education. In: Proceeedings of the MAVI-16 Conference June 26-29, 2010 (ed. K. Kislenko), 77-88. Tallinn University of Applied Sciences, Estonia.

García, A. (2014). Metodología para la aplicación del dibujo temático en la evaluación e intervención psicológica en Alternativas cubanas en psicología, vol 2 n 6, p. 75-84.

Jiménez, C. y Mancinas, R. (2009). Semiótica del Dibujo Infantil: una aproximación Latinoamericana sobre la influencia de la televisión en los niños: casos de estudios en ciudades de Chile, El Salvador y México. Arte, individuo y Sociedad, 21: 151-164.

Laine, A,. Naveri, L., Ahtee, M., Hannula M. & Pehkonen, E. (2012). Emotional atmosphere in mathematics lessons in third graders' drawings. 18 International Conference on Mathematical Views

Pehkonen, E., Ahtee, M., Tikkanen, P. & Laine, A. (2011). Pupils' conceptions on mathematics lessons revealed via their drawings. 17 International Conference on Mathematical Views

Torres-Nerio, R., Domínguez-Cortinas, G., Van't Hooft, A., Díaz Barriga, F. & Cubillas-Tejeda, A.C. (2010). Análisis de la percepción de la exposición a riesgos ambientales para la salud, en dos poblaciones infantiles, mediante la elaboración de dibujos. Salud colectiva; 6: 65-81.

Tikkanen, P. (2008). "Easier and more fun than I thought" Mathematics experienced by fourth-graders in Finnish and Hungarian comprehensive schools. Jyvaskyla Studies in Education, Psychology and Social Research, p. 318

Zagalaz, M. L. (2001). La educación física en el aula. El pensamiento conceptual del niño a través del dibujo. Enseñanza, 19: 165-180.

TIC EN ENSEÑANZA DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA Y APRENDIZAJE AUTÓNOMO

Alfaro, N[a].; Campos, S[b].;Ilabaca, F[c].; Ulloa, N[d].; Moncada, J[d].

Universidad Católica de Temuco;
nalfaro2010@alu.uct.cl

Resumen

Se presenta un propuesta didáctica con uso de las TIC en la enseñanza de estadística descriptiva, que consiste en un recurso web en donde se encontrarán los contenidos ordenados de forma sistemática, sugerencias de acceso a otros sitios web, links a videos del área, utilización de software de escritorio, evaluaciones cortas de contenidos. Esta propuesta busca generar la instancia de que los estudiantes construyan su propio conocimiento y que trabajen colaborativamente, además de fomentar el análisis de datos estadísticos, por sobre el cálculo de los mismos. Por otra parte, con este recurso el profesor dispondrá de una fuente potente de contenidos para facilitar la planificación de sus clases y realizarlas sin alejar a los estudiantes del entorno tecnologizado en el que se encuentran actualmente.

Palabras clave: *estadística descriptiva, TIC, aprendizaje autónomo.*

INTRODUCCIÓN

Como bien se sabe, la estadística es una disciplina que ha mostrado ser eficaz a la hora de describir, analizar y establecer conclusiones de forma precisa acerca de datos económicos, políticos, físicos, científicos, educacionales, entre otros, valiéndose de diversos recursos y comunicando sus resultados a través de diferentes medios de comunicación, favoreciendo con ello la disponibilidad de información y aportando a los procesos de toma de decisiones, lo que la convierte en una disciplina fundamental para la formación de ciudadanos críticos, informados, independientes, democráticos, con mejores desempeños en los ámbitos personal, familiar y laboral. De aquí la tendencia internacional y nacional de una formación en el conocimiento estadístico que se inicie en los niveles más elementales del currículum escolar.

En la práctica de la enseñanza de la estadística se ha observado que los profesores muchas veces enseñan en base a reproducción de determinados algoritmos, lo que puede provocar en los estudiantes mecanización de los procesos de un estudio estadístico, dejando de lado el análisis e interpretación de la información. Un parte de esto se refleja en la formas de evaluación que se realizan, por ejemplo, al revisar la últimas nueve Pruebas de Selección Universitaria (PSU), se observa que la mayor parte de las preguntan apuntan al cálculo de determinados tópicos estadísticos por sobre el análisis de los mismos. Por otra parte, y a manera informal, se ha vivenciado que el método utilizado por los docentes fue y sigue siendo el convencional, basado en el uso de pizarra y guías de ejercicios. Además, y también a modo informal, el hecho que el eje datos y azar se encuentre, normalmente, hacia el final del programa de estudios, puede significar que muchas veces no se logre tratar el tema con la debida profundidad ni la extensión necesarias para lograr los objetivos de aprendizaje.

Por lo antes mencionado, se hace necesario implementar nuevas metodologías orientadas a estimular e incentivar a los estudiantes en el aprendizaje, comprensión y utilización de la estadística. En este contexto, las TIC son una alternativa de real importancia, puesto que se trata de

un recurso innovador para la enseñanza y aprendizaje de este contenido. Y es este contexto donde surge la motivación y determinación de diseñar una herramienta tecnológica para tratar de dar cumplimiento a gran parte de las expectativas que se tienen acerca de la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, fomentando a la vez el aprendizaje autónomo de los estudiantes. Aspectos teóricos y prácticos de esta propuesta se comentan brevemente en los siguientes apartados.

MARCO TEÓRICO

Estadística descriptiva en la educación

En el contexto nacional, durante un congreso organizado en la Universidad de Chile en el año 1955 se presentan argumentos necesarios para incluir la estadística en el currículum universitario (Araneda, del Pino, Estrella, Icaza y San Martín, 2011), planteando que esta disciplina es un instrumento eficaz para el desarrollo económico del país a través del análisis y la resolución de problemas. Más tardeen el año 1980, el Ministerio de Educación fija los objetivos de planes y programas de Educación General Básica (decreto No 4.002), estableciendo para el segundo ciclo en el subsector de matemática el objetivo "conocer y aplicar elementos de estadística descriptiva". Actualmente los programas de estudios de matemática, tanto en educación básica como media, plantean contenidos de estadística.Paralelamente, las bases curriculares para el eje probabilidad y estadística establecen "que todos los estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos. Se espera formar alumnos críticos que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones"(MINEDUC, 2013, p.110).

Las TIC y la enseñanza de la estadística

Las TIC son definidas por la UNESCO como "el conjunto de disciplinas científicas, tecnológicas, de ingeniería y de técnicas de gestión utilizadas en el manejo y procesamiento de la información; sus aplicaciones; los computadores y su interacción con hombres y máquinas y los contenidos asociados de carácter social, económico y cultural".

Hoy los alumnos pertenecen a la generación que Tapsscot (1998, citado por MINEDUC, 2009, p.10) describe como "Net-Generation (Generación de nativos digitales), cuyas principales características son: a) los estudiantes superan a sus profesores en el dominio de estas tecnologías y tienen más fácil acceso a datos, información y conocimientos que circulan en la red; b) Viven en una cultura de la interacción y su paradigma comunicacional se basa más en la interactividad al usar un medio instantáneo y personalizable como Internet", lo que lleva a que los docentes deben aprovechar el valor de los medios de comunicación para favorecer la transmisión de información e integrar los medios tecnológicos como un elemento más del diseño curricular.

Por lo anterior es necesario promover y difundir en los diferentes niveles del sistema educativo, la inserción de las TIC para el logro de aprendizajes significativos, fomentando la necesidad de un cambio en las metodologías tradicionales de enseñanza, lo cual permite divulgar la enseñanza personalizada en el proceso de aprendizaje e impulsar la creación de programas que faciliten la presentación del contenido de las más diversas formas (GarcíaGómez, 2004)

Aprendizaje autónomo

El Ministerio de Educación propone incorporar el aprendizaje autónomo en el currículum escolar, siendo necesario que el alumno sea partícipe y se involucre en su proceso de aprendizaje, lo cual requiere de herramientas y propuestas didácticas, de modo que le facilite el proceso de construcción de su propio conocimiento. El aprendizaje autónomo se debe incorporar en el aula y consiste principalmente en aprender a través de la búsqueda personal de información, de forma práctica o experimental. Según el MINEDUC (2013), las ventajas de este tipo de aprendizaje son: fomentar la curiosidad en la autodisciplina, ayudar a organizar el espacio de aprendizaje y la información,

desarrollar la pro-actividad frente a situaciones de aprendizaje, estar centrado en los propios estilos, ritmos y necesidades de aprendizaje, desarrollar el hábito de estudio.

En este sentido, las TIC son uno de los principales medios que las personas tenemos para acceder a cualquier tipo de conocimiento. Es por esto que las TIC son un importante recurso para que los estudiantes aprendan de forma autónoma permitiéndoles encontrar teoría y práctica de un tema de interés. Particularmente en matemática, las TIC facilitan la realización de cálculos, gráficos y análisis a través del uso de software, simuladores, hojas de cálculo, laboratorios en línea, etc., de modo que el proceso de enseñanza no esté centrado en la realización de un cálculo matemático, sino en que el estudiante comprenda y logre incorporar ese conocimiento en un aprendizaje significativo.

METODOLOGÍA

En términos operacionales, la implementación de la propuesta contemplará las siguientes fases, cuyos resultados preliminares se espera compartir en este encuentro.

Primera fase: de los instrumentos y los datos

Se ha previsto la elaboración de dos instrumentos, con los que se obtendrá información del estado actual de la enseñanza y aprendizaje de estadística descriptiva. El primero es una entrevista semiestructurada que se aplicará tanto a profesores de algunos establecimientos educacionales, como a académicos que desarrollen docencia en la carrera de Pedagogía Media en Matemática de la Universidad Católica de Temuco, con lo que se espera conocer cuáles son las estrategias y recursos que utilizan al momento de enseñar estadística descriptiva. El segundo instrumento es un diagnóstico de aprendizajes que se aplicará a estudiantes de dos cuartos medios de dos diferentes establecimientos y también a estudiantes de primer año de Pedagogía Media en Matemática de la Universidad Católica de Temuco, con el fin de conocer el estado actual de sus aprendizajes estadísticos, las capacidades o habilidades que desarrollaron en esta área, e indagar en la forma en que sus profesores han tratado o trataron este contenido.

Segunda fase: del diseño

En esta fase del trabajo se prevé el diseño de un recurso web para apoyar tanto el trabajo docente como el aprendizaje autónomo del estudiante. Específicamente se definirán las diversas componentes del recurso, así como la forma de interacción entre los distintos usuarios y los recursos pedagógico-didácticos disponibles. Además de contenidos, incorporará sugerencias o enlaces a otros sitios web, utilización de software de escritorio, preguntas o mini-test que entregarán resultados cuantitativos acerca del estado de aprendizaje de los estudiantes, de modo que el profesor pueda evaluar el proceso de enseñanza- aprendizaje y guiar sus clases en función de los contenidos que pudieran requerir mayor retroalimentación en los estudiantes.

Una vez definido este recurso web, se seleccionarán por conveniencia dos segundos medios, implementando en uno de ellos dicho recurso. La obtención de datos, tanto para efectos descriptivos como de contraste, se hará por modelo de grabaciones en video, registro de observaciones y otras formas de evaluación de aprendizajes.

Tercera fase: de los resultados

Para el análisis de los resultados y evidencias obtenidos se propone utilizar el método de investigación mixto, dado que el diseño contempla la concurrencia de información tanto cualitativa como cuantitativa (Hamui-Sutton, 2013); se usará la estrategia de doble de triangulación, en la forma que se muestra en la Figura 1.

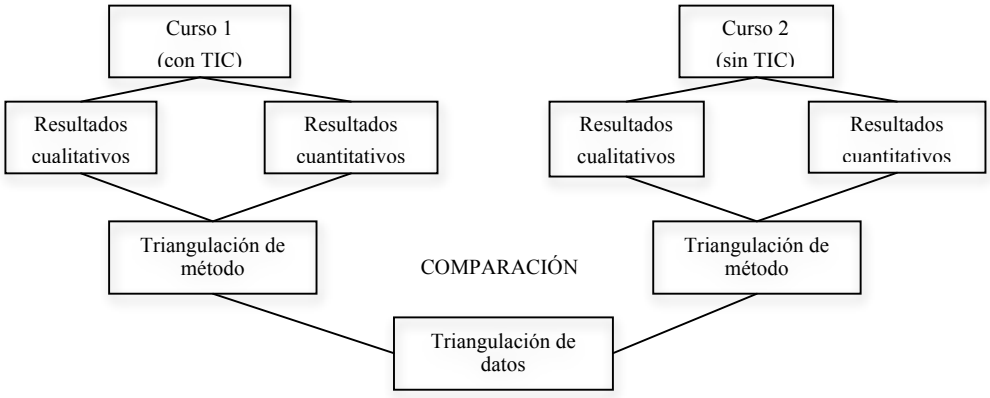


Figura 1. Diseño de doble triangulación

Para datos cuantitativos se utilizará el Análisis en Componentes Principales y el Análisis de Correspondencias (Greenacre, 2007).

En el caso de datos cualitativos, en su análisis se utilizará principalmente el análisis de contenido que, como según lo señala Andréu (2001), es una técnica de interpretación de textos, ya sean escritos, grabados, pintados, filmados.

A MODO DE CONCLUSIONES

De este trabajo se espera obtener una mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística descriptiva, tanto en estudiantes como en profesores. Es un recurso pensado para que la comunidad en general acceda en forma libre a través de internet, promoviendo con ello la equidad y fortaleciendo la calidad de los procesos educativos.

Referencias

AndréuAbela, Jaime (2001). Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada, en "documento de trabajo CENTRA" 2001/03, http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf

Araneda, A., del Pino, G., Estrella, S., Icaza, G., & San Martín, E. (2011). Recomendaciones para el currículum escolar del eje Datos y Probabilidad. Sección de Educación Estadística, Sociedad Chilena de Estadística.

Fernández, S. F., Sánchez, J. M. C., Córdoba, A., Cordero, J. M., & Largo, A. C. (2002). Estadística descriptiva. ESIC Editorial.

GarcíaGómez, R. J. (2004). Innovación, cultura y poder en las instituciones educativas. REICE. Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación.

Greenacre M. J. (2007). Correspondece Analysis in Practice.Second edition. USA: Chapman & Hall/CRC.

Hamui-Sutton, A. (2013). Un acercamiento a los métodos mixtos de investigación en educaciónmédica. Investigación en educaciónmédica, 2(8), 211-216

MINEDUC (2009). Estándares TIC para la Formación Inicial Docente en el Contexto Chileno: Estrategias para su difusión y adopción

MINEDUC (2013). Bases Curriculares Segundo Medio. Santiago, Chile.

PROPUESTA DIDÁCTICA EN PATRONES: VISIÓN DESDE LAS COMPETENCIAS EN MODELACIÓN MATEMÁTICAS

Huincahue, J.[a] y Guerra-Silva, G.[b]

Universidad de Playa Ancha – Campus San Felipe
jaime.huincahue@upla.cl[a], gregorio.guerra@alumnos.upla.cl[b]

Resumen

La necesaria inclusión de la Modelación Matemática en las aulas chilenas, requiere de esfuerzos de toda la comunidad educacional para instaurarla en las prácticas docentes. En este trabajo, se crea una tarea de modelación matemática para abordar el concepto de patrones y fomentar las competencias de modelación; además, es construido un instrumento para evaluar tales competencias. A partir de la experiencia, se observó la autonomía de los estudiantes en la resolución de la tarea en ambientes conductistas y fuertes aspectos motivacionales generados.

Palabras clave: *modelación matemática, competencias, situaciones didácticas, constructivismo.*

ANTECEDENTES DESDE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

La creación de modelos matemáticos para el aprendizaje de las Matemáticas es un tema complejo en todo nivel escolar y profesional, suficiente como para que se haya desarrollado como campo disciplinar, con resultados que evidencien elementos sustanciales en tareas de modelación matemática y la emergencia de constructos teóricos, que hoy conducen investigaciones en todo el mundo (Kaiser, Blum, Borromeo-Ferri y Stillman, 2011; Stillman, Kaiser, Blum y Brown, 2013).

En los últimos 30 años, la Modelación Matemática ha adquirido un rol cada vez mas protagónico en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, el desarrollo del conocimiento educacional e investigativo. El progreso teórico ha llevado a enriquecer las metodologías de enseñanza, líneas de investigación y desarrollo de múltiples programas de estudio en todos los niveles educacionales. En 1979, Henry Pollak (Borromeo-Ferri, 2006) fue pionero en dar una concepción sobre Modelación Matemática, caracterizándola como una manera de enlazar a la Matemática con "el resto del mundo", luego, las progresivas investigaciones enriquecerán la discusión, y parcelarán entendimientos diferenciados dependientes del uso y contexto disciplinar que se le pueda asignar a una tarea de modelación (Barbosa, 2003); a partir de esto es que investigadores en el área han definido distintos ciclos de modelación que describen los procesos de modelación. En el trabajo de Borromeo-Ferri (2006) se reportan algunos ciclos, destacando sus diferencias y similitudes epistemológicas.

En Chile, los Objetivos de Aprendizaje desde el año 2012 consideran transversalmente cuatro habilidades para Matemáticas: modelar, representar, resolver problemas y argumentar y comunicar; quedando como un constante desafío su inclusión en las prácticas docentes de las instituciones escolares del país y que conjuntamente se integren con los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios (MINEDUC, 2012).

Actualmente, los resultados OECD (2014) de Chile reflejan que es necesario fomentar e incluir de una manera mas generalizada la Modelación Matemática en las aulas chilenas, para ser utilizada como herramienta generadora de competencias y habilidades "blandas". Actividades mecanicistas

priman en el proceso de aprendizaje, descontextualizando la matemática, sin establecer una relación directa entre el mundo matemático y el mundo real. Visto de esta manera, ciclos de modelación como el de Blum-Borromeo (2006) permiten estructurar actividades que fomenten el desarrollo de las competencias solicitadas tanto por el currículum nacional como por pruebas internacionales.

PROBLEMATIZACIÓN

Cuando se practican tareas de modelación matemática en el aula, una opción es enmarcarla desde la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), pudiendo esclarecer dificultades y obstáculos que los estudiantes afrontan al modelar. ¿Cómo fomentar la capacidad de hacer inferencias, experimentar, crear hipótesis, debatir, compartir ideas, trabajar colaborativamente, y además permitir la conducción del aprendizaje de los contenidos requeridos?

El trabajo se sustenta en el supuesto del dominio de al menos los dos primeros niveles de las habilidades de pensamiento de la taxonomía de Bloom, para una apropiada realización de la actividad (Bloom, 1986) ¿cuáles son esos dos primeros niveles?. Además, se evaluarán las competencias de modelación (en el sentido de Blum y Kaiser, 1997, citado en Maaß, 2006) evidenciadas por los estudiantes de octavo año básico de un colegio determinado; en el desarrollo de una actividad de modelamiento matemático, será necesario establecer algunos parámetros que nos permitan comprender el desarrollo de este para generar una rúbrica de evaluación, una clara innovación en el estudio de la Modelación Matemática.

Considerando los antecedentes mencionados, nos enfocamos en el siguiente objetivo: evaluar las competencias y subcompetencias de Modelación Matemáticas de Blum y Kaiser (1997) desde la creación de una tarea de modelación y el instrumento de evaluación.

EXPERIMENTACIÓN Y RESULTADOS

La actividad fue realizada en un colegio Municipal de la ciudad de San Felipe en alumnos de 8º año de Enseñanza Básica. El día de la actividad asistieron 17 alumnos, quienes formaron grupos de trabajos; 3 grupos de 4 y 1 grupo de 5 integrantes. Ellos contaron con aproximadamente 1 hora para realizar la tarea de modelación. En la sala había dos evaluadores que les entregaron material didáctico, ver figura 1.

La profesora que comúnmente hace clases en el curso, tiene prohibición de trabajar grupalmente, aludiendo a que es perjudicial por el desorden que se genera. Generalmente trabaja enfocada en la ejercitación sistemática y repetitiva, dicta y enumera los pasos para resolver los ejercicios desde un paradigma conductista. Por lo tanto, los estudiantes no habían tenido experiencias de modelación en la clase.

La actividad propuesta es la siguiente: "Una constructora tiene un diseño para un tipo de edificio, en el cual cada piso, al mirarlo desde arriba, tiene forma cuadrada y en cada pared hay un gran ventanal, con tal de que los trabajadores cuenten con la iluminación natural apropiada. Además, en el diseño se incluye que en el último piso, al mismo tiempo de los cuatro ventanales, se coloque un tragaluz, con tal de dar una sensación de amplitud a quienes allí trabajen. Dado que la constructora tiene diferentes demandas, debe tener una forma rápida de calcular cuántos ventanales debe mandar a fabricar según la cantidad de pisos que sus clientes le exijan. Responde a las siguientes preguntas: 1) ¿Qué estrategia podría usar la empresa para determinar la cantidad de ventanales a utilizar en diferentes casos (un piso, dos pisos, tres pisos,…)? 2) ¿Puedes proponer una forma general de calcular una cantidad cualquiera de ventanas, dado los pisos que un cliente requiera? 3)Si se dispone de una cierta cantidad de ventanas en stock ¿se puede anticipar para cuantos pisos alcanzará? 4) ¿Qué pasará si quiero hacer un edificio de 1000 pisos? (analizar en un contexto real). 5) ¿Cuáles son las variables que intervienen en la expresión que modela la situación? 6)¿Cuál será la variable dependiente y la variable independiente en la situación de los edificios y ventanas?



Figura 1. Material didáctico implementado. A cada grupo de trabajo se le entregaron 7 cubos iguales de madera, de 1 pulgada de arista aproximadamente como material didáctico.

El instrumento de evaluación de la tarea de modelación es una escala de estimación creada a partir de las Competencias de la Modelación Matemática de Blum & Kaiser (1997).

Tabla 1. Instrumento de evaluación por competencias de modelación.

Subcompetencias	Muy baja	Baja	Medio	Alta	Muy alta
1 Matematizar cantidades relevantes y sus relaciones	No matematiza cantidades ni sus relaciones	Escasamente logra matematizar cantidades o lo hace inadecuadamente	Es capaz de matematizar cantidades, sin distinguir las relevantes de las irrelevantes	Es capaz de matematizar cantidades relevantes o bien sus relaciones	Es capaz de matematizar cantidades relevantes y sus relaciones
2 Simplificar cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario reducir su número y complejidad	No simplifica cantidades relevantes ni sus relaciones. Tampoco reduce su número y complejidad	Escasamente logra simplificar cantidades relevantes o sus relaciones, o lo hace inadecuadamente	Es capaz de simplificar cantidades relevantes o sus relaciones si es necesario sin reducir la complejidad	Es capaz de simplificar cantidades relevantes o sus relaciones o bien Reducir su número	Es capaz de Simplificar cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario Reducir su número y complejidad
3. Escoger apropiadamente notaciones matemáticas y representar situaciones gráficamente	La competencia en cuestión no se encuentra evidenciada	Escasamente logra escoger apropiadamente notaciones matemáticas o representar situaciones gráficamente o lo hace inadecuadamente	Es capaz de escoger notaciones matemáticas	Escoger apropiadamente notaciones matemáticas o bien representar situaciones gráficamente	Es capaz de escoger apropiadamente notaciones matemáticas y representar situaciones gráficamente
4. Uso de estrategias heurísticas	La competencia en cuestión no	logra usar estrategias heurísticas pero lo hace	Escasamente logra usar estrategias heurísticas	Es capaz de hacer uso de estrategias heurísticas	Es capaz de hacer uso de estrategias heurísticas y

	se encuentra evidenciada	inadecuadamente			realizar la conexión al trabajo matemático realizado
5. Uso del conocimiento matemático para resolver el problema	La competencia en cuestión no se encuentra evidenciada	hace uso del conocimiento matemático para resolver el problema pero lo hace inadecuadamente	Escasamente Hace uso del conocimiento matemático para resolver el problema	Con dificultad Hace uso del conocimiento matemático para resolver el problema	Es capaz de hacer uso del conocimiento matemático para resolver el problema.

Luego de analizar los datos de la aplicación del instrumento de evaluación, solo 1 grupo consiguió desarrollar la subcompetencia 1 en un nivel muy alto según la tabla 1.

Todos los grupos lograron construir el objeto matemático necesario para resolver la tarea. Algunos grupos respondieron desde su heurística a la pregunta 3, pero un grupo logró determinar una expresión que determina el número de pisos, dando muestras de un incipiente uso de la función inversa asociada a la respuesta esperada, como lo evidencia la figura 2a.

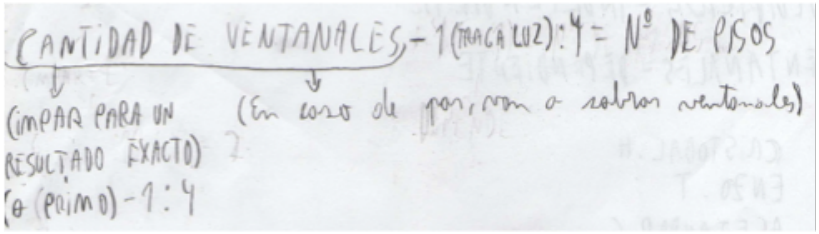


Figura 2a. Tipo de respuesta, desde la función inversa de la esperada.

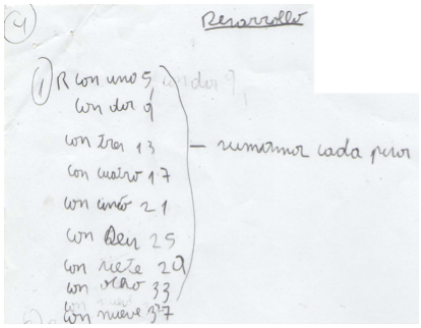


Figura 2b. Tipo de respuesta según lo esperado.

En la Figura 2b se muestra el proceso usual por el que el resto de grupos determinaron la cantidad de ventanales de acuerdo al número de pisos. Esta tabulación de datos permitió dar respuesta a la misma pregunta que respondieron en la figura 2a (pregunta 3 de la actividad). Solo un grupo creó un segundo objeto matemático para dar respuesta a esta pregunta.

CONCLUSIONES

Todos los grupos fueron capaces de crear el objeto matemático en base a la experimentación con material concreto, formulación de hipótesis y validación de las mismas, evidenciando las fases de la Actividad Adidáctica, pudiéndose generar enriquecedores debates entre los alumnos, quienes defendían sus creaciones apelando a recursos matemáticos y a la manipulación de los recursos concretos.

Las competencias de modelación de Blum y Kaiser (1997) que los alumnos evidencian en los resultados, no tienen una relación directa con su desempeño habitual en la asignatura bajo la metodología conductista utilizada por el profesor. Sin embargo, la positiva respuesta de los estudiantes, muestra que la creación de tareas adecuadas a las capacidades y a la realidad de los alumnos, puede fomentar la obtención de resultados mas cercanos a lo requerido actualmente por el

currículum nacional, independiente de los prejuicios que la comunidad educativa muchas veces impone. Los resultados son bajos en cuanto a los niveles de logro. Sin embargo, la propuesta de la tarea y el instrumento de evaluación son lo suficientemente interesante como para incluirlo en prácticas docentes.

La innovación desde paradigmas constructivistas impacta en los estudiantes, permitiendo observar otros usos de la Matemática en el aula y fomentando el hacer, actuar y razonar de manera autónoma, siendo capaces de construir conocimiento matemático como ellos lo perciban.

Referencias

Barbosa, J. C. (2003). What is mathematical modelling? In S. J. Lamon, W. A. Parder &. K. Houston (Eds.), Mathematical modelling: a way of life. 227-234. Chichester: Ellis Horwood.

Blum, W., & Kaiser, G. (1997). Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden. Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), 86-95.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bloom, B. S. (1986). Taxonomía de los objetivos de la educación: la clasificación de las metas educacionales, manuales 1 y 2. México: El Ateneo.

MINEDUC. (2012). Curriculum en línea. Recuperado el 5 de mayo de 2015, de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyvalue-49395.html

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo-Ferri, R. Y Stillman, G. (2011). Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14. New York: Sringer Verlag.

Maaß K. (2006). What are modelling competences?. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik Vol.38 (2) 113-142.

OECD (2014), PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I, Revised edition, February 2014), PISA. OECD Publishing. Doi: 10.1787/9789264201118-en

Stillman, G, Kaiser, G., Blum, W. y Brown, J. (2013). Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice. New York: Springer

PLANIFICACIÓN Y DISEÑO DE LA ASIGNATURA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA - GEOMETRÍA - EN EL CONTEXTO DEL AJUSTE CURRICULAR EN LA CARRERA DE EDUCACIÓN BÁSICA.

Hernández Molina, L[a] y Silva Salse, A[b]
Universidad de Las Américas;
lhernandez@udla.cl, asilvas@udla.cl

Resumen

El presente trabajo forma parte del proyecto "Ajuste curricular en las asignaturas de educación matemática de la carrera de pedagogía en educación básica de la Facultad de Educación de la Universidad de las Américas (UDLA)". En particular, se reporta la planificación y diseño de la asignatura de Educación Matemática - Geometría –teniendo en cuenta los estándares y bases curriculares estipuladas por el ministerio de Educación. Se pone de manifiesto las gestiones realizadas para llevar a cabo la adopción de este ajuste.

Palabras clave: *educación matemática, formación inicial, planificación docente.*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad hay consenso acerca de que la formación inicial de profesoresconstituye una preocupación para la sociedad, dado que los resultados esperados actuales no se encuentran en armonía con las expectativas de las comunidades, las familias y los estudiantes.

En relación a los procesos de formación inicial el Ministerio de Educación efectúa un proceso de revisión curricular de la educación básica, y junto a esteproceso generan estándares para la formación inicial de profesores. Entrega la responsabilidad a las instituciones de educación superior tanto en la formación inicial como la articulación de planes y programas de estudio en concordancia a estas exigencias.

Los resultados de la prueba Inicia plantean una situación compleja para la Universidad; la lectura que realiza el Ministerio de Educación en el año 2012 de los resultados de la prueba Iniciadeja de manifiesto las deficiencias que se presentan en el área,dado que 21 Instituciones de Educación Superior de un total 25 con más de 20 estudiantes evaluados- más del 50% de sus egresados presentaron resultados en el nivel insuficiente. El 69% de los egresados de Educación básica tienen conocimientos disciplinarios insuficientes y el 42% presenta insuficiencia en los conocimientos pedagógicos[20]. En el caso de la Universidad el 67% de sus egresados están en el nivel insuficiente en la prueba de conocimientos pedagógicos, mientras que el 85% no alcanza el nivel aceptable en la prueba de conocimientos disciplinarios. Nuestros egresados no logran resultados necesarios de acuerdo al perfil de egreso propuesto.

En este contexto, la Facultad de Educación en conjunto con el Instituto de Matemática de la UDLA realizan una alianza para realizar un ajuste curricular en la carrera de educación básica en -en el área de educación matemática- y en tal sentido manifiesta su determinación en reformular el proceso educativo para el desarrollo pleno de sus estudiantes,focalizando su atención en la enseñanza del conocimiento pedagógico de la disciplina. De modo que el estudiante asuma un rol

[20]Evaluación Inicia, Ministerio de Educación, (2012).

protagónico en la reinvención de esta ciencia y el profesor formador acompañe y oriente este proceso.
El ajuste se dirige no solo a organizar aquellos contenidos del currículum escolar, esencial para la práctica de los futuros profesores/as e incorporarlos, progresivamente en los programas de estudios de las asignaturas, sino también contribuir al perfil de egreso de modo que tenga basesfundamentadas en la disciplina.

La elección de la asignatura de Educación Matemática de Geometría- radica a una planificación desarrollada en base a los ejes definidos por el Ministerio de Educación; es la que inicia el proceso de desarrollo de cambios en el diseño planteado inicialmente y está sometida a evaluación a través de diversos instrumentos.

MARCO TEÓRICO

Conocimiento para la enseñanza.

Frente al conocimiento, existe certeza que la matemática disponibleel aula de clase es un conocimiento que está vinculado con el conocimiento matemático para enseñar que incluye conocimientos disciplinares y conocimientos pedagógicos del contenido. Se trata de un conocimiento disciplinar que es propio de aquel que enseña y por lo demás no lo desarrolla ni ningún otro profesional que haga uso de las matemáticas en su trabajo (Ball, Hill y Bass, 2005; Ma, 1999; Papick, 2011).

Shulman (1987) introduce el concepto de conocimiento pedagógico del contenido y se realiza un esfuerzo por identificar y describir conocimientos que se encontraban en una zona media entre los conocimientos pedagógicos generales y los conocimientos disciplinares puros. Investigadores de la Universidad de Michigan, agrupados en el proyecto Learning Mathematics for Teaching, han aportado sustantivamente a precisar tanto estos conocimientos pedagógicos situados en los contenidos - y esencialmente- a caracterizar el conocimiento disciplinar contextualizado en la enseñanza. (Ball, D., Hill, H., y Bass, H, 2005).

Formación docente.

En la formación docente existen diversas ópticas pero todas ellas coinciden en que esta formación inicial es relevante, el profesor es un actor que repercute en los aprendizajes de los alumnos.
El proceso de enseñanza comienza necesariamente en un estado en que el profesor comprende aquello que se debe aprender y cómo se debe enseñar. Fenstermacher (1986). Señala que el objetivo de la formación docente, no es capacitar para que actúen de una forma determinada, sino educarlos para que mediten sobre aquello que hacen. Siguiendo esta lógica, resulta imperioso indagar y reflexionar sobre cómo, a partir de nuestras vivencias, su desempeño resulta conveniente, idóneo para la sociedad.

La propuesta del diseño se ubica en el paradigma constructivista, admitiendo el principio de que el sujeto construye de manera activa su conocimiento, y construye los conceptos por interacción con los objetos y con otros sujetos. (Barreto T, Humberto, C. Gutiérrez A, Fernando, L. Díaz, P. Ligia, B & Parra, C. 2006).

"La evidencia disponible sugiere que el principal impulsor de las variaciones en el aprendizaje escolar es la calidad de los docentes" (Barber, M. Mourshed M. 2008, pág. 12)

"Hoy existe cierto acuerdo a nivel internacional en que una política asegura la calidad de la FID debe tener tres puntos estratégicos (Barber y Mourshed 2008, Ingvarson 2009):

1. Debe ser capaz de atraer a buenos estudiantes a la profesión docente.
2. Debe monitorear y asegurar la calidad de los programas con referencia a los estándares.
3. Debe establecer requisitos para entrar el ejercicio profesional"

(Centro de Estudios de Políticas y Prácticas en Educación, 2013, pág. 16)

Modelo educativo de la universidad.

El Modelo Educativo de la Universidad (2015), establece la dimensión pedagógica como la dimensión central del Modelo Educativo. Su función es orientar las decisiones y acciones relacionadas con el aprendizaje, la docencia y el currículum de las carreras que imparte la Universidad, y representa una particular relación entre el docente, el saber y los estudiantes, así como también la forma de llevar a cabo la práctica de la enseñanza-aprendizaje.En este entorno, la Universidad sitúa al estudiante como el eje de toda actividad formativa y asigna al docente un papel determinante en su relación con el proceso de enseñar, y así como sus propuestas de cambio.

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

- Planificar y diseñar la asignatura de educación matemática en el eje de geometría - en el contexto del ajuste curricular de la Facultad de educación de la Universidad de las Américas en la carrera de Pedagogía en educación básica.

Objetivos específicos.

- Elaborar el programa coherente con el Modelo Educativo de la Universidad
- Elaborar el Syllabus para la asignatura Educación Matemática- eje geometría.
- Diseñar materiales que contribuyan a la reflexión y discusión para la construcción del propio conocimiento pedagógico.
- Crear un aula virtual como repositorio de contenidos y actividades para los estudiantes
- Implementar programa de capacitación de profesores para la asignatura.

Metodología.

En la propuesta del diseño de la asignatura se desarrolla un modelo fundamentado en la investigación - acción, desde una perspectiva de enseñanza entendida como un proceso de continua búsqueda, integrando la reflexión y el trabajo intelectual en las experiencias que se realizan, valorando las ideas educativas cuando se intenta traducirlas a la práctica.(Stenhouse,1984). El modelo de desarrollo consideró las siguientes etapas:

Perfeccionamiento de profesores.

El Instituto de Matemáticas, Física y Estadística propone a un equipo de profesores llevar a cabo un Diplomado en Educación Matemática en el Centro de Modelamiento de Matemática[21] (CMM) de la Universidad de Chile, durante los meses de enero y septiembre de 2014 cuyos objetivos son:

- Entregar herramientas que permitan integrar el conocimiento matemático y pedagógico.
- Entregar herramientas para analizar el conocimiento matemático, desde una perspectiva curricular y didáctica.
- Entregar herramientas para analizar las clases de matemática como medio de reflexión y formación de profesores.

El diplomado realizado se caracteriza por:

[21]CMM, Centro de modelamiento de Matemática de la Universidad de Chile, institución encargada de la elaboración de los estándares para la formación inicial de profesores de la enseñanza primaria y secundaria.

- Una estructura modular, compuesta por ejes temáticos de los estándares para la formación Inicial.
- Módulos disciplinares y de carácter pedagógico
- Incorporación de elementos transversales, que las investigaciones señalan, son relevantes para la formación de un profesor.
- Una malla curricular compuesta de módulos de Datos y Azar, Números, Geometría, Algebra, Resolución de Problemas, Estudio de casos, y observación de clases.

Programa de estudio.

En el diseño se consideran las recomendaciones del ministerio de educación, los estándares para la formación de profesores, bases curriculares; dando énfasis a uno de los focos de la matemática: La resolución de problemas.

Elaboración de syllabus.

En la definición del syllabus se adopta un modelo orientado a resultados de aprendizajes (Fry, Ketterigde &marshall, 2009).

Las etapas esenciales a considerar en el diseño son:

- Los resultados de aprendizaje.
- Escribir los resultados de aprendizaje específico para cada actividad.
- Establecer un monitoreo sobre el logro de los objetivos propuestos.
- Plan de contenidos.
- Diseñar un plan de enseñanza y aprendizaje. ¿En qué actividades deben estar involucrados los estudiantes?
- Considerar la evaluación formativa y sumativa.

Análisis de literatura y creación de materiales para el estudiante.

En la revisión bibliográfica para la formación inicial de profesores, las acciones llevadas a cabo con los textos se refieren a:

- Traducciones
- Revisión general del texto.
- Selección de contenidos en base a los estándares y bases curriculares.
- Selección de problemas relevantes para motivar la discusión al interior del aula (ligado a la motivación).
- Realización del ejercicio por parte del investigador para conocer el problema y su alcance (contextualización en relación a las necesidades del contexto escolar).
- Señala si corresponden o no al objetivo y en base a ello se generan talleres de resolución de problemas

(Centro de Estudios de Políticas y Prácticas en Educación, 2013)

Creación de un entorno virtual: Disposición de materiales revisados - en la etapa anterior- a estudiantes y profesores en aula virtual sobre la plataforma Moodle, de acuerdo a los criterios establecidos por el investigador y la dirección del instituto de matemáticas. El aula dispone de recursos para el desarrollo de la asignatura y funciona como apoyo virtual al curso presencial.

Talleres de capacitación a profesores: En esta etapa se efectúa la capacitación a profesores y ayudantes que realizarán cursos en los diversos campus. Esta acción fue realizada por el equipo de

profesores que participó del diplomado de educación matemática, las actividades se centran en la resolución de problema en el contexto del conocimiento matemático para la enseñanza.

Ejecución: Durante el primer semestre de 2105 se llevó a cabo la puesta en marcha del curso educación matemática – geometría -, en el cual participaron alrededor de 95 estudiantes de la carrera de pedagogía en educación básica de diversos regímenes, campus y ciudades y 11 profesores.

Constatación: En la última etapa se considera el seguimiento y evaluación del proyecto. Las acciones realizadas fueron dirigidas a: observación de clases, encuestas a estudiantes y profesores. Se define un líder académico a nivel nacional a cargo de la asignatura, cuya función es coordinar las actividades de los profesores, evaluaciones y secuencias didácticas.

CONCLUSIONES

En la experiencia realizada no estuvo exento de dificultades, especialmente en el camino para lograr que los profesores formadores comprendan que el conocimiento matemático no es unidireccional, sino que se debe dar la oportunidad a los estudiantes de que sean autónomos en sus aventuras de aprender la matemática escolar. El diseño de las actividades es tremendamente beneficioso para los procesos de formación, sin embargo las creencias y paradigmas resultan obstáculos para la innovación y el cambio.

Las proyecciones se enfocan a continuar con la sensibilización de la propuesta, la mejora continua y redefinir el diseño de las actividades curriculares.

En síntesis, entendemos que el gran desafío que plantea la planificación y diseño de una asignatura es llevarla a cabo, con profesores motivados en la formación docente.

Referencias.

Bennett, A. Jr., Burton L, Ted L. (2012) Mathematics for elementary teachers: a conceptual approach, 9th ed. McGraw Hill.

Ball, D., Hill, H., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? American Educator, 29(3), 14-46.

Barber, M. Mourshed, M. (2008). Cómo hicieron los sistemas educativos con mejor desempeño del mundo para alcanzar sus objetivos.

Barreto T, Humberto, C. Gutiérrez A, Fernando, L. Díaz, P. Ligia, B & Parra, C. (2006). Límites del constructivismo pedagógico. Educación y Educadores, 9(1), 11-31.

Centro de Estudios de Políticas y Prácticas en Educación (CEPPE), (2013). Antecedentes y criterios para la elaboración de políticas docentes en América Latina y el Caribe. Pp. 11-12

Chandía, E. López, A. Martinez, S. Martínez, F. Rojas, D. (2014) Refip Matemática. Recursos para la formación inicial de profesores de educación básica. Geometría. Ed. SM.

Fenstermacher, G. (1986). "Philosophy of Research on Teaching: Three Aspects". In M. C. Wittrock (ed.), Handbook of Research on Teaching. New York: Macmillan, 3ra. ed., pp. 37-49

Fry, Heather, Ketterigde, S. Marshall, S (2009) A handbook for teaching and learning in higher education: enhancing academic practice 3rd ed. Pp-50.

Ingvarson, L. (2009). Conferencia "Why are standars important for the teaching profession?". 14 de julio de 2009, CEPPE-UC, Santiago.

Ma, L.(1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, N.J.: Lawrence ErlbaumAssociates

Martinez, F. Martínez, S. Ramírez, H. Varas L.(2014). Recursos Pedagógicos para la Implementación de los Estándares de Formación Inicial de Profesores de Enseñanza Básica en Matemáticas. Proyecto FONDEF - CONICYT D09 I1023 (2011 - 2014). Pp.18-19.

Musser, G. Burger, W. Blake E. (2014) Mathematics for elementary teachers: a contemporary approach, Oregon State University, 10th edition John Wiley

Papick, I. (2011). Stengthening the mathematical content knowledge of middle and secondary mathematics teachers. Notices of the AMS, 58 (3), 389-392.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard EducationalReview, 57, 1-22.

Stenhouse, L. (1984). Investigación y desarrollo del currículo, Madrid: Morata

Van de Walle, J. Karp S. Bay-Williams, J. (2013) Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally.8th ed. Pearson.

UDLA. (2015). Modelo Educativo UDLA. Santiago.

IDENTIFICACIÓN DE INDICADORES DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA SOBRE FUNCIONES MEDIANTE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO[22]

Espinoza, G[a].

[a]P. Universidad Católica de Valparaíso;
gonzalo.espinoza.v@gmail.com

Resumen

El Análisis Didáctico (AD) tiene como propósito establecer los significados de los conceptos y la intencionalidad de la matemática escolar. En este escrito se muestra al Análisis Didáctico (AD) como una herramienta en la identificación del conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK) sobre el concepto de función.Particularmente el centro está en la identificación de descriptores para el conocimiento del tema (KoT) que emergen del análisis del contenido en textos escolares y el programa de estudio de 8vo básico.

Palabras clave: *análisis didáctico, conocimiento especializado, concepto de función, conocimiento matemático.*

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA

El conocimiento de los profesores es una línea de investigación que ha ido creciendo sostenidamente durante las últimas décadas. En la Universidad de Huelva, España, el grupo SIDM[i] ha reflexionado sobre este conocimiento y ha propuesto el marco referencial*"Mathematic teacher's specialized knowledge" (MTSK)*(Carrillo, Climent, Contreras& Muñoz-Catalán, 2013)como refinamiento al modelo de Ball, Thames y Phelps (2008) debido a las dificultades en la delimitación entre los subdominios y su caracterización (Carrillo, Contreras y Flores, 2013; Carrillo et al., 2013; Flores, Escudero y Carrillo, 2013).

El MTSK es un modelo teórico para estudiar, de forma analítica, el conocimiento del profesor y,a su vez, es considerado como una herramienta metodológica para analizar las prácticas pedagógicas en base a sus categorías (Flores, Escudero & Aguilar, 2013), ya que tiene por objetivo caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas como especialista en la enseñanza de la matemática.En el MTSK se tienen los dominios relativos al conocimiento matemático (MK) y al conocimiento didáctico (PCK) con tres subdominios cada uno y sus categorías:

- Conocimiento de los Temas (KoT). Conoce loscontenidos y sus significados de manera fundamentada. Integra el contenido que deben aprender los alumnos y una profundización mayor a éste. Las categorías del KoT son: Fenomenología, Propiedades y sus Fundamentos, Registros de representación, Definiciones y Procedimientos.
- Conocimiento de la estructura matemática (KSM): Conexiones de complejización, Conexiones de simplificación, Conexiones de contenidos transversales y Conexiones auxiliares.

[22]a Trabajo realizado con el financiamiento de CONICYT, Beca Doctorado Nacional

- Conocimiento de la práctica matemática (KPM): Prácticas ligadas a la matemática en general, Prácticas ligadas a una temática en matemática.
- Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM): Formas de aprendizaje, Fortalezas y Dificultades asociadas al aprendizaje, Formas interacción de los alumnos con el Contenido matemático y Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas.
- Conocimiento de la enseñanza de la Matemática (KMT): Teorías personales o institucionales de enseñanza, Recursos materiales y virtuales y Actividades, Tareas, Ejemplos, Ayudas.
- Conocimiento de los Estándares de aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): Contenidos matemáticos requeridos a enseñar, Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, y Secuenciación de diversos temas.

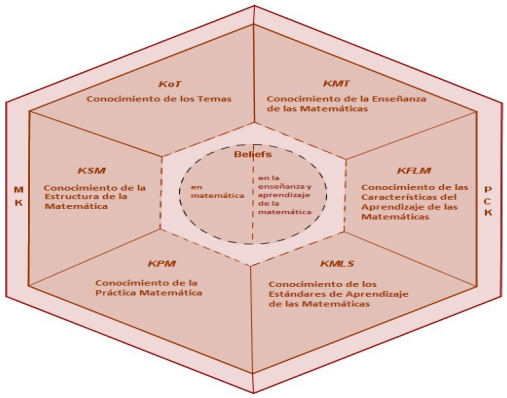


Figura 1. Subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2013)

El análisis didáctico como herramienta metodológica

De acuerdo con Rico (2013), el Análisis Didáctico (AD) es un método de investigación propio de la Didáctica de laMatemática, cuyo sustento está en la matemática, su historia y también en la filosofía del conocimiento y de la educación. El AD es considerado una herramienta para investigadores y para docentes ya que sus finalidades "radican en fundamentar, dirigir ysistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza yaprendizaje de contenidos matemáticos específicos" (Rico, p. 19), entregando al profesor medios para esta organización y al investigador una referencia sobre los conocimientos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El objetivo del AD es establecer los significados de los conceptos involucrados en la enseñanza y su intencionalidad educativa en el discurso de la matemática escolar, por tanto parte de las fuentes de información serán los documentos oficiales que regulen y organicen este discurso.

El AD se estructura en un ciclo de 5 etapas, con 3 componentescada una dando lugar a una síntesis correspondiente. Las etapas y sus componentes son las siguientes:

- **Análisis conceptual:** Conceptos básicos, Aproximación histórica, Génesis epistemológica; Síntesis **Conceptos y red de significados que articulan un tema.**
- **Análisis del contenido:** Estructura y análisis formal, Sistemas de representaciones, Análisis fenomenológico; Síntesis **Focos prioritarios.**
- **Análisis cognitivo**: Expectativas de aprendizaje, Limitaciones en el aprendizaje, Demandas cognitivas; Síntesis **Organización de los aprendizajes.**
- **Análisis de instrucción:**Funciones y secuencias de las tareas, Materiales y recursos, Gestión de aula; Síntesis **Diseño de la unidad didáctica.**

- **Análisis evaluativo:** Criterios e instrumentos de evaluación, Rendimiento, resultados e interpretación, Toma de decisiones; Síntesis **Revisión del proceso.**

El AD entrega un marco referencial teórico y práctico sobre la organización de la matemática escolar, cuyos componentes se corresponderán con los elementos del conocimiento del profesor.

En este trabajo mostramos cómo los resultados del análisis del contenido han permitido establecer indicadores para el KoT en el caso del concepto de función. Gallardo y González (2006), Rojas, Flores y Carrillo (2015) y Rojas, Flores y Ramos (2013) muestran cómo el AD permite esta identificación.A continuación un extracto de la relación identificada por Rojas et al.(2015) entre los componentes del AD y los dominios del MTSK.

Tabla 1. Relación entre los componentes del análisis de contenido y los dominios del conocimiento especializado del profesor de matemática

	Dominios de conocimiento					
		MK			PCK	
Análisis de contenido	**KoT**	**KSM**	**KPM**	**KMT**	**KFLM**	**KMLS**
Análisis conceptual	X	X	X	X	X	X
Análisis fenomenológico	X	X		X		
Sistemas de representación	X	X		X		

El análisis realizado consultó tres fuentes de información asociadas a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función.Por una parte encontramos los documentos oficiales que regulan el plan de estudio, esto es el programa de estudio de octavo básico (MINEDUC, 2014) según el decreto exento Nº 169/2014, donde se inicia el estudio del concepto de función y se posiciona como parte de la segunda unidad del primer semestre escolar. Por otro lado recurrimos al texto del estudiante (Bórquez, Darrigrandi, y Zañartu, 2012), y a la guía para el docente (Donoso y Jiménez, 2012) que se ponen a disposición por parte del Ministerio de Educación como materialización de la propuesta oficial que aparece en el programa de estudio. Finalmente se revisan textos de matemática utilizados en los cursos de cálculo en la educación superior (e.g. Apostol, 1967; Spivak, 1978). De esta revisión se obtiene una estructura conceptual, formas de representación y la fenomenología asociada al concepto de función. Como síntesis de este análisis se obtienen distintas concepciones sobre el concepto de función.

Resultados del análisis de contenido sobre el concepto de función

Cada significado dado al concepto de función tiene asociado un conjunto de elementos que dan cuerpo a esta concepción. Concepciones, conceptos, representaciones, fenomenología y procedimientos son las categorías en que se relacionan el análisis de contenido y el KoT del MTSK.
Las concepciones encontradas son: como correspondencia o vínculo entre elementos de dos conjuntos establece la asignación de un elemento de un conjunto con otro elemento de otro conjunto mediante una "ley"; como relación binaria o conjunto de pares ordenados y subconjunto del producto cruz entre dos conjuntos se muestra a la función relación que cumple una determinada condición; como un proceso de entrada-salida mediante un cambio del objeto de entrada por uno de otra naturaleza o como una transformación de él en otro de la misma especie; como triada (f,X,Y) identificando el dominio y recorrido de la función así como la expresión o ley que la define.
Los conceptos involucrados: ley o regla para la asignación, relación binaria, conjuntos, producto cruz o cartesiano entre dos conjuntos, ecuación funcional, valor funcional, expresión algebraica, dominio, recorrido, pre imagen, imagen, variable dependiente e independiente, par ordenado, punto

en el plano, gráfico, proporcionalidad. Cada uno de estos conceptos forma parte de la definición, representación u operación con funciones.
Las representaciones: la función se puede representar por medio de tablas de valores, lenguaje natural, diagrama sagital, lenguaje algebraico, conjunto de pares ordenados, conjunto de puntos en el plano, con software de procesador gráfico o con material concreto.
La fenomenología: corresponde a situaciones cotidianas de variación proporcional, relaciones numéricas cotidianas, ampliación o reducción de figuras geométricas mediante imagen homotética, situaciones de cambio lineal o situaciones de cambio afín. La fenomenología obedece principalmente a la proporcionalidad.
Los procedimientos utilizados: cálculo de imágenes y pre imágenes mediante valorización de expresiones o resolución de ecuaciones, identificación de dominio y recorrido, ubicación de puntos en el plano, cálculo de constantes de proporcionalidad, cálculo de pendiente de la recta, identificación de la posición de la recta respecto a los ejes.
La descripción de los componentes anteriores establece la forma en que los conceptos se relacionan para dar lugar a la estructura conceptual y a la comprensión del concepto de manera que lo emergido del análisis corresponde a un conocimiento esperado-requerido por el profesor.

Indicadores para KoT

Lo anterior posibilita la identificación de ciertos descriptores de conocimiento del profesor de matemática que pretende enseñar el concepto de función. Se debe aclarar en este punto que la lista que sigue no es exhaustiva y corresponde a una etapa inicial de esta investigación. Se sabe que los dominios del MTSK están inter-relacionados (Carrillo et al., 2013) por lo tanto el análisis de los otros dominios permitirá determinar más indicadores en este dominio, así también la conexión de las etapas del ciclo del AD con el MTSK aporta más información sobre estas relaciones.Se describen a continuaciónlos indicadores para las categorías del KoT según los resultados del análisis.Fenomenología: Conoce distintos contextos donde aparece la función como variación proporcional o cambio lineal. Conoce los ámbitos numéricos que son factibles trabajar en el nivel en que enseña. Conoce distintos significados de la función como correspondencia, como proceso de entrada-salida o de transformación.Propiedades y sus Fundamentos: Conoce la propiedad de linealidad de una función. Conoce el concepto de constate de proporcionalidad y cómo ella se utiliza en la determinación de la representación de la función.Conoce la posición relativa de una recta en el plano con respecto a los ejes del sistema.
Registros de representación: Conoce las representaciones de funciones en tablas de valores y su construcción, en lenguaje natural como un enunciado, en lenguaje algebraico como una expresión algebraica $y=f(x)$ o ecuación funcional, en diagrama sagital, en conjunto de pares ordenados, en el plano cartesiano como conjunto de puntos, en material concreto como *geoplano* o con software educativo. Conoce la representación más adecuada según la situación planteada. Reconoce las diferencias entre la representación de una relación funcional de una no funcional.
Definiciones y Procedimientos: Conoce la definición del concepto de función. Establece criterios para determinar si un ejemplo o situación corresponde a una función. Domina la resolución de ecuaciones como herramienta en la determinación de imágenes y pre imágenes. Domina la evaluación de expresiones algebraicas. Domina la operatoria con números racionales. Domina la ubicación de puntos en el plano.

Comentarios finales

Como se ha mostrado, el AD resulta ser una herramienta útil para la identificación del conocimiento especializado del profesor sobre un tema particular, por tanto se transforma en una herramienta para el investigador y en una metodología de investigación. La relación entre el AD y el MTSK potencia la identificación de referencias para el conocimiento del profesor y permite pre visualizarsus usos en la formación inicial y continua de profesores, o en el establecimiento de referencias teóricas sobre el conocimiento deseado-requerido en los profesores.

Referencias

Apostol, T., (1967). Cálculus Volumen I. México: Reverté.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Bórquez, E., Darrigrandi, F., &Zañartu, M. (2012).Matemática 8º Educación Básica: texto para el estudiante. Santiago: Santillana.

Carrillo, J., Contreras, L.C. & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina & I. Segovia, I. (Eds.), Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro, (pp. 193-200). Granada: Editorial Comares.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser& M.A. Mariotti (Eds.),Actas del CERME 8 (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.

Donoso, M., Jiménez, L. (2012).Guía didáctica del docente para el texto Matemática 8º Educación Básica. Santiago: Santillana.

Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D.I., & Carrillo, J. (2013).A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.). Actas del CERME 8 (pp. 2055-3064). Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME.

Gallardo, J., & González, J. L. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática. En M. P. Bolea, M. Moreno &M. González (Eds.), Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 57-78). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.

MINEDUC (2014). Ministerio de Educación Chile.Programa de estudio de matemática - Octavo Básico. Decreto Exento 169/2014. disponible en http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18983_programa.pdf

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,(33), 11-27.

Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. Bolema, 29(51), 143-166.

Rojas, N., Flores, P., &Ramos, E. (2013).El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, J. L. Lupiañez& M. Molina (Eds.), Análisis didáctico en educación matemática: Metodología de investigación, Formación de profesores e Innovación curricular (pp. 191-210). Granada: Comares, S. L.

Spivak, M. (1978). Cálculo Infinitesimal. Barcelona: Reverté.

[i] Seminario de Investigación en Educación Matemática de la Universidad de Huelva, España.

ANÁLISIS DE OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS OBSERVADOS EN EL CÁLCULO DE PERÍMETRO CON TANGRAMA CHINO

Swears, Y.[a] yHuincahue, J.[b]

Universidad de Las Américas[a], Universidad de Playa Ancha – San Felipe[b]
yswears@gmail.com[a], jaime.huincahue@upla.cl[b]

Resumen

Se realiza un análisis sobre algunos obstáculos observados en el cálculo del perímetro de figuras construidas con el tangrama chino, específicamente, por la singular descomposición del cuadrado y la necesaria estimación a realizar.Por otra parte, la estimación necesita ser presentada en situaciones concretas dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje en las clases de Matemáticas. A partir de esto, se desarrolla una investigación cualitativa en profesores noveles y en ejercicio, para caracterizar el conocimiento que poseen sobre el uso de prácticas que sitúen a la estimación como un elemento de aprendizaje en sus clases. Los resultados muestran el rechazo y desconocimiento de los profesores a incluir la estimación en sus prácticas, concluyendo el desconocimiento o lejanía de elementos del Cálculo Numérico en la formación inicial y la nula relevancia que tiene este tópico para profesores en ejercicio o próximos a ejercer.

Palabras clave: *obstáculos didácticos, cálculo del perímetro, tangrama chino, estimación.*

ANTECEDENTES Y MARCO TEORICO

La enseñanza del cálculo del perímetro, es un elemento basal en el currículum chileno; las investigaciones muestran múltiples herramientas que proporcionan enfoques didácticos para la conducción del aprendizaje en niveles primarios (Sanchez, Villamil, Cruz, Parra, Olaya, 2013; Bohning, Kosack, 1997; D'Amore y Fandiño, 2007), considerando muchas dificultades y obstáculos que surgen dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Desde una aproximación antropológica, la Geometría ha sido parte de la cultura del hombre, y entonces, incluida como uno de los pilares de la formación escolar. Un claro ejemplo de aquello es el papiro de Rhind (Robins y Shote, 1987), en donde a través de situaciones cotidianas de la civilización egipcia, hacen uso de lo que hoy conocemos por perímetro, área y volumen, entre otros. Actualmente, la Geometría es un pilar en la formación académica, ya que su aplicación a múltiples contextos logra la formación de razonamiento lógico (Gamboa y Ballestero, 2009), y en el currículum chileno (MINEDUC, 2012) no es la excepción, ya que en éste se considera como uno de los 4 ejes, y el perímetro dentro de los primeros años escolares básicos.

Naturalmente, muchas civilizaciones en diversas épocas han generado recursos para el aprendizaje de los elementos de la Geometría, y uno de ellos es el tangrama chino. En este trabajo adquiere un espacio central el perímetro de las figuras construidas por el tangrama y los obstáculos no percibidos que crea según la búsqueda realizada por los autores de esta investigación.

Existen reportes e investigaciones que señalan que la enseñanza de la Geometría se ha desplazado a un segundo plano. Huincahue (2008) evidencia en un liceo chileno la algebrización de la Geometría desde de la construcción de un diseño de tareas, en donde tradicionalmente se requiere el uso de resultados únicamente geométricos y otras tareas que requieren el álgebra para llegar al resultado. Solo fueron realizadas las tareas que consideraban el álgebra en su desarrollo típico.

Bressan (2000) explica algunas evidencias de la importancia de enseñar Geometría:

- La geometría forma parte de nuestro lenguaje cotidiano, el lenguaje verbal diario posee muchos términos geométricos, cuando debemos comunicarnos acerca de una ubicación, tamaño, forma de un objeto, la terminología geométrica es esencial.
- Por otro lado tiene importantes aplicaciones en problemas de la vida real, está relacionada con problemas de medida que a diario nos ocupan, como diseñar un folleto, cómo cubrir una superficie, como leer mapas o planos, la estructura del Universo, muchos ejemplos de la naturaleza que nos rodea, flores, minerales, copos de nieve serían indescriptibles sin el uso de la geometría.
- Es un tema unificador en la Matemática Curricular, para visualizar conceptos aritméticos y algebraicos. Por ejemplo figuras geométricas para desarrollar conceptos de fracciones, cálculo de áreas para explicar productos notables.
- Sirve para comprender conceptos de matemática avanzada y de otras ciencias, en el análisis matemático donde la derivada de una función en un punto puede modelizarse como la pendiente de la recta tangente a la curva que representa la función en ese punto.
- Es un medio para desarrollar la percepción espacial y la visualización, todos necesitamos una buena percepción espacial, habilidad de visualizar objetos en el espacio y captar sus relaciones.
- Como modelo de disciplina organizada lógicamente.
- Posee valor estético y cultural.

Construcción del saber

Existe una vertiente que es la Lógica Racional, la cual define la Geometría como una teoría axiomática que se desarrolla bajo leyes rigurosas del razonamiento deductivo. Por otro lado tenemos otra vertiente que es una Geometría más intuitiva y experiencial basada en la búsqueda, descubrimiento y comprensión por parte del sujeto que aprende conceptos y propiedades geométricas en función de explicar el mundo en que vive. La última, es sin duda la que más desarrolla un pensamiento constructivista en estudiantes de Enseñanza Básica (Rosas y Sebastián, 2008), por lo tanto la enseñanza de la Geometría es posible orientarla al desarrollo de habilidades específicas visuales, verbales, de dibujo, lógicas y de aplicación. Para esto, una herramienta que pretende considerar las habilidades mencionadas es el tangrama chino para la construcción del saber de uno con el otro, asumiendo que los objetos matemáticos no son preexistentes, sino que pretenden ser construidos por los estudiantes.
Uno de los elementos a considerar dentro del estudio de la enseñanza del perímetro, es el medir, ya que éste presenta dificultades al estudiante de diversa índole. Chamorro (1997) analiza ocho aspectos distintos que determinan los entornos de aprendizaje en lo que concierne con la medida, tomando como referencias las ideas de Brousseau (2007). Los aspectos son: objeto soporte, magnitud, valor particular, aplicación de la medida, medida imagen, medida concreta, medición y orden de magnitud. En todos ellos, la estimación pareciera poco valorada como habilidad intuitiva del que construye, situación que en la vida de una persona es común y recurrente.

El tangrama chino

"El tangrama es un rompecabezas chino que consiste en un tablero o tarjeta cuadrada cortada por incisiones rectas en piezas de diferentes tamaños (5 triángulos, un cuadrado, y un rombo) como se muestra en la siguiente figura:" (Wang y Hsiung, 1942. Traducción personal).

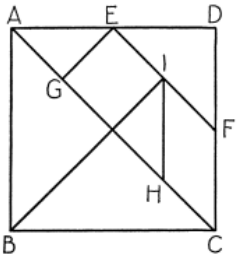


Figura 23. El tangrama de Wang y Hsiung.

Tal rompecabezas tiene mucha historia concerniente a su creación, uso o el significado de su nombre para distintas culturas. Sin embargo, su interés acapara el de comunidades disciplinares tanto de Matemáticos Educativos como de Matemáticos (Wang y Hsiung en 1942 demuestran que se pueden formar exactamente 13 polígonos convexos). Nuestro interés recae en la Matemática Educativa.

Es una buena estrategia docente que el estudiante sea capaz de crear su tangrama, ya que genera emociones positivas en frente del acto, específicamente sorpresa e impresión, siendo considerado entretenido y con solo 7 piezas ellos pueden realizar múltiples figuras (Bohning y Kosack, 1997). Mora (2013) enuncia una singular importancia a las emociones en la educación, afirmando que sustenta procesos atencionales para el aprendizaje, debiendo ser considerado muy importante para la enseñanza. Por ejemplo, la alegría tiene conocidos sustratos cerebrales que promocionan procesos neuroeducativos (Nieto, 2011), focalizando a la educación desde una posición neurocientífica. Desde este foco, es considerado indisoluble el binomio emoción-cognición (Mora, 2013).

En el uso del tangrama, los estudiantes deberán armar una y otra vez figuras que definan –en principio- su imaginación, lo que necesariamente creará un alto interés en el uso y manipulación. Conjuntamente, emerge un vocabulario geométrico (el que puede ser promovido), en donde los estudiantes identifican y clasifican, habilidades basales en la enseñanza de las Matemáticas.

Problemática

Los antecedentes mencionados, evidencian diversas situaciones, por ejemplo, que la enseñanza de la Geometría se ha desplazado a un segundo plano, a pesar de que se reconocen las múltiples soluciones que nos brinda la Geometría a problemas de la vida diaria, adquiere un estatus menor, simplificando ésta área de las Matemáticas desde un sentido más aritmético y algebraico, minimizando los resultados y el contexto en donde puedan ser usados para la construcción del saber, implicando posiblemente que los recursos emanados por el curriculum chileno (MINEDUC, 2012) mantienen obstáculos didácticos referentes al medir perímetros de figuras planas, prevaleciendo el énfasis en la utilización de fórmulas para el cálculo del área y perímetro.(Swears, 2014)

En el año 2014, Swears hace uso de la Micro-Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995)en la enseñanza de área y perímetro desde el tangrama (nuestro diseño de aprendizaje), con el fin de que los estudiantes puedan construir los conceptos antes mencionados, específicamente la emergencia del sentido que tienen las expresiones que determinan el cálculo del área y perímetro, dándole un sentido a las expresiones que muchas veces no lo tienen. Sin embargo de esta propuesta se desprende un obstáculo didáctico (en el sentido de Brousseau), específicamente en el cálculo del perímetro.

Los estudiantes al construir figuras como el conejo (por ejemplo), al calcular su contorno, se enfrentan a dificultades como la inexactitud de la obtención del perímetro, existiendo la posibilidad de que todos los estudiantes encuentren contornos distintos, dependiendoprincipalmente de la exactitud de la forma en que coloque las piezas de la figura, del instrumento utilizado y de la forma de trabajo particular que tiene cada alumno. Desde tal situación, la devolución generada por el profesor adquiere un rol principal para que los estudiantes aborden tal obstáculo. Sin embargo, es interesante saber qué tipo de conocimiento tiene el profesor de matemáticas, para establecer una devolución suficiente como para que el estudianteproblematice el obstáculo y logre el saber matemático necesario que requiere el obstáculo impuesto desde el diseño de aprendizaje

Experimentación

Para la experimentación, se consideran tres profesores noveles y tres profesores en ejercicios, que trabajan en colegios particulares y municipales de la Región Metropolitana, en donde se les solicita que resuelvan la siguiente tarea: Calcule el perímetro del gato formado con todas las piezas del tangrama (Figura 2). Además, conteste las siguientes preguntas ¿Qué le parece el ejercicio planteado? ¿Lo haría [en sus prácticas docentes]?¿Por qué? ¿Cómo trabaja o trabajará la estimación en su clase de matemáticas?

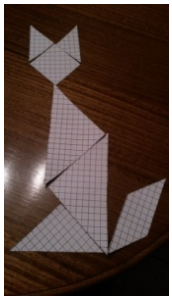


Figura 24. Gato realizado con Tangrama.

La resolución se realizó con normalidad, con el tiempo suficiente para que los profesores respondieran todas las preguntas con tranquilidad desde un ambiente reflexivo.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos se observa, que ambos grupos de profesores evidencian dificultad en la actividad propuesta.

Logran llegar al perímetro de la figura de forma heurística y estimando el resultado, ya que no se gradúa en forma exacta, pero a la vez argumentan que es muy difícil llevar a la sala de clases este tipo de tareas, ya que la graduación no es exacta por lo tanto el perímetro no será exacto, lo que los profesores, no saben cómo tratar con los estudiantes la estimación, la mayoría de las veces trabajan en truncar o redondear números decimales, pero no ausar la estimación en el cálculo del perímetro.

Argumentan que el tiempo es un factor importante a la hora de realizar este tipo de tareas, por lo cual siempre se hacen los mismos ejercicios de cálculo de perímetro propuestos por los textos de estudio y que consisten básicamente en el cálculo de perímetro de figuras tradicionales. Sin embargo, agregan que en las pruebas de medición si se les pide a los estudiantes ejercicios de mayor dificultad.

Por otro lado aseguran nunca haber usado tangrama chino para la enseñanza del perímetro, que les

parece una propuesta interesante, la cual les gustaría realizar, pero que en definitiva no saben cómo abordar esta dificultad.

Finalmente seafirma que para los profesores noveles y en ejercicio, el cálculo del perímetro desde el tangrama es una actividad que podría servir para analizar y reflexionar acerca de la estimación en la sala de clases, como también como poder calcular perímetro de distintas figuras, así logrando a la vez que los estudiantes visualicen que este varía según la figura, caso distinto al área.

La relevancia que posee la estimación dentro de las prácticas docentes de los entrevistados, es muy baja según lo esperado, ya que es un concepto recurrente dentro del contexto cotidiano del estudiante y no está en correspondencia con las prácticas que declaran los profesores realizar.

Algunos profesores declararon conocer elementos básicos de áreas de la Matemática, como es el Cálculo Numérico y conceptos de aproximación o truncamiento. Sin embargo, no son capaces de hacer uso de tales conocimientos en contextos que están fuera de un ambiente estrictamente matemático, evidenciando de que la formación que tuvieron estos grupos de profesores no fue íntegra en el uso de los conocimientos en escenarios cotidianos del estudiante, implicando la deficiencia docente para la creación de situaciones de aprendizaje que sean capaces de mostrar el uso de la matemática en la realidad, en el uso de las matemáticas para la vida.

Referencias

Artigue M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (eds.), Ingeniería didáctica en educación matemática, Grupo Editorial Iberoamérica: México, 97-140.

Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2000). Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar.... México D.F.: Ediciones Novedades Educativas.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Chamorro, M. C. (1997). Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental. Tesis de doctorado no publicada. UNED, Madrid, España.

D'Amore, B. y Fandiño, M. (2007).Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 10(1), 39-68.

Gamboa, R. y Ballesteros, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la Didáctica de la Geometría. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 4(5), 113- 136.

Huincahue J. (2008). Concepciones de los estudiantes acerca del uso del álgebra en la geometría. Tesis inédita de Pedagogía en Matemáticas y Licenciatura en Educación no publicada. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

MINEDUC. (2012). Curriculum en línea. Recuperado el 24 de Agosto de 2015, de http://curriculumenlinea.mineduc.cl/sphider/search.php?query&t_busca=1&results&search=1&dis=0&category=1.

Mora F. (2013). Neuroeducación. Solo se puede aprender aquello que se ama. Madrid: Alianza Editorial.

Nieto Gil J. (2011). Neurodidáctica. Aportaciones de las neurociencias al aprendizaje y la enseñanza. Madrid: CCS.

Robins, G. y Shute, C. (1987). The Rhind mathematical papyrus.An ancient Egypcian text.British Museum Publications, London.

Rosas, R., & Sebastián, C. (2008). Piaget, Vigotski y Maturana: constructivismo a tres voces. Buenos Aires: Aique.

Sanchez, S., Villamil, M., Cruz, J., Parra, J. y Olaya, A. (2013). Una propuesta de enseñanza del área y perímetro para estudiantes de 4° en un contexto rural. Educación Científica y tecnológica. Edición especial, 538-542.

Swears, Y (2014) Micro- Ingeniería Didáctica en la enseñanza de área y perímetro en estudiantes de quinto año básico utilizando tangrama. Tesis inédita de Magíster en Educación Matemática no publicada. Universidad de los Andes, Santiago, Chile.

Wang, F. y Hsiung, C (1942).A Theorem on the Tangram.The American MathematicalMonthly, 49(9), 596-599.

TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: DESARROLLANDO HABILIDADES EN MATEMÁTICA

Reyes, C.[a], Perdomo-Díaz, J.[b], Felmer, P.[c], Espinoza, C.[d], Peri, A[e],

[a]Centro de Modelamiento Matemático (CMM) de la Universidad de Chile, [b]Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE) de la Universidad de Chile.

Resumen

El taller Resolución de Problemas en Acción busca proveer de una experiencia colectiva, práctica y replicable de resolución de problemas a sus participantes, además de dar la oportunidad de una discusión acerca de la importancia de la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática escolar y la importancia que ha adquirido la resolución de problemas en el nuevo currículo. Este taller en su versión corriente tiene una extensión de 5 horas y se realiza usualmente un día sábado con la participación de un número de profesores que va de 21 hasta 120. En esta oportunidad se propone una versión reducida de 90 minutos para 42 participantes.

Palabras clave: *Resolución de Problemas, Desarrollo Profesional, Habilidades*

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas (RP) se encuentra en el centro de la actividad profesional de los matemáticos, quienes en su afán de conocer el mundo crean modelos abstractos de la realidad, estudian las componentes de estos modelos y las relaciones entre ellas. En esta tarea creativa, los matemáticos se plantean interrogantes o problemas que cautivan su interés y ellos vuelcan su energía para resolverlos, buscan estrategias y trabajan hasta que logran resolverlos, comprendiéndolos en su cabalidad. Esta actividad de los matemáticos, la RP, hace su aparición en el curriculum nacional hace ya varios años, pero es elevada a la categoría de habilidad, distinguida claramente de los contenidos en las bases curriculares de 2012, poniendo una serie de desafíos a todo el sistema escolar, en particular a los programas de formación docente, a los docentes en formación y también a los docentes en ejercicio. Es así como surge la necesidad imperiosa de desarrollar esta habilidad en los actuales y futuros docentes, para lo cual se diseñan cursos que privilegian el hacer y el reflexionar, desarrollando la capacidad de resolución de problemas, la cual está inmediantamente relacionada con las capacidades de argumentación, comunicación y modelamiento en los docentes. Además de desarrollar habilidades y capacidades estos cursos fomentan la autonomía de razonamiento matemático a través del uso sistemático de preguntas, la reflexión sobre las concepciones de la matemática y de su enseñanza, y sobre las emociones a la hora de enfrentarse a problemas y resolverlos.

Marco teórico

En la actualidad, la resolución de problemas es un elemento indispensable en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Kilpatrick et al., 2009; Niss, 2002), que ofrece al estudiante oportunidades para establecer conexiones razonadas entre distintos elementos matemáticos y promueve que desarrolle habilidades como examinar, representar, aplicar y la opotunidad de utilizar procesos asociados al pensamiento matemático avanzado como abstraer, analizar, conjeturar, generalizar o sintetizar (NCTM, 2000). La forma en que los profesores e investigadores enfocan la propuesta de utilizar la RP para promover el aprendizaje no es común para toda la comunidad educativa y depende fuertemente de la concepción que se tenga acerca de qué es un problema y qué significa resolverlo.

Entendemos que el término "problema" no es una propiedad inherente a una actividad matemática sino que depende del tipo de interacción que se produzca entre la actividad y la persona que intenta resolverla, sin restringirse a una dificultad de tipo operacional intrínseca. De esta forma, que una actividad sea o no un problema está relacionado con la dificultad que la actividad entrañe para la persona que trata de resolverla (Santos-Trigo, 2007). En este sentido, "La resolución de problemas es un proceso complejo que requiere que un individuo coordine sus experiencias previas, su conocimiento, su comprensión y su intuición para satisfacer las demandas de una situación nueva" (Kaur y Yeap, 2009, p. 308). Así, la forma en que una persona se enfrente a la RP dependerá de sus conocimientos matemáticos, heurísticas, metacognición, su sistema de creencias y las prácticas educativas en las que haya participado (Schoenfeld, 1985). Esta complejidad de la RP se ha, en algunos casos, trivializado a seguir unos pasos en forma algorítmica y lineal, debido a una lectura prescriptiva de los trabajos de Polya.

Las ideas de Polya y sus famosos cuatro pasos para resolver un problema se redujeron a tal punto que se consideraron "el modelo" o "la receta" para resolver problemas o enseñar a resolverlos, ver Kilpatrick (1987) y Santos-Trigo (2007). Esta idea de repetir para resolver problemas hace olvidar que Polya, entendía que en el centro de la capacidad para enseñar resolución de problemas debe estar la experiencia de resolver problemas y no solo la mecanización de su método (Polya 1966, citado por Kilpatrick, 1987): *Hay problemas y problemas, y toda clase de diferencias entre problemas. Pero la diferencia más importante para el profesor es entre problema 'rutinario' y 'no rutinario'. El problema no rutinario demanda del estudiante algún grado de creatividad y originalidad, el problema rutinario no... Yo no voy a explicar que es un problema matemático no rutinario: si tu nunca has resuelto uno, si tu no has experimentado la tensión y triunfo del descubrimiento, y si, no has observado tal tensión y triunfo en uno de tus estudiantes, búscate otro trabajo y deja de enseñar matemáticas.* La importancia de la experiencia que debe tener un docente para enseñar resolución de problemas ha sido también enfatizada por otros autores. Mason (1992) señala cómo los materiales o guías "a prueba de profesores" no han tenido éxito en la enseñanza de la matemática, que es necesario haber luchado con un problema para apreciar la dificultad que un estudiante puede tener con un problema, que para desarrollar el ser matemático de un estudiante es necesario desarrollar el propio.

Existe evidencia de que los estudiantes en Chile tienen un bajo rendimiento en matemática, lo cual incluye pero no se limita a RP, esto lo indican pruebas internacionales como PISA y TIMMS y la prueba nacional SIMCE. Esto está asociados a un problema más específico: una formación inicial que no provee a los docentes de los conocimientos y habilidades matemáticas y el conocimiento pedagógico de la matemática necesarios para lograr un aprendizaje en los estudiantes, acorde a las necesidades actuales y que están recogidas en el currículo nacional. Esta formación matemática inicial inadecuada no parece ser remediada en los cursos de desarrollo profesional que ofrece el sistema, los que si bien entregan conocimientos, a menudo son teóricos y si son prácticos no se entregan de la forma y en la intensidad necesaria para modificar las prácticas docentes. Además de lo anterior se presenta un nuevo escenario creado por el currículo nacional, ya expresado en el ajuste de 2009, pero enfatizado de manera explícita en las Bases Curriculares de 2012, que plantea el desarrollo de las habilidades matemáticas en los estudiantes en conjunto con los contenidos matemáticos.

Es a raíz de lo anterior que nace la iniciativa ARPA, la cual busca ofrecer cursos de desarrollo profesional efectivos, que provean a los docentes las habilidades matemáticas del currículo, centradas en la resolución de problemas, que signifiquen un cambio en su percepción de la matemática y de su aprendizaje, y que produzcan un cambio consecuente en su acción en el aula. ARPA propone una Estrategia de Desarrollo Profesional centrada en las Habilidades Matemáticas con una fuerte componente en el trabajo y en la reflexión entre pares, constituida por tres talleres:

Resolución de Problemas en Acción (RPAcción - 5 horas en un día). Cursos de Verano (RPVerano - 25 horas en 5 días). Resolución de Problemas para el Aula (RPAula - 30 horas en un año).

METODOLOGÍA Y PROPUESTA DEL TALLER

En esta oportunidad presentaremos y analizaremos un taller RPAcción, el cual tiene como objetivo proveer de una experiencia colectiva de resolución de problemas y dar la oportunidad de una discusión acerca de la importancia de la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática escolar y la importancia que ha adquirido la resolución de problemas en el nuevo currículo, cómo trabajar esta habilidad en el aula, distintas estrategias para solucionar problemas y las emociones que surgen en RP. Es un seminario de 5 horas de duración, que se realiza usualmente un día sábado con la participación de un número profesores que puede ir desde 21 a 120.

El taller de 5 horas está pensado para profesores en ejercicio, aunque en oportunidades es realizado para profesores en formación, estos pueden ser tanto de enseñanza básica sin mención, básica con mención como de enseñanza media. En sí el taller consta de dos módulos muy diferentes entre sí, los cuales serán llamados: "trabajo en grupos" y "plenarias". Además, está diseñado para ser una actividad donde el participante experimente en primera persona la resolución de problemas y se vea desafiado por los problemas que se le proponen, donde además debe poner en juego sus habilidades matemáticas de resolución de problemas, argumentar y comunicar, modelar y representar, además de su conocimiento matemático.

La actividad comienza agrupando a los participantes en grupos de tres formados al azar. A cada grupo se le entregan tres copias de un problema (una para cada integrante del grupo) impreso a una plana. El grupo debe solucionar el problema, para lo cual debe valerse de todas sus capacidades, habilidades y estrategias disponibles. Si el grupo tiene dudas debe llamar al monitor quien interactúa con el grupo sólo con preguntas. Una vez el grupo está totalmente de acuerdo de la solución, llama al monitor el cual otra vez interactúa con el grupo, esta vez al igual que en la anterior, la forma de relacionarse con el grupo será sólo con preguntas, pero a diferencia de la anterior, ante la respuesta del grupo el monitor puede optar por darles una simplificación o extensión del problema, dependiendo de la solución y rapidez de trabajo mostradas. Además, el monitor puede decidir entregar un nuevo problema si entiende que este fue solucionado en profundidad y comprendido por todos los integrantes del grupo.

El trabajo en grupos ocupa la mayor parte del tiempo del taller, sin embargo existe una segunda instancia tan importante como la de resolver problemas. Esta instancia es donde se produce la discusión y puesta en común de las ideas desarrolladas y tratadas durante el taller, esta instancia es llamada plenaria.

Durante el taller se realizan dos plenarias las cuales tienen distinto foco; la primera tiene foco en las estrategias utilizadas para resolver un mismo problema y es el monitor quien guía la discusión para que salga la mayor cantidad de estrategias diferentes, donde debe quedar en claro que todas son igualmente válidas y no hay una por sobre otras. El problema que se comenta es seleccionado por el monitor debido a que él está al tanto de las soluciones y estrategias utilizadas por los grupos, de esta forma se alcanza una discusión profunda y con alta participación. Además, en esta plenaria se forma una segunda discusión donde el foco está puesto en las emociones experimentadas por los participantes durante la resolución de problemas, La segunda plenaria, que se realiza en los últimos treinta minutos de taller, pone el foco en que los participantes se hagan conscientes de lo que ocurrió en el taller, en cuanto a los siguientes puntos: metodología de trabajo, implementación y qué es un problema.

En SOCHIEM realizaremos una versión reducida del taller RPAcción, de 90 minutos, la cual busca proveer de una experiencia colectiva de resolución de problemas. Los asistentes al taller trabajaran en grupos de 3 personas resolviendo problemas durante 70 minutos, continuando luego con una

plenaria de aproximadamente 20 minutos, de grupo completo, enfocada principalmente en mostrar, compartir y discutir las estrategias utilizadas por los grupos.

Dinámica de trabajo durante la resolución de problemas

Para describir el trabajo en RP mostraremos a modo de ejemplo un problema utilizado en los talleres de RPAcción. El problema es tal que permite que todos los grupos o participantes puedan resolverlos, al menos la versión original o inicial del problema y una versión con extensiones.

Problema: los cuadrados

¿Cuántos cuadrados puede identificar en la Figura 1?

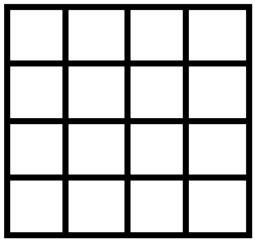


Figura 1. Cuadrado de 4x4

Dado que los participantes solo llaman al monitor cuando tienen dudas o ya han solucionado el problema, presentaremos ejemplos de cómo interacciona el monitor con los participantes en estas dos instancias.

Grupos tienen dudas:

- No entienden el problema: si un grupo no entiende de qué se trata el problema o no encuentra el desafío, se realizan preguntas sobre aspectos específicos del problema, por ejemplo; ¿me puedes indicar un cuadrado de 2x2?
- Si el grupo entendió el problema pero no logra avanzar: esto puede suceder porque cometieron un error, o interpretado mal algún aspecto del problema. Esencialmente hay que promover la discusión en el grupo y realizar preguntas que hagan evidente el error u orientar con pistas que les permitan a los participantes darse cuenta de cómo seguir, no imponiendo ninguna estrategia o método. Por ejemplo; ¿Cómo los contaron? ¿Cuántos cuadrado de 1x1 contabilizaron? ¿Y de 2x2?
- Simplificación del problema: Son preguntas que permiten simplificar el problema original, por ejemplo: Si el cuadrado fuera de 3x3 ¿Cuántos cuadrados podrías identificar?

Grupo terminó el problema:

En general cuando el grupo ha terminado, el integrante que mejor entiende el problema es quién querrá explicarlo. Para hacer enfático que el problema se considera resuelto cuando todos los integrantes del grupo son capaces de explicar cómo se resolvió o como lo resolvieron sus compañeros, el monitor evalúa rápidamente la situación a modo de no dejar que explique quién más interesado está en hacerlo sino por el contrario el participante que se ve aparentemente más desconectado o distraído del grupo. ¿Están seguros? ¿Por qué? ¿Me lo puedes explicar tú José?

Cuando el grupo llega a la solución correcta:

- Extensiones del problema: Son en general preguntas que permiten ampliar el problema original, haciéndolo más complejo. Este tipo de preguntas están enfocadas a grupos que encontraron la solución mayoritariamente sin gran dificultad, lo que permite identificar que están capacitados para continuar trabajando el problema ampliando la dificultad, como por ejemplo: ¿Si ahora la figura fuera de 5x5? ¿Y de 8x8? ¿Y si fuera un cuadrado de 100x100?.

Con cada pregunta se busca ver si se generó una estrategia de conteo de cuadrados, donde en el caso del cuadrado de 4x4 una forma contar los cuadrados de manera ordenada es diferenciarlos por sus dimensiones, donde los cuadrados de dimensión 4x4 son 1, de 3x3 son 4, de 2x2 son 9 y de 1x1 son 16. Así el total de cuadrados son 1+4+9+16, lo que también podríamos expresar como $1^2+2^2+3^2+4^2$, lo que es igual a 30. En el caso del cuadrado de 5x5 el número de cuadrados es equivalente a la suma de los cuadrados de 1 hasta 5, es decir, $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$, lo cual es igual 55.

- Otra posible Ampliación es preguntar por la cantidad de rectángulos que hay en la figura.
- La última alternativa, cuando el problema está totalmente resuelto o cuando el monitor lo considera adecuado es entregar un nuevo problema.

Cuando un grupo llegó a una solución incorrecta:

Si el problema fue resuelto de manera errada, el monitor realiza una pregunta para que el grupo, por sí mismo se de cuenta de su error. Por ejemplo: su respuesta es 10 porque no contabilizaron los cuadrados de 2x2. El monitor solicitaría que le muestren los cuadrados y preguntaría ¿podrían identificar algún cuadrado de 2x2? o mostraría en la figura un cuadrado de 2x2 preguntando ¿y esto es un cuadrado?

Referencias

Kaur, B. y Yeap, B. H. (2009). Mathematical Problem Solving in Singapore Schools. Mathematical Problem Solving. Yearbook, 2009, Association of Mathematics Educators, cap. 1. World Scientific Printers: Singapur.

Kilpatrick, J. Problem Solving in Mathematics. School Science and Mathematics, 78, 189-192, 1978.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2009). The Strands of Mathematical Proficiency. Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics (7th ed.) (pp. 115-155). Washington, DC: National Academy Press.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project. [Descargado de http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf el 26 de agosto de 2012]

NCTM. (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

Santos-Trigo, M. Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. ZDM,October 2007, Volume 39, Issue 5-6, pp 523-536.

Schoenfeld, Alan 1985, Mathematical Problem Solving Academic Press, New York.

EL ÁLGEBRA LINEAL EN EL CURRÍCULO Y EN LA FORMACIÓN INICIAL[i]

Vásquez, Patricia[a], Mena-Lorca, Arturo[b]

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
patricia.vasquez@pucv.cl, arturo.mena@pucv.cl

Resumen

Todo programa de formación inicial de profesores de matemática de enseñanza media tiene en su malla curricular cursos de algebra lineal. Los Estándares orientadores para carreras de pedagogía de educación en matemáticas mediachilenos incluyen ese dominio entre los contenidos exigidos, y en el currículo escolar explícitamente se hace referencia a linealidad, sistemas de ecuaciones lineales y otros conceptos de álgebra lineal. En este trabajo reportamos que no se produce la conexión que se supone que los profesores en ejercicio harían entre los elementos curriculares de álgebra lineal estudiados en su formación inicial y las materias que son parte de su desempeño; y que más bien aquellos regresan a sus prácticas de estudiantes de secundaria, solo que con una competencia operatoria mayor.

Palabras clave: *Álgebra lineal, Espacio de trabajo matemático, formación de profesores.*

ANTECEDENTES

Este trabajo es la continuación de una investigación que pretende identificar los elementos que permiten conectar los conocimientos logrados en la formación inicial de profesores con los exigidos en el currículo escolar. Montoya, Mena-Lorca y Mena-Lorca (2014), usando el marco teórico del *Espacio de Trabajo Matemático* (Kuzniak, 2011), han dado cuenta de cómo profesores chilenos, cuando tratan temas de los ejes curriculares de geometría y estadística,al recurrir al álgebra como herramienta para trabajar en ellos, no regresan a esos dominios, abortando la construcción de conocimiento geométricoo estadístico y equivocando así el rol del álgebra en la situación. Esa investigación clarifica lo que ocurre allí con lo que se suele llamar operatoria.

Para el caso de los sistemas de ecuaciones lineales y el álgebra lineal, resulta interesante estudiarlas operatoriasde resolución correspondientes desde una perspectiva histórica. En efecto, el álgebra lineal, quese inicia propiamente en el siglo XIX, surgió de un proceso de abstracción de esas operatorias. El concepto formal de espacio vectorial aparece en 1931, como un caso de *A*-módulo (Dorier, 2000); losmotivos que originaron su aparición fueron unificar, generalizar, simplificar y formalizar lo que hoy llamamos álgebra lineal (Cf. Robert, 1986a, 1986b).

La enseñanza del álgebra lineal ha sido estudiada por varios investigadores recurriendo a distintos marcos teóricos. (Vásquez, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2015) han mostradoque los profesores en ejercicio se dividen entre los que opinan que el álgebra lineal está presente en el currículo y los que piensan que no lo está. Esto nos llevó a precisar el tema y proponer, para los profesores, un camino de conexión de los elementos de álgebra lineal presentes en los currículos de instituciones formadoras y aquellos del currículo escolar, de manera que esa conexión pueda ocurrir en forma natural a partir de situaciones apropiadas.

Problemática del álgebra lineal

Es bien sabido que los conceptos abstractos de la teoría de espacios vectoriales –tales como subespacio, dependencia lineal, conjunto generador, suma de subespacios, aplicación lineal, ortogonalidad...– ofrecen mayor claridad sobre los procesos que se realizan comúnmente en álgebra

lineal, como por ejemplo, resolución de sistemas de ecuaciones. Sin embargo, para que esta mayor claridad se alcance, el estudiante de la asignatura debe poder conectar esos conceptos abstractos con los que previamente conoce. Por lo demás, es justamente esa conexión en su espacio de trabajo matemático personal –aquel ambiente que ese estudiante organiza para su propio estudio–, la que le permitirá desarrollar un espacio de trabajo matemático idóneo –es decir, aquel que utilizará para el aprendizaje de sus alumnos–. (Explicitamos estos conceptos más adelante).

En la práctica, por el contrario, y como suele ocurrir ante materias novedosas y poco accesibles, los estudiantes de álgebra lineal suelen encontrar el tema demasiado abstracto, formal y desconectado de los conceptos anteriormente estudiados, y procuran recurrir a un ambiente más familiar y entonces su estudio se torna puramente algorítmico (Robinet, 1986), lo que es una suerte de contradicción con el propósito de la materia.

Por lo demás, es habitual que el profesor de la asignatura la imparta de una manera puramente formal, hurgando escasamente en la visualización y no recurriendo, por ejemplo, a problemas de modelización –que le permitirían ofrecer un tratamiento más significativo y menos formal–. De tal manera, la materia permanece inaccesible y su transposición dista de tener los elementos que deberían incluirse en su constitución. Una hipótesis razonable es entonces que, cuando un alumno de pedagogía en Matemáticas retome el tema en su propia enseñanza, tenderá a repetir lo que aprendió cuando era estudiante secundario y no estará en condiciones de hacer las conexiones que la teoría de espacios vectoriales le ofrece.

Nos proponemos entonces dar ejemplos explícitos de las faltas de conexión antes señaladas y, además, mostrar cómo es que la multiplicidad de aspectos del álgebra lineal –algebraicos, geométricos, analíticos...– provee de medios para lograr la deseada interconexión.

Formación de un profesor de matemáticas en chile

Actualmente, en Chile, las universidades que forman profesores de educación media determinan el currículo ad hoc de manera independiente. En el caso de Matemáticas, la formación depende sensiblemente de la facultad (de educación, de Matemáticas, de ciencias) en la cual se radica el programa; así, la relación entre los contenidos disciplinares de Matemáticas y los de carácter pedagógico varía de manera ostensible. Por otra parte, el Ministerio de Educación del país, MINEDUC, establece programas uniformes para todas las materias de las enseñanzas primaria y secundaria de la nación.

Desde hace al menos una década los informes venían evidenciando que la formación de profesores no atendía a los requerimientos del estado en cuanto a las competencias implícitas necesarias para impartir el currículo del sistema educacional chileno, en particular, en el área de Matemáticas(CF. por ejemplo OCDE, 2004).

Debido a lo anterior, el Estado está llevando a cabo lo que se conoce como Programa Inicia. Este programa considera Estándares de desempeño para la formación de profesores de todas las disciplinas, una Prueba a los egresados para cautelar esos estándares, e instrumentos de apoyo a la formación de profesores.

El caso del álgebra lineal

En los Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Media (CPEIP, 2012), seexplicitan, justamente, estándares y también indicadoresad hoc.

El Estándar 3 de esa publicación indica que el egresado de Pedagogía en Matemáticas de Enseñanza Media debe ser capaz de conducir el concepto de función, sus propiedades y sus representaciones, en particular en el caso de las funciones lineales. El indicador 4 manifiesta que se

debe conocer las dificultades que presentan los estudiantes en lo referente a las relaciones de proporcionalidad y ofrece estrategias para superarlas, para lo cual presenta dos ejemplos: el primero muestra una relación que no es de proporcionalidad "directa" y el segundo da a conocer una propiedad que verifican las funciones lineales y que los alumnos asumen verdadera cualquiera sea la función. Por otra parte, observamos en los programas del MINEDUC (2012) que las actividades para demostrar que los alumnos comprenden las proporciones directas e inversas, se centran en representar las funciones en una tabla, en el registro gráfico y desde allí observar sus propiedades. Las situaciones presentadas se relacionan con diversas situaciones en el plano de la proporcional directa e inversa pero las actividades de tipo geométrico se sugieren en el primer año de enseñanza media.

Ahora bien, en los programas de estudio de álgebra lineal, las funciones lineales se presentan en $\mathbf{R}^n$, y en general no se trata de manera particular estas funciones en el caso unidimensional. En cuanto a los sistemas de ecuaciones lineales las actividades se centran en plantear esos sistemas y resolverlos sin usar matrices; solo en el caso de dos incógnitas las ecuaciones lineales se deben representar gráficamente

Marco teórico y el paso metodológico

El marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático, ETM, (Kutzniak 2011, Kuzniak, & Richard 2014) se concibe la reflexión matemática como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas de un dominio determinado en un ambiente organizado por y para el matemático (es decir, quien estudia matemáticas) mediante la articulación de dos planos: el epistemológico, vale decir, el de la disciplina, y el cognitivo. Cada plano está constituido por tres componentes o polos: el epistemológico por el representamen, el artefacto y el referencial; el plano cognitivo está conformado correspondientemente por la visualización, la construcción y la prueba.Tales componentes dan cuenta de los diversos aspectos del trabajo matemático (de acuerdo a distintos paradigmas, perceptibles en las diferentes etapas del aprendizaje de la matemática en el currículo): en el mismo orden de arriba, respectivamente los aspectos semiótico, instrumental (herramientas y objetos) y discursivos (más relacionados con la teoría). Para describir la articulación de los planos se considera un conjunto de génesis que permiten relacionarlos: semiótica, instrumental ydiscursiva.(Kutzniak 2011, Kuzniak, & Richard 2014).

Hay tres tipos de ETM, dependiendo de los diferentes roles: de *referencia,* definido según la relación con el saber, e idealmente sobre criterios matemáticos; idóneo, destinado a la enseñanza de este saber en una institución dada con una función definida, y personal, que configura un individuo, a partir de la formación que recibe y para su propia comprensión y aprendizaje, según se enfrenta el problema con los propios conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas. (Kuzniak, 2004)

En este caso nos interesa el ETM idóneo del profesor,el cual, dependiendo de su formación y de la institución que lo acoge realizará transposiciones de los contenidos que quiere enseñar, y en sus propuestas didáctica propenderá a que sus alumnos activen las distintas génesis y realicen las respectivas circulaciones (Montoya et al., 2014).

Para realizar esta investigación, hemos procurado "triangular" tres instituciones que contribuyen a configurar el ETM idóneo de un profesor de matemáticas de enseñanza media en Chile: en primer lugar, el currículo nacional para estudiantes de enseñanza media actualmente en vigencia (MINEDUC, 2012); en segundo término, los estándares definidos por el MINEDUC para ese currículo; y, en tercer lugar, los programas de las asignaturas de álgebra lineal de una institución formadora de profesores del país.

En relación al aspecto metodológico en esta parte de la investigación, en un universo de más de cuarenta profesores en ejercicio provenientes de distintas universidades, probamos diferentes propuestas para lograr la conexión entre el algebra lineal y los sistema lineales. Los instrumentos

fueron aplicados en alumnos en formación, algunos de los cuales que ya cursaron la asignatura de algebra lineal y otros que no lo han hecho.

El tema tratado fue la relación entre conceptos elementales de álgebra lineal y resolución de sistemas de ecuaciones de tres ecuaciones con dos incógnitas. Esquemáticamente, la experiencia procedió de la siguiente manera, de acuerdo a lo solicitado en cada una de sus partes:

- representar geométricamente las 7 configuraciones que se pueden dar al tener tres rectas en el plano euclidiano;
- explicar la solución obtenida en un sistema explícito que corresponde a tres ecuaciones de rectas no paralelas y se pidió explicación respecto de la solución del sistema;
- dar un ejemplo algebraico de cada una de las siete configuraciones de la primera pregunta;

construir una función que relacione el sistema de ecuaciones con el número de soluciones.

Las propuestas recurren al ETM personal de los profesores y gatillan fuertemente las génesis semiótica, instrumental y discursiva mediante tareas específicas en relación a sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas. De tal manera, se producen circulaciones entre los polos de los planos del ETM, las cuales garantizan que se obtienen las conexiones que se buscan.

CONCLUSIONES

De los resultados se visualiza que a un profesor en ejercicio le resultará muy difícil configurar un idóneo que recurra al referencial teórico proveniente de la formación inicial en que recibió formación en algebra lineal. La génesis discursiva no se activa en forma separada, a pesar de tener las génesis instrumental y semiótica desarrolladas satisfactoriamente en el plano de descubrimiento, lo que imposibilita a los nuevos profesores apoyarse en su formación para realizar mejores propuestas didácticas en relación a los sistemas.

Pareciera que en este caso es especialmente difícil lograr activar la génesis discursiva, pero también se plantea la pregunta: Cuando hay debilidades en el idóneo ¿acaso se puede interpretar bien las soluciones en un sistema de ecuaciones cualquiera general en el plano?

La anterior pregunta se conecta con otras investigaciones, los profesores propenden a fomentar principalmente la génesis instrumental y las circulaciones se remiten al plano de descubrimiento (Montoya, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2014); ello se debe a que, en términos teóricos, el profesor no dispone de un referencial que permita que su perspectiva no se remita a la sola instrumentalización. En este caso, la situación está además en consonancia con lo que plantea Dorier (2000) en cuanto a que es necesario transitar por lo algebraico, lo geométrico y lo analítico, entendiendo que lo analítico proviene de la concepción de espacio vectorial en su plenitud.

Referencias

CPEIP (2012). Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media. Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. Recuperado el 07 de junio de 2015 de http://www.cpeip.cl/usuarios/ cpeip/File/ librosestandaresvale/ libromediafinal.pdf

Dorier, J.- L. (2000). Recherche en histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théorique sur leurs interactions. Les cahiers du Laboratoire Leibniz, N° 12. Grenoble: Laboratoire Leibniz-IMAG.

Kuzniak, A. (2004). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Paris: IREM de Paris 7.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 17(4,I), 181-197.

MINEDUC (2012). Curriculum Nacional. Recuperado el 07 de junio de 2015 de http://www.curriculumnacional.cl/

Montoya, E., Mena-Lorca, A., y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 17(4-I), 181-197.

OCDE (2014). Revisión de políticas educacionales. Chile. París: Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos.

Robert, A. (1986a). Didactique de l'enseignement supérieur : une démarche en première année de DEUG, Actes de la IVème École d'Été de Didactique des Mathématiques.

Robert, A. (1986b). Une démarche dans l'enseignement supérieur. Cahier de didactique des mathématiques 28, IREM de Paris VII.

Robinet, J. (1986) : Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linéaire. Cahier de Didactique des Mathématiques 29, IREM de Paris VII.

Vásquez, P., Mena-Lorca, A. & Mena-Lorca, J. (2015). Construcción de un espacio de trabajo matemático idóneo en álgebra lineal: episteme versus currículo. XVIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa

[i] Este trabajo ha sido financiado parcialmente a través del Proyecto de investigación del Fondo Nacional Desarrollo Científico y Tecnológico FONDECYT 1151376, Chile.

SITUACIONES A-DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE ESTRATEGIAS DE CONTEO UTILIZANDO LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO MEDIO

Parraguez, M.[a], Rojas J.[b],Vásquez, P.[c]

[a,b,c]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

marcela.parraguez@pucv.cl[a], jonathan.rojas@pucv.cl[b], patricia.vasquez@pucv.cl[c]

Resumen

Presentamos un análisis de actividades, desde una postura didáctica, a través de una Ingeniería Didáctica que considera la Teoría de las Situaciones Didácticas para la creación y experimentación de situaciones a-didácticas, utilizando la resolución de problemas (RP) como medio. Hasta el momento el análisis a priori y a posteriori de las actividades aplicadas ha permitido establecer conclusiones parciales en relación a que la interacción con el medio –RP– conduce a que los estudiantes de segundo ciclo básico (quinto a sexto básico) construyan conocimientos intuitivos relativos a estrategias de conteo.

Palabras clave: *Estrategias de Conteo, Situación a-didáctica, Teoría de Situaciones Didácticas, Resolución de problemas.*

INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El uso de la resolución de problemas (RP) para la enseñanza de las matemáticas es un tema de investigación en el campo de la Educación Matemática. Muchos trabajos presentan experiencias que tratan de demostrar las bondades de ese uso, pero algunas de ellas carecen de una orientación teórica clara que posibilite analizar lo que realmente sucede cuando se utiliza la RP en la enseñanza aprendizaje de tópicos matemáticos, y qué aspectos de dichas experiencias pueden ser reproducidos.

Para identificar el papel de la RP en el aprendizaje de los alumnos utilizaremos como marco teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas, para describir de manera precisa el rol del profesor y predecir el efecto que tendrán las actividades en el aprendizaje, de tal manera de atender a la pregunta de investigación:

¿En qué medida la implementación de la RP presentada a través de situaciones a-didácticas favorece que los estudiantes de segundo ciclo básico construyan estrategias de conteo?

En nuestro estudio, entendemos por estrategia al *conjunto* de procedimientos intencionales, deliberados, propositivos y cuya ejecución requiere control (regulación y evaluación) sistemático y continuado durante el proceso orientados al logro de los objetivos previstos (Escoriza, 2003). Asumimos esta postura por varias razones, una de ellas es por la distinción que el autor hace de la ejecución de sus acciones que garantiza el resultado (las algorítmicas) y las que no lo garantizan (las heurísticas). Además, considera que son conocimiento procedural ya que indican cómo realizar una acción, son deliberados, controlados y orientados hacia un objetivo. Por otra parte, a diferencia de otros autores, (Escoriza, 2003) reconoce características esenciales, las cuales posibilitan el planteamiento de una definición de estrategia más completa e integral.

Para esto, se diseñaron situaciones a-didácticas que involucran estrategias de conteo por parte de los estudiantes de segundo ciclo básico, situaciones que utilizan la RP como un medio con el que los alumnos interactúan para construir su propio conocimiento.

Marco teórico

La presentación que hacemos a continuación de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) se puede encontrar con más detalle en Brousseau (1998), sin embargo a continuación precisamos los conceptos a considerar en nuestro estudio, para dar cuenta de la pregunta de investigación planteada.

Situación didáctica y situación a-didáctica

Uno de los conceptos fundamentales la TSD es el de situación a-didáctica, que es aquella situación que produce un aprendizaje por adaptación. La situación a-didáctica sólo puede comprenderse con relación a la situación didáctica, que es una situación normal de clase.

Una situación es didáctica cuando un individuo (profesor) tiene la intención de enseñar a otro individuo (alumno) un saber matemático dado. Una situación es a-didáctica cuando se da interacción entre un sujeto y un medio para resolver un problema. Como el medio es impersonal, no tiene ninguna intención didáctica: no desea enseñarle nada al alumno. Por eso este tipo de situación recibe el nombre de a-didáctica (la figura 1 se ilustra esta interacción).

En esta figura 1también tenemos la situación global, que es la situación didáctica, pues comprende las relaciones entre el profesor, el alumno y el saber. El profesor desea enseñar el saber al alumno, no comunicándoselo directamente, sino planteándole una situación a-didáctica (en el interior de la situación didáctica), planeada para producir un aprendizaje por adaptación. Con este fin, el profesor prepara cuidadosamente un medio con el cual el alumno podrá interactuar, y un problema que produzca en el alumno una intención y desencadene unas acciones sobre el medio

.

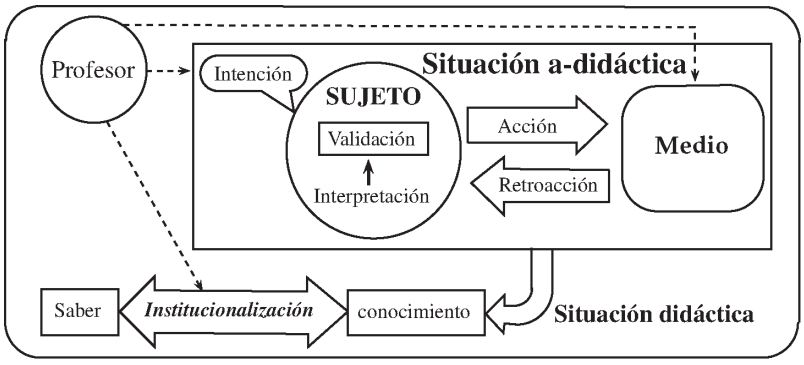


Figura 1. Relación entre situación didáctica y situación a-didáctica.

El producto de esa situación a-didáctica es un conocimiento, que lo interpretamos como una estrategia que permite resolver el problema. Por lo tanto, una vez finalizada la situación a-didáctica, el profesor debe explicitar las relaciones entre el conocimiento construido por el alumno gracias a la situación a-didáctica y el saber que desea enseñar. A este proceso se le llama institucionalización.

Resolución de problemas como medio

En nuestra investigación se utiliza la RP como medio, con el cual el alumno interactúa para lograr un aprendizaje por adaptación. Consideramos que la RP permite la realización de tres tipos de acciones, las que se definen a continuación.

Tipo de acción preguntar en forma individual: haciendo uso de su lenguaje verbal el estudiante pregunta al profesor (monitor), alguna cuestión que se relacione con el problema planteado. La retroacción correspondiente del monitor será responder a su vez con una pregunta, y se aleja del grupo.

Tipo de acción preguntar en forma grupal: una vez que el grupo ha terminado de resolver el problema, el profesor (monitor) se asegura con una pregunta a cualquier integrante del grupo, que todos han entendido la estrategia ocupada que les permitió obtener la resolución del problema.

Tipo de acción preguntas para hacer extensiones del problema: cuando un grupo ha terminado antes del resto, con una pregunta el monitor (retroacción) se asegura que el grupo realice una extensión del problema.

MÉTODO

Este estudio se desarrolla en etapas, con base en una ingeniería didáctica (Artigue, 1998; Brousseau, 2006), realizando los análisis a priori y a posteriori de las actividades que conforman los instrumentos de aplicación.

Instrumentos

Se diseñaron cuatro instrumentos de aplicación los cuales se etiquetaron por cuadernillo 1, cuadernillo 2, cuadernillo 3 y cuadernillo 4 (C1, C2, C3 y C4 respectivamente). Cada uno de estos, se conformaron por tres problemas de conteo, donde el primero de ellos se enfoca al conteo a partir de una figura geométrica dada, un segundo problema con base en regularidades numéricas y finalmente un tercer tipo de problema presentado en lenguaje natural con el fin de modelar la situación de conteo planteada. Se realizó un análisis a priori de C1, C2, C3 y C4. En esta parte, se precisan las estrategias con las cuales se puede dar respuesta a cada uno de los problemas que componen los instrumentos, donde muchas de ellas se expresan a través de escritos con características geométricas, figurales, tablas, diagramas, entre otras.

Estudiantes participantes del estudio

Se efectuó la aplicación de los instrumentos a 40 alumnos (20 de quinto y sexto básico respectivamente) de entre 10 y 12 años pertenecientes a dos establecimientos escolares (uno del sector de educación municipal y el otro del sector de particular subvencionado). Por una parte, los alumnos respondieron los cuadernillos (en lápiz y papel) en grupos constituidos por tres estudiantes, donde cada uno de ellos contaba con un cuadernillo propio para plantear sus estrategias, para luego comunicarlas a su grupo de trabajo. Por otra parte, la aplicación no se realizó con la presencia del profesor titular de la clase, sino que con profesores monitores. Dos monitores (investigadores) dirigieron las actividades, asumiendo el rol de profesor ante cada uno de los grupos. Todas las actividades fueron filmadas y posteriormente transcritas.

Análisis de los datos

Se analizaron los datos con base en las dos primeras fases de la TSD (La fase de Acción y Formulación) dando cuenta la primera fase de cómo los alumnos se interiorizan con la situación

planteada, mientras que en la segunda fase, otorgan sus argumentos para convencer al resto de los alumnos del grupo, que su estrategia planteada es válida o bien, complementa las estrategias presentadas por sus pares.

RESULTADOS

A modo de ejemplo presentamos algunas estrategias que los estudiantes mostraron al responder el problema N°2 del cuadernillo 1, el cual presentamos a continuación en la figura 2.

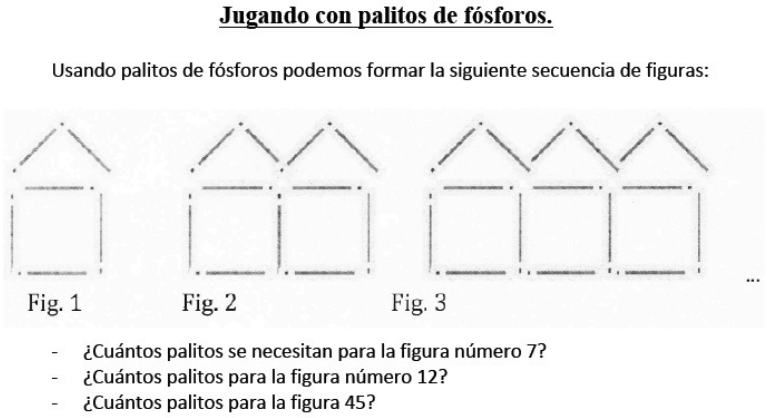


Figura 2. Problema N°2 del C1.

Las estrategias que mostraron los alumnos fueron diversas, entre ellas destacamos al grupo Nº8 de sexto básico que para *contar los palitos* dibujaron la secuencia como se muestra en la figura 3.

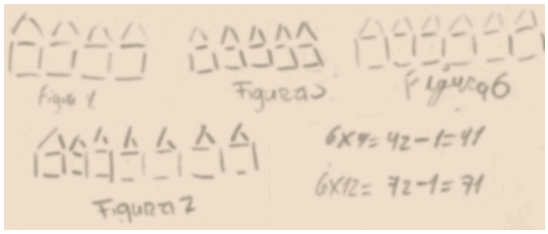


Figura 3. Secuencia de figuras geométricas.

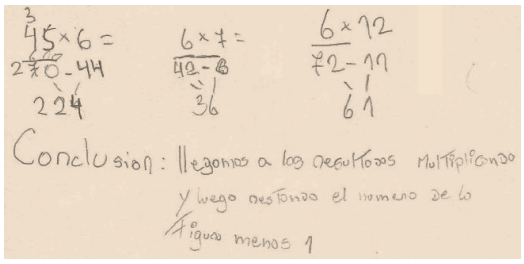


Figura 4. Regularidad numérica.

Otro grupo (N°3 de sexto básico) sin embargo, elaboró una regularidad que les permitió determinar con éxito la cantidad de palitos solicitados (Figura 4).

A MODO DE CONCLUSIÓN

En particular, el breve análisis mostrado en el apartado anterior, evidencia que algunos alumnos no se desprenden de lo figural para responder, mientras que otros plantean una regularidad o modelo algebraico que les permita dar respuesta a todas las preguntas del problema. De esta forma, se están construyendo evidencias, que sustentan que la RP otorga la posibilidad a los alumnos, de establecer distintas estrategias a un problema dado que le permiten por un lado, responder las preguntas asociadas al problema en sí, y por otro, construir el conocimiento matemático que subyace al problema.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido subvencionado por el proyecto FONDEF ID 14I10338. Los autores manifestamos además nuestros agradecimientos por la buena voluntad, la franqueza y el buen humor de los participantes.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática. Colombia:Una empresa docente.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, eds.). Grenoble: La PenséeSauvage.

Brousseau, G. (2006). Epistemologia e formazionedegliinsegnanti.inBrousseau Guy, Ingegneriadidatticaedepistemologiadellamatematica. Bologne: PitagoraEditrice.

Escoriza, J. (2003). Evaluación del conocimiento de las estrategias de comprensión lectora. España: EdicionsUniversitat.

ANÁLISIS DE TRANSPOSICIÓN SOBRE LOS NÚMEROS RACIONALES CON EXPANSIÓN DECIMAL PERIÓDICA Y SEMIPERIÓDICA

Quezada N[a]., Salas Cb., Villegas C[c].

IMA, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso;
nicolas.quezada.m@gmail.com, salascamila.93@gmail.com, camila_villegas91@hotmail.com

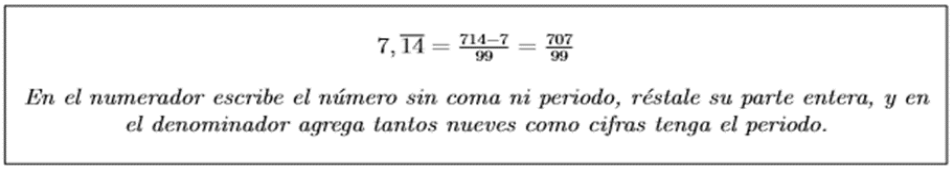
Resumen

Según el curriculum nacional, un alumno de primer año medio debe ser capaz de "justificar los pasos de un procedimiento para expresar como cuociente de enteros un número decimal periódico o semiperiódico". Para esto, una de las herramientas de autoaprendizaje son los textos escolares entregados por el ministerio, sin embargo, en alguno de éstos, se trata este contenido a través de un algoritmo inmediato, sin justificar previamente de donde proviene o el porqué de su naturaleza. Además, en ese contexto, existe una ambigüedad al llamarlos números decimales periódicos, otorgándoles una característica que no poseen. Es por esto que planteamos dos análisis de textos desde la Teoría Antropológica de lo didáctico, donde evaluamos la transposición de la praxeología presentada en ellos, y una posterior adecuación de la misma, donde el alumno será capaz de explicarse intuitivamente de donde proviene dicho algoritmo.

Palabras clave: *expansión decimal periódica y semiperiódica, transposición, praxeología, algoritmo.*

PRESENTACIÓN DE PROBLEMÁTICA

La problemática que aborda esta investigación es la utilización de un algoritmo, para representar los números con expansión decimal periódica y semiperiódica (EDP y EDS) en fracción, sin una previa justificación o explicación del mismo. Dentro del currículum nacional, este tema se encuentra en primero medio, donde se espera que el alumno logre "justificar matemáticamente que los decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales" (MINEDUC, 2012). Sin embargo, algunos textos escolares limitan este contenido a la aplicación de una fórmula, lo que se evidencia en la Figura 1.



$$7,\overline{14} = \frac{714-7}{99} = \frac{707}{99}$$

En el numerador escribe el número sin coma ni periodo, réstale su parte entera, y en el denominador agrega tantos nueves como cifras tenga el periodo.

Figura 1: Algoritmo para representar en fracción números con expansión decimal periódica

Por otro lado, en la concepción de los números con EDP) y EDS, existen diversos obstáculos epistemológicos que van desde la forma en que se "nombran" hasta la interpretación de su orden, uno de los principales, es el hecho de generalizar el término "decimal" a todo número que tiene una

coma o punto en su escritura, puesto que un número sea "decimal" significa que tiene una representación fraccionaria donde su denominador es una potencia de diez.

Pese a que estos son abusos de lenguaje que surgen en el aula, y que tanto los textos escolares y los planes y programas (propuestos por el MINEDUC) abalan, Socas y Centeno (1997) concuerdan en que son necesarios dentro de la enseñanza escolar, ya que nombrar cada objeto por su definición alargaría demasiado las frases; sin embargo, sólo podrán ser usados cuando el error sea conocido y consciente por el docente y los alumnos. La pregunta de investigación que deriva es "¿qué tan adecuada es la transposición de la praxeología asociada a representar a los números con EDP y EDS en fracción en los textos escolares analizados? ¿Qué modificaciones desde la TAD se pueden aplicar?".

Marco teórico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), creada por el investigador, didacta y matemático francés Yves Chevallard, en 1997, plantea que "toda actividad humana regularmente realizada puede describirse como un modelo único, que se resume aquí con la palabra praxeología" (Chevallard, 1999). Para esta investigación se aborda: la Organización Matemática (OM) de los números con expansión decimal periódico y semiperiódico. La estructura de una praxeología matemática puede ser simbolizada a partir de los elementos que la conforman, como: $[T/\bar{o}/\theta/\Theta]$. Cada uno de estos elementos representa: T las tareas; $\bar{o}$ las técnicas de T; θ la tecnología de $\bar{o}$ y Θ la teoría de θ. Definidas, según orden jerárquico:

En primer lugar se encuentran los tipos de tareas T; que tienen asociados tareas específicas t_n, donde también tendremos los géneros de tareas. En segundo lugar, las técnicas de tareas, $\bar{o}$, representan las formas o maneras en la que se realizan las tareas $t \in T$, las cuales no necesariamente serán de una naturaleza única, sin embargo en matemáticas "parece existir una tendencia a la algoritmización" (Chevallard, 1999). En tercer lugar, se encuentra la tecnología, θ, que constituye al discurso racional -o el *logos*- en el cual se explicita la técnica , $\bar{o}$, y cuya función es justificar, explicar y producir las técnicas asociadas a las tareas T. Por último, las teorías Θ son aquellas afirmaciones o axiomas (con previa justificación) que constituyen la base de la tecnología, asignándole veracidad a su justificación; por lo cual es un elemento que se encuentra más cerca del llamado *saber sabio*.

Finalmente, esta macro estructura está constituida por dos bloques inseparables: el primero denominado bloque práctico-técnico, $[T/\bar{o}]$, también identificado como *saber-hacer*, que involucra las técnicas asociadas a un tipo de tareas; y el bloque tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$, identificado como *saber*, el cual involucra la teoría y tecnologías asociadas a la praxeología en cuestión.

Para la presente investigación, la tarea constará de "representar números con expansión decimal periódica y semiperiódica en fracción", la cual se desarrollará mediante la técnica del algoritmo presentado anteriormente.

La utilización de esta teoría, se debe a que uno de los fenómenos didácticos que estudia es la llamada "transposición didáctica", la cual se define como todas las modificaciones adaptativas que se le realizan a la praxeología para ser transferida desde una institución a otra, de la mejor manera

posible. Este resulta ser el objeto mismo de investigación, ya que es en la transposición (de la praxeología asociada a la tarea) del *saber sabio* al *saber a enseñar* donde se genera la debilitación del bloque tecnológico-teórico. La praxeología asociada corresponde a ser puntual, debido a que deriva de una única tarea.

Análisis de la transposición

Saber sabio

Representación en fracción de números con EDP

Sea $p \in \mathbb{R}$ un número con desarrollo decimal infinito y $z, \bar{d}$ su escritura con coma donde $z \in \mathbb{Z}$ y $d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, entonces:

$$p = z + \frac{d}{10} + \frac{d}{10^2} + \cdots = z + \frac{d}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = z + \frac{d}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9z+d}{9}$$

En general, se puede demostrar usando inducción que si $p \in \mathbb{R}$ tiene expansión decimal periódica con escritura con coma $z, \overline{d_1 \ldots d_n}$ entonces:

$$p = \frac{(10^n - 1)z + 10^{n-1}d_1 + \cdots + 10d_{n-1} + d_n}{10^n - 1} = \frac{10^n z + 10^{n-1}d_1 + \cdots + 10d_{n-1} + d_n - z}{10^n - 1}$$

La segunda igualdad viene a justificar el algoritmo enseñado en la escolaridad, el cual tomará la función de técnica ō para la resolución de la tarea.

Representación en fracción de números con EDS

Sea $q \in \mathbb{R}$ un número con desarrollo decimal infinito y $z, d_1 d_2 \overline{d_3 d_4}$ su escritura con coma donde $z \in \mathbb{Z}$ y $d_1, d_2, d_3, d_4 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
q &= z + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \frac{d_3}{10^5} + \frac{d_4}{10^6} + \cdots \\
100q &= 100z + 10d_1 + d_2 + \frac{d_3}{10} + \frac{d_4}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots \\
10000q &= 10000z + 1000d_1 + 100d_2 + 10d_3 + d_4 + \frac{d_3}{10} + \frac{d_4}{10^2} + \cdots \\
9900q &= 9900z + 990d_1 + 99d_2 + 10d_3 + d_4
\end{aligned}$$

$$\therefore q = \frac{9900z + 990d_1 + 99d_2 + 10d_3 + d_4}{9900}$$

En general, se puede demostrar usando inducción que si $q \in \mathbb{R}$ tiene expansión decimal semiperiódica con escritura con coma $z, d_1 \ldots d_i \overline{d_{i+1} \ldots d_n}$ entonces:

$$\begin{aligned}
q &= \frac{\left(10^n - 10^i\right)z + (10^{n-1} - 10^{i-1})\,d_1 + \cdots + (10^{n-i} - 1)d_i + 10^{n-i-1}d_{i+1} + \cdots + 10d_{n-1} + d_n}{10^n - 10^i} \\
&= \frac{10^n z + 10^{n-1}d_1 + \cdots + 10d_{n-1} + d_n - (10^i z + 10^{i-1}d_1 + \cdots + d_i)}{10^n - 10^i}
\end{aligned}$$

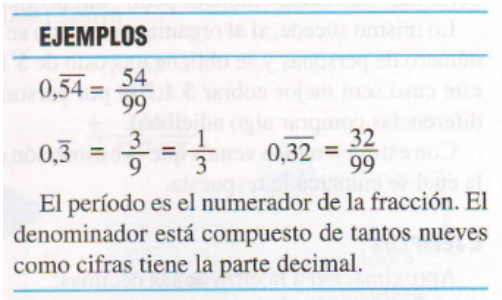
Análogamente, reordenando la primera igualdad se obtiene el algoritmo enseñado en la escolaridad, el cual en este caso, resulta de la "idea intuitiva" de la demostración de la suma geométrica. Esto vendría a ser la tecnología θ de la praxeología que está justificada por la serie geométrica.

Saber a enseñar

En este apartado se analizan dos textos escolares de los años 1997 y 2007 de primero medio y octavo básico respectivamente, los cuales son los representantes elegidos para el saber a enseñar. Como observación general, del primer y del segundo texto analizado, se llaman a los números con EDP y EDS "números decimales", por otro lado, la tarea T es presentada claramente y no sufre de mayores adaptaciones, se definen previamente los elementos que se utilizarán en el desarrollo de toda la praxeología.

Por otro lado, dos elementos esenciales de la Organización, como la técnica y el bloque tecnológico-teórico, si sufren de diversas modificaciones en el proceso de *transposición*. Las modificaciones, son distintas para cada texto, ya que en el primero la tecnología se encuentra explícita para el alumno y cumple con su función de justificar y producir la técnica. Mientras que en el segundo texto, la técnica tiene un papel fundamental dentro de la praxeología, puesto que son los ejemplos de la aplicación de la técnica las que justifican el uso del algoritmo Todo lo anterior, induce a que la técnica adquiera un carácter *autotecnológico*.

En ambos textos, la técnica presentada es de naturaleza algorítmica, y sólo en el primero se observa una tecnología explícita, derivada del razonamiento de la suma geométrica presentada como parte del *saber sabio*. Luego, en este mismo texto, la técnica no tiene un alcance satisfactorio, ya que no es válida para casos donde la parte entera sea igual o mayor a uno (Figura 2).



EJEMPLOS

$0,\overline{54} = \frac{54}{99}$

$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $\quad 0,\overline{32} = \frac{32}{99}$

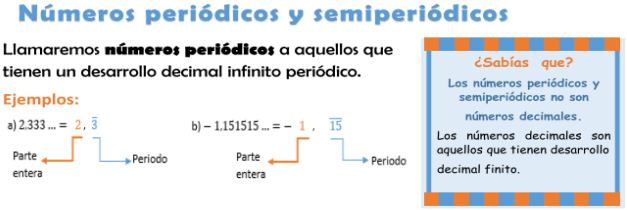
El período es el numerador de la fracción. El denominador está compuesto de tantos nueves como cifras tiene la parte decimal.

Figura 2: Extracto Texto 1 (1999)

Además de la ausencia de una tecnología explícita en el segundo texto, todo lo mencionado concluye en una debilitación del bloque tecnológico-teórico [θ, Θ] en la transposición, esto también se debe a la inhabilidad de una generalización matemática de la técnica en la escolaridad, por la complejidad de escritura que posee.

Adecuación de propuesta

Tomando en consideración las conclusiones que derivan de la transposición, se presenta una mejora a la propuesta de los textos escolares analizados. La tarea se presenta de forma explícita, definiendo todos sus componentes y evitando el error de lenguaje a través de un cuadro que informa que los números periódicos y semiperiódicos no son números decimales. (Figura 3)



Números periódicos y semiperiódicos

Llamaremos **números periódicos** a aquellos que tienen un desarrollo decimal infinito periódico.

Ejemplos:

a) $2.333\ldots = 2,\overline{3}$ (Parte entera; Periodo)

b) $-1.151515\ldots = -1,\overline{15}$ (Parte entera; Periodo)

¿Sabías que?

Los números periódicos y semiperiódicos no son números decimales.

Los números decimales son aquellos que tienen desarrollo decimal finito.

Figura 3: Extracto de propuesta (2015)

Luego se presenta, en dos casos apartados, la tecnología que deriva del razonamiento de la suma geométrica, que no sólo a través de su uso reiterativo justifica la técnica, sino además se convierte en un método fiable de realizar la tarea; lo que fortalece el bloque tecnológico-teórico. (Figura 4) Por último, con el objetivo de facilitar el proceso anteriormente mencionado, se presenta la técnica en lenguaje natural y a través de ejemplos. (Figura 4)



Figura 4: Extracto de propuesta (2015)

CONCLUSIONES

Si bien una de las críticas realizadas a los textos fue la falta de argumentación del algoritmo presentado, ésta no puede ser abordada completamente, ya que la generalización del algoritmo para cualquier número periódico o semiperiódico, carece de sentido al ser presentada en I_2, debido a la complejidad de escritura que posee. Por esto, creemos adecuado que sólo sea presentado y corroborado a través de ejemplos y ejercicios.

En consecuencia, en la propuesta, se presentaron dos técnicas distintas, donde una cumple la función de "producir" a la otra, por lo que, la primera justifica el algoritmo con el uso consciente y reiterativo de ésta, entregándoles una manera más lógica de realizar ésta tarea y luego presentando el algoritmo sólo como una manera de facilitar el proceso y quitándole su exclusividad.

Referencias

Centeno, J. (1997). Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué? Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológico. (Ricardo Barroso, trad.). Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266.

Guíñez Abarzúa, F. (2007), Matemática aplicada Primero medio: Texto para el estudiante. Santiago de Chile: Editorial Zig- Zag.

Riera Lira, G. (1997), Matemática Octavo básico: Texto para el estudiante. Santiago de Chile: Editorial Mare Nostrum.

FENÓMENOS DIDÁCTICOS EN EL ESTUDIO DE LAS FRACCIONES EN SU TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA[i]

Gaete-Olea, T[a]., Vidal- Cortés, R.[b];

Universidad Alberto Hurtado;
correo electrónico: tanigae@gmail.com, rvidal@uahurtado.cl

Resumen

Esta comunicación es un avance de tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática, centrado en el estudio del fenómeno de desarticulación en la enseñanza de las fracciones en su paso de la Aritmética al Álgebra. Se ha detectado que tanto profesores como alumnos no logran evidenciar la generalidad de los tratamientos aritméticos por medio de procesos algebraicos. Por esto resulta interesante proyectar como foco de investigación la relación entre dos importantes fuentes de comunicación con intencionalidad de enseñanza: los profesores y los textos escolares, con el propósito de analizar como el discurso presente en ellos, en relación a la simplificación y adición de fracciones, puede evidenciar la ausencia de articulación entre estos dos ámbitos. Esta ruptura se corrobora mediante un cuestionario que fue aplicado a profesores activos del sistema y un análisis de libros de texto para identificar cómo desde allí se pueden presentar o no el mismo fenómeno.

Palabras clave: *fracciones, libros de texto, transición de la aritmética al álgebra, transposición didáctica.*

DE LO ARITMÉTICO A LO ALGEBRAICO

En el quehacer docente, resulta ser un gran salto para los alumnos el paso de la Aritmética al Álgebra, sin lograr una conexión fluida entre ambas subáreas, ya que el tratamiento numérico no resulta fácil y eso se complejiza cuando lo desarrollado en este ámbito de la matemática deben asociarlo a una expresión algebraica que se transforma en algo abstracto para ellos. Esto es respaldado por lo que se menciona en Vega (2012), al referirse a Hiebert y Lefevre (1986), quienes consideran que en el trabajo con expresiones algebraicas es frecuente que los alumnos actúen "sin pensar", transformando las expresiones por medio de técnicas aprendidas e ignorando sus significados, por lo que resulta fundamental la conjugación flexible del conocimiento conceptual y procedimental.

Por otra parte, el National Council of Teachers of Mathematics (1989) recomendó la introducción del álgebra en los últimos cursos de la escuela primaria; así mismo, en sus Principios y Estándares desde el año 2000 recomienda la introducción del razonamiento algebraico elemental desde los primeros niveles de la escuela primaria. Sin embargo, esto en la realidad nacional no se refleja del todo, ya que recién en 6° básico se introduce el Álgebra, representando generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando expresiones con letras y ecuaciones, tal como lo plantea el Ministerio de Educación en Chile. Se suma a esto, la necesidad de la enseñanza temprana del Álgebra, la importancia de que los profesores posean conocimiento disciplinar-didáctico acorde a las exigencias del nuevo milenio. En base a esto último, se puede hacer referencia a lo que se plantea en el artículo de Mata (2009), en relación a Pochulu (2004), quien expresa que las equivocaciones cometidas por los alumnos tienen su origen en la falta de tiempo para la apropiación

de los contenidos que se tratan en el nivel medio y en las estrategias de enseñanza utilizadas por los profesores. Lamentablemente, en el quehacer docente se suele enfrentar el error que comete el alumno con lo que supuestamente debe realizar, sin explicar su fundamento matemático, es decir, no se aprovecha la instancia para que en base al error se pueda construir aprendizaje en el alumno.

El estudio de las fracciones en el aula

Al abordar el contenido de fracciones en el aula, se observa que tiende a ser uno de los que produce mayor conflicto y rechazo entre los estudiantes, ya que comenten errores que no son reconocidos fácilmente por ellos y que lamentablemente persisten en el tiempo, el profesor trata de remediarlos, pero a través de una sobrecarga de mecanización sin algebrización. Salazar (2011)[23] se refiere a Escolano y Gairín (2005), quienes mencionan que en un estudio realizado con alumnos españoles de sexto curso de Educación Primaria (12 años), se refleja que cada cuatro estudiantes tres de ellos no comprenden el concepto de fracción y sus operaciones. Esto resulta preocupante, ya que la fracción resulta ser un objeto matemático que está asociado a distintos significados.
Por otra parte, en esa misma conferencia, se menciona a Ríos (2007), quien observó, producto de visitas a escuelas, revisiones de textos escolares y observaciones a profesores, que en las aulas escolares de enseñanza básica y secundaria en Venezuela, predomina en la enseñanza de las fracciones la interpretación parte-todo. Esto no es ajeno al quehacer nacional, pues el estudio de las fracciones numéricas tiende a realizarse de forma pictórica en sus primeros años de enseñanza, por lo que prima este mismo significado, sin embargo, esto implica una dificultad en potencia que el alumno va a enfrentar al momento de estudiarlas en el ámbito algebraico, ya que en esta ocasión se debe hacer un estudio más abstracto, con el supuesto que el alumno ha tenido un alto grado de comprensión de las fracciones no sólo como parte- todo, sino como cociente, razón y operador. Muchas veces esta situación no es remediada por los referentes más directos para los alumnos: profesores, plataformas educativas y/o textos escolares, lo que los perjudica en cuanto a su aprendizaje matemático.

La importancia del diseño de los textos escolares

Tal como plantean algunos autores, el uso de libros de texto con el tiempo pueden ser generadores potenciales de inconsistencias, ambigüedades, omisiones y otros conflictos a la hora de presentar los contenidos matemáticos (Gómez, 2009; Kajander y Lovric, 2009).

El Ministerio de Educación de Chile, a través del sitio web: www.textosescolares.cl, plantea que durante el proceso de adquisición de textos escolares se diseña un sistema de operación compuesto por distintos procesos intercorrelacionados, donde uno de los más importantes resulta ser el proceso de Evaluación, cuyo objetivo principal es asegurar que los textos adjudicados cumplan con la calidad y los requisitos técnico-pedagógicos definidos por el Ministerio. A pesar de lo anterior, tal como lo plantea Vidal (2009), el libro de texto como agente participante de la transposición didáctica debe procurar la vigilancia epistemológica de los contenidos, estando esto ausente en lo puntos de calidad mencionados por el ministerio y en muchos de los planes de estudio de carreras de pedagogía impartidas en Chile.

UN PROBLEMA: LA DEBILIDAD DEL ESTUDIO DE LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS

El estudio de los números racionales, especialmente de forma fraccionaria, suele ser foco de dificultades para los alumnos que ya empiezan a familiarizarse con el concepto en 4° básico, al

[23] XIII Conferencia Latinoamericana de Educación Matemática. Recife.

comparar y ubicar fracciones en la recta numérica. Luego, en los posteriores niveles de enseñanza básica (5° y 6° específicamente) y en 1° medio se trabaja el concepto de fracción mediante distintas representaciones gráficas y pictóricas, se verifica la densidad de los números racionales y se resuelve operatoria con expresiones fraccionarias y decimales. Este panorama se complejiza aún más, en el momento que los alumnos de 2° medio se ven enfrentados a operar con expresiones fraccionarias algebraicas, ya que en esta conversión de registro la disposición y entendimiento por parte de los estudiantes se vuelve casi nula, debido a la discontinuidad entre lo aritmético y lo algebraico, a la debilidad en el dominio de la aritmética (en términos de epistemología), dificultades y errores del paso del lenguaje verbal al lenguaje simbólico del álgebra y descontextualización del contenido teniendo sólo una visión abstracta de él.

El distanciamiento temporal en cuanto al estudio de las fracciones aritméticas y las algebraicas produce por defecto una mecanización en el manejo de este objeto matemático, ya que no hay mayores explicaciones en cuanto a su concepto, restricciones y operatoria, sólo se trata de asociar a la mecánica numérica implementada en enseñanza básica, pero ahora con letras.

En base a lo planteado, es que el estudio se focaliza en la pregunta de investigación, ¿cómo se plantean en el discurso de los profesores y de textos escolares los fenómenos didácticos de la transición aritmética y álgebra, en el caso de la simplificación y operatoria de adición de fracciones algebraicas? con el objetivo de: identificar y describir fenómenos didácticos (en cuanto a tareas y técnicas) de la transición aritmética y álgebra, en el caso de la simplificación y operatoria de adición de fracciones algebraicas, en el discurso de profesores y textos escolares; analizar aspectos de similitud y/o diferencia entre el discurso de profesores y de textos escolares en relación a la transición aritmética y álgebra, en el caso de la simplificación y operatoria de adición de fracciones algebraicas; identificar posibles dificultades, obstáculos y errores conceptuales o procedimentales que se pueden evidenciar tras la presentación de la simplificación y adición de fracciones algebraicas.

Metodología a utilizar y resultados preliminares

La investigación es de carácter cualitativo, cuyo diseño descriptivo y exploratorio se basa en la realización de dos estudios de casos, esto es, considerando por una parte la voz de los profesores (que constituye el resultado preliminar de esta comunicación) y un estudio de textos escolares de matemática. La etapa de análisis se enfocará en aquellos elementos, tanto comunes como diferenciadores, de la presentación del objeto matemático en los textos y en los profesores.

En una primera instancia, se ha diseñado un cuestionario dirigido a profesores, el que presenta dos partes (A y B): la primera consiste en 6 preguntas en relación a la práctica docente y la segunda a 8 en relación al objeto de estudio. Este cuestionario fue validado por jueces expertos y posterior a ello se obtuvieron las respuestas por parte de 7 profesores en ejercicio, los que constituyen el primer estudio de casos. En base a esto, se pueden observar los primeros resultados de investigación:

- 6 de los 7 profesores consideran que una fracción numérica es irreductible cuando “no existe un divisor común entre numerador y denominador”, sin realizar el alcance que el máximo común divisor es uno. Sólo uno de ellos lo considera.
- El 100% de los profesores del estudio, al presentarse la simplificación de una fracción algebraica, inmediatamente factorizan y luego simplifican por la técnica del “tachado” los factores en común, sin detenerse en considerar alguna restricción para que el denominador no sea igual a cero. En el caso de la simplificación numérica, todos dividen por un divisor en común, sin realizar la descomposición factorial entre numerador y denominador, la que resulta ser un paso obligado en el contexto algebraico.
- 5 de los 7 profesores, enseña el concepto de mínimo común múltiplo entre dos o más números mediante el uso de la tabla abreviada. En el caso de obtener el mínimo común

múltiplo entre expresiones algebraicas, la totalidad de los profesores factoriza y considera todos los factores distintos con su mayor exponente, sin hacer una relación con la "tabla abreviada" a la que recurre en el ámbito aritmético. Situación similar ocurre cuando se presenta que uno de los denominadores es un número irracional, donde 4 de los profesores expresan el mínimo común múltiplo mediante la multiplicación de los denominadores involucrados en la operatoria y luego amplifican de forma "cruzada" los numeradores. Llama la atención que dentro de las respuestas obtenidas, uno de los profesores señala que ni su mejor alumno lograría desarrollar ese ejercicio.

- Otro fenómeno observado se evidenció al pedirles realizar una adición de fracciones. Los profesores tienden a expresarla en una sola fracción una vez obtenido el mínimo común múltiplo, lo que hace que 5 de los 7 profesores al presentarse la simplificación de la expresión $\frac{m+2n}{n}$ respondan que es imposible realizarla.

En síntesis, en las respuestas obtenidas, se observa una clara desconexión entre las estrategias o procedimientos utilizados en el tratamiento aritmético y algebraico de las fracciones, siendo en la mayoría de los casos, que redunda la mecanización e invisibilización de su generalización en el contexto algebraico.

En lo sucesivo, estos resultados se compararán con los obtenidos en un análisis de textos escolares que está iniciando su etapa al momento del envío de esta comunicación. Cabe señalar que para tal efecto, se diseñará una matriz para recopilar la información de los libros de texto, que permita concluir si el discurso del profesorado es el mismo o en qué aspectos se diferencia del escrito en los textos, situando esta investigación en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Impacto de la investigación

Se espera que posterior al análisis de cada uno de los textos se logre concluir la diferencia y similitudes de los discursos con respecto a la simplificación y adición de fracciones algebraicas, los fenómenos didácticos presentes en ellos y anticipar posibles dificultades, obstáculos didácticos y errores que pueden provocar las rupturas epistemológicas observadas en estas fuentes de enseñanza.

Referencias

De Faria, E. (2006). Transposición Didáctica : Definición , Epistemología, Objeto de estudio. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta – Matemáticas. Universidad de Costa Rica.

Mata, L. E. (2009). Deficiencias en la transición de la aritmética al álgebra. II Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, (págs. 74-80). La Plata.

Quispe, W., Gallardo, J. y González, J. L. (2010). ¿Qué comprensión de la fracción fomentan los libros de texto de matemáticas peruanos? PNA, 4(3), 111-131.

Salazar, C; Martinic S.; Maz A. (2011). Diseño de una investigación para identificar los significados de fracción que ponen de manifiesto los profesores de primaria en Chile. . XIII Conferencia Latinoamericana de Educación Matemática. Recife.

Vega-Castro, D; Molina, M; Castro, E. Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. Relime [online]. 2012, vol.15, n.2, pp. 233-258. ISSN 2007-6819.

Vidal, R. (2009).Las raíces y radicales en libros de texto en Chile. Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las Matemáticas. Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias de la Educación. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

[i] Este artículo ha sido realizado en base al avance del diseño final del Trabajo de Graduación para optar al grado de Magíster en Didáctica de la Matemática de la Universidad Alberto Hurtado.

DESDE LO SINTÉTICO A LO ANALÍTICO: UNA PROPUESTA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA DE EULER.

Bonilla Barraza,D[a]. Díaz Pallauta,J[b]

.

Colegio Tamelcura. Liceo Católico de Atacama.
danielabonillab@gmail.com, jocelyndiazpallauta16@gmail.com

Resumen

La presente comunicación consiste en una propuesta didáctica que promueve la transición de una geometría sintética hacia una geometría analítica con el objetivo de caracterizar la recta de Euler. Para su diseño se utiliza elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).
Se describe una organización matemática que determina la ecuación cartesiana de la recta de Euler, con este fin, se generan tipos de tareas, donde se plantean diversas técnicas desde la construcción geométrica de los puntos notables en un triángulo (Circuncentro, Ortocentro y Baricentro) a las condiciones analíticas necesarias que dan origen a esta recta en el plano cartesiano.

Palabras claves:*recta de Euler, tareas, construcciones geométricas.*

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En el estudio que se presenta a continuación se considera fundamental la transición de una geometría sintética a una geometría analítica, pues en la enseñanza actual de la matemática se presenta un divorcio entre ambas perspectivas, sobre este fenómeno dan cuenta investigaciones como Gascón 2002, quien manifiesta que hay un desconocimiento de los nexos epistemológicos entre ambas geometrías.

En chile, la recta, se encuentra presente a lo largo del curriculum escolar, se trata en los programas de estudio de enseñanza básica principalmente como una nociónque permite definir ángulos entre rectas paralelas, teorema de thales, entre otras. Posteriormente en secundaria (tercero año medio) los textos escolares introducen sus ecuaciones a partir de sistemas de ecuaciones de rectas o mediante el teorema de Thales, planteando actividades mayoritariamente analíticas como determinar ecuaciones de rectas dadas distintas condiciones, calcular pendientes y coeficiente de posición.

Abordando los puntos anteriores, la presente propuesta didáctica consiste en la introducción de las condiciones analíticas que describen una recta en el plano cartesiano en la enseñanza secundaria a partir de la construcción geométrica de la recta de Euler.Pues,la "existencia de una recta que pase por el circuncentro, baricentro y ortocentro de un triángulo cualquiera, permite el desarrollo de una geometría, que se bien se desliga de lo concreto, involucra una riqueza conceptual, analítica y procedimental"(Chávez & Parraguez, 2014, p 695).

Investigaciones como Bonilla & Díaz, 2014 dan cuenta de la importancia de la colinealidad de tres puntos como elemento significativo en el surgimiento de las ecuaciones de rectas, por lo tanto, se considera esencialargumentar sobre la colinealidad de los tres puntos notables que generan la recta de Euler.

Para este diseño se utiliza elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999). Se entenderá como organización matemática, a un conjunto de tipos de tareas, de técnicas o procedimientos para resolver estas tareas y de definiciones, propiedades y teoremas que permitan describir y justificar la resolución de la tarea.

Para la aplicación y análisis de una propuesta, la TAD cuenta con una organización didáctica donde se distingue distintos momentos, entre ellos, el encuentro inicial con la organización matemática, exploración del tipo de tareas T, elaboración de una técnica, trabajo de la técnica e institucionalización.

Descripción de la propuesta didáctica

Se describe una organización matemática que consiste en determinar la ecuación cartesiana de la recta de Euler en el plano, con este fin, el diseño plantea en un inicio el trabajo en una geometría sintética, construyendo en forma geométrica los puntos notables en un triángulo (Circuncentro, Ortocentro y Baricentro). Para luego desarrollar las mismas actividades en el plano cartesiano.
La siguiente tabla resume la organización Matemática

Organización Matemática	Tipos de tareas	Técnicas
determina la ecuación cartesiana de la recta de Euler	T_1: Determinar si tres puntos son colineales. (puntos notables)	1.-Unir los puntos con regla
		2.-encontrar relaciones de variaciones de ordenadas y abscisas.
		3.-encontrar una ecuación para la recta que pase por los tres puntos.
	T_2: Determinar las condiciones de las coordenadas de un punto M(x,y) para que este alineado con dos puntos distintos Q y R en el plano	1.-relacionar con las variaciones de abscisas y ordenadas.
		2.-verificar que el punto M(x,y) pertenezca a la recta que pasa por Q y R.

Ejemplo de actividades y análisis a priori.

Las actividades están dirigidas a estudiantes de los primeros niveles de secundaria (15-16 años) que han construido los elementos secundarios del triángulo, conocen el plano cartesiano y aún no han trabajado con ecuaciones y pendientes de rectas.
Actividad 1:*Dibuje un triánguloy realice la construcción de las transversales de gravedad (indique el baricentro(P)), las simetrales(indique el circuncentro(Q)), las alturas (indique el ortocentro(R)). (Use solo regla y compas). Repita el procedimiento para distintos triángulos, escriba una conjetura sobre la posición de los puntos P, Q y R.*
Actividad 2*: En el plano cartesiano dibuje un triángulo de vértices A (3,0) ; B (6,9) y C (6,-3), construya con regla y compas el ortocentro (R), baricentro (P)y circuncentro (Q). ¿Estos puntos P,Q y R son colineales ? Elabore dos estrategias distintas para justificar su conjetura.*
Actividad 3:*El punto S (501,126) pertenece a la recta que pasa por P, Q y R.Justifique*
Actividad 4*: Escriba las condiciones para que un punto M(x,y) este alineado con los puntos Q y R.*
En la actividad 3, la técnica sintética pierde su alcance, lo que genera que el estudiante acuda, necesariamente, a elaborar técnicas analíticaslogrando generalizarlas con la actividad 4, emergiendo de este modo elementos importantes para la organización matemática planteada, en este punto se destaca el rol del docente pues es el encargado de institucionalizar, definir lo que se entenderá por pendiente de rectas y su posterior ecuación.

Resultados de Investigación

Se utiliza como estrategia metodológica, estudio de casos, en la medida que "son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad en un período de tiempo", (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992). La Unidad de análisis está formada por un grupos de 20 estudiantesde primer año medio (desconocen la recta y sus ecuaciones), realizan las actividades trabajando en parejas, en tres sesiones de 90 minutos.
Ejemplos de respuestas.
En relación a la actividad 1, En el Momento de exploración de la tarea, los estudiantes utilizan técnicas sintéticas, es decir, construyen con regla y compas, los elementos secundarios del triángulo, marcando los puntos notables Circuncentro, Baricentro y Ortocentro, la mayoría de los estudiantes determina que estos puntos son colineales, dando respuestas como: "*están en una misma línea*", "*pertenecen a un mismo segmento*"(ver ejemplo figura1), y para el caso del triángulo equilátero concluyen que estos tres puntos coinciden.

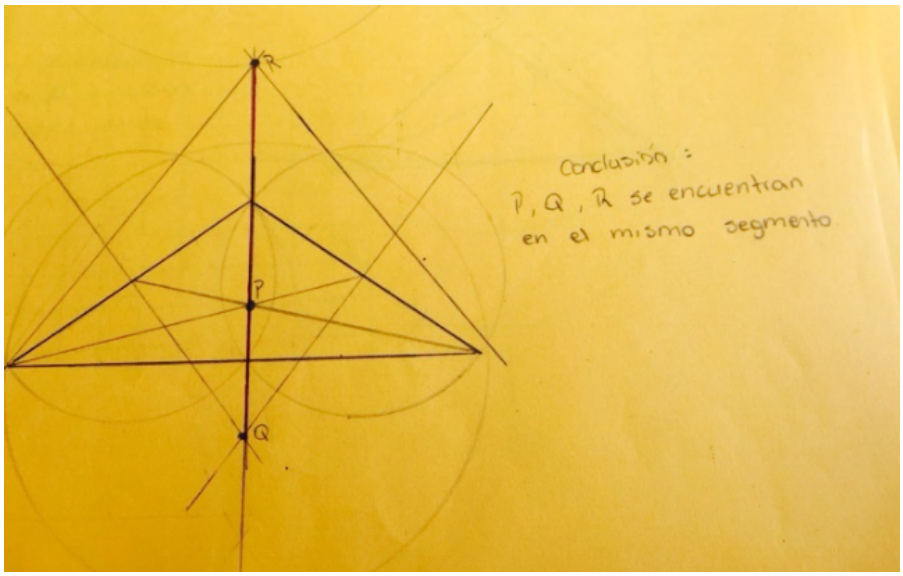


Figura1: respuesta de los estudiantes (E3- E4)

Con respecto a la actividad 2, que conecta la geometría sintética y la geometría analítica los estudiantes construyen técnicas para justificar la tarea, observando características particulares de la recta de Euler, si bien, no utilizan fórmulas de pendiente, ni de distancias, pues la desconocen. Comienzan a surgir elementos analíticos de las rectas(ver figura 2)

Escriben respuesta como: *"cada 4 cuadritos de la línea x , se avanza 1 hacia arriba(eje y) ", " la distancia entre R y P , es el doble de la distancia de los puntos P y Q" " se concluye que P, T, R, Q están en la misma línea".*

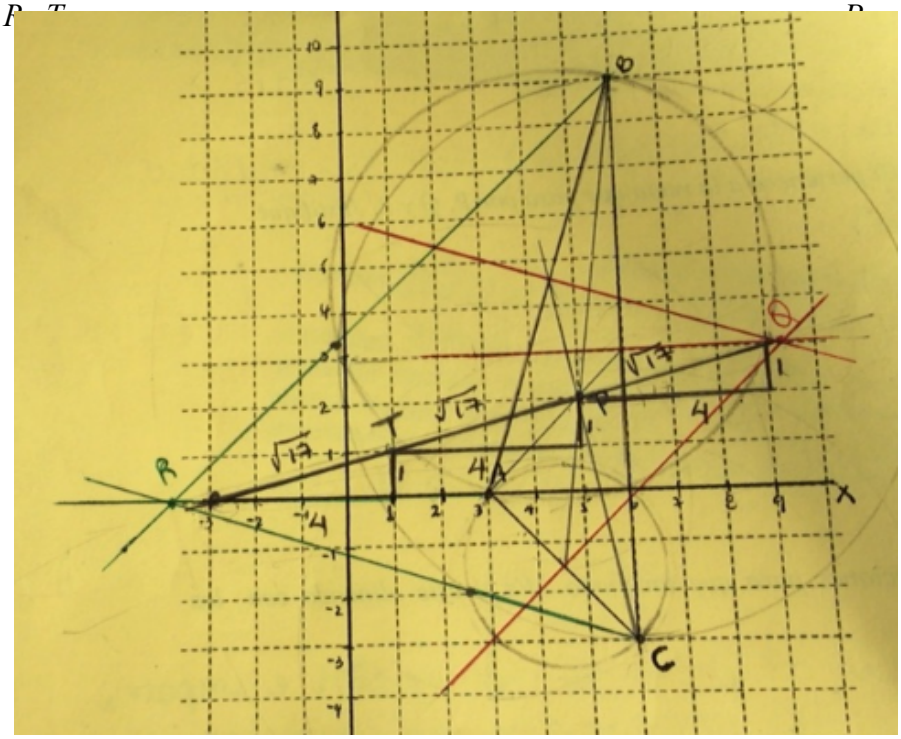
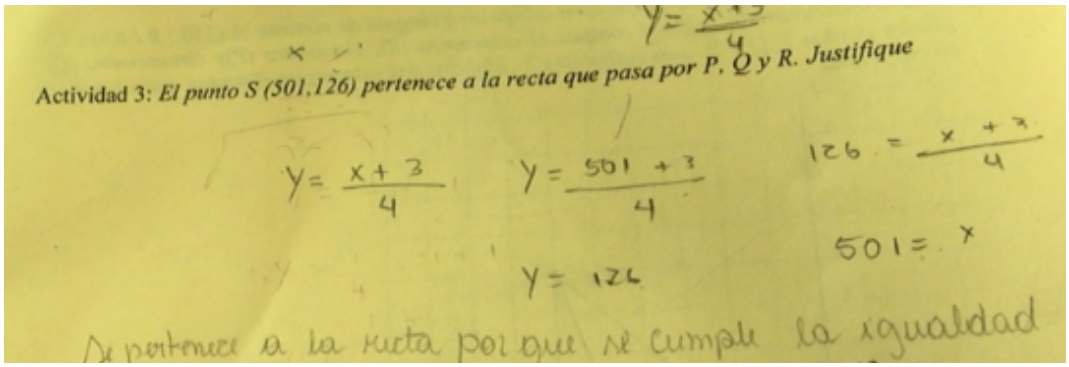


Figura2: Respuesta de los estudiantes (E7- E8)

En relación al tipo de tareas (T_2), determinar las condiciones de las coordenadas de un punto M(x,y) para que este alineado con dos puntos distintos Q y R en el plano.

6 Parejas de



estudiantes, elaboraron técnicas analíticas (figura 3), estableciendo ecuaciones que relacionaban los puntos de la actividad 2, dando respuestas como: "debe cumplir la igualdad $y = \frac{x+3}{4}$" o "$4y = x + 3$, *significa que al multiplicar 4 veces el valor de y nos da el mismo resultado que al*

sumarle 3 unidades a x, solo si esto se cumple los puntos están en la misma línea".

Figura 3: respuesta de estudiantes E13- E14

REFLEXIONES FINALES

Se sugiere la aplicación de la propuesta didáctica a estudiantes que desconocen ecuaciones de rectas y fórmulas de pendientes, pues los elementos matemáticos que surgen en la actividades a partir de la elaboración de técnicas que respondan a un tipo de tareas específica, en este caso determinar las condiciones de colinealidad de tres puntos, son un soporte fundamental para el docente al momento de institucionalizar. Es tarea del docente decir que cuando el estudiante da cuenta de que *"cada 4 cuadritos de la línea x , se avanza 1 hacia arriba(eje y)"* se está hablando en forma implícita de lo que se conoce como pendiente de la recta.
Es importante destacar la riqueza de la recta de Euler en esta propuesta, pues el hecho de que se pueda construir en forma geométrica (regla y compas o software) genera un impacto positivo en los estudiantes, reflexionando sobre la posición de los puntos notables y la relación de sus distancias.

Referencias bibliográficas

Bonilla, d. & Díaz, j. (2014). "Ecuación vectorial de una recta: una propuesta didáctica desde la teoría antropológica de lo didáctico". En r. flores (ed), acta latinoamericana de matemática educativa nº 27, 807-813. México: comité latinoamericano de matemática educativa.

Chevallard, Y. (1999) L´analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (2),221-266.

Chavez, V. & Parraguez, M. (2014). "Construcciones mentales para el objeto recta de euler". En r. flores (ed), acta latinoamericana de matemática educativa nº 27, 689-696. México: comité latinoamericano de matemática educativa.

Duran, D. (2005). El Círculo de los Nueve Puntos y la Recta de Euler. Divulgaciones Matemáticas,13(1), 73-76.

Gascón,J(2002):" Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?", SUMA, n.° 39, 13-25.

LA JUSTIFICACIÓN DE LO INFINITO EN LAENSEÑANZAESCOLAR[i]

Pavez-Hlousek, V[a]., Vidal-Cortés, R[b].;

Universidad Alberto Hurtado;
correo electrónico: valentina.pavezh@gmail.com, rvidal@uahurtado.cl

Resumen:
Esta comunicación tiene por objetivo exponer un avance de tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática, la cual consiste enel estudio de las justificaciones que dan profesores y libros de textos acerca de procesos infinitos involucrados con algunos objetos matemáticos del currículo escolar. Para tal efecto, este estudio se compone de dos etapas: la aplicación y análisis de un cuestionario para profesores en activo, y la revisión de textos escolares. Aquí se presentan los resultados preliminares de la primera etapa, en la que se analizaron las respuestas de los profesores respecto de los argumentos que entregan frente a interrogantes relacionadas con lo infinito, para posteriormente llegar aestablecer posibles relaciones entre lo declarado por los profesores y el contenido de lostextos de estudio cuando aluden a los mismos objetos.

Palabras claves: *infinito, procesos infinitos, justificación,enseñanza del profesor de matemática, libros de textos.*

INTRODUCCIÓN

En los programas de estudio oficiales, se evidencia la presencia de objetos matemáticos que tienen relación con lo infinito, entre los cuales podemos mencionar por ejemplo, los desarrollos decimales periódicos y semiperiódicos, los desarrollos decimales de números irracionales, como el delnúmeroπ, la densidad y continuidad de los números reales, entre otros. Esto avala la necesidad deinvestigarqué tipo de justificaciones están presentes en la enseñanza, es decir tanto argumentos del profesor como lo expresado en libros de textos,ya que la noción de infinito es transversal a diversos contenidos presentes en el currículo escolar chileno.

Investigaciones relacionadas con la noción de infinito en el aula escolar,constatan la importancia de una adecuada comprensión de este objeto (Crespo, 2006). Por un lado, revelan que los procesos infinitos suelen tratarseen el aula apelando a la intuición (Crespo, 2006), lo que conlleva a que en el alumno emerja un sentimiento de desesperación y de un horror al infinito (Ortiz, 1994), y por otro lado, reportan obstáculos didácticos y epistemológicos, lo que hace que enseñar este concepto sea un desafío tanto para quién lo enseña. (Crespo, 2006)

Antecedentes desde la historia

Para Ortiz (1994) la noción de infinito ha generado una serie de confusiones y contradicciones en la historia de la matemática. En la época de la antigua Grecia, esta noción era concebida desde la percepción, basada en experiencias relacionadas con el mundo físico, un mundo finito, lo que conlleva a paradojas, que no lograban ser contestadas desde esta idea de infinito, tan inherente a la intuición humana.

Una paradoja propia de la época, que comenta Ortiz (1994) y que proviene de las bases que sustentan la matemática, es la mencionada por Euclides: “eltodo es mayor que las partes”, que Georg Cantor más adelante modifica con su teoría de los Números Transfinitos. Lo mismo ocurre con la paradoja del Hotel de Hilbert, que plantea metafóricamente que una cantidad infinita de huéspedes, cabe en un hotel con infinitas habitaciones, es decir, un conjunto infinito de elementos“forma parte” de otrotambién de tamaño infinito, lo que se opone al postulado de Euclides antes mencionado.

Por otra parte, para Crespo (2006) la noción de infinito responde a la interpretación intuitiva, ligada al sentido común, entendido como algo interminable e inalcanzable. Esta idea perduró durante muchos años en la historia de las matemáticas, hasta las intervenciones de Cantor.

De un infinito intuitivo a un infinito domado

Costa y Otto (2005) plantean el infinito potencial como la idea de uno más, es decir, se concibe como un proceso de acumulación. La idea fundamental que subyace a esta comprensión de infinito, es que siempre hay uno más (o uno menos), haciendo referencia a una tendencia, a un comportamiento iterado que jamás llega a término. Garbin y Azcárate (2005) establece queun objeto potencialmente infinito, responde a un significado referido a su conducta, por eso alude a una manera de entender esta noción, desde cómo se comporta,es decir, un infinito que da respuesta a nuestra intuición racional.

El infinito actual, en cambio, es entendido desde una concepción formalizada del objeto, respondiendo a una noción contra-intuitiva. Costa y Otto (2005) plantean que la idea de infinito en acto, se centra en considerarlo como unidad, como un todo. Responde a aquello tan grande o pequeño que no puede ser pensado, por eso se entiende en términos de un “ya alcanzado”. En otras palabras, recibe un tratamiento como si fuese un elemento que surge al superar el límite de lo infinito. A partir de esta idea, surge en la historia la posibilidad de considerarlo como un número.

Cantor y la formalización del infinito

Ortiz (1994) afirma que Cantor rechazó la concepción de infinito potencial que permanecía latente en la época, ya que asume que todo infinito potencial presupone la existencia de uno actual. Así, Cantor a través de su teoría levanta la existencia de cardinalidades infinitas diferentes. Una de ellas, por ejemplo, asociada a los números naturales, permite levantar la noción deconjunto infinito numerable, simbolizada por$\aleph_0$.Otra cardinalidad se asocia a un conjunto infinito no numerable, correspondiente al tamaño de los números reales, denotada por $2^{\aleph_0}$.

Hernández (2001), plantea que las cantidades mencionadas anteriormente, son entendidas como números, pero diferentes a los que comúnmente conocemos, ya que representan cardinalidades infinitas. Cantor a partir de esto, comienza a crear una nueva aritmética(Aritmética Transfinita), para dar status de número a estos nuevos entes.

El infinito en el aula de matemática

De los objetos matemáticos presentes en el currículo nacional, que se encuentran vinculados con la noción de infinito, existen diversos investigadores que mencionan la importancia del discurso matemático escolar referidos a la enseñanza de éstos y su relación con los procesos infinitos.

Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática, Crespo (2009)detectauna marcada tendencia a considerar un infinito potencial, ya que surge en el alumnola necesidad de mostrar los resultados mediante su expresión decimal, lo que genera obstáculosepistemológicos en el aprendizaje de los números irracionales.

Por otro lado, al tratar los periodos de los números racionales, Pochulu (2007) detecta una dificultad común en alumnos de nivel medio, cuando se ven enfrentados a la tarea de identificar unpatrón en el desarrollo decimal de un número, ya que cuando no lo encuentran con facilidad, asumen que se trata de un número irracional.

El problema

A raíz de los antecedentes expuestos, se evidencia la presencia de dificultades en la comprensión de procesos infinitos que subyacen a ciertas temáticas presentes en el aula de matemática. Se observa en la actualidad, que en la enseñanza matemática suele trabajarse la noción de infinito desde una idea que se quedó en la antigua Grecia,donde predomina una perspectiva potencial e intuitiva, visión compartida como veremos tanto en profesores como en los estudiantes. Desde este escenario, surge la necesidad de desarrollar la presente investigación, en la que se analizan las justificaciones referidas a lo infinitopresentes en la enseñanza escolar.

De lo anterior, emergen entonces las preguntas de investigación que orientan a los objetivos del estudio: ¿Se dan y en tal caso hasta qué punto son comprensibles las justificaciones de libros de texto o presentes en lo expresado por el profesor?¿Qué tipo de justificaciones dan los profesores acerca de lo infinito? ¿Son las mismas queentregan los libros de textos?¿Existen diferencias en las justificaciones referidas a lo infinito entre algunos objetos matemáticos y otros? ¿Esto podría conllevar a obstáculos en el aprendizaje de objetos matemáticos permeados con la noción de infinito?¿Incide la experiencia docente en el tipo de justificaciones que se dan? A partir de estas sub-preguntas de investigación, surge una pregunta de investigación general: ¿Cuáles son las justificaciones de los procesos infinitos presentes en la matemática escolar?

Como objetivo general del estudio se propone: Analizar las justificaciones, en caso de existir, de lo infinito presente en la matemática escolar, referidas a objetos matemáticos del currículo nacional. Los objetivos específicos que ayudarán a alcanzar el objetivo general son:

1) Identificar y caracterizar tipos de justificaciones asociadas a lo infinito en la enseñanza de la matemática escolar, 2) Identificar si en los objetos relacionados con lo infinito presentes en el estudio predomina una tendencia a justificar, 3) Determinar si la experiencia docente índice en el tipo de justificaciones,4) Identificar posibles errores conceptuales y/o procedimentales en los objetos relacionados con lo infinito, en función de las justificaciones, y por último 5) Determinar convergencia entre los discursos referidos a las justificaciones respecto de lo infinito en la enseñanza escolar, entre los saberes del profesor y los provistos en libros de texto.

Para abordar este problema, se ha optado como marco de referenciauna adaptación de los esquemas de prueba propuestos por Harley y Sowder (1998),identificando y categorizando lasjustificaciones observadas tanto en profesores como el libros de texto, referidas a lo infinito de algunos objetos matemáticos.

Metodología de la investigación

La metodología a utilizar en la investigación será de tipo cualitativo, cuyo diseño descriptivo y exploratorio, constará de dos estudios de casos.El primero, buscará analizar las justificaciones de

profesores referidas a temáticas que aluden a procesos infinitos de ciertos objetos, y el segundo analizará las justificaciones que están presentes en librosde textosrespecto de los mismos objetos.

En el estudio de casos centrado en las justificaciones de profesores, se aplicó y analizó un cuestionario (de diez preguntas), validado previamente por juicio de expertos, que constó de dos partes. La primera (cuatro preguntas) recopilódatos relativos a suexperiencia docente: año qué obtuvo el título de profesor de matemáticas, años que lleva realizando clases, niveles escolares donde realiza clases y dependencia laboral del establecimiento donde trabaja, respectivamente.La segunda parte (seis preguntas) recogió informaciónacerca de su perspectiva en torno a situaciones de aula en matemática, referidas al objeto de estudio, para objetos matemáticos que aluden a procesos infinitos.Al respecto, se seleccionó una lista de contenidos del currículo oficial para éstas últimas seis preguntas: desarrollo decimal periódico, medida irracional para un segmento, división por cero, cifras decimales del número π, amplitud de intervalos reales, y finalmente, concepto de función representado en diagrama sagital.

El segundo estudio de casos(en elaboración) corresponde al análisis de libros de textos. Cabe señalar, que dicha fase comenzará con el diseño de una matriz de análisis, cuya finalidad es orientar la recopilación de información en los textos de estudio, lo que permitirá levantar conclusiones en cuanto a similitudes o diferencias, entre las justificaciones de los profesores y las que se encuentran presentes en los manuales escolares.

Resultados preliminares

El cuestionario fueaplicado a 20 profesores de matemáticas que realizan clases entre séptimo y cuarto año de enseñanza media en la actualidad. A continuación se presentan algunos resultados preliminares:

- 5 de los 20 profesores encuestados no acepta que $3,\overline{9}$ es igual a 4. De los 15 restantesque aceptaron dicha igualdad, 11 la explican desde la fórmula para transformar un desarrollo decimal infinito periódico en una expresión fraccionaria.

- 10 de los 20se refirieron a la imposibilidad de la existencia de un segmento de medida $\sqrt[5]{3}$, justificando que al tratarse de un número infinito no periódico, dicho segmento no puede tener una medida exacta.

- 4 delos 20profesores encuestados, declaró que cualquier persona podría encontrar los dígitos de su RUT dentro de las cifras decimales de π, justificando que "si no estuvierantodas las combinaciones posibles de números, entonces π no podría ser infinito".

- 2 de 20profesores expuso que el intervalo $]0,1[$ no tiene la misma amplitud que el intervalo $[0,1]$, ya que el último posee dos elementos más que el primero.
- Finalmente, 19 de los20 encuestadosno advierten acerca de la representación errónea para la enseñanza del concepto de funciónde variable real, al utilizar diagramas sagitales, ya que no notan la dificultad de emplear este tipo de representaciones, propias de los conjuntos finitos.

A partir de los resultados preliminares mencionados, se detectan contradicciones e inconsistencias a nivel de conocimiento de los profesores, por lo que ahora se precisa de un análisis de las justificaciones presentes en lo expresado por los encuestados. Este análisis se hará a partir de categorizaciones de justificaciones, en base al marco referencial y en algunos casos, a categorías

creadas en virtud de las respuestas observadas. Posterior a esto, se procederá a observar libros de texto para ver que está ocurriendofrente a lo infinito de los mismos objetos matemáticos presentados. Resulta interesante identificar si lo propuesto en los manuales de estudio, se asemeja o no a lo expuestopor los profesores.

Proyecciones de la investigación

Luego de finalizada la investigación, se esperaría por un lado, servir como antecedente para futuros estudios que presentenpropuestas didácticas para trabajar con objetos matemáticos que aludan a lo infinito. Por otro lado, se esperaría impactar en el ámbito de la didáctica de tal forma de hacer emerger la necesidad de perfeccionamientos docentes en relación al tema, o tal vez remecer en la toma de consciencia de la elaboración de libros de textos y las justificaciones referidas a procesos infinitos presentes en los objetos matemáticos del currículo escolar.

Referencias

Costa Reparaz, E., & Otto, L. B. (2005). Ideología y Matemáticas: El infinito. Obtenido de Universidad de Valencia: http://www.uv.es/asepuma/XIII/comunica/comunica_30.pdf

Crespo, C. C. (2006). Un paseo por el paraíso de cantor: problemas y reflexiones acerca del infinito. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 19, (págs. 28-34). México.

Crespo, C. C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. Revista Premisa, 21-30.

Garbin, S., & Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. Enseñanza de las Ciencias, 87-113.

Harel, G., &Sowder, L. (1998). Students` Proof Schemes: Results from exploratory studies. En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), Research in collegiate mathematics education, vol.III.,234-283.American MathematicalSociety, Providence, USA.

Hernández, J. A. (2000). Bibliografía del infinito: La noción de transfinitud de Georg Cantor y su presencia en la prosa de Jorge Luis Borges.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. Asociación Matemática Venezolana. Boletín, I(2), 59-81.

Pochulu, M. D. (2007). Períodos de números racionales: Un abordaje desde la teoría de números y con nuevos recursos. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 68, 4-9.

[i] Esta comunicación se basó en el avance del diseño final del Trabajo de Graduación para optar al grado de Magíster en Didáctica de la Matemática de la Universidad Alberto Hurtado.

RESIGNIFICACIÓN DEL CONCEPTO FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA BÁSICA

Alarcón, N[a]., Araya M., Klenner, J[b].

PUCV, PUCV, UNAB;
correos electrónicos:
nicolasalarcon147@hotmail.com , profematw@gmail.com, jose.klenner@unab.cl.

Resumen

El currículum nacional chileno pone de manifiesto la importancia de la enseñanza de las funciones, presentándose su estudio a partir de séptimo básico, evidenciándose un fuerte enfoque algebraico, donde la gráfica es una mera representación del objeto.

La investigación demuestra cómo el uso de tecnología, la manipulación mediante un software, resignifica el concepto de función, construyendo conocimiento a través de la argumentación gráfica, al poner en relieve elementos fundamentales de la definición de función, esto es la relación entre variables, dominio y recorrido y la unicidad.

Palabras clave: *Discurso matemático escolar, resignificación, función, argumentación gráfica*

PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES

Antecedentes histórico - epistemológicos

El quehacer humano da cuenta de un acercamiento a la noción de función desde periodos que se remontan al origen de las civilizaciones. Es así como Youschkevitech en Cordero F. & Flores R. (2007) define La Antigüedad como una primera etapa del desarrollo del concepto de función, estando esta asociada al registro de la dependencia entre dos cantidades, como tablas de valores para las raíces cúbicas y cuadradas, o tablas trigonométricas. La segunda etapa se desarrolla durante la Edad Media (s. XIV), cuando si bien el foco sigue siendo la dependencia entre cantidades, éstas se describen mediante una expresión verbal o una gráfica. Siendo Nicolás Oresme el primero en realizar una aproximación a la gráfica de una función, graficando la variabilidad. Además, durante este periodo se introducen las funciones trigonométricas más importantes y se sistematizan y perfeccionan técnicas de tabulación. Las funciones expresadas analíticamente dominarán la última etapa descrita por el autor y que se desarrolla durante el Periodo Moderno (s. XVI y XVII), ello influenciado por el origen, también en esa época, lo que hoy conocemos como geometría analítica.
Los trabajos de Newton, Leibniz y Bernoulli enriquecen el significado de función, de manera que Dirichlet en el siglo XIX formalizará la definición que perdura hasta nuestros días, mientras que en este mismo siglo se formula la Teoría de Funciones.

Es posible notar que en el proceso de desarrollo del concepto surgen tres elementos que determinan la adquisición de la noción de función, dígase, los conceptos de relación, variable independiente x (dominio) y variable dependiente y (recorrido), y el concepto de unicidad, donde a cada valor de la variable independiente x, le corresponde un único y.

El concepto de función en el discurso matemático escolar

El currículum nacional chileno se encuentra explícito en las Bases Curriculares de 7° básico a 2° medio y los Programas de Estudio para cada nivel. En ellos es posible evidenciar el tratamiento de dos de los tres elementos mencionados como fundamentales para la construcción del concepto de función, esto es, la relación entre variables y el dominio y recorrido. Ellos son abordados ampliamente desde 8° básico, con un fuerte trabajo respecto a relaciones entre variables y su

tabulación, pero pobre en el tratamiento del dominio y recorrido, lo que induce a que los estudiantes piensen que toda relación es una función.
Por otra parte, el texto escolar entregado por el MINEDUC durante el 2015 para 8° básico privilegia un trabajo algebraico, donde el uso de las gráficas no es más que una representación de la función, no relacionándola con la variación funcional. Cabe mencionar que el uso de la metáfora de la "máquina" para relacionar el concepto de función, hace referencia sólo a la relación entre dos elementos, dejando fuera de ella, los conceptos de dominio y el de unicidad. Respecto del tipo de ejercicios, éstos solicitan al alumno completar tablas de valores, dados el valor de "x" y la "regla" que da origen a los valores de "y", otros además, piden graficar los pares (x,y) en un plano cartesiano.

En consecuencia y tomando en consideración los tres elementos definidos a partir de los antecedentes epistemológicos, el texto aborda principalmente el primero, el concepto de relación. El dominio y recorrido, son mencionados como variable dependiente e independiente, e induciendo a error en cuanto el dominio de funciones a fines se considera discreto, remitido a valores dados en una tabla. La unicidad no es abordada más allá de ser mencionada en la definición.

Problemática

La matemática de los textos y programas escolares da cuenta de un concepto acabado, enseñándole al alumno aspectos "útiles" de la matemática, en particular de la función. En este sentido el Discurso Matemático Escolar (DME) promueve una enseñanza utilitaria (Cordero, 2006), centrada en la aplicación de los conceptos y no en los aspectos esenciales de ellos, que son los que permiten a los estudiantes movilizar los diversos aprendizajes de un mismo concepto.
Se propone entonces, un rediseño del DME centrado en los elementos que ayudan a la construcción del concepto de función y que mediante la manipulación de un software gráfico ponen de relieve la argumentación gráfica.

Marco teórico

El marco teórico con el que hemos mirado la investigación es el de la socioepistemología, a través de éste proponemos una resignificación del concepto de función, ya que nos proporciona distintos elementos, que permiten a los estudiantes construir una matemática funcional y no utilitaria como lo propone el DME. Cuando hablamos de DME lo hacemos en el sentido propuesto por Cordero F. & Flores, R. (2007) como la "la manifestación del conocimiento normado por creencias del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y lo que es la matemática" el lugar donde podemos ver en manifiesto lo propuesto por el DME son los textos escolares y los planes y programas de cada país, es por esto que en la sección anterior se ve la evolución de la función desde esas evidencias con el fin de hacer una crítica al discurso para luego dar paso a proponer un rediseño.

La matemática funcional propuesta por la teoría, hace referencia a que los estudiantes utilicen los distintos conceptos aprendidos en diferentes situaciones, pero que estos no sean utilizados porque el profesor les enseño problemas tipos, sino que sean capaces de dada una situación dar un uso propio a lo aprendido. Uno de los elementos que tomamos para alcanzar la funcionalidad es la argumentación gráfica, los usos dados a las gráficas van a proporcionar distintos argumentos por parte de los estudiantes, estos son respuesta de las distintas movilizaciones mentales que el estudiante realiza, la interacción entre los diferentes argumentos proporcionados por alumnos va a generar conocimiento.

Otro aspecto que utilizamos en esta investigación es el uso de la práctica social predicción, está, en nuestro caso, permite poner en juego la conjeturas propuestas por los estudiantes y causa un quiebre cognitivo, el cuál hace distinguir entre un conocimiento funcional y el utilitario, ya que para poder predecir necesariamente el concepto se empieza a hacer funcional y no se responde en base a un algoritmo o un problema tipo, sino que se está dando un uso propio a los argumentos y se van

resignificando distintos conceptos. Buendía (2006) alude que la predicción permite ver la naturaleza misma del objeto y permite la reconstrucción del conocimiento

DISEÑO Y RESULTADOS

Se propone una secuencia de cuatro actividades, centradas en los elementos identificados como esenciales para la construcción del concepto de función: relación, dominio y recorrido, unicidad. Dicha construcción está dada por la argumentación surgida desde la gráfica.
La metodología de la investigación es de corte cualitativo mediante el estudio de casos múltiples.
Los sujetos son estudiantes de 8° básico de colegios particulares subvencionados, el primer grupo (G1) corresponde a tres alumnos de la comuna de Viña del Mar y el segundo grupo (G2) son tres estudiantes de Quillota. Ellos aún no han estudiado formalmente las funciones pero han abordado elementos como ecuaciones, proporcionalidad entre otros.

Instrumento

Actividad 1: El objetivo de esta actividad es trabajar el concepto de relación y se ha subdividido en cuatro momentos en que se pide a los estudiantes relacionar las coordenadas de los puntos graficados al mover un deslizador. Se comienza con relaciones lineales y luego, cuadráticas. Además, los estudiantes deben predecir las coordenadas de un punto que esté "antes" y/o "después" de los ya graficados. Así como también determinar si un punto dado pertenece a la gráfica generada por el deslizador, argumentando mediante la relación establecida entre las coordenadas de los puntos.
Actividad 2: Con el desarrollo de esta actividad se espera emerja el concepto de dominio y recorrido. La actividad consta de tres partes, cada una de ellas muestra dos gráficas, las dos primeras lineales, y una tercera cuadrática, donde el estudiante debe encontrar a lo menos cinco diferencias.

Actividad 3: Se espera evidenciar la apropiación por parte del estudiante del concepto de dominio y recorrido. Para ello se me entregan varias gráficas (lineales) con diferente dominio y recorrido y se le pide encuentre aquellas que cumplan la condición de estar entre 1 y 4, y establecer las diferencias entre aquellas que cumplan.

Actividad 4: En esta actividad el estudiante debe movilizar los elementos utilizados y aprendidos en las tres actividades anteriores, de modo que al término de ésta pueda dar cuenta de la construcción del concepto de función. En particular, esta actividad pretende poner de manifiesto la unicidad, mediante dos momentos. Donde en el primero, se espera el alumno clasifique las gráficas dadas justificando los criterios utilizados. Finalmente, se le solicita determine en cuáles de ellas "a cada x le corresponde un único y".

Discusión de resultados y conclusiones.

Después de aplicada la actividad a estudiantes de 8 básico, se puede visualizar el importante rol de la gráfica en el desarrollo y logro de los objetivos de la actividad, y por tanto, en la construcción de conocimiento. Se puede observar que el rol de las distintas argumentaciones surgidas a partir de la gráfica, son distintas en los dos grupos dependiendo de los conocimientos previos que estos tenían. En el primer grupo, los cuales habían trabajado anteriormente con el plano cartesiano, se pudo observar que se centraban en la coordenas de los planos cartesianos y la forma que tenían las distintas gráficas. Los del segundo grupo, que no conocían el plano cartesiano, se centraban en lo que la gráfica les proporcionaba y desde ahí daban sus argumentos. Desde esta arista podemos dar cuenta que los estudiantes generan conocimiento a través de los argumentos que surgen desde la gráfica, pero estos varían dependiendo de los conocimientos previos que tienen y de la realidad en la cuál se encuentran insertos, ya que si bien ambos grupos son de colegios particular subvencionados, el contexto social es totalmente distinto y este también influye en cómo se

desenvuelven los estudiantes en la sala de clases y los conocimientos que el profesor les enseña durante los años de escolaridad.
En conclusión, a través de las actividades propuestas para construir el concepto de función, podemos decir que los elementos como la argumentación, la predicción y la clasificación son fundamentales para poder construir, estos aspectos se reafirman al ver como lo estudiantes responden. Es importante tener conciencia que el proceso de construcción no es uniforme, es decir, no es igual en todos los grupos, ya que como hemos comentado anteriormente depende de muchos factores. Es por esto que la actividad aplicada en estos grupos si se llevan a otra realidad es necesario adaptarla, ya que debe responder a un contexto, a un nivel de enseñanza y de las necesidades de los estudiantes. Los programas de estudio si bien norman la enseñanza y trata de delimitarnos, es importante ver lo que se puede lograr con actividades de esta índole y con estos elementos, ya que los estudiantes que se enfrentaron a la situación pudieron poner en juego la relación, la distancia, los pares ordenados, plano cartesiano, dominio y recorrido, unicidad, la gráfica, la forma, el sentido y distintos conceptos que permiten que ellos construyan nuevos conceptos. Si bien el foco de esta investigación es la construcción de concepto función, lo fundamental y los que nos movió a realizar este trabajo, es lo que hace a los estudiantes a hacer las cosas y las distintas construcciones y los distintos conceptos que movilizan para poder responder a las diferentes interrogantes que proporciona la actividad. El profesor muchas veces subestima a sus estudiantes, piensa que estos no son capaces de realizar la actividad, nuestro consejo es que se atrevan a poner actividades donde estos sean los protagonistas, en donde la respuesta final no sea lo primordial, sino que el centro esté en el proceso que realizó el estudiante. Ejemplo claro es lo que sucedió con el grupo nº 1, ya que estos no pudieron realizar la actividad 4, pero si uno mira el proceso puede dar cuenta que construyeron relaciones, hubo relaciones con simetrìas, construyeron el dominio y recorrido, relacionaron distancias y esto es fundamental, ya que sin institucionalizar el concepto función, son capaces de acercare con construcciones propias. En el caso del grupo nº2 no les enseñaron plano cartesiano y esta actividad (si bien les costó) les permitió construir el plano pero además construir los distintos elementos que engloba la función y que hemos descrito durante todo estes trabajo.
Una de las conclusiones que uno puede observar en el trabajo es que sin necesidad de saber los concepto a través de actividades como esta los estudiantes son capaces de formarlo e interiorizarlo, pero mientras uno este "más limpio"·, es decir, menos normado por lo que dice los programas, permite que los estudiantes puedan ser más libres y tener mayor profundidad en las construcciones, ya que no hay algo que los norme. En el caso de nuestra enseñanza, el álgebra norma al proceso de aprendizaje de las matemáticas, podemos dar cuenta que el grupo nº1 las respuestas son más apegadas a lo que se hace usualmente en la escuela, en cambio en el grupo nº2 y que vienen de una realidad totalmente distinta, son capaces de responder en base a lo que la actividad les proporciona.

Uno de nuestros objetivos era la resignificación del concepto función mediante la argumentación gráfica, pero para esto dijimos que era fundamental construir el concepto de relación, el de dominio y recorrido y finalmente el de unicidad, en ambos grupos podemos observar que los primeros dos elementos fueron construidos en su totalidad, pero en el caso de la unicidad es importante comentar nuestro parecer sobre las respuesta otorgadas por los distintos grupos. En el grupo nº1 se acercaron no lograron establecer la unicidad, ya que se centraron en las formas al momento de clasificar, es importante mencionar que estoso estudiantes trataron de responder con elementos que estaban viendo en clases y desde ahí queremos afirmar lo siguiente "los estudiantes tienden a visualizar la actividades con lo que el profesor está viendo en clases" si bien el programa norma al profesor en las materias que este debe pasar, esto causa un fenómeno en el estudiante también y es que

implícitamente el programa también norma al estudiante, es decir, si el estudiante esta trabajando con isometrías tiende a pensar y relacionar todo con isometrías porque piensa que es lo que el profesor quiere que ellos respondan. En cambio en el grupo nº 2 fueron capáces de construir la

unicidad y fueron más allá, ya que generalmente nosotros presentamos un plano estático, es decir, la coordenada x, está en la horizontal y la coordenada y, en la vertical, pero si uno lo mira al revés ¿está mal? Claramente según nuestra percepción no están errados y más aún dan evidencia que tienen una construcción más profunda de lo que es la función. Esto lo podemos percibir cuando dicen las gráficas que no cumplen, es más, son capcaces de decir como deberían ser para que cumplieran la condición. Es aquí donde queremos profundizar en que en el transcurso de la historia hemos ido creando obtáculos y estos después repercuten en los procesos de enseñanza superior, por ejemplo el plano tiene coordenadas (x,y) ¿ podría ser (a,b), u otro ? ¿por qué no?, porque siempre se les presenta a los estudiantes f(x), podría ser ¿ g(u)? Esto causa que el estudiante tenga el centro en la notación y no en la esencia de lo que es el concepto, por lo que estes al momento de presentar de manera algebraica f(x) dicen que es función, pero al presentarles g(u) dicen que no es función. Es aquí la importancia de lo hecho por el grupo nº2, ya que como no tienen la noción de plano cartesiano, ellos no estan limitado a que el eje x es el de la horizontal y el eje y el de la vertical, por lo que para ellos el plano no es estático, si no, que lo pueden mover y en base a eso, teniendo en cuenta la esencia de la pregunta y no centrandose en la norma dada por los programas, son capaces de poner en juego y construir el concepto completo de función.

Referencias

Alfaro, S. Chala, J. Espinoza, Y. Guajardo, I. y Hurtado, M. (2014). Texto para el estudiante Matemática 8º.Editorial Galileo.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemológica del aspecto periódico de las funciones. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9(2), 227-251.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione graficanell'insegnamento-apprendimentodella matemática. La Matemática e la sua Didattica, 20(1), 59-79.

Cordero F. & Flores R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *10(1) 7-38. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500102*

MINEDUC, (2013). Bases Curriculares 7° básico a 2° medio. Recuperado el 24 de junio de 2014 en www.mineduc.cl/index5_int.php?id_portal=47&id_contenido=17116&id_seccion=3264&c=1

Rico. L (2007). La competencia matemática en PISA, PNA, I(2), 47 – 66. Recuperado el 24 de junio de 2014 de http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Rico2007PNA1%282%29Lacompetencia.pdf

Ruiz-Higueras, L. (1994). Concepciones de los alumnus de Secundaria sobre la noción de function: análisis epistemológico y didáctico. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Jaén. España

Suárez, L. & Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 3(1), 51-58. ISSN 1850-6666.

Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(4), 319 – 334. ISSN: 1665-2436.

MATICES EN LA TEMATIZACIÓN DEL ESQUEMA DE LA DERIVADA

Fuentealba, C.[a], Badillo, E.[b], Sánchez-Matamoros, G.[c]

[a y b]Universidad Austral de Chile, [b]Universidad Autónoma de Barcelona, [c]Universidad de Sevilla;
[a]cfuentealba@uach.cl, [b]Edelmira.Badillo@uab.cat, [c]gsanchezmatamoros@us.es

Resumen

En el presente trabajo nos centramos en el análisis de la comprensión de la derivada en estudiantes universitarios con instrucción previa en cálculo diferencial. Por una parte, consideramos los elementos teóricos y analíticos propuestos por la teoría APOE en relación a la tematización de un esquema y por otra, la configuración del concepto de derivada caracterizada por: los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los modos de representación que los estudiantes utilizan al resolver una tarea. Los resultados sugieren que tematizar el esquema de la derivada es difícil de lograr y que además, existen matices entre quienes lo consiguen observándose diferencias en la forma de establecer las conexiones entre las derivadas sucesivas de una función.

Palabras clave: *derivada, esquema de derivada, tematización*

INTRODUCCIÓN

El concepto de derivada, es sin lugar a duda, uno de los elementos fundamentales y estructurantes de cualquier curso de cálculo o análisis matemático. Nadie discute su importancia y es por ello que está incluido en los currículos tanto de matemáticas como del área científica. Sin embargo, a pesar de la importancia del cálculo, un problema aún sin solución es cómo lograr el aprendizaje por parte de los estudiantes de la diferenciación o la integración que corresponden a los conceptos fundamentales de este curso. Según Artigue (1995) la enseñanza tradicional, en particular, la enseñanza universitaria, aunque tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo evaluando en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Esto ha provocado que un gran número de estudiantes prefieran utilizar dichas técnicas para resolver las tareas que se les proponen, lo cual generalmente no los lleva a un camino óptimo de resolución. De esta forma, a pesar de que el concepto de derivada posee una amplia gama de aplicaciones en distintas disciplinas científicas, su comprensión por parte de los estudiantes resulta ser un reto cognitivo.

Esta complejidad presente en la comprensión del concepto de derivada ha motivado a varios investigadores a abordar la problemática desde diversos planteamientos teóricos aportando información que, sin duda, ha tenido consecuencias positivas en el desarrollo del currículo de cálculo y específicamente sobre el concepto de derivada. Sin embargo, se hace necesario ahondar en la compresión que los estudiantes logran construir del concepto de derivada, una vez acabado un proceso de instrucción, considerando la multidimensionalidad que lo configura.

Marco teórico

El presente trabajo considera los aportes teóricos y analíticos planteados por la Teoría APOE (Arnon et al., 2014; Asiala et al., 1997), los cuales permiten describir tanto el camino como la construcción de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas realizadas por un individuo durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático. En este marco se considera que el principal mecanismo de construcción de conocimiento matemático es la abstracción reflexiva y que la comprensión de un concepto por parte de un estudiante comienza con la manipulación de los

objetos físicos o mentales previamente construidos en términos de acciones. Las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas (Dubinsky, 1991). Los esquemas corresponden a la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas (Asiala et al., 1997). En relación a los esquemas, Piaget y García (1983, 1989) indican que estos crecen según ciertos mecanismos y se desarrollan o evolucionan pasando por tres niveles, intra-inter-trans, denominado triada que se suceden según un orden fijo, caracterizándose por el grado de construcción de relaciones entre los elementos matemáticos constitutivos del concepto. En este sentido, Trigueros (2005) indica que cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre estos. Ante una misma situación, diferentes estudiantes, utilizan los mismos conceptos y diferentes relaciones entre ellos. Por lo tanto, a la hora de analizar el nivel de comprensión de un esquema es necesario observar los elementos matemáticos utilizados y los tipos de relaciones establecidos entre ellos que corresponderían a las partes constituyentes del esquema (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006).

Para el objetivo de nuestro estudio consideramos los aportes de la teoría relacionados con la tematización de un esquema, la cual según Cooley, Trigueros y Baker (2007) implica la coherencia del esquema, es decir, la posibilidad de que el sujeto reconozca las relaciones que están incluidas en el esquema y sea capaz de decidir qué problema puede resolverse utilizando el esquema y cuál no. En este mismo sentido y en relación a la tematización del esquema de la derivada consideramos, por una parte, los aportes realizados por Baker, Cooley y Trigueros (2000) que indican que la tematización puede observarse cuando un estudiante es capaz de movilizar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos a una situación nueva (modificación de condiciones de las tareas del cuestionario) y, por otra, los resultados de García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011) que mencionan que la tematización del esquema puede observarse cuando un estudiante es capaz de establecer correctamente conexiones entre las derivadas sucesivas de una función, es decir, cuando toma conciencia de que el operador derivada es transformación lineal que se puede generalizar.

Metodología

Los participantes de este estudio correspondieron a 25 estudiantes universitarios, de los cuales, 17 eran estudiantes de tercer curso de Ingeniería en Organización Industrial de una universidad privada y los restantes 8 estudiantes, pertenecían al primer curso de licenciatura en Matemáticas y Física de una universidad pública. Es importante destacar que todos los estudiantes poseían instrucción previa en cálculo diferencial.

El primer instrumento aplicado correspondió a un cuestionario en el cual se planteaban tres tareas sobre la comprensión del concepto de derivada, dichas tareas tenían como base investigaciones previas realizadas (Baker et al., 2000; García et al., 2011). La resolución de las tareas involucraba el uso de los elementos matemáticos que configuran el concepto tales como: los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los modos de representación (Tabla 1).

Tabla 1. Descripción de la conexión entre los modos de representación y elementos matemáticos puntuales/globales necesarios para responder a las tareas

Tarea 1
Modo de representación: analítico → gráfico
Elementos matemáticos: Interpretación analítica de la derivada y sus implicaciones sobre la gráfica de la función (existencia de valores extremos, puntos de inflexión). Signo de la primera derivada y su relación con respecto a los intervalos de monotonía de la función. Signo de la segunda derivada y su relación con respecto

a los intervalos de convexidad de la función
Tarea 2 *Modo de representación*: gráfico→ analítico → gráfico *Elementos matemáticos*: Interpretación geométrica y analítica de la derivada (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía y convexidad de la función y su relación con el signo de la primera derivada o segunda derivada según sea el caso. El operador derivada (si f es una parábola entonces f' es una recta)
Tarea 3 *Modo de representación*: gráfico → analítico → gráfico *Elementos matemáticos*: Interpretación geométrica (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía de la primera derivada y su relación con el signo de la segunda derivada (intervalos de convexidad de la función). Intervalos de cambio de signo de la primera derivada y su relación con respecto a la monotonía de función

A modo de ejemplo, presentamos la primera tarea del cuestionario estudiantes. Como se observa en la Figura 1, se entrega información analítica de la función f en términos de f' y f'', a partir de ello se les solicita a los estudiantes esbozar la gráfica de la función f. Uno de los objetivos de esta tarea fue observar si los estudiantes eran capaces de establecer las relaciones tanto puntuales como globales que asocian: el signo de f' en un intervalo con la monotonía de f en dicho intervalo, el signo de f'' en un intervalo con la concavidad de f en el intervalo y los ceros de f' con la posible existencia de valores extremos o puntos de inflexión. Por otra parte, se pretende verificar si los estudiantes son capaces de identificar las contradicciones presentes en las condiciones analíticas entregadas y además, plantear una modificación que les permita dar una solución adecuada de la tarea mostrando de esta forma coordinación de los elementos matemáticos entregados.

Esboza la gráfica de una función f que satisface las siguientes condiciones:

a) f es continua
b) $f(2)=0$
c) $f'(3)=f'(5)=0$
d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-4$
e) $\lim_{x\to 8} f(x)=-\infty$
f) $f'(x)<0$ cuando $5<x<8$
g) $f'(x)\geq 0$ cuando $x<5$
h) $f''(x)<0$ cuando $3<x<8$
i) $f''(x)>0$ cuando $x<3$

Figura 1. Enunciado de la Tarea N°1 del cuestionario

A partir del análisis de los protocolos obtenidos con el primer instrumento logramos clasificar a los estudiantes en distintos niveles de comprensión del esquema de la derivada (Tabla2).

Tabla 2. Niveles de comprensión del esquema de la derivada Sánchez-Matamoros et al. (2006)

Intra: No se establecen relaciones lógicas, y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) se realizarán con errores. Los estudiantes usan los elementos matemáticos de forma aislada (y a veces de forma incorrecta).
Inter: Los estudiantes establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, pero con limitaciones, predominando el uso de la conjunción lógica relacionando sólo elementos matemáticos que se encuentren en el mismo modo de representación analítico o gráfico. El estudiante es capaz de usar más elementos matemáticos de forma correcta que en el nivel anterior.
Trans: Aumenta el repertorio de las relaciones lógicas que el estudiante es capaz de establecer entre diferentes los elementos matemáticos (y lógica, contrarrecíproco, y equivalencia lógica). En este nivel se produce la síntesis de los modos de representación y lleva a la construcción de la estructura matemática. La síntesis se aplica a situaciones en las que hay que relacionar (relación lógica) información gráfica y analítica, es decir, usar información procedente de dos sistemas de representación diferentes para considerarla conjuntamente y obtener una información que no se

conocía.

Además, nos entregó información para la elaboración del segundo instrumento que fue aplicado a los estudiantes que poseían un nivel trans de comprensión del concepto y que posiblemente habían tematizado el esquema. Este segundo instrumento correspondió a una entrevista clínica que tuvo dos finalidades: (i) profundizar en el proceso de resolución de la secuencia de tareas propuestas a los estudiantes e (ii) indagar en las posibles manifestaciones de tematización del esquema. Esta entrevista clínica estaba conformada por dos tipos de interrogantes (Tabla 3) las primeras se relacionaban con modificaciones de las condiciones de la tareas propuestas en la secuencia y las segundas buscaban observar las relaciones que los estudiantes establecían entre las derivadas sucesivas de una función.

Tabla 3. Algunas de las preguntas planteadas en las entrevistas

Tarea	Pregunta
1	¿Existe algún cambio significativo en la gráfica de la función si eliminamos la condición c?
2	Al modificar la condición de que la gráfica dada es la de la función derivada y no la de la función ¿Qué pasa en los puntos $x=7$, $x=10$ y $x=14$?
3	Explica cómo interpretas la información de x_0. ¿Qué puedes decir sobre las derivadas sucesivas derivadas sucesivas (f', f''y f''') en $x=1$, $x=3$ y x_0? Justifícalo. (x_0 correspondía a un punto de inflexión de f')

Análisis y resultados

Como primer paso realizamos un análisis de las respuestas de los 25 estudiantes a cada una de las tareas propuestas del cuestionario considerando como criterio de valoración, la completitud de cada una de las tareas y de la secuencia en general. A partir de este análisis redujimos el número de sujetos de estudio a nueve casos los que clasificamos en los distintos niveles comprensión del esquema. Posteriormente, nos centramos en el análisis de tres estudiantes que denominamos A1, A3 y A4 los cuales fueron clasificados en un nivel de comprensión trans del esquema y manifestaban características que nos permitían inferir una posible tematización del mismo, a ellos les aplicamos las entrevistas clínicas. Con la información obtenida por medio del cuestionario y las entrevistas clínicas logramos observar que los estudiantes que habían tematizado el esquema mostraban coherencia y flexibilidad del esquema al responder y argumentar correctamente a las modificaciones de las condiciones de las tareas, sin embargo, se observaban diferencias en el uso que los estudiantes hacían de las derivadas sucesivas mostrando diferencias en la forma de establecer y argumentar dichas relaciones, lo cual nos permitió definir tres tipos de conexiones entre las derivadas sucesivas de una función (Tabla 4) y que hemos denominado como conexiones: inicial, indirecta y directa.

Tabla 4. Tipos de conexiones entre las derivadas sucesivas de una función

Inicial: Logra establecer las conexiones entre las derivadas sucesivas pero duda de sus afirmaciones
Indirecta: Establece con seguridad las conexiones utilizando funciones auxiliares
Directa: Establece directamente y con seguridad las conexiones entre las derivadas sucesivas de una función

A modo de ejemplo, presentamos un fragmento de la entrevista al estudiante A1 que muestra evidencia de una conexión de tipo directa.

E: Ya ¿y cuál sería su valor o cuánto valdría $f'\ldots$, f''en x_0?

A1: La f'', está creciendo por lo que también es positiva. La f'''ya estaría anulada.

E: ¿Y por qué estaría anulada?

A1: Porque hay un punto de cambio de concavidad.

E: Ah, ok. O sea tú lo que estás haciendo es trasladar relaciones que…

A1: En cambio de mirar lo, lo…, la f'' en función de la…, o sea, en cambio de mirar la f'' en función de la primera función, veo la f''' en función de f'.

CONCLUSIONES

Hemos encontrado evidencia que los estudiantes con el esquema tematizado muestran coherencia y flexibilidad en el uso de los elementos matemáticos (puntuales/globales, analíticos/gráficos) que conectan la función con la primera y segunda derivada, tanto en las relaciones directas como contrarias. Sin embargo, observamos diferencias en cuanto a la extensión de dichas conexiones con otras derivadas sucesivas, ya que mientras algunos estudiantes dudan de las conexiones entre f, f', f'' y f''', otros son capaces de hacer uso directo de ellas, mientras que otros necesitan referirse a una función auxiliar F que hacen corresponder con f' y partir de las conexiones entre F, F' y F'' resuelven las tareas y trasladan sus respuestas a f, f', f'' o f'''.

Finalmente, los resultados muestran que lograr tematizar el esquema de derivada al finalizar un proceso de instrucción, no es fácil, lo cual queda de manifiesto en que de un total de 25 estudiantes con instrucción previa en cálculo diferencial solo tres pudieron conseguirlo.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M.,Weller, K. (2014). APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. MAA NOTES, 37–54.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp.97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. Journal for Research in Mathematics Education, 31(5), 557-578.

Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. Journal for Research in Mathematics Education, 38(4), 370-392.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, 95–123.

García, M., Llinares, S., y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. International journal of science and mathematics education, 9(5), 1023-1045.

Piaget, J., y García, R. (1983, 1989). Psicogénesis e historia de la ciencia. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo veintiuno editores, S.A.

Sánchez-Matamoros García, G., García Blanco, M., & Llinares Ciscar, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. Enseñanza de Las Ciencias, 24(1), 85–98.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación Matemática, 17(1), 5–31.

LA CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS DE ÁLGEBRA LINEAL A TRAVÉS DE LOS MODELOS EMERGENTES

Cárcamo, A. [a], Fortuny, J. [b], Gómez, J. [c]

[a y b] Universidad Austral de Chile, [b] Universidad Autónoma de Barcelona, [c] Universidad Politécnica de Cataluña;
andrea.carcamo@uach.cl, JosepMaria.Fortuny@uab.cat, joang@ma4.upc.edu

Resumen

Álgebra lineal es un curso reconocido por sus dificultades tanto cognitivas como conceptuales. Para contribuir a minimizarlas se elaboró y evaluó un diseño instruccional innovador basado en los modelos emergentes y la modelización matemática para los conceptos de conjunto generador y espacio generado a través de la investigación de diseño con estudiantes universitarios. Los resultados sugieren que este tipo de diseño instruccional favorece la construcción de estos conceptos matemáticos, por tanto, podría ser utilizado como una alternativa, a la enseñanza tradicional, para estos y otros conceptos de álgebra lineal.

Palabras clave: *modelos emergentes, modelización matemática, conjunto generador, espacio generador, investigación de diseño*

INTRODUCCIÓN

Álgebra lineal es difícil para los estudiantes tanto cognitiva como conceptualmente (Dorier y Sierpinska, 2001) y es por esta razón que se han buscado diversas alternativas para su enseñanza como incorporar el proceso de modelización matemática en este curso porque resulta ser una metodología eficaz y una correa de transmisión que proporciona la adquisición de conocimientos a la vez que establece el vínculo entre la matemática y la realidad (Gómez y Fortuny, 2002).

Por su parte, Wawro, Rasmussen, Zandieh, Sweeney y Larson (2012) señalan que la teoría de diseño instruccional de la educación matemática realista (EMR) podría promover la comprensión de las ideas claves de álgebra lineal al concebir la matemática como una actividad humana y ser el estudiante quien construye su conocimiento desde una situación experiencial hacia un conocimiento más formal por medio de la heurística de los modelos emergentes de Gravemeijer (1999).

A partir de lo expuesto, surge el interés de diseñar y aplicar un diseño instruccional innovador para álgebra lineal que considere la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática. Para ello, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué aporta un diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática a la construcción de conjunto generador y espacio generado? Para responder a esta pregunta se plantea como objetivo diseñar, implementar y evaluar un diseño instruccional fundamentado en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática**.**

Marco teórico

El marco teórico de esta investigación complementa la heurística de los modelos emergentes con la modelización matemática porque sustentan el diseño instruccional utilizado en este estudio.

La heurística para el diseño instruccional de los modelos emergentes se presenta como una alternativa para los métodos de enseñanza que se centran en la enseñanza de las representaciones ya

hechas y tiene como objetivo el diseño de actividades de instrucción que apoyen a los estudiantes a desarrollar las herramientas matemáticas que pueden necesitar más adelante (Gravemeijer, 2002).

Gravemeijer (2002) señala que la transición del *modelo de* actividad matemática informal al *modelo para* el razonamiento matemático formal ocurre con un cambio y evolución en el pensamiento de los estudiantes en donde cambian la situación que es experiencial para ellos por un enfoque de relaciones matemáticas Para el progreso desde la actividad matemática informal a un razonamiento matemático formal Gravemeijer (1999) establece los modelos emergentes que corresponden a cuatro niveles de actividad: situacional (el conocimiento del problema y las estrategias son utilizados en el contexto de la situación misma), referencial (implica modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que se refieren al problema de la actividad situacional), general (se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior pero con un foco matemático sobre las estrategias sin hacer referencia al problema) y formal (se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales).

La actividad situacional de los modelos emergentes considera una situación realista que no solo involucra situaciones del mundo real sino que en general, se refiere a situaciones problemáticas que los estudiantes pueden imaginar (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014). En particular, en este estudio se considera una situación del mundo real y la modelización matemática como una herramienta de ayuda al estudio de las matemáticas porque a nivel universitario, de acuerdo a Alsina (2007), los estudiantes aprenden mejor en contexto, ya sea porque proporciona motivación e interés o porque involucra a los estudiantes en la resolución de problemas del mundo real.

Metodología

El estudio tiene como principal objetivo evaluar un diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática para la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado. La metodología para este estudio es la investigación de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008). En la primera fase se elaboró una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995). A continuación, en una universidad española se realizaron dos ciclos de experimentación de diseño con estudiantes de primer año en donde participaron 31 del curso 2013-2014 y 45 del periodo 2014-2015. Los datos recopilados en ambos ciclos de diseño fueron: protocolos escritos de las actividades de aprendizaje desarrolladas por los estudiantes en grupo, vídeo y grabaciones en audio y entrevista individuales al finalizar la experimentación.

El análisis de datos se inició con la organización, anotación y descripción de estos. Inicialmente, las tareas desarrolladas por los estudiantes y las grabaciones fueron analizadas por el equipo de investigación desde la perspectiva de la pregunta de investigación. Posteriormente, los datos recopilados se analizaron identificando ejemplos en que se manifestaba algún cambio del razonamiento informal a uno más formal con respecto a los conceptos estudiados. A partir de este análisis, se creó una historia que reconstruye el proceso de aprendizaje que siguieron los estudiantes.

En la Tabla 1 se presenta una síntesis de cómo se manifiesta la heurística de los modelos emergentes en las tareas que forman parte del diseño instruccional.

Tabla 9. Descripción de las tareas del diseño instruccional y su relación con los niveles de actividad de Gravemeijer

Descripción de tarea	Qué niveles de actividad se manifiestan en la tarea
Tarea 1: Generando contraseñas con vectores. Se les entrega información de la importancia de las contraseñas seguras, las características que deben tener y ejemplos de cómo crear contraseñas con Excel. A partir de esto, inventan un generador de contraseñas seguras utilizando vectores.	Nivel situacional. Los estudiantes utilizan sus estrategias en conjunto con sus conocimientos de matemática y de contraseñas para elaborar un generador de contraseñas seguras.
Tarea 2: Relacionando el generador de contraseñas con conjunto generador y espacio generado. De acuerdo con la solución de su generador de contraseñas se les pide dos conjuntos: uno que posea todas las contraseñas numéricas de su generador de contraseñas y otro que tenga vectores numéricos que al hacer la combinación lineal de ellos se obtenga el vector genérico que genera sus contraseñas numéricas. Luego que el profesor introduce los conceptos, realizan una analogía entre estos y su generador de contraseñas.	Nivel referencial. Los estudiantes haciendo referencia a la solución propuesta de su generador de contraseñas presentan dos conjuntos con determinadas características y luego, que el profesor define formalmente los conceptos, enlazan esta nueva realidad matemática con el problema real, al hacer una analogía entre ellos.
Tarea 3 y 4: Explorando propiedades y Aplicando lo aprendido. Utilizan los conceptos de conjunto generador y espacio generado para explorar y profundizar en relación a ellos usando la notación matemática convencional.	Nivel general y formal. Los estudiantes exploran y aplican conjunto generador y espacio generado usando la notación matemática convencional.

RESULTADOS

Los resultados del segundo ciclo de experimentación se presentan a través de la historia del proceso de aprendizaje que siguieron los estudiantes en relación a las tareas del diseño instruccional.

Tarea 1: Crear un generador de contraseñas seguras en que se utilice vectores

La primera tarea fue una actividad situacional porque los estudiantes se centraron en el problema de crear un generador de contraseñas utilizando sus concepciones previas de vectores y de contraseñas. Los modelos matemáticos que propusieron los grupos de estudiantes fueron principalmente dos: vector genérico o combinaciones lineales (Ver ejemplos en la Tabla 2).

Tabla 2. Ejemplos de modelos matemáticos para generar contraseñas presentados por los grupos

Ejemplo vector genérico	Ejemplo combinación lineal
$P=(x,2x,y,3y,z,4z)$	$vector\,1: a(3,-3,4)+b(-1,1,2)+c(0,4,2)$
	$vector\,2: a(1,2,-3)+b(-4,9,2)+c(2,0,-7)$

Por consiguiente, los estudiantes tuvieron una primera aproximación con los conceptos de conjunto generador y espacio generado cuando anotaron dos conjuntos: uno que contenía todos los vectores que generaban las contraseñas numéricas y otro que poseía los vectores numéricos que permitían obtener los vectores numéricos para generar contraseñas al hacer la combinación lineal entre ellos.

Tarea 2: Realizar una analogía entre el generador de contraseñas y los nuevos conceptos

En esta tarea el razonamiento de los estudiantes se correspondió con un nivel referencial, pues utilizaron su experiencia con la resolución del problema de contraseñas para relacionarla con conjunto generador y espacio generado a través de una tabla de analogía en que vincularon los dos conjuntos asociados a su generador de contraseñas con conjunto generador y espacio generado. Cabe señalar que en todas las tablas de analogía se observó falta de rigurosidad con la notación matemática, tal como se observa en la Figura 1 con la notación matemática del conjunto generador.

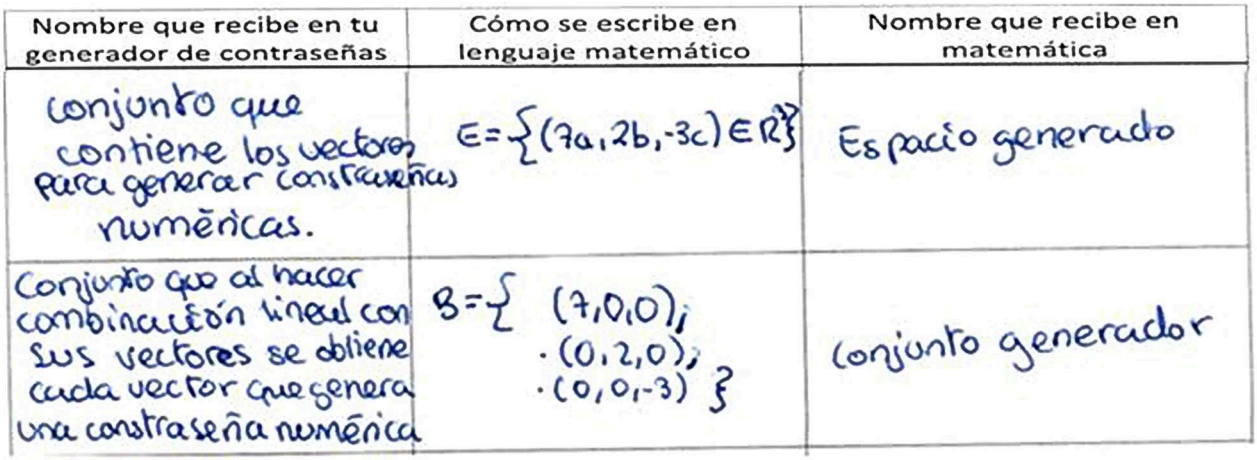


Figura 1. Ejemplo de respuesta de la tabla de analogía entre el generador de contraseñas y los conceptos de conjunto generador y espacio generado

Tarea 3: Explorando propiedades

La tarea 3 fue una actividad general porque los estudiantes aplicaron los conceptos de conjunto generador y espacio generado sin referirse a la situación de generar contraseñas y exploraron propiedades de estos al plantearle preguntas como: ¿Cuántos vectores debe tener como mínimo un conjunto para generar a R^2? ¿Existirá un número máximo? La mayoría de los estudiantes conjeturó correctamente al señalar que el mínimo son dos vectores y que no hay un máximo.

Tarea 4: Aplicando lo aprendido

La tarea 4 fue una actividad formal, pues los estudiantes aplicaron los conceptos de conjunto generador y espacio generado en un contexto puramente matemático. Por ejemplo se les preguntó si dos vectores determinados pertenecen a un cierto espacio generado y la mayoría de los estudiantes respondieron y justificaron adecuadamente. Lo anterior, da indicios que los estudiantes progresaron hacia un razonamiento más formal de espacio generado porque fueron capaces de trabajar con este concepto en un problema matemático convencional.

CONCLUSIONES

La principal contribución de este estudio es una propuesta de enseñanza para conjunto generador y espacio generado, ya que existen escasas investigaciones de estos conceptos en el campo de la educación matemática y además, es una metodología alternativa a la tradicional para álgebra lineal que podría ser implementada para otros conceptos de este curso de acuerdo a los resultados de esta investigación.

En este estudio se planteó la pregunta sobre qué aporta un diseño instruccional basado en la modelización matemática y la heurística de los modelos emergentes a la construcción de conjunto generador y espacio generado. A partir del análisis de datos se observa que las siguientes características del diseño instruccional aportan en la comprensión de estos:

- Los estudiantes a través de la creación de un generador de contraseñas activaron sus concepciones previas de vectores y combinación lineal lo que les ayudó a conectar éstas con

la siguiente tarea que procuraba una primera aproximación de conjunto generador y espacio generado.

- La tabla de analogía entre el contexto de generar contraseñas numéricas y los conceptos en estudio ayudó a los estudiantes a visualizar estos tanto en un contexto real como matemático, al mismo tiempo que les ofreció la posibilidad de diferenciarlos al utilizarlos en una situación real.
- Las tareas 3 y 4 permitieron que los estudiantes progresaran hacia un nivel más formal de los conceptos en estudio, por ejemplo, al conjeturar acerca de las características que deben tener los conjuntos para generar un cierto espacio generado y a continuación, aplicar los conceptos en un contexto convencional matemático.

Finalmente, señalamos que la heurística de los modelos emergentes no sólo orientó el diseño instruccional, sino que además, favoreció el desarrollo cognitivo de los estudiantes, al usar implícitamente los conceptos de conjunto generador y espacio generado en el contexto de generar contraseñas para posteriormente, utilizarlo en problemas matemáticos convencionales, es decir, les permitió realizar una transición desde un *modelo de* a un *modelo para* como plantea Gravemeijer (1999). Lo expuesto da indicios que este diseño instruccional resultó adecuado.

Referencias

Alsina, C. (2007). Teaching applications and modelling at tertiary level. En Modelling and Applications in Mathematics Education (pp. 469-474). New York: Springer.

Cobb, P., y Gravemeijer, K. P. E. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En Anthony E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), Handbook of design rsearch methods in education innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching (pp. 68-95). New York, NY: Routledge.

Dorier, J. L., y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of Linear Algebra. En D. Holton (Ed.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study (pp. 255–273). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Gómez i Urgellés, J. V. y Fortuny, J. M. (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. Uno: Revista de didáctica de las matematicas, (31), 7-23.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. Mathematical Thinking and Learning, 1, 155-177.

Gravemeijer, K. (2002). Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. En B. Phillips (Ed.), Proceedings of the 6th International Congress on Teaching Statistics. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Recuperado de http://iase-web.org/documents/ papers/ icots6/2d5_grav.pdf

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26, 114-145.

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Sweeney, G. F., y Larson, C. (2012). An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence. PRIMUS, 22(8), 577-599.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En Encyclopedia of mathematics education (pp. 521-525). Dordrecht: Springer Netherlands.

DESARTICULACIÓN DE LAS PRAXEOLOGÍAS QUE SE PONEN EN JUEGO EN LOS TEXTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

Rojas Salinas, Patricia

Universidad del Bío-Bío
; paesrojas@gmail.com

Resumen

Los textos han sido un referente a lo largo de la historia de la Educación Matemática, desde el punto de vista del profesor: para preparar las clases, citar los teoremas, buscar ejercicios o problemas y desde la visión de alumno: para estudiar los teoremas, revisar los ejercicios desarrollados para ver los mecanismos y seleccionar del listado de ejercicios propuestos los que les parezcan más pertinentes para resolver; no obstante en muchas oportunidades las Praxeologías presentadas en los textos son incompletas, lo que torna esta revisión, sea cual sea su uso, un simple repetir técnicas de resolución, provocando una desarticulación entre las tareas, los problemas, las técnicas que se construyen y utilizan con los aspectos descriptivos que las organizan.

Palabras clave: *Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Praxeología, Organización Matemática (OM).*

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es exhibir el análisis del Fenómeno de la Desarticulación del Cálculo Diferencial del Integral desde el punto de vista de la institución, se enmarca dentro de un trabajo doctoral, pero para efecto de este escrito se exhibirá el análisis de texto del concepto de derivada y se mostrarán las conclusiones generales.El diseño metodológico fue flexible puesto que la TAD tiene su propia metodología de investigación, para lo relacionado con los instrumentos de toma de datos se utilizó un paradigma cuantitativo. Se analizan las Praxeologías que se ponen en juego en una Universidad, para lograrlo se desarrollaron varias actividades: Se parte por la confección de un instrumento, el cual se validó usando juicio de expertos, éste permitió descifrar cuales son los textos de mayor uso por los profesores de Cálculo Diferencial e Integral para la planificación de sus clases y cuáles son los textos que mayormente recomiendan a sus estudiantes.

La razón: "Al momento de planificar una asignatura, los libros de texto tienen gran influencia, pues cada uno tiene una perspectiva de los conceptos que se ve reflejado tanto en el orden que se da a estos, como en los ejercicios o ejemplos que se muestran en ellos".

En muchas oportunidades se trabaja en base sólo a las acciones de repetir desde un modelo prescrito por el profesor o en este caso dado por los textos de mayor uso. Se recurre a "La Teoría Antropológica de lo Didáctico" (TAD), y tomamos de ella el constructo de Praxeología.

Para esto diremos que, la Praxeología Matemática u Organización Matemática es la herramienta que permite modelizar en detalle las actividades matemáticas, posee componentes fundamentales, como lo son según Chevallard, Bosch y Gascón (1997), las Tareas, que son las cuestiones problemáticas presentadas y Las Técnicas que son una manera de realizar dichas tareas, ambas conforman el bloque de la "Praxis". Por otro lado la Tecnología, que es el discurso racional sobre la técnica y la Teoría que es el argumento formal que justifica a la tecnología, estos conforman el bloque del "Logos".

Se espera describir la actividad matemática, como actividad humana, observando cómo son dispuestas, es decir cuál es la estructura, funciones de estas en los libros de textos, analizando como han sido diseñados y gestionados los procesos didácticos. Es decir las Organizaciónes Matemáticas (OM) que se analizarán son las correspondientes a las siguientes cuestiones:

Q_0: ¿Cómo es presentado para su estudio el concepto de Derivada e Integral?

Q_1: ¿Cómo son las tareas planteadas, las técnicas y tecnologías usadas en la resolución de problemas? Y

Q_2: ¿Qué relación existe en ellas?

El objetivo es identificar cuáles son las praxeologías usadas en la construcción de los libros de textos, tomando en cuenta que el profesor al usarlos tomará de estos elementos que influirán de cierta manera en su quehacer, es más, en oportunidades, son esas mismas reconstrucciones de saberes matemáticos las que se enseñan, siendo los libros de texto reales intermediarios entre los diseños curriculares y la práctica docente en aula.

Desarrollo

Para hacerlo se observó que tipo de problemas se plantean, las técnicas de resolución, los discursos, como son planteadas las teorías, como se interpretan las soluciones, que tipos de relaciones se formulan, ¿Son realmente problemas o sólo ejercicios? Además se analizarán los teoremas más importantes, observando el lenguaje utilizado además de la articulación entre derivadas e Integrales.

Caracterizamos los problemas planteados en los textos según: Tarea, Técnica Matemática, Tecnología y Teoría; separando así los bloques Práctico-Técnico del Tecnológico-Teórico, además del análisis de la cantidad de ejercicios resueltos en cada caso y los propuestosen cada uno de ellos.

Para lograrlo se partió entrevistando a 20 profesores que imparten la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral y se les solicitó responder entre otros a las siguientes cuestiones:¿Cuáles son los tres textos que usa preferentemente para la planificación de un curso de Cálculo Diferencial e Integral? Y ¿Cuáles son los tres textos que mayormente recomienda a sus estudiantes de Cálculo Diferencial e Integral?

No podemos olvidar que el objetivo no es generar un ranking entre los textos, ni una comparación entre ellos, sino muy por el contrario se desea analizar las Praxeologías existentes en los textos de mayor uso.

La Hipótesis planteada es que las Praxeologías presentadas y trabajadas en los libros de textos, usados tanto por estudiantes, como profesores son incompletas.El siguiente gráfico muestra el resultado de la pregunta realizada a los 20 profesores respecto de: ¿Cuáles son los tres textos que usa preferentemente para la planificación de un curso de Cálculo Diferencial e Integral?

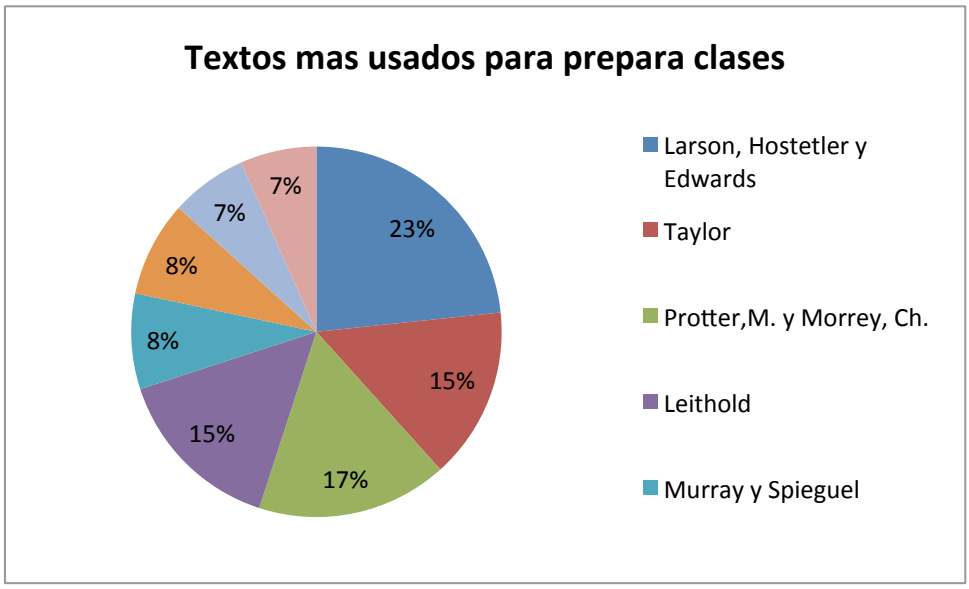


Figura Nº1: Resultado de encuesta a profesores, respecto de la pregunta ¿Cuáles son los 3 textos que más usa para preparar las clases?

Esto se confirma con conversaciones informales con encargados de bibliotecas en las universidades, respecto de los textos más solicitados, mas adelante tratamos de respondernos a cuestiones como el ¿cuál es la razón del uso de un u otro texto?Siendo así, se comenzó con la revisión de los textos siguiendo el orden de preferencia entregado por los profesores.

A modo de ejemplo presentaremos el análisis del que denominaremos Texto I que corresponde a Larson, Hostetler y Edwards, Partiremos diciendo que esta edición más actualizada y posee una capitularización que va desde: Los Números Reales, Funciones, Límites y Continuidad, Derivadas, aplicaciones de la Derivada hasta sucesiones y Series.Caracterizan esta edición los problemas de exploración; no debemos dejar de lado que el propósito de esta fase es que los alumnos identifiquen un problema o pregunta que genere una discusión en la cual pueden explicitar sus conocimientos y preconcepciones sobre el fenómeno. Además se abre el capítulo con una aplicación para la vida con el objetivo de motivar al estudiante, el texto sugiere el uso de calculadora para elaborar gráficas.

No podemos olvidar que la forma en la cual se realizó el análisis sostuvo que en el conjunto A:(técnica / tecnología) se afirma en un bloque teórico- práctico que puede desarrollar ampliamente un sujeto. Las Técnicas por su parte poseen carácter más empírico, procedimental más que racional.Por ejemplo: diremos que La Regla de los Cuatro Pasos para derivar una función es una Técnica.

Tecnología es la Teoría de las técnicas; son conocimientos de contenido racional que son transmisibles con cierto grado de precisión (por lo general a través de textos científicos, gráficos, tablas y representaciones funcionales variadas). Instrumento cuyo manejo implica ciertas destrezas que se conciben como técnicas; es decir es una herramienta conformada por los objetos matemáticos ordenados bajo una axiomatización, integra las argumentaciones prácticas con las puramente teóricas.

Ejemplo de tecnología es el concepto $f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. La Teoría por su parte correspondería al Análisis Matemático.

Volviendo al Texto I, a modo de ejemplo se muestra en la figura Nº2 el desarrollo del análisis que se realizó en la primerasección del libro.

Se construyó una tabla, para permitir un mejor análisis de manera tal de observar la separación de los bloques y la cantidad de ejercicios resueltos en cada caso, luego se indica los ejercicios propuestos correspondientes a cada secci

Tareas	*Ejerc.*	*Técnicas*	*Tecnologías*	*Teoría*
Identificar una recta tangente.	*1*	*Los cuatro pasos* *a)* **Dado** $f(x)$ se incrementa x $f(x+\Delta x)$. *b)* **Se** hace la diferencia $f(x+\Delta x)$ con $f(x)$. *c)* **Se** divide la diferencia entre *d)* **Se** aplica $\lim_{\Delta x\to 0}$ para de **la** derivada en la forma $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	*Definición de la derivada de una función* $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	*"Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite* $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = m$ *entonces, la recta que pasa por (c,f(c)) y cuenta con una pendiente m es la recta tangente a la gráfica de f en el punto (c, f(c))".* *la derivada de f en x viene dada por* $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ *siempre que exista ese límite. para todos los x para los que exista este límite, f´ es una función de x.* *derivable implica continua:* *si f es derivable en x = c, entonces f es continua en x = c.*
Encontrar la pendiente de: *a) la gráfica f(x) en un punto.* *b) la gráfica paralela a la recta dada.* *c) recta tangente a la gráfica de f(x).*	*1* *1* *1*			
Calcular la derivada de f(x)	*3*			

Figura N°2: Sección 1: La derivada y su interpretación geométrica

La revisión del texto I, nos entrega 8 ejercicios guía desarrollados paso a paso, claramente se muestran tres tipos de tareas para una misma técnica, se usa la noción de límite, como es común a encontrar en otros textos; además cuenta con 104 ejercicios propuestos, que se pretende realicen con el uso de la técnica descrita en la tabla.

El texto parte con el análisis de La derivada y su interpretación geométrica, presentando una noción histórica de trabajos matemáticos del siglo XVII, refiriéndose al la noción de límite dispuesta en problemas como:La recta tangente, La velocidad y Aceleración, Máximos – Mínimos y Área.

Es la noción de límite la que prevalece en la definición de recta tangente y derivada de una función, lo que se ve reflejado en los ejemplos que presentan la utilidad de la derivada para calcular ritmos de cambio, mencionando una función de velocidad y posición. Además, los Teoremas se demuestran usando límites, no obstante promueven el cálculo de las derivadas sin el uso directo de la definición de límites sino el mecanismo estos.

Del mismo modo se revisaron los demás capítulos, en general texto de uso bastante automático, con tendencia a la repetición de teoremas, observada en la forma de plantear los ejercicios, ya que estos solicitan el resolver, calcular, determinar sin permitir la deducción por parte del lector, en sus ejercicios se tiende a mecanizar las técnicas matemáticas. No se observa relación directa de la

Derivada con su función inversa lo que induce a pensar que trabaja los conceptos como totalmente aislados. Esto repercute en que el estudiante no genere un aprendizaje que le permita contextualizar luego en problemas que involucran ambas concepciones.

Es característica en el texto una cercanía entre la técnica y la tecnología, evidenciado en los ejemplos y su resolución.Si bien hay una concordancia en el orden del texto presenta la antiderivada, permitiendo al lector adentrarse en la búsqueda del conocimiento, los ejemplos y problemas planteados, no son más que ejercicios que carecen de Discusiones y la posibilidad para el lector avanzar en el conocimiento de forma que no sea solo funcional.

Se observa que es un texto que permite al estudiante, por su gran cantidad de ejercicios, impregnarse de los teoremas, pero al analizar los bloques técnicos nos damos cuenta que tienden a mecanizar las respuestas usando teoremas fijos sin permitir en el lector realice deducciones, responda usando otras nociones matemáticas. Por otro lado, al analizar el bloque de lo tecnológico observamos teoremas fijos, no un descubrir de concepciones, sino estándares de resolución.

Conclusiones en el análisis de los textos

Se evidencia que no existe búsqueda de modelos sino modelos estructurados, incitando un aprendizaje memorístico más que significativo.Si bien los teoremas presentados en los textos son suficientes para la resolución de los ejercicios, estos no salen del Calcular, resolver, determinar, demostrar; carecen del Discutir, evaluar, comprender, analizar, crear.Se espera que en este momento seamos capaces de idear, diseñar o tal vez construir elementos gracias a los conceptos, por tanto la necesidad está en llevar el conocimiento al nivel más alto posible.

Se recomienda reorganizar las OM, de manera tal que las tareas sugeridas permitan resolver mediante la elaboración de nuevas técnicas. Las tecnologías van al encuentro con la técnica, es decir el nivel de la praxis no aparece muy alejado del nivel del logos, no obstante como son planteados los ejemplos en un nivel básico del pensamiento así serán reproducidos tanto por profesores como estudiantes para así fomentar la construcción de Praxeologíasmas completas.

Referencias

Barquero, B. (2009). Ecología de la Modelización Matemática en la Enseñanza Universitaria de las Matemáticas. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Chevallard, Y. (1985). La TranspositionDidactique. Du savoir savant au savoir eneigné. Grenoble: La PenséeSauvage.

Chavallard, Y. Bosch, M. Gascón, J.(2000). Estudiar Matemática, El Eslabón Perdido entre Enseñanza y Aprendizaje. Barcelona: Editorial Horsori.

Larson, R. Hostetler, R. Edwards, B. (2009). Cálculo Integral. México: McGraw-Hill.

Larson, R. Hostetler, R. Edwards, B. (2009). Cálculo Diferencial. México: McGaw- Hill.

Otero, M. (2013). La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática. Argentina. ISBN 978-987-02-7071-3.

Protter, M. Morrey, Ch. (1986). Cálculo con Geometría Analítica. E.U.A.: Addison_WesleyIberoamericana,S.A.

Taylor, H. Wade, T. (2012). Cálculo Diferencial e Integral. México: Limusa S.A.

JUEGO DE LOS PARÁMETROS: FUNCIÓN CUADRÁTICA

Rubio-Pizzorno, S.[a], Miranda Molina, R[b].

[a]Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav), [b]Universidad de Santiago de Chile;
sergio.rubio@cinvestav.mx[a], rafael.miranda@usach.cl[b]

Resumen

El objetivo de este escrito es dar cuenta del diseño de un juego educativo, donde se estudia ciertos patrones de comportamiento, gráficos y analíticos, de la función cuadrática a través de la variación de parámetros. Atendiendo al propósito de usar la función como una instrucción que organiza comportamiento para hacer emerger la argumentación de Comportamiento Tendencial de la Función (cft). Añadido a esto, se consideran características inherentes a los juegos, donde el control de error juega un rol validador en el diseño de la situación. Todo esto articulado en las Hojas de Trabajo Dinámico (HTD) de GeoGebraTube, un ambiente digital en línea dispuesto para crear y compartir libremente material de aprendizaje.

Palabras clave: *Comportamiento tendencial, GeoGebraTube, control de error.*

COMPORTAMIENTO TENDENCIAL DE LAS GRÁFICAS

Al considerar situaciones donde se discuten aspectos generales de variación, como por ejemplo situaciones de transformación, es posible estudiar el uso de las gráficas para generar relaciones entre ellas. Considerando un objeto matemático en particular (función cuadrática) es posible relacionar distintas gráficas a través de la variación de los parámetros de una función prototipo a través de la expresión , generando patrones de comportamientos de esa función prototipo, , en términos de los parámetros . A la argumentación que emerge de esta situación se le conoce como *Comportamiento Tendencial de la Función (ctf)*, donde uno de sus propósitos es que los estudiantes logren reconocer a la función como una *instrucción que organiza comportamientos*, esto es, anticipar comportamientos gráficos de la función (Cordero, 1998).

CARACTERÍSTICAS DE LOS JUEGOS EDUCATIVOS

Debido a su naturaleza epistemológica, cualquier relación inmediata con la matemática es imposible; cualquier relación pasa a través de un proceso de *mediación*. En este sentido, las nuevas tecnologías presentan potencial muy prometedor para desarrollar tal mediación (Drijverset. al., 2010).

A la luz de esta afirmación, Del Castillo y Montiel (2009, p. 462) proponen que el ambiente informático permite al estudiante operar de una forma más directa con los objetos matemáticos y sus relaciones, concretando de alguna manera conceptos matemáticos abstractos. En este sentido los juegos, como ambientes digitales, permiten manipular los objetos matemáticos abstractos. Añadido a esta característica, también propician el desarrollo de actitudes y competencias esenciales para una vida en sociedad, tales como la resiliencia, trabajo en equipo, empatía, entre muchos otros. La posibilidad de desarrollar tales actitudes y competencias se deben que se enfrenta el juego con una disposición positiva a superar dificultades y volver a intentarlo en caso de fracasar, como dice McGonigal (2011) *nos volvemos la mejor versión de nosotros*:

> Cuando estamos en los mundos de los juegos creo que muchos nos volvemos la mejor versión de nosotros mismos, el más dispuesto a ayudar instantáneamente, el más tenaz para seguir con un

> problema lo que sea necesario, para levantarse después de fallar e intentar de nuevo. Y en la vida real, cuando fallamos, cuando afrontamos obstáculos a menudo no nos sentimos así. Nos sentimos vencidos. Nos sentimos abrumados. Estamos preocupados, quizá deprimidos, frustrados o somos cínicos. (McGonigal, 2010, m. 3:31)

Al desarrollar actividades de aprendizaje se podría pretender que el alumno tenga una actitud similar que al jugar un video juego, ya que su disposición a enfrentar dificultades, colaborar con otros y volver a intentar los retos en los que se ha fracasado, propicia una actitud favorable hacia la actividad, decantando en mayor motivación e interés.En consecuencia se pretende nutrir con las características recién descritas, al Juego de los Parámetros, el cual se encuentra en fase de desarrollo.

Al respecto Meira (2011) propone cinco premisas para aprendizajes significativos y perennes basadas en las tecnologías de la información y la cultura digital: *lucidad, interacción, narrativa, desafío y esfuerzo.* Por ejemplo la narrativa corresponde al hilo conductor del juego, la historia que sustenta el desarrollo de este. Por lo tanto debe contar con distintos eventos constituidos de un estado inicial, cambio de estado y la visión provocada por ese cambio. Así también, la narrativa debe estar constituida por patrones y repetición que estén presentes a lo largo del juego y en los diferentes eventos (Zimmerman, 2004)

Sumado a estas cinco premisas, en este trabajo se considera una cualidad de los video juegos adicional a las planteadas por Meira que se relaciona con la capacidad que posee el medio, el juego en este caso, de proporcionar al jugador retroalimentación sobre sus decisiones y desempeño durante el transcurso del juego. A esta cualidad se le conoce como *control de error*, y es una de las particularidades en las actividades o presentaciones educativas del método Montessori, que es de donde se toma la definición empleada en este diseño:

> Los materiales Montessori están diseñados para que el niño reciba retroalimentación instantánea mientras trabaja, lo que le permite reconocer, corregir y aprender de sus errores y sin ayuda de un adulto. Poner el control de la actividad en las manos del niño fortalece su autoestima y la auto motivación, así como su aprendizaje. (Montessori, 2015)

GEOGEBRATUBE Y LAS HOJAS DE TRABAJO DINÁMICO

GeoGebraTube es un sitio web permite subir o construir recursos creados en GeoGebra, equipando estas construcciones con herramientas propias de los ambientes digitales, lo cual facilita y promueve la construcción de guías de trabajo o libros, articulando recursos digitales como texto, imagen y video.

Particularmente en el desarrollo de aplicaciones con GeoGebra, existen ciertas directrices para optimizar el diseño los appelt en general y el juego a construir en particular, teniendo en cuenta tanto la disposición gráfica, el uso de figuras dinámicas versus las estáticas y el tipo de indicaciones y tareas a incluir en la HTD, las cuales se pueden revisar en GeoGebra (2013, pp. 79-82)

JUEGO DE LOS PARÁMETROS

El juego hacer emerger el ctf, en particular en el estudio de la función cuadrática, relacionando la variación de sus parámetros con el comportamiento tanto de la gráfica como en su expresión analítica. Por este objetivo es que el juego es bautizado como *Juego de los Parámetros: Función cuadrática*. Cabe destacar que para realizar este estudio se emplea la estructura

dada por Cordero y Solís (2001), donde se denomina *función prototipo* y en el caso de este juego corresponde a una función cuadrática. Para llevar a cabo este propósito se estructura el juego

en tres niveles más una pantalla de inicio, las cuales se conectan a través de hipervínculos o enlaces web, donde cada nivel presenta cinco desafíos.

En cada nivel se ve reflejado el control de error a través de una frase que indica cuando se ha alcanzado el resultado esperado y además de manera visual se observa la coincidencia entre la gráfica que se ha modificado (en azul) y la gráfica propuesta (en gris).

Pantalla de inicio

En esta página se presenta el juego, recomendando al jugador cambiar a modo *pantalla completa*, estableciendo el tipo de narrativa (aventura), y entregando la posibilidad que el alumno pueda visitar información de exploración que le ayudará para completar los niveles del juego. Es importante recalcar que se ha dispuesto que tal información sea optativa y no una imposición para el alumno, sino que este pueda visitarla cuando la necesite, estime conveniente y las veces que sea necesario.

Se privilegia el uso de videos por sobre animaciones gif, puesto que ese tipo de recurso digital permite al alumno revisar las veces que sean necesarias alguna parte que no le quedó clara o volver a ver el video sin que sufra de reproches por no haber entendido aún el concepto o procedimiento que se está explicando.

Nivel 1

La tarea a completar por el estudiante en el primer nivel es encontrar la expresión analítica de la gráfica de la función cuadrática propuesta, a través de la modificando de los parámetros de la otra función, representados cada uno de ellos por distintos deslizadores. De encontrar la expresión buscada, el juego abre un mensaje emergente comunicando al estudiante su resultado correcto.

Los resultados a los cuales puede acceder el alumno son por ejemplo caracterizar cómo influye cada parámetro en la gráfica o qué ocurre con la función cuando ellos adquieren valores críticos (negativo, positivo o cero)

Nivel 2

La variación de los parámetros deja de ser continua en este nivel y pasa a ser discreta, representada por casillas de entrada, donde el estudiante debe ingresar valores determinados para cada parámetro. Esto supone un mayor grado de complejidad y pone a prueba el dominio de la situación de transformación de la gráfica por parte del alumno.

En caso que el estudiante lo considere necesario, puede volver a visitar los videos de la pantalla de inicio.

Nivel 3

Como último nivel del juego, se presenta la mayor dificultad para realizar la tarea. En este caso los desafíos no están relacionados con la variación de los parámetros de la gráfica, sino con la determinación de la función prototipo, a partir de los parámetros que se emplearon para modificar la función prototipo y de la curva resultante de este procedimiento. Es decir, a partir de los parámetros y de la función como instrucción que organiza comportamiento, el estudiante tendría que reconocer cuáles fueron las instrucciones que permitieron modificar la función prototipo para obtener la función dada.

CONCLUSIÓN

Gracias a la actualización de los medios digitales (sitio web, wiki, etc) de GeoGebra durante el 2014, se añadió a los recursos de GeoGebraTube los DynamicWorkSheet u Hojas de Trabajo Dinámico, las cuales permiten aunar en el mismo ambiente una gran y diversa cantidad de recursos digitales propios de la web 2.0, los cuales sirven de sustrato para la creación de actividades educativas cuyo propósito es la apropiación de objetos matemáticos por parte de los y las estudiantes. Debido a esta característica de las HTD es posible orquestar una amplia gama de actividades de distinto tipo, según el propósito que se busque lograr.

Como resultado de este análisis y añadiendo el componente de control de error, se logra orquestar una actividad con matices de juego educativo, cuyo propósito es hacer emerger la argumentación de comportamiento tendencia de la función cuadrática, a través de determinar patrones de comportamiento gráfico y analítico, por medio de la variación de parámetros.

Queda como perspectivas a seguir en la evolución del juego propiciar otros tipos de argumentaciones a desarrollar en los estudiantes, tales como la predicción y la analiticidad de las funciones, a través de desafíos que transiten de lo cuantitativo a lo cualitativo. Así también, ampliar el tipo de funciones a estudiar, a través del uso del grado de la función como parámetro a variar en las funciones algebraicas y abarcar el análisis de funciones trascendentes.

Referencias

American Montessori Society (2015). Montessori Terminology. Extraído el viernes 12 dejunio del 2015 desde http://amshq.org/Family-Resources/Montessori-Terminology.

Cordero, F. y Solís, M. (2001). Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo. México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Cordero, F. (2011). La Modelación y la Graficación en la Matemática Educativa Escolar. En L. M. Rodríquez-Salazar, R. Quintero-Zaxueta& A. R. Hernández-Ulloa (Coords.). Razonamiento Matemático, Epistemología de la Imaginación: (Re)pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa (pp. 377-399). Editorial Gedisa, Barcelona y Cinvestav, México.

Del Castillo, A. y Montiel, G. (2009). «¿Artefacto o Instrumento? Esa es la pregunta». Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 22, pp. 459–467. Recuperado el miércoles 10 de junio del 2015 desde http://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf.

Drijvers, P., Kieran, C., and Mariotti, M.A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y.C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A. y Meagher, M. (2010) Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives en Mathematics education and technology: rethinking the terrain. New York, UA: Springer.

GeoGebra Team (2013). Introduction to GeoGebra Version 4.4 .Extraído el viernes 12 de juniodel 2015 desde http://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf.

McGonigal, J. (2010). Gaming can make a better world [Video]. TED2010 What the World Needs Now.... Disponible en http://www.ted.com/talks/jane_mcgonigal_gaming_can_make_a_better_world.

McGonigal, J. (2011). Reality Is Broken: Why Games Make Us Better and How They Can Change the World.New York, USA: ThePenguinPress. ISBN 978-1-59420-285-8.

Meira, L. (2011). Conferencia: Juegos digitales en el aula: de la tecnología al aprendizaje. Santiago,Chile: Centro de Estudios de Políticas y Prácticas en Educación. Extraído el viernes 12 dejunio del 2015 desde http://educacion.uc.cl/images/stories/pdf/descarga_documentos/luciano_meira_22sept2011.pdf.

Zimmerman, E. (2004). Narrative, Interactivity, Play, and Games: Four naughty concepts in need of discipline. Extraído el viernes 12 de junio del 2015 desde http://www.ericzimmerman.com/texts/Four_Concepts.html

TUTORÍA DE APOYO ACADÉMICO UNIVERSITARIO: DESARROLLO DE PREGUNTAS ORIENTADORAS EN UN AMBIENTE DE APRENDIZAJE COLABORATIVO

Cárcamo, N.[a], Herrera, V.[b], García, F [c]

Universidad Católica de Temuco;
ncarcamo@uct.cl[a], vherrera@uct.cl[b], fgarcia@uct.cl[c]

Resumen

El año 2007,La Universidad Católica de Temuco a través del Programa PIVUse comprometió con sus estudiantes en el sentido de asegurar un adecuado proceso de inserción a la vida universitaria. Este compromiso conllevó establecer y formalizar los procesos de diagnosticar, intervenir y evaluar los conocimientos básicos en dos áreas: ciencias y competencias comunicativas básicas. Lo anterior, en conjunto con una línea de apoyo psicoemocional, enmarcada en el Modelo Educativo UC Temuco donde se destaca el desarrollo de un currículum basado en competencias. En este marco, el Centro de Recursos para el Aprendizaje adquiere esta responsabilidad y actualmente desarrolla tres programas de apoyo para contribuir al desempeño académico de los estudiantes. Uno de estos, el Programa de Apoyo en Ciencias Básicas,se encarga de la nivelación y fortalecimiento de los aprendizajes en cursos de ciencias básicas. Incorpora en este proceso, la importancia del conocimiento de la ciencia y de las habilidades de regulación metacognitiva. El presente trabajo, se enmarca, precisamente, en una experiencia de aula basada en preguntas que conduzcan al estudiante a indagar, buscar e investigar recursos matemáticos mediante el aprendizaje colaborativo, para fomentar así el desarrollo de habilidades de pensamiento metacognitivo y crítico. De esta forma se espera contribuir a su desempeño académico.

Palabras clave: *Modelo Educativo UCTemuco*, *tutorías, focalización, reforzamiento evaluativo, metacognición en el proceso de aprendizaje.*

INTRODUCCIÓN

El Centro de Recursos para el Aprendizaje (CRA) de la Universidad Católica de Temuco, incorpora un acompañamiento académico y psicoeducativo para estudiantes desde el ingreso hasta la titulación. En este marco se inserta el Programa de Apoyo en Ciencias Básicas, desde el año 2009, en las áreas de matemática y químicae imparte tutorías para estudiantes focalizados en horas autónomas, a partir de los resultados del perfil de ingreso y la tasa de reprobación histórica de la institución.

Actualmente, se realizan Tutorías Académicas en horas autónomas y Reforzamientos Evaluativos en cursos de primer y segundo año; los reforzamientos evaluativos efectivo en cuanto a indicadores de aprobación. Sin embargo, pensamos que sería beneficioso incorporarel segundo semestre del año 2015 una nueva estrategia de apoyo que apunte a fortalecer los aprendizajes, previos a la evaluación de resultados de aprendizaje del curso, por lo cual se plantean los Talleres Específicos de Pares TEP. Su objetivo es promover el aprendizaje de las ciencias y habilidades metacognitivas en estudiantes de segundo año académico. En este trabajo, se presenta una de las experiencias de aula que ha desarrollado el programa en las Tutorías Académicasdonde se evidencian los resultados académicos que se obtienen cuando el estudiante se compromete a participar en ello, fortaleciendo

habilidades del pensamiento científico, pensamiento crítico y la regulación metacognitiva del proceso de aprendizaje universitario.

CONTEXTO

La Universidad Católica deTemuco, en virtud de mejorar la aprobación, retención y titulación oportuna de sus estudiantes crea diferentes estrategias que contribuyan con estos indicadores.El año 2007 puso en marcha un Programa de Inserción a la Vida Universitaria (PIVU) el cual tiene la finalidad de apoyar a los(as) estudiantes en la inserción a la vida académica y, durante el año, fortalecer competencias básicas en el área del desarrollo del pensamiento, habilidades sociales y TIC´s. Posteriormente, el año 2008, la Universidad se adjudica el proyecto MECE 0704 el cual permite potenciar el PIVU mediante la adquisición de nuevos recursos. Este programaPIVU se inserta en una línea del Modelo Educativo de la Universidad, articulándose principalmente con dos ejes de este: Formación basada en competencias: un compromiso con la gestión de la calidad del aprendizaje y, Aprendizaje significativo el cualtiene como objetivo la enseñanza centrada en el estudiante y el desarrollo de un currículum basado en competencias. Se entiende aquí por competencias:

> Un saber actuar movilizando recursos propios y ajenos para resolver problemas reales de manera efectiva y éticamente responsable, con creatividad e innovación. Los recursos se refieren de manera especial a los distintos saberes (ser, saber y saber hacer) que de manera integrada se transforman en dispositivos que serán utilizados por la persona competente. (UniversidadCatólica de Temuco, 2007, p.p 23)

El año 2012, el PIVU se consolida como el Centro de Recursos para el Aprendizajeel cual tiene la responsabilidad de diagnosticar, intervenir y evaluar las competencias y conocimientos básicos en ciencias y comunicación considerando principalmente las destrezas propuestas por el informe SCAN (1992): Lectura, Redacción, Matemática, escucha y expresión.

En los últimos seis años, el CRA, anualmente, ha establecido el perfil de ingreso de los estudiantes pertenecientes a la Universidad. En ese perfil se evidencian algunas de las siguientes características:

- Aproximadamente, 70% de sus estudiantes proviene de la Región de la Araucanía (cifra estable)
- El mayor ingreso de estudiantes proviene de establecimientos particulares subvencionados alcanzando un 52% el año 2014.
- El promedio puntaje PSU de ingreso se mantiene estable desde el año 2009 con 543 puntos.
- Las familias de los estudiantes pertenecen principalmente a los tres primeros quintiles aumentando de 82% el año 2009 a un 85% el año 2014.
- Un 24% de estudiantes son de origen mapuche, aumentando en un 12% desde el año 2009 al año 2014.
- Los resultados del diagnóstico en ciencias básicas, muestran que el 43% de estudiantes evidencianla prueba de Matemática; 6,7% la prueba de Química y 4,8% la prueba de Biología.

A partir del año 2013, gracias a la adjudicación del Plan de Mejoramiento, Convenio de Desempeño en Armonización Curricular CDAC1202, establecido con el Ministerio de Educación de Chile, la Universidad fortalece el compromiso con sus estudiantes al momento de ingresar a, la institución.

Desde este compromiso, el CRA pasa a formar parte de las estrategias establecidas en este convenio para destacar el logro de los indicadores de desempeño notable, relacionados con la línea de nivelación y acompañamiento académico, psicosocial y vocacional.

METODOLOGÍA

El Programade apoyo académico en ciencias básicas del CRAtiene como objetivo la nivelación y fortalecimiento de aprendizajes en Matemática y Química, mediante la incorporación de las metodologías de trabajo en el aula con un enfoque basado en el Modelo Educativo de la Institución. Para ello, toma los resultados de aprendizaje de los cursos como un eje guiador del proceso de tutoría y no así el aprendizaje de contenidos solamente como un resultado en sí mismo de esta forma, se promueve un enfoque de aprendizaje profundo (Biggs, J., &Biggs, J.B., 2004).

El Programa se articula con el Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas y la Escuela de Ciencias Ambientales para apoyar cursos que presentan la característica de contar con una gran cantidad de estudiantes focalizados y poseer altas tasas de reprobación histórica. La primera de las estrategias de apoyo para cursos de primer año se denominaTutoría Académica. Esta consiste en un apoyo académico que tiene la finalidad de establecer situaciones de aprendizaje en contexto (del Valle Coronel, M., & Curotto, M. M.,2008) con enfoque transversal en habilidad de razonamiento lógico matemático, razonamiento crítico y pensamiento científico (Gardner, 1993). Se espera potenciar así el trabajo en equipo y la autorregulación del aprendizaje (de la Fuente, J., & Justicia, F. J. (2003).Esta tutoría es realizada semanalmente por un docente en un tiempo estimado de una hora y media. La segunda estrategia para cursos de primer y segundo añose denominaReforzamientos Evaluativos. Estos consisten en la implementación de un apoyo basado en la retroalimentación efectiva (Guerra, M. Á. S., 2014).como parte del proceso de aprendizaje centrado en el estudiante y la metacognición (Zimmerman, B. J. 1995).

En el marco de las acciones propuestas por el convenio CDAC1202 del MINEDUC la Universidad se comprometeen el diseño e implementación del Plan de mejoramiento del CRA que contempla el escalamiento de su sistema de apoyo y el aseguramiento de la permanencia y aprobación de los estudiantes. El Programa de Apoyo en Ciencias Básicas diseña una nueva estrategia denominada Talleres Específicos de Pares TEP que se implementará el segundo semestre del año 2015.

Estos talleres piloto tienen como objetivo contribuir al logro de Resultados de Aprendizaje en las áreas de ciencias básicas para estudiantes de 2° Año. En acuerdo al objetivo planteado, se promoverá en el apoyo, activar conocimientos previos (Bermejo, V., 2001)o prerrequisitos del curso para que luego, el académico responsable del curso desarrolle efectivamente situaciones de aprendizaje en el aula. Este trabajo lo desarrolla un Tutor par guiado y monitoreado por un docente que además de fortalecer académicamente al alumno tutoriado, logre fomentar la optimización de recursos que ofrece la institución, favorecer el aprendizaje autorregulado de los alumnos e impulsar la cultura colaborativa (Lapeña, C., Sauleda, N., & Martínez, M. Á. (2011);De Backer, L., Van, H., Moerkerke, B., & Valcke, M. (2015); Biggs, J., & Biggs, J. B. (2004)). El Tutor escogido potencia su crecimiento profesional y aporta a la construcción de aprendizajes profundos en los cursos, por lo cual participa de un Plan de Habilitación de Tutores CRA impartidos por el Colegio de Ayudantes de la Universidad en conjunto con el CRA.

La metodología que se implementa en todas estas estrategias de apoyoque ofrece el CRA y que se busca fortalecer con el desarrollo del Piloto TEP, está basada en la realización de preguntas que conduzcan al estudiante a indagar, buscar e investigar qué recursos matemáticos le permiten resolver ejercicios y problemas que se proponen en su guía de trabajo del curso.

Algunas de las preguntas quese realizan al estudiante cuando enfrentan una tarea matemática son las siguientes: ¿Tenemos claro qué debemos hacer?, ¿Qué necesitamos saber antes de comenzar a resolver?, ¿Este problema se parece a otros que hayan resuelto en clases? A través de estas preguntas se espera orientar la comprensión del estudiante sobre la tarea. Otras de las preguntas que se formulan son aquellas que van dirigiendo su proceso de resolución como por ejemplo: ¿Están avanzando en la resolución?, ¿funciona la estrategia escogida para resolver?, y finalmente, cuando ya han resuelto y encontrado lo buscado se les hace preguntas que los ayuden a reflexionar

sobre la solución (¿Qué encontraron?, ¿Qué significa?, ¿Cómo podemos dar respuesta al problema con lo encontrado? ¿La solución es coherente al contexto del problema?, revisemos los pasos que desarrollaron para encontrar la solución al problema).Todas estas preguntas promueven que el estudiante logre planificar, monitorear y evaluar su proceso de enseñanza aprendizaje (OssesBustingorry, S., & Jaramillo Mora, S., 2008).

Esta metodología logra en los estudiantes el desarrollo de habilidades de pensamiento metacognitivo y crítico, que le permiten ser conscientesde sus procesos de aprendizaje,además el dialogo entre el tutor y el tutorado permite dar cuenta de la responsabilidad en el proceso de aprendizaje.

En estas Tutorías, el rol del docente no es solo reforzar los conocimientos de la disciplina del curso apoyado, sino también cultivar en el estudiante una actitud de autonomía y autorregulación de su aprendizaje; es el acto de preguntar que estimula el pensamiento crítico y facilita los procesos de aprender, entender y tomar decisiones, por lo que se considera fundamental promover el diálogo en el aula cuando se realizan estos apoyos.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El año 2012 la Universidad crea la Escuela de las Ciencias de la Salud matriculando alrededor de 60 estudiantes por carreras, de las cuales,cuatro de la cinco tienen un curso de matemática que fue apoyado por el CRA debido a su perfil de ingreso. La Figura 1. muestra los resultados de aprobación que obtuvieron los estudiantes focalizados del curso Matemática Aplicada a Ciencias de la Saludde una de estas carreras.

En relación a la cantidad de veces que asisten al apoyo y aprobación del curso se obtiene la siguiente tabla.

N° sesiones	N° alumnos	Nº aprobados	Nº Reprobados	Nº examen recuperación
0	2	1	1	0
1 – 4	6	2	4	0
5–10	12	11	0	1
Totales	20	14	5	1

Figura 25. Resultados Matemática 2012

La tabla muestra que a mayor participación del apoyo, mayor es la probabilidad de aprobación del curso. De un total de 18 estudiantes que participaron alguna vez del apoyo aproximadamente el 85% del grupo focalizado que asistió entre 5 a 10 sesiones de forma constante, aprobó el curso.

En cuanto a aspectos metacognitivos, se está aplicando una encuesta de satisfacción que entregará resultados al finalizar este año; sin embargo, y previo al análisis formal, pensamos que cuando el estudiante cumple el compromiso de asistir regularmente adquiere una conducta responsable ante su aprendizaje logrando autoregulación de su aprendizaje mediante diferentes estrategias dirigidas por el docente tales como la orientación, planificación, monitoreo y evaluación. Como establece Osses y Jaramillo (2008) acerca de la importancia de introducir la metacognición en el proceso educativo, pues cambia el rol del profesor y pasa de transferir contenido a ser un guiador del proceso, dando al estudiante un rol más activo y depositando en él la responsabilidad del control de sus procesos de aprendizaje.

De acuerdo a lo anterior se considera que la nueva estrategia TEP implementada actualmente debiera despertar mayor interés para los estudiantes, pues considera la cercanía con sus pares y recoge las experiencias vividas por elloscomo estudiantes del curso que apoyan, de esta manera los

estudiantes logran comprender el proceso de aprendizaje en conjunto con sus pares en el aula y con el docente que guía el proceso mediante el aprendizaje colaborativo.

Referencias

Biggs, J., & Biggs, J. B. (2004). Calidad del aprendizaje universitario (Vol. 7). Narcea ediciones. Universidad Católica de Temuco (2015).Plan de Fortalecimiento CRA.

Universidad Católica de Temuco (2007).Modelo educativo de UCTemuco, recuperado de: http://www.uct.cl

Zimmerman, B. J. (1995). Self-regulation involves more than metacognition: A social cognitive perspective. Educational psychologist, 30(4), 217-221.

Lapeña Pérez, C., Sauleda Pares, N., & Martínez Ruiz, M. Á. (2011). Los programas institucionales de acción tutorial: una experiencia desarrollada en la Universidad de Alicante.

de la Fuente Arias, J., & Justicia, F. J. (2003). Regulación de la enseñanza para la autorregulación del aprendizaje en la Universidad. Aula abierta, (82), 161-172.

De Backer, L., Van Keer, H., Moerkerke, B., &Valcke, M. (2015). Examining evolutions in the adoption of metacognitive regulation in reciprocal peer tutoring groups. Metacognition and Learning, 1-27.

Kolb D. A. & Fry R. (1975).Toward an applied theory of experiential learning.in C. Cooper (ed.), Theories of Group Process, London: John Wiley.

Gardner, H. (1993). Inteligencias múltiples. La teoría en la práctica.

Poyla, J. (1998). Como plantear y resolver problemas. México: Trillas. (resolución de problemas)

Bermejo, V. (2001). Aproximación al concepto de Aprendizaje Constructivista. Revista} Candidus, 3(16).

del Valle Coronel, M., & Curotto, M. M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias, 7(2), 11.

Cross, K. P., &Angelo, T. A. (1988).Classroom Assessment Techniques.A Handbook for Faculty.

Guerra, M. Á. S. (2014). La evaluación como aprendizaje: Cuando la flecha impacta en la diana. Narcea Ediciones.

OssesBustingorry, S., & Jaramillo Mora, S. (2008). Metacognición: un camino para aprender a aprender. Estudios pedagógicos (Valdivia), 34(1), 187-197.

Morales, P., & Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. Theoria, 13(1), 145-157.

PARADIGMAS ALGEBRAICOS: UN APORTE A LA TEORÍA DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO[i]

Gamboa-Inostroza, M.[a], Mena-Lorca, A.[b]

[a]Universidad de Concepción, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; correos electrónicos: maurigamboa@udec.cl[a], arturo.mena@pucv.cl[b]

Resumen

En este trabajo se presenta la idea de configurar un "Espacio de Trabajo Matemático" (ETM) en la disciplina del álgebra, sustentado en la idea de "paradigmas algebraicos" desde antecedentes de un estudio histórico-epistemológico, análisis del currículum, y el estado del arte de la investigación frente a los fenómenos de enseñanza y aprendizaje del álgebra. Lo anterior muestra la presencia de distintos significados encerrados en una única palabra "algebra". Desde estos "paradigmas" se propone este ETM algebraico, con el fin de clarificar "malentendidos" cuando un profesor enseña un tema de álgebra.

Palabras clave: *Paradigmas algebraicos, Álgebra, Espacio de Trabajo Matemático.*

LA NOCIÓN DE PARADIGMA

Thomas Kuhn utiliza profusamente el término paradigma. Proveniente del griego παράδειγμα, según Kuhn hay primero una etapa pre-científica; luego se establece la ciencia normal; más adelante sobreviene una crisis; la crisis se convertirá en una revolución; se volverá entonces a la etapa de ciencia normal, ahora de otra ciencia, lo cual no es solo una versión remozada de la anterior. En la etapa pre-científica faltan acuerdos en aspectos fundamentales y hay constante debate acerca de ello, existen tantas teorías como investigadores, cada uno de estos está obligado a comenzar de nuevo. La etapa propiamente científica consiste en que todos los científicos adhieren a un mismo *paradigma*.

> (...) un paradigma son "realizaciones científicas universalmente reconocidas que, durante cierto tiempo, proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica", más precisamente el "Conjunto de hipótesis teóricas generales, leyes y técnicas para su aplicación, compartidas por los miembros de una comunidad científica, implicando una cierta coincidencia en sus juicios profesionales." (Kuhn, 1971, p.13).

Paradigmas y espacio de trabajo

Kuzniak (2004) considera dos facetas del concepto de paradigma vertido por Kuhn. La primera está dada en términos generales, es decir designa el conjunto de creencias, de técnicas y de valores que comparten un grupo científico. Se fija la manera correcta de plantear un problema y de emprender la resolución, mientras que la segunda noción está propuesta desde un ámbito institucional: "[…] matriz disciplinaria que permite reagrupar las teorías y más generalmente los conocimientos de un grupo que trabaja en el mismo sujeto" (Kuzniak, 2004, p.15). Los profesores y alumnos implícitamente están posicionados en paradigmas separados: esta diferencia de posición epistemológica explica ciertos malentendidos didácticos.

En el ámbito de la Geometría un *paradigma geométrico*es la caracterización de los problemas y ejemplos significativos que se entregan a los estudiantes para que aprendan a reconocer, aislar y distinguir las diferentes entidades constitutivas de la geometría puesto en juego. La concepción de paradigma en un ETM se acoge a tres componentes: una de carácter epistemológico, otra de carácter cognitivo según los modos de pensamiento de Gonseth (1945-55), y la de carácter filosófico (Kuhn). Estos tres ejes permiten identificar tres *paradigmas geométricos*, que coexisten

en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Los tres ejes antes mencionados, son consideramos en forma conjunta y no son vistos aisladamente uno del otro.

EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

La teoría ETM (Houdement&Kuzniak 2006; Kuzniak 2004, 2011) es una teoría de la DM que ofrece un marco explícito para considerar de manera precisa, relevante y articulada aspectos disciplinarios, cognitivos, culturales y paradigmáticos presentes en los aprendizajes de los alumnos y/o puestos en juego por un profesor en su ejercicio profesional. En particular, permite abordar explícitamente la situación de un profesor que intenta llevar a la práctica lo aprendido, integrando los aspectos disciplinares y pedagógicos. En el ETM se concibe el estudio como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos de un dominio, en un ambiente *ad hoc*, mediante la articulación de dos planos, uno epistemológico, la matemática en juego, y otro cognitivo (Kuzniak, 2011; Kuzniak& Richard, 2014).

El *plano epistemológico* está constituido por tres *componentes*: *representamen*, *artefacto y referencial*. El *plano cognitivo* está también conformado por tres componentes: correspondientemente, los procesos de *visualización, construcción* y *prueba*.

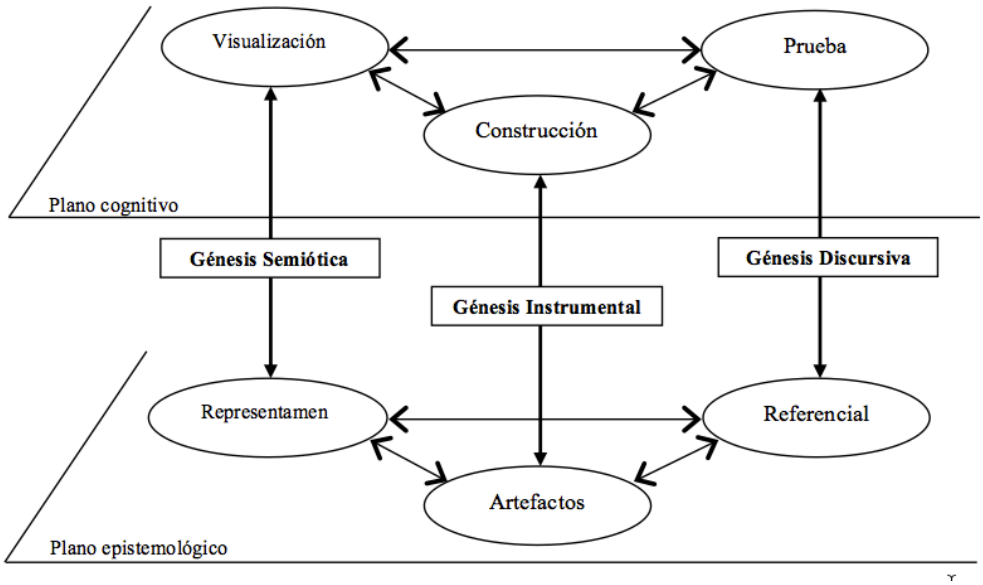


Figura 1: El Espacio de Trabajo Matemático y sus Génesis (Kuzniak, 2011)

De esa manera, la teoría pone de relieve tres aspectos de importancia en la matemática (los signos que ocupa, las 'herramientas' que utiliza, y la manera en que alcanza sus conclusiones) y sus correlatos en el proceso cognitivo del aprendiz (de qué manera percibe la disciplina, qué recursos ocupa, cómo argumenta, etc.).

Para describir la articulación de los planos se considera un conjunto de *génesis* que permiten relacionarlos: *instrumental* (de los artefactos a la construcción), *semiótica* (del *representamen* a la visualización), y *discursiva* (del referencial al proceso de prueba) las cales son interdependientes y que involucran a todas las componentes epistemológicas y a los procesos cognitivos (Kuzniak y Richard, 2014). De tal manera, el proceso de construcción de las diversas dimensiones que comporta el espacio de trabajo está descrito por las diferentes génesis, en esta la génesis instrumental hace funcional a los artefactos en el proceso de construcción, por ejemplo en la geometría, la génesis instrumental da cuenta de cómo un *artefacto* se convierte en un *instrumento*(Artigue, 2002) al servicio del estudiante; la génesis semiótica se basa particularmente en los registros de representación semiótica, y asegura el establecimiento de la relación entre

sintaxis, semántica, función y estructura, de los signos; y la génesis discursiva utiliza las propiedades del referencial teórico para ponerlas en sintonía con el razonamiento matemático y los procesos de validación. Es también de esa manera que un individuo configura un constructo teórico acerca de un objeto. La incidencia del tipo de tarea es fundamental, pues esta debe proponer que se activen todas las génesis, de esta manera el estudiante hará una construcción suficientemente completa del objeto en estudio (Montoya, Mena y Mena, 2014). Una tarea que se limite a la génesis semiótica, por ejemplo, puede obstruir los aspectos operativos que ofrece y/o requiere el contenido en cuestión, o la validación de tal objeto.

Se puede observar el carácter paradigmático de la teoría; un paradigma se instituye cuando una comunidad de individuos acuerda formular problemas, así como organizar sus soluciones, privilegiando ciertas herramientas o ciertas formas de pensamiento. Al espacio de trabajo "paradigmático", tal como es definido por esta comunidad, se le llamará ETM *de referencia*. La teoría considera una distinción además, entre el ETM *personal*, que es el que usa un individuo (estudiante, profesor) en su propia construcción de conocimiento, y el ETM *idóneo* que sería el que utiliza un profesor o enseñante para cooperar en la construcción del ETM *personal* de un aprendiz. El diseño del ETM *idóneo* por parte del profesor va a depender de su ETM *personal*, mientras que el ETM personal de un estudiante se pondrá en evidencia cuando este se enfrente a una situación problemática

PARADIGMAS EN EL ÁLGEBRA: LO QUE SE PRETENDE ESTUDIAR

Basados en la teoría del ETM, en una primera instancia nos preguntamos acerca la factibilidad e importancia de considerar un "espacio de trabajo algebraico", explicitando algunas similitudes y diferencias en relación al trabajo geométrico (ETG). Para sustentar lo anterior se presentan antecedentes histórico-epistemológicos en relación al álgebra, los que muestran la presencia de distintos estadios en cuanto al trabajo algebraico, los cuales coinciden (*a priori*) con la idea de paradigma en la teoría del ETM, según lo explicitado en un principio.

En vista de lo anterior tomando como base el aporte de Mena, Mena, Morales y Montoya (2012) y en base a un estudio histórico-epistemológico, se proponen como hipótesis los siguientes paradigmas algebraicos:

> **A1**: como la etapa de la *aritmética elemental*, en dónde ya hay números y algún lenguaje numérico, incluso escrito.
>
> **A2**: como la etapa del *Álgebra elemental*, ya presenta una posibilidad de trabajar con letras, variables, incógnitas, parámetros.
>
> **A3**: sería la etapa de las *estructuras algebraicas*, el cual es un estadio avanzado y contemporáneo, que corresponde además a ideas generales de conjuntos y de estructuras algebraicas.

Basado en lo anterior, el objetivo general que se persigue (y necesario para poder configurar un ETM en el álgebra) es el de validar los paradigmas A1, A2 y A3 antes mencionados, para luego analizar los problemas que se generan en la transición entre cada uno de ellos, focalizándose específicamente en A1 y A2, es decir la ruptura entre la *aritmética* y el *álgebraelemental*, y cómo en esta ruptura influye el conflicto entre el ETM personal e idóneo del profesor.

Validación de los paradigmas algebraicos

En el caso de la geometría, la emergencia de los paradigmas nace desde una mirada al currículum y diversas miradas desde un primer supuesto paradigmático a la práctica docente; no obstante lo anterior, detectamos que tras el levantamiento de los paradigmas geométricos estos se relacionaban directamente con el desarrollo histórico de la geometría. En nuestro caso, consideramos oportuna

una mirada histórica en relación al álgebra, es decir un estudio histórico-epistemológico del álgebra. Pero basarnos en lo anterior para hacer un levantamiento como el que queremos no parece suficiente, por lo anterior consideramos necesario hacer una triangulación de fuentes en el marco de una investigación de tipo cualitativa.

Para ello se tomará consideramos como primera fuente nuestro estudio histórico epistemológico al álgebra. Otra fuente corresponde al desarrollo actual del currículum con respecto a la disciplina del álgebra. Las hipótesis presentadas respecto a los paradigmas en el álgebra emergen desde el estudio histórico-epistemológico, pero el contraste con lo que es el desarrollo del currículum dará más fuerza y validez al levantamiento. Además de esto se contrastará con el estado del arte respecto a la investigación acerca de los fenómenos ligados a la enseñanza del álgebra. Juntamente con lo anterior, se hará un levantamiento de datos. En este levantamiento de datos se pretende también fundamentar los paradigmas, aunque la persecución de la toma de datos apunte a especificar el comportamiento de los elementos de un espacio de trabajo en cada paradigma.

A MODO DE CONCLUSIÓN: RESULTADOS PRELIMINARES

Un primer resultado tiene que ver con el considerar a la aritmética como parte del álgebra, lo cual es fundamental para considerar válido el paradigma A1, por ejemplo Drijvers y Hendrikus (2003), entre otros autores, exponen que Álgebra tiene sus raíces en la Aritmética y depende fuertemente de su fundamentación Aritmética, puesto que la aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. Para Schliemann, D. Carraher y B. Brizuela (2003) "la aritmética es una parte del álgebra, a saber, la parte que se ocupa de los sistemas de números, la recta numérica, las funciones numéricas, etc.". Además, las investigaciones concuerdan con que la aritmética es fundamental para poder iniciarse en el álgebra elemental (simbólica); en este sentido J. Novotná y B. Sarrazy exponen que las dificultades que se generan en el álgebra son producto de no tener claridad en los aspectos estructurales de la aritmética:

> "the difficulties in the approach to algebra are rooted in the scarce attention paid to the relational or structural aspects of arithmetics which constitute the basis of elementary algebra"
>
> (Novotná y Sarrazy, 2005)

Otra idea que refuerza el paradigma A1, proviene desde el estudio del currículum. El NCTM (2000), recomienda que el desarrollo del pensamiento algebraico sea abordado desde los primeros añosde escolarización. Una idea similar nace de tendencias como el "Early álgebra" y "Pre-algebra" en el sentido desde el desarrollo del temprano del álgebra en el currículum (Drijvers y Hendrikus, 2003).Frente a esto es necesario mencionar que desde la década de los ochenta diferentes autores, como por ejemplo Davis (1985), argumentaban la necesidad de iniciar una enseñanza del Álgebra, desde la Educación Primaria, que preparase a los alumnos para abordar los aspectos epistemológicos involucrados en la transición de la Aritmética al Álgebra que se daban en la Secundaria.

Para finalizar, es necesario explicitar se está convergiendo hacia una fundamentación científica de los paradigmas A1, A2 y A3 en el sentido de su viabilidad para constituir un ETM algebraico. Con lo anterior se pretende estudiar qué elementos permitirán establecer de mejor manera la transición entre estos.

Referencias

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. Int. Journ. of Computers for Mathematics Learning, 7, 245–274.

Davis, R. B. (1985). ICME–5 Report: Algebraic thinking in the early grades. Journal of MathematicalBehaviour, 4, 195-208.

Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment: designresearch on the understanding of the concept of parameter. Tesis doctoral no publicada. Utrecht:Universidad de Utrecht.

Gonseth, F. (1945-1955). La géométrie et le problème de l'espace. Éditions du Griffon, Lausanne.

Houdement, C. &Kuzniak, A. (2006). Paradigmesgéométriques et enseignement de la géométrie. Annales de Didactique et de SciencesCognitives, 11, 175-193.

Kuhn, T. (1971). La estructura de las Revoluciones Científicas. México: Fondo de Cultura ecocómica.

Kuzniak, A. (2004). Paradigmes et espaces de travailgéométriques. Note pourl'habilitation à diriger des recherches. Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Université de Paris VII – Diderot.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de TravailMathématique et sesGenèses. Annales de Didactique et de SciencesCognitives, 16, 9-24

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, número especial, 5-15.

Mena, A; Mena, J.; Morales, A. y Montoya, E. (2012). Hacia una noción de espacio de trabajo algebraico. Tercer Simposio Espacio de Trabajo Matemático, Universidad de Montreal, Canadá, noviembre.

Montoya, E.; Mena, A; y Mena, J. (2014). Circulaciones y génesis en el Espacio de Trabajo Matemático. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, número especial, 181-198.

Sarrazy, B. &Novotná, J. (2005). Didactical contract: Theoretical frame for the analysis of phenomena of teaching mathematics. In J. Novotná (Ed.), SEMT 05 (pp. 33-45). Praha: UniverzitaKarlova v Praze, Pedagogickáfakulta.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S. et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America, Vol. 4 (pp. 127-134). Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

[i]Financiado por el programa de Becas Conicyt: Doctorado Nacional 2015.

MATEMATICA Y CULTURA: CONCEPCIONES Y RELATOS DE PROFESORES DE EDUCACION BASICA

Panes Chavarría, R[a]., Friz Carrillo, M[b]., Tapia Malverde, V[c]., Ríos Sepúlveda, R[d]., Parra, C[e].

[a,b,c,d,e]Universidad del Bío-Bío;
rpanes@ubiobio.cl, gie2mat@gmail.com

Resumen

Se presentan resultados de la dimensión cultura y matemática del estudio que busca analizar concepciones y actitudes que manifiestan profesores de educación básica hacia una perspectiva sociocultural en matemáticas, abordamos el estudio a partir de la complementariedad de métodos, utilizando escala Likert y entrevista semiestructurada. Los resultados preliminares muestran una alta valoración a objetos tecnológicos y manifestaciones artísticas y culturales en la enseñanza aprendizaje de la matemática, así también se denotan rasgos inclusivos y conocimiento disciplinar y didáctico que es resignificado de acuerdo al contexto cultural de desempeño. Se proyecta que en base a las características socioculturales de la escuela chilena es necesaria la inclusión complementaria de una perspectiva sociocultural en matemática en la formación de los futuros profesores.

Palabras clave: *perspectivas socioculturales, etnomatemática, matemática, profesores.*

INTRODUCCION

Investigaciones recientes dan cuenta de una incipiente preocupación sobre los temas socioculturales en diversas disciplinas, en el caso de la matemática desde los años 80 en Latinoamérica, en particular, se pretende dar visibilidad a la problemática, desde los enfoques de la etnomatemática (D´Ambrosio, 2008) las matemáticas vivas(Oliveras,2006) o la enculturación matemática (Bishop, 2000) entre otras.

Estas perspectivas socioculturales junto a otras como la Socioepistemología o la Matemática Crítica han dotado a la Educación Matemática de un campo amplio para la investigación y desarrollo, también ha permitido el florecimiento de una Identidad latinoamericanista e Intercultural del conocimiento y la práctica matemática.

Una identidad con base en la cultura y vinculada a la matemática es posible ser desarrollada toda vez que la matemática como forma de comunicación y expresión, como herramienta tecnológica y base de estructuras lógicas, es un componente más de la cultura, en palabra de Oliveras(2001) las matemáticas y la cultura son inseparables.

La Etnomatemática, a su vez, como programa de investigación ha sido una de las pioneras en avanzar en la contextualización de la relación cultura/matemática, para D'Ambrosio (2008, p. 17) "[...] entender el saber/hacer matemático a lo largo de la historia de la humanidad, contextualizado en diferentes grupos de interés, comunidades, pueblos y naciones es un objetivo del programa"

Para Peña(2014) son las etnomatemáticas las matemáticas de una cultura, que se producen en el seno de un grupo de individuos que comparten conocientos, comportamientos y valores. Reconocer esta relación intercultural de generación de conocimientos y abrirse a nuevas concepciones de la práctica matemática y de la enseñanza de ésta son hoy un desafío, que requiere pensar desde abanico amplio de posibilidades del curriculum y la formación inicial docente. Esta es una de las

motivaciones de este estudio que reconoce al aula como un espacio sociocultural donde el profesor y estudiantes en un espacio intercultural generan aprendizajes e interactúan en un plano social, personal y profesional que lleva a tomar decisiones y determinadas actuaciones.

En ese sentido una formación ligada a una dimensión afectiva de la matemática (Gómez, 2006) que enriquezca los saberes, que dote de visiones socioculturales a la matemática son necesarias toda vez que su influencia en el actuar y desarrollo de la disciplina generan creencias y concepciones en estudiantes que son traspasadas por el docente. En esa línea, Contreras (1999) plantea que los valores socioculturales que puedan llegar a atribuirse los estudiantes dependen en gran medida de los mensajes que reciben de sus profesores, de ahí la relevancia de estudiar las concepciones de los profesores que operativizan el curriculum escolar.

Así también, la evidencia país nos muestra que existe la carencia de un modelo que refuerce un tipo de pensamiento multilateral, dicha situación es preocupante cuando es el profesor de aula quien también manifiesta dicha carencia (González, 2014), esta situación junto a elementos afectivos se conjugan para el no cumplimento de los propósitos curriculares y didáctico de nuestro curriculum que persigue la fundamentación y construcción de significados más que un cuerpo matemático organizado y acabo.

En consideración de estos antecedentes nos hemos preguntado:

¿Qué creencias y actitudes manifiestan con respecto a una perspectiva sociocultural en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, profesores de educación básica?

Específicamente hemos considerado abordar como objetivos:

1. Identificar las creencias y actitudes que manifiestan profesores del sistema escolar básico con respecto a un enfoque sociocultural en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.
2. Describir los relatos y discursos que adopta el profesorado de educación básica para el tratamiento de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Metodología

La investigación considera una complementariedad metodológica (Cornejo, Sanhueza, Rioseco, 2012) puesto que asumiendo la subjetividad de los constructos estos enfoques nos permiten abordar de manera más amplia el fenómeno.

Para el cumplimiento del primer objetivo se consideró apropiado un diseño no experimental del tipo encuesta, los participantes reportados para esta comunicación corresponden a 103 profesores/as. Esto nos brinda un acceso a una información significativo sobre las concepciones que se tienen hacia las temáticas consideradas. El segundo objetivo de complemento es abordado desde estudio de casos múltiples, el reporte de esta comunicación incluye 2 casos.

Se crea y valida cuestionario tipo Likert Matemática, Cultura y Aprendizaje (GIE2MAT, 2015) y utilizamos adaptaciones particulares de acuerdo a la muestra. A priori se trabajó con tres dimensiones deductivas de análisis, los indicadores de validez (I.V.C=0,85) y fiabilidad (alpha=0,823, N=37) tomados en muestra piloto nos entregan valores aceptables para el tipo de estudio. Asimismo se crea un guion de preguntas semiestructurada en base a las dimensiones consideradas.

El análisis de los datos para el objetivo 1 se realiza a través del programa estadístico SPSS 18 y las técnicas utilizadas son principalmente estadísticos descriptivos de tendencia central (media) y dispersión (desviación típica), cálculo de frecuencias, porcentajes y la prueba t para la comparación de medias entre grupos. El análisis de datos del objetivo 2 se realiza a través del programa

QSRNivo 8 para generar unidades de significado relevantes(Sanhueza, Penalva, Friz,2013) para luego categorizar, codificar, organizar y extraer modelos.

Resultados

Exponemos resultados preliminares de la Dimensión Cultura de nuestro estudio, debido a las características de la investigación en una primera instancia mostramos algunos valores obtenidos de la aplicación de la escala Likert en esa dimensión. Así también mostramos dos extractos de entrevista que realizamos a los profesores de educación básica.

Los resultados principales que presentamos fueron informados a través de una escala tipo Likert, indicando1 (Muy en desacuerdo) a 4 (Muy de acuerdo).

- Las manifestaciones artísticas(bailes, artes) propias de una cultura poseen un grado de vinculación con las matemáticas(M=3,16; DT=0.86)
- Los componentes religiosos de una cultura son fuente de conocimiento para las matemáticas(M=2,57; DT=0,765)
- Los aspectos históricos-culturales son insumos necesarios en una práctica educativa de las matemáticas.(M=3,05; DT=0,941)
- La clase de matemática debe igualar las oportunidades educativas para estudiantes culturalmente diferentes.(M=3,49;DT=0,804)
- La vinculación de diversas culturas en el aula enriquece las relaciones de aprendizaje.(M=3,65;DT=0,484)
- La formación de docentes de matemática debe incluir conceptos como la multiculturalidad e interculturalidad.(M=3,27;DT=0,769)

Los relatos obtenidos de dos profesores entrevistados, en la Dimensión Cultura se presentan a continuación:

[EPB1_C] "cada cultura desarrolla su matemática o desarrolla lo que sea de acuerdo a sus pensamientos, **tú no puedes ir a imponer tu cultura a otro grupo**"

[EPB1_C]"Por ejemplo cuando…, bueno ahora estábamos viendo los números… que a los niños siempre se le enseña del 1 al 9 solamente, se deja el cero aparte, **entonces si tu consideras el cero, tu puedes ver la formación del sistema numérico**, en cualquier sistema tu puedes ponerle cualquier base y los niños podrían, deberían ser capaces, haciendo la relación de orden no más…**deberían hacer cualquier sistema numérico**. O sea por eso te decía eso, **pero todo está de acuerdo a la cultura**, nuestra cultura que tiene que ver con **los números indoarabigos tiene que ver cómo se van a formar, pero en otras culturas se forman de otra forma…**"

[EPB2_V]"La cultura yo la tomo como… **las características propias o comunes dentro de un … no puedo decir por ejemplo de un país sino como de un lugar determinado**, porque? **por qué lo asocio más que nada a las costumbres**, las costumbres que nosotros tenemos aquí, por ejemplo aquí en XXXXX son muy distintas a las que puede tener una persona en Santiago, a la que puede tener una persona en Arica… **va determinado por el lugar físico en el que uno está y las características físicas del lugar**…

[EPB2_V]"**No, en la universidad no**, ha sido todo **parte de la práctica**, de ir asociando… cosas

DISCUSION/CONCLUSIONES

Los resultados preliminares del estudio nos muestran una alta valoración de componentes culturales, como las expresiones artísticas que las diferentes culturas desarrollan, por parte de los profesores. Su mirada amplia sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje, producto de sus experiencias escolares cotidianas, ha sido más significativo que la formación inicial recibida.

Así también podemos notar que producto de su relación intercultural diaria el profesor ha valorado altamente la componente inclusiva que genera la vinculación de estudiantes de diferentes culturas y aquellos que podrían tener saberes diferentes.

Sus relatos nos muestran a un profesor que avanza en respetar diferencias, abierto e inclusivo, que considera el contexto en su praxis y que le exige mas a su formación inicial.

Podemos notar también que desde el conocimiento disciplinar el profesor puede fundamentar elecciones y disponer de un respaldo teórico y didáctico a sus decisiones de aula.

Estos resultados muestran la necesidad de avanzar en una construcción sociocultural desde la formación inicial docente que recupere los sentidos y propósitos de la matemática, nos muestra esperanza que una contribución cultural en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, puede ser abordada desde el curriculum y llevada a cabo por profesores.

Nos exige y coincidimos con Peña(2014) que en consideración de las características socioculturales, étnicas, religiosas y geográficas de nuestro país se hace imperiosa la necesidad de contar con un curriculum y una formación docente que incorpore dicha perspectiva en los curriculum formativos.

Referencias

Bishop, A. (2000). Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural. Editorial Paidos

Contreras, L. C. (1999). Concepciones de profesores sobre resolución de problemas. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones

Cornejo, J., Sanhueza, S. y Rioseco, M. (2012). Orientaciones para la elaboración de tesis, seminarios y paper académicos. Chile: Universidad Católica del Maule

D'Ambrosio, Ubiratan (2008). Etnomatemática. Entre las tradiciones y la modernidad. México: Limusa

González, F. A. (2002). Un modelo historiográfico para las Ciencias. La evolución de la Matemática hasta su establecimiento como disciplina científica». Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, N°61.

Peña Rincón, P. A. (2014).Etnomatemáticas y currículo: una relación necesaria. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2), 170-180.

Oliveras, M. L.(2001)"Etnomatemáticas". En Jornadas sobre Investigación en el aula de Matemáticas. Atención a la diversidad (pp. 51-61). Ed.: Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales", Granada.

Sanhueza, S., Penalva, M. C. & Friz, M. (2013). Identidades y competencias profesionales de estudiantes para maestro de educación infantil relativas a la enseñanza de la geometría. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16(1) 99-125

EVIDENCIAS DE LA DIVERGENCIA ENTRE LA VISUALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO.

Ayala, C. [a], Lobos, C. [b], Ortiz, E. [c],Parra, Y.[d]

[a]UniversidadSan Sebastián;
camilo.ayala.bravo@gmail.com[a], yocelyn.parra@uss.cl[ab]

Resumen

El presente estudio tiene por objetivo exponer las principales problemáticas que intervienen en el desarrollo del proceso *de enseñanza-aprendizaje asociados a la geometría elemental. Apoyados por la literatura y a través de un cuestionario de tres preguntas; se pondrá en evidencia cómo estudiantes de 8° básico han ido construyendo sus conocimientos geométricos en base a aprendizajes memorísticos y disconexos; lo que presenta un gran obstáculo en el posterior proceso de desarrollo y apropiación de habilidades como la visualización, razonamiento y justificación. Con base en las respuestas obtenidas identificamos que la noción de ciertos elementos principales de la geometría están construidas por apreciaciones visuales más que por características y/o representaciones conceptuales.*

Palabras clave: *visualización, justificación, razonamiento, geometría.*

INTRODUCCIÓN

La Geometría ha evolucionado significativamente desde Euclides hasta Gauss. No es de extrañar que con la aparición de las matemáticas modernas su enseñanza se haya redireccionado priorizando el aprendizaje de habilidades algebraicas, mecánicas y memorísticas (Abrate, Delgado &Pochulu, 2006).

Diversas son las investigaciones donde se evidencia que en la educación formal, los contenidos de geometría son presentados como el producto acabado de la actividad matemática. La enseñanza tradicional ha enfatizado la memorización de fórmulas y definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas. (Gamboa & Ballestero, 2010, p.127). De la misma manera los profesores han priorizado la enseñanza de la matemática en otras áreas y han desplazado los contenidos de geometría hacia el final de los cursos, lo que implica, en variados casos, la exclusión de estos tópicos o su atención de manera superficial. La enseñanza de la geometría desde este enfoque ha sido considerada como una disciplina difícil y sin utilidad para la mayoría de los estudiantes (Abrante, et al., 2006). El propósito de este estudio es evidenciar; cómo estudiantes de octavo básico se enfrentan ala resolución de problemas que requieren de visualización, argumentación yjustificación.

ANTECEDENTES.

En la actividad matemática no solo se evidencian dificultades en la resolución de tareas que involucran conceptos propios de la geometría.Barrantes (2004)establece que en las últimas décadas la enseñanza de la geometría se ha visto caracterizada por una fuerte tendencia a la memorización de conceptos y propiedades que muchas veces se basan en conceptos previos, y la resolución automática de problemas en los que se tratan aspectos más bien aritméticos.

Por su parteBáez e Iglesias (2007)señalan que, la enseñanza y aprendizaje de la geometría presenta dificultades, debido a que los profesores pueden o no abordar todos los contenidos geométricos contemplados en los programas de estudio. Para el caso en que sí se desarrollan, se enfatiza el uso de fórmulas y el cálculo de áreas, no fortaleciendola apropiación de habilidades como la visualización, el razonamiento y la justificación. Torregosa y Quezada (2007), definen la visualización al proceso o acción de transferencia de un dibujo a una imagen mental de un objeto o viceversa. Una acción de visualización se presenta cuando se expone un dibujo geométrico estático, para el cual se requiere establecer relaciones o identificar algunas propiedades que permitan conocer, con mayor profundidad, aquel dibujo. Esta habilidad de visualización es fundamental para el aprendizaje de la geometría como lo señalaHernández yVillalba (2001) al determinar que la geometría es una manera de pensar y entender, es decir una forma de razonamiento deductivo al relacionar un ejemplo y un modelo.

Según lo señalado porCastiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004)la importancia de la geometría radica fundamentalmente en el proceso de razonamiento que puede llevar a cabo un estudiante. Aunque la dificultad en la enseñanza de la geometría se suscita en la transición de la descripción de figuras a un proceso formal, basado en razonamientos y argumentación.

Elementos teóricos y metodológicos

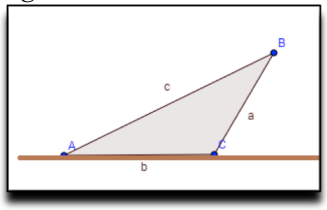
El aprendizaje de la geometría implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación. Más aún, para lograr un aprendizaje significativo es necesario construir una interacción fuerte entre estos dos componentes, de manera que el discurso teórico quede anclado en experiencias perceptivas que ayuden a construir su sentido y, a su vez, las habilidades visuales deben ser guiadas por la teoría, para ganar en precisión y potencia (Castiblanco et al., 2004).

Duval, (1995) distingue cuatro tipos de aprehensión figural en el registro de visualización geométrica: la *Aprehensión Perceptual* refiere al reconocimiento y nombramiento de figuras geométricas, en diferentes lugares y orientación; *Aprehensión Operatoria* centrada sobre las modificaciones posibles de una figura de partida y por consiguiente sobre las reorganizaciones perceptivas que estas modificaciones introducen para resolver un problema; *Aprehensión Discursiva* de una figura privilegia exclusivamente el estatus que el enunciado concede a sus proposiciones. Por tanto, se debe tener en cuenta que las figuras por si mismas no constituyen un registro de tratamiento autónomo, es decir, no basta con un simple reconocimiento perceptivo en ellas para asignarle propiedades particulares (Marmolejo, 2010 p.18); *Aprehensión Secuencial*se requiere siempre que haya que construir una cifra o describir su construcción.

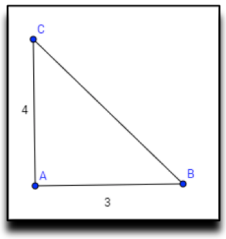
Este trabajo se trata de un estudio exploratorio, que indaga en tres estudiantes de 7° y 8° básico su actividad matemática cuando se enfrentan a tareas que involucran en su diseño el uso de las aprehensiones de tipo perceptiva, secuencial y discursiva

El estudio se apoya de un cuestionario formado portres preguntas. A cada estudiante se le facilitan todos los instrumentos geométricos que han de permitir dar respuesta a las tareas planteadas.

1. *Construya si es posible, un triángulo con segmentos de medidas 3, 4 y 7 centímetros.*
2. *Determine la altura del siguiente triángulo ABC:*



3. *Observe la siguiente figura:*



¿Cuál es la medida del segmento $\overline{CB}$? Justifique su respuesta.

Levantamiento de conjeturas

Previo a la aplicación de los reactivos se levantaron conjeturas respecto de las respuestas que podrían emerger, las cuales luego se contrastaron con las producciones estudiantiles que se obtuvieron en la fase de aplicación del instrumento.

En la pregunta 1, se estima que los estudiantes tendrán dificultades en la construcción del triángulo, posiblemente su construcción se apoyará de dibujos arbitrarios que ignorarán la propiedad de desigualdad triangular.

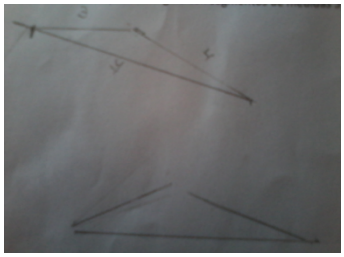
Por otro lado en la pregunta 2 dada la peculiaridad de la figura, se espera que los estudiantes tengan dificultades para dar respuesta a lo planteado considerando la altura del triángulo como el segmento desde el punto medio del segmento $\overline{AC}$ al punto B. Lo cual es incorrecto.

Finalmente para la pregunta 3, se prevé que dada la representación de la figura, los estudiantes utilicen el teorema de Pitágoras asumiendo que el ángulo $< BAC$ es recto, aun cuando no se explicita en la tarea que la figura corresponde a un triángulo rectángulo.

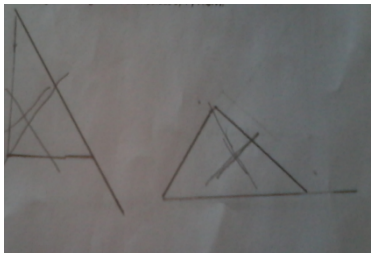
RESULTADOS

A continuación se presentan las respuestas obtenidas posterior a la aplicación de los reactivos y se realiza una breve interpretación de los mismos. Cabe destacar que estas respuestas no necesariamente concuerdan con las conjeturas anteriormente planteadas.

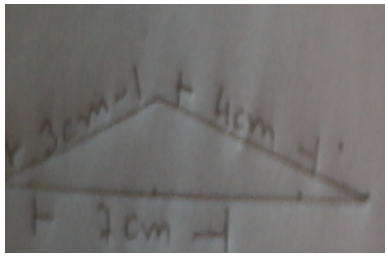
Para el caso de la pregunta 1:Todos los estudiantes realizan la construcción del triángulo a pesar de que por propiedad de desigualdad triangular no es posible su construcción.



Estudiante 1 (E1)



Estudiante 2 (E2)

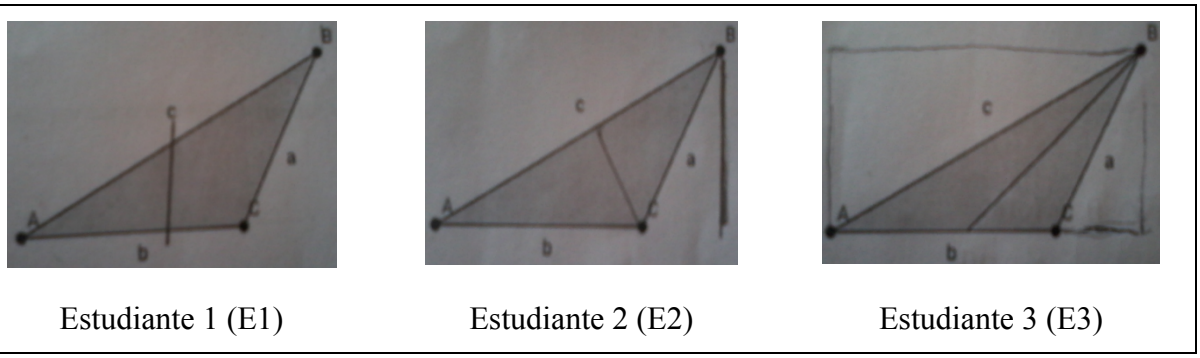


Estudiante 3 (E3)

Figura 1: Respuestas Estudiantes Pregunta 1

En la pregunta número 2, El estudiante (E1) señaló la altura del triángulo por simple observación el segmento perpendicular desde el punto medio, del segmento $\overline{AC}$, hasta el segmento $\overline{AB}$. Por otro

lado, el estudiante (E2)se acerca a una respuesta correcta, sin embargo no establece las condiciones propias de la definición de altura para un triángulo (perpendicularidad y punto medio). Finalmente, (E3) señaló la altura del triángulo como el segmento comprendido desde un eventual punto medio de $\overline{AC}$ al punto B lo que coincide con la conjetura señalada.



Estudiante 1 (E1) Estudiante 2 (E2) Estudiante 3 (E3)

Figura 2: Respuestas Estudiantes Pregunta 2

Para el caso de la pregunta 3 se describen los procedimientos realizados por cada uno de los estudiantes: El estudiante (E1) –Mide el segmento $\overline{CB}$utilizando una regla métrica, obteniendo como resultado 5,2 cm.– En el caso del estudiante (E2)–solo escribe el número 5 como respuesta a la pregunta planteada– Finalmente el estudiante (E3)–utiliza el teorema de Pitágoras para determinar la medida del segmento $\overline{CB}$–.

CONSIDERACIONES FINALES

Luego de analizar y contrastar las respuestas de los estudiantes con los antecedentes teóricos y nuestras conjeturas, podemos concluir que respecto a la pregunta 1, los estudiantes logran identificar atributos físicos de la figura geométrica planteada, sin embargo, desconocen las propiedades matemáticas asociadas a ella, en este caso se desconoce que la construcción de un triángulo está dotada de propiedades.

Por otro lado, en la pregunta número 2 los estudiantes presentarondificultades para determinar la altura del triángulo, esto debido a la peculiaridad del ejemplo dado. Evidentemente los estudiantes no están familiarizados con este tipo de representaciones figurales, sin embargo existen aproximaciones que evidencian un acercamiento a la noción de altura de un triángulo.

Con respecto a la pregunta número 3 cada estudiante establece una estrategia para responder a la problemática planteada. Se presume que los estudiantes (E2) y (E3) asumen visual y perceptivamente que el triángulo dado corresponde a un triángulo rectángulo. Esto se evidencia en las respuestas dadas pues ninguno de ellos realiza una verificación del tipo de triángulo presentado y proporcionan respuestas a partir de procesos memorísticos más que comprensivos. Esta situación se condice con lo propuesto por Báez e Iglesias (2007) quienes señalan que la actividad matemática enfatiza el uso de fórmulas y no el de apropiación de habilidades de visualización, argumentación y justificación.

Con base en lo descrito anteriormente, es necesario fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, a través de problemáticas que involucren en su diseño aspectos que le permitan al estudiante transitar por todos los tipos de aprehensiones figurales, además depropiciar análisis de propiedades, de regularidades y formulación de conjeturas para avanzar hacia una comprensión y sentido de los procesos de justificación.

Referencias

Abrate, R., Delgado, G. &Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. Revista Iberoamericana de Educación.

Baez, R. & Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". Enseñanza de la Matemática, 12-16, Número extraordinario, 67-87.

Barrantes, M. (2004) Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para Maestro sobra la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad de Extremadura. España.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Enlace Editores Ltda.

Gamboa, R. & Ballestero, E. (2010). LA enseñanza y aprendizaje de la geometría secundaria, la perspectiva de los estudiantes. Revista Electrónica Educare, 14(2), p.125-142.

Hernández, V. &Villalba, M. (2001). Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original.

Marmolejo, G. 2010. La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. Revista Sigma, 10(2), p. 10-26.

Mineduc. (2011a). Programa de Estudio para Octavo Año Básico Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago de Chile. doi :978-956-292-342-2.

Torregosa, G. & Quezada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10(2), 275-300.

ELEMENTOS DEL PUEBLO MAPUCHE EN LAS CLASES DE MATEMÁTICA: UN ESTUDIO DE CASO DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Calfunao, E.[a] y Vásquez, C.[b]

[ab]Pontificia Universidad Católica de Chile
ercalfunao@uc.cl, [a]cavasque@uc.cl[b]

Resumen

Esta investigación que se encuentra en curso está referida al análisis de la incorporación de elementos del pueblo mapuche en las clases de matemática. Para ello, se adopta como marco teórico el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, pues éste brinda herramientas para el análisis de la incorporación de dichos elementos en el proceso de instrucción matemática de educación básica. Bajo esta mirada, se analizará cómo el profesor incorpora estos elementos en sus clases para crear aprendizajes significativos en los alumnos.

Palabras clave: *pueblo mapuche, educación matemática, educación básica, enfoque Ontosemiótico.*

1. ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

La matemáticaestá incorporada en el currículo nacional como una asignatura obligatoria que abarca gran cantidad de horas a la semana. Ahora bien, la importancia de la matemática, radica en que esta permite que el niño (a) adquiera habilidades y conocimientos para solucionar problemas no solo dentro de las aulas, sino también fuera de estas, al igual que para crear ciudadanos críticos, capaces de analizar, interpretar y enfrentar problemas cada vez más complejos. (MINEDUC, 2012). Pero para poder lograr los objetivos que propone el ministerio de educación, el niño tiene que tener aprendizajes significativos. Sin embargo, para que exista aprendizaje significativo, debe haber una vinculación de los contenidos, con la realidad del menor, es decir, "no basta que los alumnos dominen los algoritmos y formas convencionales de representar cantidades y resolver problemas matemáticos si no son capaces de aplicarlos en la resolución de problemas concretos que se les presenta en la vida diaria." (Carrillo, 2002, p.16).

Para alcanzar lo antes expuesto, se debe considerar el entorno social y cultural donde vive y se desenvuelve el menor y su familia, ya que, no es lo mismo enseñar matemática a un niño que vive en el norte de Chile, que a un niño que vive en las cordilleras de la novena región, probablemente los ejemplos, los materiales, y los métodos didácticos que el profesor utilice en la enseñanza de las matemáticas sean diferentes, en este sentido Carihuentro (2007) "señala que la escuela como campo educativo y agente socializador debe poner especial atención y buscar estrategias hacia el logro de aprendizajes que sean significativos para el educando, estos deben ser contextualizados a la realidad sociocultural de los alumnos y alumnas" (p. 12). Ahora bien, "en nuestro país y, en gran parte de América Latina, se implementan planes y programas nacionales de educación, cuyos contenidos mínimos son de carácter obligatorio para los establecimientos que imparten la educación básica y secundaria, reflejando la intención de construir un Estado monocultural. Estas políticas educacionales han prácticamente ignorado el carácter multicultural de supoblación, generándose efectos no previstos por la institucionalidad estatal en estos sectores poblacionales" (Carihuentro, 2007, p. 6).

Por su parte, Carrillo (2002) "señala que una de las metas de las escuelas interculturales bilingües en el medio indígena, es buscar alternativas para vincular los saberes de la población indígena con los conocimientos universales, como una tarea indispensable para lograr que los niños y niñas que asisten a las escuelas se apropien de aprendizajes significativos" (p.16).Sin embargo esto no ha sucedido, aun cuando, se han tomado medidas en pro de una educación intercultural, estos siguen siendo incipientes, esto queda en evidencia, con los bajos logros de los estudiantes de origen mapuche en mediciones nacionales, "Según estudios realizados por el programa EIB y la observación de clases en 138 de las 162 escuelas focalizadas del Programa Orígenes a nivel nacional se concluye que en más del 60% de los casos, la cultura indígena constituye un contenido irrelevante dentro del currículo escolar. La cultura del niño y de su contexto se aborda en forma parcializada, como objeto de conocimiento y no como vivencias, y desvinculada de las experiencias de los estudiantes en sus comunidades." (carihuentro, 2007, p. 19). Para el pueblo mapuche, por su parte, la educación, de los(as) niños(as), era responsabilidad de la familia, y de la comunidad, quienes debían trasmitirle el conocimiento, costumbres, técnicas de trabajo y de interacción social; según Quidel, Huentecura, Rain, y Hernández (2002) el aprendiz comenzaba observando lo que realizaban los mayores, luego se le daban pequeñas responsabilidades de mayor a menor grado de dificultad, para que luego trabajara de manera autónoma. Por tanto, "al observar la actividad de la escuela en la comunidad durante todo este tiempo, resulta muy fácil percibir los efectos que este modelo de escuela ha dejado: niños, jóvenes, personas adultas y ancianos mapuches con una crisis de identidad, la que se revela en una baja autoestima, en un fuerte abandono, a sus creencias, a sus formas de vivir, pensar, creer y ser" (Quidel, et. al, 2002, p.7). De ahí la necesidad de una pedagogía actual, que responda a una sociedad intercultural, que valore y respete los saberes ancestrales de los pueblos originarios. Una de las metodologías que se ha preocupado de esta necesidad es la denominada etnomatematica, práctica que permite que el niño utilice sus conocimientos para generar uno nuevo, el niño crea sus propios aprendizaje por medio de los que ya posee, es decir, "Con esta dinámica se espera que los niños y niñas, eventualmente, lleguen por sí solos a los algoritmos, métodos o procesos que la mayor parte de las veces se les imponen rápida y abruptamente. Es esa una manera de permitir que la formación de un pensamiento matemático se convierta en un placer para los niños y niñas. Este planteamiento concibe a las matemáticas como una herramienta, útil en la resolución de problemas, que puede contribuir para modificar ideas anteriores al intercalarlas con situaciones problemáticas nuevas." (Carrillo, 2002, p.17)

En consecuencia, y viendo la necesidad de que se considere los saberes, conocimientos y elementos provenientes de los pueblos originarios y especialmente el pueblo mapuche y que pueden ser utilizados para generar conocimiento dentro de la sala de clase, nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo el profesor de educación básica incorpora elementos[24] del pueblo mapuche para crear aprendizajes significativos en la asignatura de matemáticas?

Para dar respuesta a esta pregunta de investigación, se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo general:

Analizar la incorporación de elementos del pueblo mapuche en las clases de matemáticas.

Objetivos específicos:

[24]Entendiendo por elementos como todo aquel conocimiento y/o saber matemático, así como también objetos tangibles pertenecientes al pueblo mapuche que se puedan utilizar en la sala de clases.

- Conocer en qué medida el docente valora la incorporación de elementos del pueblo mapuche en la asignatura de matemática.
- Evaluar la puesta en escena de los elementos del pueblo mapuche en la clase de matemáticas.
- Analizar los materiales que utiliza el profesor para realizar clases de matemática y la relación de éstos con los elementos del pueblo mapuche

Para alcanzar estos objetivos y dar respuesta a la pregunta de investigación, nos posicionamos desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), ya que nos entrega herramientas para interpretar el sistema de prácticas matemáticas en el contexto escolar de una escuela rural compuesta en su totalidad por niños mapuches.

2. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas

Bajo el enfoque del EOS se considera como práctica matemática a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida y validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Dichas prácticas pueden ser comunes dentro de una institución o comunidades de prácticas que se interesan en resolver un mismo tipo de situaciones-problemáticas, o bien pueden ser particulares a una persona en específico. Sin embargo, en el estudio de las matemáticas más que las prácticas en sí, lo que interesa estudiar son los sistemas de prácticas vinculados a la actuación de las personas ante la resolución de determinados tipos de situaciones-problemáticas, es decir, se busca dar respuesta a los interrogantes ¿qué es un determinado objeto matemático? o ¿qué significa o representa una determinada expresión?, ya sea a nivel personal o institucional, pregunta que se responde por medio del análisis del sistema de prácticas, involucradas para resolver una situación-problemática, que realiza una persona (significado personal) o por medio del análisis del sistema de prácticas al interior de una institución (significado institucional) vinculadas con dicho objeto. Cabe destacar que dichos significados (personal e institucional) serán relativos, puesto que dependerán y se verán influenciados en cierta medida de los contextos sociales-culturales y de los sujetos involucrados, lo que lleva a introducir una tipología de significados institucionales y personales (Godino, 2002, p. 141) que ha sido esquematizada en la Figura 1:



Figura 1: Tipos de significados institucionales y personales (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 6)

En ellas se distinguen claramente distintos tipos de significados institucionales y personales. Proponiendo los siguientes tipos de significados institucionales: referencial (vinculado al sistema de

prácticas que es considerado en la enseñanza o investigación de la matemática), pretendido (lo que se pretende enseñar de matemática), implementado (aquello que realmente el profesor logra enseñar) y evaluado (lo que se evalúa). Mientras que para los significados personales se consideran los siguientes tipos: global (asociado a la totalidad del sistema de prácticas que un sujeto conoce y que es capaz de manifestar en relación a la matemática), declarado (lo que se puede evaluar que un sujeto sabe sobre matemática, a partir de las respuestas correctas e incorrectas dadas a una evaluación) y logrado (aquello que el sujeto es capaz de manifestar de acuerdo con los significados institucionales, como un diferencial entre los significados personales iniciales de los estudiantes, y aquellos que finalmente han sido alcanzados).

Así a partir del acoplamiento, de manera progresiva, entre los distintos tipos de significados institucionales y personales, antes descritos, es posible establecer relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje, donde según Godino (2002) la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

3. Metodología

La metodología que se utilizará en esta investigación es de tipo cualitativa, ya que este permite realizar un análisis de acción social, esta metodología nos permite estudiar de forma más integra el comportamiento de un grupo humano, donde se van a realizar entrevistas para que los involucrados puedan dar su testimonio, sus opiniones y vivencias, por lo cual los datos que se obtendrán serán de tipo descriptivos. Esta investigación se llevará a cabo a través de un estudio de caso, ya que de esta forma se obtendrá una mejor comprensión, del fenómeno que se está investigando al observar de forma directa los acontecimientos. Según Carihuentro (2007) "los estudios de casos son particularistas, descriptivos, y heurísticas y se basan en el razonamiento inductivo al manejar múltiples fuentes de datos" (p.44). Por cuanto en el ámbito académico la función del estudio de caso: es fomentar el análisis para comprender fenómenos verosímiles de la actualidad, con el fin de proporcionar herramientas, como conceptos teóricos, que ayuden a comprender o solucionar el problema.

El estudio de caso se realizará en una escuela rural ubicada en la comuna de Lanco, sector Puquiñe, esta cuenta con una matrícula del 99,9% de niños descendientes del pueblo mapuche, además, cuenta con cursos de primero a octavo básico, así también con un jardín que alberga a 14 niños. El establecimiento está dentro de una comunidad indígena denominada Francisco Calfuleo. Los métodos que se utilizarán para la recolección de datos son:

- Entrevista semi estructurada: ya que este método permite que los individuos den su opinión y relaten sus vivencias de forma directa, la entrevista semi estructura permite que los entrevistados se expresen con mayor profundidad y flexibilidad, en comparación con entrevistas y cuestionarios estandarizados. Se realizaran preguntas abiertas al profesor de matemática, con la finalidad de evaluar la valoración que el posee de los conocimientos, tradiciones del pueblo mapuche
- Observación y registro audiovisual: "Es un método de análisis de la realidad que se vale de la realidad, de la contemplación de los fenómenos, acciones, procesos, situaciones, etc. y su dinamismo en su marco NATURAL." (Folgueiras, 2009, p.26). Se realizaran observaciones a las clases impartida por el profesor de matemática, puesto que esta técnica permite observar de manera directa, los actividades y comportamientos de las personas, tal y como las realizan habitualmente, por lo tanto, se pueden recolectar vivencias y anécdotas que surjan de manera espontánea. Esta observación se llevara a cabo mediante grabaciones a clases de matemática de un colegio rural de la comuna de Lanco.

- Se analizarán los materiales utilizados por el profesor y material audio visual: con el propósito de analizar y de relacionar los materiales que utiliza el profesor de educación matemática en sus clases, con los elementos del pueblo mapuche. El material audiovisual es para dejar en evidencia como trabaja el profesor y cómo se comportan los niño, de acuerdo una pauta y criterios definidos.

Las etapas a seguir son la recolección de los datos (entrevista al docente, observación de clase, obtención del material utilizado por el docente) para luego dar paso a un análisis de estos, para la creación de la reflexión final. En esta investigación una de las principales limitaciones, es que al ser un estudio de caso en un colegio rural, no se puede generalizar ya que la muestra no es significativa.Otra limitación es la gran cantidad de información que se puede llegar a obtener pudiendo no ser posible sintetizarla de manera adecuada o bien correr el riesgo de desviarse del objetivo.

Referencias bibliográficas

Carrillo, A. (2002). Matemáticas escolares y etnomatemáticas en el contexto de la diversidad cultural. México.

Carihuentro, S. (2007). Saberes mapuche que debiera incorporar la educación formal en contexto interétnico e intercultural según sabios mapuche. Santiago .

Folgueiras, P. (2009). Métodos y técnicas de recogida y análisis de información cualitativa. Buenos Aires .

Huenchullán, C. (2005). Orientaciones para la Contextualización de Planes y Programas para la Educación Intercultural Bilingüe NB1. SANTIAGO.

Ministerio de Educación (2012). División Educación Intercultural. Centro de Estudios, División de Planificación y Presupuesto. Recuperado julio 09, 2014, en http://www.peib.mineduc.cl/index2.php?id_portal=28&id_seccion=3416&id_conteni do=13947

Quidel, J., Huentecura, J., Rain, N., y Hernández, A. (2002). Orientaciones Para La Incorporación Del Conocimiento Mapuche Al Trabajo Escolar . Santiago: Gobierno De Chile.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en didactique des Mathématiques, 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en didactique des Mathématiques, 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. ZDM. The International JournalonMathematicsEducation, 39, 127-135.

DISEÑO DE TAREAS EN EL ESTADO DE LA TRANSVERSAL DE GRAVEDAD DE UN TRIÁNGULO USANDO GEOGEBRA.

Santis-Orellana, C.[a];Henríquez-Rivas, C[b]. (Profesora Guía)

Universidad Alberto Hurtado;
carolina.santis.o@gmail.com, carohenriquezrivas@gmail.com.

Resumen

El trabajo que se presenta corresponde a una propuesta de aprendizaje para estudiantes de 7° básico (12años) relativa a las transversales de gravedad del triángulo usando tecnología (Geogebra). Para la propuesta se diseñan tareas de referencia sustentadas en la teoríaEspacio de Trabajo Matemático, con la finalidad de coordinar aspectos semióticos, discursivos e instrumentales. Los resultados proporcionan información relevante para mejorar la propuesta, así como para el estudio en la formación del profesor.

Palabras clave: *transversal de gravedad, geogebra, espacio de trabajo geométrico, planos verticales.*

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo es parte de una investigación que tiene como objetivo diseñar una propuesta de aprendizaje para el estudio de la transversal de gravedad de triángulos utilizando Geogebra. La propuesta se ha diseñado para el nivel 7° básico (12 años), la cual en una fase de experimentación se ha implementado en una institución de la Región Metropolitana.

En el marco curricular chileno (MINEDUC, 2009) en 7° básico se propone el estudio de la transversal de gravedad de un triángulo en el eje de geometría, en el Objetivo Fundamental7, dice: "Construir triángulos […], caracterizar sus elementos lineales y comprobar que algunas de sus propiedades son válidas para casos particulares, en forma manual y usando procesadores geométricos." (p. 172). De la misma manera, se realiza una revisión al Programa de Estudio del nivel donde se evidencia el estudio del objeto matemático con el aprendizaje esperado N° 2: "Construir propiedades de […] la transversal de gravedad de triángulos, utilizando instrumentos manuales o procesadores geométricos" (MINEDUC, 2011, p. 50).

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, se identifica que los temas propuestos en el eje geometría no se explicitan cuáles propiedades o teoremas del objeto matemático a estudiar. Por ejemplo, no son considerados los relativos a la división proporcional de las transversales de gravedad de acuerdo al punto de intersección baricentro (entre otros).

Las investigaciones realizadas por Chávez (2014) y Miranda (2011) muestran que existen problemas al estudiar la transversal de gravedad de un triángulo, haciendo referencia a "los conceptos de Altura, Bisectriz, Transversal de Gravedad y Simetral de un triángulo, no son fácilmente distinguidos por los estudiantes, los confunden, los olvidan y carecen para ellos de un significado relevante" (Chávez, 2014, p. 689). Asimismo, Miranda (2011) realiza un estudio en base a los puntos notables donde la problemática en la estudio es la difícil comprensión de los alumnos al estudiar las propiedades de dichos puntos. Ambos estudios citados concuerdan que existen problemas en la comprensión de las propiedades de la transversal de gravedad, al ser un tema muy abstracto y poco cercano para los estudiantes

En el marco de la teoría *Espacio de Trabajo Matemático*, ETM (Kuzniak, 2011), se muestra el potencial deluso de una herramienta tecnológica en procesos cognitivos y matemáticos al estudiar

contenidos referentes a la geometría y como se logra la articulación de los planos verticales coordinando lo figural e instrumentalcon estudiantes que se inician en el nivel secundario. Esto es lo que se evidencia en el trabajo Coutat y Richard (2011), por medio del uso de una herramienta tecnológica. En estudios como el de García, Romero y Gómez-Chacón (2014) a través de un experimento de enseñanza, los autores concluyen que el uso de Geogebra pierde protagonismo en la articulación de los planos instrumental y discursivo, al considerar al profesor como el gestor y diseñador principal en el proceso de razonamientos ligados al lenguaje.

En síntesis, la presente investigación tiene como propósito: *Diseñar tareas para el aprendizaje que favorezcan el estudio de propiedades de la transversal de gravedad de triángulos usando Geogebra para la construcción*. Lo anterior permitirá favorecer la activación de los planos verticales del Espacio de Trabajo Geométrico personal y propiciar el tránsito entre los Paradigmas Geométricos GI/gII (o bien gI/GII) en estudiantes de 7° básico.

Marco teórico

El estudio se sustenta en la teoría de *Paradigmas Geométricos* y *Espacio de trabajo geométricos (ETM_G)* desarrollada inicialmente por Houdement y Kuzniak (1999, 2000, 2006) y ampliada para otros dominios de la matemática por Kuzniak (2011), denominada actualmente *Espacio de Trabajo Matemático (ETM)*.

Espacio de trabajo matemático

El objetivo primordial es una mayor comprensión cuando se pone en manifiesto el trabajo matemático en un contexto escolar, con lo que, el ETM es el espacio organizado que favorece el trabajo de sujetos cuando resuelven problemas matemáticos. En el caso de la matemática escolar los sujetos serán alumnos o estudiantes en nivel inicial o avanzado (Kuzniak& Richard, 2014).

En el ETM se conserva la idea original del ETM_G, en la cual se articulan dos planos: uno que tiene referencia a aspectos cognitivos (plano cognitivo) y otro que hace referencia a aspectos matemáticos (plano epistemológico). Cada plano tiene tres polos, en el plano cognitivo: *visualización*, *construcción* y *prueba*, y en el plano epistemológico: *representante*, *artefactos* y *referencial* (Kuzniak, 2011). Los polos de los planos del ETM se articulan por medio de tres génesis: *semiótica, instrumental* y *discursiva.* "La génesis semiótica, asociada a las representaciones de los objetos matemáticos. La génesis instrumental, hace operatorios los artefactos en el proceso constructivo. La génesis discursiva que da sentido al referencial teórico (definiciones, propiedades) para ponerlo al servicio del razonamiento matemático" (Henríquez, 2014, p.1808). Lo anterior permite abordar la *circulación* entre las génesis en el ETM de un individuo.

Los planos verticales como lo describen Coutat& Richard (2014), se podrán vincular en las fases del ETM_G cuando se realiza una tarea: *descubrimiento y exploración, justificación y razonamiento, presentación y comunicación*. Según los autores "La ejecución efectiva de estas fases definirá un cierto número de competencias matemáticas cognitivas fundamentadas sobre la base de la coordinación de las génesis y sus relaciones con el plano epistemológico" (p. 11).

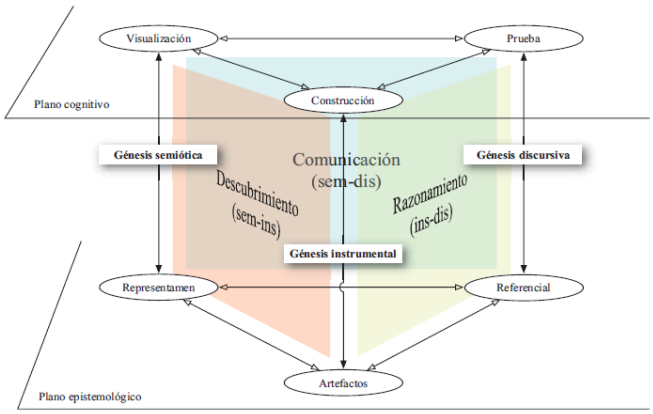


Figura 1. Planos verticales en el ETM (Kuzniak& Richard, 2014).

Kuzniak y Richard (2014) describen el trabajo matemático en el contexto escolar en tres niveles distintos o tipos de ETM: *ETM de referencia*, corresponde a la matemática considerada por la institución, la cual es desarrollada por el profesor y que corresponde al *ETM idóneo*, y es el docente que debe construir y propiciar oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, quienes trabajan para su *ETM personal*. Los autores enfatizan en que el ETM idóneo no es estático y que es susceptible a cambio constantes. Con lo expuesto, el presente estudio estará enfocado en el estudio ETM personal de estudiantes de 7° básico.

Paradigmas geométricos

En este enfoque teórico se definen tres tipos de geometrías que coexisten en el proceso de enseñanza aprendizaje de esta disciplina de acuerdo a Houdement y Kuzniak (2006): *Geometría Natural(GI),* que descansa sobre las figuras reales y tangibles y su importancia radica en la medición; *Geometría Axiomática Natural (GII),* se habla de figuras geométricas, para validar el objeto se acude a definiciones y propiedades, pero a nivel de un sistema axiomático local; *Geometría Axiomática (GIII),* los objetos matemáticos provienen de una axiomática elegida con toda la rigurosidad y formalismo del modelo.

DISEÑO DE TAREAS

El diseño de tareas permite indagaren el ETM_G*personal* de estudiantes en el nivel de 7° básico, con el propósito de estudiar la interacción de los *planos verticales*del ETM y analizar el *paradigma geométrico* privilegiado en cada trabajo.
En el diseño de tareas se han definido los siguientes propósitos: 1) "*Favorecer la coordinación de los planos [Sem-Ins] e [Ins-Dis] al construir la transversal de gravedad de un triángulo usando Geogebra",* y 2) *"Conjeturar respecto a la división proporcional en la intersección de las transversales de gravedad de un triángulo para favorecer la coordinación de los planos [Sem-Dis] e [Ins-Dis] mediante el uso de Geogebra".*

Por razones de extensión, en lo que sigue será considerada la tarea asociada al propósito Nº2.

"Relación entre trazos y el baricentro"

Paso 1: Construye con Geogebra un triángulo *ABC* y dos transversales de gravedad que se intersectan.
Paso 2: Utiliza herramientas de Geogebra para mostrar que la transversal de gravedad que va de *B* a *G* (*o* $\overline{BG}$) pasa por el centro de $\overline{AC}$. Describe tu justificación.
Paso 3: Utiliza la herramienta "*distancia o longitud*" para encontrar las medidas de las transversales de gravedad.
Paso 4: Completa la siguiente oración, de acuerdo a las medidas de las transversales de gravedad (Considera *G* como el punto de intersección de las transversales de gravedad):

a) $BG = 2 \cdot$ _____, b) $\frac{2}{3}BF =$ _____ y  c) $\frac{1}{3}BF =$ _____

Paso 5: Lo que acabas de comprobar, ¿se cumplirá para las otras dos transversales de gravedad? Utiliza los deslizamientos o movimientos de la figura para justificar y escribe tus explicaciones.

ANÁLISIS DEL DISEÑO DE TAREA

Análisis a priori

En la tarea, se busca identificar como los estudiantes conjeturan acerca de las relaciones que se presentan en la división proporcional al intersectarse las transversales de gravedad en el baricentro. Con esto,en los pasos 1 y 2 se espera que los estudiantes utilicen la herramienta de Geogebra*distancia o longitud* o que realicen construcciones geométricas como paralelogramos para probar lo pedido. El paso 3 ayuda al paso 4 para que los alumnos conjeturen la relación que existe entre los trazos y el baricentro. En el paso 5, lo ideal sería que los alumnos identificaran la razón entre en el punto de intersección de las transversales de gravedad y lo extiendan a las demás transversales de gravedad. Con los pasos 1 y 2 se favorece la coordinación de los planos *[Ins- Dis]* del ETM_G y con los pasos 3, 4 y 5 se favorece la coordinación de los planos *[Sem-Dis]* del ETM_G.

Análisis de resultados

La investigación corresponde a un estudio de casos (Stake, 1995), donde la implementación –en una etapa inicial– se llevó a cabo con dos estudiantes de 7° básico de un colegio particular subvencionado de Santiago de Chile. Cabe destacar que, antes de realizar las tareas los estudiantes tuvieron una inducción para asegurar el uso de Geogebra, y que los estudiantes conocen la definición de la transversal de gravedad de un triángulo. Los estudiantes se han denominado como E_1 y E_2.

Primer caso: ETM_G de E_1

A continuación se muestra parte del trabajo realizado por E_1, donde se describe su trabajo.
E_1 justifica el paso 2 respondiendo:

> "Sí, porque el segmento *BG* pasa por el centro de $\overline{AC}$, quedando sin nombre el vértice".

Para establecer las relaciones presentadas en el paso 4, utiliza las medidas de los segmentos (paso 3)y operatoria numérica, respondiendo:

> "$\overline{FG}$ multiplicado por 2, $1{,}18 \cdot 2 = 2{,}36$ y $\overline{BG} = 2{,}36$ entonces $BG = 2 \cdot \underline{FG}$".

De tal manera que E_1 utiliza la misma estrategia para completar las relaciones pedidas. A la pregunta del paso 5 dice:

> "Sí, porque todos tienen la misma medida y tienen un punto medio y puede ser comprobado con Geogebra por las medidas y sin son exactas mejor".

Coordinación de los planos vérticales del ETM y paradigma geométrico

El trabajo geométrico se activa con la génesis instrumental. El estudiante E_1para justificar el paso dos de la tarea se basa en la utilización de Geogebra más que en propiedades geométricas o la defición de la transversal de gravedad, con esto no se identifica la coordinación de los planos *[Ins-Dis]*. El paso4 el trabajo gemétrico lo valida por medio de la figura, las medidas de las longitudes de las transversales de gravedad y el cálculo numérico, con esto se identifica la coordinación de los planos *[sem-dis]*. El Paradigma Geométrico privilegiado es GI, debido a que no utiliza definiciones y propiedades en el trabajo geométrico.

Segundo caso: ETM_G de E_2

A continuación se muestra parte del trabajo realizado por E_2.
E_2 justifica el paso 2 respondiendo:

"Con un punto de intersección, ya que si pasa por el centro de $\overline{AC}$ tiene que haber un punto de intersección".

Para establecer las relaciones presentadas en el paso 4, utiliza las medidas de los segmentos (paso 3) y operatoria numérica, respondiendo:

"$\overline{BG} = 2{,}8$ y $\overline{GF} = 1{,}4$, significa que significa que $\overline{BG}$ es el doble de $\overline{GF}$".

Las otras relaciones presentadas las completacon la misma estrategia. A la pregunta del paso 5 dice:

"Sí, porque en todas las transversales el segmento más grande mide el doble del pequeño, ejemplo $\overline{GE} = 2{,}38\,;\ 2{,}38 \cdot 2 = 4{,}76\,; 4{,}76 = \overline{GA}$".

Coordinación de los planos vérticales del ETM y paradigma geométrico

E_2 en la tarea 2, el pasos 2 basa la justificación en la construcción y la figura, por ende en el trabajo geométrico hay una coordinación entre los planos *[Sem-Ins]*. En el paso 4 el trabajo gemétrico lo valida por medio de la figura, las medidas de las longitudes de las transversales de gravedad, el cálculo numérico y en cada relación concluye verbalmente lo que se le pide probar, con esto se identifica la coordinación de los planos *[Sem-Dis]*. El Paradigma Geométrico privilegiado es GI.

CONCLUSIONES

Para lograr los objetivos planteados el uso de Geogebra fue considerado como un medio instrumental, en el cual se privilegia su potencial dinámico. Lo anterior, contribuye en favorecer los procesos de descubrimiento, visualización y razonamiento discursivo. En general observamos que los resultados de los dos casos analizados E_1 y E_2, evidencian la articulación de los procesos que hacen alusión a lo semiótico–discursivo, instrumental–discursivo, donde el trabajo de ambos estudiantes se activa por medio del uso de la herramienta tecnológica, la cual favorece el proceso de descubrimiento y razonamiento. El proceso semiótico–instrumental no fue considerado en los objetivos y análisis a priori, y E_2 muestra la coordinación de estos procesos. Las tareas serán mejoradas luego de esta primera experimentación, y además, se considerarán otros teoremas pertinentes al objeto matemático en estudio, como los relativos a las áreas de triángulos.

Referencias

Chávez, V. (2014). Construcciones mentales para la recta de Euler. Alme, 682-696.

Coutat, S. & Richard, P. (2011) Les figures dynamiquesdans un espace de travailmathématiquepourl'apprentissage des propriétésgéométriques. Annales de didactique et de sciencescognitives, 16, 97-126.

García, M., Romero, I. &Goméz-Chacón, I.. (2015). Procesos de argumentación de estudiantes de secundaria: Influencias cognitivas y actitudinales. En Espacio de Trabajo Matemático. Cuarto Simposio de ETM (págs. 421-443). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006). Paradigmesgéométriques et enseignement de la géométrie. Annales de Didactique et de SciencesCognitives, 11, 175-193.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de TravailMathématique et sesGenèses. Annales de Didactique et de SciencesCognitives, 16, 9-24.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), Volumen 17 (4-1), 1-39.

Miranda, N. (2011). Caracterización del uso de las TIC en la enseñanza de los puntos notables del triángulo. Medellín: Facultad de ciencias exactas y naturales.

Rivas, C. (2014). El trabajo geométrico personal de futuros profesores. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), 27, 1807-1816

Stake, R. (1999). Investigación con estudio de casos. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

PROPUESTA DE ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA ESCOLAR: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.

Salazar, C[a], Fuentes, N[b]

Universidad de las Américas[a,b],
Caroline.salazar4@gmail.com[a], nezah_fuentes95@hotmail.com[b]

Resumen

El interés de este trabajo gira alrededor de la problemática que tienen los estudiantes al tratar de resolver los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas aplicando diversos métodos de resolución, y en la interpretación y uso que dan a los valores obtenidos, donde se puede identificar que las ecuaciones lineales por sí solas se transforman en un obstáculo que impide la comprensión de lo antes mencionado. Para salvar este obstáculo se propone una forma resolver sistemas de ecuaciones lineales tomando en cuenta la teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval, ya que se suelen pasar por alto las complicaciones de realizar la operación de la conversión de registros y no asociar los elementos que se relacionan entre uno y otro.

Palabras Claves: *álgebra, solución, resolución, registros.*

INTRODUCCIÓN

A la conversión de un registro a otro se le entrega una importancia insustancial, cuando de hecho se ha documentado que en el álgebra lineal la conversión entre registros juega un papel central en el aprendizaje y que las conversiones que involucran al registro simbólico resultan de mayor dificultad. Tomando en cuenta documentos de apoyo relacionados con el tema de este trabajo, se consideran ciertos aspectos para el diseño de una secuencia didáctica, que busca que el estudiante que la lleve a cabo, tenga la oportunidad de apropiarse del conocimiento. Para lograr este objetivo se propone que el alumno trabaje diferentes registros: natural, gráfico, algebraico y aplicación. A su vez la estrategia principal es que el conocimiento se obtenga por descubrimiento guiado.

Desde nuestra perspectiva se piensa que es importante utilizar diferentes situaciones que involucren el contenido, y se cree que existen diferentes medios para adquirir un conocimiento, también se considera que involucrar más de uno enriquece el aprendizaje significativo, y aunque el proceso algebraico ha tenido prioridad en los últimos años, es bien sabido que por sí solo no es suficiente, por lo menos a lo que se refiere a la enseñanza-aprendizaje. Claro está, que con esto no se quiere decir que debamos dejar a un lado lo algorítmico, de lo que se trata es que el alumno interactué con los diferentes lenguajes matemáticos, para así darles la oportunidad de formarse criterios y construir su propio saber matemático. Con estas situaciones didácticas se espera favorecer el aprendizaje significativo, con el propósito de incidir positivamente en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Antecedentes del origen y evolución del concepto matemático.

El análisis o investigación de un objeto es necesario para el desarrollo de situaciones que lo involucren, y por lo tanto es de gran importancia saber su evolución histórica, ya que muestra los diversos obstáculos en eldesenvolvimiento del objeto.El estudio histórico, de igual manera da pautas sobre las construcciones de los algoritmos que hoy son enseñados generalmente sin justificación. Realizando un recorrido por la cronología los primeros rudimentos de lo que hoy conocemos como sistemas de ecuaciones según un estudio realizado en el Instituto Tecnológico de Monterrey. Métodos numéricos y álgebra lineal: Los sistemas de ecuaciones lineales (NGJ/vo6, serie CB00851). Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área, o volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida. Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica (Colette, J (1986) .Historia de las matemáticas, 2 vols., 2da. Edición, siglo xxi editores, México), plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

1/4 anchura + longitud = 7 manos
longitud + anchura = 10 manos

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano y observaban que la solución podía ser: anchura = 20, longitud = 30. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En nuestra notación, es:

$y + 4x = 28$
$y + x = 10$

Restando la segunda de la primera, se obtiene $3x = 18$, es decir, $x = 6$ e $y = 4$.

En el recorrido donde se analiza el objeto matemático en cuestión aparecen otros documentos descritos brevemente en un artículo llamado “Historia y desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales” (Ramírez, U. (2013, noviembre 13). historia y desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales) donde se habla nuevamente de los babilonios y de otras etnias que han hecho su aporte o se han involucrado en el trabajo y desarrollo de los sistemas de ecuaciones.

Los babilonios (el mayor número de documentos corresponde al periodo 600 a. de C. a 300 d. de C.) casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizás por considerarlas demasiado elementales, y trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado (Ramírez, 2013).Los egipcios nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhid -1.650 a. de C- y el de Moscú -1.850 a, de C.-) multitud de problemas matemáticos resueltos. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos, pues no se refiere a ningún objeto concreto. En éstos, de una forma retórica, obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones (Ramírez, 2013).Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a Diophante (250 d. de C.), no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación era mayor por la geometría. Sobre la vida de Diophante aparece en los siglos V o VI un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal.Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de ecuaciones con n incógnitas.Diophante resuelve también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal (Ramírez, 2013).Diophante

sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Utilizó ya un álgebra sincopada como hemos señalado anteriormente. Sin embargo, unas de las dificultades que encontramos en la resolución de ecuaciones por Diophante es que carece de un método general y utiliza en cada problema métodos a veces excesivamente ingeniosos (Ramírez, 2013).

Dificultades en el aprendizaje del objeto a enseñar

Obstáculo n° 1:Ecuaciones Lineales

En un artículo de Mabel Panizza se encuentran las siguientes evidencias:

Clasificación:Epistemológico, ya que en base a la definición del objeto matemático, surgen los errores en los estudiantes.

Evidencias:

Todos los estudiantes entrevistados resolvieron los sistemas propuestos correctamente. El primer sistema que se les presentó fue:

$4x = 3y + 8$

$x + y = 2$, cuya solución es el par *2,0.*

Ellos explicaron que un par de números es la solución del sistema si verifica cada una de las ecuaciones. Sin embargo, cuando nosotras preguntamos si la solución del sistema que ellos habían obtenido era una solución de la ecuación $4x = 3y + 8$ –considerada ésta aislada del sistema–, ellos dijeron que no. (E= entrevistadora; R= Rodolfo; D= Daniel)

Entrevista:

E: –Este par (el *2,0,* solución del sistema), ¿es solución de esta ecuación?

R: –No, de las dos.

D: –De las dos juntas, porque es un sistema.

E: –Ajá. Y ustedes, antes, ¿cómo habían hecho para saber que el *5,4* es solución de la de arriba?

R: –Reemplazando.

E: –Y quieren probar si el *2,0* es solución de la de arriba.

D: –No va a dar.

Todo ocurre como si los estudiantes pensaran que, en tanto el par *2,0* fue una solución obtenida manipulando las dos ecuaciones, no podría seguir siendo solución cuando desapareciera una de las ecuaciones que intervino en el proceso de obtención.

Frente a una explicación del entrevistador, Daniel y Rodolfo parecen aceptar finalmente que el par *2,0* es solución de la primera ecuación. Sin embargo, esta aceptación es sólo transitoria: cuando se los enfrenta a un nuevo sistema de ecuaciones en el cual sigue apareciendo la ecuación $4x = 3y + 8$ y se les pregunta si el par *2,0* es solución de la misma, ellos dicen que no, «porque ya no está esta ecuación» ($x + y = 2$, la segunda ecuación del primer sistema tratado).

Este resultado mostraría que, desde la perspectiva de los chicos, «la ecuación con dos variables en un sistema» es un objeto diferente de «una ecuación con dos variables».

Desde ese punto de vista, no tiene por qué haber relación entre la solución de la ecuación obtenida a partir del sistema y la solución de la ecuación aislada del mismo.

Evidentemente este hecho refuta el supuesto en el cual nos habíamos apoyado para pretender provocar desequilibrio en los alumnos al introducir una nueva solución de la ecuación «de la mano» de un sistema. (Panizza, M., Sessa, C., &Sadovsky, P. (1999). La ecuación lineal con dos variables. In Enseñanza de las Ciencias (p. 457-458)).

Justificación de la propuesta

Una ecuación puede contener uno, dos o más incógnitas, es decir, varios números distintos que se complementan en una ecuación, pero se sabe que a las incógnitas se le pueden designar diversos valores y tener infinitas soluciones. Cuando se forma un sistema de ecuaciones, es decir, dos o más ecuaciones, los valores satisfacen las mismas incógnitas y por lo tanto el sistema puede tener una solución o no tener solución (sistema de ecuación no compatible).Para el estudiante a veces es un obstáculo poder comprender que por una parte una ecuación con dos incógnitas posee infinitas soluciones y por otra comprender, identificar y analizar que dentro de un sistema de ecuaciones también forma parte de las soluciones por cada ecuación.Al proponer esta actividad se quiere obtener varios objetivos por ítems y en progreso. Primero cuando se comienza en el ítem I se le ayuda con valores que puede tener x, donde el par ordenado que obtengan como resultado, lo podrán utilizar a medida que vayan avanzando en la guía, observando así en esta parte de la guía de trabajo el lenguaje natural.

También se quiere que los estudiantes antes de llegar al registro algebraico y gráfico puedan observar en el plano cartesiano que ellos mismos confeccionaran, las soluciones que pueden seguir siendo más de las que logran sacar al reemplazar los valores de x.En el siguiente ítem ya se introduce el concepto de sistema de ecuaciones, al contener las ecuaciones del ítem I con otras (Figura 1.), que son pares ordenados justo y ya sacado de los primeros ítems. Se solicita que respondan con respecto a la presentación y destaquen la intersección que se han generado. Este ítem otorgaría el paso a la institucionalización del concepto.En el ítem III (Figura 2.), se quiere lograr que ellos también comprendan que existen sistemas de ecuaciones no compatibles, es decir, que no poseen un par ordenado en común al comparar una ecuación que satisface dos sistemas diferentes. Se ve que en uno de los sistemas tiene solución y el otro no. Y por última instancia se pregunta por el/los par(es) ordenado(s) que los estudiantes consideren que posee una solución, con la ayuda del anexo 1 (Método de Sustitución).

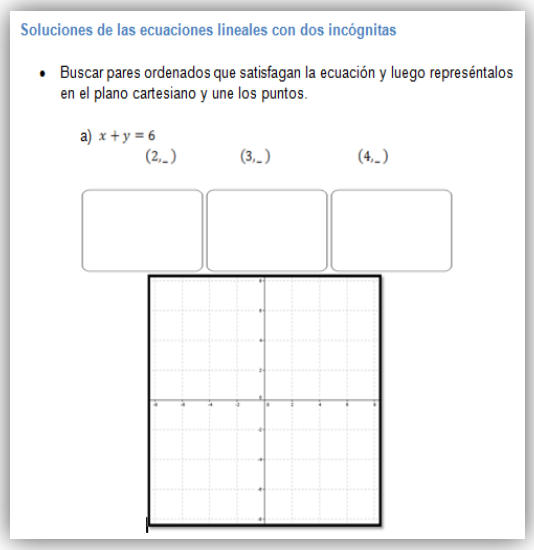


Figura 1. Ítem I, propuesta didáctica.

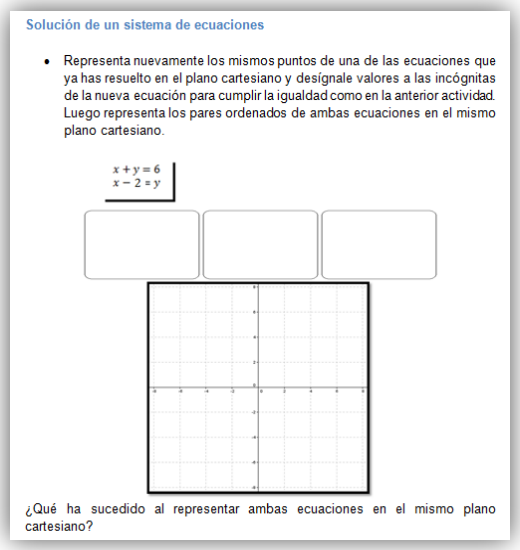


Figura 1. Ítem II, propuesta didáctica.

CONCLUSIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales son la operación que busca la solución que comparten las ecuaciones bajo todos los criterios que puede tomar éste, aunque aquello provoca una confusión en las soluciones de la ecuación lineal con dos incógnitas, ya que el resultado del sistema, se toma como lo antes mencionado y no se logra identificar que aquellos valores (resultado de "x" e "y") son un par de la solución del sistema con dos incógnitas.Sin embargo la propuesta de enseñanza diseñada para aquella dificultad, toma en consideración que el problema proviene desde la identificación de la ecuación lineal con dos incógnitas (sus soluciones particulares), y se comienza por cubrir aquello realizando ejercicios de identificación de soluciones.Otra dificultad que se presenta en esta operación son las transformaciones que se realizan en los distintos tipos de registros, lo que quiere decir que no se logra hacer una conversión entre ellos, dificultando aún más el tratamiento que se debe realizar en la transformación. No se logra realizar la conversión entre el lenguaje natural al algebraico y del algebraico al gráfico, donde una de las causas identificadas en esto, es que los textos escolares y algunos profesores no realizan estas transformaciones en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones, enfocándose solo en los métodos de resolución, correspondiente al tratamiento del registro algebraico. También no existe conciencia de que este contenido corresponde a la introducción al álgebra lineal y se pasa solo como un contenido de álgebra I.

Referencias

Tecnológico de Monterrey (2004). Métodos numéricos y álgebra lineal. Sistemas de ecuaciones lineales.

Instituto Tecnológico de Monterrey. Métodos numéricos y álgebra lineal: Los sistemas de ecuaciones lineales (NGJ/vo6, serie CB00851

Ramírez, U. (2013, noviembre 8). Historia y desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales.

Colette, J (1986).Historia de las matemáticas, 2 vols., 2da. Edición, siglo xxi editores, México.

MINEDUC (2012). Programas de chile 5° y 6° básico. Actualización 2012.

MINEDUC (2011). Programas de chile 7° básico y 2° medio. Actualización 2009. (Edición 2011)

Zañartu, Arrigrandi, Ramos (2013). Texto del estudiante 2° medio (4ta ed., p. 272). Santiago: Santillana del Pacifico.

Panizza, Sessa, Sadovsky (1999). La ecuación lineal con dos variables. En enseñanza de las ciencias (vol. 17, pp. 453-461).

De Herrero(2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. relime. revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 7(1), 49-78.

Sistema de ecuaciones lineales. (2015, 6 de septiembre). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 01:41, septiembre 16, 2015.

Sistema de ecuaciones algebraicas. (2015, 15 de septiembre). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 01:42, septiembre 16, 2015

PROMOCIÓN DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO CON PERTINENCIA CULTURAL MAPUCHE[25]

Huencho, Anahí

Pontificia Universidad Católica de Chile;
aahuencho@uc.cl

Resumen

El presente proyecto de investigación tiene como objetivo crear actividades que propicien el aprendizaje de la etnomatemática del Pueblo Mapuche, respondiendo a la necesidad de revalorar sus conocimientos y difundirlos en el sistema escolar tradicional de Chile. La metodología implementada es cualitativa, con un fuerte foco en el análisis de contenido, la etnografía y la observación participante. Los resultados esperados se centran en reportar la etnomatemática del Pueblo Mapuche, constituir un modelo de actividad de enseñanza pertinente culturalmente y dar cuenta de una actividad de enseñanza concreta que propicie el aprendizaje de elementos etnomatemáticos de relevancia para el Pueblo Mapuche.

Palabras clave: *Etnomatemática Mapuche, educación matemática, aprendizaje cultural*

INTRODUCCIÖN

El presente documento, da cuenta del proyecto de investigación doctoral en desarrollo, centrado en los estudiantes de origen Mapuche y su Educación Matemática dentro del contexto de la educación formal en Chile. Por años, este país ha educado a niñas y niños indígenas omitiendo los conocimientos de su cultura, los que ha provocado diferentes conflictos educativos, culturales e identitarios en éstos. Así, esta investigación implica desarrollar un modelo de acción socioeducativa que les posibilite ejercer su deber y derecho ciudadano de participar en una educación desarrollada desde su propia identidad cultural. En este contexto, se utilizará la etnomatemática como área de investigación, la cual se genera como una propuesta para la conceptualización de la matemática escolar a partir de los contextos sociales, culturales y lingüísticos en los cuales viven los alumnos, desde donde esta investigación se esfuerza por constituir un modelo de enseñanza de las matemáticas que sea pertinente para la cultura mapuche

ANTECEDENTES

El Modelo de promoción de aprendizaje matemático con pertinencia cultural Mapuche, considera para su desarrollo trabajar en tres procesos fundamentales que desde las investigaciones en etnomatemática, contextualizadas en aula y desarrolladas a nivel internacional, evidencian deficiencias o anomalías en sus procesos éticos de construcción, implementación y evaluación. Se resumen en tres diferentes núcleos:

- Se consideran las formas de matematizar, mas no su proceso de enseñanza natural y significativo para la comunidad en cuestión (Kisker, Lipka, Adams, Rickard, Andrew-Ihrke, Yanez y Millard, 2012; Knijnik, 2009; Pinxten y Francois, 2011).
- La construcción de actividades didácticas se centran en las capacidades y objetivos de agentes externos a la comunidad investigada (Greer, 2013; Oliveras y Gavarrete, 2012; Pais, 2011).

[25] Trabajo realizado bajo el amparo del Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación - PUC y el Centro Interdisciplinario de Estudios Interculturales e Indígenas ICIIS Proyecto CONICYT/FONDAP/15110006. Financiado por Beca Doctorado Nacional del Programa de Capital Humano Avanzado CONICYT/21130915

- La valoración de los resultados obtenidos se centran exclusivamente en los criterios pertinentes a la educación matemática académica (Fonseca, 2009; Lipka, Yanez, Andrew-Ihrke y Adam, 2009; Savard y Polotskaia, 2013).

De esta forma, el planteamiento del objetivo fundamental y las etapas de desarrollo metodológico de esta investigación, se encargan de dar cuenta de forma ética y pertinente a la comunidad del pueblo Mapuche, de cada uno de estos aspectos. En este contexto, el ideal de esta investigación posee dos líneas de interés académico, el primero es la constitución de un modelo que promueva el aprendizaje matemático desde el conocimiento cultural y el segundo es contribuir al Programa Etnomatemática con lineamientos éticos y sensibles culturalmente, de incorporación del conocimiento matemático de pueblos originarios al contexto de la Educación Matemática formal.

Así, la presente investigación doctoral define los siguientes Objetivos Generales y Específicos de investigación:

Objetivo general

Generar un modelo de enseñanza de las matemáticas de manera pertinente culturalmente para estudiantes mapuches de primer ciclo de educación general básica.

Objetivos específicos

- Conocer los procesos educativos considerados pertinentes para la comunidad mapuche sobre su forma de matematizar.
- Analizar y caracterizar los procesos que configuran el desarrollo de actividades de aula con pertinencia curricular y cultural en matemática.
- Interpretar los resultados relevantes para la comunidad mapuche en torno a las actividades creadas con pertinencia cultural en matemática.

METODOLOGÍA

El diseño de investigación se desarrolla bajo el contexto de los ciclos de investigación denominado The developmental research cycle (Goodchild, 2008; Jaworski, 2006). Goodchild (2008), señala que estos ciclos de investigación se centran en el desarrollo de investigaciones en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas diseñadas bajo el concepto de comunidades de investigación, donde vinculan la investigación con la docencia. Esta propuesta de investigación denomina comunidad de investigación a la relación existente entre los académicos, didactas y/o investigador que ingresan a un contexto educativo y su relación y prácticas con los docentes y estudiantes del establecimiento. Así, Goodchild (2008) define la interacción entre el investigador y el docente de aula como un proceso recurrente que considera un primer ciclo de investigación y un segundo ciclo de desarrollo como un trabajo cíclico en donde el ciclo de desarrollo nutre a un nuevo ciclo de investigación que valida y determina nuevas aristas a tratar. Una variable que este proyecto incorpora a los ciclos de investigación en contexto de matemática educativa de Goodchild, corresponde a que la comunidad de investigación vincula a conocedores de la cultura mapuche relacionados directa o indirectamente con el estudiante o su establecimiento educativo (abuelos, apoderados, tutores, trabajadores del establecimiento etc.) o relacionado directamente con la comunidad Mapuche al que pertenece al estudiante (sabios conocedores del patrimonio ancestral mapuche).

Comunidades indígenas y establecimientos educativos

Las comunidades indígenas que participan en esta investigación han sido contactadas según los intereses educativos demostrados por sus representantes (Presidentes de comunidades o Directores de Establecimientos), en el marco de charlas y seminarios centrados en Educación Intercultural realizados en la zona sur del país. De este modo, y siguiendo las normas del Convenio OIT 169, se

ha establecido de mutuo acurdo la participación de las comunidades indígenas y sus respectivos establecimientos educacionales del mimo modo que se representa en la Tabla 1. Cada representante de la comunidad propone el Establecimiento que se encuentra dentro de su sector territorial o en las cercanías de este

. Tabla 1. Comunidades Indígenas y Establecimientos Educativos

Comuna	Sector	Comunidad Mapuche	Escuelas
Lautaro	El Manzano	Eugenio Sánchez	Particular Huinca Railao
Lautaro	Vega Larga	Peuman Mapu	Municipal de Vega Larga
Temuco	Labranza	Lladquihue	Particular San José y Particular Nº74

Los Presidentes de cada comunidad son los gestores fundamentales que posibilitan que cada una de las acciones dentro del diseño metodológico en torno a la comunidad indígena y la comunidad escolar se desarrolle apropiadamente.

Los establecimientos son en su totalidad de enseñanza básica, con una matrícula de estudiantes mapuche mayor al 85%. De los cuatro establecimientos, dos son multigrados y dos multinivel (dos cursos por sala de 1ro a 6to básico), por esto, el foco educativo de esta investigación se centra en estudiantes de 1ro a 6to año básico.

Etapas del diseño metodológico

A raíz de los núcleos de acción que el The developmental research cycle propone, esta investigación describe tres etapas fundamentales para su desarrollo.

- Etapa 1, busca acercarse al proceso de matematización del pueblo mapuche a partir del significado que poseen comunidades mapuche. Esta etapa considera un trabajo etnográfico, en donde a través de entrevistas se puedan relevar las formas de matematizar y la manera de transmitir el conocimiento dentro del pueblo.
- Etapa 2. De forma colaborativa con los docentes de la comunidad, se planifica e implementa en aula actividades didácticas confeccionadas a raíz del conocimiento matemático rescatado en la primera etapa de esta investigación.
- Etapa 3. Esta última etapa tiene por objetivo evaluar cómo los productos de la Etapa 2 y los resultados de su implementación en aula, son un aporte para construir el Modelo que genera aprendizaje matemático desde el conocimiento del pueblo Mapuche.

RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Siguiendo el procedimiento descrito por Goodchild (2008), se utilizarán diversas técnicas cualitativas de recolección de información: en la primera etapa, se realizarán sesiones informativas con cada comunidad en donde se expongan los objetivos de la investigación y el diseño de actividades para evidenciar la importancia de su rol en la investigación, posteriormente se da comienzo al trabajo etnográfico en donde a través de sesiones de conversación pauteadas semi-estructuralmente se busca analizar con la comunidad sus procesos de enseñanza y matematización; además se realizarán entrevistas en profundidad, que permitirán ahondar en aspectos particulares de este proceso. En la segunda etapa, se utilizará sesiones informativas, en donde se dará a conocer el objetivo del trabajo en el contexto educativo, seguido de sesiones de trabajo con los equipos educativos de cada establecimiento, para diseñar y planificar actividades didácticas; posteriormente, se realizarán observaciones a las aulas en donde se apliquen las unidades didácticas construidas y

comprender las potencialidades y complejidades del diseño creado. La tercera etapa considera sesiones de conversación pauteadas semi-estructuralmente con el objeto de analizar y reflexionar sobre los proceso prácticos desarrollados en la etapa 2, para la comunidad educativa y la indígena (las cuales no necesariamente están separadas); finalmente esta etapa procede a recrear sesiones de conversación, análisis y aplicación del material confeccionado en unidades educativas externas, con el fin de evaluar los productos didácticos confeccionados, sus resultados en aula y el Modelo que sistematiza el trabajo teórico y experimental desarrollado.

La recolección de la información en cada una de las actividades antes descritas será en primera instancia, grabadas y/o video-grabadas, al mismo tiempo que el investigador responsable toma notas de campo para reforzar algunas ideas esenciales, escribir en mapudungun el nombre de ciertos elementos y realizar esquemas gráficos para representar esquemas, formas y posiciones de elementos significativos.

El análisis de los datos será realizado mediante la Grounded Theory (Strauss y Corbin, 2008) y el software Atlas.ti que considera tres momentos de codificación: abierta, donde mediante un procedimiento inductivo se fragmenta los datos obtenidos con las distintas técnicas empleadas, generando una etiqueta de sentido semántico a partir de la argumentación desarrollada; axial, consistente en un procedimiento que permite unir los datos que fueron fragmentados en la codificación abierta desde el análisis intracaso al análisis intercasos, construyendo un discurso general, estableciendo conexiones entre categorías y subcategorías; y selectiva, que permite identificar y desarrollar los aspectos centrales y atingentes a los objetivos de la investigación.

APORTES DE INVESTIGACIÓN

La investigación genera al menos tres aportes sustanciales que esta tesis doctoral pretende destacar, el primero se basa en el Modelo Pedagógico de enseñanza de las matemáticas en contexto Mapuche; éste permitirá replicar el modelo de enseñanza en otros contextos educativos, con otros elementos matemáticos y con posibilidad de aplicarse o adaptarse para otros contextos indígenas. El modelo, forma parte del producto que se devuelve a las comunidades participantes de esta investigación, con el objeto de generar nuevos y mejorados productos didácticos en contexto de aula una vez que esta investigación haya concluido.

El segundo potencial, está enfocado en establecer lineamientos de cómo integrar a una comunidad indígena en los procesos de la educación formal desde el reconocimiento de las propias formas de matematizar, sus formas de concebir los procesos de enseñanza y los ideales de lo que esperan aprendan los estudiantes pertenecientes a una comunidad mapuche en torno al material concreto que se creará y probará dentro de las comunidades indígenas y escolares participantes. Esto posibilita acceder a material didáctico validado por la comunidad mapuche y replicable en contextos similares.

Finalmente, el tercer aporte se constituye en función del Programa Etnomatemática y su desarrollo en términos de conectar las formas de matematizar de grupos socioculturales indígenas y el contexto escolar en Educación Matemática. Se espera constituir elementos metodológicos éticos para pueblos originarios que propicie el buen manejo de los elementos propios de las comunidades en el ámbito de la educación matemática académica.

Referencias

Fonseca, A. (2009). The Construction of the mathematic knowledge of a high school student's class in a sociocultural space: an ethnomathematic posture. Bolema-Mathematics Education Bulletin-Boletim De Educacao Matematica, 22(32), 1.

Goodchild, S. (2008). A quest for 'good' research. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), International Handbook on Mathematics Teacher Education: Vol. 4. The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional: Individuals, teams, communities and networks. (pp. 201-220). Rotterdam: The Netherlands: Sense Publishers.

Greer, B. (2013). TEACHING THROUGH ETHNOMATHEMATICS: POSSIBILITIES AND DILEMMAS. In M. Berger, K. Brodie, V. Frith & K. LeRoux (Eds.), Proceedings of the Seventh International Mathematics Education and Society Conference, Vols 1 and 2 (pp. 282-290). Hoerikwaggo: Mathematics Education & Soc.

Jaworski, B. (2006). Developmental research in mathematics teaching and learning: Developing learning communities based on inquiry and design. In P. Liljedahl (Ed.), Proceedings of the 2006 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group. Calgary, Canada: University of Calgary.

Kisker, E. E., Lipka, J., Adams, B. L., Rickard, A., Andrew-Ihrke, D., Yanez, E. E., & Millard, A. (2012). The Potential of a Culturally Based Supplemental Mathematics Curriculum to Improve the Mathematics Performance of Alaska Native and Other Students. Journal for Research in Mathematics Education, 43(1), 75-113.

Knijnik, G. (2009). MATHEMATICS EDUCATION AND THE BRAZILIAN LANDLESS MOVEMENT Three Different Mathematics in the Context of the Struggle for Social Justice (Vol. 6). Charlotte: Information Age Publishing-Iap.

Lipka, J., Yanez, E., Andrew-Ihrke, D., & Adam, S. (2009). A two-way process for developing effective culturally based math. In B. Greer, S. Mukhopadhyay, A. P. Powell & S. Nelson-Barber (Eds.), Culturally responsive mathematics education. New York: Routledge.

Oliveras, M. L., & Gavarrete, M. E. (2012). A Model for Education of teachers for multicultural contexts of Costa Rica with applying the Ethnomathematics. Revista Latinoamericana De Investigacion En Matematica Educativa-Relime, 15(3), 339-372.

Pais, A. (2011). Criticisms and contradictions of ethnomathematics. Educational Studies in Mathematics, 76(2), 209-230. doi: 10.1007/s10649-010-9289-7

Pinxten, R., & Francois, K. (2011). Politics in an Indian canyon? Some thoughts on the implications of ethnomathematics. Educational Studies in Mathematics, 78(2), 261-273. doi: 10.1007/s10649-011-9328-z

Savard, A., & Polotskaia, E. (2013). WORD PROBLEM SOLVING TASK MANAGEMENT AND STUDENTS' ACCESS TO MATHEMATICS: CASES IN ELEMENTARY EDUCATION. Tasks and Tools in Elementary Mathematics, 290-298.

Strauss, A., & Corbin, J. (2008). Pesquisa qualitativa. Técnicas e procedimientos para o desenvolvimento de teoría fundamentada. (2a ed.). Sao Paulo: Armed Editora S.A.

ERRORES DE ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO MEDIO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN ECUACIONES DE PRIMER GRADO

González, V. [a], Rey, S. [a], Olivares, P. [ab], Parra, Y. [ab]
[a]Universidad San Sebastián;
vgonzalezgaretto@gmail.com[a], priscilla.olivares@uss.cl[b]

Resumen.

Este documento abordalas principales dificultades de los alumnos de Primer Año de Enseñanza Media cuando se ven enfrentados a la necesidad de resolver ecuaciones de primer grado. Para este propósito se aplicó un cuestionario que requería una definición del concepto de ecuación, y que pretendía que los alumnos descubrieran errores simples o encontraran un dato faltante, el que debía ser incluido y modelado mediante una ecuación. Las respuestas obtenidas en dicho cuestionario fueron analizadas detenidamente y se pudo observar algunos errores relacionados con la rigurosidad de la argumentación y la base matemática de las respuestas.

Palabras clave: *ecuación, errores frecuentes, análisis de error.*

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de primer grado son un concepto matemático fundamental en los procesos de enseñanza-aprendizaje ya que permiten desarrollar la capacidad creativa del intelecto, potenciando la habilidad de resolver problemas cotidianos con mayor rapidez, siendo esto desconocido para la gran mayoría de las personas (Egoavil, 2014, p.150). De las misma forma, Egoavil (2014) enfatiza que muchos de los estudiantes que tienen problemas de aprendizaje -en especial en las matemáticas- se vuelven hábiles una vez que aprenden las simples y básicas ecuaciones de primer grado, puesto que éstas contribuyen al desarrollo de razonamiento lógico o causal, siendo esto sumamente importante para el desarrollo del ser humano. Por lo tanto lograr un aprendizaje significativo de las ecuaciones de primer grado, permite que los estudiantes sean capaces de identificar la utilidad que tiene este objeto matemático. En este documento se describe la realización de una indagación en proceso, que examina las dificultades sobre el concepto de ecuación de primer grado presentes en estudiantes de primer año medio de un Colegio Científico-Humanista de la ciudad de Santiago, Región Metropolitana, Chile. Para ello, se aplicó a tres estudiantes, un cuestionario que tiene como objetivo evidenciar, identificar y analizar los errores asociados a las ecuaciones de primer grado.

ANTECEDENTES

En el estudio de la matemática, se manifiestan dificultades que están asociadas a la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado. Es importante identificar los errores más comunes y reflexionar sobre ellos, para así conseguir que los estudiantes logren una apropiación significativa del objeto matemático.

Según Rico (1995), la mayoría de los especialistas e investigadores coinciden en que los errores

surgen frecuentemente de manera sorpresiva, pues no se ha efectuado con antelación un análisis respecto de las dificultades y de los eventuales errores que pudiesen cometer los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas.

Los errores más recurrentes en las ecuaciones son los descritos porAbrate, R., Pochulu M. y Vargas, J. (2006),quienes mencionan el uso de reglas por parte de los estudiantes, a partir de alguna regla conocida: "Si está multiplicando, pasa dividiendo". El problema se suscita cuando se realiza un proceso algorítmico desprovisto de significado con un lenguaje poco riguroso e incorrecto y que sin embargo conduce a una repuesta correcta. Este tipo de situaciones generan la falta de comprensión y apropiación del objeto matemático. Es aquí donde los estudiantes transponen indiscriminadamente los términos bajo estas reglas, sin notar qué es lo que debe realizar primero en una operación.En este caso el estudiante sólo realiza un proceso mecánico, sin hacer un análisis de los procesos previos que lo llevan a utilizar esta operación matemática. Como consecuencia se evidencia que el estudiante muestra una falencia de comprensión de conceptos matemáticos en la ecuación de primer grado.

Por otro lado Hurtado (2013), plantea que existen múltiples dificultades en la comprensión de las ecuaciones por parte de los estudiantes, en su estudio explicita que la dificultad principal radica en la falta de compresión para abordar métodos y símbolos que dan cuenta de procesos de generalización y, con ello, mayores niveles de abstracción. En este mismo sentido, Booth (1984) señala que uno de los errores frecuentesen la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado, es la mala interpretación del concepto de variable, esto quiere decir, que los estudiantes no interpretan la variable como un número, sino que siempre lo ven como un objeto y cuando logran interpretar la variable como un número, el estudiante comete un nuevo error que es darle a esta variable un valor fijo.

Otra de las dificultades matemáticas que poseen los estudiantes cuando trabajan con ecuaciones de primer gradoes la comprensión y posterior traducción y/o conversión de un problema expresado en lenguaje natural a su representación en lenguaje algebraico, según lo señalado por Booth (1984), los estudiantes no logran visualizar una relación entre estos lenguajes y por lo tanto no logran unir ambas representaciones.

Finalmente se puede señalar que el error está presente en todo proceso de aprendizaje de la matemática. La importancia del error, según Oteiza (2006), hace referencia a que el aprendizaje puede verse fuertemente beneficiado. "Los errores permiten aprender… (El error) sugiere soluciones, permite aprender a no tropezar dos veces con la misma piedra. El error es una joya que hay que aprender a usar".

METODOLOGÍA

Se trata de un estudio exploratorio que indaga la actividad matemática de estudiantes de primer año medio cuando se enfrentan a la resolución de problemas relacionados con ecuaciones de primer grado. En un primer momento se confeccionaron tres preguntas que involucran en su diseño, la articulación de procedimientos de tipo algebraico, deargumentación teórica y de la aplicación de dicho objeto matemático.Las tres preguntas aplicadas son las siguientes: 1.- ¿Qué entiendes por

ecuación?, 2.- Se proponen tres ecuaciones con su resolución. El propósito es que los estudiantes identifiquen el error, posteriormente el profesor solicita la argumentación teórica de aquello que ha sido identificado. 3.- Se propone un problema con ausencia de información. En este caso el estudiante no sabe que el problema no tiene solución única.

En un segundo momento se levantaron conjeturas respecto del tipo de respuestas que podrían emerger, y en un tercer momentose realiza un contrastede las producciones estudiantiles que se obtuvieron en la fase de aplicación del instrumento matemático con las conjeturas previamente establecidas.

Levantamiento de conjeturas.

En la primera pregunta se espera que los estudiantes proporcionen definiciones incompletas, pero que exista un grado de conocimiento correcto. Se esperan respuestas como "*Son ejercicios donde hay que encontrar el valor de X*" o "*Son problemas matemáticos donde se debe encontrar un valor desconocido*".

Para el caso de la segunda pregunta se estima que los estudiantes no tendrán mayores dificultades para descubrir los errores en las ecuaciones planteadas, pero sí se cree que habrá problemas en la argumentación de las mismas, probablemente estas carecerán de rigurosidad matemática conceptual.

En el tercer problema se conjetura que la mayoría de los estudiantes intentarán solucionar el problema sin advertir que falta un dato. Se estima que por la dificultad del problema los estudiantes no podrán responder a cabalidad la pregunta, no obstante es posible que alguno advierta que puede haber dos o más soluciones, para este caso el profesor revelará el dato faltante.

RESULTADOS

A continuación se presentan las respuestas obtenidas con posterioridad a la aplicación de los reactivos. Estas respuestas no necesariamente se condicen con las conjeturas anteriormente planteadas.

Para el caso de la pregunta 1 podemos notar que todos los estudiantes reconocen alguna característica propia de la ecuación, sin embargo solo el estudiante 3 se acerca a una definición más rigurosa.

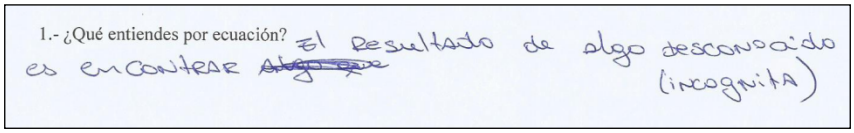


Figura 1. Respuesta estudiante 1

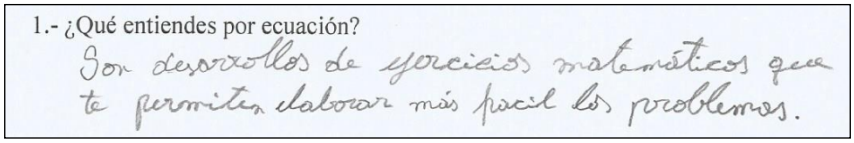


Figura 2. Respuesta estudiante 2

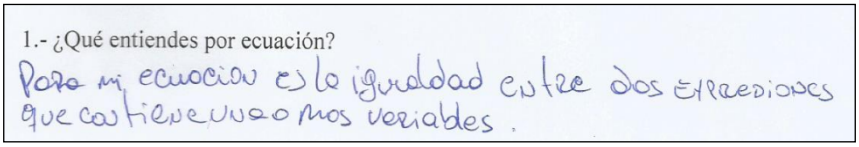


Figura 3. Respuesta estudiante 3

En el caso de la segunda pregunta se evidencia que no todos los estudiantes logran identificar los errores en la resolución de las ecuaciones planteadas, además en su argumentación para justificar el error existente se apoyan de los procesos algoritmos que permiten la resolución y utilizan un lenguaje poco adecuado y/o riguroso y en algunos casos incorrectos.

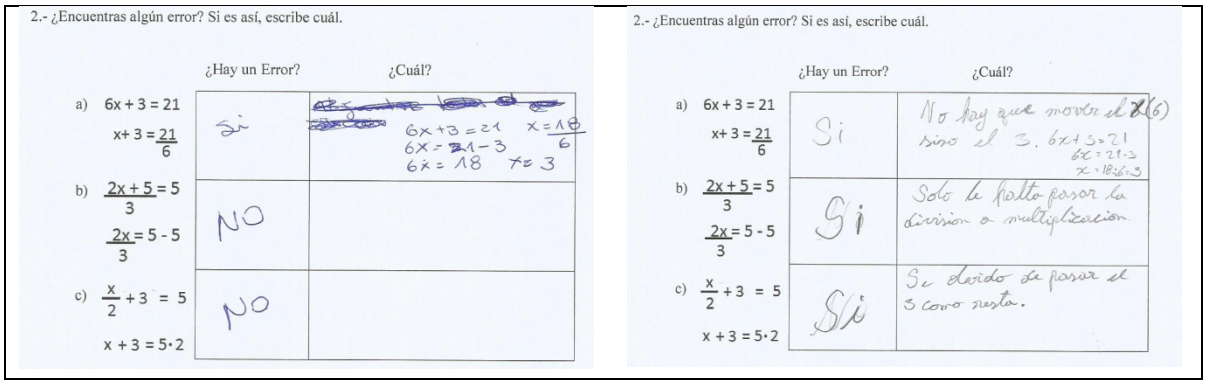


Figura 4. Respuesta estudiantes 1 y 2 respectivamente

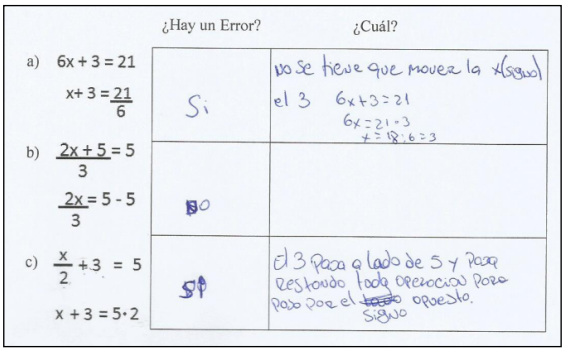


Figura 5. Respuesta estudiante 3

Para la tercera pregunta solo un estudiante presenta una respuesta que se evidencia a continuación:

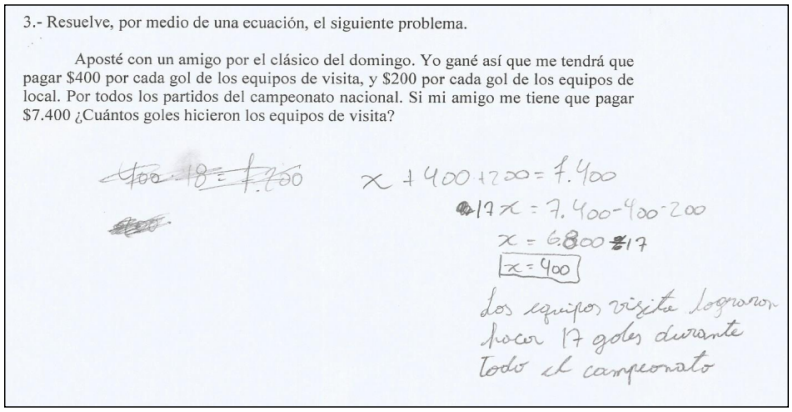


Figura 6. Respuesta estudiante 3

CONCLUSIONES

Se evidencia que en las respuestas obtenidas en la pregunta 1, el primer estudiante presenta una noción de incógnita al comentar que una ecuación significa "algo desconocido", mientras que en el segundo estudiante predomina la utilidad de la ecuación para resolver problemas y finalmente el tercer estudiante presenta una definición más desarrollada del concepto de ecuación al plantear que la ecuación se asocia a la noción de igualdad, la respuesta dada por el estudiante nofue considerada en las conjeturas planteadas, ya que se estimaba respuestas asociadas a representaciones del objeto matemático ecuación y que en gran medida estuviesen relacionadas a aspectos algebraicos. En la segunda pregunta se requiere de la identificación de errores que en todos los casos no son reconocidos por los estudiantes. En el caso del primer estudiante quien visualiza el error existente en la resolución de la ecuación a), no percibe que en la ecuación c) existe un error con similares características. Posterior a la argumentación que da el estudiante 1 respecto del error identificado, se estima que el estudiante carece de herramientas teóricas que le permitan argumentar y señalar el porqué del error aun cuando este ha sido identificado. Por otro lado, en el caso del estudiante 2 al señalar en el ejercicio b) "Sólo le faltó pasar a división a multiplicación" se evidencia que él no ha identificado el error existente, más bien hace alusión a un procedimiento ausente para completar la resolución del ejercicio planteado. Se puede evidenciar que el estudiante intenta realizar y replicar

un procedimiento asociado a ecuaciones lineales en una ecuación de tipo fraccionaria. En la tercera pregunta, solo un estudiante logra responder el problema, si bien no obtiene el resultado correcto o no percibe datos faltantes, intenta modelar la situación usando las relaciones de adicción con las incógnitas y números planteados por el problema. Se observa además que el estudiante encuentra el valor de una incógnita. Se estima que el estudiante intenta responder la situación problemática planteada a través de la noción y/o comprensión que éste tiene respecto del objeto matemático, ecuación. Sin embargo, no realiza una reflexión profunda que le permita señalar la ausencia de datos. Artigue (1995), señala que las dificultades cognitivas presentes en los estudiantes son producto de los hábitos de enseñanza tradicional, pues el gran predominio que en ella se otorga al registro algebraico (simbólico-formal), impiden al estudiante lograr flexibilidad en el pasaje de un registro a otro. En este sentido los docentes deben ser capaces de proponer otras metodologías de enseñanza, que permitan transitar por los diferentes registros de representación definidos por Duval (1995). Esto con la finalidad de propiciar la aprehensión de la noción de ecuación de primer grado.

Referencias

Abrate, R., Pochulu, M. & Vargas, J. (2006). Errores y Dificultades en Matemática, Análisis de causas y Sugerencias de Trabajo. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In M.Artigue, R. Douady& P. Gómez (Eds), Ingeniería didáctica en educación matemática. (p. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Booth, L. (1984). Álgebra: Children 's Strategies and Errors. A Report of Strategies and Errors in Secondary Mathematics Projects. New Windsor, Berkshire, England: NFER-Nelson Publishing Co.

Duval, R. (1993). Registres de representationssémiotiques et fonctionnementcognitive de la pensée. Annales de Didactique et de ScienceCognitives, 5, 37-65

Egoavil, J. (2014). Fundamentos de la Matemática, Introducción al Nivel Universitario. Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas S.A.C. Lima, Perú

Hurtado C. (2013). Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita y su impacto en la educación básica. Visto el 14- 09- 2015 en:

http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/227.pdf

Oteiza, F. (2006). Ellos no saben, yo debo saber,… ¿qué es lo que no saben?, ¿qué es lo que yo debo saber? Recuperado de:

http://ticeiii.bligoo.cl/media/users/8/407280/files/33463/Ellos_no_saben.doc

Rico, L. (1995). Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas. Recuperado de:

http://cumbia.ath.cx:591/pna/archivos/ricol95-100.pdf

ENSEÑANZA DE TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS EN 8º BÁSICO DESDE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

Hitschfeld, R

Universidad Alberto Hurtado;
correo electrónico: rhitschf@alumnos.uahurtado.cl

Resumen

A partir de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau se propone un grupo de actividades para caracterizar la traslación, rotación y reflexión de figuras planas y reconocer sus propiedades. Las actividades consisten en que, trabajando en un grupo de dos estudiantes, uno de ellos debe dar instrucciones orales para que el otro compañero o compañera replique una figura a la cual se le ha aplicado una transformación isométrica, recurriendo a los elementos que definen cada transformación. También se presentan las principales conclusiones de la aplicación de las actividades en un 8° básico de un liceo de Santiago, con el fin de realizar sugerencias y aumentar el impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: *Transformaciones isométricas, Teoría de las Situaciones Didácticas, Enseñanza de la geometría*

INTRODUCCIÓN

Como muestran Aravena y Caamaño (2013) la enseñanza de la geometría sigue siendo un gran desafío en Chile, especialmente en los establecimientos escolares que atienden estudiantes de alta vulnerabilidad social. Si bien hay muchas causas que originan esta situación, un elemento relevante es la interacción didáctica de baja exigencia cognitiva a la que están expuestos los alumnos, donde el profesor es el protagonista del proceso (Villalta, Martinic y Guzmán, 2011).

Basándose en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (Brosseau, 2007), en este artículo se propone y evalúa una unidad didáctica correspondiente a dos aprendizajes esperados del curriculum chileno de 8° básico en el área de geometría. De esta manera, se pretende aportar a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de esta área en los sectores de mayor vulnerabilidad social, buscando nuevas maneras para que los estudiantes desarrollen habilidades matemáticas.

El centro educacional donde se desarrolló la unidad didáctica corresponde a un colegio particular subvencionado de 7° a IV° medio ubicado en la comuna de Quinta Normal. El colegio cuenta actualmente con alrededor de 450 alumnos que tienen un Índice de Vulnerabilidad Escolar promedio de 70,8% (Junaeb, 2015).

ACTIVIDADES DE CLASE

Descripción de las actividades

El objetivo de las actividades es que los estudiantes puedan caracterizar la traslación, rotación y reflexión de figuras planas y reconocer algunas de sus propiedades. El medio utilizado en las situaciones a-didácticas son guías en papel que se trabajan en parejas. El tiempo programado para las actividades es de 6 horas pedagógicas. Cada estudiante de la pareja, recibe una guía diferente, por lo que ellos deben establecer la persona que será denominada Actor 1 y la que será denominada Actor 2. En total los estudiantes realizarán 3 actividades, una de traslaciones, una de rotaciones y otra de reflexiones. Cada una de ellas está compuesta de 4 tareas cada una, en las que los estudiantes van alternando roles según las dos acciones posibles que permiten las guías: Dar

instrucciones al compañero o compañera para realizar un dibujo o seguir las instrucciones del compañero o compañera para realizar un dibujo.
De esta manera, al finalizar cada actividad los estudiantes habrán dado instrucciones dos veces y habrán seguido instrucciones dos veces también. La idea es que durante toda la actividad los estudiantes se dispongan de manera que no puedan ver la guía del otro. En la Figura 1 se pude ver un diagrama simplificado de la actividad en la que participan los dos estudiantes.

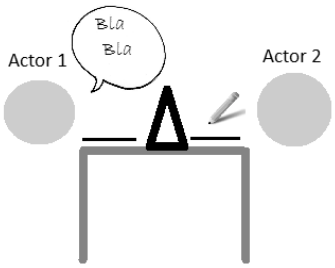


Figura 1. Diagrama simplificado de la actividad

Siguiendo los cuatro procesos que plantea la Teoría la las Situaciones Didácticas, se espera que la actividad se desarrolle de la siguiente manera:

Situación de acción

El estudiante que da las instrucciones, que corresponde en este caso al Actor 1, cuenta con una imagen en la que se muestran dos figuras: Una figura inicial llamada figura A y una figura B, la cual es el resultado de la aplicación una transformación isométrica a la figura A

El estudiante que recibe las instrucciones, que corresponde en este caso al Actor 2, también tiene una imagen en su guía, en la cual sólo se muestra la figura inicial (figura A). El problema de las actividades consiste que siguiendo solamente las instrucciones orales del Actor 1, el Actor 2 debe dibujar la figura B. El Actor 1 debe ir anotando las instrucciones que dé en la guía de la actividad, para poder analizarlas después. Un ejemplo de las figuras que tienen los estudiantes en sus guías se puede observar en las Figura 2 y la Figura 3.

Las respuestas del medio o retroacciones en cada caso corresponden a la verificación de la exactitud del dibujo realizado por Actor 2. Una vez que el éste considera haber realizado correctamente el dibujo solicitado, debe mostrarlo a la persona que estaba dando las instrucciones, quien indica si el dibujo está correcto o no. En caso de estarlo se verifica la efectividad de las instrucciones dadas.

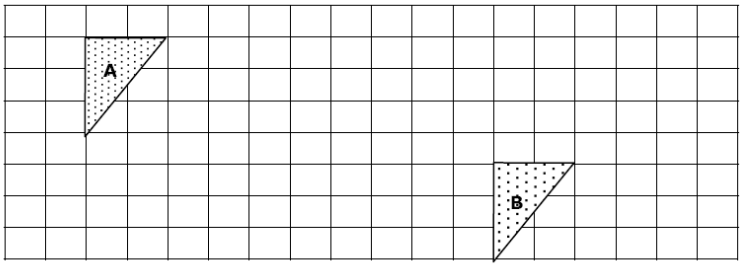


Figura 3. Imagen del Actor 1 en la tarea 1 de traslaciones

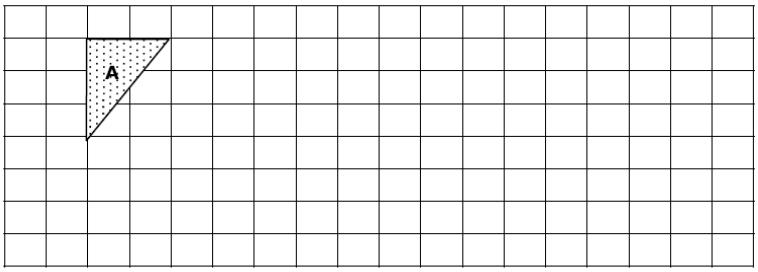


Figura 3. Imagen del Actor 2 en la tarea 1 de traslaciones

En caso de no estar correcto el dibujo, el estudiante debe buscar nuevas maneras de dar las instrucciones más efectivas para que su compañero pueda corregir el dibujo realizado. De esta manera, se espera que los estudiantes, al ir dando y recibiendo instrucciones, deban ir tomando decisiones sobre las instrucciones que sean más sencillas y efectivas para lograr que el otro estudiante realice el dibujo de manera correcta. Se espera que al ir avanzando en las tareas, los estudiantes vayan dando instrucciones que hagan referencia a las características principales de cada transformación, ya que necesariamente van a tener que recurrir a los desplazamientos, ángulos, puntos de rotación y ejes de simetría hacer que su compañero dibuje de manera correcta la figura a la que se le ha aplicado una transformación isométrica, ya que es la manera más eficaz y sencilla.

Situación de formulación

Después que cada estudiante de la pareja haya dado instrucciones dos veces y ha dibujado la figura transformada dos veces, deben contestar en conjunto las tres preguntas que se presentan al final de cada actividad, de tal modo que puedan hacerse explícitos algunos de los elementos utilizados en el desarrollo de la actividad y a partir de los cuales podrán surgir las características y propiedades de la transformación estudiada:

1. ¿En qué se parecen las figuras A a las figuras B de cada tarea? ¿En qué son distintas? Con esta pregunta se busca que los estudiantes puedan identificar que no ha habido un cambio de forma o tamaño, si no que sólo se ha cambiado la posición u orientación de la figura.

2. ¿Cuáles son las instrucciones más directas y sencillas para que un compañero o compañera pueda generar las figuras B a partir de las figuras A? Con esta pregunta se busca que los estudiantes tomen conciencia del conocimiento que han generado y puedan compartirlo en la puesta en común. Se espera que las instrucciones que dieron consideren elementos que estén relacionados con las características de la transformación.

3. ¿Qué nombre le pondrían a la acción que convierte las figuras A en las figuras B? Con esta pregunta se busca que los estudiantes se den cuenta que hay una operación matemática que puede convertir una figura en otra, acercándolos al concepto de transformación que se verá en la institucionalización.

Situación de validación

Una vez que los estudiantes hayan respondido en conjunto las preguntas, se realiza una puesta en común donde los estudiantes deben explicar a los demás la forma más efectiva y sencilla que encontraron para dar las instrucciones al compañero para que pueda realizar el dibujo de manera correcta, siendo capaces de defender su postura frente a los demás.

Situación de institucionalización

Luego del plenario, el profesor deberá realizar la institucionalización de los saberes, entregando a los estudiantes las definiciones culturalmente aceptadas de casa una de las transformaciones isométricas y realizando algunos ejemplos para que los estudiantes puedan comenzar a realizar ejercicios que les permitirán la consolidación de los aprendizajes. Esta institucionalización debe

relevar los elementos que los estudiantes plantearon en las situaciones de formulación y validación para que sientan de las definiciones formales están vinculadas al conocimiento que ellos desarrollaron en las distintas tareas que realizaron.

CONCLUSIONES

Una vez analizada la aplicación de las actividades que se desarrollaron durante dos semanas de clases, y alineado con otras investigaciones similares (Acosta, 2010; Bautista y Peralta, 2011; Monroy y Rueda, 2009; Corzo y Delgado, 2014; Carreño y Díaz 2014; Acosta, Monroy y Rueda, 2010), se puede identificar que los estudiantes efectivamente pudieron adquirir conocimientos mediante el aprendizaje por adaptación que generaron las actividades, aunque no exento de complejidades.

Los estudiantes mostraron alta motivación por las actividades y trabajaron de muy buena manera en todas las clases que hicieron parte de esta implementación, lo que es una buena señal en momentos que lograr motivación académica por parte de los jóvenes no es sencillo. Sin embargo estas actividades deben seguir siendo mejoradas para ser más efectivas. Aproximadamente un 80% de los estudiantes desarrollaron los conocimientos que se esperaban en la actividad de traslaciones, un 60% lo hizo en la actividad de rotaciones y un 30% consiguió lo esperado en la actividad de reflexiones. Hubo conceptos que fueron bien desarrollados como la idea de que en las operaciones geométricas mostradas en las actividades, las figuras no cambian su tamaño o forma, la noción de vector de traslación, y la identificación del punto de rotación. Los conceptos menos desarrollados fueron el ángulo de giro y el eje de simetría.

Un factor que pudo afectar en el punto anterior es que muchas veces las actividades fueron demasiadas pretenciosas y planteaban que los estudiantes identificaran muchos conceptos en una misma tarea. Otro factor fue que en las rotaciones y sobre todo en las reflexiones era necesario realizar una mayor cantidad de tareas para que las instrucciones que daban los estudiantes fueran convergiendo a instrucciones más sencillas y eficientes que hicieran referencia a las transformaciones, por lo que esto es algo que también debiera modificarse en futuras implementaciones.

Otra mejora posible es que la retroacción en la situación de acción debe ser mucho más explícita, ya que algunos estudiantes, por seguir avanzando en la guía, no revisaban bien que el dibujo del compañero quedara bien. Tal vez que el compañero entregue un dulce o algún otro elemento cuando el dibujo queda perfecto, puede ayudar a esta situación.

Otro tema importante a trabajar es la institucionalización, ya que a los estudiantes les costó encontrar el nexo de manera clara, entre lo que ellos habían descubierto y las definiciones culturalmente aceptadas. En lo ocurrido se pueden identificar dos causas. La primera tiene que ver con que si en las situaciones que anteceden a la de institucionalización no se consigue desarrollar los conocimientos esperados, la institucionalización pierde sentido. Esto ocurrió en la actividad de rotaciones y sobre todo en la de reflexiones, donde un número pequeño de estudiantes desarrolló los conocimientos esperados. Una segunda causa tiene que ver con un mal diseño de la institucionalización ya que en primera instancia fue concebida simplemente con entregar las definiciones formales a los estudiantes, lo que fue percibido por los estudiantes como una ruptura del contrato didáctico donde eran ellos los que generaban el conocimiento.

Un punto importante para la futura aplicación de las actividades, es que el tiempo de dos semanas que se utilizó en esta implementación es muy breve para desarrollar aprendizajes de las tres transformaciones que aquí se han trabajado. De igual manera la estimación de los tiempos de las actividades, debe ser mucho más fina, ya que en esta aplicación hubo veces que la institucionalización quedó un poco trunca o no se les dejó todo el tiempo necesario a los estudiantes para que desarrollaran el trabajo.

Finalmente vale decir que el desarrollo y aplicación de las actividades ha sido muy beneficiosa para el aprendizaje personal como profesor, principalmente en la comprensión de la teoría de las

situaciones didácticas de Brousseau y del diseño de actividades que permitan aprendizaje por adaptación en los estudiantes. El trabajo directo en una implementación de la teoría, ha implicado una gran reflexión sobre las propias prácticas, lo que es profundamente valioso personalmente, en aras de poder modificarlas permanentemente y no sólo durante el periodo en que se llevó a cabo esta unidad didáctica. Modificar y mejorar prácticas solamente desde la teoría parece una tarea infructuosa, sin embargo la planificación e implementación de la unidad, junto con la reflexión guiada por el mentor de este trabajo hace mucho más factible la mejora de mis prácticas como docente.

Por otro lado, el hecho de implementar una unidad didáctica desde una teoría específica, también facilita el trabajo para mejorar prácticas, ya que hace poner atención en temas específicos que desde la pura práctica pueden quedar desatendidos. El trabajar con una teoría particular también facilita la comparación de este trabajo con trabajos que se han basado en la misma teoría, y de esta manera también se pueden profundizar las reflexiones sobre mis prácticas docentes.

Si bien no todo lo que se programó resultó exitosamente, es posible esperar que una vez incorporadas las recomendaciones que aquí se hacen, es perfectamente factible que otros profesores las incorporen en sus clases y las puedan aplicar en contextos de alta vulnerabilidad social, y así, este trabajo aporte a que los docentes se atrevan a implementar metodologías donde los estudiantes de toda condición social sean protagonistas de su aprendizaje y no meros receptores pasivos de conceptos que no les son relevantes.

Referencias

Acosta, M. E. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. 132-142.

Acosta, M. E., Monroy, L. A., y Rueda, K. L. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. Revista Integración. Vol. 28, N° 2, 173-189.

Aravena, M., y Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule. Talca, Chile. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 16(2). 139-178.

Bautista, L. y Peralta, M. (2011). Conceptualización de la homotecia en estudiantes de sexto grado mediante el uso de Cabri LM. Tesis de Grado. Universidad Industrial de Santander.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal

Carreño, C., y Díaz, A. (2014). Evaluación de una implementación de situaciones a- didácticas para la enseñanza de simetría axial utilizando Cabri como medio. Trabajo de Grado. Universidad Industrial de Santander.

Corzo, O., y Delgado, P. (2014). Traslación + teoría de las situaciones didácticas + Cabri Geometry = Una nueva herramienta para la clase de geometría. Trabajo de Grado. Universidad Industrial de Santander.

Junaeb (2015). Planillas de prioridades con IVE, básica media y comunal. Obtenido de www. junaeb.cl

Monroy, L., y Rueda, K. (2009). Conceptualización de la simetría axial y la traslación con la mediación del programa Cabri Geometry ll. Universidad industrial de Santander (UIS). Facultad de ciencias. Bucaramanga.

Villalta M; Martinic S., y Guzmán M. (2011). Elementos de la interacción didáctica en la sala de clase que contribuyen al aprendizaje en contexto social vulnerable. Revista Mexicana de Investigación Educativa 16(51), 1137-1158.

MODELAMIENTO GEOMÉTRICO DESDE LA COSMOVISIÓN DEL PUEBLO MAPUCHE PRESENTE EN TELARES

Autor/a: Muñoz-Pineda, M.
Candidata a Magíster en Didáctica de las matemáticas,
Universidad Católica del Maule, Talca. Beca CONICYT.
eli.2007.temuco@gmail.com, eli.temuco.2007@gmail.com

Resumen

Se presenta el marco teórico de investigación de tipo no experimental de enfoque cualitativo y diseño etnográfico,que se realiza en una escuela rural cercana a la ciudad de Temuco. Se observarán modelaciones geométricas, analizando la visualización espacial: cuantitativo, figurativo y cualitativo de figuras geométricas presente en la elaboración de telares en la asignatura del Sector Lengua Indígena de cuarto a sexto básico, donde los niños confeccionan un trarilonko (cintillo que utiliza el hombre mapuche, representa el pensamiento y la conexión religiosa entre el hombre y las divinidades celestiales), y las niñas un trariwe (faja de cintura usada por la mujer Mapuche, en el uso se conjugan elementos prácticos, rituales, sociales y territoriales propios del mundo femenino mapuche). Se abordará desde la etnomatemática rescatando saberes ancestrales del pueblo mapuche.

Palabras clave: *etnomatemática, modelamiento geométrico, geometría, mapuches*

En la investigación se presenta el marco teórico el cual es abordado desde la etnomatemática, modelamiento geométrico, geometría y cultura mapuche. Se realizan observaciones en la elaboración de telares en la asignatura del Sector Lengua Indígena, donde realiza un análisis de visualización espacial enfocado en lo cuantitativo, estructural y cualitativo de los dibujos geométricos del telar.Donde los niños elaboran un trarilonko(cintillo que utiliza el hombre mapuche, representa el pensamiento y la conexión religiosa entre el hombre y las divinidades celestiales, esta se lleva en la cabeza y es la más cercana comunicación con los antepasados y los espíritus), y las niñas un trariwe(es una faja de cintura usada por la mujer Mapuche, esta prenda de lana tejida a telar, contiene alta densidad simbólica, es decir, en su elaboración y uso se conjugan elementos prácticos, rituales, sociales y territoriales propios del mundo femenino mapuche).

ETNOMATEMÁTICA

Cada vez hay mayor interés respecto a esta disciplina que está dentro de la matemática educativa y que entrega diversos aportes tanto en aspectos culturales, sociales, antropológicos, entre otros. Aprovechar los saberes ancestrales de pueblos originarios y grupos humanos contextualizando y matematizando diversos procesos cotidianos propios de la actividad cotidiana como vestimentas, instrumentos musicales, agricultura, artesanías, cosmovisión entre otros, otorgan la importancia necesaria para desarrollar investigaciones en este ámbito.

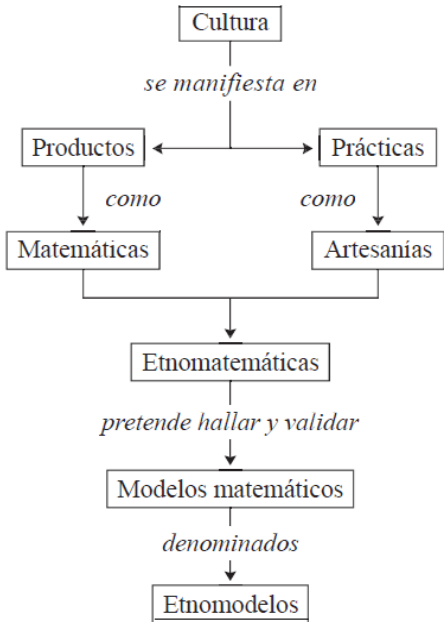
Según Blanco, H (2006), este nuevo enfoque de la Educación Matemática desde una perspectiva social y cultural se legitima en la producción amplia que la comunidad de educadores matemáticos le consagra al tema a escala mundial. Por ende, los problemas de la Etnomatemática son problemas de la Educación Matemática. A esto se le suma el gran número de trabajos de investigación de Maestría y tesis Doctorales desarrollados en el mundo, una gran variedad de libros y revistas orientados a la Etnomatemática. Una evidencia más de la importancia de este enfoque de investigación es la creación del Grupo de Estudio Internacional en Etnomatemática ISGEM.

El término etnomatemática fue acuñado por Ubiratan D'Ambrosio, el cual lo usa por primera vez según registro documentado en el Quinto Congreso Internacional de Educación Matemática

(ICME 5), celebrado en Australia y más concretamente en la sesión plenaria titulada Socio-Cultural Bases for Mathematical Education (1985). Aquí se pone de manifiesto la necesidad de producir trabajos de investigación que sirvan como fundamento para atender la educación matemática desde una perspectiva sociocultural Gavarrete (2012). El término etno lo utiliza para describir las prácticas matemáticas de grupos culturales sean este cualquier grupo humano: comunidades, profesionales, religiosos, obreros, comerciantes por nombrar algunos. A veces el término etnomatemática se usa específicamente para las sociedades indígenas en pequeña escala. Las prácticas matemáticas incluyen sistemas simbólicos, los diseños espaciales, técnicas de construcción práctica, métodos del cálculo, mediciones en tiempo y espacio, formas específicas de razonamiento e inferencia, y otras actividades cognoscitivas y materiales que pueden traducirse a representaciones de la matemática formal (Grupo de Estudio Internacional de Etnomatemática, 1985).

Así Biembengut et al (2002) indica que todas las culturas sociales poseen un legado de conocimiento, conductas y reglas que buscan transmitir las generaciones tornando de esa posible el eslabón y la continuidad de las culturas. Ese conocimiento en gran parte es generado por las necesidades prácticas de la realidad, es así que las matemáticas tanto la escritura son generados por esta necesidad, por lo que, en la mayoría de los objetos elaborados por el hombre, diferentes técnicas, diferentes tecnologías utilizadas para solucionar u[illegible] matemáticas. Sean en forma directa o implícita o en mayor

Es así como se han realizado variadas investigaciones, como artesanías de trenzado en Argentina (Olivera, M. et al, 2012), artesanías de los sogueros argentinos, los que trabajan el cuero crudo y fabrican originariamente aperos de montar para los caballos y otras herramientas típicas de la dotación tradicional del gaucho argentino dondese estudió la realización de pasadores y sortijas, también llamados corredores, con trozos cortados de lonjas de cuero crudo de potro o chivo. El objetivo fue caracterizar cómo el artesano piensa matemáticamente su propia práctica y entender las formas de pensar matemáticas que la comunidad artesanal desarrolla y comparte para la organización y modelización de su práctica Albanese et al (2014).



Esquema de los elementos teóricos de la investigación Albanesse et al (2014)

20 y
st
[illegible] finalmente evaluarlos. El objetivo de esta habilidad es versión simplificada y abstracta de un sistema, usualmente más complejo, pero que capture los patrones claves y lo exprese mediante lenguaje matemático" Es una de las cuatro habilidades en la que se busca desarrollar el pensamiento matemático (resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar).

Aravena 2002, coloca en evidencia que "en una sociedad en la que los ciudadanos van a ser enfrentados a resolver problemas, hacer estimaciones, tomar decisiones, el modelaje favorece la comprensión de los conceptos y métodos matemáticos y permite una visión global de la matemática" , pero ésta no se enseñan de contextualizada ni se vincula con otras asignaturas, así las investigaciones reportan que una de las principales dificultades en la enseñanza de la matemática se debe, en general, a la no existencia de la integración entre la matemática y las otras áreas del conocimiento, impidiendo a los estudiantes que puedan desarrollar los algoritmos algebraicos

requeridos en función del objetivo final perseguido (Hitt 1998; Caamaño 2001, citado por Aravena y Caamaño 2007).

De acuerdo a Barbosa (2001), citado por Reid et al (2010), la modelización matemática puede ser entendida como un ambiente de aprendizaje en el cual los alumnos son convidados a indagar y/o investigar, por medio de la matemática, situaciones con referencia a la "realidad". Permite a los estudiantes explorar una situación problemática, poner las hipótesis y encontrar las herramientas apropiadas o teoremas que necesitan usar para resolver situaciones basadas en el mundo real. Por otro lado, la modelización posee un espacio de reflexión que muestra los procesos de transmisión y construcción del conocimiento matemático (Rico, 1997) citado por Reid et al (2010).

La modelización permite al estudiante la interacción con situaciones reales, con el entorno físico y social, percibiendo la utilidad práctica del contenido matemático, favoreciendo la comprensión de que puede modificar e interactuar con el entorno que lo rodea.

Uno de los primeros estudios realizados sobre el análisis del tejido mapuche se encuentra en la biblioteca de la Universidad Católica de Temuco en la Región de la Araucanía, donde sólo hay evidencias físicas que datan del año 1979, en el cual se puede percibir la noción de modelamiento matemático. Donde se realizó un análisis comparativo de todas las prendas, registrando disposición de los hilos, ligamentos, análisis de densidad. Creando instrumentos tales como fichas, un contador manual de hilos entre otros. Esto con el fin de resguardar un arte en vías de extinción, su autenticidad expresiva, las tradiciones y conocimientos ancestrales del pueblo mapuche (Castillo, 1979). Analizan diferentes prendas de vestir elaboradas en telar como: cutamas, chañancutos, trarilonko, trariwe. Es así que según Biembengut y Hein (1997, p. 211), citado por Arrieta (2015) "un modelo puede ser formulado en términos familiares, tales como: expresiones numéricas o fórmulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, ecuaciones algebraicas, tablas, programas computacionales, entre otros".

Geometría

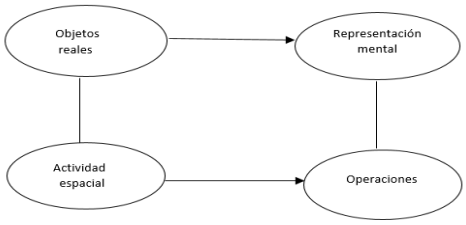
Se realizará un análisis de la visualización del espacio en el witral donde se elaboran los telares. Según Alsina (1997), se pueden enumerar tres tipos de acciones geométricas referentes a la actividad espacial del entorno: el análisis cuantitativo, el análisis figurativo y el análisis estructural.

El análisis cuantitativo referido a las operaciones en las que se realizan medidas numéricas, como son las longitudes, áreas; expresada en relaciones numéricas (razones y proporciones), elección de sistemas de referencia (coordenadas), entre otras.

Así *el análisis figurativo* hace alusión al tipo de forma independiente del tamaño y el material, como es el estudio de las regularidades, de la simetría, de las transformaciones geométricas.

Finalizando con el análisis estructural que se preocupa del análisis estructural del objeto visualizado, analizando sus esquemas de constitución, propiedades cualitativas, como son las relaciones topológicas, proyectivas, afines y euclidianas. Alsina (1997, pág. 29) enmarca a la actividad espacial en dos tipos de procesos: el que corresponde a la traducción en clave geométrica de los fenómenos y el que favorece el desarrollo de la intuición geométrica.

El hecho de observar el entorno favorece el proceso de conceptualización espacial, es decir, tomar conciencia del mismo y de las formas. Observar, interactuar y experimentar con el objeto propician el conocimiento operacional de las nociones espaciales permitiendo estructurar las operaciones mentales que dan lugar a la representación espacial.



Esquema de visualización del espacio, Alsina (1997)

Referencias

[1]*M. Aravena: Las principales dificultades en el trabajo algebraico. Un estudio con alumnos de ingeniería de la U.C.M. UC Maule. Revista Académica Universidad Católica del Maule n° 28: 63-81, 2002.*

[2]*M. Aravena, C. Caamaño: Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca. CHILE, 2007.*

[3]*J. Arrieta, L. Díaz: Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18(1), 19-48. 2015*

[4]*V. Albanese, F. Perales: Pensar matemáticamente: una visión etnomatemática de la práctica artesanal soguesa. Revista Latinoamérica de investigación en matemática educativa, Relime vol. N° 3 México nov. 2014.*

[5] *C. Alsina: Invitación a la didáctica de la geometría. Editorial Sintesis, S.A. Vallehermoso, Madrid, 1997.*

[6]*H. Blanco: La etnomatemática en Colombia. Un programa de construcción (M. Borba, Ed.). Revista BOLEMA: Boletin de Educación Matemática, 19 (26), 49-75, 2006.*

[7] *M. Biembengut, N. Hein: Modelaje y Etnomatemática: puntos (in) comunes. Números, Revista 52, 3 a 14, 2002.*

[8] *C. Castillo: Análisis técnico del tejido mapuche. Tesis (Profesor de Estado en Enseñanza Media, asignatura de Artes Plásticas), Universidad Católica de Temuco, 1979.*

[9] *M. E. Gavarrete: Modelo de aplicación de etnomatemática en la formación de profesores para contextos en Costa Rica. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Tesis Doctoral, beca CONICIT, 2012.*

[10]*Ministerio de Educación: Bases Curriculares 2012.Gobierno de Chil*

[11]*M. L. Oliveras, V.Albanese: Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado: Un Modelo Metodológico para Investigación. BOLEMA, Rio Claro (São Paulo), v. 26, n. 44, p. 1295-1324, dic. 2012.*

[12]*M. Reid, N. Etcheverry, M. Roldán, M. Gareis: Modelización matemática en el aula: relato de una experiencia. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa – Argentina, 2010.*

RAZONES Y SENTIDOS EN LA TOMA DE DECISIONES

De Franceschi, G.[a], Díaz, L.[b], Castro, I.[c]

[a,b]Universidad de Valparaíso, [c]U. Metropolitana de Ciencias de la Educación
giadefranceschi@hotmail.com[a], leonora.diaz@uv.cl[b], ivcastrobsb@gmail.com[c]

Resumen

Se advierte sobre la invisibilidad de la razón en el aula de matemáticas y se muestra su uso en comunidades de práctica.Existen evidencias de que tantoestudiantes como docentes no logran significar a la razón en la actividad matemática. Planes y programas del Ministerio de Educación de nuestro país aluden a la razón matemática en enseñanza básica y también en enseñanza media. La investigación realizada evidencia que la razón matemática es una herramienta que los profesionales utilizan, implícita o explícitamente. Se reportan casos en los que concurren razón y sentidos en calidad de indicadores clave para la toma de decisiones en prácticas profesionales: del chefque degusta el plato, del pintor al observar tonalidades, del músico componiendo una melodía, del perfumista que recurre a su olfato al elaborar fragancias y del mecánico de motos cuando controla con su tacto la presión ejercida desde la cámara de combustión.

Palabras clave: *prácticas profesionales, razón matemática, toma de decisiones*

INTRODUCCIÓN

La razón matemática es una herramienta que viene siendo usada por diversas disciplinas y comunidades de prácticas. Su versatilidad le permite adaptarse a distintos tipos de problemáticas.

En la actualidad se usa dentro y fuera de la escuela, pero su tratamiento a nivel escolar y muchas veces en los estudios de profesorado, es poco significativo. Moya, Palma, Ulloa, Rojas y Díaz (2006) buscaron que los estudiantes emplearan la razón para aludir a las magnitudes de superficie que comparativamente ocupan los colores de la bandera chilena. Las autoras recabaron evidencias de un pensamiento proporcional cualitativo entre los estudiantes a la vez que mostraron la invisibilidad de la razón de la matemática en el aula, tanto para estudiantes como docentes. Díaz, Carrasco y Ávila (2009) en el contexto de la pregunta ¿Qué entiende por razón? la mayoría de los docentes encuestados la asociaron con semantizaciones construidas por la disciplina de lasmatemáticas. Más específicamente los autores reportan textualidades que apuntan a la razón de cantidades sin mencionarmagnitudes; que aluden a partes de la noción; que relevanque es una comparación; que refieren a dos valores que se comparan; que aluden a valores que se relacionan; y las que precisan que lacomparación es por cuociente o una fracción.

No obstante que la razón matemática forma parte de los planes y programas de estudio de nuestro país, se continua evidenciando dificultades al llevar este contenido a las aulas (Díaz y Castro, 2011). Estos autores ponen en evidencia la poca comprensión de la razón matemática que muestran los participantes del sistema escolar. Plantean que ello pudiera deberse a que la `con-funden´ con la fracción a la que suele remitirse a su faceta parte-todo o cuociente de dos números.

En el marco de la preocupación por articular la matemática del aula con la matemática de la vida, el estudio que se reporta indaga en eluso profuso de la razón matemática articulada con los sentidos en prácticas profesionales que se deconstruyen a partir de sus intenciones y se sigue con la identificación de procedimientos y herramientas a que recurren y los argumentos que articulan a estos con sus propósitos. El estudio procura responder a la pregunta ¿Cómo concurren razones y sentidos en la toma de decisiones en prácticas de profesionales?

MARCO TEORICO CONCEPTUAL

Las prácticas evocan el hacer mismo, recurrente y compartido por miembros de una comunidad, con aquellos elementos que los distinguen de miembros de otras comunidades. Dan cuenta de la trama compleja y dinámica, de las concurrencias del ejercicio de la práctica en un lugar, en un tiempo y en una comunidad. Esta actividad obedece a intencionalidades explícitas o no, individuales o de comunidades. Al estar ubicadas en el tiempo y en un escenario se observan, nítidos o no, los procedimientos con los que realiza la práctica; las herramientas con las que opera; los argumentos con los que justifica cada una de sus acciones, los argumentos que esgrime para justificar el proceder; las intencionalidades que lo llevan a hacer lo que hace, entre otras. Quien ejerce la práctica actúa con sus sentimientos, sus emociones, sus sentidos y su racionalidad de forma integral, no están separados, asegura (Galicia, 2014).

Para Ferrari (2001) la matemática tiene estrecha relación con la vida cotidiana. Este hecho es relevante para la perspectiva socioepistemológica, pues esta incluye y estudia los diferentes planos de lo cognitivo desde la perspectiva de la psicología social, trabajando las ideas de Piaget, Vygostky, Bruner, entre otros, en tanto se considera que el conocimiento matemático se construye interactuando con una realidad, que este emerge desde la actividad de los sujetos.

> Las problemáticas a las que da lugar la separación de la escuela de su entorno están aún lejos de ser resueltas. En la escuela se siguen construyendo lugares artificiales donde suceden cosas que en la vida cotidiana no suceden o no tienen razón de ser (Arrieta y Díaz, 2015)

En la siguiente tabla se presentan distinciones de la razón presentes en textos de aritmética elemental de los siglos XVI y XVII y que reporta Castro (2015):

Tabla 10. Distinciones de la razón

Denominación	Característica
Relación	Conexión, correspondencia de algo con otra cosa. Resultado de comparar dos cantidades expresadas en números.
Habitud	Relación o respecto que tiene una cosa con la otra. Hábito, costumbre, es decir, el proceder o conducirse adquirido por repetición de actos iguales o semejantes, u originado por tendencias intuitivas.
Conveniencia	Correlación y conformidad entre dos cosas distintas, resultado de una correspondencia o relación recíproca entre dos o más cosas o series de cosas.
Respecto	En relación con aquello de que se trata.
Comparación	Acción y efecto de comparar, es decir, fijar la atención en dos o más objetos para descubrir sus relaciones o estimar sus diferencias o semejanzas.

Estas denominaciones se hallan presentes en discursos de las personas aún en nuestros días evidenciando desafíos que se deben tener presentes a la hora de dar sentido a esta noción invisible en el aula.

DESARROLLO

Esta es una investigación cualitativa en el marco una investigación-acción que tiene por propósito identificar entendimientos de comunidades de prácticas (Wenger, 2001) respecto a la razón matemática y la proporcionalidad. Se parte de la idea de que este saber no se limita a un conjunto de procedimientos formales, con el propósito de explicar el fenómeno tal y como se presenta. Se busca comprender el fenómeno de tales entendimientos en profundidad, identificando sus diversas manifestaciones, mismas que se van construyendo históricamente y en el seno de esta comunidad.

La investigación recurre a entrevistas en profundidad para levantar elementos que permitan deconstruir prácticas de los profesionales buscando desvelar las intenciones, los procesos que desarrollan, es decir, sus procedimientos, las herramientas que usan y los argumentos que utilizan para justificar sus acciones. Esta técnica de recogida de información tiene el propósito de favorecer la producción de un discurso conversacional y con cierta línea argumentativa, no cerrado por un cuestionario previo, y que posibiliten desvelar textualidades desde sus experiencias personales, biográficas e intransferibles (Alonso, 1994). Para Díaz (2006), esta funcionalidad tiene por propósito hacer visibles prácticas y diálogos significativos. Se recurre a establecer eslabones de prácticas que permitan construir puentes de diálogo entre actividades en ambientes cotidianos y escolares (Arrieta y Díaz, 2015); y con las propias de comunidades de prácticas, para las cuales el sujeto participa activamente (Wenger, 2001).

Esta investigación, en particular, se propone desvelar prácticas profesionales en que se recurre a la razón matemática como una herramienta fundamental para intervenir en fenómenos puestos en escena por partícipes de comunidades de prácticas.

Se obtiene la información usando las técnicas de estudio de documentos y de entrevistas semiestructuradas, a cinco profesionales: chef, maestro pintor, mecánico de motores y perfumista. Los profesionales se eligen según el sentido principal al que recurren en su práctica diaria.

Por ejemplo se estudia el caso de una práctica de un chef que tiene la intención de producir un ganache de chocolate como relleno de distintos productos de pastelería. Como herramientas recurre a la razón de uno es a dos de los ingredientes según una receta que se ha validado en su práctica pastelera y a la vez usando su propia degustación y su visión para estimar la consistencia del ganache. En sus procedimientos el define esta combinación teniendo en cuenta esa consistencia a lograr. Argumenta su proceder con la razón de cantidades de ingredientes y con soporte en sus sentidos de la vista y el gusto señalando que la consistencia buscada se obtiene cuando no quedan rastros de crema, luego del movimiento circular a que ha sometido a los dos ingredientes.

El análisis de las textualidades se levantó desde categorías a las que recurre Galicia (2014) para dar cuenta de prácticas de ingenieros bioquímicos. Se distinguieron herramientas, procedimientos, argumentos y sentidos que despliegan los sujetos del estudio, al referirse a prácticas en las que emergen la razón matemática y uno de los cinco sentidos como herramientas principales. Estas prácticas se presentan en la tabla 2.

Tabla 11. Estudio de casos razones y sentidos

Herramientas: Razones y sentidos en juego	Procedimientos	Argumentos	Intenciones
Chef			

Cantidad de Chocolate / Cantidad de Crema; Gusto y vista.	*Se realiza en medida 1:2 con crema animal y chocolate en barra, en este caso ocuparemos 100 ml de crema y 200 grs de chocolate, se preparará la mise en place y cortamos el chocolate en pequeños trozos, pones a fuego la crema (1) 100 ml en un recipiente hasta que tome calor sin llega a punto de ebullición, retiras del fuego y enseguida agregas el chocolate, este comenzará a fundirse de inmediato y a mezclarse con la crema, con un movimiento circular rápido movemos "la olla" donde tenemos la mezcla hasta lograr una consistencia gruesa*	*Se realiza en medida 1:2… Se mira y se prueba* *Cuando se ha mezclado totalmente y no quedan rastros de la crema, queda una consistencia gruesa*	Hacer un ganache de chocolate como relleno de bombones, relleno de tortas, cubierta de tortas, entre otras.
Perfumista			
Soluto/ solvente Esencia/alcohol; olfato	*En un frasco de vidrio deposito lo que dará la esencia (madera, cáscara de limón, pétalos de una flor, etc) también existen esencias listas llamadas aceites esenciales. Agrego alcohol etílico desodorizado desnaturalizad la proporción depende del aroma y el frasco, luego tapo el frasco y lo dejo reposar cinco días en la oscuridad. Una vez pasado el tiempo se cuela y agrego el aceite de ricino inoloro que fijará el aroma haciendo que dure más tiempo.* *(descripción disponible en www. Youtube.com)*	La sensibilidad del olfato determinará si licúo o no la mezcla esencial con más o menos alcohol y en el caso de hacer una réplica determinará si el aroma es igual o no a la réplica de algún perfume conocido como Chanel 5, Ralf Lauren u otro.	Crear un aroma a partir de una flor, una fruta u otro objeto. Crear o imitar un aroma agradable al olfato y que perdure en el tiempo.
Pintor			
Pintura roja /Pintura blanca; Visión	*Por tanto agrego diluyente (pintura blanca) a la solución (pintura roja)*	Por medio de la vista me fijo en el resultado, por el aspecto que muestra la solución diluida (pintura rosa)	Diluir rápidamente Lograr un color y consistencia adecuada.
Mecánico			
Relación de compresiones; tacto	Revisa el buen funcionamiento de cada pieza que compone la cámara de combustión. Pone un dedo en el agujero de la bujía, da partida al motor con la pata de la moto y espera una presión en su dedo…	A través de la sensibilidad de los dedos siento la presión por el tacto. Es una acción breve, de rutina. No es preciso verificar el valor numérico de la razón de compresión, es suficiente la presión que detecta mi dedo.	Para conseguir una potencia y una carrera efectiva de giro del motor.

Músico			
Color/ritmo; audición	Agregar notas a un determinado ritmo; puedes tener dos notas y puro ritmo y listo; o pocas notas y poco ritmo pero un timbre que se va modificando en el tiempo; o una tremenda melodía cantada solamente.	Escuchando la música por medio del oído, todo suena bien, en justa medida, dependiendo del color y del ritmo entre otros…	Crear música

A MODO DE CONCLUSIONES

Desde la deconstrucción es posible visibilizar como la razón y los sentidos actúan en prácticas profesionales. Se parte del horizonte buscado en cada práctica. Este se expresa en intenciones: hacer un ganache, crear un aroma, lograr un color, conseguir una potencia o crear música. Desde ahí identificamos los procedimientos y el uso de las herramientas de la razón y los sentidos para su realización. Los argumentos de los profesionales articulan el horizonte buscado, sus intenciones, con los procedimientos y herramientas que tienen a la mano. Las cinco prácticas ilustran como con base en la razón se toman decisiones de la adecuación o no de los procedimientos y posibles ajustes o alternativas de acción. Así mismo, es relevante notar la presencia de los sentidos como herramientas concurrentes con cada razón matemática. Una ayuda a la otra en un inter-juego: los sentidos ayudan a percibir y la razón matemática a calibrar lo percibido por ese sentido, distinguiéndose y articulándose a la vez.

Estas evidencias muestran la potencialidad de estas prácticas para el aula en orden a desarrollar el pensamiento proporcional, desde la razón matemática.

Referencias

Alonso B., L. E. (1994) Sujeto y discurso: el lugar de la entrevista abierta en las prácticas de la sociología cualitativa. Delgado, J. M. y Gutiérrez, J. (Coord.) Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales. Ed. Síntesis, España.

Arrieta, J y Díaz, L. (2015) Una Perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [online], Vol. 18, no 1, p. 7-27.

Castro A., I. (2015) La razón matemática y configuración de lo proporcional desde prácticas socioescolares de estudiantes de profesorado. Tesis Doctoral. Universidad Metropolitana de Ciencia de la Educación.

Díaz M., L. (2008) Coherencias cognitivas, matemáticas y culturales en la matemática de la variación. ICME XI, Monterrey, 6 a 13 de julio, Monterrey, México. Recuperado de http://tsg.icme11.org/document/get/660.

Díaz M., L., Castro, I. (2011) Articulando prácticas para las fracciones con redes conceptuales. XIII CIAEM, 26-jun. 2011, Recife, Brasil. Recuperado de www.lematec.no-ip.org/CDS/XIIICIAEM/artigos/1301.pdf.

Díaz M., L., Carrasco, E. y Ávila, J. (2009) Representaciones docentes de la matemática del cambio. PROYECTO FIBAS 35/06 – Dirección de Investigación de UMCE, Chile.

Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN, México.

Galicia S., A. (2014) Desplazamiento de prácticas de dilución y su relación con comunidades de ingenieros bioquímicos. Tesis Doctoral, UA Guerrero, México.

Moya, R., Palma, E., Ulloa, S., Rojas, J., Díaz, L. (2006). Razonaron y fraccionaron para construir la bandera. En Actas de las XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Viña del Mar. Chile.

Restrepo, E. (2013) Cómo fabricar perfumes (bien explicado). Consultado en https://www.youtube.com/watch?v=shxzy8P-lRU

ELEMENTOS PRECURSORES DE LO LINEAL EN LA MODELACION TABULAR

Arcos, P. [a], Moya, J. [b] Pérez, J. [c] y Díaz, L. [d]

[a,b,c,d]Universidad de Valparaíso;
pablo.arcoss@alumnos.uv.cl [a], jose.moyac@alumnos.uv.cl [b], sukuchero@gmail.com [c],
leonora.diaz@uv.cl [d]

Resumen

Se reporta un estudio que inicia con la pregunta ¿Qué elementos precursores de lo lineal despliegan estudiantes que modelan tabularmente? Se aplica una secuencia experimental de modelación de lo lineal que presenta un experimento narrado y recurre a la modelación tabular. Los estudiantes pusieron en escena implícitamente la condición de inicio de la numerización del experimento, la razón matemática junto con las técnicas de puntos medios, puntos cuartos y una regla de tres aditiva análoga a una regla de tres.

Palabras clave: *Modelación, Parámetros, Lo lineal*

ANTECEDENTES

El estudio se inscribe en la línea de investigación de Arrieta y Díaz (2015) y prosigue el estudio de Hernández y Hernández (2015) quienes reportan itinerarios de predicción en estudiantes que modelan tabularmente. Se recurre a un diseño de enseñanza validado internamente que inicia con un experimento narrado a diferencia de un listado de ejercicios breves de respuestas inmediatas. Este diseño rompe con un esquema de actividad matemática simple y directa, planteando otro que pide análisis, contextualización, argumentos, entre otras habilidades cognitivas de orden superior y las especificas requeridas por la comunicación y la modelación en el aula de matemáticas. Curricularmente, se considera a la modelación como una de las cuatro habilidades a desarrollar en los estudiantes, expresado a partir del año 2012 como: "Modelar es el proceso de utilizar y aplicar modelos, seleccionarlos, modificarlos y construir modelos matemáticos, identificando patrones característicos de situaciones, objetos o fenómenos que se desea estudiar o resolver, para finalmente evaluarlos" (MINEDUC, 2013). Biembengut y Hein (1997) hacen notar el rol crucial de la modelación en la construcción de conocimientos. En efecto señalan que: "Actualmente, este proceso se utiliza en toda ciencia, de modo que contribuye en forma especial en la evolución del conocimiento humano".

MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

Entre los precursores de la modelación, que inicia en la década de los ochenta en la enseñanza brasileña, se encuentran Hein y Bassanezi (Biembengut, 2015). Bassanezi inicia definiendo a la modelación como el arte de transformar problemas de la realidad en problemas matemáticos que se resuelven y luego interpretar sus soluciones en el lenguaje del mundo real (Bassanezi, 1999). Por su parte Barbosa (2001) entiende a la modelación como un ambiente de aprendizaje en el cual los estudiantes indagan y/o investigan, recurriendo a la matemática, sobre situaciones que surgen en otras áreas de la realidad. Blomhoj (2004; citado en Aracena, Hernández y Miranda, 2015) en el contexto europeo señala que la modelación constituye una práctica de enseñanza que sitúa a los procesos de enseñanza y de aprendizaje entre el mundo real y la matemática, según un ciclo de modelación cuyas etapas consideran el uso de métodos matemáticos, la interpretación de resultados

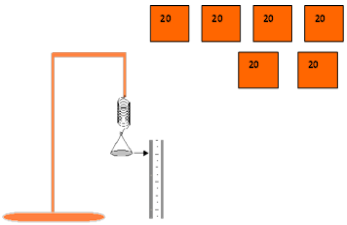
y la evaluación de la valides del modelo. Más adelante Blomhoj (2009; citado en Aracena, Hernández y Miranda, 2015) categoriza quince artículos recibidos en XI-ICME por el grupo de estudio de Modelación y Matemáticas aplicadas, recurriendo a la matriz de Kaiser y Sriraman (2006) quienes tipifican seis perspectivas de modelación en desarrollo. Estas son: a) realista; b) contextual; c) educacional; d) epistemológica; e) cognitiva y f) socio critica. Por su parte Biembengut (2011) categoriza más de 80 estudios acerca de la modelación en enseñanza secundaria en su país, Brasil y reporta que ellos responden a tres grandes perspectivas. Estas son: a) como método de enseñanza y de investigación; b) como enseñanza alternativa de las matemáticas y c) como ambiente de aprendizaje. En una perspectiva que suscribe marcos de la socioepistemología, Cordero (2006; citado en Arrieta y Díaz, 2015) plantea que la modelación provoca una resignificación de conocimientos, que teje redes de prácticas en situaciones específicas, a través del uso de conocimientos matemáticos en términos de funcionamiento y formas, categoría de conocimiento que permite un enlace entre una epistemología de prácticas y los acontecimientos en el aula; matemática funcional y justificación funcional, que implican un conocimiento incorporado orgánicamente a los sujetos, en que se construyen argumentos en el estudio de situaciones específicas. Más recientemente y también suscribiendo categorías de la socioepistemología, los autores Arrieta y Díaz (2015) entienden a la modelación como una interacción entre dos entes, modelo y lo modelado, donde el primero actúa sobre el segundo. La articulación de estas entidades da lugar a un nuevo ente, al modelo, **mo**, que resulta adherido a lo modelado, **ma**. Tal articulación constituye una nueva entidad para la vivencia de quien modela. Los autores la denotan (**ma**, **mo**) y la nominan ***dipolo modélico*** (**DM**). El estudio que se presenta suscribe esta perspectiva para la modelación de lo lineal. En particular concibe a la variación lineal como una relación estable entre los cambios de las variables. Por ejemplo un resorte muestra una elasticidad estable cuando presenta una relación constante entre cambios de peso y cambios de elongación. Y, entiende a lo lineal como la red de modelos tabular, gráfico y analítico algebraico articulados con el fenómeno y entre sí.

Aspectos metodológicos

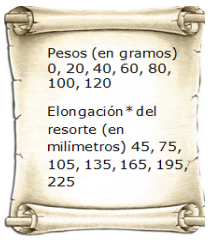
Este estudio cualitativo en el marco de una investigación de diseño y experimentación (Molina, 2006) se propone identificar elementos precursores de lo lineal. En un marco mayor de investigación, orientado a validar diseños didácticos significativos para el estudiantado, con base en modelación. La exploración se realizó con estudiantes que cursan segundo año medio de un establecimiento particular subvencionado de la quinta región. Desde de la interacción con el fenómeno los estudiantes identifican la variable, organizando los datos obtenidos en una tabla numérica. Establecen características distintivas de la tabla, y a partir de esta, efectúan predicciones. Interesa privilegiar formas de predicción que coordinen lo numérico con el fenómeno. Los trabajos de Newton, Wallis y Galileo, entre otros, muestran una práctica que sería central en la secuencia. A partir de la toma de datos, constituir modelos numéricos que, junto con dar cuenta de patrones de comportamiento, predicen sobre el fenómeno. Se establece, de este modo, una coordinación entre el fenómeno y los parámetros del modelo. El montaje de la secuencia se realizó en una sale de clases, en la cual participó un profesor con cuatro equipos de estudiantes. Ellos participan de la secuencia como actividad extra, en horario habitual de clases. Los estudiantes se organizan en equipos acorde a sus afinidades. El diseño didáctico trata que el profesor y los estudiantes, a través de la interacción con un fenómeno, construyan herramientas, argumentos y significados matemáticos que propicien elementos precursores de lo lineal.

Los desarrollos y sus análisis

El experimento narrado



Tenemos un soporte universal y un resorte colgando de él, en su extremo le colocamos un portapesas que tiene una flechita (indicador) que apunta a una regla y contamos con seis pesas de 20 gramos. Entonces vamos colocando pesas en el portapesas y tomamos las ubicaciones de la flechita, obteniendo los siguientes datos.



Reactivo 1: Describan el experimento con sus propias palabras.

G1 responde a la pregunta de para qué es el experimento: ver cuánto se extiende el resorte con un cierto peso; G2 parece describir el efecto de sucesivos pesos respecto de sucesivas bajas del resorte; G3 inicia elaborando una tabla con los valores que exhibe la narración. Los estudiantes en lugar de referirse al portapesas hablan de balanza mostrando un deslizamiento desde la acción de pesar a la de medir alargamientos; G4 identifica el experimento si bien no lo describe. Los cuatro grupos se introducen en el experimento, capturando lo central del mismo, con distinta profundidad y detalle. Uno lo identifica de modo general, otro precisa "cuánto se extiende un resorte con un peso", sigue el que lo refiere en plural "sucesivos pesos respecto de sucesivas bajas" y culmina un grupo advirtiendo las regularidades de los cambios y prediciendo con base en ellas.

Reactivo 2 Si colocamos 60 gramos, ¿Qué elongación alcanza el resorte? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras el procedimiento que ocuparon para determinarlo.

G1 responde a la pregunta de cuanta elongación alcanza el resorte sin entregar mayores detalles; G2 responde que solo se fijaron en la balanza siendo que es la narración la que entrega los datos, a su vez los estudiantes entienden que la balanza hace lo mismo que el portapesas; G3 responde a la pregunta sin considerar la elongación inicial que posee el resorte cuando se encuentra sin peso. Se evidencia seguridad al responder debido a que argumentan su resultado; G4 responde a la pregunta pareciendo advertir una correlación de los datos entregados en el pergamino, lo cual no queda claro, ya que G4 no da mayores argumentos al respecto. Los cuatro grupos se adentran en la secuencia con distintas perspectivas, pero sin perder el sentido de la pregunta, lo cual tres de los grupos dan la elongación considerando su término libre. Uno de ellos da la elongación sin describir el proceso, el otro se fija en los datos que entrega el pergamino y el último observa la balanza. Para finalizar uno de los grupos no considera su término libre, solo responde por la elongación alcanzada por el resorte y además encuentra una correlación de los datos.

Reactivo 3 Si colocamos 50 gramos ¿Qué elongación alcanzará el resorte? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación a los 50 gramos. Ingrésenlo en la tabla 1.

G1 responde a la pregunta utiliza la técnica de los puntos medios, para encontrar la respuesta de que entre los números 105 y 135 es la mitad, y por ende es 115; G2 Utiliza la técnica de los puntos medios logrando ver que la elongación alcanzada por el resorte es de 120 milímetros. Al argumentar confunden la medida con el peso. Podemos conjeturar que G2 puede estar inmerso en la abstracción, ya que en el experimento no fueron entregados pesos de 10 gramos; G3 pareciera responder de forma inversa, esto se ve reflejado en que 50 gramos alcanza el resorte y además nos entregan la elongación sin considerar su término libre; G4 responde la pregunta de la elongación alcanzada sin describir sus procedimientos. Con esto podemos conjeturar que ellos utilizaron la técnica de los puntos medios y además consideran su término libre, dado que lo ingresan en la tabla 1. En los cuatro grupos pareciera que están en el plano abstracto, ya que no se cuenta con pesos de diez gramos, para ello uno de los grupos no considera el término libre y solo nos muestra que 50 gramos alcanza el resorte en 75 milímetros. Dos de los grupos responden a la elongación alcanzada, pero solo uno nos muestra la descripción de como obtuvieron ese resultado. El último grupo

pareciera estar en lo numérico dado que, da una descripción de cómo encuentra el 115 y que este debería estar entre 105 y 135, perdiendo el termino de magnitud.

Reactivo 4: Si colocamos 21 gramos ¿Qué elongación alcanzará el resorte? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación a los 21 gramos. Ingrésenlo en la tabla 1.

G1 encuentra una relación que se da entre 19 y 30 en la cual el los divide y obtiene el 1,57; Los estudiantes del grupo 2 pareciera que no pudieron seguir utilizando el mismo método, esto pudiera deberse a que el grupo pensaba que todo se realizaba de la misma forma; G3 pareciera estar inmerso en un pensamiento egocéntrico, ya que responde desde lo numérico, sin dar mayor detalle al respecto. Con esto podemos conjeturar: a) que para ellos el termino inicial es 60 porque en la expresión b) Ellos establecen la siguiente relación 15=10, 15=10 y 1=0,1 entonces el termino inicial más los 30,01 es 90,01; G4 responde a la elongación alcanzada por el resorte en 21 gramos, si bien no da mayores detalles. Con esto podemos conjeturar que los estudiantes encuentran la relación entre 1 gramo y 1.5 milímetros y lo adhieren a los 75 milímetros obteniendo así la elongación del resorte. Uno de los grupos parece no lograr entender el procedimiento, el siguiente responde a la elongación alcanzada por el resorte, pero sin dar detalles de cómo obtuvo su respuesta. Otro de los grupos pareciera concluir que la razón es 1,57. Este grupo lo describe entregando su procedimiento, pero sin precisar magnitudes. El último grupo solo nos entrega su procedimiento numérico de cómo logra su respuesta.

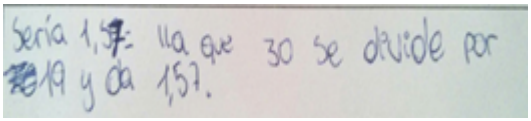


Figura 1. Grupo 1



Figura 2. Grupo 2

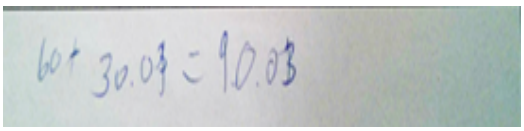


Figura 3. Grupo 3

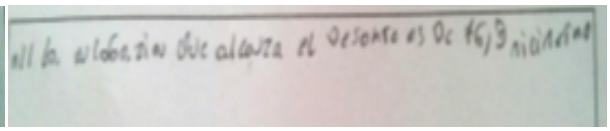


Figura 4. Grupo 4

CONCLUSIONES

En el análisis de los desarrollos estudiantiles, se constataron aspectos precursores de lo lineal entendidos como elementos que forman parte de la red de modelos tabular, gráfico y analítico algebraico articulados con el fenómeno y entre sí. Más específicamente la razón matemática y el punto de inicio, constituyentes de la red de parámetros del dipolo modélico tabular.

Los estudiantes en su práctica orientada a constituir modelos numéricos, exploran patrones de comportamiento para predecir sobre el fenómeno, recurriendo a un tipo de regla de tres aditiva, a puntos medios y a puntos cuartos.

En otro orden uno de los grupos recurre al signo igual de forma relacional, es decir como el indicador de una relación de equivalencia, y no sólo de forma operacional, como el itinerario del resultado de una operación o como una señal de hacer algo. Destaca una alta sensibilidad a lo numérico en esta práctica estudiantil y en particular la asociación de los datos presentados en un folio a una tabla con precisión.

Referencias

Aracena, C., Hernández, J. y Miranda, B. (2015). Enseñanza y evaluación que propicia modelar figurando. Tesis de pregrado no publicada. Universidad de Valparaíso.

Arrieta, J (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis doctoral. CINVESTAV-IPN, México.

Arrieta, J., Díaz, L. (2015) Una Perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [online], Vol. 18, no 1, p. 7-27.

Bassanezi, R. (1999) Modelagem Matemática: Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. IX Congreso Internacional de Biomatemática. Concepción – Chile.

Biembengut, M. (2011). Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira. XIII CIAEM. En http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2875/1149

Biembengut, M. y Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 38, 209-222.

Biembengut, M. (2015) Modelaje Matemático en la Educación Brasileña. En Arrieta y Díaz (eds.): Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa. En prensa. Gedisa. México.

Hernández, J y Hernández, J. (2015). Itinerarios de predicción en estudiantes que modelan tabularmente. Tesis de pregrado no publicada Universidad de Valparaíso.

Kaiser, G., Sriraman, B (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. The International Journal on Mathematics Education, v. 38, n. 3, p. 302 – 310.

Ministerio de Educación de Chile (2013) Bases curriculares. Chile.

Molina, M. (2006). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/544/.

GRAFICAR PARÁBOLAS

Barreiro, F.[a], Sancho, R.[b], Díaz, L.[c];
Universidad de Valparaíso;
florencia.barreiro@alumnos.uv.cl[a], rodrigo.sancho@alumnos.uv.cl[b], leonora.diaz@uv.cl[c]

Resumen

Se exponen los resultados de una experiencia que inicia con la pregunta orientadora ¿Quéproblemas se presentan al figurar una expresión analítico algebraica de segundo grado? Se operacionaliza ésta en reactivos que se aplican a dos estudiantes de enseñanza media. Se recurre a las categorías de herramientas, procedimientos y argumentos propias a enfoques de aprendizaje matemático desde la actividad, para analizar los desarrollos estudiantiles. Los análisis muestran que en un caso se figura una parábola despejando una variable y luego se obtiene valores que puntea en el plano cartesiano. En el otro caso se recurre a herramientas, procedimientos y argumentos de orden algebraico, inconducentes.

Palabras clave: *Graficar, parábola, aprendizajes*

INTRODUCCION

Este trabajo forma parte de una línea de investigación en curso que aborda las cuestiones que emergen desde los problemas que manifiestan estudiantes al gráficar expresiones cuadráticas. Esta gráfica es de particular interés para iniciar en lo no lineal a los estudiantes y por su presencia en modelaciones de distintas disciplinas. En documentos curriculares (Mineduc, 2009) y en la actividad usual de las salas de clases se expresa la relación entre dos variables recurriendo a tablas de valores, expresiones algebraicas y gráficos en sistemas de coordenadas. En palabras de Duval (1999) la relación se comunica en esos tres registros. Y las aulas enseñan cómo construir tales representaciones y los métodos para manipularlas, en la intención de expresar relaciones entre dos variables como funciones. Se han venido desarrollando estudios didácticos que proveen de elementos para robustecer su enseñanza y aprendizaje y más específicamente el desplazamiento entre ellos. Este estudio explora prácticas de figuración de parábolas desde expresiones algebraicas.

Marco conceptual

Pretender que un estudiante comprenda y resuelva un problema matemático o de otra área, requiere desplegar procedimientos, recurrir a herramientas, argumentando sus modos y medios de solución. Estudios reportan sobre problemáticas originadas por la ecuación, que Lehman (1989) llama parabólica, y, su figuración.Los estudiantes enfrentados a figurar la ecuación parabólica, transitarían desde comprenderla, enseguida reflexionar para posteriormente figurarla. Estas fases se corresponderían con las etapas, jerárquicas, para abordar una problemática, que son: comprensión de la problemática, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva (Polya, 1965). Brousseau (1986) puntualiza que un medio, sin intenciones didácticas es insuficiente para que el estudiante construya los conocimientos culturales que cada país decide en su escolaridad obligatoria. Cabe preguntarse por las intenciones didácticas que subyacen a una actividad como figurar la parábola. Por su parte Duval (1999) postula que para propiciar la construcción de los conceptos no resulta suficiente el trabajo en un solo sistema de representación, sino que es necesario inducir a los estudiantes a realizar las actividades de conversión de una representación a otra, en ambos sentidos. Más recientemente los autores Carrasco, Díaz y Buendía (2014) reportan una complejidad de elementos concurriendo con cada figura gráfica estudiantil. En su estudio los autores deconstruyen figuraciones estudiantiles que los estudiantes desarrollan para dar cuenta de modo gráfico a una caída libre. Si bien se esperaban gráficas cartesianas de coordenadas tiempo y

altura, los jóvenes produjeron cómics. Más adelante también docentes elaboran cómics para dar cuenta de relaciones entre dos variables. Los autores levantan la noción de espacio epistémico de figuración para comprender producciones que estaban lejos de ser las esperadas por los investigadores, entre ellas las parábolas. Esto muestra que los estudiantes enfrentan desafíos para los que el aula no les prepara.

Metodología

En un marco cualitativo, este estudio exploratorio considera un diseño de investigación acción guiado por una pregunta orientadora, con el propósito de determinar problemas que presentan estudiantes al graficar parábolas y obtener información que guie la toma de decisiones de docentes de matemáticas en el aula. Con base en la pregunta orientadora ¿Quéproblemas se presentan al figurar una expresión analítica algebraica de segundo grado? se diseñaron dos reactivos, a modo de instrumentos, para recoger la información. Esta información se constituyó por las respuestas escritas de los estudiantes a los reactivos y las notas de campo registradas por los investigadores, concurrentes a su aplicación. Los reactivos fueron:

Reactivo 1: Grafique la ecuación$6y^2 - 12x = 0$

Reactivo 2: Grafique la ecuación$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$

La selección de los casos, estudiantes del segundo ciclo de enseñanza media, respondió al consentimiento de participar por parte de sujetos de este nivel de la escolaridad obligatoria. Interesó analizar sus producciones en profundidad, a diferencia de un enfoque cuantitativo que procura concluir la extensión de validez de un conjunto de afirmaciones. El análisis de las producciones se levantó desde categorías a las que recurren Carrasco, Díaz y Buendía (2014) para dar cuenta de prácticas de figuración de los sujetos. Se distinguieron herramientas, procedimientos y argumentos que despliegan en sus desarrollos, configurando problemáticas que emergen cuando abordan la actividad de figurar parábolas desde expresiones analítico algebraicas. En la aplicación se solicitó a los estudiantes que graficaran las ecuaciones de cada reactivo, anotadas en la pizarra. La primera reacción de ambos fue que no recordaban esa materia, añadiendo que no sabían qué hacer. Entonces se les informó que se trataba de parábolas y se les solicitó que las graficaran. Los gráficos que debían confeccionar corresponden a parábolas abiertas hacia la derecha (sentido positivo), con su eje en el eje de las abscisas. La primera de ellas en su forma canónica y con el vértice en el origen del plano cartesiano (Lehmann, 1989). Y la segunda parábola con el vértice desplazado del origen a la derecha y hacia arriba.

Descripción e interpretación de los desarrollos estudiantiles

El primer estudiante en el ejercicio 1, despejó la incógnita x en la ecuación cuadrática dada. Hizo una tabla de valores para conseguir distintos pares ordenados que luego ubicó punteando en un plano cartesiano. Unió los puntos de forma consecutiva consiguiendo una curva de perfil parabólico. El estudiante sigue una pulcra trayectoria: se desplaza desde el registro algebraico al tabular y luego al gráfico. En particular logra el gráfico del primer reactivo, grafica con recurso de la tabla de valores que construye desde su despeje de la ecuación, conoce el perfil de la curva parabólica. Pero resultan insuficientes estos conocimientos para lograr la gráfica de la segunda ecuación. En efecto, ante la segunda ecuación señala que no se le ocurre como trabajar con ella. Implementar la estrategia desplegada con el reactivo anterior, tendría como condición necesaria iniciar con el despeje de una de las variables para este estudiante. Pareciera que de una sola mirada evalúa que debe tratar con una ecuación de la que desconoce su tratamiento, desechando su abordaje. De modo análogo a la conducción de un vehículo, el estudiante pierde la conexión con el motor de partida. No imagina modos de obtener pares de valores y tampoco gráficas, siguiendo otras trayectorias. El segundo estudiante en cambio comenzó a trabajar con las ecuaciones cuadráticas, despejando una de las variables de la ecuación en el primer ejercicio y llegando a la

ecuación de la parábola en el ejercicio 2. Y mencionó que no recordaba del todo la materia. Luego de revisar el desarrollo en ambos ejercicios queda en evidencia que tenía gran manejo algebraico, pero al no recordar como representar la parábola a partir de la ecuación de ésta no pudo graficar y no encontró otro método para poder hacerlo. No obstante contar con una expresión algebraica desde la que podría desplazarse a una tabla, el procesos más simple de realizar (Duval, 1999) para entonces puntear un bosquejo de gráfica, no contempla esta opción.

Los análisis de los desarrollos estudiantiles muestran, en un caso, como herramientas a la tabla de valores y al plano cartesiano, uso de la ecuación para generar una tabla de valores y luego puntearlos en el plano cartesiano para unirlos de modo de obtener un esbozo de parábola. Basa su acción en que por tratarse de una expresión cuadrática algebraica le corresponderá una figura de tipo parábola. En el segundo caso se observa el uso de la herramienta algebraica con procedimientos que le proveen de una expresión cuadrática algebraica despejando la variable y al cuadrado. No obstante esta expresión parece esconder la parábola al estudiante y le aplica raíz. La expresión a la que arriba tampoco parece sugerirle figura alguna. Los casos se desplazaron solo desde la ecuación a la gráfica y no a la inversa, reflejando la dirección privilegiada por textos, programas y las prácticas del aula. Ambas prácticas de figuración se describen en términos de herramientas, procedimientos y argumentos (ver tablas interpretativas).

Tabla interpretativa, estudiante 1, ejercicio 1

Herramientas	Tabla de valores, plano cartesiano.
Procedimientos	Despeja la variable$x$. Obtiene coordenadas a partir de la tabla de valores. Ubica los pares ordenados en el plano. Une los puntos formando una curva.
Argumentos	La función cuadrática como relación especial de pares ordenados que obedecen a la regla de asignación.

Tabla interpretativa, estudiante 2, ejercicios 1 y 2

Herramientas	Manejo algebraico.
Procedimientos	Despeja la variable$y$ (primer reactivo). Trabaja algebraicamente con la ecuación cuadrática hasta llegar a la ecuación de la parábola (segundo reactivo)
Argumentos	La cuadrática como una herramienta de representación de curvas parabólicas o lugares geométricos a partir de la variación de sus parámetros (vértice, foco. directriz)

A MODO DE CONCLUSIONES

Una de las cuestiones que se ha observado en el trabajo directo con los estudiantes, es que éstos no relacionan la expresión algebraica de una función cuadrática con las características de su representación gráfica. La naturaleza de procedimientos y argumentos es mecánica y operativa y no favorece el desarrollo de un pensamiento cuadrático. No logran construir significados para lo cuadrático desde estrategias de carácter técnico, ni en lo algebraico ni en lo gráfico**,** En lo que sigue interesa responder a preguntas como las siguientes ¿El estudiante comprende finalidades de desarrollos algebraicos en el proceso de elaborar la gráfica? ¿Cómo varían los procesos de entendimiento para graficar con base en diferentes expresiones analítico algebraicas?

Referencias

Bouciguez, M., Irassar, L. y Suárez, M. (2008). Análisis de estrategias: un estudio de caso para la función cuadrática. En Actas de la I Reunión Pampeana de Educación Matemática, II REPEM. Recuperado de http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem08/memorias/comunicaciones/Trabinvest/C29.pdf

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Editado en castellano para fines académicos por Martha Villalba y Víctor Hernández desdeFondaments et méthodes de la didactique des mathematiques. Recherches en Didactique de Mathématiques. Vol 7 Nº 2, pp. 33-115. Recuperado de http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5CFundamentosBrousseau.pdf

Carrasco, E., Díaz, L. y Buendía, G. (2014) Figuración de lo que varía. Enseñanza de las Ciencias, 32.3, pp. 365-384. Recuperado de http://ensciencias.uab.es/article/view/1201.

Díaz, M.E., Haye, E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. En Actas del I Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe. República Dominicana.

Duval, R. (1999). Semiósis y pensamiento humano. Traducido al español por Myriam Vega Restrepo. España: GEM.

González, M.T., Martín, E. (2004). Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas. En actas de XVI Simposio Iberoamericano de enseñanza Matemática "Matemáticas para el Siglo XXI".Recuperado de www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/77_teresa_gonzalez_2.doc

Lehmann, Ch. (1998). Geometría Analítica. Traducción al español de Rafael García Díaz. Ciudad de México: Limusa.

Mineduc (2012). Guia N2 Matematica II Ciclo de EM. Recuperado de: http://www.mineduc.cl/usuarios/adultos/doc/GuiaN2MatematicaIICiclodeEM.pdf.

Polya (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

ANEXO 1 Desarrollo esperado de los reactivos

Reactivo 1

$$6y^2 - 12x = 0$$

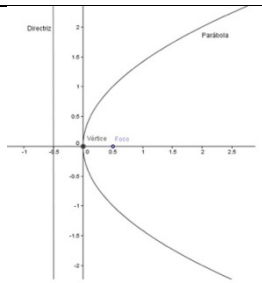
$6y^2 = 12x$

$y^2 = 2x$ Ecuación de la parábola

Vértice: $(0,0)$

Foco: $(0.5,0)$

Directriz: $x = -0.5$



Reactivo 2

$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$

$(y^2 - 6y + 9) - 9 - 8x + 17 = 0$

$(y^2 - 6y + 9) = 8x + 9 - 17$

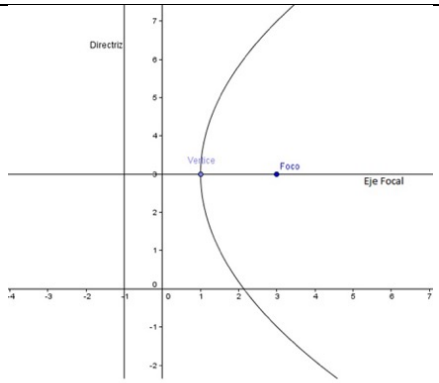
$(y^2 - 6y + 9) = 8x - 8$

$(y - 3)^2 = 8(x - 1)$Ecuación de la parábola

Vértice: $(1,3)$

Foco: $(3,3)$

Directriz: $x = -1$



ANEXO 2 Desarrollos estudiantiles de los reactivos

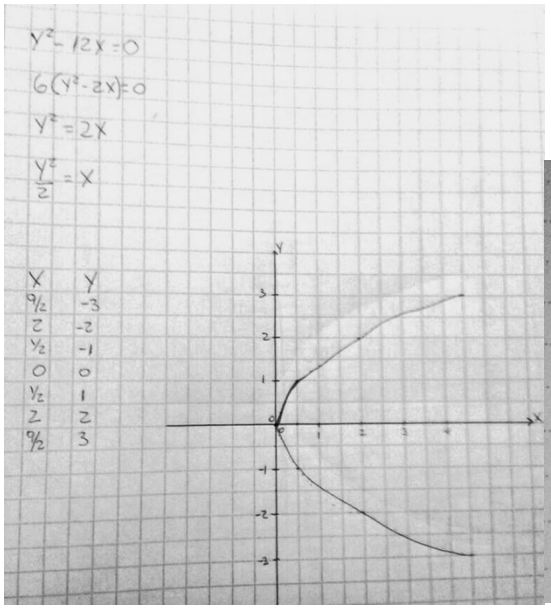


Figura 26. Desarrollo primer estudiante, ejercicio 1.

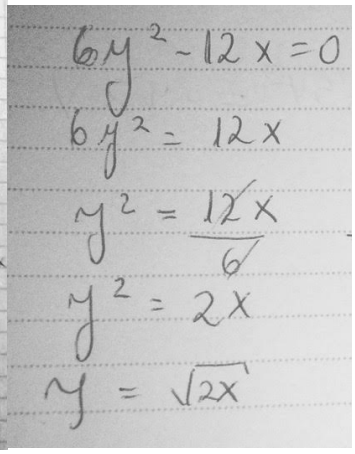


Figura 2. Desarrollo segundo estudiante, ejercicio 1.

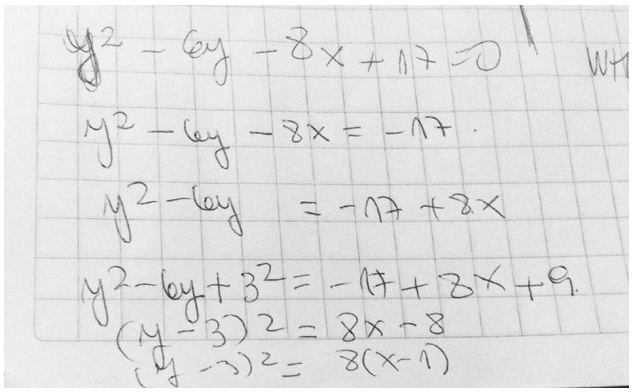


Figura 3. Desarrollo segundo estudiante, ejercicio 2

ANALISIS DIDÁCTICO DE UNA SITUACIÓN DE ALEATORIEDAD UTILIZANDO EL MODELO DE ESTRUCTURACIÓN DEL MEDIO.

Teresita Méndez Olave

Universidad Católica del Maule –
tmendez@ucm.cl

Resumen

Este artículo presenta un análisis didáctico utilizando el modelo de estructuración del medio según el modelo de Margolinas (1993, p. 252). Mediante situaciones cuyo objeto es describir las concepciones intuitivas sobre aleatoriedad de alumnos de 13 y 14 años (8º básico) de un liceo municipal, se analizan las distintas posiciones que adoptan el profesor y los alumnos con este modelo. La metodología es cualitativa y considera el análisis de un episodio de clases en el que interactúan el profesor y los alumnos, evidenciando y distinguiendo posiciones que permiten la evolución de la situación y de los conocimientos de los alumnos. Además es posible identificar concepciones sobre aleatoriedad cuando en la clase se producen diálogos entre los alumnos gestionados por el profesor.

Palabras clave: *Aleatoriedad. Estructuración del medio. Posiciones de los alumnos y del profesor*.

PROBLEMA

Méndez y Guzmán (2015 en evaluación) señalan que la lectura de las orientaciones didácticas del currículo chileno en torno a la enseñanza de la probabilidad deja en evidencia fenómenos didácticos, entre ellos que "la noción de aleatoriedad, siendo el núcleo central en la construcción del pensamiento probabilístico es considerada como un concepto obvio sin que su significado sea analizado en profundidad", señalado en Azcarate, Cardeñoso y Porlán (1998, p. 86). En este estudio confirmamos este hecho, ya que el currículochileno propone la clasificación de enunciados en posibles, seguros e imposibles y no considera situaciones que enfrenten a los alumnos(as) a tomar decisiones bajo incerteza. Así la noción de aleatoriedad queda invisible para los actores de la relación didáctica. Frente a estos fenómenos se diseñan seis situaciones que suponemos ponen en evidencia las concepciones sobre aleatoriedad de los alumnos y les permitirían reconocer y caracterizar los fenómenos aleatorios y con ello restituir el carácter de objeto de estudio de esta noción, nicho privilegiado para el estudio de la probabilidad.

Marco teórico

Margolinas (1995) sostiene que la primera versión de la estructuración del medio aparece en 1986, en este modeloBrousseau (1986b) describe la evolución de la situación didáctica en términos de interacciones de los alumnos con el medio,como un sistema anidado en el cual el alumno toma distintas posiciones de acuerdo a sus relaciones recíprocas con el medio y por lo tanto lo modifica. En una situación de aprendizaje, Brousseaudistingue cinco medios con los cuales el alumno puede interactuar y cuatro sujetos (actores) con los que alumno puede identificarse: el actor objetivo (S5)

realiza acciones catalogadas como procedimentales, algorítmicas; el sujeto que conoce y actúa sobre el medio(S4), toma decisiones que no necesariamente son explicitables para él; el sujeto epistémico (S3)actúa sobre el medio considerando las acciones de S4 para proporcionar información sobre la acción o para discutir su idoneidaden situaciones de formulación o prueba; el sujeto epistemológico (S2) reflexiona sobre su aprendizaje y las funciones del conocimiento, participa en debates y elabora pruebas explícitas y el alumno genérico (S1) que es un alumno ideal que el profesor concibe para su proyecto didáctico. En este modelo Brousseau determina dos fases, la didáctica y adidáctica. En 1993, Margolinas amplía esta noción determinando tres fases de la interacción didáctica: el nivel didáctico, materializado en la preparación de la enseñanza, a cargo del profesor y su concepción sobre ella; el nivel adidáctico, la situación didáctica propiamente tal, es decir su implementación la que requiere de las interacciones del alumno con el medio y el nivel sobredidáctico considerado como la reflexión sobre la enseñanza, a cargo del profesor y del aprendizaje desde el análisis de las producciones de los alumnos. En su modelo, Margolinas (1995) considera la situación didáctica constituida por el medio didáctico, el alumno y el profesor y la sitúa en el nivel cero (S0), los niveles adidácticos (S-3, S-2 y S-1) son considerados negativos y los niveles sobredidácticos (S1, S2 y S3) son considerados positivos. Esta investigadora conserva la estructura (de cebolla) definida por Brousseau en la que $M_{n+1} = S_n$ y S_n corresponde a las relaciones entre M_n, E_n, $P_n$en la que M_n, E_n y P_n, son el medio, el alumno y el profesor en un determinado nivel n, de estructuración del medio, (Margolinas, Steinbring (1993, p.252); Margolinas (1995)). Su aporte a esta noción es la definición de nuevos niveles que caracterizan otras posiciones del profesor y de la situación afinando las posiciones del alumno en este modelo.

Metodología

Se analiza un episodio de clases a objeto de identificar las concepciones sobre aleatoriedad de los alumnos, el lenguaje que utilizan para referirse a ella ensituaciones representativas de las experiencias reales de los alumnos.Este episodio se realiza al inicio del estudio de la probabilidad con jóvenes de 13 y 14 años (8° básico). Para esta comunicación nos basaremos en una de las seis situaciones planteadas a los alumnos.

La situación: La investigadora organiza la clase para que los alumnos trabajen en forma individual, proyecta en la pizarra la imagen "la jugada de futbol" y pide a cada alumno: "Escribe dos historias, en tu hoja de respuesta, sobre lo que ocurrirá en el instante siguiente:



Figura 1: La jugada de fútbol

Una vez que han formulado sus historias solicita a los alumnos que asignen una posibilidad de ocurrencia a sus historias, según los indicadores dados en la tabla de posibilidades (ver tabla 1):

Tabla 1
Nivel de posibilidades de las historias

Código	Posibilidad de la historia P(h)	Explicación
A	Imposible	La historia nunca sucederá
B	Casi imposible	La historia tiene poca posibilidad de ocurrencia
C	Posible	No se puede saber con seguridad si la historia ocurrirá
D	Muy posible	Es muy posible que la historia ocurra, pero no seguro
E	Seguro	Seguridad de ocurrencia de la historia.

Y finalmente que expliquen su decisión.

En base a las tareas realizadas por los alumnos se describe la estructuración del medio, considerando el modelo de Margolinas (1993, 1995)

En base a las tareas realizadas por los alumnos se describe la estructuración del medio, considerando el modelo de Margolinas (1993, 1995)

Tabla 2

Niveles de estructuración del medio

Medio M_n	Alumno E_n	Profesor Pn	Situación S_n
M-3. Medio material. Imagen la jugada de futbol, relaciona experiencias reales de los alumnos. Tabla de posibilidades con indicadores expresados en lenguaje natural. La situación objetiva se compone de la interacción entre M-3 y E-3.	E-3 E-objetivo. Los niños en la imagen, E-objetivo permite que el alumno acepte la responsabilidad de escribir historias solicitadas por el contrato didáctico.		S-3. Situación objetiva. Escribir historias sobre lo que ocurrirá en el instante siguiente de lo que muestra la imagen. Elaborar predicciones en el campo de las experiencias de los alumnos.
M-2 = S-3. Medio objetivo = Situación objetiva Las historias como medio. La situación de acción se compone de la interacción entre M-2 y E-2.	E-2. E-cognitivo. Conoce las jugadas de futbol que pudieran desarrollarse a partir de la imagen.		Situación de acción. S-2: E-2 escribe historias acerca del desarrollo de la jugada de futbol, las que formula imaginando lo que pudiera ocurrir o en base a su experiencia.
M-1 = S-2. M-acción = Situación de acción Las historias y tabla de posibilidades como medio. La situación de aprendizaje se compone de la interacción entre M-1, E-1 y P-1.	E-1: E-aprendiz asigna un nivel de posibilidad de la tabla a la historia formulada y explica su decisión.	P-1: P-observador: Observa y monitorea el trabajo de los alumnos y el desarrollo de la consigna.	S-1: Situación de aprendizaje: es una situación adidáctica de comunicación escrita S que permite predecir en contextos de incertidumbre.
M0= S-1. Medio de aprendizaje = Situación de aprendizaje: resolución de las tres tareas de la situación; La situación didáctica se compone de la interacción entre M0, E0 y P0.	E0. El alumno expone frente al curso las historias formuladas y las interpreta como: "$E0_4$: Es como una hipótesis de lo que creemos que puede pasar en el futuro". Devoluciones. $E0_{20}$ sostiene que "No se sabe lo que va a pasar. Igual	P0: Controla la fases de comunicación y desarrolla procesos de devolución en fases de puesta en común de la clase. Devoluciones. P (profesor): "Cuando dices hacer como una hipótesis, ¿A qué te	Situación didáctica: el profesor gestiona el proceso de devolución: El profesor interactúa con los alumnos mediante preguntas sobre la actividad realizada, escribir historias. Alumnos/as en posición E0 explican lo que conciben como hipótesis en el contexto de escribir historias predictivas. A partir de esas interacciones

	uno puede tener una idea de algo que puede venir, como algo pequeño que de una idea de lo que va a pasar"	refieres?"	el profesor puede concluir acerca de la incertidumbre del fenómeno estudiado.
M1 = S0. Medio Didáctico = Situación didáctica: las respuestas de los alumnos como medio. Conclusiones sobre la incertidumbre de las historias formuladas. La situación de planificación se compone de la interacción entre M1, E1 y P1.	E1. E-Reflexivo discute la validez de las posibilidades asignadas a sus historias, en fase de puesta en común, y concibe sus historias como impredecibles	P1: P-planificador: Analiza con anticipación o en el momento de la implementación, el impacto en los aprendizajes de la situación construida, desarrollando las situaciones previamente. Organiza fases de puesta en común para identificar concepciones sobre aleatoriedad de los alumnos. El medio didáctico con el que interactúa el profesor son las reacciones y argumentaciones de los alumnos que observa en situación S0.	S1. Situación de planificación: La situación propone lograr que los alumno(a)s comprendan como se manifiesta el azar en las historias formuladas.
M2 = S1. Medio de planificación = situación de planificación. La situación de construcción se compone de la interacción entre M2 y P2		P2 P-constructor, crea un medio de intervención didáctica M2 (medio de planificación) que incluya sus propios conocimientos sobre aleatoriedad y sus modos de representación de esta noción. En la interacción de P2 con M2, el profesor concibe situaciones de aleatoriedad, en las que selecciona imágenes en la zona de experiencias reales de los alumnos y les permiten realizar predicciones con un cierto grado de incertidumbre. Este medio se relaciona con la epistemología del profesor y de la noción en estudio.	S2. Situación de construcción debe permitir a los alumnos comprender que cualquier historia formulada a partir de la imagen propuesta tiene niveles de incerteza especificado por la tabla de posibilidades y concebir y validar las historias como predicciones bajo de incertidumbre.
M3 = S2. Medio de construcción = Situación de construcción contiene explicaciones sobre la aleatoriedad de los fenómenos descritos en las historias de la imagen: "Un suceso aleatorio es un fenómeno natural que se caracterizaporque su resultado no se puede predecir y al repetirlo en circunstan-cias similares puede dar origen a distintos resultados".		P3. P-noosférico. Concibe la enseñanza de la probabilidad en torno a situaciones problemas en las que el alumno toma decisiones basadas en los datos y elabora predicciones en contextos de incerteza. En la toma de decisiones cuantifica el azar y le atribuye un significado considerando la tendencia que le informan los datos.	S3.Situación noosférica. El aprendizaje de la aleatoriedad se concibe en torno a actividades de toma de decisiones y predicciones de fenómenos aleatorios. Los alumnos deben comprender y expresar las características de los fenómenos aleatorios frente a la clase. La situaciónnoosférica se compone de la interacción entre M3 y P3

ANÁLISIS DEL EPISODIO

Las posiciones del profesor:

El profesor en posición de observador (P-1) considera que la fase de comunicación y validación en la situación S-1 ha resultado satisfactoria y en posición de profesor enseñando P0 se prepara para abrir un debate con los alumnos en relación a las producciones estudiantiles. En la fase de debate de los alumnos, el profesor se mantiene al margen de los argumentos expresados por ellos adoptando la posiciónnoosférica(P3). En esta posición asume riesgos como son las rupturas de contrato que gestiona restituyendo la relación didáctica.

Las posiciones del alumno:

El alumno en posición E-objetivo (E-3) observa la imagen, comprende la consigna escribir historias sobre lo que ocurrirá en el instante siguiente de lo que muestra la imagen. E-objetivo permite al profesor gestionar la devolución del problema y al alumno aceptar la responsabilidad de escribir historias solicitadas por el contrato didáctico. En posición de E-cognitivo (E-2) conoce jugadas de futbol que pudieran desarrollarse a partir de la imagen, lo que favorece y facilita la formulación de historias de los alumnos. En esta posición el alumno puede mirarse en su posición anterior, de E-3. En posición E-1 el alumno asignaa las historias escritas un nivel de posibilidad y nuevamente puede mirar a través de los niveles anteriores, como las capas de una cebolla.En posición E0 y en situación de debate en clases interpreta las historias formuladas como "hipótesis de algo que no sabe cómo se desarrollará". Además *($E0_{20}$)* sostiene, que "No se sabe lo que va a pasar. Igual uno puede tener una idea de algo que puede venir, como algo pequeño que de una idea de lo que va a pasar". Y en posición E1, $E0_{12}$: sostiene Que en el partido de fútbol hay más probabilidad de que pasen muchas más cosas; y $E0_{30}$ en el partido de fútbol puede ser variable (las historias): se puede romper la rodilla, se puede tropezar con la pelota, con una champa de pasto".Se constata que concibe las historias formuladas como impredecibles.

La gestión de la clase se caracteriza por permitir el trabajo autónomo del alumno, estimulándolo a elaborar predicciones considerando la incertidumbre, presentarlas a sus compañeros y favorecer explicaciones y argumentaciones de los alumnos. Es decir el alumno debe predecir en contextos de incerteza, comprender y explicar.

CONCLUSION

A la luz del análisis realizado, en la situación presentada se aprecia el carácter de adidacticidad, lo que permite a los alumnos y al profesor identificarse en los diferentes niveles con los sujetos teóricos del modelo. Se aprecian fases de formulación de historias que ponen en evidencia la incertidumbre del fenómeno y las posiciones de los alumnos, y de puestas en común que permiten gestionar devoluciones y síntesis teóricas, delimitando las posiciones del profesor. El análisis realizado constata la evolución de la situación y los conocimientos de los alumnos, quienes manifiestan la incertidumbre de las historias formuladas.Lo anterior evidencia que la situación puede dar sentido a la noción de aleatoriedad y que las imágenes forman parte del medioadidáctcio.

Bibliografía

Azcárate, P., Cardeñoso J.M. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. Enseñanza de las Ciencias 16 (1).

Brousseau, G. (1986b). La relationdidactique: le milieu. Actes de la 4e écoled'été de didactique des mathématiques, pp. 54-68, ed IREM de Paris 7.

Margolinas, C., Steinbring H. (1993) Double analyse d'un épisode :cercleépistémologique et structuration du milieu.En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde y P. Tavignot (Eds).Vingtans de didactique des mathématiques (pp. 250 – 257). La penséesauvage.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu etsesapportsdansl'analyse a posteriori des situations. Les debats de didactique des mathematiques, La pensee sauvage, pp.89-102, Recherches en didactique des mathematiques. <halshs-00418815>

Méndez, T. y Guzmán, I. (20015 en evaluación). Aproximación Intuitiva a la Aleatoriedad, el caso de Alumnos de 13 y 14 años de un Liceo Municipal. Bolema.

Perrin-Glorian, M. y Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinairesRecherches en Didactiques des Mathématiques Vol. 23, n° 2, pp. 217-276.La penseeSauvage.

UBICACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO
UNA EXPERIMENTACIÓN CON GRAFICADORA[i]

Pinzón Casallas Wilson Jairo[a] – García Hurtado Orlando[b] y Gordillo ThiriatWilson[c].

Universidad Distrital Francisco José de Caldas;
wjpinzonc@gmail.com[a], ogarcia68@gmail.com[b],wgordillot@gmail.com[c]

Resumen

El uso de la calculadora graficadora ha promovido cambios sustanciales en el aprendizaje de la matemática. La generación de material didáctico, actúa como elemento mediacional en el análisis de un proceso de estudio puntual, implementado varías sesiones de clase. En este trabajo se presentan resultados de una experimentación en el aula, al comparar dos grupos de estudiantes (10 –13 años), bajo la metodología experimental–control, en la utilización de calculadora Texas Instruments (TI – 92), al ubicar puntos en el plano cartesiano. Como resultado se determinan las ventajas del grupo experimental para formular y explorar conjeturas a partir del uso de tecnología.

Palabras clave: *Plano cartesiano, experimental–control, calculadora graficadora, TI – 92.*

OBJETIVOS

Dar a conocer los resultados de un proyecto de investigación experimental que consintió en el diseño de una serie de prácticas didácticas usandola calculadora TI – 92en la enseñanza de las referencias que se utilizan para localizar un punto sobre el plano cartesiano (plano relativo, ubicación de puntos cartesianos en el plano, norte, sur, oriente, occidente, suroriente, etc), que son importantes en matemáticas y geografía.

ANTECEDENTES

El National Council of Teachers of Mathematics en los estándares del 2000 señala que lastecnologías electrónicas son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacermatemáticas,proporcionan imágenes visuales de ideas matemáticas. La existencia,versatilidad y poder de la tecnología exige examinar tanto que matemática deben aprender los estudiantes como de qué manera pueden aprenderla mejor. Con las computadoras ocalculadoras graficadoras los estudiantes pueden examinar más ejemplos o formas derepresentación, que las posibles de hacer a mano. La calculadora Texas Instruments TI – 92 permite que el plano cartesiano sea conceptualizado como resultado de construcciones,cuyas propiedades son definidas por las relaciones establecidas entre sus partes, por cuanto la permite hacer la observación de las propiedades que se mantienen invariables al modificar las coordenadas, motivando la generación de explicaciones por parte de estudiante en un ambiente lúdico. Se puede entonces señalar que el uso de la calculadora TI – 92 puede funcionar como una herramienta de gran utilidad para que los estudiantes se involucren en procesos de búsqueda y formulación de conjeturas o relaciones y argumentos o justificaciones matemáticas.

METODOLOGÍA

De la población.

Se formaron dos grupos de 20 estudiantes cada uno, el grupo “A” fue el grupo control (tomó clases de manera tradicional) y el grupo “B” el grupo experimental (tomó clase en un laboratorio de computo contando con una calculadora Texas InstrumentsTI – 92 por estudiante). Se contó con la

supervisión de tres docentes en el grupo experimental, que manipulan perfectamente la calculadora TI – 92 y que además han enseñado en grado sexto.

Del diseño de los materiales.

Se diseñó un manual de prácticas o secuencias didácticas de tres tipos, concertadas con todos los docentes que participaron en esta investigación:

- Prácticas guiadas: aquí se le indica a los estudiantes, paso por paso lo que deben hacer, es decir el docente ayudado por un video beam va ubicando un punto en el plano cartesiano seguido de los estudiantes. Y además se le cuestiona cuando es necesario para reafirmar el conocimiento y ejercitar su razonamiento en el tema tratado.
- Prácticas semiguiadas: se le proporciona al estudiante un menor apoyo, se le orienta dando las instrucciones que debe ejecutar para jugar batalla naval, este es un juego de estrategia en el que participan dos jugadores. Pero debe hacerlo con un compañero empleando lápiz y papel, al mismo tiempo debe ir contestando ciertas preguntas que lo van animando a continuar con el juego.
- Prácticas abiertas. Se espera en esta etapa que el estudiante por si solo construya y aplique su conocimiento a través de la ejecución de un programa elaborado en la calculadora TI – 92. Y que plantee sus propias conjeturas y argumentos, además se solicita que el estudiante genere un programa mediante el lenguaje de programación de la calculadora TI – 92 que permita desarrollar las actividades desarrolladas en las sesiones.

Este material incluye un instructivo básico del manejo de la calculadora TI – 92, con una breve explicación de todos los comandos necesarios para ejecutar el programa. Se reproduce y es repartido entre cada uno de los estudiantes.

Diseño de la programación en la calculadora TI–92.

Uno de los potenciales más grandes que ofrecen las tecnologías computacionales, es la flexibilización que permiten los lenguajes de programación. El conocimiento del lenguaje de programación de la calculadora TI – 92, permite al estudiante idear y desarrollar nuevas herramientas metodológicas para el aprendizaje de la matemática. Así mismo, permite usar gran cantidad de software disponibles para la calculadora, sin muchos traumatismos. En esta investigación se elaboró un programa sencillo en la calculadora TI – 92, llamado **cazador**(), utilizado con el grupo experimental.

De las sesiones de trabajo.

Las prácticas se distribuyeron a lo largo de 7 sesiones de 1hora cada una. En la 1ª sesión se reunieron los grupos A y B para aplicarles un examen diagnóstico con el fin de determinar el nivel de conocimientos previos, en forma individual y por grupo.

2ª sesión:al grupo A se le inicia con una breve historia sobre la importancia de ubicar puntos en el plano cartesiano y se realiza una actividad llamada *"búsqueda del tesoro"*. El grupo B inicia con una actividad guiada que introduce al manejo delaTI – 92, en cuanto a las funciones básicas y la elaboración de gráficas en el plano cartesiano; además, se les da a conocer el editor de programación de laTI– 92.

3ª sesión: se continúa con actividades guiadas, intercalando cuestionamientos sobre los posibles resultados del siguiente paso, se tratan los temas de recta numérica y plano cartesiano, dirigidas a los dos grupos.

4ª sesión: los grupos construyen el juego batalla naval. Se juega con lápiz y papel, y nointerviene el azar. En el mismo diseñan una estrategia que les permita llevar al triunfo frente a su compañero.

5ª sesión:los estudiantes del grupo A dibujan dos planos cartesianos [–10, 10] X [–10, 10], en uno ubican un punto al azar (el cual tiene que ser encontrado por su compañero) y en el segundo escribe los puntos que va diciendo. El juego consiste en adivinar una única coordenada en el plano cartesiano que su compañero ha ubicado. Cada vez que le den una coordenada se debe informa en qué dirección se encuentra el punto oculto, tomando como origen el punto dado por su compañero, de igual forma elestudiante del grupo B emplea la calculadora TI – 92 para jugar cazador () (este es el mismo juego del grupo A, pero diseñado en la calculadora TI – 92), se juega de forma individual y no se requiere de un contrincante.

6ª sesión:los estudiantes del grupo A y B generan un juego similar al trabajado en la sesión anterior, el grupo A lo hace con lápiz y papel y el grupo B lo elabora en la calculadora TI – 92, esto le permite desarrollar y profundizar no solamente en el lenguaje de programación, sino en la comprensión de los conocimientos adquiridos.

7ª sesión:se reúnen los grupos A y B, y se lleva a cabo la prueba final.

En cada una de las etapas existió la participación y supervisión de tresprofesores que ayudaban en cuestiones de logística así como en cuestiones del manejo dela TI – 92, promoviendo siempre el cumplimiento de los objetivos de cada una de las etapas de las secuenciasdidácticas.El grupo A trabaja de manera clásica: un docente usando lápiz,borrador y papel.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

De la prueba diagnóstica

Fue diseñada deliberadamente de manera clásica en estructura (preguntas abiertas, ejemplo: pregunta uno. *¿Qué es la recta numérica?*) Con un total de (26) preguntas, en el grupo B,el 0% aprobó el examen y la calificación del grupo en promedio fue de 2.3, en los siguientes histogramas se presentan los resultados de losestudiantes del grupo experimental que contestaron acertadamente cada pregunta. La primera gráfica muestra, estudiantes contra número de aciertos, la segunda gráfica muestra preguntas contra número de estudiantes que acertaron la respuesta correcta.

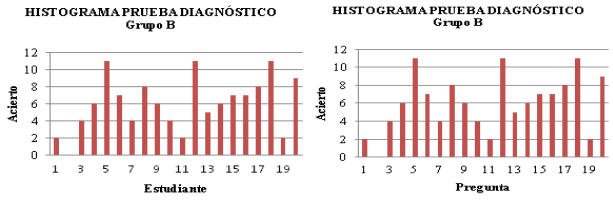


Figura 1. Histograma de prueba diagnostico grupo B

El grupo A obtuvo 0% deaprobados en el examen diagnóstico, y su promedio fue de 2.2, en los siguienteshistogramas se establecen los resultados, la primera gráfica muestra estudiantes contra número de aciertos, en la segunda gráfica se determinanpreguntas contra número de estudiantes que acertaron en la respuesta.

Se puede concluir que los dos grupos tienen una cantidad de conocimientos degeometría analítica muy similar, y mínima.

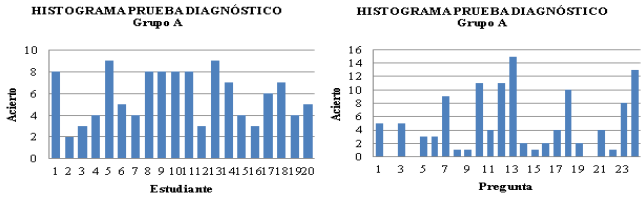


Figura 2. Histograma de prueba diagnostico grupo A

De la prueba final

El instrumentode evaluación cotiene15 preguntas de opción múltiple con esquemas y dibujos. En los histogramas a continuación se muestran los resultados obtenidos, igualmente espreciso señalar que se aplicónuevamente la prueba de entrada al final del curso, evidenciando que losresultados son un 1% menos favorables que los que se obtuvieron con la prueba de opciónmúltiple.

El grupo Bobtuvo una calificación promediode 6.3, aprobando 12 estudiantes de los 20, es decir el 60%, es importante destacar que todoslos estudiantes tuvieron avance ya que incluso los que reprobaron tuvieron un promedio de 4.7de calificación y un estudiante aprobó el examen con 10.

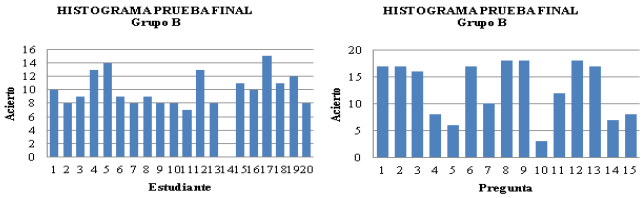


Figura 3. Histograma de prueba final grupo B

Por su parte, el promedio de calificación del grupo A fue de 4.6, aprobando 7 estudiantes de los 20, es decir el 35%, como se muestra en los siguientes histogramas.

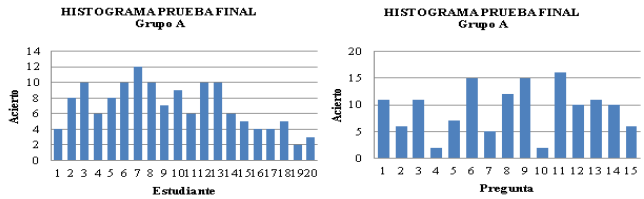


Figura 4. Histograma de prueba final grupo A

De acuerdo con los resultados, se puededeterminar que el grupo B tuvo un mejor desempeño que el grupo A, siendo la diferencia de un 25% más, en la siguiente tabla se resumen los avances de cada uno de los grupos.

Tabla 1. Resultados de los grupos

	Prueba Promedio		% de Estudiantes aprobados Prueba	
	Diagnóstico	Final	Diagnóstico	Final
Grupo A	2,3	6,3	0%	60%
Grupo B	2,2	4,6	0%	35%
Diferencia	0,1	1,7	0%	25%

CONCLUSIONES

Se puede señalar que el grupo B tuvo un avance considerable con respecto al nivel deconocimientos adquiridos al finalizar el curso, mientras que en el grupo A el avance fuemucho menor. Para el estudiante la calculadora es una herramienta maravillosa que motiva su proceso de proceso aprendizaje llevándolo a continuar explorando, sin embargo es claro que definitivamente debe contar con un manual guía en donde se especifiquen las actividades arealizar en las diferentes sesiones y etapas que se proponen.

Por otra parte esimportante la presencia de un docente que actúe como mediador o guía para que estimule al estudiante aterminar sus actividades cuando sea necesario, además deevaluarlas en forma continúa para cualificarlas, de manera que los objetivos para la que fueron diseñadas se cumplan más óptimamente.

Se puede precisar que el uso de la TI – 92 es una buena alternativa,ya que funciona como una herramienta paravisualizar y dar certeza al momento de argumentar las conjeturas; por lo que se recomiendasu uso como actividad complementaria en un curso habitual, para explorar el funcionamiento engrupos típicos.

Cuando un estudiante programa en la TI – 92 genera una resolución a un problema y conlleva a un aprendizaje significativo y con mayor motivación, como se evidenció en el grupo B.

El uso de la TI – 92 como instrumento de mediación permite un mejor aprendizaje en la ubicación espacial. La incorporación de la TI – 92 en el estudio de la ubicación de puntos en el plano cartesiano facilita el aprendizaje, así mismo motiva la exploración de diversas formas de representación. Por el contrario trabajar sin instrumentos computacionales limita, en términos de efectividad y rapidez, la capacidad de análisis e interpretación de los estudiantes.

Incorporar una nueva tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje es un proceso complejo y lento que exige una nueva dinámica, que debe ser aplicada de forma gradual.

Bibliografía

National Council of Teachers of Mathematics, (2000).Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va 20191-9988.: The Council. U.S.A.

www.edilatex.com/index_archivos/algebra5tintas.pdf

www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA22/PlanoCartesiano.html

http://es.wikipedia.org/wiki/Función_lineal/

www.x.edu.uy/lineal.htm

[i] Esta investigación ha sido realizada con estudiantes de 10 a 13 años de edad

PERSPECTIVA DE PROFESORES DE CIENCIAS EN EL CONTEXTO DEL DISEÑO DE TAREAS DE ENSEÑANZA[i]

Guerrero-Ortiz Carolina[a], Mena-Lorca, Jaime[b]

[ab]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; karo.curso@gmail.com[a], mena.jaimemena@gmail.com [b]

Resumen

En un esfuerzo por diseñar situaciones de enseñanza que involucren la perspectiva de docentes de diferentes disciplinas respecto a la enseñanza de las matemáticas y el trabajo con modelos matemáticos se desarrolló un seminario para promover el trabajo en conjunto de profesores de distintas asignaturas. Los profesores expresaron su visión respecto al uso de los modelos matemáticos en su clase. Analizamos algunos aspectos que salen a la luz en el contexto del diseño de situaciones de enseñanza. Destacan diferentes posiciones respecto a las habilidades necesarias para trabajar con modelos en física y biología.

Palabras clave: *diseño de tareas, modelación, habilidades.*

INTRODUCCIÓN

Diseñar actividades para la enseñanza de las matemáticas no es tarea fácil, sobre todo cuando participan profesionales con distinta disciplina. Por un lado, involucra poner en armonía el conjunto de visiones diferentes sobre la naturaleza de las matemáticas que cada uno de los participantes sostiene y sobre lo que esperan de sus estudiantes relacionados con el trabajo con modelos matemáticos. Por otro lado, cada uno tiene diferentes objetivos de enseñanza y un programa de estudios diferente que cumplir. En el caso de la enseñanza de las matemáticas, muchos profesores argumentan que no cuentan con suficiente tiempo para trabajar con tareas que involucran la modelización de situaciones con contextos reales, por lo que generalmente terminan resolviendo tareas con contextos hipotéticos previamente idealizados y simplificados (Bock &Brack, 2013).

De manera que, al cursar las asignaturas de matemáticas en los primeros años de la universidad los estudiantes no adquieren la habilidad necesaria para trabajar con modelos matemáticos. Tal como Kawasaki &Moriya (2011) señalan, el currículo tampoco favorece el desarrollo de habilidades de modelización, generando con ello dificultades en los estudiantes al relacionar conceptos de matemáticas y ciencias cuando estudian las asignaturas correspondientes a su disciplina.

La investigación se enmarca en el contexto de un seminario dirigido a discutir y planificar el diseño de situaciones de enseñanza que apoyen a los estudiantes en el tránsito del estudio de matemáticas a al estudio de algunas asignaturas correspondientes a su carrera que implican el trabajo como modelos matemáticos. Además del material producido, confiamos en que este seminario puede generar cambios en las creencias de los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas, sobre su enseñanza y aprendizaje, y el rol que el profesor debería tener en el aula de clase.

Asumimos que previamente al diseño de las tareas de enseñanza debíamos conocer cómo los profesores participantes creen que deberían ser usados los modelos matemáticos en el contexto de las ciencias, por lo que les pedimos que se expresaran al respecto. En este trabajo presentamos los resultados de una primera fase de investigación que consiste en la observación del uso de algunos modelos matemáticos por parte de un profesor de física, uno de matemáticas y uno de bioquímica.

Nos preguntamos, cómo estos profesores usan los modelos matemáticos en su clase? Cuál es el rol que le asignan a los modelos matemáticos en su clase? Las respuestas a estas preguntas adquieren relevancia, puesto que la construcción y empleo de modelos matemáticos es una de las principales

características de las ciencias, además su aprendizaje implica entre otras cosas que los alumnos sean capaces crear e interpretar los modelos atingentes a la disciplina.

Marco conceptual

El termino "modelo" en las disciplinas puede ser entendido de diferentes maneras, podemos referirnos a modelo cuando hablamos de la estructura atómica de los materiales o podemos referirnos a modelo cuando en física representamos el movimiento de un cuerpo. Podemos tener modelos gráficos, matemáticos, pictóricos, etc. Se pueden presentar de forma verbal, visual o matemática. Los modelos también cumplen diferentes funciones como descriptores, medios de explicación y predicción, dependiendo estos aspectos fuertemente de la disciplina en que se traten. Un modelo puede ser estático, dinámico, determinista, estocástico, cualitativo o cuantitativo (Justi& Gilbert, 2003). Y la representación utilizada, determina el tipo de información que un modelo puede ofrecer. También dependiendo de la disciplina y del contexto de uso, se puede dar mayor o menor importancia a la exactitud con que un modelo representa el objetivo correspondiente.

Kapur (1982) destaca la diferencia en el trabajo con modelos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas y las ciencias. Mientras que en las ciencias los modelos son vistos desde el corazón de la disciplina misma, sobresaliendo las estrategias de interpretación y explicación; en los cursos de matemáticas la enseñanza es orientada hacia la aplicación de técnicas y memorización de procedimientos, provocando obstáculos para los estudiantes cuando han de cursar las asignaturas correspondientes a la profesión que estudian. Tal como menciona Kapur, conocer modelos matemáticos es necesario pero no suficiente para aprender a modelar, tampoco es suficiente para cumplir con los requerimientos necesarios para el trabajo con modelos en el contexto de las ciencias. Presentamos algunos ejemplos que ponen de manifiesto la distancia entre el trabajo con modelos matemáticos en el curso de matemáticas y el trabajo en biología y física.

Metodología

El seminario se desarrolló en una universidad chilena. Observamos a un físico (Kim), un bioquímico (Saúl) y un matemático (Peter) discutiendo sobre el diseño de tareas para enseñar matemáticas. Se analiza la naturaleza de sus propuestas en relación con el mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas y la comprensión de los modelos en el contexto de las ciencias. El objetivo del seminario fue el diseño de actividades matemáticas para el desarrollo de habilidades en los estudiantesque les ayuden a sumergirse en el conocimiento de la disciplina que van a estudiar. Los participantes expresaron su posición al respecto. Las siguientes preguntas, nos ayudaron a dirigir la discusión: qué tipo de modelos usan en su clase? Qué esperan de los estudiantes, cuando trabajan con estos modelos? Qué habilidades son favorecidas al trabajar con estos modelos?, etc. Se presentan los datos obtenidos en la primeras dos sesiones de discusión, donde los participantes expresaron cómo usan modelos matemáticos de su clase. El debate fue video grabado y se transcribió para ser analizado.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Saúl señaló que en su disciplina es importante que los estudiantes desarrollen la capacidad de interpretar y hacer coincidir las relaciones entre la información proporcionada por los diferentes modelos gráficos.

A partir de los argumentos de Saúl identificamos tres enfoques para el uso de modelos como: interpretación, relación entre la información proporcionada por los gráficos y como medio de

predicción. Saúl se centra en el desarrollo de competencias para la comprensión e interpretación de la información proporcionada por los modelos. Los modelos que utiliza están representados por gráficos. También expresa que los estudiantes con frecuencia encuentran dificultades para trabajar con estos.

Desde el punto de vista de la enseñanza, Kim está interesada en la explicación de algunos fenómenos mediante el uso de modelos de la física, su idea es mostrar a los estudiantes cómo aparecen los modelos. Ella utiliza representaciones pictóricas para representar un fenómeno de movimiento, conocimientos como notación vectorial y la manipulación de vectores están presentes, pero no hace referencia a los mismos.

Identificamos que el trabajo con modelos se asocia a un proceso de construcción de modelos matemáticos como medio para explicar el comportamiento de algunos fenómenos y para demostrar las leyes de la física. Los modelos utilizados se presentan en forma pictórica, gráfica y algebraica. La construcción de modelos matemáticos implica poner en juego el conocimiento de otros modelos asociados a un fenómeno analizado.

Peter describe qué tipos de modelos enseña en sus cursos de cálculo. Él explica que por lo general no tiene tiempo suficiente para trabajar con sus alumnos en la construcción de modelos matemáticos. Pedro es consciente de que los modelos matemáticos que utiliza son simples, pero declara que son útiles para mostrar a sus alumnos el proceso de modelado y las relaciones entre la realidad y las matemáticas.

Con estos ejemplos mostramos diferentes maneras en que los profesores de ciencias y matemáticas utilizan modelos matemáticos y algunos en los que están interesados para ser enseñados. En ciencias para interpretar un modelo es necesario entender algunos conceptos relacionados con la disciplina, por ejemplo, los conceptos de física relacionados con el movimiento del cuerpo (las leyes de Newton) y conceptos relacionados con las matemáticas. En Biología conceptos relacionados con mecanismos de homeostasis del cuerpo, aquí la interpretación de la información proporcionada por los gráficos adquiere un papel relevante. En matemáticas el trabajo se desarrolla en el mundo de las matemáticas, se le da más importancia al análisis de las características matemáticas del modelo obtenido.

Referencias

Bock, W. &Bracke, M. (2013). Project teaching and mathematical modelling in STEM subjects: A design based research study. Proceedings of (CERME 8)

Kawasaki, T. & Moriya, S. (2011). Using Modelling Experiences to Develop Japanese Senior High School Students' Awareness of the Interrelations between Mathematics and Science. In Kaiser, G., Blum, W., Borromeo, R., and Stillman, G. (Eds), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (603-615). DOI 10.1007/978-94-007-0910-2

Kapur, J., N. (1982) The art of teaching the art of mathematical modelling, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 13:2, 185-192,

DOI: 10.1080/0020739820130210

Justi, R. & Gilbert, J. (2003). Teachers' views on the nature of models.International Journal of ScienceEducation, 25:11, 1369-1386, DOI: 10.1080/0950069032000070324

[i] Las notas finales de página irán al final del capítulo. Utiliza el formato JNEM Nota a pie. La única nota que puede ir ligada al título serán las del tipo "Este trabajo se ha realizado al amparo de… Esta investigación ha sido realizado con… O cualquier fórmula que se considere conveniente."

UN MARCO DE REFERENCIA PARA LOS USOS DE LA OPTIMIZACIÓN

Del Valle, T.

Resumen

En el discurso Matemático Escolarla optimización es un proceso desprovisto de significaciones, procedimientos y argumentaciones, ya queexiste una mayor centración en los objetos matemáticos utilizados en la aplicación de métodos de optimización que en sus usos.

En este artículo se justifica la formulación de un Marco de Referencia de los usos de la optimización para valorar la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimiento.De esta manera, se busca estrechar la distancia existente entre la matemática escolar y el cotidiano, con el fin deresignificar los usos de la optimización en el discurso Matemático Escolar.

El fenómeno de la opacidad del conocimiento de la vida del ciudadano en el discurso Matemático Escolar de la optimización

La matemática escolar se encuentra permeada por una matemática estructural, dejando de lado la matemática del cotidiano.En Gómez, Silva-Crocci, Cordero y Soto (2014) se dice que la matemática escolar se encuentra normada por un sistema de razón que llamaremos*discurso Matemático Escolar*(*dME)*(Soto, D. y Cantoral, R., 2014). Por lo demás, el*dME* no considera los *usos* del conocimiento, la cultura, ni el escenario de los individuos a quienes se dirige la enseñanza, lo cual produce un fenómeno de *opacidad de la vida cotidiana* (Gómez et al 2014).

El fenómeno de *opacidad*se debe a la inexistencia de *Marcos de Referencia* (*MR)* que nos permitan resignificar los *usos*del conocimiento matemático en el *dME*. Por lo anterior, es que se buscan*MR* que dirijan su atención hacia las maneras en que se *usa* el conocimiento matemático, reconociendo en su *uso*la situación que le subyace, es decir, reconocerunasituación que provoque el surgimiento de dicho conocimiento.

En el sistema educacional chilenola optimización es parte de una de las ramas de la matemática llamada investigación de operaciones, la cual consiste en la aplicación de métodos matemáticos para realizar aquellos procesos de toma de decisión. Sin embargo, el acentoestá marcado hacia los objetos matemáticos involucrados en los métodos de optimización, que fuera de ahí pudiera no reconocerse a la optimización como un conocimiento (por el estudiante y docente).

La optimización, en el *dME*, se ha convertido en un proceso mecánico, donde existe una mayor centración en los objetos matemáticos que intervienen en los métodos de optimización: derivada, inecuaciones, matrices, gradientes, entre otros; soslayando los *U(op)* en situaciones reales de diversas disciplinas. Es decir, el actual*dME* de la optimización *opaca* el conocimiento del cotidiano, generando una barrera entre esas matemáticas del cotidiano y la matemática escolar. Es por esto que nos proponemos elaborar un *MR* de los *U(op),* el cualconsidere las matemáticas del cotidiano y nos permitadevelar aquello que está*opaco*en el *dME* de la optimización.

Primer acercamiento hacia aquello que está opaco

La problemática de investigación es abordada desde la Teoría Socioepistemológica,lo que conlleva la construcción de un *MR* que valore la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimiento y permita rediseñar el *dME* de la optimización a través de la resignificación de sus *usos*. De esta manera, se busca estrechar la distancia existente entre la enseñanza de la optimización en la matemática escolar y el conocimiento matemático del cotidiano.

Se han construido diversos *MR* bajo una mirada Socioepistemológica. Por ejemplo, Cordero en el año 2001 señala que "*hasta ahora se han logrado precisar tres de estos marcos y se ha convenido presentarlos en términos de situaciones: variación, transformación y aproximación. Cada situación compone un marco epistemológico del cálculo, respectivamente*" (pp. 114). Esta epistemología pretende rediseñar el *dME* del cálculo y del análisis, promoviendo un discurso basado enaquellos *MR*que expresan el cotidiano de la gente que *usa* ese conocimiento en situaciones específicas como la variación, transformación y aproximación.

Este enfoque teórico nos invita a seguir en la búsqueda de otras situaciones que generan el conocimiento matemático que *usa* la gente en su cotidiano y le es funcional. Por ejemplo, si necesitamos un modelo de variación uniforme que represente a un conjunto de puntos dispersos (ver figura 1), se sabe que podemos dar respuesta a ello utilizando el método de mínimos cuadrados.En cambio, sienfocamosla atención en aquello que provoca la utilización del método, identificamos que se solcitaadaptar el comportamiento de un conjunto de puntos dispersos en un modelo lineal, donde existen infinitas rectas que pueden representar ese modelo (ver figura 2). Asimismo, de todas las rectas que se pueden escoger, se debe seleccionar cuál podrá representar de mejor manera esos datos. De esta manera, emerge, en el marco socioepistemológico (Cantoral y Farfán, 2003), una situación que subyace a la necesidad de utilizar el método de los mínimos cuadrados, la "situación de **selección**", ya que se debe seleccionar una de todas las rectas que pasan por esos puntos; la decisión de elegir una recta u otra puede depender de las variables de condición que rodean el contexto del problema.

El caso anterior nos muestra que previo a proceder a usar un método existe una situación que genera esa necesidad de seleccionar. Esta situación nos proporciona la primera premisa con que nos enfrentamos en esta investigación, lo que conlleva la tesis siguiente: una situación de **selección**específica genera argumentaciones de optimización (*Arg(op)*), los cuales son la resignificación del *uso* del conocimiento matemático en donde las significaciones concedenprocedimientos según el instrumento útil del humano (Cordero, en prensa); y en consecuencia, nuestra primera pregunta ¿Cómo construir el*MR*en cuestión?

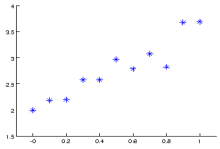


Figura 1: gráfico de dispersión

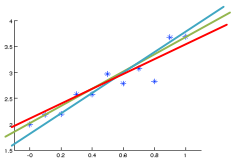


Figura 2: la mejor recta

Los usos de la optimización en un marco de referencia

Reconocer las argumentaciones que sustentan el uso de los objetos matemáticos utilizados en los métodos de optimización, permitirá expresar la resignificación del conocimiento matemático en cuestión. Para ello es necesario hacer visibles tres elementos: las significaciones (elementos que le dan sentido a la situación específica),los procedimientos (ejecución fundamental derivada de las significaciones)yel instrumento que le es útil al humano (la experiencia sobre la cual se trabaja) (Cordero, 2001). Los tres elementosimplicanla transversalidad delos*U(op)*al ubicarse en diferentes escenarios. Y para establecer la resignificación del *U(op)*se requiere analizar el debate entre el funcionamiento y la forma que el conocimiento de la optimización ha adquirido en dichos escenarios.

Los funcionamientos de la optimizaciónen diferentes escenarios, nos permitirán develar las significaciones que brindan procedimientos y para ello será necesario un instrumento que le esútil a lo humano. De esta manera, el funcionamiento dela optimización podrá debatir con la forma que ha

adquirido en aquellas comunidades que la usan al enfrentar situaciones específicas propias de su cotidiano.

Los escenarios a considerar para la formulación del *MR*de los *U(op)*fueron el de unos ingenieros en oficio y la obra de Lagrange. En el primero, se estudia la investigación realizada por seis ingenieros mecatrónicos en oficio, llamada "a geneticalgorithmforfilterdesigntoenhancefeatures in seismicimages" (Orozco M., Ortiz C., Urrutia J., Martín R., Rodriguez A. y Villaseñor P., 2013). En el Segundo, se estudia la obra de Joseph-Louis Lagrange con su trabajo de los multiplicadores, el que fuedesarrollado en el libro de la "Mecanique Analytique" (Lagrange, J. 1963). Además, para analizar ambos trabajos, nos posicionamos con la premisa del *MR*, donde proponemos queuna situación de selección genera *Arg(op)*.Para precisar en por qué hablamos de una situación deselección, presentaremos a grandes rasgos los resultados encontrados en el análisis de ambos escenarios y mostraremos qué nos permitió identificar las significaciones, los procedimientos y el instrumento que permiten generardichas*Arg(op)*.

Lagrange, en su obra, se enfrenta a una situación en la cual debe seleccionar la resistencia que debe sufrir un cuerpo (el cual ejerce una fuerza en un determinado momento) en virtud de su relación mutua (figura 3), donde es necesario distinguir cualidades de las ecuaciones que representan la fuerza de los cuerpos. Por otro lado, en el trabajo de los ingenieros mecatrónicos, es necesario seleccionar en qué parte de una superficie se deberá realizar una excavación para extraer petróleo, con el fin de reducir tiempos, costos y riesgos en el proceso de exploración e incrementación de la productividad de los geocientíficos.Es así como en la situación de selección se producen significaciones que hemos llamado patrones de adaptación.

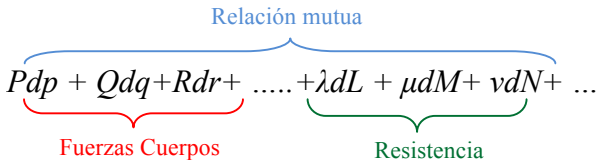


Figura 3: Ecuación de equilibrio de Lagrange

Lagrange trabaja con la diferencial de cada ecuación de condición (*λdL ; μdM; vdN...)* y con la diferencial de las ecuaciones que representan la fuerza de los cuerpos*(Pdp; Qdq; Rdr...),* al trabajar con las diferenciales de cada ecuación lo que se busca es una *adaptación* de las ecuaciones a la de una misma naturaleza y así poder construir la ecuación del equilibrio. Asimismo, en el trabajo de los mecatrónicos se buscaadaptarcada imagen a una más nítida, para ello se aplica un filtro a las señales de transferencia arrojadas por el sensor. Para producir los patrones de adaptación es necesario brindar procedimientos de distinción de cualidades. En otras palabras, es necesario distinguir para buscar la adaptación.

Uno de los procedimientos de Lagrange en su obra, es distinguir las cualidadesde los coeficientes indeterminados (multiplicadores *λ, μ y ν*), los cuales deben multiplicarse a las ecuaciones de condición, para eliminar un número semejante de ecuaciones y construir la fórmula general del equilibrio. Es decir, distinguen las cualidades de las ecuaciones de condición que tiene para asociarlas a un multiplicador, y así, adaptarlasen una ecuación de equilibrio. En el trabajo de los mecatrónicos, es necesario distinguir cuál de las imágenes – a las que les fue aplicado el filtro- posee mayor nitidez.

Lo estable es el instrumento que le es útil a lo humano La situación de selección requiere de un instrumento, el cual dirige la selección hacia algún ideal; se trata de seleccionar el que este más próximo alideal (considerando las variables de condición). Ese tendencial a lo ideal es a lo que le hemos llamado lo estable.

En la obra de Lagrange, se observa la búsqueda de comportamientos con tendencia a cero.Esto se puede observar al usar los multiplicadores (*λ, μ y ν*) para que las fuerzas de los cuerpos *(Pdp; Qdq; Rdr...)* y las ecuaciones de condición (*λdL; μdM; νdN...)* tiendan a cero al calcular su diferencia(en este caso lo estable es llegar a cero y para ello se construye la ecuación del equilibrio). Por otro lado, loestable en el trabajo de los mecatrónicos,se observa en la selección de las imágenes, ya que se buscan aquellas que poseen zonas con mayor cantidad de hidrocarburo.

El análisis e interpretación del uso de la optimización, a través del debate entre elfuncionamiento y la forma que ha adquiridoenambos escenarios, nos permite observar una transversalidad en aquello quelo hace ser funcional. Así, se establece una resignificación de los *U(op)*, proveyendo al *dME* de un *MR* basado en *Arg(op)*, argumentaciones que se justifican a la luz de los *usos* en una situación específica de los ingenieros mecatrónicos y del físico, matemático y astrónomo italianoJoseph-Louis Langrange.

Una resignificación de los usos de la optimización

El reconocimiento de estos elementos nos permite elaborar un *MR* que rediseñe el *dME* de la optimización, ya que proporciona un marco basado en *usos*, dondeuna situación de selección genera *Arg(op)* cuando en ella interfiere un instrumento que le hemos llamado lo estable, ya que se busca que esa selección tienda hacia un ideal, provocando la construcción de patrones de adaptación a través de la distinción de cualidades.

Este *MR* de los *U(op)*busca que el *dME*de la optimización sea transversal a su *uso* en otros dominios de conocimiento y en el cotidiano de la gente. De esta manera, podemos hablar de una resignificación de los *U(op)*a través de un*MR*que valora la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimientos y el cotidiano de las comunidadque*usan* la optimización, promueven un rediseño del *dME*, el cual permita estrechar larelación existente entre la matemática escolar y el cotidiano.

Reflexiones finales

La investigación contribuye con la integración de una nueva epistemologías. Esta nueva propuesta se basa en la construcción social de los usos del conocimiento de la optimización y, por ende, exige modificaciones al *dME*. El análisis de la obra de los multiplicadores de Joseph-Louis Lagrange y el estudio de las resignificaciones de los *U(op)* en un escenario profesional de ingenieros mecatrónicos, dotó los principios básicos de los *U(op)*; resignificando a la optimización como un modelo de la situación de selección. Por su parte, la formulación del MR de los *U(op)* nos permitió ampliar la Socioepistemología del Cálculo y el Análisis (Figura 4), cuyas categorías de argumentación están más acorde con las realidades (cotidiano) de quien aprende y, por ende, con estrecha relación de la matemática escolar.

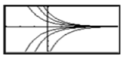
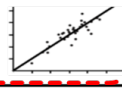
	SITUACIONES			
CONSTRUCCIÓN EN LAS PRÁCTICAS	VARIACIÓN	TRANSFORMACIÓN	APROXIMACIÓN	SELECCIÓN
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos Estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha=f'(x)$	Variación de parámetros $y=Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico formales (cociente) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Distinción de cualidades $\nabla f(x)-\lambda\nabla g(x)=0$
Instrumento útil al humano	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación	Predicción $E_o+Variación=E_f$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+$	Optimización 

Figura 4: Socioepistemología del Cálculo y el análisis

Nuestro MR resignifica los *U(op)*, ya que proporciona una epistemología que permite la transversalidad de los usos en el cotidiano de otras comunidades. Nuestro trabajo sigue el principio de problematizar el saber, localizando y analizando su uso y existencia como conocimiento, donde los resultados obtenidos en el análisis socioepistemológico nos permite abrir una nueva línea de trabajo en la teoría, reconociendo a los *patrones de adaptación*, a la *distinción de cualidades* y a *lo estable* como *Arg(op)*.

Referencias bibliográficas

Cantoral,R. y Farfán,R. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa6(1), 27-40.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4(2), 103-128.

Cordero, F. (en prensa) Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: El Eslabón de la Matemática y el Cotidiano. En Díaz y Arrieta (Eds), Investigaciones latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa, España: Díaz de Santos.

Del Valle, T. (2015). Los Usos de la Optimización: un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica. Tesis de Doctorado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

Gómez, K. Silva-Crocci, H., Cordero, F. y Soto, D. (2014).Exclusión, Opacidad y Adherencia. Tres fenómenos del discurso Matemático Escolar. En Flores, R. (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27,1457-1464. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Lagrange, J. (1963). La Statique: Manière plus simple et plus gènèrale de faire usagede la formule de L'èquilibre, donnèe dans la deuxiè. En J. Bertrand (Eds.),Mecanique Analytique (pp. 69-99), México: Clásicos de la Ciencia.

Orozco, M., Ortiz, C., Urrutia, J., Martin, R., Rodriguez, A. y Villaseñor, P. (2013). A genetic algorithm for filter design to enhance features in seismic images.Journal ofGeophysics and Engineering 1(1), 1-13.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014).El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemologica. Boletim de Educação matemática 28(50), 1525-1544.

UN ESTUDIO SOBRE EL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS BASADO EN REGISTROS SEMIOTICOS.

Gálvez C.[a], Mandujano M.[b], Zamora I.[c], Maturana I.[d],

UPLA, Chile
carolinagalvezormazabal@live.cl, mmandujanobaeza@gmail.com, Ivonnezd@gmail.com
isamatup@hotmail.com.

Resumen

Basados en la teoría de Registros Semióticos de Duval (Duval R.,2006) investigamos desde una postura cognitiva una problemática de enseñanza aprendizaje referida a la Teoría de Conjuntos, es un área que al igual que la lógica bivalente es fundamental para la construcción del conocimiento matemático. Realizamos un estudio de casos múltiples en dos universidades de la zona, donde la información que hemos recabado hasta ahora, dio cuenta fundamentalmente de las dificultades en las conversiones de registros naturales a gráficos, en conjunto con los tratamientos dentro de un mismo registro algebraico.

Palabras clave: *conjuntos, algebra, registros semióticos.*

INTRODUCCIÓN

En Matemática la teoría de conjunto cobró un rol esencial a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, matemáticos como Cantor, Dedekind, Zermelo y Frege entre otros trabajaron en la noción de conjunto, logrando proyectarla como eje articulador de la matemática. Según los estudios histórico- epistemológicos de Arrieche (Arrieche, 2000),

durante el siglo XX, se decide llevar este saber a las aulas, pero es en la década de los 80' que este proceso sufre fuertes críticas de matemáticos como Feynman (1965), Kline (1973), Freudenthal (1983), quienes cuestionan su impacto en la educación matemática, producto de ello, se retira parcialmente del curriculum escolar, permaneciendo en la actualidad como parte de los programas para los primeros años de carreras como licenciaturas en ciencias e ingenierías.

Desde la perspectiva didáctica algunas de las complejidades reportadas en el proceso de enseñanza aprendizaje, son los aportes de Linchevski y Vinner (1988) cuyos resultados revelaron que existe diferencia entre el concepto imagen, y el concepto definición. A su vez Zaskis y Gunn (1997) detectaron dificultades en la descripción del conjunto vacío y los elementos de un conjunto que son a la vez conjuntos. Fischbein y Baltsan (1999), mostraron en su investigación las dificultades del aprendizaje de la teoría de conjuntos introduciendo la relación entre la noción de colección y la noción matemática de conjunto. Arrieche (2002), por su parte propone en su estudio una relación entre la teoría de conjuntos y los números naturales, desde donde concluye que los maestros necesitan conocer las nociones elementales de la praxeología conjuntista, principalmente por sus relaciones con la numérica.

Por nuestra parte, proponemos un estudio sobre las problemáticas de aprendizaje que basado en la teoría de registros semióticos nos permita identificar claramente estrategias cognitivas que utilizan los estudiantes universitarios para comprender la teoría de conjunto, en particular el álgebra de conjuntos. Además identificar factores matemáticos asociados a la comprensión del álgebra y de la teoría de conjuntos.

TEORÍA DE REGISTROS SEMIÓTICOS.

La teoría de Registros Semióticos fue creada por R. Duval, como un modelo explicativo para las dificultades en el aprendizaje de la matemática, sostiene que hay al menos dos características de la actividad cognitiva implicada en las estrategias matemáticas. Por una parte se recurre a varios registros de representación semiótica, algunos de los cuales han sido específicamente desarrollados para efectuar tratamientos matemáticos; y por otra, los objetos matemáticos no son accesibles mediante la percepción.

Desde estas perspectivas las preguntas claves para el logro de un aprendizaje en matemáticas son ¿cómo aprender a cambiar de registro? y ¿cómo aprender a no confundir un objeto con su representación?

La conversión entre registros no se efectúa espontáneamente a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada, pero puede ser un obstáculo serio cuando no hay congruencia. Duval sostiene que las representaciones semióticas son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin la movilización de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas o no. La comprensión de una representación en un registro determinado parece implicar directamente la comprensión del contenido conceptual representado, sobre todo cuando el registro de representación es la lengua natural. La persistencia del fenómeno de bloqueos de registros y su estrecha relación con dificultades de comprensión conceptual, las cuales se manifiestan principalmente por el fracaso de la conversión en caso de no congruencia y por la ausencia de transferencia de conocimientos fuera de los sistemas estándares de aprendizaje. Estos fenómenos conducen a entender que la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación.

Para Duval, es necesario que un sujeto alcance el estadio de la coordinación de representaciones semióticamente heterogéneas, para que pueda discriminar al representante y al representado o a la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa.

DISEÑO METODOLOGICO: ESTUDIODE CASOS MULTIPLE.

Es un estudio cualitativo, por lo que decidimos como diseño metodológico de estudio de caso múltiple, en la medida que son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad, en un período de tiempo, facilitando la identificación de los distintos procesos interactivos que conforman una realidad (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992).

Tabla 1. Resumen de informantes y técnicas de recogida de información.

Tipo de estudiante	Curso	Caso 1 Ingeniería (15 estudiantes)	Caso 2 Matemáticas (4estudiantes)
Universitario	Álgebra	Cuestionario Entrevista Registros de observación	Cuestionario Entrevista Registros de observación

Fuente: Diseño metodológico. 2015.

Los criterios de selección de estas unidades de estudios trabajadas como “casos”, se vinculan con las siguientes categorías e indicadores: estudiantes exitosos académicamente, con experiencias previas en los contenidos y voluntarios.

Diseñamos un cuestionario de 12 preguntas, realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las preguntas. A continuación mostraremos dos preguntas del cuestionario y algunas de las evidencias obtenidas.

Preguntas seleccionadas del cuestionario.

1.- Sea un subconjunto de los números IR, describa al conjunto C mediante una función proposicional. Realice un gráfico para C.

Una respuesta esperada en la descripción del conjunto C, es mediante los intervalos contados por la disyunción (v), lo que interpretamos como un tratamiento basal, pues aun no elabora una función proposicional independiente de este registro; supusimos que la realización de un gráfico en la recta real que represente al conjunto C, provocaría un cambio de registro, el que podría precipitar una lectura más general del conjunto, y crear, al regresar al registro algebraico, funciones proposicionales, por ejemplo en términos de desigualdades, que describan a C.

Otra intención de esta pregunta es propiciar un ambiente donde hay más de una proposición lógica que define al mismo conjunto. Lo que nos conduce a una problemática de congruencia dentro de la misma representación.

12.- Dada la siguiente expresión algebraica $B \cap (A \cup C^c)$ en teoría de conjuntos, realice una representación gráfica mediante un diagrama de Venn- Euler.

Una respuesta esperable corresponde a una representación gráfica como la de la figura 1. Por otra parte, desde la teoría de registros semióticos, el proceso involucra el cambio de registro del lenguaje algebraico al registro gráfico. Desde la perspectiva matemática los estudiantes deberán operar los conjuntos de manera combinada siendo capaces de identificar el conjunto solicitado.

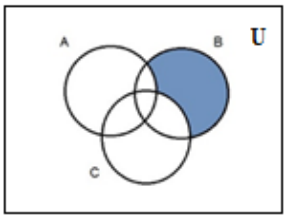


Figura1. Respuesta esperada.

Evidencias obtenidas en las entrevistas.

A continuación presentaremos un extracto de las producciones escritas por 3 estudiantes.

Estudiante E1 (caso 1), en las preguntas seleccionadas responde a la primera pregunta realizando la gráfica del intervalo, pero no construye la función proposicional pedida, como es posible apreciar en la figura1. Por otra parte no responde a la pregunta 12.

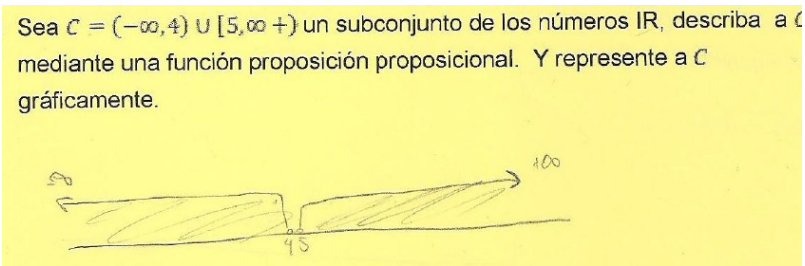


Figura 2. Respuesta de E1.

Una interpretación posible desde la teoría, es que a pesar de realizar un cambio de registro no interpreta la pregunta, ella requiere un tratamiento en el registro algebraico, presumiblemente se enfrenta a una falta de coherencia entre registros.

Estudiante E14 (caso 2), es una evidencia de dificultades en la conversión de registros, al mismo tiempo que no realiza tratamientos dentro de un mismo registro.

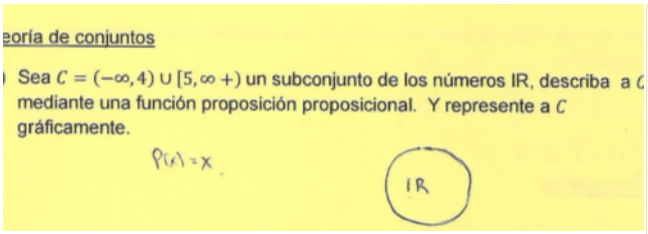


Figura3. Respuesta de E14 a la pregunta 1

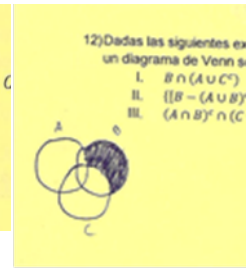


Figura4. Representación gráfica del conjunto pedido.

En este caso no mostro tratamientos ni conversiones para dar respuesta a la primera pregunta. A pesar de ello responde correctamente a la pregunta 12, realiza la conversión de registro esperada.

Estudiante E15 (caso 1), al igual que la mayoría de los estudiantes de ambos casos, realizan un cambio de registro como se aprecia en la figura 5 para dar respuesta a la pregunta, el que no es suficiente para responder; es prueba que el registro grafico por sí solo no es suficiente para lograr la comprensión de un concepto.

Por otra parte el tratamiento pedido no es logrado, pareciera que el tratamiento algebraico es dificultoso para los estudiantes en ambos casos.

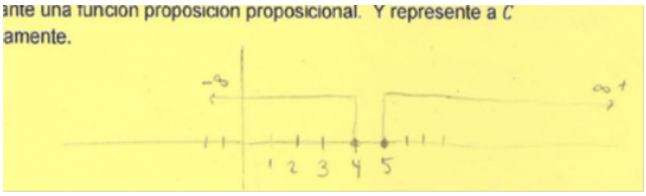


Figura 5. Dibujo de los intervalos que representan al conjunto C.

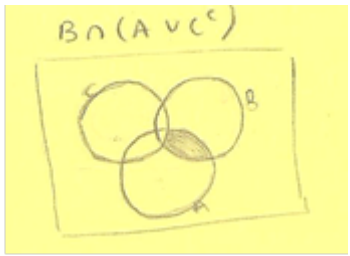


Figura 6. Respuesta a la pregunta 12.

La respuesta a la pregunta 12 es una evidencia de dificultades en el álgebra de conjuntos, pues el diagrama realizado no corresponde a la expresión algebraica solicitada. Podría pensarse que al realizar un diagrama el estudiante cambia de registro, pero no hay concordancia entre la expresión algebraica y la figura realizada.

Algunas conclusiones

El estudio que hasta ahora hemos realizado da cuenta de algunas dificultades que los estudiantes de los dos casos tienen en la comprensión de conceptos relacionados a la teoría de conjuntos; temas como la intersección, la unión y complemento de conjuntos son una tarea pendiente; desde la perspectiva didáctica, el marco teórico permitió evidenciar dificultades en la conversión entre registros, por ejemplo entre el registro gráfico y el algebraico. Es prematuro dar como un resultado en este estudio que existe direccionalidad entre la conversión de registros, pero las evidencias

actuales dan cuenta que al parecer esto ocurre, esto es la conversión exitosa del registro algebraico al gráfico, más que del registro grafico al algebraico.

Por otra parte, hemos obtenido evidencias que el tratamiento dentro de un mismo registro no se logra, en particular en el registro algebraico; cuyas implicancias repercutirían en otras áreas de la matemática, por ejemplo en resolución de ecuaciones e inecuaciones.

Continuaremos la investigación con el objetivo de formular una propuesta didáctica que esperamos sea beneficiosa para el aprendizaje en los estudiantes.

Referencias.

Arnal, J.; Del Rincón, D.; Latorre, A. (1992). "La investigación colaborativa". En J. Arnal; D. Del Rincón y A. Latorre: Investigación Educativa. Fundamentos y Metodología. Barcelona, Labor.

Arrieche, M. (2000). Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros: Un estudio exploratorio de aspectos epistemológicos, curriculares y cognitivos. Trabajo de Investigación del Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Arrieche, M. (2002). La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes en el estudio de una teoría matemática. Tesis doctoral. Departamento deDidáctica de la matemática de la Universidad de Granada.

Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española; Vol. 9.1, PP. 143-168. Madrid, RSME.

Fischbein, E. y Baltsan, M. (1999). The mathematical concept of set and the collection model. Educational Studies in Mathematics, 37:1-22.

Linchevski, L. y Vinner, S. (1988). The naïve concept of sets in elementary teachers. Proceedings of the 12th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 11: 471-78.

Zazkis, R. y Gunn, Ch. (1997). Sets, subsets, and the empty set: Students' constructions and

mathematical conventions. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 16 (1): 133-169.

DESARROLLO E IMPLEMENTACION DE UN CENTRO DE APOYO A LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA: UNA EXPERIENCIA EN EDUCACIÓN SUPERIOR

Cuesta, C[a], Perez-Vera, I[b], Chahuan, J[c]
[a,b,c]Universidad de las Américas;
ccuesta@udla.cl[a], ivan.perez@udla.cl[b], jchahuan@udla.cl[c]

Resumen

Este reporte presenta el desarrollo e implementación de un centro de apoyo a la enseñanza de la matemática (CAM) en el Campus de Providencia de la Universidad de las Américas (UDLA). Se presentan los antecedentes que justifican la creación del CAM, estableciendo los objetivos a cumplir en esta fase, cuyo eje central es la implementación y el posicionamiento del CAM en el Campus Providencia. Se analiza el cumplimiento de los objetivos planteados y se estudia desde el registro de asistencia el impacto del Centro de apoyo a la enseñanza de la matemática en los estudiantes que cursan asignaturas del área matemática.

Palabras clave: *Matemática, cooperativismo, centro, aprendizaje, acompañamiento.*

ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La matemática existe desde que existe el ser humano. Prácticamente todo ser humano es un matemático en algún sentido. Desde los que utilizan la matemática hasta los que la crean. Alberto González (1977) señala que en las sociedades primitivas los hombres necesitan contar objetos en sus labores de recolección y caza. Para nadie en esta época es novedad que los estudiantes que egresan de cuarto medio e ingresan a alguna institución de educación superior, traen varios vacíos en el área de la matemática básica; tales como números, álgebra y datos y azar. Según Martin Socas (2007) los autores consideran que los errores no tienen un carácter accidental sino que surgen por las estrategias y reglas personales que los alumnos emplean en la resolución de la situación problemática y son consecuencia de experiencias anteriores en Matemáticas.Tampoco es novedad que la matemática debe ser una de las áreas del conocimiento menos populares en el común de los estudiantes, en la que suele presentarse un gran temor por diferentes factores; tales como, la familia, la comunidad, y sobre todo la escuela, en cada uno de ellos se provoca el miedo a la asignatura.

"Es el temor a las matemáticas –más que el agrado por las mismas- el que presenta un mayor valor. Mientras el placer que supone trabajar la asignatura se sitúa en el lugar más bajo. Por su parte, la importancia que se otorga a la asignatura obtiene un valor intermedio. Por tanto la relación más estrecha con la nota final se da con el miedo o el desagrado que experimentan los alumnos hacia la materia" (Quiles, 1993). Este distanciamiento que se genera entre el estudiante y la Matemática, tiene un solo origen: el conflictivo y traumático proceso de la enseñanza de ésta al que varias generaciones de alumnos se vieron sometidos. Es una asignatura que se le mira con respeto y un poco de temor.

"Como es frecuente escuchar hoy en día, la tendencia es cada vez mayor a pasar de un aprendizaje mayormente centrado en el docente (concepto tradicional del proceso de enseñanza aprendizaje), hacia uno centrado en el estudiante, lo cual implica un cambio en los roles de estudiantes y docentes. Así pues, el rol del docente dejará de ser únicamente el de transmisor de conocimientos para convertirse en un facilitador y orientador del conocimiento y en un participante del proceso de aprendizaje junto con el estudiante." (Socarras, 2008)

Ante este escenario se propone por parte del Director Académico en conjunto con los Académicos Jornada Completa del área Matemática del campus Providencia, establecer un lugar físico exclusivo, al cual pudieran recurrir todos los estudiantes que están cursando asignaturas de Matemática, Física y Estadística o bien asignaturas que impliquen el uso de matemáticas (Economía, Contabilidad, entre otros), en el cual puedan resolver consultas específicas y ejercicios, además de encontrar un ambiente propicio para facilitar el estudio de las matemáticas, siempre contando con la posibilidad de acceder a un académico o ayudante para resolver sus inquietudes.

OBJETIVOS

- General:Generar un espacio de apoyo permanente para el aprendizaje a los estudiantes en las asignaturas de Matemática, Física y Estadística o bien que se encuentren cursando asignaturas que impliquen el uso de matemáticas.

- Específico:

1. Participación activa del alumno en la construcción de su propio aprendizaje.
2. Interacción entre el alumno, compañeros y profesores de asignatura.
3. Ofrecer una atención personalizada al estudiante.
4. Generar comunidades de aprendizaje que permitieran resolver y responder problemas.
5. Permitir el desarrollo cognitivo del estudiante.
6. Realizar una retroalimentación inmediata y efectiva; de tal manera que el estudiante pueda aprender de sus errores.
7. Disponer de material de apoyo (Guías, trabajos) para que los estudiantes puedan trabajar de forma independiente.

Algunos elementos teóricos

Se establece en base a la mirada constructivista la necesidad de mediar entre estudiantes y aprendizajes, formando un triángulo con el profesor quien debe asumir el rol de puente entre ambas entidades.

*"*De esta manera podríamos decir que la actividad constructiva del alumno es un elemento mediador entre la enseñanza del profesor y los aprendizajes que llevan a cabo. La influencia educativa que ejerce el profesor a través de la enseñanza es un elemento mediador entre la actividad constructiva de los alumnos y los significados que vehiculan los contenidos escolares. Por último, la naturaleza y características de los contenidos mediatizan la actividad que el profesor y los alumnos despliegan en torno a ellos" (2011)

Como complemento a las oportunidades que presentan las comunidades de aprendizaje, Slavin y Johnson (1999) definen el aprendizaje cooperativo como una serie de métodos de enseñanza en los que los alumnos trabajan en grupos pequeños para ayudarse a aprender entre ellos mismos.

"En las aulas cooperativas se espera que los alumnos se ayuden, que discutan con sus compañeros, que evalúen lo que saben los demás y los ayuden a superar sus problemas de comprensión. El trabajo cooperativo raramente sustituye la enseñanza del docente, pero reemplazas, el trabajo, el estudio y la ejercitación individuales. Cuando los alumnos están organizados de la manera adecuada en grupos cooperativos, trabajan con sus compañeros y se aseguran de que todos los demás lleguen a dominar lo que están aprendiendo" (Slavin & Johnson, 1999)

Ante estos antecedentes Generar un espacio de apoyo permanente para el aprendizaje a los estudiantes en las asignaturas de Matemática, Física y Estadística o bien que se encuentren cursando asignaturas que impliquen el uso de matemáticas debe cumplir con ciertas características que faciliten una forma de aprender que responda a las necesidades que no son cubiertas en el aula y que son determinantes al momento de trazar un puente entre el estudiante y lo que se espera que este aprenda.

Metodología:

Se abordará una metodología mixta, que permita dar una mirada tanto cuantitativa como cualitativa.La implementación exploratoria, aborda un análisis comparativo entre asistentes al CAM (en base registro de asistencia) en contraste con el total de estudiantes que cursan las mismas asignaturas en el Campus Providencia.Sandín(2003)justifica el estudio de casos principalmente porque el tipo de análisis apunta al conocimiento de formas de pensamiento, cuestión que tiene un carácter individual y comprensivo del que se espera generar teoría. Esta metodología, presupone que el conocimiento es esencialmente un producto social que se extiende o cambia continuamente de la misma manera que cambia la realidad concreta y no está separado de la práctica.Observación definida por Bravo (1984) como la inspección y estudio realizado por el investigador, mediante el empleo de sus propios sentidos, con o sin ayuda de aparatos técnicos, de las cosas o hechos de interés social, tal como son o tienen lugar espontáneamente. Van Dalen y Meyer (1981) consideran que la observación juega un papel muy importante en toda investigación porque le proporciona uno de sus elementos fundamentales; los hechos. Sobre el modelo de investigación cuantitativo, según Pita y Pértegas (2002) se trata de determinar la fuerza de asociación o correlación entre variables, la generalización y objetivación de los resultados a través de una muestra para hacer inferencia a una población de la cual toda muestra procede. Tras el estudio de la asociación o correlación pretende, a su vez, hacer inferencia causal que explique por qué las cosas suceden o no de una forma determinada.

Resultados.

Desde la asistencia de los estudiantes, registrada en el período entre el tres de septiembre del 2014 y el primero de diciembrees posible señalar lo siguiente:

Al CAM asistieron un total de 311 estudiantes, correspondiente al 23% de estudiantes vigentes durante el segundo semestre 2014 (de un total de 1368 estudiantes vigentes), que cursarony finalizaron asignaturas de Matemática, Física y Estadística en el Campus Providencia, los que generaron un total de 594 visitas, registrando en promedio dos visitas aproximadamente por estudiante. La asistencia distribuida por carrera es la que se presenta a continuación, siendo la

carrera de Pedagogía en Matemática y Estadística la con mayor número de visitas (247 visitas) y la carrera de Bioingeniería la de menor asistencia (2). Destacamos de igual forma la asistencia de los estudiantes de Bioingeniería al CAM, ya que su asignatura no es de Matemática, Física o Estadística, si no que asisten a complementar los conocimientos requeridos por la asignatura de Microeconomía (AEA214) una asignatura "no matemática" para resolver una actividad propuesta por sus académicos.La asistencia distribuida por asignatura refleja sus mayores alcances en las asignaturas de Calculo I (42 estudiantes) y Algebra I (67 estudiantes), siendo las más bajas Matemática general y Microeconomía con solo dos estudiantes cada una. Un estudiante no señala asignatura. Se presenta el cuadro general de asistencia de estudiantes por asignatura.En relación al régimen de estudios al que pertenecen los estudiantes que visitan el CAM se observa una alta concentración de estudiantes de Pregrado Tradicional Diurno (PTD) en comparación con el régimen Executive (EXE) y Pregrado Tradicional Vespertino (PTV). Se adjunta cuadro.Es necesario recordar que el presente análisis es realizado en base a las planillas de control de asistencia (ver Figura 3 3), las que evidencian una bajo porcentaje de estudiantes del régimen Executive y Pregrado Tradicional Vespertino, lo que contrasta con lo que indican los docentes del CAM, manifestando un gran número de asistentes de las modalidades señaladas, generando la interrogante de sobre la rigurosidad del control de asistencia en estas modalidades.De los estudiantes vigentes durante el segundo semestre 2014, 1368alumnos cursarony finalizaron asignaturas de Matemática, Física y Estadística, de los cuales el porcentaje de aprobación y reprobación son los que se presentan en el siguiente cuadro.

Tabla2: Aprobación estudiantes vigentes

Estudiante Vigente	Situación Final Asignatura
Aprobado	66,6 %
Reprobado	33,4 %

Del total de asistentes al CAM durante el periodo antes mencionado (311 estudiantes) la relación aprobado versus reprobado es la que se presenta en el siguiente cuadro.

Tabla3: Aprobación estudiantes vigentes

Estudiante Asistente CAM	Situación Final Asignatura
Aprobado	76,7 %
Reprobado	23,3 %

Es posible observar una diferencia de aprobación de un 10% aproximadamente a favor de los estudiantes asistentes al CAM.

Conclusiones y proyecciones.

En base a los objetivos planteados podemos concluir que la primera vez que los estudiantes asisten al CAM asumen que los profesores que permanecen en el en centrotienen la obligación de pasar la materia y desarrollar todos los ejercicios de las guía o talleres; es decir pensaban que en este lugar era para recuperar a las clases no asistidas, además de resolver tareas y talleres que los profesores de cátedras daban como evaluaciones. Sin embargo, una vez explicados los objetivos de la implementación del CAM los estudiantes entienden el funcionamiento del centro y comienzan a

utilizar el espacio. Asisten a resolver sus ejercicios, tareas y talleres solos (forma individual o grupal), generando la oportunidad de que cada uno identifique su propia forma y ritmo de aprendizaje, asumiendo con mayor responsabilidad el logro de objetivos y el aprendizaje de contenidos. Se observa como comienzan a construir su propio conocimiento en base a los ya existentes, encontrando un espacio que entrega diversas oportunidades y no tan solo información. No hay que olvidar que el objetivo del proceso de aprendizaje es que el estudiante busque crear representaciones de conocimiento significativas y coherentes para él y que de esa forma la calidad del aprendizaje aumenta considerablemente. El equipo de docentes del CAM comprende la dificultad de generar aprendizaje, muchas veces las expectativas de lo que se propone para la sala de clases no siempre se cumple, por lo que el CAM se presenta como una poderosa oportunidad de incentivar el aprendizaje de los estudiantes, liberando a los docentes del formato tradicional de clases en el que muchas veces la memorización es la metodología principal. Rápidamente los estudiantes comprenden que para asistir al CAM deben estudiar los contenidos de forma previa, y que el apoyo para resolver guías, tareas, talleres, solo se generara posterior a que intentasen resolver un problema. Los estudiantes que comienzan a asistir en forma periódica lo hacen con otra disposición. Llegan al CAM y se sientan en silencio, sacan su material de estudio y comienzan a trabajar. Generalmente trabajaban con otros alumnos de la misma asignatura (no necesariamente compañeros de curso o carrera) y cuando después de varios intentos personales o grupales no era posible resolver un problema, recién solicitaban el apoyo y asesoría de un profesor para que los guiara en la resolución, o bien explicara la forma de resolver el problema. En esa explicación se les daba a conocer cuál(es) eran los errores que habían cometido en la resolución del problema, cuáles eran los contenidos que ellos tenían que saber para poder resolverlo. Es decir; en ese momento los alumnos reciben una retroalimentación interactiva, inmediata y efectiva; la cual puede ayudar a refinar sus habilidades de pensar en forma crítica y creativamente.Proyectamos realizar un seguimiento por medio de un estudio de casos, que implique la realización de entrevistas a estudiantes y docentes, lo que nos permita evaluar el aporte del CAM en el rendimiento de los estudiantes. Se hace manifiesto la necesidad de generar un mayor control de la asistencia al CAM, con el fin de generar una mejor y mayor contrastación de datos, e identificar las fortalezas y debilidades de los estudiantes, así como del potencial y las oportunidades que genera el Centro de Aprendizaje Matemático.

Bibliografía

Bravo, R. S. (1984). Ciencias sociales: epistemología, lógica y metodología: teoría y ejercicios.

Gonzalez, A. (1977). HISTORIA DE LA MATEMATICA. Boletin de Matemáticas, XI, 243–266.

Palomar, J. D., & García, J. R. F. (2010). Comunidades de Aprendizaje: un proyecto de transformación social y educativa. Revista Interuniversitaria de Formación Del Profesorado, (67), 19–30.

Pita Fernández, S., & Pértegas Díaz, S. (2002). Investigación cuantitativa y cualitativa. Cad Aten Primaria, 9, 76–8.

Quiles, M. N. (1993). Actitudes matemáticas y rendimiento escolar. Comunicación, Lenguaje Y Educación, 5(18), 115–125.

Sandín, M. P. (2003). Investigación cualitativa en educación: fundamentos y tradiciones. McGraw-Hill Interamericana de España.

Serrano, & Pons. (2011). El Constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 13(1), 1–27.

Slavin, R. E., & Johnson, R. T. (1999). Aprendizaje cooperativo: teoría, investigación y práctica. Aique Buenos Aires.

Socarras, J. M. R. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. Revista Iberoamericana de Educación, 47(3), 1.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. Universidad de Laguna.

Van Dalen, D., & Meyer, W. (1981). Manual de técnicas de la investigación social. Barcelona: Paidós.

PENSAMIENTO FUNCIONAL EN EDADES TEMPRANAS. UN ESTUDIO EXPLORATORIO.

Fuentes Mardones, Sandra[a]

[a]Colegio Cardenal Raúl Silva Henríquez de Paillaco, Universidad San Sebastian; sandrafuentesm@gmail.com

Resumen

Este trabajo es parte de una investigación más amplia sobre pensamiento funcional en primeras edades realizado en España. Presentaré parte de los resultados obtenidos en un estudio exploratorio realizado con alumnos de primero de primaria (6 años). Mostraré los sistemas de representación y las estrategias que utilizaron para resolver la tarea planteada, la cual involucra la relación funcional f(x)=3x. Los resultados que se obtuvieron de esta investigación evidencian una amplia gama de relaciones funcionales que son establecidas por los alumnos en la resolución de la tarea, estas relaciones funcionales pueden ser adecuadas o no al tipo de tarea encomendada, analizaré la utilización de los diferentes sistemas de representación a los que hacen mención, destacándose el predominiodel sistema de representación pictórico.

Palabras clave: *Pensamiento funcional, relaciones funcionales, álgebray patrones, sistemas de representación.*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo extrae parte de la investigación realizada para la obtención del título de Máster en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada y sienta las bases para el posterior trabajo de Doctorado.

La idea de esta investigación surge por el cambio en las bases curriculares de matemática en Chile, éstas plantean el eje de álgebra y patrones desde 1° básico hasta 4° medio, pero, si como docente de enseñanza media encuentro dificultades para enseñar álgebra en estos niveles, ¿Podrán los alumnos establecer relaciones funcionales desde tan pequeños?

Destacamos que en Chile es parte del currículum trabajar con estos conceptos desde 1° básico a 4° medio, que el NCTM (2000) sugiere a todas las naciones que así se haga, he incluso lo propone desde la educación preescolar y que países como España aún no incorporan la algebrización del currículum de matemática en Educación Primaria.

El objetivo principal de esta investigación entonces, es describir el pensamiento funcional de alumnos de 6 a 7 años que cursan el año 2013-2014 primero de educación primaria en la ciudad de Granada en España.

Para lograr este objetivo plateamos a los alumnos una situación cotidiana como lo es una fiesta de cumpleaños, la cual se detalla en el capítulo de análisis.

ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

En la última década ha sido motivo de investigación el cómo poder enseñar a los alumnos álgebra, como respuesta surge en Estados Unidos una nueva propuesta para lograr este objetivo el *early algebra*, dentro de sus corrientes la más utilizada es el paso desde la aritmética al álgebra, nosotros nos enfocaremos en una corriente del *early algebra* que recientemente se está estudiando, el enfoque funcional, que consiste en establecer relaciones funcionales entre las variables en estudio.

Para situarnos en el estado de la cuestión, haremos un recorrido de las principales investigaciones actuales de esta corriente, cabe destacar que la mayor parte de estas investigaciones son realizadas en EEUU y Canadá, son escasas las investigaciones en España y Latinoamérica sobre este tema, y sobre todo con alumnos tan pequeños, de ahí lo innovador de esta investigación.

El pensamiento funcional es una actividad cognitiva que se centra en el establecer relaciones entre dos o más cantidades que varían (Smith, 2008), este proceso utiliza las funciones como fundamento principal.

A través del pensamiento funcional, se busca que los niños sean capaces de detectar similitudes, diferencias, repetición y otros aspectos de las regularidades, así como realizar operaciones aritméticas para generalizar, partiendo de casos particulares y viceversa.

Podemos identificar el pensamiento funcional cuando el niño hace explícita la relación entre las variables o entre los conjuntos con los que está trabajando y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia la generalización de la expresión, encontrando una regla que describa la relación funcional entre esas variables (Fuentes, S. 2014).

Schliemann, Carraher y Brizuela, (2012), en su investigación llegan a la conclusión que la introducción a alumnos durante 3 años en el pensamiento funcional, niños entre 8 y 11 años, les ayudó en el álgebra que estudiaban en educación secundaria.

En la investigación que llevaron a cabo Blanton y Kaput (2011) se evidencia la importancia que tiene el trabajo con el pensamiento funcional en los primeros niveles de escolarización, ya que el establecer relaciones funcionales nace intuitivamente en estos niveles.

En España la investigación que se enfoca en establecer relaciones funcionales en una tarea determinada es la de Merino (2012), quien trabaja con niños de 8 años generalizando una tarea, estableciendo los patrones que en ella se encuentran.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de carácter exploratorio y descriptivo, (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Exploratorio, porque las investigaciones que hay en torno a este tema son recientes y escasas. Descriptivo porque el análisis de los datos pretende describir los procesos de los alumnos en torno a su pensamiento funcional.Esta actividad no es una intervención de aula, solo recoge evidencia a través de la prueba escrita y de las entrevistas.

Se aplicó la teoría fundamentada de Corbin y Strauss (1990), para establecer las categorías necesarias para el análisis de la información recogida, ya que las categorías de análisis surgen de la información recogida en las pruebas escritas.

Se aplicó una prueba escrita a un grupo de 32 alumnos de primero de primaria (6-7 años) el año académico 2013-2014, en España.

Para complementar la información se aplicó una entrevista a 4 alumnos que dieron respuestas que representaban a la mayoría de sus compañeros o respuestas atípicas y queríamos saber el porqué. Las cuales no serán abordadas en esta comunicación.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Pasaré a describir la tarea que analizaremos en esta oportunidad.

Tarea 2

Relación entre número de niños y número de paletas de dulce (piruletas) que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños. Para la tarea 2, la función que determina esta relación es f(x)=3x. Se les da escrita en el folio la relación 1 niño-3 paletas (piruletas) y ante el gran grupo se hace explícita la relación 2 niños-6 paletas (piruletas), se les pregunta por los siguientes casos particulares, 3, 4, 5, 8,

10 y 20 niños y como explicarían a la mamá la compra de paletas (piruletas) de haber 100 invitados a la fiesta. La figura 1 muestra el inicio de la tarea 2, apartados A y B.

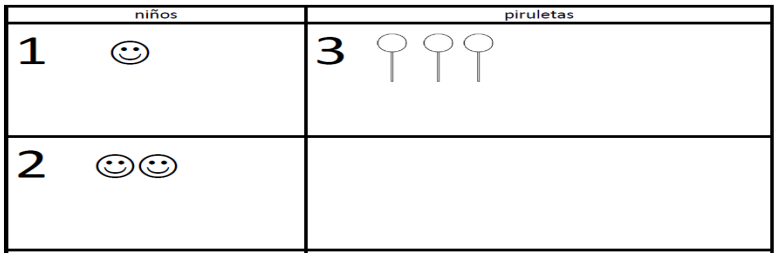


Figura 1. Apartados A y B. Tarea 2

Analizaremos si el alumno en cada uno de los apartados:Contesto o no este apartado.Si lo hizo correcta o erróneamente.El sistema de representación que utilizó: pictórico, simbólico o verbal.La estrategia que utilizó, de esta investigación salió una categorización de estrategias propias que puede ser usada en grupos e investigaciones similares.

Se puede apreciar en la tabla 1, que la mayor parte de los alumnos contestaron a cada uno de los apartados pedidos, pero, que a medida que los valores fueron más grandes y no consecutivos las respuestas correctas disminuyen drásticamente, se puede ver también que el sistema de representación más usado fue el pictórico el cual se complementa en algunos alumnos con el simbólico, esto debido a que los alumnos son lectores y escritores principiantes.

En la tabla 2 se aprecia la gran variedad de estrategias o relaciones que los alumnos establecieron, algunas de forma correcta y otras erróneas, es destacable que cuando los números son pequeños establecen la relación correcta 1 a 3 (figura 1), pero que a medida que los números crecen o no son consecutivos cambian a la relación 1 a 1(figura 2), o crean grupos de 3 elementos (figura 3), tuvimos alumnos que continuaron con la secuencia encontrada correctamente pero al no ser números consecutivos en vez de 8 invitados consideraban el siguiente de 5 que era el número anteriormente pedido (figura 4), o que establecieron la relación n+3 (figura 5)

Tabla 1. Respuestas y sistemas de representación en tarea 2

			Sistema de representación		
Apartado	Responden	Responden correctamente	Pictórico	Simbólico	Verbal
A	32	13	29	8	0
B	32	12	29	8	0
C	31	7	28	7	2
D	30	2	25	8	1
E	30	3	26	8	0
F	28	1	24	6	1
G	22	0	1	11	20

A continuación se presentan los diferentes tipos de estrategias que los alumnos utilizan al tratar de relacionar las variables número de niños y paletas de dulces, en cada uno de los apartados de esta tarea.

Tabla 2. Estrategias en tarea 2

Estrategias

Apart.	Conteo de dibujos					Respuesta directa					AG			
	R 1-3	R 1-1	R n+3	SR	3	R 1-3	R 1-1	R n+3	SR	3	TC	AI	CNNR	OE
A	10	7	0	1	6	1	0	0	2	0	2	0	1	2
B	8	8	0	0	6	2	0	0	2	0	2	0	2	2
C	4	16	0	1	1	1	0	0	1	1	2	0	2	2
D	1	14	0	2	1	0	0	0	2	2	1	0	5	2
E	2	15	1	2	0	0	0	1	1	2	1	1	2	2
F	1	11	1	5	0	0	1	1	2	2	0	0	3	1
G	0	0	0	1	0	0	12	2	5	0	0	0	0	2

Nota. R 1-3 = relación 1 a 3; R 1-1 = relación 1 a 3; R n+3 = relación n+3; SR = sin relación; 3 = escribe solo 3; AG = asociación en grupos; TC = todos correctos; AI = algunos incorrectos; CNNR = cambia el número de niños de la relación; OE = otra estrategia.

Algunos ejemplos

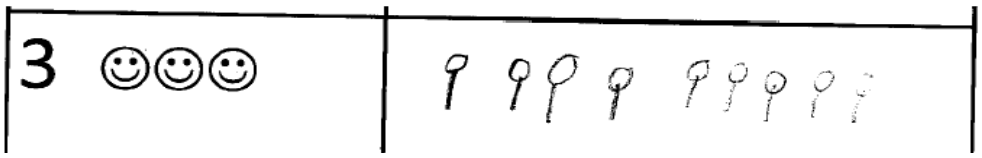


Figura 1. Establece la relación 1 a 3.

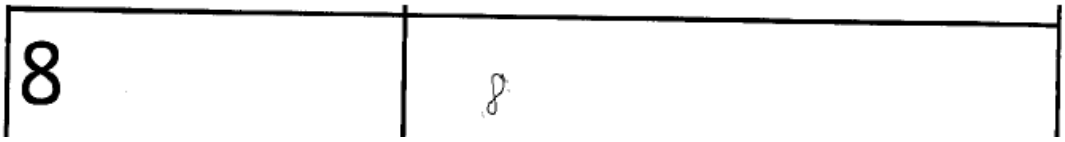


Figura 2. Establece la relación 1 a 1.

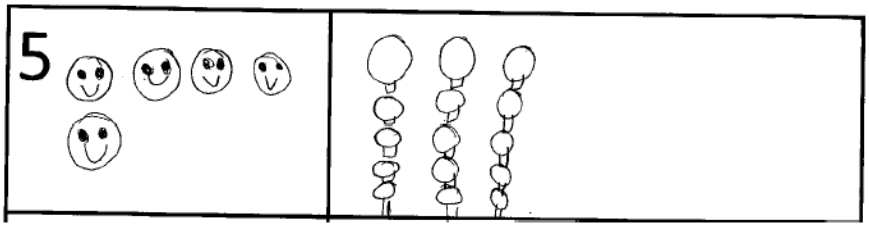


Figura 3. Establece grupos con todos los elementos correctos.

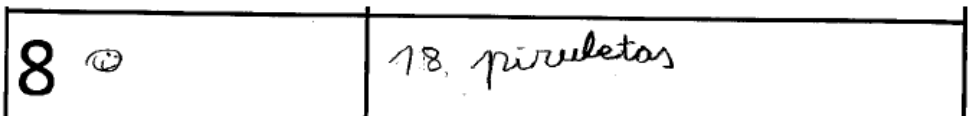


Figura 4. Cambia el número de niños de la relación

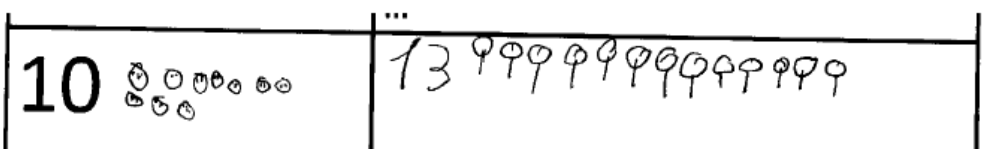


Figura 5. Relación n+3

CONCLUSIONES

Nuestro objetivo de investigación era describir las relaciones funcionales que los alumnos de primero de primaria podían establecer frente a una tarea determinada, con la información que recogimos observamos las relaciones funcionales que crearon entre las variables propuestas, es decir, nuestro objetivo de investigación fue cumplido.

Considerando la edad y que investigaciones similares no se han realizado en el mundo de habla hispana, esta investigación fue enriquecedora para la rama del *early algebra*, pensamiento funcional. Uno de los principales logros de esta investigación es una categorización específica para este tipo de tarea y edad.

Nuestros resultados son similares a los encontrados por los investigadores norteamericanos, ahora queda trabajar con alumnos chilenos, analizar y comparar los resultados con esta investigación que queda de precedente.

Referencias

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into álgebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), Early algebraization (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Springer-Verlag

Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. QualitativeSociology, 13(1). 3-21.

Fuentes, S. (2014). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada, España. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6263/

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). Metodología de la investigación, 5° edición. México, DF: McGraw Hill.

Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5º de primaria en una tarea de generalización. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada, España. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1926/

National Council of Teachers of Mathematics (2000).Principles and standards for school mathematics.Reston, VA: Autor.

Schliemann, A. Carraher, D. Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. Enseignement de l'algébre élémentaire, volume especial, Recherches en Didactique des Mathématiques, 107-122

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing funcions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.

DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS EN EL AULA

Contreras, C[a]. González, D[b]. Rodríguez, P.[c]

Universidad Alberto Hurtado;
ccontrerasbravo@gmail.com, gonzalezchavezdaniela@gmail.com, prodriguez@miucsh.cl

Resumen

La presente investigación se enmarca en una metodología de estudio de caso,la cual tiene como objetivo contrastar los Espacios de Trabajo Matemático Geométrico (ETMg) idóneo y personales que se evidencian previamente a una experiencia de demostración geométrica realizada por estudiantes de segundo año de enseñanza media.

Se entiende por ETMg como el ambiente organizado por y para el geómetra (Kuzniak, 2011).

El ETMg Idóneo se describe en términos didácticos, es el utilizado por el profesor, mientras que el ETMg personal puede ser utilizado por el estudiante o el profesor, de tal manera que estos reflexionen en torno a los conocimientos aprendidos y puestos en práctica.

El análisis de las producciones permite, por un lado, dejar en evidencia los tránsitos que emergen a partir de la actividad de demostración y, por otro, validar y mejorar la tarea propuesta.

Palabras clave: *demostración geométrica, espacio de trabajo matemático geométrico.*

GRUPO DE ESTUDIO

Los participantes de la puesta en escena del diseño son seis estudiantes de Segundo Año Medio, de un colegio particular subvencionado en la ciudad de Santiago de Chile. Ellos han desarrollaron el reactivo sin la intervención del docente a cargo.

PARADIGMAS GEOMÉTRICOS Y ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO GEOMÉTRICO (ETMG)

El análisis realizado se basa y sustenta en el enfoque de Paradigmas Geométricos y ETMg, el cual postula tres tipos de geometrías o Paradigmas Geométricos que residen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría: Geometría Natural (GI), Geometría Axiomática Natural (GII) y Geometría Axiomática Formal (GIII). Los geómetras transitan desde un paradigma a otro a través de la evolución del aprendizaje de la geometría, es decir, no es un proceso natural o intrínseco de las personas, por el contrario éste debe provocarse para surgir. (Kuzniak, 2011)

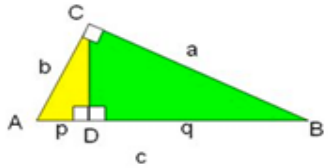
El ETMg corresponde a la situación de reflexión que emerge de la interacción entre el individuo y el problema geométrico y varía respecto del paradigma dominante. Se evidencian distintos ETMg, del tipo referencial (matemático), idóneo (didáctico, utilizado por el profesor) y personal (realizado por el geómetra), a su vez se conforman de dos planos: el cognitivo y el epistemológico. En cada plano se evidencian tres componentes: en el cognitivo están presentes los planos de visualización (PV), construcción (PC) y prueba (PP), y en el epistemológico: representante (PR), artefactos (PA) y referencial (Pref).

EXPERIENCIA DE DEMOSTRACIÓN

Se propone a los estudiantes participar en la puesta en escena de un diseño de aprendizaje basado en la demostración geométrica del Teorema de Euclides. La experiencia se realizó en una sesión de 90 minutos sin intervención del profesor.

La actividad propuesta es la siguiente:

Dado que $\Delta ADC \sim \Delta BDC \sim \Delta ACB$, demostrar $CD^2 = AD \cdot BD$



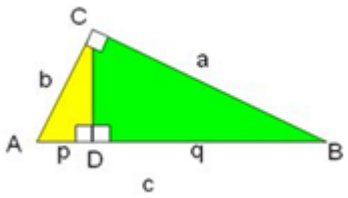
Para recoger las evidencias de sus producciones verbales y escritas se graba audio y video así como se recogen las producciones con papel y lápiz.

ANÁLISIS A PRIORI

El paradigma geométrico privilegiado para el ETMG idóneo es GII ya que la figura geométrica que se presenta en la tarea deja de ser un dibujo es aceptada y concebida como un objeto geométrico descrito por una propiedad, en este caso se presenta el triángulo rectángulo ABC y su altura $\overline{CD}$.

Demostración idónea

Dado que $\Delta ADC \sim \Delta BDC \sim \Delta ACB$, demostrar $CD^2 = AD \cdot BD$

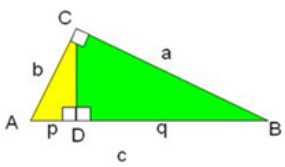


$\Delta CBD \sim \Delta ACD \quad \Rightarrow \quad \frac{CD}{AD} = \frac{DB}{DC}$

$\Rightarrow \quad \frac{h}{q} = \frac{p}{h}$

$\Rightarrow \; h^2 = p \cdot q \qquad \therefore CD^2 = AD \cdot BD$

Demostración personal 1



$AD=9$

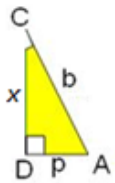
$DB=2 \cdot 9=18$

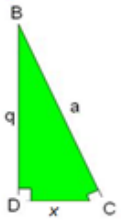
$CD^2=AD \cdot DB$

$CD^2= 9 \cdot 18$

$CD^2= 162$

Demostración ETMG Personal 2





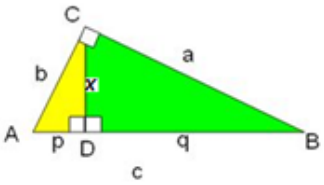
De ΔDAC se tiene que:

$$b^2 = p^2 + x^2$$

De ΔDCB se tiene que:

$$x^2 + q^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow q^2 = a^2 - x^2$$



De ΔABC se tiene que:

$$b^2 + a^2 = (p+q)^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + a^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

Reemplazando con resultados anteriores:

$$\Leftrightarrow (p^2 + x^2) + a^2 = p^2 + 2pq + (a^2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow p^2 + x^2 + a^2 = p^2 + 2pq + a^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 = p^2 - p^2 + 2pq + a^2 - a^2$$

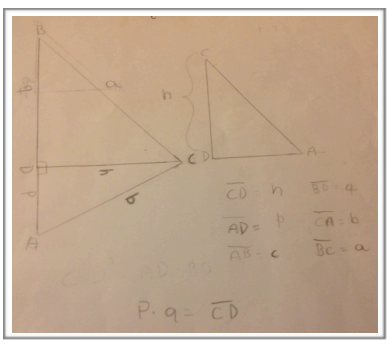
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 2pq$$

$$\Leftrightarrow x^2 = pq \qquad \therefore CD^2 = AD \cdot DB$$

ANÁLISIS A POSTERIORI

El análisis surge a partir de las textualidades de los estudiantes que han realizado la tarea, éstas darán cuenta de ciertas tendencias en las acciones a seguir en el ETMg personal de cada uno lo que permite realizar una agrupación.

De acuerdo al contraste realizado se evidencia que la mayoría de los geómetras privilegia el paradigma geométrico G2 vislumbrando la comprensión de las propiedades del objeto de la tarea y la utilización de definiciones (teoremas) para la validación de esta, lo que deja de manifiesto que los estudiantes se acercaron considerablemente al ETMg idóneo.



A continuación se presentan las textualidades:

Geómetra 1

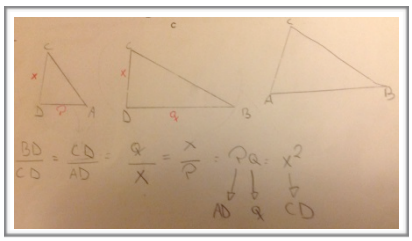
El paradigma geométrico privilegiado es G2/g1, dado que el objeto geométrico es considerado como una figura geométrica con propiedades y características. En este caso un triángulo rectángulo, con una altura y segmentos determinados, se puede observar ya que, el geómetra al realizar transformaciones respeta

características, tales como: vértices, lados y ángulos. Sin embargo, no se observa instrumentalización ni validación de la tarea.

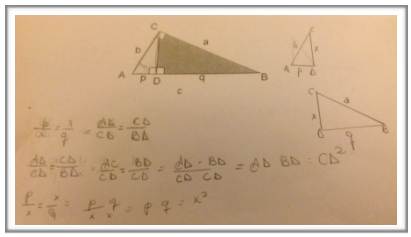
La acción del geómetra comienza en el plano cognitivo, específicamente en la visualización (PV) que realiza sobre la figura entregada en la tarea (triángulo rectángulo), la acción sobre la figura es la representación de dos triángulos rectángulos que componen el triángulo inicial a través de un proceso no-icónico del tipo constructor, en este proceso se activa la GS.

No se evidencia un tránsito hacia la génesis instrumental ni la génesis discursiva, dado que el geómetra se centra en describir los elementos del objeto a través de distintos registros.

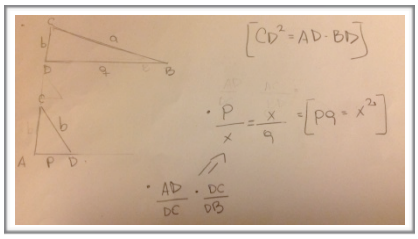
Geómetra 2, 3 y 5



Geómetra 1



Geómetra 2



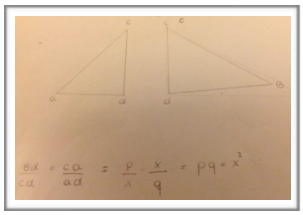
Geómetra 3

Los geómetras 2 y 3 presentan rasgos de ETMg Idóneo tales como; paradigma, razonamiento de validación y génesis instrumental. En cuanto a la circulación se evidencian las siguientes diferencias: en la génesis semiótica, los geómetras realizan una deconstrucción no-icónica del modelo y en la génesis discursiva no presentan aspectos formales en el lenguaje de validación (no mencionan las propiedades, pero si las utilizan y el desplazamiento de la demostración no es bidireccional)

Por otro lado, el geómetra 5, muestra diferencias en la génesis instrumental, dado que al deconstruir el objeto reordena los vértices, sin embargo en la instrumentación respeta el orden original de estos.

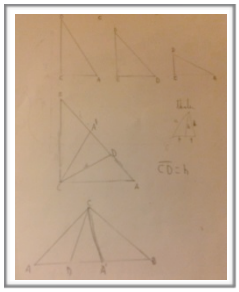
Geómetra 4

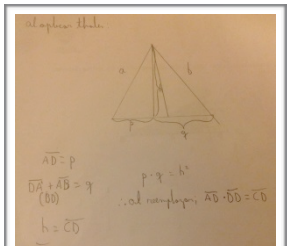
Las acciones del geómetra no se consideran en el estudio de caso debido a que presenta claras muestras de plagio, lo cual no aporta al análisis.



Geómetra 6

Se evidencian acciones asociadas al paradigma geométrico G1, ya que el objeto de la tarea es trabajado como un dibujo carente de propiedades y características particulares.





La circulación se limita a la génesis semiótica dado que el geómetra realiza una deconstrucción no-icónica del tipo constructor, sin embargo, en esta acción no respeta las características del objeto y realiza una reordenación de los vértices.

CONCLUSIONES

El análisis de las evidencias arrojó importantes resultados en cuanto al contraste con los ETMg idóneo y personales presentados al comienzo del estudio de caso.

Se esperaba encontrar en las producciones de los estudiantes acciones relacionadas o similares al ETMg personal 1, es decir que el paradigma privilegiado fuese G1, que el razonamiento de validación se fundase en la prueba, dando medidas a los lados del objeto en cuestión y que el énfasis se diera en la GS, debido a la ausencia de actividades relacionadas con demostraciones en los textos de estudio actuales propuestos por el ministerio de educación. Sin embargo, la mayoría de las textualidades analizadas mostró privilegiar el paradigma geométrico G2 vislumbrando la comprensión de las propiedades del objeto de la tarea y la utilización de definiciones (teoremas) para la validación de esta, lo que deja de manifiesto que los estudiantes se acercaron considerablemente al ETMg idóneo.

En cuanto a la tarea, el análisis permite dar cuenta que la actividad propuesta favorece el tránsito desde un paradigma geométrico G1 instaurado en el aula de matemática como una práctica tradicional, es decir, la aplicación de teoremas en base a su desarrollo aritmético y algebraico (despejar ecuaciones) a un paradigma G2 donde el razonamiento de validación nace a partir de definiciones y propiedades.

En base a la experiencia realizada, se recomienda para una futura aplicación favorecer el trabajo colaborativo, donde los estudiantes puedan discutir puntos de vista y construir soluciones en conjunto, aportando además a los objetivos transversales.

Bibliografia

Henríquez, C. (2013). Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico. Documento de estudio. Universidad Alberto Hurtado. Chile.

Henríquez, C.; Montoya E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. Revista Enseñanza de las Ciencias, pp.51-70. Instituto de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Kuzniak, A. (2011). El espacio de trabajo matemático y su génesis. Revista Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Volumen 16, pp. 9-24. Francia.

Ministerio de Educación (2011). Programa de Estudio Segundo Año Medio. Chile.

ANÁLISIS DE LOS PATRONES INSTRUCCIONALES EN LAS CLASES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS VERBALES.

Donoso Osorio E[a.], Valdés Morales, R[b]., OyarzúnAlvial,[c]C., Daza Vargas, D[d].

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso;
elizabeth.donoso@ucv.cl, revalmorales@gmail.com, carito01@gmail.com,
d.daza.vargas@gmail.com

Resumen

En este estudio se analizan los patrones instruccionales en las clases de segundo ciclo de enseñanza básica destinados a la resolución de problemas (RP) matemáticos. Se analizan muestras de la Evaluación Docente 2013 identificando las actividades típicas de aula, las estructuras de participación y las ayudas otorgadas por los profesores. Si bien esta investigación se encuentra en curso, se presentan los primeros hallazgos pertenecientes a 10 profesores mediante un análisis del discurso y un análisis cuantitativo de tipo de descriptivo. Los resultados arrojan once actividades típicas de aula, que la estructura de participación recae en los profesores y que son diez las ayudas más utilizadas durante las sesiones de clase de RP.

Palabras clave*: Resolución de problemas, patrones de instrucción, procesos de aprendizaje, estructura de participación y ayudas pedagógicas.*

PROBLEMA

Los bajos resultados en los instrumentos aplicados a los estudiantes chilenos anivel nacional e internacional, han llevado a investigar la relevancia de propiciar la construcción de modelos matemáticos que favorezcan los aprendizajes en Resolución de Problemas (RP).En Chile, los estudios de Preiss y Radovic, (2010), señalan que la RP de manera exitosa requiere, entre otros, del conocimiento de estrategias de RP, jugando el profesor un papel relevante en la promoción del conocimiento y actitudes en los estudiantes.Manzi, Preiss, Flotts, González y Sun (2008) señalan que los docentes evaluados con buen desempeño tienen mayor variedad de recursos al momento de presentar los contenidos a sus estudiantes y mayor frecuencia de intervenciones que articulan dichos contenidos. Estudios actuales, nos aportan, que las causas de los problemas de comprensión dejan de atribuirse exclusivamente a los alumnos para explicarse desde un punto de vista interactivo (Sixte y Sánchez, 2012). Es decir, si el problema es que los alumnos no extraen las ideas fundamentales para comprender y resolver un problema, el tema a estudiar no es el alumno, sino el profesor en términos de qué es lo que comunica, cómo lo comunica y qué ayudas ofrece a las comprensiones de los alumnos. Cobra relevancia, en este marco, estudiar de manera detallada los patrones instruccionales que genera el profesor en las clases de RP, entendiendo por patrones instruccionaleslos rasgos recurrentes comunes y una organización similar a lo largo de la clase (Timss, 1995 y Timss-R, 1999) con la finalidad de aportar a la mejora de la interacción discursiva y a las prácticas de enseñanza en la RP.

Marco teórico

El estudio de las dificultades para el aprendizaje de la RPen matemática nos permite acercarnos a conocer la manera en que los alumnos recepcionan e interpretan la información y cómo desarrollan su aprendizaje a partir de los sistemas de interacción presentes en el aula. Los procesos de

enseñanza han sido tema de interés para numerosas investigaciones debido al impacto que tienen en los resultados de aprendizaje de los alumnos (Alvarado, Cabezas, Falck y Ortega, 2012; Bravo, Falck, González, Manzi, y Peirano, 2008; Manzi, Strasser, San Martín y Contreras, 2008; Lara, Mizala y Repetto, 2010 y Olfos, 2010). Estudios en el que los problemas fueron presentados con una pregunta al inicio, arrojaron evidencias que apoyan que el elemento discursivo favorece la construcción del modelo de la situación (Thevenot, Devidal, Barrouillet, y Fayol, 2007), lo que significa que el estudiante representa el problema, integrando información del texto con información o conocimiento del lector que está más allá de dicho texto. Hino (2007), identifica cómo el profesor guía la atención de los alumnos hacia un aspecto puntual deldiscurso.

Estudios en los que se han comparado discusiones dialógicascon formato I-R-E -estructura conocida como Indagación-Respuesta-Evaluación(Cazden, 1988) arrojan que los alumnos utilizan más tiempo la palabra y desarrollan las ideas con mayor profundidad cuando la interacción sigue dicho formato.En este ámbito de estudio, se han desarrollado formas determinadas de recoger, analizar y estudiar loque hacen y dicen los profesores y alumnos, reconociendoel aporte de los sistemas de análisis lingüísticos de Sinclairy Coulthard (1975). Un estudio centrado en la interacción en clases de RP de matemática,Rosales, Orrantia, Vicente y Chamoso (2008), encontraron que los profesores en servicio se aseguran que los alumnos comprenden el problema antes de seleccionar la operación a realizar, a diferencia de los profesores en formación loscuales, además,tienen prácticas de aula más directivas. Los autores, utilizan un sistema de análisisque les permite conocer en qué parte del proceso de resolución se centra la interacciónyen qué medida se toman las responsabilidades en la construcción de los contenidosque se hacen públicos en dicha interacción. En un estudio posterior en RP, el mismo equipo señala la importancia que tiene la enseñanza directa y explícita de laforma de enseñar a resolver un problema (Orrantia, Múñez, Fernández, Matilla, 2012). Ambos estudios son de gran importancia para este trabajo, por cuanto profundizan enlos procesos de enseñanza para el aprendizaje y específicamente en la enseñanzaexplícita que acontece en la interacción profesor y alumnos, pudiendo esclarecer las ayudas que otorga el profesor durante el inicio, desarrollo y cierre de la clase.

A partir de lo señalado en este estudio nos hemos propuesto como objetivo general analizar los patrones de interacción que guían los procesos de enseñanza y aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos en las evidencias audiovisuales del proceso de evaluación docente correspondientes al año 2013. Para ello, hemos definido los siguientes objetivos específicos: a) Identificar las secuencias de actividades dirigidas al proceso de aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos; b) Caracterizar los sistemas de interacción entre profesor y alumno para el desarrollo de aprendizajes significativos en las clases de RP matemáticos y c) Precisar los tipos de ayudas otorgados por los profesores en la mediación para la enseñanza de la RP matemáticos.

Metodología

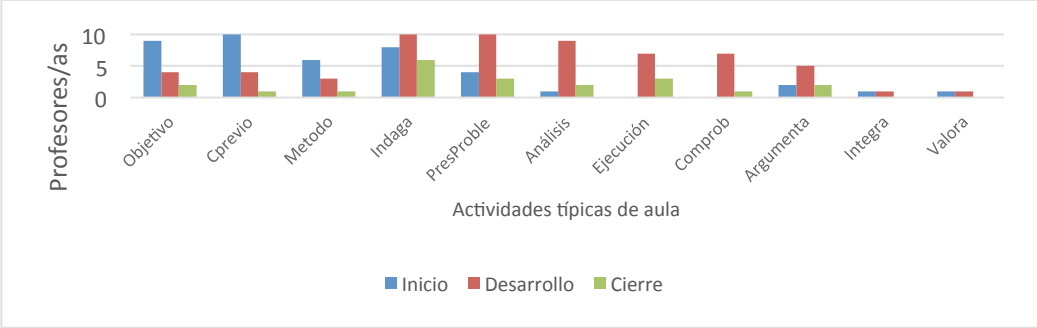
El abordaje metodológico se sitúa en un diseño mixto de investigación, con una primera fase cualitativa de análisis de discurso y una segunda fasecuantitativa de tipo de descriptivo. La primera fase corresponde al análisis del discurso. Para ello, se procedió a la transcripción de las filmaciones de clases y al análisis de las mismas a partir de la segmentación en los momentos inicio, desarrollo y cierre. En cada uno de estos momentos, se levantaron las categorías conforme la determinación de las secuencias típicas de aula (ATAs), entendiendo por éstas a las actividades que son recurrentes en las clases analizadas, tales como la presentación del objetivo de la clase o la activación de conocimiento previo, por nombrar algunas. Además, se determinó la interacción que tiene lugar entre profesor y alumnos a partir de cinco posibilidades desde una participación centrada solo en el profesor hasta aquella que involucra la intervención de los alumnos. Finalmente, se levantaron categorías en las que se agruparon las ayudas que otorga el profesor, considerando desde aquellas

en las que el profesor confirma un aprendizaje o corrige una respuesta hasta la motivación y la transferencia de los aprendizajes. Una vez levantadas las categorías de ATAs, estructuras de participación y ayudas, se procedió a su validación por expertos. Luego, se formó a un grupo de profesores en el análisis de las transcripciones a partir de las categorías definidas. El análisis realizado por cada profesor, se sometió también a validación por expertos dando de esta manera finalizada la etapa de análisis de las transcripciones. En la segunda fase, se recurrió a la cuantificación de las categorías para un análisis comparativo de los resultados.

Los participantes corresponden a una muestra intencionada de 23 profesores evaluados en las clases de matemáticas entre 5° y 8° básico en el proceso de evaluación docente del año 2013. La cantidad de la muestra que se presenta en este trabajo corresponde a 10 profesores. Se estima el 2do ciclo básico, por ser una etapa en que se concreta el pensamiento lógico matemático, y los contenidos curriculares de la asignatura se dificultan en complejidad cognitiva.

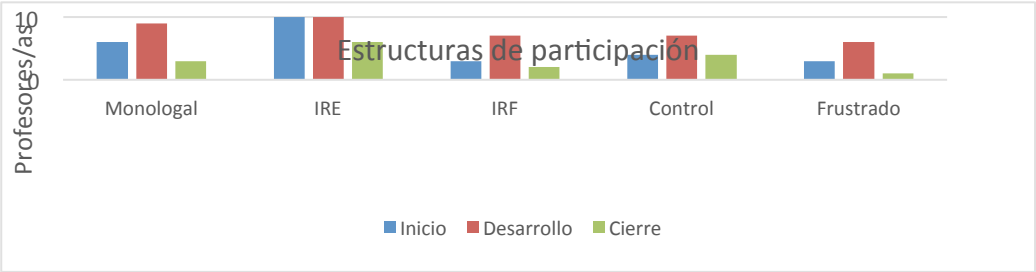
Resultados

A continuación se presentan los primeros hallazgos en cuanto a: la presencia de las actividades típicas de aula, se establecen las estructuras de participación y las ayudas que los profesores utilizaron en las clases.



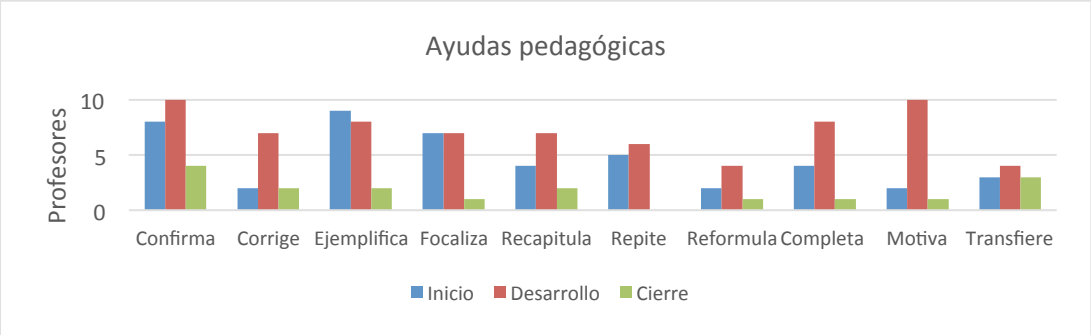
Nota: Figura 1. Presencia de las actividades típicas de aula en los tres momentos de las 10 clases evaluadas.

La figura N° 1 evidencia los resultados de la presencia de las ATAs durante las clases de los 10 profesores en sus respectivos momentos. En cuanto a los resultados más llamativos por momento de la clase, se puede explicitar que en el inicio, si bien prácticamente todos los profesores dan cuenta del objetivo y activan conocimientos previos, solo 6 precisan la metodología que utilizarán para lograr los propósitos de la clase. En el desarrollo de la clase, se encuentra que todos los profesores presentan los problemas a resolver, pero 9 lo analizan, y solo 6 lo ejecutan y lo comprueban. En el cierre de la clase, prácticamente ningún profesor integró ni valoró lo trabajado durante la clase.



Nota: Figura 2. Presencia de estructuras de participación en los tres momentos de las 10 clases evaluadas.

La figura N°2 explicita las estructuras de participación entre profesores y estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los principales resultados muestran que las estructuras monologales e IRE están mayormente presentes durante las sesiones, mientras que el IRF, se encuentra en menor cantidad. Las estructuras de control y frustrado también poseen una presencia importante durante los tres momentos, especialmente en el desarrollo y cierre de la clase.



Nota: Figura 3. Presencia de las ayudas pedagógicas en los tres momentos de las 10 clases evaluadas.

En la figura N° 3, se observa que las mayores ayudas que presenta el profesor en el inicio de la clase son ejemplificar, confirmar y focalizar, mientras que las más ausentes son motivar, reformular y corregir. En cuanto al desarrollo, precisamente la motivación y la confirmación de información están mayormente presentes, aunque la reformulación y transferencia están inicialmente visualizadas. En el cierre de la clase, se presentan pocas ayudas, siendo las más recurrentes la transferencia y la confirmación de información.

CONCLUSIÓN

Si bien esta investigación aún está en curso, ya se pueden encontrar algunos hallazgos que si bien no son generalizables, sí son bastante sugerentes.Respecto de las ATAs, los resultados arrojan que un número importante de profesores enuncia el objetivo a desarrollar en la clase, no obstante, durante el desarrollo de la misma no se hace alusión a dicho objetivo. Recurrir al objetivo, permite orientar y focalizar el trabajo que se está realizando; el monitoreo y seguimiento de la actividad que se realiza con lo que se avanza en la autorregulación del aprendizaje. Otro de los resultados que llama la atención es el escaso tiempo que dedican los profesores a la argumentación durante el desarrollo de la clase y a la integración de las ideas al momento del cierre de la clase.

Otro de los resultados que llaman la atención es el sistema de interacción que genera el profesor con los alumnos. Los ciclos de interacción muestran que los profesores mantienen estructuras de participación de tipo monologal, siendo el profesor el que tiene la mayor participación en la clase. Muchas de las respuestas son dadas por el mismo profesor, no dando espacio ni tiempo para que los estudiantes elaboren sus propias respuestas. Estose mantiene incluso al cierre dela clase.

En los tipos de ayuda otorgada por los profesores, destacamos la confirmación al inicio y desarrollo de la clase, vinculadas principalmente al conocimiento previo y los datos del RP. En una proporción menor, pero no menos importante se encuentra el ejemplificar y focalizar. Las ayudas indican que los alumnos no están en condiciones de resolver los ejercicios por sí mismos y requieren de la colaboración del profesor. Si a lo anterior se agrega la ausencia de un objetivo al que se recurra para guiar y orientar el desarrollo de la clase, es esperable que el profesor realice intervenciones en un número no menor para corregir o completar los resultados o decisiones tomadas por los alumnos. El cierre de la clase, por su parte, mantiene intervenciones del profesor para corregir, ejemplificar y focalizar casi a la par de motivar, recapitular y transferir, siendo estas dos últimas las que permiten

retomar las ideas centrales trabajadas en la RP y realizar la transferencia que promueve aprendizajes más allá del ejercicio realizado durante la clase.

Referencias bibliográficas

Alvarado, M., Cabezas, G., Falck, D. & Ortega, M. E. (2012). Serie Evidencias: Evaluación docente y resultados de aprendizaje ¿Qué nos dice la evidencia? Santiago: MINEDUC.

Bravo, D., Falck, D., González, R., Manzi, J. & Peirano, C. (2008). La relación entre la evaluación docente y el rendimiento de los alumnos: Evidencia para el caso de Chile.

Cazden, C.B. (1988). Classroom discourse: The language of teaching and learning. Portsmouth, NH: Heinemann.

Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan. ZDMThe International Journal on Mathematics Education,39,5-6,503-514.

Lara, B., Mizala, A. &Repetto, A. (2010).Una mirada a la efectividad de los profesores en Chile. Estudios Públicos, 120, 147-181.

Manzi, J., Strasser, K., San Martin, E. & Contreras, D. (2008). Quality of education in Chile: Final report of the Interamerican Development Bank proyect. Washington, DC: BID.

Manzi, J., Preiss, D, Flotts, P., González, R., & Sun, Y. (2008). Design and implementation of a national project of teaching assessment. Paper presented at the AERA Annual Meeting. NY.

Olfos, R. (2010). Conocimiento Pedagógico del Contenido y su incidencia en la Enseñanza de la Matemática a Nivel de Educación Básica. Proyecto FONIDE Nº F410980.

Orrantia, J., Múñez, D., Fernández, M. & Matilla, L. (2012). Resolución de problemas aritméticos: Conocimiento conceptual y nivel de competencia en matemáticas. AulaAbierta 2012, Vol. 40, núm. 3, 23-32 ICE. Universidad de Oviedo. ISSN: 0210-2773.

Preiss D. & Radovic, D. (2010). Patrones de discurso observados en el aula de Matemática de Segundo Ciclo Básico en Chile. Revista PSYKHE. Vol. 19 65 – 79.

Rosales, J., Orrantia, J., Vicente, S. & Chamoso, J.M. (2008). Análisis de la interacción alumnos-profesor al resolver problemas no rutinarios en aulas de Primaria. Cultura y Educación, 2008, 20 (4), 423-439.

Sixte, R. & Sánchez, E. (2012). Cognición, motivación y emoción en la interacción profesor-alumno. Una propuesta para analizar su relación mediante el registro de las ayudas frías y cálidas. Infancia y Aprendizaje. Vol. 35, Nº 4, 2012, págs. 483-496

Thevenot, C., Devidal, M., Barrouillet, P., y Fayol, M. (2007). Why does placing the question before an arithmetic Word problem improve performance? A situation model account. Quarterly Journal of Experimental Psych

RESOLUCION DE PROBLEMA: RASGOS DISTINTIVOS EN LAS PRODUCCIONES ESCRITAS DE ESTUDIANTES DE 3° Y 4° BASICO[2627]

Rubén Balboa Ortega

Universidad de Chile;
ruben.balboa@ciae.uchile.cl

Resumen

El estudio aborda la problemática de identificar rasgos distintivos que permitan evaluar la habilidad de resolver problemas en estudiantes de 3° y 4° básico a partir del análisis de las producciones escritas de los estudiantes al resolver un problema de reparto.

*Se determinaron cuatro variables:(*i) *representaciones, (*ii) *transformaciones, (*iii) *conceptos matemáticos y (*iv) *conexiones, las cuales permiten conformar la solución del problema. Luego, mediante el análisis de frecuencia de estas variables, se caracterizan las producciones escritas de los estudiantes de estos niveles.*

Palabras clave:*educación básica*,*evaluación, resolución de problemas, producciones escritas.*

INTRODUCCION

En Chile,la habilidad de resolver de problemas hace presencia en el currículo hace un par de décadas, primero incorporada como una habilidad transversal, y en los últimos años, en laúltima actualización curricular adquiriendo un lugar preponderante dentro de la formación escolar en distintas disciplinas del conocimiento, especialmente en matemática.(MINEDUC, 2012)
El desarrollo de la habilidad no se centra en la aplicación de conocimientos matemáticos, sino la reflexión sobre procesos comunes en la RP, como por ejemplo, la selección e integración de información y conceptos matemáticos, el uso de heurísticas, la argumentación y la revisión del proceso realizado (Schoenfeld, 1985). Progresaren esta habilidad requiere transformar la forma en que se trabaja y, consecuentemente su evaluación.

Atendiendo a la dificultad de evaluar el logro de esta habilidad, queremos aprovechar las múltiples posibilidades que nos provee el proceso de evaluación diagnóstica para identificar aquellos rasgos distintivos que permitan analizar el grado de desarrollo en que se encuentra la habilidad en un grupo de estudiantes de 3° y 4°añobásico, mediante el análisis de sus producciones escritas al enfrentarsea la resolución de un problema de reparto. Para ello, se analizarán los registros semióticos que permitirán identificar rasgos distintivos de las producciones de los estudiantes.

Antecedentes

En el contexto internacional, específicamente en el ámbito de la evaluación, Carrillo (1994) propone un modelo con descriptores de metas a partir de un perfil deseable de resolutor, el cual incorpora 5 categorías de análisis subdivididas en 5 estándares. Años más tarde, junto a Guevara (1996) realiza un estudio con profesores de aula para redefinir los descriptores en torno al perfil de

[26] Investigación desarrollada al amparo de la iniciativa ARPA: "Activación de la Resolución de Problemas en el Aula" (FondefID14I10338) CIAE-CMM de la Universidad de Chile.

[27] Este reporte, corresponde a un extracto de la tesis de magíster *Diagnóstico de la habilidad de resolución de problemas en estudiantes de educación básica a partir del análisis de sus producciones escritas,* presentada el 31 de julio ante la comisión evaluadora del programa de pos título de la UMCE.

Agradecimientos: Este artículo ha sido financiado parcialmente por el proyecto Fondef ID14I10338.

resolutor, ahondando en la conducta deseable mediante el estándar para evaluar la habilidad, además, incorpora la utilización de otros instrumentos y protocolos para determinar el perfil de cada estudiante.

Las investigaciones no hacen referencia a cómo evaluar la habilidad de RP en un contexto escolar, actividad central en la profesión docente. Considerando esta situación, se han formulado dos preguntas de investigación referidas a la evaluación del desarrollo de la habilidad de RP a partir del análisis de las producciones escritas de los estudiantes:

1. ¿Qué rasgos distintivos se pueden identificar en las producciones escritas de los estudiantes de 3° y 4° básico, que den cuenta de su habilidad de RP?
2. ¿Cuál es el desempeño de los estudiantes al resolver problemas de reparto, a la luz de los rasgos identificados en sus producciones escritas?

Se ha decidido acotar a problemas de reparto, dado que este contexto es accesible para todos los niveles de la Educación Básica. La acción de repartir es abordada desde los primeros años en pre-básica y luego se va desarrollando el concepto en distintos contextos matemáticos.

MARCO TEORICO

El problema

La RP es un elemento clave en el aprendizaje de la matemática y es un tópico que ha sido objeto de numerosas investigaciones en educación. Por ejemplo, los psicólogos concuerdan en que los problemas tienen tres elementos propios: los datos, los objetivos, y los obstáculos (Mayer, 1986). Otros autores utilizan una definición más amplia. Por ejemplo, Kilpatrick (1985) considera que un problema es una situación en la que se desea conseguir una meta y el camino directo para lograrlo está bloqueado, en tanto Schoenfeld (1985) introduce en su definición de problema al sujeto que trata de resolver la actividad. De esta forma considera que una misma actividad puede ser un problema para un individuo y ser un ejercicio rutinario para otro.

Este trabajo consideramos el concepto de problema bajo el que se formuló y se está desarrollando el proyecto Fondef ID14I10338 "Estrategias de Desarrollo Profesional: Profesores de Enseñanza Básica, Habilidades Matemáticas y Clases de Matemática", de donde proceden los datos utilizados para la investigación que presentamos en este documento:

> Un problema es una actividad matemática para la cual la persona que la enfrenta no conoce un procedimiento que le conduzca a la solución, esta tiene interés en resolverlo, le supone un desafío y siente que lo puede resolver. Un problema puede estar planteado en un contexto matemático o no matemático. (Felmer y Perdomo-Díaz, 2013, p.12)

En tanto, asociado al concepto de problema, compartimos el paradigma que "la RP es un proceso complejo que requiere que un individuo coordine sus experiencias previas, su conocimiento, su comprensión y su intuición para satisfacer las demandas de una situación nueva" (Kaur y Yeap, 2009, p. 308). Por tanto, la forma en que una persona se enfrente a la RP dependerá de sus conocimientos matemáticos, heurísticas, estrategias de control que disponga, las creencias hacia la matemática y hacia su propio desempeño como resolutor de problemas y las prácticas educativas en las que haya participado (Schoenfeld, 1985).

Sistemas de representación

En el proceso de RP, juegan un papel central las representaciones mentales de los estudiantes, los razonamientos empleados y la forma en que dan sentido a las actividades realizadas. La manera en que los estudiantes conectan las piezas de su conocimiento y las representa, son un factor clave para que puedan entender más profundamente y puedan usarlo en la RP. Para poder acceder a las representaciones mentales de los estudiantes y así poder realizar un diagnóstico de la habilidad de

resolver problemas, es necesarios estudiar los sistemas de representación externos, en esta línea, Duval (1993) señala la necesidad de utilizar diferentes sistemas de representación asociados a un mismo concepto matemático, puesto que cada sistema de representación muestra características y relaciones complementarias que responden en conjunto al concepto matemático. Así distinguiremos la coordinación entre distintas representaciones, que conllevan acciones de reconocimiento, tratamiento y conversión de los sistemas. Dentro de las transformaciones, Duval distingue dos tipos: el *tratamiento* o las operaciones realizadas dentro de cada sistema de representación, y la *conversión* o cambio de registro semiótico entre diferentes representaciones.

Metodología

En el contexto de la iniciativa ARPA[i], se aplicó un problema de reparto a los estudiantes de los profesores que participan del FONDEF, para analizar las producciones escritas e identificar los rasgos distintivos que permitieran evaluar el desarrollo de la habilidad. Para objeto de este reporte, solo se presentaran los datos de estudiantes 3° y 4° (36 y 24 respectivamente), pertenecientes a escuelas de las comunas de Lo Espejo y Valparaíso.

En la primera etapa se diseñó el instrumento y se realizó una revisión bibliográfica para identificar las variables de análisis de las producciones. Luego, se analizaron las producciones y se definieron los rasgos distintivos, los cuales permiten diferenciar/distinguir el desempeño de los estudiantes.

RESULTADOS

Rasgos distintivos

En la búsqueda de aquellos rasgos distintivos que permitieran caracterizar las producciones escritas de los estudiantes se distinguieron distintos atributos a partir de la indagación en tres fuentes de información: revisión bibliográfica, revisión de producciones escritas levantando variables y el análisis por comparación de las variables levantadas, hasta la saturación de la información.

Luego de esta revisión se distinguieron 4 categorías que guiaron el análisis de las producciones de los estudiantes en estos niveles:

Representaciones: Utilización de distintos registros de representación y expresión (Martí at el, 2000).En este sentido, hemos distinguido qué tipos de representaciones han utilizado los estudiantes: Lenguaje Figurativo (LF), Lenguaje Matemático (LM) y Lenguaje Verbal/Escrito (LVE).

Transformaciones: Cambios en las representaciones, se dividen en dos categorías(Duval, 1993):*Tratamiento* que corresponde a una trasformación interna de un registro.*Conversión:* corresponde a la trasformación de una representación en otro registro, conservando la totalidad o parte del contenido del registro inicial.

Conexiones: Caracterizadas por las réplicas que demanda la tarea de resolver el problema al estudiante. De esta forma, se configuraran distintas conexiones a partir de las fases involucradas en la RP. La inclusión de registros en el desarrollo (D), respuesta (R) y justificación (J), darán cuenta del tipo de conexión que realizó al abordar el problema, distinguiendo a partir de estas conexiones, producciones escritas de una (E→D; E→R: E→J), dos (E→D→R; E→D→J; E→R→J) o tres (E→D→R→J) fases.

Conceptos matemáticos: Este problema, demanda que el estudiante sea capaz de incorporar tres conceptosen las heurísticas que utilice para resolver el problema: cuantificación, reparto equitativo y comparación. (Schoenfeld, 1985).

Cada una de las categorías, de forma individual o conjunto, discriminan en torno a rasgos que permiten distinguir una producción de otra. Así por ejemplo, a partir de las representaciones y transformaciones, podemos definir la frecuencia de un determinado registro o el tipo de transformación que se utiliza en algún nivel en particular. Los mismo podría ocurrir para las otras

categorías o si prefiriéramos, intersecar dos variables para caracterizar las representaciones que utilizan estudiantes que resuelven el problema en una fase.

Desempeño de los estudiantes

Las variables, en su conjunto, determinan el éxito frente a la RP en función de la incorporación de los elementos que definen la solución correcta del problema. En esta investigación, se ha definido como *solución* a la respuesta que logre dar cuenta de una *conexión* de 3 fases, además de la incorporación -en las heurísticas-de los *conceptos matemáticos* que resuelven el problema.

Las *conexiones* dan cuenta de las fases que incorpora el estudiante para resolver el problema, siendo así, tendremos estudiantes que resuelven el problema en una sola fase, es decir, que desde el enunciado del problema van directo a realizar algún tipo de registro en alguna de las fases, y otros, que para resolver incorporan todas las fases. La incorporación de los *conceptos matemáticos*, pareciera, que ayuda a definir la heurística que se utilizará para resolver el problema. Así por ejemplo, un estudiante que incorpore el concepto de reparto, elaborará una estrategia que le permita operacionalizar su pensamiento a partir de la utilización de diversas representaciones que transfieran su pensamiento externamente.

Revisando las frecuencias registradas luego del análisis de las distintas categorías, podemos detallar:

Representaciones: El análisis se efectuará a partir de las fases de resolución.

Fase de desarrollo: Los estudiantes que han respondido el problema, han utilizado los tres sistemas de representación con el siguiente porcentaje de frecuencia para cada categoría: LF un 23%; LM 40% y por último, con menor porcentaje de utilización LVE con un 5% (Tabla 1).

Fase de respuesta: En el contexto del problema, a partir de las opciones de respuesta (niño o niña), el 80% de los estudiantes comunica la respuesta utilizando este registro, solo hay dos estudiantes de 3° básico que complementan la utilización del LVE con registros de carácter LF o LM (Tabla 1).

Fase de justificación: Al igual que en la fase de respuesta, esta fase está caracterizada por la mayoritaria utilización de representaciones en LVE, alcanzando un 70% de utilización, pero además, dentro de este porcentaje, un 34% de los estudiantes complementa su registro con la utilización de representaciones en LM (Tabla 1).

Fase	Desarrollo			Respuesta			Justificación		
Nivel	**F**	**LM**	**LV**	**F**	**LM**	**LV**	**F**	**LM**	**LV**
3°	7	14	1	1	-	30	-	15	27
%	19,44%	39,66%	2,77%	2,77%	-	89,55%	-	41,66%	72,22%
4°	7	10	2			19		5	15
%	29,16%	41,66%	8,33%	-	-	79,16%	-	20,83%	62,5%
Total	14	24	3	1	-	48	-	20	42
Total %	23,8%	40%	5%	1,66%	-	80%	-	34%	70%

Tabla 1: Representación por fase de resolución

Transformaciones:

Cerca del 50% de los estudiantes, de ambos niveles, registran representaciones. De ellas, podemos distinguir que en 3° básico un 30% de los estudiantes realizan tratamiento versus un 16% en el caso de estudiantes de 4° básico. Al comparar la utilización de conversiones, en 3° básico, es utilizada por el 11% de los niños versus el 20% de los estudiantes de 4° básico (Tabla 2).

Tabla 2: Resumen de transformaciones utilizadas

Fase	Transformaciones	% de estudiantes que utilizan representaciones	Transformaciones	
			Conversiones	Tratamiento
3°	**Desarrollo**	47,22%	11,11%	30,56%
4°	**Desarrollo**	50%	20,83%	16,66%

Conexiones:

Al realizar una comparación por fases entre ambos niveles (Tabla 3), podemos distinguir que en las conexiones de una fase, un porcentaje mayor de estudiantes de 4° básico establece este tipo de relaciones. Respecto a las conexiones de dos fases, los estudiantes de 4° básico, dan mayor uso, alcanzado más de 62% versus un 50% de utilización en 3° básico. Por último, en la conexión de tres fases, los estudiantes de 3° básico la utilizan más, alcanzando un 30,56% en comparación a los estudiantes de 4° básico (16,67%).Si analizamos todos los tipos de conexiones, la ruta más utilizada es la que guarda relación con E→R→J, prescindiendo expresar representaciones en el desarrollo.

Tabla 3. Conexiones entre fases de resolución

Fase / Nivel	1 Fase			2 Fases			3 Fases
	E→D	**E→R**	**E→J**	**E→D→R**	**E→D→J**	**E→R→J**	**E→D→R→J**
3°	2	2	1	4	2	13	11
%	5,56%	5.56%	2,78%	11,11%	2,78%	36,11%	30,56%
4°	2	2	-	4	2	9	4
%	8,33%	8,33%	0%	16,67%	8,33%	37,50%	16,67%
Total	4	4	1	8	3	22	15
Total %	6,94%	6,94%	1,39%	13,89%	5,55%	36,80%	23,61%

Conceptos matemáticos:

Dado que no todos los estudiantes incorporan estos conceptos, en este apartado solo se incluirán aquellos estudiantes que utilicen estos conceptos dentro de la heurística de resolución.A partir del análisis (Tabla 4) podemos observar que un porcentaje menor de los estudiantes logra incorporar el concepto de reparto equitativo y no equitativo (34%), los porcentajes aumentan al momento de verificar la incorporación de los conceptos de cuantificación y comparación con un 68,05% y 60,27% respectivamente.

Tabla 4. Incorporación de conceptos matemáticos

Concepto / Nivel	Cuantificar	Relación de orden	Reparto no equitativo	Reparto equitativo
3°	25	24	4	4
%	69,44%	66,37%	11,11%	11,11%
4°	16	13	6	5
%	66,67%	54,17%	25,00%	20,83%
Total	41	37	10	9
Total %	68,05%	60,27%	18,05%	15,97%

CONCLUSIÓN

Según Lester y Kehle (2003, p. 503), "el éxito en la RP requiere coordinación de experiencias previas, representaciones familiares, y modelos de inferencia y representación…". Son estos los elementos que queremos recoger e identificar a partir del diagnóstico de la habilidad. Por tanto, indagar sobre las representaciones y transformaciones utilizadas, además de la incorporación de conceptos matemáticos en las heurísticas, nos permitirá advertir sobre los componentes que ponen en juego al enfrentarse a un problema estudiantes de estos niveles académicos. Componentes que son determinantes al momento de evaluar el desarrollo de la habilidad de resolver problemas. En

este estudio, solo un 8,3% de los estudiantes logra incorporar estos elementos de acuerdo a la definición de *solución* que fue considerada en esta investigación, del resto de los estudiantes, un 75% no incorpora los elementos y un 16,6% no comunica una respuesta.

La selección y definición de los rasgos distintivos, permite objetivar el análisis de los registros semióticos que los estudiantes elaboran al resolver los problemas. Sin duda, estos criterios de observación viabilizan una mirada ecuánime al momento de revisar las producciones, que no solo se limita a esta u otras investigación al unificar la mirada, sino que se expande a lo que los profesores pueden hacer dentro de las aulas al momento de evaluar la Habilidad de Resolver Problemas. Incluyendo estos elementos, el análisis, trascenderá más allá de cotejar una respuesta correcta, ya que como ha quedado en evidencia, hay elementos que no pueden ser anulados, dada la riqueza que aportan a la hora que plantearnos la evaluación de esta habilidad.

Referencias

Carrillo, J., & Guevara, F. (1996). Un Instrumento Para Evaluar La Resolución De Problemas. España. Uno, Revista de Didáctica de Las Matemáticas, 8, pp. 65–81.

Carrillo, J. (1994). La resolución de problemas en matemáticas: ¿Cómo abordar su evaluación? España. Investigación en la escuela, 25, pp. 79–86.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la penseé. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, IREM de Strasbourg 37-65.

Felmer, P & Perdomo, J (2013) Estrategias de Desarrollo Profesional: Profesores de Enseñanza Básica, Habilidades Matemáticas y Clases de Matemática. Fondef ID14I10338.

Lester, F. & P. Kehle (2003), "From problem solving to modeling. The evolution of thinking about research on complex mathematical activity", en R. Lesh (ed.), Beyond constructivism, models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching, Lawrence Erlbaum Associates

Kaur, B., &Yeap, B. H. (2009).Mathematical problem solving in Singapore schools. In B. Kaur, B. H. Yeap&Kapur, M., Mathematical problem solving: Yearbook 2009 (pp. 3-13). Singapore: Association of Mathematics Education and World Scientific.

Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Twenty-five Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. En E. A. Silver (Ed.). Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives. (pp. 1- 15). Hillsdalek, NJ: Lawrence Erlbaum.

Martí, E. & Pozo, J (2000). Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. España. Infancia y aprendizaje, 90, pp.11- 30.

Mayer, R. (1986). Pensamiento, resolución de problemas y cognición. España: Paidos.

MINEDUC. (2012). Bases Curriculares y Programas de Estudio 1 a 6 ° Básico. Chile

Polya, G. (1970). How to solve it.Editorial Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press, Inc.: USA.

[i] Los Talleres ARPA tienen como propósito otorgar una experiencia práctica, y generar espacios de reflexión y discusión sobre el rol de la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática escolar y en la formación docente.

MODELOS DOCENTES EN LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA DE UN COLEGIO EN LA COMUNA DE PAINE Y SU RELACIÓN CON LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA.[i]

Villacura, P[a]. Parra, V.[b] Panes, R.[c]

[b]Universidad del Bío-Bío, [c]Universidad del Bío-Bío;
correos electrónicos: victorparra2007@gmail.com, rpanes@ubiobio.cl,gie2mat@gmail.com

Resumen

El siguiente trabajo presenta a nivel descriptivo una investigación cualitativa sobre modelos docentes en las prácticas pedagógicas en un grupo de profesores/as de primer y segundo ciclo de enseñanza básica, además de enseñanza media de un colegio de la comuna de Paine, Región Metropolitana. En términos metodológicos se utilizan entrevistas semi estructuradas y observación no participante, mientras el análisis de la información se realiza a través de triangulación hermenéutica. Así, se establece su relación con los principios de la Educación Matemática Crítica. Los resultados evidencian la predominancia del modelo docente clásico en la mayoría de los descriptores, de manera que la praxis docente analizada se encuentra muy distanciada de la matemática crítica.

Palabras clave: *Modelos docentes, Sistemas de creencias, Prácticas pedagógicas, Educación Matemática Crítica.*

INTRODUCCIÓN

En la educación matemática se presentan diversos enfoques, modelos y perspectivas respecto de la manera de cómo concibe dicha disciplina. Es importante destacar que algunos lineamientos pedagógicos proponen centrarse en las habilidades del pensamiento, mientras que otros sugieren contextualizar la matemática, o bien ven indispensable el uso de material concreto en esta enseñanza, prácticas pedagógicas centradas en el ejercicio y su algoritmo, modelos o prácticas que se centran en propiciar el desarrollo de ejercicios orientados a fortalecer las capacidades de memoria de sus alumnos, conduciéndoles hacia la mecanización de los contenidos matemáticos.¿Cuál de ellas es la perspectiva más adecuada?, ¿Qué modelo docente predomina en las prácticas pedagógicas? Son algunas interrogantes que presenta esta investigación en el contexto de un grupo de profesores y profesoras.

Como señala Gascon (2000:30) " para empezar a describir y explicar la práctica profesional de matemática en el aula, podemos situarnos en diferentes perspectivas teóricas." De esta formaal analizar las prácticas pedagógicas en una institución educativa se revelaría los modelos docentes predominante en los profesores, entonces toda práctica docente es una consecuencia del modelo epistemológico de matemática predominante, y por ende, todo aquello que se realiza en el aula es producto de la manera de organizar lo matemático.

Por otra parte esta investigación busca dar presencia a un nuevo modelo de enseñanza de las matemáticas que nace de la Pedagogía Crítica; es el denominado Educación Matemática Crítica (EMC), contrastándolo con las modelos docentes presentes en las prácticas pedagógicas de los profesores investigados.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS

El problema de investigación gira en torno a develar los modelos docentes predominantes en las prácticas pedagógicas de un grupo de profesores/as y problematizarlas a la luz de los postulados de la Educación Matemática Crítica.

Los objetivos generales planteados son:

Caracterizar las prácticas pedagógicas de los docentes de matemática de 1°, 2° ciclo y enseñanza media de un colegio de la comuna de Paine, Región Metropolitana.

Analizar los modelos docentes desarrollados por los profesores/as de matemática de 1°, 2° ciclo y enseñanza media del de un colegio de la comuna de Paine y contrastarlos con las estrategias de la Matemática Crítica.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico se dividirá en cuatro temas principales, el primero referido a los programas de investigación en educación matemática donde se describirá algunos enfoques de investigación en esta rama científica, en el segundo tema se tratarán los modelos docentes. El tercer ámbito se refiere a los sistemas de creencias y finalmente se abordan las prácticas pedagógicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Programas de investigación

Los principales programas de investigación de la Didáctica de la Educación Matemática son: el enfoque cognitivo, el constructivismo radical, el constructivismo social, el enfoque sistémico, el enfoque antropológico, el enfoque semiótico y el enfoque crítico. Una descripción detallada puede consultarse en el trabajo de Font (2002).

Modelos docentes

Consiste en una recopilación de distintas teorías y enfoques pedagógicos que orientan a los docentes en el proceso educativo, permitiéndoles, con mayor o menor éxito, ejercer su profesión,

Para efectos de referencia se señalará una breve descripción de cada modelo docente de acuerdo a los lineamientos presentados por Gascon (2001).

Modelo Clásico: considera el proceso de enseñanza y aprendizaje como algo mecánico, trivial, totalmente controlado por el profesor. Se toma en cuenta el resultado final.

Modelo Modernista: pone énfasis en las estrategias algorítmicas para la resolución de problemas no triviales

Modelo Constructivista: brinda especial importancia a la actividad de resolución de problemas contextualizados como génesis del conocimiento matemático. Se interesa por el proceso de aprendizaje.

Modelo Crítico: Considera que la enseñanza y aprendizaje debe ser mediante la resolución de problemas contextualizados, que aborde problemas reales. Dentro de esta mirada la Educación Matemática CrÍtica constituye un paradigma con una nueva forma de ver y vivir la enseñanza de la educación matemática donde el contexto, la investigación, la comunicación, el diálogo, el análisis crítico, la actividad en grupo y la emancipación juegan un papel principal. Todos estos conceptos suelen ser indispensable para una educación donde la matemática se enfoca en la resolución de problemas contextualizados y del interés de los alumnos y alumnas. Entre los principales autores reseñados por Guerrero (2008) se encuentran los trabajos de Skovsmose, Valero, Ernest y Mora.

Sistemas de creencias

Son una particular visión del mundo de la matemática, la perspectiva con la cual cada persona se aproxima a ella y pueden determinar la manera en que se enfrenta un problema, los procedimientos que serán usados o evitados, el tiempo y la intensidad del trabajo que se realizará, en pocas palabras, sus creencias sobre la naturaleza y el sentido de la matemática, sobre lo que significa para el educados hacer matemática, su enseñanza y su aprendizaje (Vilanova y otros, 2005).

Prácticas pedagógicas

En este trabajo "la práctica pedagógica se concibe como una acción social interactiva y compleja que compromete estrechamente a profesores y estudiantes con unas metas de aprendizaje; va más allá del uso de métodos, metodologías y herramientas didácticas, y se fundamenta en los saberes del profesor" (Daza, 2010:81).

METODOLOGÍA

La investigación en tanto fundamentos paradigmáticos es de carácter cualitativa, por referirse a sucesos que tratan de ser descritos desde la realidad, en su medio natural. Los datos obtenidos, en este caso utilizando observaciones no participativas y entrevistas semiestructurada por tanto son de carácter subjetivos, no se pueden medir ni contar, ya que los fenómenos investigados se encuentran en la mente de las personas, sus ideas, opiniones personales, puntos de vista. Así "los investigadores cualitativos estudian las cosas en su contexto natural, intentando dar sentido o interpretar los fenómenos en función de los significados que las personas le dan" (Denzin y Lincoln, 2005, pág. 3 en Rodríguez y Valldeoriola, 2009).

La investigación además es de tipo descriptiva en medida que dichos estudios "buscan especificar las propiedades importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis" (Hernández Sampieri, Fernández y Baptista, 2002:115), sin manipulación de variables, estas se observan y se describen tal como se presentan en su ambiente natural

"Los estudios exploratorios se efectúan, normalmente, cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado" (Hernández Sampieri et al., 2002:115) o que no ha sido abordado antes. Así la investigación desarrollada es exploratoria pues la EMC es un tema muy poco abordado en Chile (Parra, 2013), encontrando sus lineamientos fundacionales de Ole Skovsmose.

Para realizar el análisis de la información se utilizará el método llamado "triangulación hermenéutica" que consiste en un proceso de comparación de la información obtenida con los objetivos y categorías adquiridas durante el marco teórico, esto quiere decir, comparar los grupos de información entre sí, ordenar los puntos en que coinciden y ordenar los aspectos en que difieren, o comparar la información obtenida de esa manera con el marco teórico. "Investigar desde una racionalidad hermenéuticasignifica una forma de abordar, estudiar, entender, analizar y construir conocimientoa partir de procesos de interpretación,donde la validez y confiabilidad del conocimientodescansa en última instancia en el rigor del investigador" (Cisterna, 2005:62).

La triangulación hermenéutica consiste en:

Agrupar la información por ámbito, según los distintos ámbitos en los cuales se ha recopilado.

Agrupar la información por estamento, es decir, por tipo de población investigada.

Agrupar la información por tipo de instrumento utilizado

Finalmente, la unidad de estudio la constituye un colegio de la comuna de Paine, región Metropolitana mientras los sujetos de análisis son tres profesores que realizan clases en la asignatura de matemática; el primero en primer ciclo, el segundo en segundo ciclo y el tercero en enseñanza media.

RESULTADOS YCONCLUSIONES

A partir del análisis desarrollado a través de la triangulación hermenéutica de la información recogida tanto por las entrevistas semiestructuradas como la observación no participante, permiten señalar que la matemática enseñada por los docentes está muy lejos de representar el paradigma de la matemática crítica. En primer lugar carece de contextualización de los contenidos, si bien, según

la entrevista, los docentes dicen aplicarla y reconocen la importancia de ésta, no se observa en la realización de las clases.

Por otra parte, las actividades propuestas por los docentes investigados están centradas, mayormente, en el manejo de algoritmos por lo que no presentan la posibilidad de resolver problemas en contexto ni menos analizar críticamente datos reales.

Consecuencia de los anterior, las clases son de tipo expositivo, así no se centran en el alumno como protagonista del aprendizaje, en contraposición de la matemática crítica donde el reto consiste en generar que los estudiantes tengan mayor participación en procesos democráticos a partir de las dinámicas que se den desde las aulas de clases. En la medida en que ellos vivencien desde la escuela, situaciones en las que sean agentes activos para la toma de decisiones y el desarrollo de las actividades, podrán transmitir tal formación en su actuar y el quehacer como ciudadanos activos de una comunidad.

Finalmente, según lo analizado en los tres docentes investigados las prácticas y modelo docentes están lejos de ser representativos de la educación Matemática Crítica y principalmente representan modelos clásicos.

Referencias

Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. Theoria, 14(1) 61-71. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=29900107

Daza J. (2010). Renovación curricular en programas de ciencias de la salud y su impacto en las prácticas pedagógicas de los profesores. Revista Ciencias de la Salud; 8 (1): 71-85.

Gascon, J. (2001). Incidencias del modelo epistemológico de las matemáticas sobre el modelo docente. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 129 - 159.

Guerrero, O (2008). Educación Matemática Crítica: Influencias teóricas y aportes. Evaluación e Investigación. Núm. 1. Año 3. 63-79.

Hernández Sampieri, R. Fernández, C. y Baptista, P. (2002). Metodología de la investigación México, DF, México: McGraw-Hill Interamericana Editores.

Font, V. (2002). Una organización de los Programas de Investigación en Didácticas de las Matemáticas. Revista EMA, 127 -170.

Parra, V (2013). Una propuesta didáctica para construcción de ciudadanía crítica a través del aprendizaje de la matemática. Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. ISSN 2301-0797 (pp. 3918-3926). Montevideo.

Rodríguez, D. Valldeoriola, J.(2009). "Metodología de la investigación." Recuperado dehttp://www.zanadoria.com/syllabi/m1019/mat_cast-nodef/PID_00148556-1.pdf

Vilanova y otros (2005). Concepciones de los Docentes sobre la Matemática. Su Incidencia en la Enseñanza y el Aprendizaje.Reunión Latinoamericana deMatemática Educativa. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

[i] Este trabajo forma parte de las actividades de Grupo Investigación en Educación y Educación Matemática (GIE2MAT) GI 152823/EF Universidad del Bío-Bío

CONSTRUCCIÓN DIDÁCTICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS DESDE LA TEORÍA LOS MODOS DE PENSAMIENTO.

Bonilla Barraza,D[a] yParraguezGonzález,M.[b]

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
danielabonillab@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen
El presente reporte de investigación, tiene por objetivo mostrar los elementos de una construcción didáctica y matemática para el sistema de los números enteros (Z), como una propuesta de enseñanza – aprendizaje en la formación inicial de profesores desde la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska; desde este referente comprendemos Z desde tres perspectivas, (AE): como un representante de una clase de equivalencia, (AA): como un conjunto de números positivos, negativos y el cero, y (SG): como un punto en la recta numérica. Se sustentan las evidencias que muestran la articulación de los tres modos de pensar Z.

Palabras claves: *Números enteros, recta numérica, profesores.*

Antecedentes y objetivos de investigación

El presente reporte de investigación, tiene por objetivo mostrar los elementos de una propuesta de enseñanza – aprendizaje para el sistema de los números enteros (*Z*), en la formación inicial de profesores.
El marco teórico sobre el cual se basa este estudio es *los modos de pensamiento* propuestos por Anna Sierpinska (2000), donde se distinguen tres modos de pensar un concepto: analítico-estructural (AE) –a partir de su definición formal–, analítico-aritmético (AA) –donde los objetos son pensados a través de relaciones numéricas–, y sintético-geométrico (SG) –como figuras que lo representan–.
Los modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos. Estos dependen de los tipos de relaciones y objetos que evoquemos al momento de pensar en un objeto algebraico o al intentar resolver una tarea. Indudablemente el tipo de tarea que se le presenta a un estudiante guarda estrecha relación con el modo de pensamiento que éste utiliza para resolverla.
La principal diferencia entre los modos 'sintético' y 'analítico' es que en el modo sintético, los objetos son dados directamente para ser descritos por la mente, la cual trata dedescribirlos, es decir, de manera natural, mientras que en el modo analítico estos objetos son dados indirectamente, de hecho son construidos solamente por la definición de las propiedades de los elementos (Sierpinska, 2000).

Situamos entonces, a partir de los elementos que nos brinda el referente teórico, el sistema de los números enteros desde tres perspectivas, (AE): como un representante de una clase de equivalencia, (AA): como un conjunto de números positivos, negativos y el cero, y (SG): como un punto en la recta numérica (Figura 1).

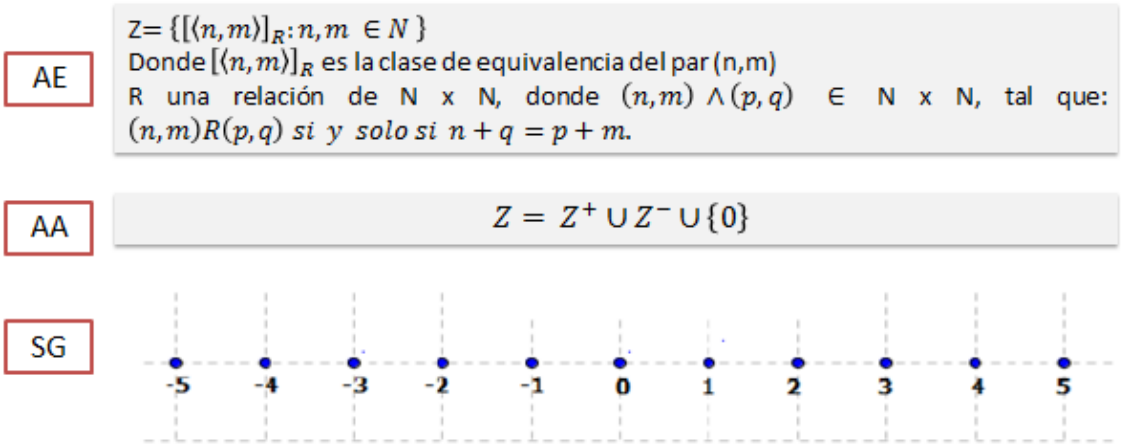


Figura 1: Modos de pensar el sistema de los números enteros.

Los estándares de desempeño docente plantean:"El futuro profesor comprende la construcciones de Z a partir de N" (Ministerio de Educación, 2012, p.112) es por esta razón que se propone la presente construcción didáctica de Z.

Desde la teoría "comprender un objeto matemático, es poder abordarlo articuladamente desde AE, AA y SG (Parraguez, 2012). Es por ello que, se realizó una revisión bibliográfica matemática y didáctica, en busca de aquellos elementos que permiten articular los 3 modos de pensar Z, dispuestos en la figura 1.

Metodología

La metodología utilizada en esta primera parte del estudio es una, Revisión documental, entendida como: "el proceso dinámico que consiste esencialmente en la recogida, clasificación, recuperación y distribución de la información" Latorre, Rincón y Arnal (2003, pág. 58).

El objetivo de esta revisión, es identificar el o los enfoques (sintético, analítico o estructural) presentes en la construcción matemática del sistema de los números enteros en libros especializados que permita situar este sistema desde el marco teórico propuesto. Así, como también indagar en los elementos matemáticos que cumplen con el rol de conectores entre los elementos de la construcción matemática.

Se destaca de esa indagación el surgimiento de elementos esenciales en el tránsito AE – SG y AE-AA como el plano discreto y la recta numérica, se precisa que su tratamiento debe ser más importante que una simple representación. Por ello, es relevante promover en los futuros docentes la reflexión sobre ¿cómo se disponen los números enteros en la recta numérica?.

Elementos de la construcción didáctica, análisis a priori

Se promueve inicialmente el tratamiento en un modo AE de *Z*. En actividades como:

Actividad 1:

a) Sea R una relación definida sobre N x N donde $(n,m) \in NxN$ *, tal que:* $(n,m)\ R\ (p,q)$ *si y solo si* $n+q=p+m$*, Escriba pares ordenados de las clases de equivalencia de los pares (2,3); (1,5) ; (7,7) ; (4,1) ; (2,1).*

b) Identifique características comunes de los elementos de una clase de equivalencia.

c) *Escriba representantes de las clases de equivalencia donde n=m; n>m ; n<m . redacte sus conclusiones.*

A partir de la relación dada, los estudiantes encontraran infinitos pares equivalentes a otros, esta idea, refuerza el concepto de representante de una clase de equivalencia.

Una vez comprendido el modo AE, se puede transitar hacia un modo AA, abordando por ejemplo la clase del par (2,3), como el conjunto $\langle(2,3)\rangle = \{(5,6),(6,7),(8,9) \dots \dots \dots\}$, en general $\langle(2,3)\rangle = \{(5,6),(6,7),(8,9) \dots \dots \dots\} = \{(a, a+1)/a \in N\}$.

En este tránsito, es esencial el rol del docente formador, pues debe guiar la reflexión para que los estudiantes (profesores en formación) comprendan, en primer lugar, cuales clases de equivalencia corresponden a números positivos, negativos y cero, se puede hacer preguntas como, ¿en qué casos el valor de m es mayor al valor de n? , ¿En qué casos son iguales m y n?, también se puede sugerir que elijan un representante de cada clase.

Se espera que esta reflexión conjunta, derive en la construcción de $\{0\} = \{\langle n, m\rangle; n = m\}$; $Z^- = \{\langle n, m\rangle; n < m\}$; $Z^+ = \{\langle n, m\rangle; n > m\}$, comprendiendo Z en un modo AA como, $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$.

En segundo lugar, se busca que a partir de las características que establecen los estudiantes, sobre las clases de equivalencia, permitan al docente formador institucionalizar, concluyendo que a cada clase de equivalencia, le corresponde el símbolo usual que representa cada número entero.

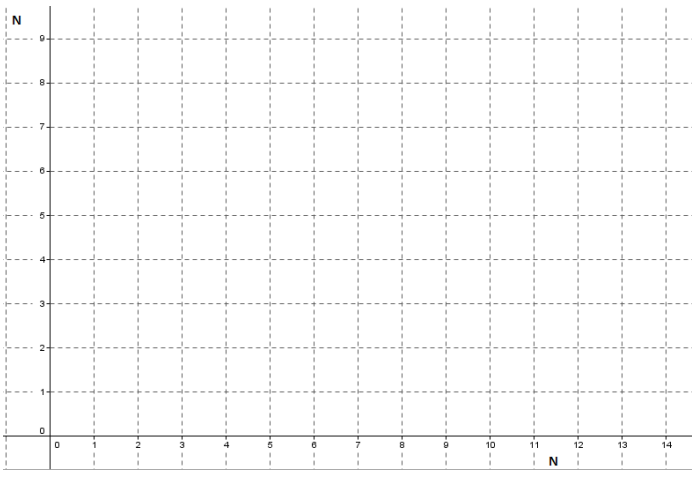
$\{\{(5,0);(6,1);(7,2);(8,3) \dots \dots \dots\} = \{(a+5, a)/\ a \in N\} = 5$

$\{\{(0,5);(1,6);(2,7);(3,8) \dots \dots \dots\} = \{(a, a+5)/\ a \in N\} = -5$

En resumen, el tránsito entre los modos AE- AA, potencia la comprensión del sistema de los números enteros y también la comprensión de la naturaleza de un número entero.

Actividad 2: Ubique

Estos pares ordenados en el plano discreto de $Nx\ N$. ¿Qué observas?, Reflexione sobre ¿cómo se forma la recta numérica del sistema de los números enteros?



En esta fase se potencia el tránsito entre los modos AE –AA--SG, considerando como idea esencial de dicha articulación potencia la construcción de la recta numérica discreta de Z. A partir del trabajo con las clases de equivalencia, se espera que los estudiantes, ubiquen los pares ordenados de cada clase en el sistema de referencia *N x N*, identificando situados en un modo AA , cuales pares corresponden a números negativos, positivos y cero, para posteriormente dar cuenta de que cada

clase de equivalencia tendrá una única ubicación en un nueva recta , que puede estar dispuesta en forma diagonal, como se muestra en la figura 2, obteniendo así, el modo SG de Z.

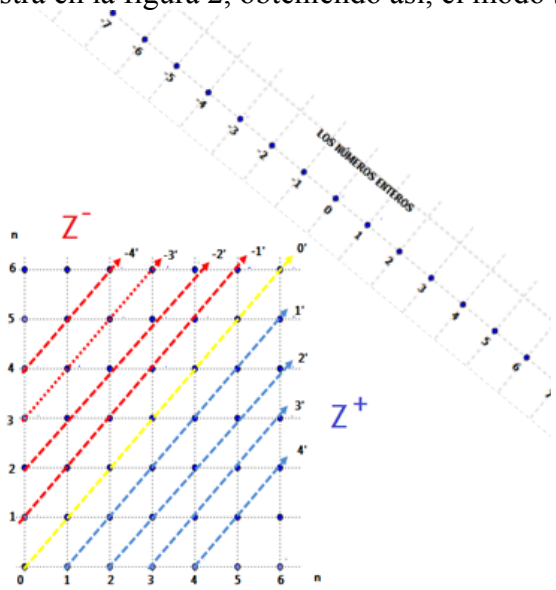


Figura 2: Desde las clases de equivalencia a la recta numérica.

Otra posible respuesta de los estudiantes, puede ser que los números enteros se pueden representar en la recta numérica, agregando a la izquierda del cero los números negativos, como se muestra a continuación. todos los pares ordenados de una clase de equivalencia de un mismo número entero **"**cae"en el mismo lugar de la recta numérica. (ver figura 3)

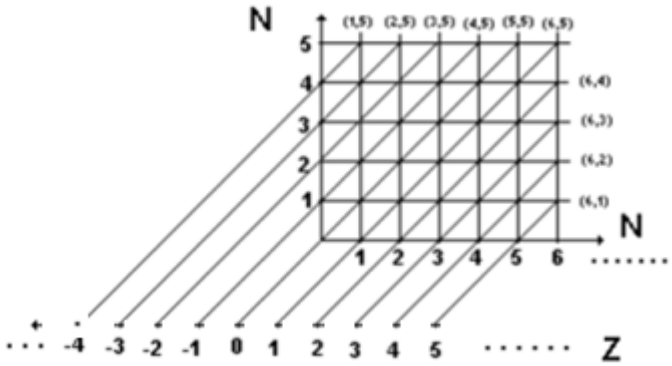


Figura 3: recta numérica discreta de Z.

Es importante destacar, el rol del plano discreto Nx N, pues actúa como uno de los elementos articuladores entre los Modos AE- SG, de la propuesta didáctica.

Referencias bibliográficas

Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor.

Construcción de los Números Reales (2010). En P. J. Herrero, Topología de Espacios Métricos (págs. 175-182).

Flores, Raúl : (1971) Fundamentos de los sistemas numéricos. Interamericana. México. Parraguez, M. (2012). Teoría los modos de pensamiento: Didáctica de la Matemática
Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile.

Lewin, R. A. (2007). Introducción a la teoría de conjuntos.
Ministerio de Educación. (2012). Estándares orientadores para carrera de pedagogía en Educación media. Santiago: Ministerio de educación.
Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra.En J.

ETG DE REFERENCIA EN CHILE, SIMETRÍA: ESTUDIO DE CASO

Pizarro, A.[a], Díaz, S.[b],Rojas, K., López, P[c].

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso;

andrea.pizarro@ucv.cl[a], susana.diaz.oyanedel@gmail.com[b].

Resumen

El presente artículomuestra parte de los resultados de una investigación que estudió la circulación y progresión del Espacio de Trabajo Geométrico de Referencia de Chile,en tercero y cuarto básico, en torno a las Transformaciones Isométricas. En este artículo nos referimos a una de las Actividades Sugeridas por el Ministerio de Educación de Chile, en el Programa de Estudio de cuarto año básico. En esta se identifican los elementos epistemológicos y procesos cognitivos que la actividad moviliza -a la luz de la teoría del Espacio de Trabajo Geométrico propuesta por Alain Kuzniak et al.-

Palabras clave: *Transformaciones Isométricas, Espacio de Trabajo Geométrico, Génesis y Circulación.*

PRESENTACION

En Chile, la educación matemática está regida por los documentos ministeriales: Bases Curriculares y Programas de Estudio. Estos son construidos, avalados y distribuidos, por el Ministerio de Educación (MINEDUC) a modo de unificar la enseñanza a nivel nacional, apoyando así el quehacer docente.

Los aprendizajes alcanzados por los estudiantes chilenos, son evaluados a través de pruebas internacionales estandarizadas como TIMSS[i]. En el año 2011, esta evaluación arrojó bajos resultados en el área de geometría ("figuras geométricas y medidas") en 4º básico, con 455 puntos. Dada la clasificación de TIMSS, dicho puntaje pertenece al nivel de desempeño Bajo, distante de los 550 puntos requeridos para posicionarse en el nivel Alto. Luego, las Transformaciones Isométricas fueron añadidas al primer ciclo básico en el año 2012.

Es por esto que la investigación[i] se centró en el estudio de los Programas de Matemática dentro del área de Geometría, en el objeto geométrico Transformaciones Isométricas (TISO), que se encuentra en los niveles de 3º y 4º básico. Este artículo presenta elementos de dicha investigación correspondiente al objetivo específico: Reconocer la Circulación del Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) de las actividades propuestas por el MINEDUC en Chile, en el objeto geométrico TISO de dichos niveles.

La investigación se realizó bajo un paradigma cualitativo, tal como establece Albert, M (2007):*"Es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, y a la toma de decisiones…*" (p.147).Elanálisis sistemático del ETG de referencia se realizó a través de un Análisis de Caso, al estudiar meticulosamente los documentos ya mencionados. Dicho análisis se realizó en dos partes, primero se estudió la correspondencia entre los elementos de los programas, en segundo lugar se estudió el ETG que cada actividad moviliza.

En este artículo se presenta el análisis de la actividad (MINEDUC, 2012): "*Identifican simetría en señales de tránsito y trazan la línea de simetría en ellas*" (p.113), correspondiente al objetivo (MINEDUC, 2012): *"Demostrar que comprenden una línea de simetría (...) en figuras"*(p.112), parte de la segunda etapa de la investigación.

Para ello se presenta la Teoría del Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) de los autores Catherine Houdement y Alain Kuzniak (2006), extendida por este último.

Espacio de trabajo geométrico (etg)

Corresponde a un proceso complejo y progresivo en que se articulan todos los elementos matemáticos para el desarrollo del pensamiento. Es decir, son todos los elementos que, desde el punto de vista didáctico, se movilizan con el fin de facilitar el trabajo del individuo en la resolución de situaciones problemáticas.

Para organizar el estudio del concepto de Espacio de Trabajo Geométrico se reconocen dos niveles o planos horizontales no jerarquizados,*"...uno de naturaleza epistemológica, en relación estrecha con los contenidos matemáticos del ámbito estudiado y, el otro, de naturaleza cognitiva, que concierne al pensamiento del sujeto que resuelve tareas matemáticas."*(Kuzniak, A. & Richard, P. 2014), formando un enfoque coherente, como se muestra en la figura 1:

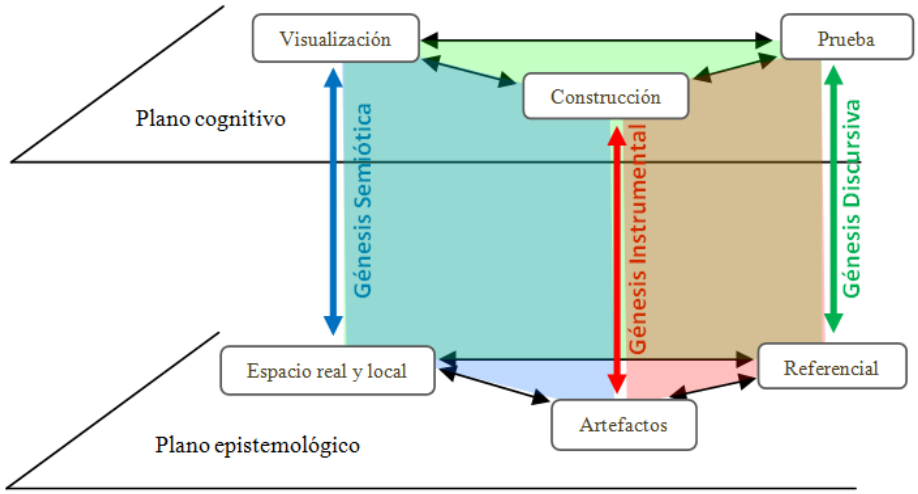


Figura 1: Diagrama General del Espacio de Trabajo Geométrico

A partir de la articulación entre ambos planos horizontales, surgen tres relaciones bidireccionales llamadas génesis: Instrumental [Ins], Semiótica [Sem] y Discursiva [Dis]. Además, los autores plantean el surgimiento de tres planos verticales, [Sem-Ins], [Ins-Dis], [Sem-Dis] según las génesis que los delimitan, como muestra la figura 1.

Kuzniak A. & Nechache A. (2015) plantean que para que el trabajo geométrico sea considerado "completo", este debe circular a través de los tres planos verticales. Se considera Circulación a la movilización interna del Espacio de Trabajo Geométrico en una tarea geométrica dada, es decir, cómo se articulan los componentes y procesos a lo largo del desarrollo de dicha tarea.

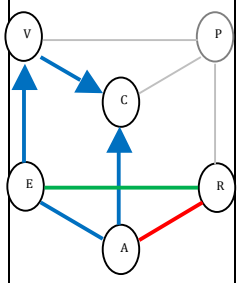
Tipos de etg

A partir de la comprensión del concepto de ETG, los autores proponen tres subtipos de espacios de trabajo geométrico: De Referencia, Idóneo y Personal. El primero corresponde a las propiedades, axiomas y definiciones que delimitan el trabajo de la comunidad matemática. El segundo es la reorganización didáctica de los componentes del ETG de Referencia con el fin de articularlos para su enseñanza. El tercero, es dinámico y propio de cada individuo, donde se movilizan los conocimientos matemáticos y las capacidades cognitivas para el enriquecimiento del mismo. Cada ETG Personal se ve influenciado continuamente por el de Referencia, además del ETG Personal de los demás agentes del proceso.

Análisis del espacio de trabajo geométrico

El análisis del ETG que la Actividad Sugerida número 5 del objetivo 17 de cuarto básico moviliza, se muestra en la tabla 1.

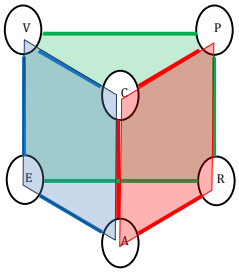
Tabla 1: Entrada al ETG, actividad original.

Actividad	Entrada al ETG	Diagrama
Identifican simetría en señales de tránsito dadas y trazan la línea de simetría en ellas (no se consideran las letras).	E trabajo geométrico comienza en el plano epistemológico, a través de la interrelación entre señales de tránsito, las figuras dentro de ellas y el concepto de simetría. Las señales de tránsito y el lápiz funcionan como artefactos, dado a que permiten manipular el objeto geométrico, a su vez presentan figuras pertenecientes al espacio real y local del estudiante, siendo objetos concretos y tangibles que funcionan como soporte material para el logro de la tarea. Además se utiliza el dominio previo de las características y propiedades de la simetría, que corresponden al componente referencial. La finalidad de la actividad es la construcción del trazado de la línea de simetría, proceso que se persigue tanto desde el uso del artefacto, como desde la visualización de la línea de simetría en las formas extraídas del espacio real y local. El planteamiento de la actividad no permite que se concrete ninguna génesis, ni la circulación entre la construcción y la prueba, o de esta al referencial, debido a que la actividad tiene su foco y fin en la construcción y no da espacio para el proceso de prueba.	

La Actividad Sugerida 5 no presenta la movilización de ningún plano vertical completo, sino que sólo se moviliza el plano horizontal epistemológico en pos de la construcción. A partir de esta actividad, se realizó una modificación para que se produzca la movilización completa del ETG, como muestra la tabla 2:

Tabla 2: Entrada al ETG, actividad modificada.

Actividad	Entrada al ETG	Diagrama

Clasifican señales de tránsito (entregadas en fichas), entre simétricas o no simétricas, argumentando dicha clasificación con el trazado de la línea de simetría en ellas.	El trabajo geométrico circula en el plano epistemológico, a través de la interrelación entre señales de tránsito, las figuras dentro de ellas y el concepto de simetría. Las señales de tránsito y el lápiz funcionan como artefactos, dado a que permiten manipular el objeto geométrico, a su vez presentan figuras pertenecientes al espacio real y local del estudiante, siendo objetos concretos y tangibles que funcionan como soporte material para el logro de la tarea. Además se utiliza el dominio previo de las características y propiedades de la simetría, que corresponden al componente referencial. Para la clasificación de las señales de tránsito, el estudiante debe visualizar las líneas de simetría en cada figura (génesis semiótica), y utilizar los artefactos como herramientas para desarrollar la construcción de las líneas de simetría (génesis instrumental), dentro del proceso de argumentación, para generar un discurso (génesis discursiva).	

Al realizar estas modificaciones para la actividad 5, se produce la circulación dentro de los tres planos verticales de manera simultánea, por lo que se completa el prisma del ETG.

CONCLUSIONES

Considerar las habilidades en la redacción de cada actividad, produce un enriquecimiento del ETG movilizado por esta, puesto que posibilita la concreción de las distintas génesis y la relación entre ellas. Por ejemplo, en actividad mejorada, el desarrollo de habilidades permite el logro de los procesos del plano cognitivo por parte del estudiante y la interacción entre ellos. De esta manera, incluso las modificaciones sutiles en la instrucción de la actividad, generan grandes cambios que enriquecen la circulación del Espacio de Trabajo Geométrico.

Como consecuencia del enriquecimiento del ETG movilizado por la actividad, por ejemplo al tener una tarea geométrica pertinente, se produce un mayor enriquecimiento del ETG personal de los estudiantes y por lo tanto una comprensión más profunda de la simetría. En concreto, es importante considerar la teoría propuesta por Kuzniak et al. en la planificación de la enseñanza, considerando los elementos que se utilicen y los procesos que se busca intencionar a lo largo de las diferentes secuencias didácticas y situaciones de aprendizaje.

Tal como se menciona en el marco teórico, la construcción "completa" de un concepto geométrico para que la distancia entre el aprendizaje esperado y el alcanzado sea mínima, está dada por la circulación del Trabajo Geométrico a través de los tres planos verticales, pues mediante esta se va enriqueciendo el ETG Personal de cada uno de los estudiantes.

Referencias

Albert, M. (2007). La investigación educativa. Editorial Mcgraw-hill.

Chile, Ministerio de Educación. (2013).Resultado TIMSS 2011. Recuperado de: http://www.mineduc.cl/usuarios/acalidad/doc/201301151653440.Informe_Resultados_TIMSS_2011_Chile_(10-01-13).pdf

Chile, Ministerio de Educación. (2012). Matemática: Programa de Estudio Cuarto Año Básico. Recuperado de: http://curriculumenlinea.mineduc.cl/sphider/search.php?query=&t_busca=1&results=&search=1&dis=0&category=10

Díaz, S., Rojas, K., Véliz, N., Silva, M. (2015). Circulación y progresión del Espacio de Trabajo Geométrico en los programas de Matemáticas, en tercero y cuarto básico, en torno al objeto de estudio Transformaciones Isométricas.Trabajo de titulación, PUCV.

Kuzniak, A., Nechache A. (2015). Using the geometric working spaces in order to plan the teaching of geometry.Rescatado de: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Cerme.pdf

Kuzniak, A., Richard, P. (2014) Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. Recuperado de:http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_ES/Relime_Intro_es.pdf

---

[i] TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Study.

[ii] Días, S., Rojas, K., Véliz, N., Silva, M. 2015. *Circulación y progresión del Espacio de Trabajo Geométrico en los programas de Matemáticas, en tercero y cuarto básico, en torno al objeto de estudio Transformaciones Isométricas.*

ARTEFACTO Y ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO EN LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Flores-González, M.[a]Montoya-Delgadillo, E.[b]

[a,b,c]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso;
prof.macarena.flores@gmail.com[a], elizabeth.montoya@pucv.cl[b]

Resumen

En el presente trabajo se investiga y estudia sobre el aprendizaje de la multiplicación de los números complejos, con el objetivo de enseñar este contenido activando la génesis semiótica privilegiando el registro gráfico, a partir de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático. En esta investigación de corte cualitativo, se ha implementado una propuesta de aprendizaje con 34 estudiantes de ingeniería y 4 estudiantes de Matemática, ambos de primer año universitario (18-19 años), donde se evidencia a partir de los resultados, que al momento de realizar tratamientos y conversiones entre los registros semióticos mencionados anteriormente con un artefacto de tipo software, y activando las distintas génesis del ETM, existe una mejor comprensión del objeto matemático en cuestión.

Palabras clave: *Espacio de Trabájo Matemático, Multiplicación de Números Complejos, Artefacto, Visualización, Génesis.*

EL PROBLEMA: ALGEBRIZACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

En nuestra experiencia en el aula hemos constatado un privilegio en la escritura algebraica por sobre otras escrituras del objeto, lo que puede provocar una comprensión superficial de las propiedades.Para estudiar los números complejos no basta con saber las operaciones algebraicas y aritméticas que ellos cumplen, más aún, si bien el rol del álgebra en el desarrollo de la Matemática ha sido muy importante, habría que evitar la algebrización cuando esta no sea estrictamente necesaria con la finalidad de una mejor apropiación del objeto matemático, en otros términos, activar y articular los planos epistemológicos y cognitivos en el estudiante.(Montoya,Mena, Mena, 2015,p.13).

Dentro de los trabajos de investigación referentes a la enseñanza de números complejos, se encuentra a Barrera (2014) la que realiza una investigación referente a la multiplicación de números Reales y Complejos, con el objetivo de caracterizar el espacio de trabajo matemático de 34 grupos de estudiantes de Francia (de dos a cuatro personas de 17 y 18 años de edad) provenientes de un liceo científico, a través de un cuestionario de 5 preguntas realizadas; gracias a las producciones obtenidas la autoraevidenció que el objeto matemático tratado debe emerger en los estudiantes activando las génesis dentro del plano cognitivo.

Deacuerdo a Artigue, M. &Deledicq, A. (1992), existen cuatro étapas en la historia de los números complejos: *La aparición de cantidades imaginarias en algoritmos operatorios (siglo XVI)*(p.6)*; El funcionamiento como herramienta y el encuentro con los ángulos y logaritmos (siglo XVIII)*(p.16)*; Las representaciones geométricas de las cantidades imaginarias (siglo XIX)*(p.33),y por último,*La construcción algebraica (siglo XIX)* (p.50). Para efectos de nuestra investigación nos centraremos en el tercer momento y cuarto momento. Dentro de la representación geométrica encontramos a Wessel, que en 1797 multiplica geométricamente segmentos dirigidos, donde argumenta que esta

multiplicación debe tener dos propiedades, que *la longitud del producto debía ser el producto de las longitudes de cada segmento y que el segmento producto debia diferir en la direccion de cada segmento factor por la misma cantidad angular que el otro segmento factor difería en direccion al compararlo con el segmento unidad*. (Nahin, 2008, p.71). Gauss por tu parte, en el mismo siglo, define un número complejo como un punto, pero no como un segmento dirigido (Kline, 1972, p.834-835). Con el pasar de los años, se puede notar que los matemáticos han usado distintas notaciones para trabajar conlos números complejos, un ejemplo de esto es la definición que entrega Euler (siglo XVIII) de unidad imaginaria, dice que $i = \sqrt{-1}$; con los años esa convención cambió porque generaba inconvenientes para trabajar (operacionalizar) con ellos[28], posteriormente llegó a ser $i^2 = -1$. Sin embargo, en la actualidad se sigue incurriendo en la misma notación, existiendo abuso de lenguaje incluso en algunos textos escolares, lo que lleva a errores en el aprendizaje de los números complejos.

A la luz de la problemática planteada, el objetivo general de esta investigación fue: enseñar la multiplicación del sistema de los números complejos con un énfasis gráfico; por ende los objetivos específicos fueronDiseñar e implementar una propuesta donde distintos registros puedan enlazarse mediante conversiones y Caracterizar el espacio de trabajo matemático personal del estudiante a través de las componentes que conforman el espacio de trabajo. Intencionamos una propuesta de enseñanza de tal manera que se evidenciara al menos dos cambios de registros de la multiplicación de los números complejos; en este sentido fue pertinente preguntarse ¿Qué elementos interfieren en los cambios de registros de representación en la multiplicación de números complejos? y ¿Cómo articular las componentes presentes en el espacio de trabajo matemático del estudiante en relación con la multiplicación de números complejos?. De forma conjunta, realizamos los análisis anteriormente mencionados a la luz del marco teórico que se presenta a continuación.

El espacio de trabajo matemático (ETM)

El Espacio de Trabajo Matemático, ETM, desarrollada por Kuzniak (2011) e inspirada en los *ParadigmasGeométricos y Espacio de Trabajo Geométrico,* ETG, por Houdement y Kuzniak (1996, 2006). En el ETM se concibe la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos (geométricos, algebraico, etc.), en un *ambiente organizado por y para el matemático* (*geómetra*, *algebrista, etc)* mediante la articulación de dos planos: el epistemológico y el cognitivo.El *plano epistemológico* está constituido por tres *componentes* o *polos*: *representamen (o representante*), *referencial* y *artefacto*. El *plano cognitivo* está también conformado por tres componentes: los procesos de *visualización, construcción* y *prueba*. La articulación entre estos planos se realiza mediante un conjunto de génesis: *semiótica, instrumental y discursiva* que favorecen su coordinación (Kuzniak, 2011), como se muestra en la figura 1.

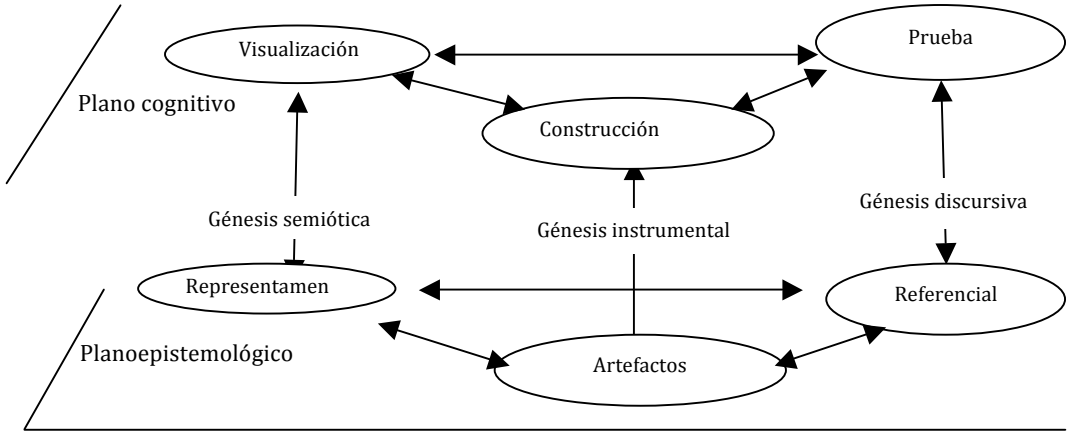


Figura 1. Espacio de trabajo geométrico y sus génesis (Kuzniak, 2011)

La teoría caracteriza además tres tipos de espacios de trabajo: (1) de referencia, definido según la relación con el saber, e idealmente sobre criterios matemáticos; (2) idóneo, según se enseña este saber en una institución dada con una función definida, y (3) personal, según se enfrenta el problema con los propios conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas (Kuzniak, 2004). La activación de las génesis y una circulación intencionada en el ETM propicia el conocimiento matemático (Montoya, Mena, Mena, 2012).

Análisis del ETM personal a partir de la misma tarea

La tarea establecida que deba realizar el estudiante, activa por lo menos una génesis en el alumno, luego para realizar un análisis del *ETM personal* a partir de una tarea es necesario identificar qué elementos aparecen en cada una de las componentes del ETM y cuál es la relación entre una génesis y otra. En esta investigación se presentan tareas que activan y dan sentido al espacio de trabajo *personal,* ya que la interacción entre problemas matemáticos y el individuo lleva a la reflexión en el ETM.

Contexto metodológico y de experimentación

En este trabajo se efectuó una investigación de tipo cualitativa y reposa sobre una situación de aprendizaje diseñada para un contexto de una implementación con intervención docente.

En cuanto a la metodología, esta se basó en la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). Para ello, se realizaron las 4 fases correspondientes: en los *análisis preliminares,concepciones y análisis a priori*, *análisis a posteriori y validación*.Refiriéndose a la *experimentación*, la secuencia de aprendizaje se aplicó en primera instancia a un curso de primer año de universidad, en una carrera de Ingeniería. La implementación se hizo a cargo del profesor del curso y se realizó a 34 estudiantes de primer año (18-20 años). En una segunda instancia, la situación estuvo a cargo de las investigadoras, se aplicó a 2 binomios con estudiantes de la misma Universidad de Pedagogía en Matemáticas (un estudiante que reprobó algebra 1 y otro que aprobó la asignatura) y en momentos diferentes. En cuanto al análisis a priori, se diseñó bajo el marco teórico un protocolo de análisis para las producciones, identificando el artefacto utilizado (con papel milimetrado en una primera implementación y con software en una segunda implementación).

PRINCIPALES RESULTADOS OBTENIDOS

Pregunta iv, 2ª implementación

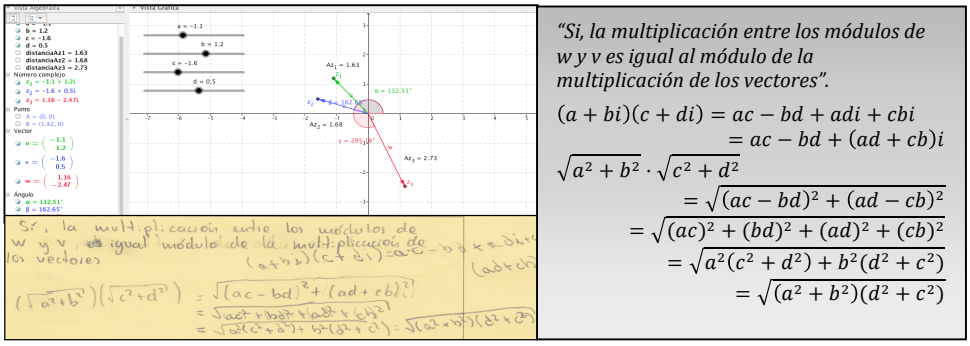
Esta pregunta tiene por objetivo visualizar y describir la relación existente por un lado, entre los módulos de la multiplicación de dos números complejos cualesquiera y por otro lado entre los argumentos de la multiplicación de dos números complejos cualesquiera. A partir del representamen ubicado en el artefacto, el estudiante active el plano "Semiótico-Instrumental" y con el pueda comunicar sus conclusiones por medio del plano "Semiótico-Discursivo".

Grafique el complejo w y multiplíquelo por el complejo $v = c + di$, con $c, d \in \mathbb{R}$. Luego responda.

a.-¿Existe alguna relación entre los módulos de los complejos w, v y la multiplicación de ellos? Justifique su respuesta.

Binomio2:

Comienzan nuevamente interactuando con el software utilizando aproximadamente 5 minutos en ello y logran contestar pregunta. Luego comienzan a dar justificación a su respuesta. En cuanto al ETM, parten por el plano Semiótico-Instrumental, pero además, los estudiantes se sitúan bastante en la génesis discursiva. Ahora mostraremos la respuesta entregada por B2.



"Si, la multiplicación entre los módulos de w y v es igual al módulo de la multiplicación de los vectores".

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + adi + cbi$$
$$= ac - bd + (ad + cb)i$$
$$\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$$
$$= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad-cb)^2}$$
$$= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (cb)^2}$$
$$= \sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(d^2+c^2)}$$
$$= \sqrt{(a^2+b^2)(d^2+c^2)}$$

Figura 2. Producción B2.

b.- ¿Existe alguna relación entre los argumentos de los números complejos w, v y la multiplicación de ellos? Justifique su respuesta

Binomio 1:

No les basta con lo que observan para poder justificar la pregunta, por lo tanto ocurre lo mismo a nivel de ETM de la pregunta anterior. A continuación se muestra la respuesta dada por B1.B1:

$z = j + hi = \sqrt{j^2+h^2} \cdot cis(\theta + \alpha), w = a + bi = \sqrt{a^2+b^2} \cdot cis(\alpha),\ v = c + di = \sqrt{c^2+d^2} \cdot cis(\theta)$

Pd. $w \cdot v = z$

La multiplicación del módulo se hizo en la pregunta anterior.

Pd: $cis(\alpha) \cdot cis(\theta) = cis(\theta + \alpha)$

$(\cos(\theta) + isin(\theta))(\cos(\alpha) + isin(\alpha) = \cos(\theta)\cos(\theta) + isin(\alpha)\cos(\theta) + isin(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\theta)$

$= \cos(\theta+\alpha) + isin(\alpha+\theta) = cis(\alpha+\theta)$

$w \cdot v = z \Rightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2} \cdot cis(\alpha)\right)\left(\sqrt{c^2+d^2} \cdot cis(\theta)\right) = \sqrt{j^2+h^2} \cdot cis(\theta+\alpha)$

Por lo que está ahí dicho el argumento del complejo resultante es la suma de ambos argumentos de los números complejos w, v.

CONCLUSIONES

En una primera instancia (donde se utilizó el papel milimetrado como artefacto), quedó en evidencia la problemática planteada referida a la génesis semiótica en relación con la algebrización del objeto matemático, ya que ningún estudiante pudo dar respuesta a la pregunta final que englobaba la interpretación de la representación gráfica de la multiplicación de dos números complejos. Generalmente, los estudiantes se entrampaban en la conversión del registro gráfico al

registro de lenguaje natural, conversión que naturalmente es más compleja por el poco nivel de congruencia existente. Uno de los factores porque ocurre lo anterior, es que los alumnos se encuentran más familiarizados al trabajar en el registro algebraico, y estos resultados los llevan a la gráfica sin tener un análisis profundo de lo que ocurre; por este hecho se vuelve fundamental el artefacto utilizado en la segunda implementación (software), ya que gracias a él se pueden visualizar de manera más concreta todas las gráficas pedidas, hace que el estudiante pueda generalizar sus respuestas con mayor facilidad y por lo tanto se cuenta con una herramienta que sin duda ayuda a la profundización del objeto. En este sentido, teóricamente se ha intencionado una circulación vertical en el ETM-personal del estudiante.

Luego de la reformulación del cuestionario, se pudo constatar la importancia de crear actividades que ayuden a que el estudiante pueda llegar a construir su conocimiento poniendo atención en detalles tan importantes como la definición de unidad imaginaria.Nos parece fundamental la participación del profesor, para que los estudiantes se apropien sobre estos aspectos relacionados con el objeto matemático tratado en esta investigación. Con lo mencionado previamente en cuanto a la génesis semiótica no queremos decir que se deje de lado el registro algebraico, sino que el alumno debe conocer las distintas representaciones del objeto y las conversiones que hayan entre estos, con el objetivo que el estudiante sea capaz de realizar esta(s) conversión(es) de manera casi "natural". Por otro lado, un especio de trabajo matemático con la activación de las tres génesis donde hayan circulaciones entre sus componentes, ayuda de manera importante al proceso de aprendizaje y a la construcción del conocimiento en el estudiante.

Principales Referencias

Artigue, M. &Deledicq, A. (1992). Quatreétapes dan l'histoire des nombres complexes: quelquescommentairesépistemologiques et didactiques. Cahier DIDIREM 15, IREM Paris 7.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de TravailMathématique et sesGenèses. Annales de Didactique et de SciencesCognitives, 16, 9 – 24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2015). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Número Especial, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME. 17 (4-1), 20–40.

Montoya-Delgadillo, E, Mena-Lorca, A, Mena-Lorca, J. (2015). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME. 17 (4-1), 1

RAZONANDO MONITOREOS Y TOMA DE DECISIONES EN ADMINISTRACIÓN PÚBLICA.

Soto-Márquez, M.[a], Díaz-Moreno, L.[b]

[a]U. Central, [b]U. de Valparaíso;
monicasotomarquez@gmail.com[a], leonora.diaz@uv.cl[b]

Resumen

Este artículo reporta la exploración y selección de prácticas que ejercen profesionales de la administración pública, develando a partir de su deconstrucción las matemáticas que viven en las prácticas seleccionadas, con la intención de determinar dipolos modélicos que permitan construir estrategias de enseñanza que vinculen la matemática del aula con la matemática de la profesión. Se constata que la razón matemática juega un rol de herramienta, al formar un indicador que concurre con las prácticas de monitoreo y toma de decisiones de estos profesionales, sin embargo este rol se encuentra invisibilizado en el aula escolar y profesional.

Palabras clave: *prácticas profesionales, indicadores, razón matemática.*

ANTECEDENTES

El contexto bajo el cual se desarrollan los cursos para administradores públicos, en su mayoría, obedece a la generación de la matemática como conocimiento científico, dejando de lado las matemáticas que se encuentra en otros contextos (Galicia, Díaz y Arrieta, 2011).

La problemática que se deriva de esta separación da lugar a fenómenos didácticos, mientras menos sentido real tenga la matemática que estudian, menos posibilidades habrá que deduzcan sus aplicaciones en la cotidianidad o en su área técnica. Bajo estas consideraciones Arrieta y Díaz (2015) proponen prácticas que se muevan desde los espacios de formación a los espacios profesionales y viceversa, de modo que ellas mismas constituyan una continuidad de usos de la matemática desde el aula hacia la vida profesional. Para que funcionen como puente entre estas dos áreas, es necesaria una inmersión en el quehacer de los profesionales que deseamos estudiar, deconstruyendo sus prácticas, considerando los procedimientos que realizan, las herramientas que utilizan, los argumentos que esgrimen y las intencionalidades que la llevan a la persona a hacer lo que hace.

Separación de las matemáticas de la formación profesional y las matemáticas de la profesión

Se cuenta con evidencia de una gran distancia entre las matemáticas de la formación y las matemáticas de la profesión. Soto y Díaz (2013) preguntan a profesionales de las ramas de economía y administración que se desempeñan en bancos, en empresas particulares o en cargos públicos, si recurren a las matemáticas en sus labores profesionales. Estos catalogan a sus tareas diarias como administrativas sin advertir a las matemáticas que usan. No obstante al confrontarles con un listado de las matemáticas de la formación profesional, señalan herramientas matemáticas que están lejos de ser básicas. En efecto, indican por ejemplo: recurrir al interés compuesto para la fijación de precios de productos bancarios, el uso del análisis marginal para determinar el costo optimo o análisis de costo beneficio. Esto ocurre porque el profesional se enfrenta de distintas forma a estas herramientas, en muchas ocasiones sólo usando tablas lo que les lleva a pensar que se trata de matemática básica. Un examen detenido revela que esas prácticas que relatan, se relacionan con matemáticas estudiadas en su primer año de preparación profesional. Hasta hoy día la enseñanza pone la responsabilidad de vincular matemática con prácticas de la profesión, en manos de los estudiantes, por lo que en su trabajo posterior como profesionales tampoco asocian sus tareas con la matemática estudiada. Arrieta y Díaz (2015) reportan que un 96% de 238 Ingenieros en

Sistemas Computacionales en servicio (en una localidad de México) responden que no ocupan en su vida profesional ecuaciones diferenciales, con un 4% restante que no contesta. Para los autores ello se debe a que lo que se hace en el aula de ecuaciones diferenciales no aporta sentido al trabajo profesional de ingenieros en ejercicio. La problemática de la separación, que ilustran las evidencias anteriores, puede ser disminuida con prácticas en el aula que sirvan de puente entre la matemática que allí se desarrolla y las actividades que realiza el profesional en su vida laboral, los autores Galicia, Arrieta y Díaz (2011) señalan a la modelación como una de esas prácticas. En el campo de la matemática, la modelación ha sido utilizada como un proceso dinámico que ayuda a entender los fenómenos tanto de la naturaleza (modelos de la física, la química o la biología) como de la ciencia política y de la administración, entre otros (Soto y Diaz, 2013).

Visión acerca de la modelación en educación matemática.

La modelación, es una teoría que emerge del estudio de varios años de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Diversos autores se refieren a esta teoría mirándola desde distintos enfoques. Blomhoj (2004) establece que la modelación matemática puede ser estudiada en los diferentes niveles de enseñanza, como una práctica que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje, indica además que las actividades de modelación pueden ayudar al estudiante a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir importantes conceptos matemáticos. El autor diferencia el modelo matemático con la modelación, el primero es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones con una situación o fenómeno de la naturaleza no matemática, lo que implica que al aplicar la matemática a una situación extra-matemática, algún tipo de modelo está involucrado explícita o implícitamente en ella. Luego, para que un estudiante experimente con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones existentes en él, es condición epistemológica que el estudiante perciba la situación o fenómeno modelado y la matemática en juego, como dos objetos separados pero al mismo tiempo interrelacionados. A partir de su estudio Blomhoj enfatiza la importancia de realizar modelación en el proceso de enseñanza de la matemática e indica: La modelación tiende puentes entre la experiencia de vida diaria de los estudiantes y la matemática; Los estudiantes encuentran motivador trabajar con problemas reales, llamado así, aquel problema que es relevantes para alguien fuera del aula; Los modelos matemáticos de distinto tipo y complejidad están jugando roles importantes en el funcionamiento de sociedades basadas en la alta tecnología.

En Brasil Biembengut (2011), hace un estudio de los comienzos de la modelación en su país y analiza 64 producciones de modelación matemática en la enseñanza media, referidas a prácticas de aula y ensayos teóricos. Desde este análisis distingue tres concepciones de modelación matemática: como método de enseñanza y de investigación, como alternativa pedagógica de la matemática y como ambiente de aprendizaje. Por otra parte en Arrieta y Díaz (2015), miran la modelación como una experiencia de intervención, indican que modelar es, "una práctica de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo. La intervención sobre lo modelado es diversa, por ejemplo la predicción, el diagnóstico y la evaluación". Establecen además que los entes matemáticos al modelar, son herramientas. Desde esta perspectiva el modelo no existe independiente de la actividad de quién modela. Este análisis de la modelación define lo que ellos denominan dipolos modélicos que denotan por (ma, mo), por ejemplo (corazón, electro), el cardiólogo toma una decisión respecto al corazón de su paciente a partir de su modelo, la gráfica que representa el electro, infiere lo que ocurrirá con el corazón, pronostica por ejemplo, si debe operar.

La modelación: una perspectiva desde las prácticas de comunidades profesionales

Las prácticas, evocan el hacer mismo, recurrente y compartido por miembros de una comunidad, con aquellos elementos que los distinguen de miembros de otras comunidades. Dan cuenta de la

trama compleja y dinámica, de las concurrencias del ejercicio de la práctica en un lugar, en un tiempo y en una comunidad. Arrieta (2003) presenta la modelación como una forma de intervenir en la realidad educativa del aula. A partir de su investigación el autor plantea que la modelación permite construcción del conocimiento, la que se devela en las interacciones del humano con su entorno y con los otros, en sus prácticas, en el empleo de sus capacidades, en las herramientas que usa, etc. Su investigación muestra, cómo estudiantes se apropian de lo lineal y lo cuadrático usándolo como herramienta para intervenir en sus comunidades. En Arrieta y Díaz (2015) indican que la modelación corresponde a un proceso recurrente en nuestra sociedad Por ejemplo, el cardiólogo hurga una gráfica para dictaminar acerca del estado de salud de nuestro corazón, en lugar de observarlo directamente. El Ingeniero en Electrónica analiza la gráfica que le presenta el osciloscopio para determinar el funcionamiento de un componente electrónico. No puede "ver" directamente las corrientes, las resistencias u otras propiedades del componente. Las gráficas del osciloscopio son una buena herramienta para la práctica de este profesional. El Ingeniero Pesquero examina las tablas de datos de cultivos de fitoplancton y zooplancton para determinar los parámetros ambientales óptimos para la supervivencia y desarrollo de los organismos. No es posible comprender la evolución de poblaciones marinas u otras, sin el auxilio de los datos organizados (Arrieta y Díaz, 2015). Una característica común de estas prácticas, es que se toman decisiones en relación a una entidad, a partir de otra, característica a la que Arrieta llama el acto de modelar (op. cit., 2003). Este elemento le permite clasificar y discriminar, distinguir a las prácticas de modelación de las que no lo son. El cardiólogo modela cuando analiza la salud del paciente a partir de una gráfica, el ingeniero en electrónica modela cuando lee la gráfica del osciloscopio para determinar si su componente es adecuado para los fines que lo diseñó. Este acto proporciona elementos para analizar la estructura de las prácticas de modelación, devela las fases que las componen, distinguiendo las necesarias y las suficientes, las intencionalidades de las mismas, y, en consecuencia, provee de un medio didáctico para caracterizar cuando alguien modela en el aula. El cientista político modela para obtener proposiciones, predicciones o simplemente resultados, a partir de una serie de supuestos o premisas. El administrador público modela cada vez que recurre a tablas y gráficas a la hora de implementar una nueva política de gobierno. La modelación es una práctica de articulación de dos entidades, para actuar sobre una de ellas, llamada lo modelado, a partir de la otra, llamado modelo. Una de las entidades se convierte en modelo cuando un actor la usa para intervenir en la otra entidad. Se denomina dipolo modélico a las dos entidades así articuladas (Arrieta y Díaz, 2015). Las entidades matemáticas en las prácticas de modelación, son herramientas. Su diversa índole provee de un amplio juego de modelos. Entre ellos se cuentan: ecuaciones o sistemas de ecuaciones algebraicas y/o diferenciales, gráficas cartesianas, trayectorias, formas geométricas, datos organizados en tablas, descripciones verbales y elementos proporcionados por la tecnología (tablas de datos en hojas de cálculo, gráficas o imágenes desde un sensor o un osciloscopio) entre otros. En el marco de esta problemática y orientando este estudio a la preparación de profesionales de la administración Publica, interesa responder: ¿Cómo vive la razón matemática en prácticas que ejercen cotidianamente profesionales de la Administración Pública? Más específicamente interesa deconstruir prácticas de estos profesionales para formar dipolos modélicos que darán bases a diseños de estrategias de enseñanza en el aula.

Metodología

Este estudio guiado por una pregunta orientadora, en el marco de una investigación acción, procura deconstruir prácticas de profesionales buscando develar las intenciones, los procesos que desarrollan, es decir sus procedimientos, las herramientas que usan y los argumentos que utilizan para justificar sus acciones. Esta técnica de recogida de información tiene el propósito de favorecer la producción de un discurso convencional y con cierta línea argumentativa, que posibilite develar textualidades desde sus experiencias personales, biográficas e intransferibles (Alonso 1994). Para Díaz (2008) esta funcionalidad hace visible prácticas y diálogos significativos. Se recurre a establecer eslabones de prácticas que permitan construir puentes de dialogo entre ambientes

escolares (Arrieta y Días 2015) con las propias de comunidades de práctica, para las cuales el sujeto participa activamente (Wenger 2001)

RESULTADOS

Fruto del análisis de las narrativas de los profesionales se constata que una tarea recurrente en el área presupuestaria y del control de la gestión, es definir constantemente de manera técnica y política indicadores estratégicos que le permitieran medir el avance y/o el logro de un proyecto. Los indicadores se construyen en función de lo que se desea medir y a partir de la información que maneja el gobierno o la institución pública que esté realizando la gestión. Un indicador podría ser por ejemplo: número de hospitales respecto a la cantidad de habitantes en una ciudad. La buena construcción o elección del indicador es fundamental para el monitoreo de un proyecto, para saber por ejemplo si se llega a la meta o para conocer la relación del avance después de un cierto periodo. La elección del indicador, en palabras de uno de los entrevistados, "requiere de conocimientos técnicos y matemáticos porque no es una simple división", sería la forma en la que, al vincularse dos cantidades, muestran una condición. El indicador es una razón matemática, la que emerge de manera muy natural de dos formas en la gestión pública. Una de ellas es el monitoreo tanto de políticas públicas como de gastos, para ello se establece un punto de partida (inicio del programa) y un punto final, para evaluar de modo cíclico el proceso, luego la razón ofrece "gratuitamente" ese avance ya que es una relación, que permite contrastar y realizar juicios de avances. Un ejemplo de ello es la razón que se establece entre las personas que son prioritarias para recibir un beneficio y aquellas que efectivamente lo reciben. Si esta razón es muy pequeña entonces se estudian cuáles son los motivos y se establecen proyectos para aumentar el número de personas que lo recibirán. La segunda forma en que la razón matemática se transforma en herramienta para el administrador público, es cuando se mide a partir de ella, la eficiencia de un programa o de un proyecto de gobierno. Un ejemplo de ello, es cuando se compara el número de días que demoran las familias de una localidad en retirar un beneficio, respecto al promedio en periodos anteriores de todas las localidades de la región. Si la razón es muy grande indicaría que las familias no tienen acceso o tienen problemas para retirar el beneficio, por lo que se debe procurar alguna forma de solución para la efectividad del proyecto.

Procedimiento	Herramienta	Argumento	Intención
Construcción y comparación de indicadoras	Indicador (razón matemática)	Se observa como al vincularse dos cantidades muestran una condición	Medir avance, eficiencia de políticas públicas
Comparar total de días con disponibilidad efectiva de vehículos en el año t con el total de días disponibles de vehículos en el año t	Porcentaje de días disponibles de vehículos de la Presidencia de la República en el año t	Atención directa e integral a los requerimientos de la Presidenta de la República y su equipo asesor.	Medir eficacia del servicio de vehículos de la presidencia

Esta deconstrucción permite analizar la correspondencia de esta comunidad de profesionales con la forma de cómo se ejerce la práctica, aparecen entonces el indicador, correspondiente a una razón matemática como herramienta fundamental en la toma de decisiones de estos profesionales. Arrieta y Diaz (2015) señalan que esta práctica de modelación se produce en articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo. El ente se convierte en modelo cuando el actor lo usa para intervenir en el otro ente, por lo que deviene en herramienta. Los autores señalan que lo posible de transportar al aula, es el acto de modelar, el cómo logran construir el dipolo modélico. El Administrador público actúa con dipolos modélicos (mo, ma) como (indicador, acciones de política pública), los que le permiten modelar y tomar

decisiones, es decir, a partir del indicador el administrador interviene en la política pública, monitorea, mide, toma una decisión.

A MODO DE CONCLUSIONES

La razón matemática es una herramienta fundamental para el administrador público, a partir de ella es posible construir un indicador con el que es posible monitorear una política pública, medir la eficiencia de un proyecto de estado, establecer rangos de calidad, generar criterios para repartición, entre otros. Por otra parte Castro y Díaz (2015) muestran evidencias respecto a que en la enseñanza de la razón y de la proporción, en el ámbito de la actividad escolar, se favorece la emergencia de prácticas fundamentadas en procedimientos y reglas, priorizando la algebrización de la razón como cociente o fracción y la proporción como una "regla de tres", la búsqueda del "valor desconocido", o de una ecuación lineal, invisibilizando el rol activo de la razón y la proporción como herramienta en el área profesional. Con la deconstrucción de esta práctica se forma el dipolo modélico, (mo, ma) como (indicador, acciones de política pública) que entrega los elementos fundamentales para el diseño de enseñanza basado en modelación, que permitiría llevar a la razón como herramienta al aula modelando situaciones relacionadas con el quehacer profesional de Administradores Públicos.

Referencias bibliográficas

Alonso B., L. E. (1994) Sujeto y discurso: el lugar de la entrevista abierta en las prácticas de la sociología cualitativa. Delgado, J. M. y Gutiérrez, J. (Coord.) Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales. Ed. Síntesis, España.

Arrieta, J. (2003). La modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México

Arrieta, J., Díaz, L. (2015). Una Perspectiva de la Modelación desde la Socioepistemología. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, V18 (1): 19-42.

Biembengut, M. (2011). Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira. En Acta Electrónica de la XIII Conferenciad Interamericana de Educación Matemática.

Blomhoj, M. (2004) Modelización matemática una teoría para la práctica. Trad. María Mina. International perspective on learning and teaching Mathematics, National Center Mathematic for Education.

Díaz M., L. (2006) Diálogo de Imaginarios de Estudiantes, Profesores y Saberes matemáticos. Una Línea de Investigación en Matemática Educativa. [CDROM] En Actas Electrónicas de las XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Viña del Mar, Chile. Conferencia Especial.

Castro y Díaz (2015) A invisibilidade da razão e o proporcional como ferramentas matemáticas. Artículo enviado a revista de corriente principal.

Galicia A., Díaz L., Arrieta J. (2011). Práctica social de modelación del ingeniero bioquímico: Análisis microbiológico. En Resúmenes de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Soto, M., Díaz, L.. (2013). Matemáticas del currículum y matemáticas de profesionales de la administración y economía. En Resúmenes de 17 JNEM. Chile.

Wenger, E.(2001). Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad. Paidós. ISBN: 84-493-1111-X

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DEL USO DE TECNOLOGÍAS DIGITALES: EXPERIENCIAS DE AULA EN EL CONTEXTO DE UN DIPLOMADO EN LA U.D.P.

Matus, C.[a] Fuentes, J.[b] y Moya, M.[c]

[a]Universidad Diego Portales, [b]Universidad de Santiago de Chile, Universidad Academia de Humanismo Cristiano[c];
cmatuszu@gmail.com[a], jennyfuentesc@gmail.com[b] y moya.mauricio@gmail.com[c]

Resumen

Recientemente se ha puesto de relieve en el currículum escolar chileno, la importancia de trabajar el razonamiento matemático desde los primeros años escolares. La masificación del uso de tecnologías digitales en la vida cotidiana y en el trabajo, se presenta como una gran oportunidad para implementar modelos de enseñanza que propongan el desarrollo de estas habilidades. En este trabajo, se reporta la experiencia de un grupo de profesores de una comuna de San Joaquín, en el contexto de un Diplomado en Educación Matemática y Tecnologías Digitales organizado por el CDPD de la Universidad Diego Portales. En particular se describe, modelos de enseñanza y tipos de recursos digitales que fueron presentados en el programa y que favorecerían el desarrollo del razonamiento matemático, según la literatura especializada. Como resultado, se muestra los tipos de recursos y modelos pedagógicas específicos que fueron implementadas por este grupo de profesores con el objetivo de favorecer el razonamiento matemático en sus estudiantes de enseñanza básica.

Palabras clave: *razonamiento, tecnologías digitales, perfeccionamiento docente, enseñanza básica*

INTRODUCCION

La actual etapa de desarrollo de nuestro país, exige que nuestros estudiantes desarrollen durante su periodo escolar competencias matemáticas complejas. Según las Bases Curriculares de Enseñanza Básica, el papel de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar las habilidades que generan el pensamiento matemático, sus conceptos y procedimientos básicos, con el fin de comprender y producir información representada en términos matemáticos. Se pretende que los estudiantes desarrollen el razonamiento lógico, que implica seleccionar, ordenar y clasificar consistentemente de acuerdo a criterios bien definidos, así como seguir reglas e inferir resultados (MINEDUC, 2013).Internacionalmente, el National Council of TearchersMathematics ha enfatizado además de los contenidos curriculares, los estándares de proceso: Resolución de Problemas, Razonamiento y Demostración, Comunicación, Conexiones y Representación. Es decir, los estudiantes deben aprender matemática entendiéndola, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de sus experiencias y conocimientos previos (NCTM, 2000). Para ello, la enseñanza debe migrar desde un enfoque tradicional a un enfoque constructivista (Godino, 2004). El foco debe ser la resolución de problemas y el modelamiento matemático. Por su parte, las conjeturas deben ocupar un lugar de vital importancia en la resolución de problemas y la construcción de las demostraciones (Larios, 2001).

Dar cumplimiento cabal a estos desafíos educativos de enseñar para el razonamiento matemático, exige que los profesores conozcan y apliquen distintos modelos educativos en aula, de acuerdo a los contextos en que se desempeñan y las características de sus educandos, para lo cual deberían disponer de criterios para saber cuándo, qué y por qué usar tecnología es conveniente y deberían

reflexionar sobre ello sistemáticamente. Las experiencias y la práctica, conforman en esta concepción el punto de partida para el aprendizaje profesional, y se trata en este contexto de un procedimiento didáctico, que promueve activamente el vínculo entre teoría, práctica en el aula y personalidad de los profesores en formación con sus propias exigencias (Planas & Alsina, 2009).

Modelos y estrategias de enseñanza de la matemática para el razonamiento

¿Cómo un profesor puede prepararse para el desarrollo del razonamiento matemático? Según se sugiere en la literatura, es de relevancia analizar la perspectiva de una *Enseñanza para la Comprensión*. Los "desempeños de comprensión"son actividades que requieren que los estudiantes usen el conocimiento en nuevas formas y situaciones (Pogré, 2001). Para ello se requiere que el profesor trabaje diseñando metas y tome conciencia de lo complejo y rico que es establecer claramente los hilos conductorespara que orienten el proceso de enseñanza aprendizaje. Por otro lado, otro modelo que aporta al desarrollo del razonamiento matemático es la*Matemática Realista*, donde es clave el uso de contextos y su aplicación a la vida real.Siguiendo a Alsina (2009), los rasgos más significativos de la Matemática Realista sonutilizar situaciones de la vida cotidiana oproblemas contextuales y, progresivamente, matematizar estas a través de modelos,mediar entre lo abstracto y lo concreto para formar relaciones más formales y estructuras abstractas. Finalmente, otro enfoque relevante de revisar es el *ModeloInteractivo*para el Aprendizaje de la Matemática, un modelo socio constructivista que se resume en: "*Conjetura, trata, observa lo que sucede… aprende como seguir…."* (Robert Davis, 1969, citado en Oteizay Miranda, 2004). Este enfoque propone una serie de cambios de énfasis respecto al conocimiento a enseñar, el rol del profesor, el rol del estudiante, las interacciones, la situación, la evaluación, y sobretodos, la importancia del uso de los recursos didácticos, de la tecnología y los materiales con los que se planifica la enseñanza. En resumen, en estos tres enfoques cobra sentido utilizar tecnologías digitales para el desarrollo del razonamiento, pues en todos ellos se pone en el centro del proceso al estudiante, sus interacciones sociales y la disponibilidad de variados recursos de apoyo para estimular el aprendizaje.

Tecnologías digitales en el aula

El uso de las tecnologías de la información facilita y potencia no solo diversas actividades de la vida diaria, sino también ayuda al desarrollo de un conjunto de habilidades cognitivas, releva la reflexión sobre la importancia de que los estudiantes, además de conocer estas herramientas, sean capaces de usarlas adecuadamente en la escuela para resolver problemas y tareas de aprendizaje de manera eficiente. En particular, con respecto al aprendizaje de las matemáticas, en el medio contamos con calculadoras y otras herramientas tecnológicas, tales como software de geometría interactiva, sistemas computacionales algebraicos, applets y simulaciones, planillas de cálculo y otros elementos que ya pasaron a ser componentes vitales para una educación matemática de alta calidad (NCTM, 2000). Se plantea que con la ayuda efectiva de un profesor de matemática, los estudiantes pueden usar estas herramientas para apoyar y extender su razonamiento matemático, acceder a más contenidos y contextos matemáticos que les permitan resolver problemas y mejorar también sus habilidades matemáticas de cálculo.

Recursos digitalesque favorecen el razonamiento

Existe una gran variedad de recursos digitales que pueden ser considerados como herramientas para desarrollar el razonamiento matemático. Entre ellos destacan los denominados "manipulativos virtuales". Se entiende por manipulativo virtual (MV) a: "una representación visual de un objeto dinámico e interactivo, basado en la Web, que presenta oportunidades para la construcción del aprendizaje matemático" (Moyer, Bolyard, ySpikell, 2002, p. 373). Matus y Miranda (2010) destacan que los MV son uno de los objetos digitales más investigados en el aula, por ello su importancia. Los autores señalan, por ejemplo, que en recientes investigaciones a nivel primario, los MV demostraron ser muy apropiados en conceptos como valor posicional y fracciones, propiedades de figuras geométricas y búsqueda de patrones. Se subraya que, a través de la manipulación de objetos en la pantalla, estudiantes y profesores pueden tener una base para comunicar ideas matemáticas y resolver problemas. Además, los MV demostraron ser útiles promoviendo el aprendizaje independiente, la creatividad y la exploración, proveyendo de retroalimentación inmediata. No menos relevante es el hecho que los estudiantes mencionaran que disfrutaron usando los MV y resolviendo problemas, más que con lápiz y papel. Respecto a sus contrapartes, manipulativos concretos, los MV demostraron ser tanto o más efectivos en el aprendizaje de conceptos, especialmente, de geometría.

Metodología del programa de diplomado

El programa de Diplomado en Educación Matemática y Tecnologías Digitales de la UDP tuvo una duración de 200 horas cronológicas, distribuidas en cuatro módulos de aprendizaje: Módulo 1) Razonamiento matemático, Módulo 2) Modelos de aplicación al aula, Módulo 3) Herramientas digitales y Módulo 4) Diseño e implementación de estrategias de enseñanza. Los módulos contemplaron trabajo en el aula, trabajo en laboratorio de computación y horas de trabajo personal.

Las sesiones en aula tuvieron como foco central el análisis del proceso de razonamiento matemático, con particular atención en su expresión en los distintos ejes del currículum nacional y en la revisión de estrategias y técnicas pedagógicas que permitan el desarrollo de capacidades de razonamiento matemático por parte de los estudiantes, incorporando, como componente sustantivo, una mirada amplia acerca del potencial que ofrecen las tecnologías digitales para abordar la enseñanza de las matemáticas y teniendo como referente el razonamiento matemático.

Participantes

En su primera versión 2014, el programa de diplomado constó con 17 profesores de la Corporación Educacional de San Joaquín, de los cuales 7 enseñaban en el primer ciclo básico (1° a 4° básico), 8 en el segundo ciclo (5° a 8° básico) y 2 profesores enseñaban en el segundo ciclo y enseñanza media. De ellos, 5 eran varones y 12 damas. El 100% de los profesores tenía acceso a un computador e internet tanto en su casa como en el establecimiento educacional. Respecto al uso de software para sus clases, las herramientas más usadas son la calculadora y planilla de cálculo (72%), mientras que le sigue el procesador geométrico (53%) y más abajo los applets y simulaciones flash (24%). Acerca del uso de aparatos tecnológicos en la salao en el laboratorio, los profesores en su mayoría utilizan la combinación portátil y data (88%).

Resultados: experiencias de uso de tecnologías digitales para desarrollar el razonamiento en escuelas de san Joaquín

Luego de conocidos modelos, estrategias y recursos digitales para favorecer el razonamiento matemático, los profesores se abocaron a diseñar una experiencia de aula con sus estudiantes, en un

modelo de investigación acción. El ejemplo de práctica basada en la investigación fue evidenciado en las actividades creadas por los profesores participantes, según uno de tres enfoques de enseñanza estudiados (Enseñanza para la Comprensión, Matemática Realista, Modelo Interactivo). La actividad de aula implicó una indagación subjetiva y personal, no la puesta en práctica de un modelo pedagógico estandarizado, sino un diseño fundado en la práctica, configurada por el conocimiento, las habilidades, las creencias y los contextos de los docentes, según las orientaciones de Stone(1999).

Se constató que, de los diecisiete profesores participantes, catorce finalizaron el programa exitosamente (82%), aprobando los cuatro módulos y su proyecto final que consistió en el diseño e implementación de una clase de matemática para el desarrollo del razonamiento matemático mediante el uso de recursos digitales. Un análisis de las experiencias reportadas por el grupo de catorce profesores, mostró que ellos eligieron en su mayoría, de entre los tres enfoques propuestos para trabajar razonamiento matemático, al Modelo Interactivo en 8 experiencias, en seguida eligieron al Enfoque Enseñanza para la Comprensión en 4 experiencias, y finalmente, eligieron al Enfoque de la Matemática Realista en tan solo 1 experiencia.

Respecto a las elecciones de recursos digitales que favorecieran el razonamiento, los profesores en las experiencias reportadas seleccionaron en 6 oportunidades a los manipulativos virtuales de NLVM, en 4 oportunidades a los interactivos de Illuminations de NCTM, mientras que en el resto, ellos usaron en 3 oportunidades recursos digitales de otros sitios sugeridos. Los resultados sugieren que el modelo que más se acomoda a los profesores es el Modelo Interactivo (Oteiza y Miranda, 2004) y los recursos que más utilizan son los de la Biblioteca de Manipuladores Virtuales.

Reflexiones y conclusiones

Un nudo crítico en la formación docente es la relación teoría y práctica. Por ello, es que se considera fundamental que los profesores además, de enfoques de enseñanza, revisen diversas experiencias de aula que promueven el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes con base en la investigación. Se hace necesario cada vez más, que diseñe y construya -considerando los ejes temáticos definidos en el currículum nacional- experiencias de aula basándose en enfoques pedagógicos que fomenten el Razonamiento Matemático.

En el marco de este programa de diplomado, se esperaba apoyar a los docentes para que éstos implementen actividades de aula motivadoras, coherentes con lo declarado en el currículum chileno, unificando la práctica con las creencias de los mismos docentes quienes, no solo en Chile sino internacionalmente, demuestran que si bien actúan en el marco de la visión tradicional, aún tienen la creencia de que una mejor educación es aquella donde el profesor construye el conocimiento con sus alumnos, como lo muestra la Encuesta Internacional Sobre Docencia y Aprendizaje TALIS (OCDE, 2009).

Las actividades creadas en el marco de esta experiencia de diplomado de Educación Matemática por profesores de la comuna de San Joaquín, mostraron ser un valor agregado a lo que hoy existe en textos de estudio y en la red de Internet. En el caso de los textos, estos usualmente no cohesionan tecnología y aprendizaje, y se enfocan fundamentalmente en la ejercitación. Por otro lado, los recursos de libre acceso en la red escasamente presentan actividades de aula asociadas que sean contextualmente diversas y que permitan al docente contar con una herramienta tangible para propiciar el razonamiento matemático en los estudiantes.De este modo, se ha mostrado que un programa de perfeccionamiento que se basa en la investigación – acción, una "acción intencional y propositiva", donde deja de ser importante solo aplicar la teoría para constituirse en un proceso reflexivo sobre la propia práctica que lleva a una mayor comprensión de las prácticas (Latorre, 2003), puede ser un modelo que propicie un cambio educativo necesario para enfrentar los desafíos que la enseñanza de la matemática requiere en Chile.

Referencias

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp.119-127). Santander: SEIEM.

Godino, J.D. (2004). Matemática para Maestros. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Larios, V. (2001). Las conjeturas en los procesos de validación matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática. Recuperado de http://www.geocities.ws/discendi2/tm/tm01.html

Latorre, B. (2003). La investigación–acción. Conocer y cambiar la práctica educativa. Barcelona, España: Editorial Graó. Primera edición.

Matus, C. & Miranda, H. (2010). Lo que la investigación sabe acerca del uso de manipulativos virtuales en el aprendizaje de la matemática. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 5(6), 143-151.

Ministerio de Educación (2013). Bases Curriculares de 7º Básico a 2º Medio. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

Moyer, P. S.; Bolyard, J.J; Spikell, M.A. (2002). What Are Virtual Manipulatives? Teaching Children Mathematics Journal, 8(6), 372-77.

National Council of Teachers of Mathematics.(2000). Principles and standards for school mathematics.Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

OCDE. (2009). Informe TALIS: La creación de entornos eficaces de enseñanza y aprendizaje. Síntesis de los primeros resultados. Extraído de: http://www.oecd.org/centrodemexico/medios/43058438.pdf

Oteiza, F. & Miranda, H. (2004). Modelo interactivo para el aprendizaje matemático. Santiago, Chile: Editorial Zig-Zag.

Planas, N. & Alsina, A. (2009). Educación matemática y buenas prácticas. Barcelona, España: Editorial Graó.

Stone, M. (1999). La enseñanza para la comprensión: vinculación entre la investigación y la práctica. Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidos.

ARTICULADORES PARA LOS MODOS DE COMPRENDER EL CONCEPTO DE DERIVADA

Pinto-Rojas, I[a]., Parraguez-González, M[b].

Universidad Católica del Norte, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; correos electrónicos: ipinto@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

Este reporte describe los elementos matemáticos articuladores en los modos de pensar el concepto de derivada de una función real de variable real. Estos modos se han sustentado en el pensamiento práctico y teórico de Sierpinska, y se han validado con un análisis histórico-epistemológico, cognitivo y didáctico con base en la epistemología de Cauchy, los modos que se proponen para comprender este concepto son: modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC), Analítico-Operacional (AO) y Analítico-Estructural (AE), (Pinto y Parraguez 2015). Para alcanzar este objetivo se diseñan secuencias didácticas que son aplicadas a informantes de primeros años de nivel universitario.

Palabras clave: *Elementos articuladores, Modos de Pensamiento, comprensión, derivada.*

INTRODUCCIÓN

Esta investigación tiene una perspectiva cognitiva cuyamotivación inicial fue describir cómo el objeto matemático "derivada", es comprendido por estudiantes de nivel universitario (19 años y más).Con este propósito se consideró un estudio desde un marco teórico cognitivo de la didáctica de la matemática, Los Modos de Pensamiento, propuesto por Sierpinska, (2000), marco que fue variado para el objetivo de este estudio. Desde esta perspectiva teórica se define la comprensión profunda de la derivada como la capacidad que los estudiantes tienen para transitar desde un pensamiento práctico a un pensamiento teórico del concepto al resolver problemas del cálculo diferencial. A partir del análisis de las respuestas de los estudiantes que conforman el estudio, se plantea como proyección de investigación indagar respecto a los elementos matemático que propician este tránsito, que para este estudio serán llamados los elementos articuladores.

Problemática, antecedentes y objetivo

El concepto de derivada es un concepto relevante para los investigadores en didácticade la matemática, existiendodistintas y variadas perspectivas teóricas para observar su comprensión, en Sanchez-Matamoros, García y Linares (2008), se presenta una revisión organizada de las aportaciones de investigadores en torno al concepto de derivada, esta revisión fue estructurada en consideración a lo que se conoce sobre la comprensión de la derivada de una función en un punto, el rol de los sistemas de representación, las características del desarrollo de esquema de la derivada, sin embargo aún existen aspectos que no han sido observados, como por ejemplo validar los elementos de la matemática o de otras disciplinas que permiten la conexión desde un pensamiento práctico a un pensamiento teóricopara la comprensión de la derivada.

El objetivo inicial de este estudio fue observar y describir cómo estudiantes de nivel universitario comprenden la derivaday desde el marco teórico- Los Modos de Pensamiento- de Sierpinska

(2000), sin embargo se tuvo que realizar una variación dada las características de la representación visual inmediatay lo analítico de la derivada.

La variación del marco teórico plantea la coexistencia de tres modos de pensar la derivada (Pinto y Parraguez, 2015), el modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC), el modo Analítico-Operacional (AO) y el modo Analítico-Estructural (AE), modos que al interactuar permiten una comprensión profunda de la derivada.

El estudio se extiende a la búsqueda de estos elementos de conexión entre las formas de comprender la derivada, dentro de la matemática misma o en conexión con elementos de la física, el objetivo será describirlos elementos invariantes de esta estructura, para tal propósito se ha planteado la pregunta que guiará esta investigación. ¿Cuáles son los elementos articuladores entre los modos GGC, AO y AE que permiten la comprensión profunda, del concepto de derivada?

Marco teórico

En Sierpinska (2000) se caracterizan dos tipos de pensamiento, un pensamiento práctico, definido como una acción inmediata entre el sujeto y el objeto, alusivo a hechos observables y un pensamiento teórico, referido a la comprensión como la reflexión de los resultados de una acción, que considera la producción de sistemas conceptuales internos coherentes, sustentados en un sistema lógico de signos, por tanto reflexivo, sistémico y analítico. Los Modos de pensamiento es una teoríade la didáctica de la matemática que emerge desde el Algebra Lineal.Las autoras presentan una variación de este marco al cálculo diferencial. Se plantea entonces la coexistencia de tres modos de pensamiento, presentados enPinto y Parraguez (2015), de la siguiente forma:

Modo geométrico-gráfico-convergente del concepto de derivada (GGC).

Desde un estudio histórico-epistemológico del concepto de derivada (Grabiner, 1983),se define la recta tangente en un punto del gráfico de una función real de variable real, el elemento matemático fundamental para conseguir la imagen directa observable del concepto de derivada,sin embargo la noción de tangencia no forma parte del pensamiento práctico propuesto por Sierpinska(2000), se hace necesario una extensión del modo SG, que será llamado en adelante el modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC) en relación a la comprensión del concepto derivada.

Es posible determinar una recta secante desde *P*a cualquier otro punto de ésta, a medida que el punto se desplaza a lo largo de su gráfica, (Figura 1), se llegará a una posición límite que será representada por la recta tangente, el tránsito de la recta secante llegando a esta posición límite, que es cuando está próximo a*P* será representada por la pendiente de la recta tangente, se llamará derivada de la función en *P*.

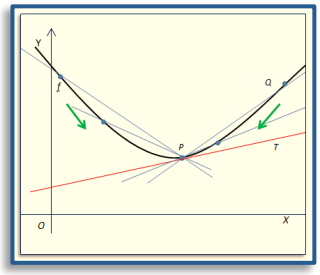


Figura 1. Representación del Modo Geométrico- Gráfico- Convergente del concepto de Derivada

Modo analítico operacional del concepto de derivada (AO).

Para definir el concepto de derivada en su forma (AO) se propició, considerar la definición formal de límite para para funciones reales de variable real, por tal razón el modo AA definido por Sierpinska pierde su carácter aritmético, emergiendo lo operacional del concepto, por lo que se reformula como el modo AO, para el caso específico de la derivada, noción que tiene sustento en la epistemología de Cauchy.

Se definela derivada de f como el límite del valor del cociente diferencial, cuando este límite existe y se denota como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Modo analítico estructural del concepto de derivada (AE):

Para definir el concepto de derivada en su forma (AE), es necesario mirar desde el modo AO, como se ha desarrollado el concepto de derivada de una función real de una sola variable, y desde esa perspectiva seguir los elementos estructurales que permiten la generalización de este conceptocomo el elemento matemático que articula el modo AO y AE y que a su vez, permite definir el operador derivada desde la comprensión de$f'(x)$, es este concepto matemático que permite junto con sus propiedades la representación de derivada en el modo AE, los teoremas y el operador inverso (integración). Una función es diferenciable cuando el operador está bien definido. La estructura que se debe estudiar en este contexto será: El espacio vectorial de las funciones diferenciables y el operador derivada como transformación lineal.

El marco teórico considerado en este trabajo quedará sustentado como se muestra en Figura 2.

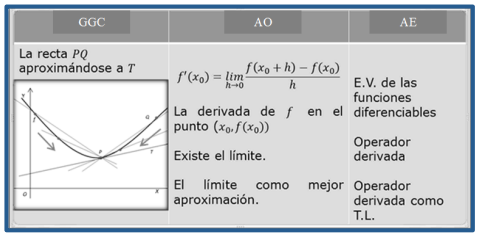


Figura 2. El Modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC), el Modo Analítico-Operacional y el Modo Analítico- Estructura (AE) del concepto de derivada.

METODOLOGÍA

Se propone una metodología desarrollada en dos etapas, primero,determinar los elementos matemáticos de conexión entre las formas de comprender la derivada, desde un análisis epistemológico y didáctico del concepto, junto con la observación de los datos proporcionados por los informantes y segundo, validar estos articuladores con la aplicación de nuevos instrumentos y entrevistas en profundidad, para concluir con la realización de una secuencia de enseñanza y actividades de aprendizaje del concepto, que serán relevantes para la comprensión de la derivada.

En este sentido la primera etapa en desarrollo, considera las producciones de los estudiantes en la etapa de validación de los tres modos definidos, con la aplicación de una metodología cualitativa de naturaleza descriptiva y hermenéutica (Stake, 2010) para lo que se consideró un estudio de casos

múltiples con dos grupos de informantes,el primer grupo denotado CASO1está formado por diez estudiantes que están cursando la asignatura de Cálculo Diferencial, seis de pedagogía en educación media y cuatro estudiantes de licenciatura en matemáticas, rotulados E1-E10, el CASO2 formado por tres estudiantes de licenciatura en matemáticas que han cursado recientemente el curso de ecuaciones diferenciales, rotulados E1,E2,E3.

Se ha diseñado y aplicado un cuestionario de 12 preguntas, al CASO1, al que se le agregaron 3 preguntas para ser aplicado posteriormente al CASO2. Se realiza un análisis a priori por pregunta cuyas respuestas fueron contrastadas con los resultados de la aplicación, en la perspectiva de que el estudiante que logra transitar entre estos tres modos, obtiene una comprensión profunda del concepto. El interés de obtener variada información y datos significativos permitieron dar cuenta de algunos elementos articuladores para la comprensión de la derivada.

Se muestran algunas producciones de estudiantes del CASO1, a los que se aplicóel instrumento.

Pregunta 3:Sea la función $f(x) = x^2$, en el punto $(1,1)$, la tabla muestra los valores resultantes del cociente $\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ que son las pendientes de las rectas secantes cuando x se aproxima a $x = 1$.

Se solicita que comente y explique la información que tiene en la tabla, justificando sus observaciones.

x	0.59	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$	1.59	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1

Desde una perspectiva teórica, el estudiante estaría mostrando elementos que le permiten transitar desde el modo GGC al modo AO,

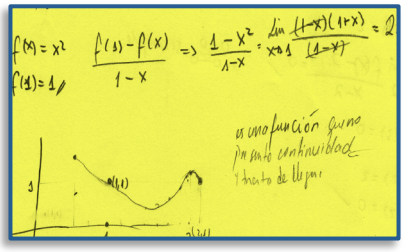


Figura 4. Respuesta de E7, muestra transitar débilmente.

Esta pregunta, intencionada a situar al estudiante en el modo GGC, pretende que muestre rectas secantes aproximándose a la tangente en términos geométricos e identifique a la recta tangente como su mejor aproximación, es posible que calcule la pendiente de la recta tangente usando la derivada de $f(x)$ y compare con los datos entregados en la tabla, esto es que relacione 1.9999 con $f'(1) = 2$, Lo que estaría mostrando el tránsito desde el modo GGC al modo AO, con el concepto de límite como articulador.

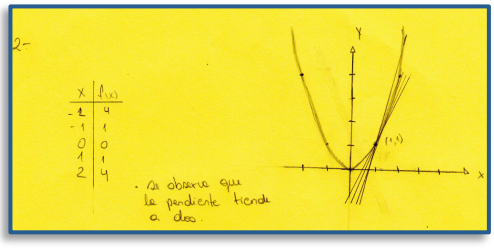


Figura 5. Informante E2, Situado en el modo GGC.

RESULTADOS

Desde los datos obtenidos se propone el concepto de límite en un punto como posible articulador desde el modo GGC al AO, y los límites laterales desde el AO al GGC, se propone también el concepto de derivada como un articulador bidireccional entre estos modos.

Se propone el gráfico de la transformación lineal como un posible articulador entre los modos AE y GGC.

Desde un análisis epistemológico surge como posible articulador entre el modo GGC y AE, un problema propuesto por Leibniz, "El problema inverso de la recta tangente".

Las dificultades que se visualizan en las reproducciones de los estudiantes dan cuenta de la relevancia que tienen los elementos articuladores para la comprensión de la derivada

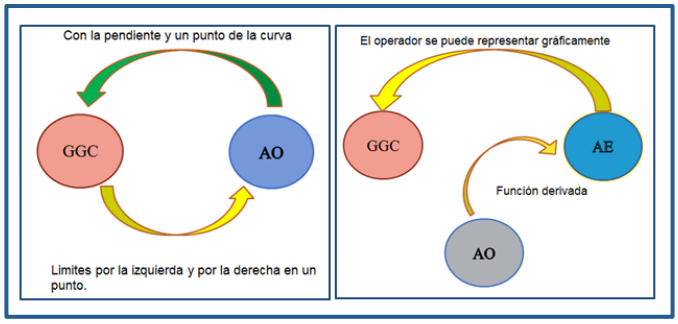


Figura 7. Muestra un diagrama de los articuladores para los modos propuestos en la primera etapa.

Referencias

Grabiner, J., (1983). The changing concept of change:The derivative from Fermat to weierstrass. Mathematics Magazine56(4), 195-206.

Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría de los modos de pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28, 337-344.

Sanchez- Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la derivada. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11(2), 267-296.

Sierpinska, A. (2000). On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra. En The Teaching of Linear Algebra in Question (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. (2010). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

DIFICULTADES EN LA ENSEÑANZA Y EN LOS APRENDIZAJES DE TRIÁNGULOS Y SUS ELEMENTOS SECUNDARIOS

Baeza, D.[a], Galaz, J.[b], Gallo, M.[c], Godoy, R.[d], Zavala, M.[e], Zúñiga, M.[f]

[a]Universidad Central de Chile, [b]Universidad Central de Chile, [c]Universidad Central de Chile, [d]Universidad Central de Chile, [e]Universidad Central de Chile, [f]Universidad Central de Chile; danaebaeza.m@gmail.com[a], jose.galaz@ucentral.cl[b], mgallosoto@gmail.com[c], rgodoysinn@gmail.com[d], zavalacastillo@gmail.com[e], orieta.zd@hotmail.com[f]

Resumen

La investigación tiene como objetivo diagnosticar las dificultades que presentan los estudiantes de séptimo básico, en la enseñanza y en los aprendizajes de triángulos y sus elementos secundarios. Para llevar a cabo el estudio, en primer lugar, se realiza un análisis documental, considerando una revisión histórica de la geometría en la antigüedad, aspectos didácticos y los lineamientos del currículo escolar chileno en torno a este ámbito. Una vez realizado el análisis que entrega el fundamento teórico, la aplicación de la parte práctica de la investigación la cual considera la aplicación de instrumentos a estudiantes y profesores.

Palabras clave: *geometría, elementos secundarios del triángulo, dificultades triángulos.*

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Una fuente de información respecto de los aprendizajes de los estudiantes durante su paso por el sistema escolar chileno es la Prueba de Selección Universitaria (PSU). Desde el año 2012 la prueba de matemática consta de 75 preguntas de selección múltiple, de las cuales 22 son de Geometría. Recientemente en el proceso de admisión 2015, se incorporaron 5 preguntas experimentales.

En la PSU, los resultados en geometría no son muy alentadores, pues al revisar los resultados de los últimos procesos de admisión, se puede observar que las preguntas de geometría tienen altos porcentajes de omisión, llegando incluso al 88% en algunas preguntas específicas. A su vez, además de la omisión, el porcentaje de aciertos de los estudiantes que abordan estas preguntas, es bajo en relación con los otros ejes de la prueba.

Al realizar una revisión del contexto internacional, los resultados son similares. Por ejemplo, en el Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE), el cual se realiza en distintos países de América Latina y El Caribe, para sexto año básico el porcentaje de respuestas correctas en Geometría es apenas de un 35%.

Según lo analizado en la PSU de matemática del proceso 2014, gran parte de las preguntas del eje temático de Geometría están enfocadas en el concepto de triángulos, ya sea aplicando sus características, propiedades y/o teoremas; o resolver otras problemáticas geométricas a través de este polígono y sus propiedades. Debido a esta razón se realiza una búsqueda en los programas de estudio de la educación chilena en qué nivel se empieza a introducir en profundidad los elementos secundarios del triángulo, lo cual se produce en séptimo básico.

A partir de lo anterior, surge la siguiente pregunta que orienta la investigación:

¿Cuáles son las dificultades, errores y obstáculos que tienen estudiantes de séptimo año básico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de triángulos?

Marco teórico

Existen diversas teorías que fundamentan el proceso de enseñanza y aprendizaje dentro de un determinado sistema educativo, sin embargo, para fundamentar este proceso es necesario optimizar la cantidad de variables que influirán en éste. Por todo lo expuesto anteriormente, el marco teórico se sustenta en las Teorías Didácticas de la Matemática de Guy Brousseau (1986 Teoría de Situaciones Didácticas) y también a modo de incluir el contexto sociocultural de los actores del sistema educativo, se utiliza la Teoría Sociopistemológica Investigativa de Matemática Educativa.

La Didáctica de la Matemática se gestó en Francia a finales de los años sesenta ante la necesidad de abordar de manera científica las "cuestiones" vinculadas a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática, primeramente en situación escolar y luego, en general, en los fenómenos vinculados a la difusión de los saberes y conocimientos matemáticos.

Desde el acercamiento socioepistemológico como paradigma, se enmarca y cobra sentido esta investigación, una aproximación teórica que surge en la Escuela Mexicana de Matemática Educativa a fines de los años ochenta, teniendo una gran influencia en Latinoamérica, a partir de los trabajos empíricos realizados por el doctor Ricardo Cantoral y la doctora Rosa María Farfán.

"Esta aproximación adquirió el estatus de cuerpo teórico y es reconocida hoy como teoría sociepistemológica, este paso de aproximación a teoría, exigió de una explicitación de las metodologías de la investigación y de sus técnicas y métodos, así como una explicitación de su objeto de estudio y sobre la forma en que construimos nuestras hipótesis. Esto a fin de afectar benéficamente al funcionamiento del sistema educativo, es decir: lograr el aprendizaje de la vida cotidiana, la escuela y los entornos laborales" (Cantoral, 2013, p.53).

De esta forma, las investigaciones socioepistemológicas permiten concebir la matemática no como un saber fijo y preestablecido, si no como un conocimiento con significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto mismo de la actividad que realiza el sujeto.

Es decir, si la teoría de situaciones didácticas modela las interacciones del aula, la teoría socioepistemológica modela la construcción social del saber matemático, por lo que para referirse a esto, se debe entender como el individuo aprende y; al considerar la complejidad que conlleva tal accionar, dicha teoría no va hacer referencia a cómo enseñar cualquier tema, en cualquier situación, a cualquier sujeto, si no como el saber resulta funcional a partir de las distintas dimensiones que establece: epistemológica, cognitiva, didáctica y social.

MARCO METODOLÓGICO

Enfoque y Diseño de la Investigación

El diseño de esta investigación se enmarca de acuerdo a un enfoque socioepistemológico, el cual permite conocer los procesos de construcción y transmisión de conocimiento matemático de acuerdo al objeto de estudio. El procedimiento para llevar a cabo la investigación, tiene como primera tarea realizar una búsqueda histórica de la construcción del conocimiento de la geometría, en particular de los triángulos, como también el respectivo análisis didáctico. La segunda tarea es la realización de un análisis del contenido curricular, estudiando las distintas transformaciones que ha tenido geometría y particularmente la temática referida a triángulos. Una vez realizado el análisis documental, se tiene un sustento para desarrollar la fase empírica de la investigación. Finalmente, en base a todos los resultados obtenidos y análisis realizados, se procede a detallar cuáles son las problemáticas detectadas con respecto al tema en estudio.

Recolección de la información

Para la recolección de la información se utilizan tres instrumentos: un test de conocimiento, un cuestionario para estudiantes y una entrevista para profesores. A continuación se describen cada uno de ellos, como también se especifica sus respectivos objetivos.

a) Test de conocimientos para estudiantes: tiene como objetivo verificar cuáles son los aprendizajes logrados por los estudiantes en torno a esta temática y a la vez detectar cuáles son las principales falencias. La estructura del test aplicado a los tres cursos de los distintos colegios utilizados como muestra, se construye en base a los cuatros aprendizajes esperados de séptimo año básico.

b) Cuestionario para estudiantes: su finalidad es evaluar qué y cómo fueron enseñados las nociones de triángulo y elementos secundarios. La estructura del cuestionario que se aplica a los alumnos de los distintos establecimientos, tiene en primera instancia un ítem donde se detalla una serie de temáticas relacionadas con geometría, un segundo ítem donde el estudiante debe indicar cuál(es) fueron los procedimiento(s) que utiliza para realizar dichas tareas, un tercer ítem en el cual se da énfasis en la construcción de triángulos y en el cuarto el estudiante debe reconocer los elementos secundarios del triángulo con su definición.

c) Entrevista semiestructurada para profesores: su finalidad es evaluar cómo éstos enseñan las nociones de triángulo y elementos secundarios. A la vez, se puede contrastar si estas acciones en aula están orientadas de acuerdo a los lineamientos dados en los Programas de Estudios de la asignatura.

Para la recolección de datos de la investigación, se utiliza una muestra de profesores de matemática y estudiantes, todos ellos pertenecientes a un total de tres colegios, uno de carácter municipal y dos particulares subvencionados de la comuna de Santiago, entendiendo que en esta comuna convergen diversas realidades educativas y sociales.

Plan de análisis

Las respuestas dadas por los estudiantes en el test de conocimientos, serán analizadas y contrastadas con conjeturas realizadas a las distintas preguntas. Estas conjeturas tienen como objetivo pronosticar las posibles respuestas de los estudiantes, de modo que al momento del análisis se tenga una categorización de las respuestas dadas por estos, en base a un análisis propio de la ingeniería didáctica.

En el cuestionario realizado, se realiza un análisis estadístico de la información que entrega el instrumento. Se trabaja con tablas y gráficos que permitan visualizar la información más relevante. Adicionalmente, se entrega una evaluación general de los resultados del instrumento, de modo de identificar las conclusiones más importantes que se pueden inferir luego de la aplicación.

Las entrevistas a profesores son guardadas en archivos de audio. Para el análisis, se escuchan estas entrevistas y transcriben las afirmaciones más relevantes, para luego realizar el análisis correspondiente.

RESULTADOS Y ANALISIS

De los estudiantes

Al analizar los resultados obtenidos por los estudiantes en las primeras tres preguntas enfocadas en el AE01 de construcción de paralelas, perpendiculares y bisectrices, se observa más de un 50% de los estudiantes demuestra saber el concepto de paralelismo, pero tienen faltas su construcción, al igual como sucede con la construcción de una perpendicular. En la bisectriz en un ángulo dado, es

la pregunta de este aprendizaje que posee mayores errores, donde las respuestas correctas no superan el 15 %.

Las preguntas enfocadas en el AE02, relacionadas con las propiedades de los elementos secundarios del triángulo: altura, transversal de gravedad y simetral. Los estudiantes construyen correctamente la altura de un triángulo acutángulo (73% en un curso), pero al trabajar en un triángulo obtusángulo, las respuestas correctas no alcanzan el 20%. En las preguntas relacionadas con transversal de gravedad y simetral, los resultados son preocupantes, pues la omisión o en su defecto la respuesta incorrecta llega casi al 100%.

Las preguntas enfocadas en el AE03, se orientan en la construcción de triángulos conociendo algunas medidas. El 70% de los estudiantes no identifica si las medidas permiten construir un triángulo, de igual forma más del 80% de los estudiantes no logra determinar si se puede construir un triángulo en base a sus ángulos interiores.

Las preguntas enfocadas en el AE04, que se orienta en la construcción de ángulos mediante trazados utilizando instrumentos manuales. Es en este aprendizaje donde los estudiantes logran los mejores resultados.

De los profesores

La entrevista realizada a los profesores reafirma los resultados expuestos anteriormente, los profesores afirman que las temáticas que presentan un mayor grado de complejidad son la simetral y transversal de gravedad. De acuerdo a la entrevista, se aprecia que el tiempo destinado para el estudio es bastante acotado, lo que genera que estos contenidos no se estudien en mayor profundidad, además el hecho de no contar con los implementos tecnológicos y manuales para cada uno de los estudiantes, genera que ellos no puedan realizar las experimentaciones.

CONCLUSIONES

A partir de la investigación realizada, se puede concluir que los establecimientos analizados y posiblemente en gran parte de los liceos y colegios del país, los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría son deficientes, no logrando los estudiantes obtener los aprendizajes esperados para el nivel.

Se observa que para la construcción de las rectas paralelas y perpendiculares, los estudiantes entienden el concepto de modo general, sin embargo, no pueden explicar la construcción realizada.. En relación a la bisectriz de un ángulo, se observa que los estudiantes tienen las nociones fundamentales al respecto, pero al igual que en los casos anteriores, la construcción que realizan es en forma intuitiva, no justificando los pasos realizados y sin la utilización de regla y compás.

Con respecto a los elementos secundarios del triángulo, se logra detectar que con respecto a las alturas de un triángulo, en su mayoría, los estudiantes logran visualizar la altura de un triángulo acutángulo y solo aquella altura que parte desde el vértice superior, lo cual provoca el obstáculo de que piensen que todo triángulo tiene solo una altura y además que ésta siempre se encuentra en el interior del triángulo, lo que conlleva finalmente a que construyan erróneamente las alturas del triángulo obtusángulo. Con respecto a las transversales de gravedad y simetral, se observa que el conocimiento de estas es casi nulo, por lo cual los estudiantes simplemente omiten las preguntas relacionadas a estos temas, por lo mismo no logran detectarse errores de los estudiantes en su construcción.

En relación a los aspectos curriculares referidos a la geometría y como estos han evolucionado en los últimos años, se observa que se han incluido nuevas temáticas en el nivel de séptimo básico en

el ajuste curricular 2009, como lo son: la transversal de gravedad y la simetral. Además, se hace presente la incorporación del uso de TIC como medio para el aprendizaje.

Es importante destacar que los estudiantes afirman en su totalidad no haber utilizado ningún tipo de software geométrico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta temática, siendo que el Mineduc, en el programa de estudio de séptimo año básico hace hincapié en la importancia de la utilización del software geométrico como complemento de los instrumentos manuales.

Referencias

Agencia de Calidad de la Educación. (2012). Resultados TIMSS 2011 – Chile. Santiago

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 33-59). Colombia: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica

Cantoral,R.(2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Barcelona: Gedisa

Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional. (2013). serie DEMRE-Universidad de Chile- Compendio estadístico proceso de admisión año académico 2014. 29/06/2015, de DEMRE Sitio web: http://www.psu.demre.cl/estadisticas/documentos/p2014/2014-compendio-estadistico.pdf

Merzbach, U., y Boyer, C. (2011). A history of Mathematics (Third Edition).Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Mingüer, L. (2013) Algunas herramientas teórico-metodológicas de la aproximación socioepistemológica para la investigación en matemática educativa.

Ministerio de Educación, República de Chile. (2011). Educación Matemática, Programa de Estudio Séptimo Año Básico. Santiago.

Ministerio de Educación, República de Chile. (2000). Educación Matemática, Programa de Estudio Séptimo Año Básico. Santiago.

RESULTADOS DE APRENDIZAJE DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA PARA INGENIEROS

Gallardo,M[a]., Galindo, M.[b]

Universidad de Las Américas;
mgallardo@udla.cl, mgalindo@udla.cl

Resumen

Se describe una propuesta didáctica de enseñanza contextualizada en el aula universitaria de Matemática. A través del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, se caracterizan las propiedades importantes de las integrales dobles y evaluamos, mediante la utilización de representaciones informales y algebraicas, los errores y dificultades que los estudiantes ponen de manifiesto en distintas actividades de las ciencias de la ingeniería.

En consecuencia, se analizan los resultados parciales de aprendizaje de apropiación del lenguaje, procedimientos y argumentos sobre las integralesdobles.

Palabras claves:*Integrales dobles, significado y comprensión, configuraciones didácticas.*

INTRODUCCIÓN

Una problemática generalizada en las aulas universitarias es determinar y secuenciar los elementos prioritarios que debe considerar el profesor para una buena enseñanza de conceptos y proposiciones matemáticas. Esto nos conduce a reflexionar en relacióna las clases de cálculo, si ellas con su metodología tradicional favorecen la comprensión de conceptos y si buenas presentaciones en el aula consideran más de una forma para acercarnos a los enunciados matemáticos. Al relacionar el conocimiento matemático de las integrales dobles y contenido didáctico, surgen las siguientes inquietudes: ¿Cómo caracterizar la eficacia de un proceso de instrucción de las integrales dobles?, ¿Qué dispositivos didácticos son los adecuados para la enseñanza de las integrales dobles a nivel universitario?, ¿Qué efecto tiene la informática como recurso de apoyo a la docencia? Los objetivos propuestos en este trabajo son: a) Evaluar el significado personal de los estudiantes al finalizar el proceso de estudio y compararlo con el significado institucional implementado. b) Evaluar la proporción de estudiantes en los que se evidencia una comprensión y capacidad de aplicación de ciertos elementos de significado incluidos en la enseñanza.

Fundamento

La integral de funciones de varias variables y su interés en ingeniería.

Los sistemas de acreditación están exigiendo a las facultades y escuelas cambios en el desarrollo curricular, debido a que las formas tradicionales de enseñanza no ayudan a adquirir competencias transversales y tampoco tienen en cuenta el perfil de egreso de un ingeniero, entendida como el conjunto de competencias (generales, especializadas y actitudinales) necesarias en la profesión. Es por ello que la enseñanza debe orientarse a la adquisición de competencias, y no simples conocimientos. Con esto el rol del profesor es esencial en determinar y secuenciar los elementos prioritarios que debe considerar el profesor para una buena enseñanza de conceptos y proposiciones matemáticas.La matemática es un área del conocimiento de fundamental importancia en toda

situación del campo de la ingeniería, en particular el cálculo integral tiene muchas aplicaciones, como por ejemplo; en el análisis de circuitos, el cálculo de energía disipada a partir de una potencia, en el cálculo de área, cálculo de cantidad de movimiento, de conservación de energía, en el análisis de señales, en la economía, etc. A continuación mencionamos los resultados de aprendizaje que se deben alcanzar en el estudio de las Integrales dobles en la Universidad De Las Américas (UDLA) de Chile en un curso de Cálculo en Varias Variables (MAT400): a) Determinar el área encerrada entre curvas, aplicado a un problema contextualizado, usando integrales dobles. b) Aplicar cambio de coordenadas a la resolución de un problema contextualizado.

Marco teórico

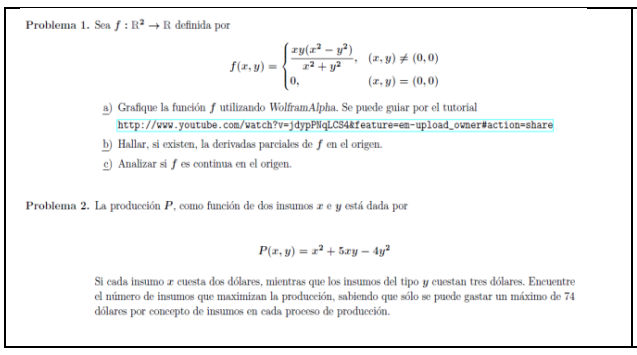
La perspectiva didáctica que se empleará en este trabajo está basada en el modelo teórico denominado "enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática". Una versión revisada y ampliada del marco teórico se presenta en Godino y colaboradores (Godino, 2002; Contreras y Font, 2006;D'Amore, Font y Godino, 2007; Godino, Batanero y Font, 2007;Font y Contreras, 2008; Godino, Ramos y Font, 2008).El término "significado" se usa de una manera persistente en la investigación y en la práctica de la educación matemática, unido al de "comprensión". Al considerar una institución escolar, como la educación universitaria, el significado construido por un estudiante particular sobre las integrales dobles, en un momento del proceso de aprendizaje puede no corresponder exactamente al significado del objeto en la institución dada, por lo que conviene distinguir entre significado institucional y significado personal de un objeto matemático. *El significado institucional* de un objeto matemático es el compartido dentro de una institución, y *El significado personal* es el que el alumno tiene inicialmente o es adquirido a lo largo del proceso de estudio. El objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge del sistema de prácticas significativas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. En cuanto al significado personal, intentaremos diferenciar entre el *evaluado* (parte del significado que se evalúa con los diferentes instrumentos de evaluación), *declarado* (deducido de las respuestas de los estudiantes a estos instrumentos y *logrado* (la parte del significado personal que está de acuerdo con el significado institucional implementado). Asimismo, se describirán las diferencias entre el significado institucional implementado y el significado personal de los estudiantes, es decir el conjunto de conflictos y dificultades manifestados por los mismos en el proceso de evaluación.Se abordan la relación entre la metodología de enseñanza empleada en el aula y el aprendizaje del conocimiento matemático de conceptos importantes, y la utilización de configuraciones didácticas para describir criterios de idoneidad de un proceso de estudio. Los supuestos bases son:a) Elementos de significado,la comprensión personal de un objeto es, en este modelo, la "apropiación" del significado institucional de dicho objeto. Se propone una tipología de objetos matemáticos primarios, que se denominan "elementos del significado" y corresponden a: Situaciones-problemas, lenguaje, procedimientos, conceptos,proposiciones y argumentos.b) *Configuraciones didácticas*,los elementos de significado están relacionados entre sí formando *configuraciones*, definidas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. En la *configuración manipulativa* el estudiante trabaja con dispositivos manipulativos (dados, fichas,...), papel-lápiz o calculadora, sin utilizar notación o cálculo algebraico, en la *configuración algebraica* se caracteriza por el lenguaje simbólico y la demostración deductiva, los procedimientos serían analíticos y en la*configuración computacional* amplía notablemente el lenguaje, sobre todo el número y variedad de representaciones gráficas dinámicas. Además del lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación y el argumento preferible es inductivo. Este trabajo se interesa por describir si el proceso de instrucción ha sido eficaz, principalmente en los *criterios de la idoneidad cognitiva*, queexpresa el grado de proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes, y *criterios de la idoneidad mediacional*que corresponde al grado de

disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de la actividad con que los profesores de cálculo desarrollan su práctica docente.

Metodología

La implementación de una secuencia de enseñanza de la integral doble se llevó a cabo el segundo semestre de 2014 y primer semestre de 2015, en el curso MAT400 a 33 estudiantes voluntarios de Ingeniería Civil Industrial; considerando, por ejemplo, el tiempo de ejecución, las condiciones de recursos tecnológico disponible en el aula y el número de estudiantesparticipantes, y se finalizó con la aplicación y evaluaciones periódicas. La asignatura es impartida por el Instituto de Matemática, Física y Estadística (IMFE) de la UDLA y tiene prerrequisito el curso de Cálculo II. Se ha tenido en cuenta la siguiente trayectoria didáctica del proceso de estudio considerando actividades que permitan el tratamiento matemático de la integral doble desde varios acercamientos: a) Delimitar los contenidos y secuencia de enseñanza de la integral de funciones de varias variables: El concepto de la integral de Riemann, integración con dominio rectangular y no rectangular, teorema de Fubini, teorema de cambio de variables. b) Considerar un acercamiento global a propiedades importantes, teorema de Fubini, teorema de cambio de variables, etc.; la aplicación en resolución de problemas específicos de ingeniería, basado en la tecnología: Geogebra, WolframAlpha, Pizarra Digital Interactiva (PDI) y la plataforma virtualmoodle. c) Establecer los objetivos de la evaluación, que son evaluar el significado personal de los estudiantes al finalizar el proceso de estudio y compararlo con el significado institucional implementado y evaluar la proporción de estudiantes en el grupo que muestran una comprensión y capacidad de aplicación de ciertos elementos de significado incluidos en la enseñanza, e identificar cuáles de estos elementos resultaron difíciles. Se establecieron las siguientes conexiones entre la *configuración epistémica computacional* y los elementos de significado de la integral de funciones en varias variables: *Problemas*: Obtención del valor de la integral dobles; investigar el dominio de integración, la necesidad de los cambios de variables y de los cambios de límites de integración. *Lenguaje*: verbal, simbólico y gráfico. *Procedimiento*: identificación del dominio de integración; decide la necesidad de un cambio de variables; define la integral doble; resolución de la integral doble, aplicación. *Conceptos*: Integral de Riemann, dominio de integración, primitivas, cambios de variables, integral doble. *Propiedades*: Teorema de Fubini, Teorema de cambios de variables. *Argumentos*: visuales; generalización y comprobación de ejemplos. A continuación, se presentan algunas actividades basadas en las configuraciones didácticas diferenciadas que fueron desarrolladas por los estudiantes de ingeniería, para el caso de integral doble. En este proceso de implementación se han incorporado actividades no habituales en las que se han incluido los programas software gratuitos Geogebra, WolframAlpha y PDI para el estudio de los dominios de integración, verificación de integrales y almacenamiento de las clases. Dicho proceso permite conectar, los dominios de integración con las integrales dobles a definir, comprendiendo de mejor manera el significado de algunos teoremas, respecto a lo que es habitual en los libros de texto de ingeniería.

Imagen1:



Problema 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Grafique la función f utilizando *WolframAlpha*. Se puede guiar por el tutorial
http://www.youtube.com/watch?v=jdypPHqLCS4&feature=em-upload_owner#action=share

b) Hallar, si existen, la derivadas parciales de f en el origen.

c) Analizar si f es continua en el origen.

Problema 2. La producción P, como función de dos insumos x e y está dada por

$$P(x,y) = x^2 + 5xy - 4y^2$$

Si cada insumo x cuesta dos dólares, mientras que los insumos del tipo y cuestan tres dólares. Encuentre el número de insumos que maximizan la producción, sabiendo que sólo se puede gastar un máximo de 74 dólares por concepto de insumos en cada proceso de producción.

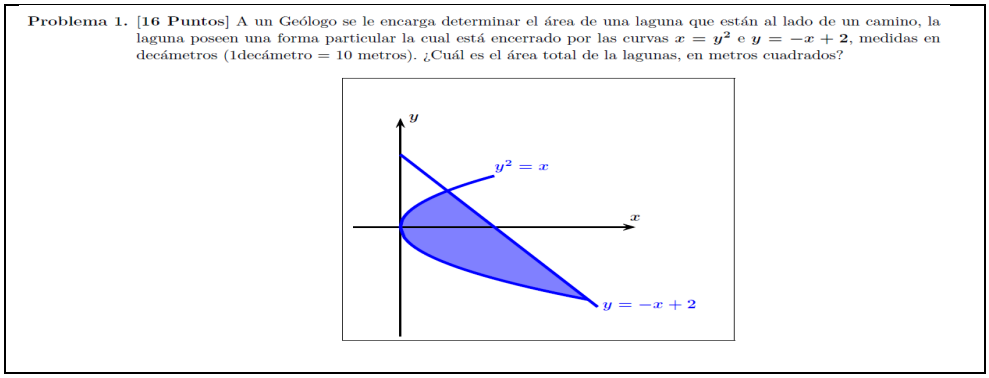
Imagen 2:



Resultados

Se entiende la evaluación como la correspondencia entre el significado institucional presentado en la enseñanza y el significado personal efectivamente construido por los estudiantes, identificando sus dificultades y errores. En la imagen 3 se presenta un problema, de configuración algebraica, se describen los elementos de significado usados correcta e incorrectamente a una muestra de 33estudiantes en la resolución y las conexiones que establecen entre los mismos.

Imagen 3.



Los estudiantes deben identificar el dominio de integración que corresponde a la región achurada, $D_1 = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\} \cup \{(x,y) \in R^2 : 1 \leq x \leq 4, -\sqrt{x} \leq y \leq -x + 2\}$. Luego el estudiante debe definir el dominio de integración que permita realizar el cálculo de la integral de manera más eficiente, $D = \{(x,y) \in R^2 : -2 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq -y + 2\}$. A continuación, el estudiante debe definir la integral doble utilizando el dominio óptimo obteniendo: $\int_{-2}^{1} \int_{y^2}^{-y+2} 1 \, dxdy$;finalmente debe resolver correctamente la integral doble y obtener su valor:

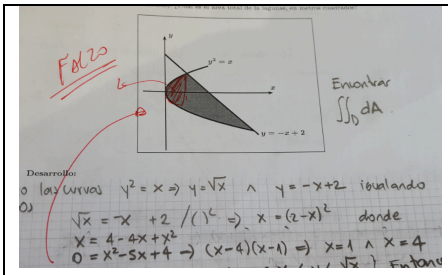
$$\int_{-2}^{1} \int_{y^2}^{-y+2} 1 \, dxdy = \int_{-2}^{1} (-y + 2 - y^2) \, dy = \left(\frac{-y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

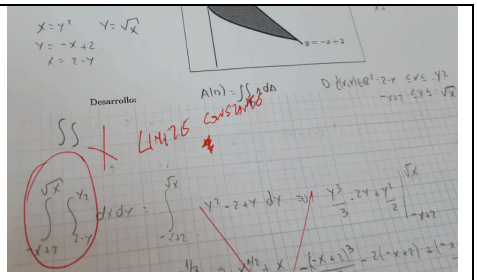
Tabla 1: resultados de la actividad

Pasos correctos en la resolución del problema	n=33	%
Identifica y define el dominio de integración	18	54.5
Define el dominio de integración que permita resolver la integral de manera más eficiente.	18	54.5
Define la integral doble correctamente	17	51.5
Realiza el cálculo de la integral doble correctamente	17	51.5
Obtiene el valor correcto de la integral	12	36.4

En la tabla 1 se presentan los resultados obtenidos. Observamos que, el 54.5% de los estudiantes identifica y define el dominio de integración. Además, el 54.5% define el dominio de integración que permite resolver la integral de manera eficiente. Los errores observados más comunes identificados son; dejan ambos límites con variables, no identifican ni definen dominio y los estudiantes que deciden trabajar con el dominio sin modificar no observan la necesidad del cálculo de la integral mediante la suma de integrales. A continuación consideramos algunas imágenes de estos errores.

Imagen 4 **Imagen 5**





Se observa que sólo el 51.5% luego de identificar un dominio, define correctamente la integral doble yrealiza el cálculo de la integral doble correctamente. Algunos estudiantes deciden trabajar con el dominio no optimizado, sin embargo no identifican que para trabajar con ese dominio se necesitan dos integrales, otro error común es que no recuerdan las propiedades de integrales. Finalmente se sólo el 36.4% de los estudiantes obtiene el valor correcto, se observan errores de cálculo en sumas de fracciones.

CONCLUSIONES

En el proceso implementadose introdujeron algunos elementos de significado delas integrales doble, agrupados en distintas actividades y utilizando tres configuraciones epistémicas en el trabajo en el aula, comprometiendo al estudiante a observar distintos acercamientos de las integrales dobles. Respecto de la forma de argumentación, se ha ampliado las formas tradicionales de razonamiento formal deductivo. Si consideramos las diferencias presentes en los estudiantes con respecto a sus capacidades, conocimientos previos, interés y esfuerzo durante el proceso de estudio, entre otras; concluimos que el tipo de idoneidad cognitiva nunca será completa (en el sentido de que los estudiantes logren todos los resultados de aprendizaje). En relación a los fines de la enseñanza, una primera evidencia de idoneidad cognitiva es el aprendizaje mostrado por los estudiantes, evidenciado en las diferentes pruebas de evaluación. El aprendizaje de los diferentes elementos de significado fue, desigual, como se ha mostrado al analizar las concordancias y diferencias del significado implementado y personal de los estudiantes y las diferencias de porcentajes de respuestas correctas en los diferentes problemas.En particular, se considera que la dificultad presente en el Teorema de Fubini es un punto que hay que mejorar la idoneidad cognitiva del proceso de estudio. Con respecto a la idoneidad mediacional, las actividades propuestas en este caso contemplan un rango de dificultad, variedad de procedimientos y formas de exploración bastante mayor que la forma tradicional presentada en los textos de cálculo para ingenieros. La utilización de Geogebra, WolframAlpha, PDI y la plataforma virtual moodlepermitió a los estudiantes, explorar y visualizar conceptos y propiedades complejas. Las tres configuraciones didácticas implementadas permitieron ampliar la parte algebraica mediante las representaciones con apoyo informático, no obstante, si bien, las actividades realizadas con el ordenador han complementado la construcción del significado de las integrales dobles, ha implicado un coste cognitivo al alumno, ya que deben asimilar distintas formas de comunicación en un tiempo limitado de su carga académica del semestre. La plataforma puesta a disposición de los estudiantes, permitió, asimismo, ampliar sus posibilidades de trabajo en el tema, fuera de las lecciones programadas. El único punto limitado fue el tiempo disponible que, aunque amplio para algunos de los estudiantes fue insuficiente para que otros llegaran a asimilar todos los objetivos programados.

Referencias

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. (2007). La dimensión metadídáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Paradigma.Vol. XXVIII, n°2 (pp. 49-77).

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education.Educational studies in mathematics. 69 (pp. 33-52).

Godino, J. D. (2002), "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática".Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZentralblattfürDidaktik der Mathematik, 39(1-2), 127-135.

Ramos, A. B y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(2), 233-265.

IDONEIDAD AFECTIVA DE UN PROCESO DE ENSEÑANZA UTILIZANDO VIDEOS EDUCATIVOS.

Galindo, M.[a], Herrera, C[b.]

Universidad De Las Américas;
mgalindo@udla.cl, cherrera@udla.cl

Resumen

En este trabajo se evalúa la idoneidad afectiva de un proceso de enseñanza, en el cual se implementaron13 videos educativos relacionados con la unidad de ecuaciones,utilizando la guía de análisis de idoneidad didáctica propuesta por Godino (2009).El análisis de las respuestas obtenidas de los participantes en las encuestas, las visitas a la plataforma y reproducciones de los videos educativos, nos permitieron identificar los distintos descriptores propuestos obteniendo buenos resultados en la evaluación de la idoneidad afectiva. Se concluye que los videos educativos son un recurso valioso e importante para potenciar el aprendizaje de los estudiantes en distintas disciplinas, entre ellas la matemática.

Palabras claves:*Ecuaciones, Videos Educativos, Idoneidad Afectiva.*

INTRODUCCIÓN

Las asignaturas de Matemática General (MAT100) e Introducción a la Matemática Aplicada(MAT110), de la Universidad de Las Américas (UDLA), de Chile; en sus programas de estudio disponen de 3 horas semanales presenciales y 5 horas semanales no presenciales, estas últimas asignadas para que el estudiante desarrolleactividades autónomas que le permitanel logro de los resultados de aprendizaje.La presente investigación nace de la idea de buscar estrategias metodológicas que complementen la labor del profesor en el aula y al mismo tiempo apoyen al estudiante en su horario de trabajo personal (no presencial).La UDLA dispone de una plataforma de entorno virtual de aprendizaje Moodle, la que permite a cada estudiante el acceso a material de interés en cada asignatura.Se dispusieron en las aulas virtuales, el primer semestre del año 2014 y primer semestre del año 2015, 13 videos educativos relacionados con la unidad de ecuaciones.Considerando la necesidad de proporcionar un ambiente conocido al estudiante, los videos fueron elaborados por profesores de la UDLA y grabados en aulas de la casa de estudio.En este contexto, en el presente trabajo nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación: ¿Valoran los estudiantes los videos como un recurso que potencia su aprendizaje?

Marco teórico

La educación superior requiere de la renovación de sus procesos de enseñanza-aprendizaje, unanueva concepción metodológica que brinde al estudiante las herramientas para construir su

propio proceso de enseñanza-aprendizaje, que considere los diferentes perfiles de estudiantes con sus diferentes estilos de aprendizaje.

Proceso de enseñanza aprendizaje en entornos virtuales.

Las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) se introdujeron a la educación superior a finales de la década de los ochenta del siglo XX (Castillo, Larios y García, 2010; Riascos, Quintero y Ávila, 2009), fundamentalmente como herramienta de gestión y administración de los procesos académicos. Se entenderá TIC como lo señala Castillo et al. (2010, p.1):"aquellas herramientas computacionales e informáticas que procesan, almacenan, sintetiza, recuperan y presentan información, representada de la más variada forma. Un conjunto de herramientas, soportes y canales para el tratamiento y acceso a la información que constituyen nuevos soportes y canales para dar forma, registrar, almacenar y difundir contenidos informacionales. El modelo educativo de la UDLA está centrado en el estudiantes y busca distanciarse de la pedagogía tradicional, más aún, uno de los sellos institucionales considera el manejo de las tecnologías de la información y comunicación. Una de las características del estudiante universitario joven de UDLA es ser competente en el uso de la tecnología y se consideran nativos digitales. Por este motivo se debe plantear el hecho de que no es necesario que el docente coincida en el espacio ni en el tiempo con el estudiante para éste pueda desarrollar un proceso de aprendizaje personal.

El uso de los videos educativos en la enseñanza de las matemáticas.

Entre las investigaciones que tratan de caracterizar el impacto de los videos educativos en el proceso de aprendizaje destacamos a Joseph M. Duart, Albert Sangrà en su texto, *"Aprender en la Virtualidad"*,Philip J. Guo,Juho Kim,Rob Rubin en el artículo,"*How Video Production Affects Student Engagement: An Empirical Study of MOOC Videos, 2014"*, Alicia Ruiz Mateo en su artículo"*La utilización educativa del video en educación en educación primaria, 2009"*.Ivanovnna M. Cruz Pichardo & Dr. Ángel Puentes Puente, en el artículo *"Educational Innovation: Use of ICT in teaching of Basic Mathematics, 2012"*.Aun cuando los videos educativos se han utilizado con una herramienta educativa que complementa el quehacer del docente y no se han incorporado de forma generalizada en la enseñanza, con su utilización se logramejorar el proceso de comunicación didáctica, reducir el tiempo que el profesor dedica a la fase de transmisión de conocimiento, colaborar con el profesor en la fase de preparación de los contenidos, así como en la programación de la asignatura y ayudar a los alumnos en el proceso de comprensión y desarrollo de las capacidades así como al proceso de verificación. La perspectiva didáctica empleada es el enfoque onto-semiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006). Se abordan la relación entre los videos educativos presentes en las plataformas y el aprendizaje del conocimiento. Los autores introducen la Teoría de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que corresponde a la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes:*Idoneidad epistémica,Idoneidad cognitiva,Idoneidad interaccional,Idoneidad mediacional,Idoneidad ecológica, Idoneidad afectiva.* Donde la *idoneidad afectiva* corresponde *al* grado de implicación (interés, motivación, comprometimiento) del alumnado en el proceso de estudio. En este trabajo, utilizaremos ésta teoría paradeterminar si los estudiantes de las asignaturas consideran que los videos les ayudan a la mejor comprensión de los contenidos.

Metodología

La implementación de la secuencia de enseñanza de las ecuaciones se llevó a cabo el primer semestre del año 2014 y primer semestre del 2015; considerado, por ejemplo, el tiempo de ejecución, las condiciones de recursos tecnológicos disponibles en el aula y fuera del aula, y el número de estudiantes inscritos, se finalizó con la aplicación de evaluaciones periódicas. Los estudiantes inscritos en el curso MAT100 y MAT110 son de distintas especialidades; en MAT100, Ingenierías, Pedagogías, Áreas biológicas y áreas de negocios; en MAT110, Área de la salud, Gastronomía, Arquitectura y Técnico en turismo.

Las asignaturas son impartidas por el Instituto de Matemática Física y Estadística (IMFE) de la UDLA, no tiene prerrequisitos.Se ha tenido en cuenta la siguiente trayectoria didáctica del proceso de estudio considerado actividades que permitan el tratamiento matemático de las ecuaciones desde las aplicaciones contextualizadas progresivas; a) Delimitar los contenidos y secuencias de enseñanza de las ecuaciones. b) Considerar un acercamiento global a las ecuaciones ya la utilización de las propiedades importantes, siguiendo el desarrollo de situaciones contextualizadas. En este proceso se utilizaron 13 videos educativos relacionados con las ecuaciones, disponibles en la plataforma, diseñados con anterioridad por docentes UDLA. c) Establecer los resultados de aprendizaje de las evaluaciones.Se elaboran dos encuestas en relación a nuestro estudio y a las mejora de los videos educativos. En este trabajo queremos determinar si los estudiantes de las asignaturasMAT100 y MAT110 periodos 2014-10 y 2015-10 consideran que los videos les ayudan a la mejor comprensión de los contenidos. Para ello se analizará la idoneidad afectiva de la implementación.Según Godino (2009, 2011) la idoneidad afectiva "está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como factores que dependen básicamente del alumnado y de su historia escolar previa" (p.24). La emisión de un juicio sobre la mayor o menor idoneidad afectiva del proceso en cuestión se basa en el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes. La siguiente tabla incluye los componentes e indicadores seleccionados.

Tabla1: Componentes e indicadores de idoneidad afectiva.

COMPONENTES	INDICADORES
Intereses y Necesidades	Las tareas tienen interés para los alumnos. Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedos a las matemáticas. Se resaltan las cualidades estéticas y precisión de las matemáticas.

Resultados

Debemos destacar que uno de los resultados más significativos corresponde al número de visitas de los videos educativos en la plataforma virtual; lo que indica que los videos educativos son de interés

para los estudiantes, y que a través de distintas situaciones aplicadas a sus áreas les permiten valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional. Laimagen 1 detalla las visitas de los estudiantes a la plataforma, por años, relacionadas a los distintos contenidos.

N°VIDEO	NOMBRE	AULA VIRTUAL	DURACIÓN	VISITAS AL 2014	VISITAS AL 2015
1	Resolución de ecuaciones irracionales	MAT100	6,26 min.	1225	1622
2	Resolución de ecuaciones fraccionarias	MAT100-MAT110	7,29 min.	787	1135
3	Resolución de ecuaciones logaritmicas	MAT100	7,01 min.	621	774
4	Resolución de problemas de ecuaciones	MAT100-MAT110	6,01 min.	700	1002
5	Resolución de ecuaciones exponenciales usando variable auxiliar	MAT100	5,37 min.	385	492
6	Resolución de un problema de planteo utilizando ecuaciones de segundo grado	MAT100-MAT110	6,43 min.	413	592
7	Propiedades de las raices de una ecuación de segundo grado	MAT100-MAT110	10,16 min.	397	552
8	Resolución de una ecuación de segundo grado	MAT100-MAT110	4,45 min.	329	504
9	Resolución de ecuación irracional que se reduce a una ecuación de segundo grado	MAT100	10,17 min.	342	448
10	Resolución de ecuación racional de primer grado	MAT100-MAT110	6,23 min.	197	321
11	Resolución de un problema de edades con sistemas de ecuaciones	MAT100-MAT110	6,24 min.	508	716
12	Uso de ecuaciones de primer grado para resolver problema de porcentajes y ganancias	MAT100-MAT110	7,04 min.	719	936
13	Resolución de una ecuación exponencial que se reduce a una ecuación de segundo grado	MAT100	7,4 min.	173	218
	TOTAL			**6.796**	**9.312**

Imagen 1: Número de visitas a los videos educativos por contenidos.

Luego de finalizado el proceso de estudiode la unidad de ecuaciones, en ambos años, se dispuso de una encuesta en la plataforma.Los instrumentos de consulta a los estudiantes fueron elaborados por los investigadores y sometidos a juicio de expertos del área. Los estudiantes respondieron a través del aula virtual en forma anónima, voluntaria y sin límite de tiempo. En la imagen 2 eimagen 3 se especifican los resultados obtenidos por preguntas los años 2014 y 2015.

PREGUNTA	ENCUESTA AÑO 2014	CURSOS	
1	¿Cree ud. que los videos le ayudaron a una mejor comprensión de los contenidos?	MAT100	MAT110
	Si o siempre	59%	45%
	Casi siempre	23%	18%
	A veces	14%	33%
	Casi nunca	2%	0%
	No o nunca	3%	4%
2	¿Le gustaría disponer de otros videos similares en este y otros cursos de matemática que tendrá en el futuro?		
	Si o siempre	91%	78%
	Casi siempre	5%	6%
	A veces	2%	12%
	Casi nunca	1%	2%
	No o nunca	1%	2%

Imagen 2: Resultados preguntas 1 y 2 año 2014 (n=151).

PREGUNTA	ENCUESTA AÑO 2015	CURSOS	
1	¿Le gustaría disponer de otros videos similares en otras asignaturas de matemática?	MAT100	MAT110
	Si o siempre	79%	81%
	Casi siempre	6%	11%
	A veces	12%	8%
	Casi nunca	1%	0%
	No o nunca	2%	0%
2	¿Cree ud. que los videos le ayudaron a alcanzar los Resultados de Aprendizaje de este curso?		
	Si o siempre	31%	31%
	Casi siempre	26%	25%
	A veces	26%	35%
	Casi nunca	11%	4%
	No o nunca	6%	5%
3	¿Está de acuerdo con que se disponga de videos explicativos de la materia o contenidos vistos en clases?		
	Si o siempre	92%	86%
	Casi siempre	2%	8%
	A veces	4%	4%
	Casi nunca	0%	1%
	No o nunca	2%	1%

Imagen 3: Resultados preguntas 1, 2 y 3 año 2015 (n=168).

En relación a las actitudes, debemos mencionar que la asistencia de los estudiantes no disminuyó durante la unidad de ecuaciones, los videos educativos fueron diseñados de manera que complementaran las actividades del aula, no que las reemplazaran. Según Cruz y Puentes (2012) "debemos tener en cuenta que el uso de estas herramientas no pueden sustituir la conceptualización ni los procesos que conllevan la enseñanza de la asignatura. Sino que nos sirven de soporte para lograr un mejor entendimiento de estos".En relación a las emociones, debemos considerar la caracterización de los estudiantes de MAT100 y MAT110, cuyas competencias matemáticas son débiles. La disposición hacia el aprendizaje de las matemáticas se encuentra disminuida. Los estudiantes expresan su preocupación por la cantidad y complejidad de conceptos y propiedades que han de asimilar. Luego de la implementación de los videos, ellos expresan, a través de la encuesta, que los videos le han ayudado a mejorar la comprensión de los contenidos.

CONCLUSIONES

Finalmente vemosque el 81% de los estudiantes el año 2014 y el 63% de los estudiantes del 2015 consideran que los videos educativos les ayudaron en la comprensión de los contenidos.Con esto podemos afirmarque los estudiantes consideran los videos educativos como una herramienta útil en su aprendizaje, ya que les permite construir conocimiento significativo a través de imágenes, sonidos y palabras,estimulando sus sentidos y los distintos estilos de aprendizaje. El 96% de los estudiantes del año 2014 y el 84% del año 2015 consideran necesario disponer de videos educativos en otras asignaturas. En definitiva se puede concluir que los videos educativos son un instrumento didáctico importante en el proceso de enseñanza- aprendizaje, por lo que creemos conveniente que los docentes utilicen éste recurso didáctico en el proceso de enseñanza de los contenidos.

Referencias

Castillo, M., Larios V. M. y García O. (2010). Percepción de los docentes de la utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación. Revista Iberoamericana de Educación, 53 (6), 8-23.

Godino, J. D. (2002), "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática".Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research

in mathematics education. ZentralblattfürDidaktik der Mathematik, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Ivanovnna M. Cruz Pichardo & Dr. Ángel Puentes. (2012). "Educational Innovation: Use of ICT in teaching of Basic Mathematics".

Joseph M. Duart, Albert Sangrà. (2000). Aprender de la virtualidad.

Philip J. Guo, Juho Kim, Rob Rubin. (2014)."How Video Production Affects Student Engagement: An Empirical Study of MOOC Videos". On line: http://groups.csail.mit.edu/uid/other-pubs/las2014-pguo-engagement.pdf.

Riascos-Erazo, Sandra, Ávila-Fajardo, Gloria y Quintero-Cavache, Gloria (2009) Las TIC en el aula. Percepción de los profesores universitarios. Educación y Educadores, 12 (3). Rescatado de http://educacionyeducadores.unisabana.edu.co/index.php/eye/article/view/1536/1841

Ruiz, A. (2009)."La utilización educativa del video en educación primaria". On line: http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_14/ALICIA_RUIZ_1.pdf

TALLERES

INTRODUCCIÓN/ APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE PORCENTAJE A TRAVÉS DEL USO DE LA BANDA ELÁSTICA Y SUS REPRESENTACIONES

Angelika Fraitzl

Instituto Profesional Alemán Wilhelm von Humboldt LBI,
edubas@lbi.cl

Resumen

El propósito de este taller es presentar una secuencia de actividades para la introducción y el aprendizaje del concepto de porcentajes. Está dirigido a docentes de enseñanza básica y alumnos de pedagogía básica con el objetivo de incorporar en la práctica docente el uso del material concreto y el diseño de actividades organizadas dentro de un marco metodológico adecuado para la enseñanza del concepto de porcentajes.

Palabras clave: *porcentajes, banda elástica, escala doble, representaciones*

INTRODUCCIÓN

El concepto de porcentaje es de gran importancia para la vida cotidiana y por tanto conviene enseñarlo a los niños y niñas. Si bien los resultados de evaluaciones tanto nacionales como internacionales demuestran que los alumnos en Chile poseen las habilidades para calcular porcentajes y aplicar algún algoritmo, éstos no son capaces de aplicar dichos conocimientos a situaciones reales y no comprenden los porcentajes como un valor relacionado a un referente.

En parte, esta situación se genera por la falta de estrategias para la enseñanza del concepto.

Una buena forma de vivenciar el concepto de porcentaje como valor relacionado a un referente es a través del trabajo activo con el material concreto de la banda elástica. Este permite manipular, experimentar, observar y reflexionar sobre el concepto en general. Desde la acción se puede realizar la abstracción del concepto y convertir las experiencias concretas en un modelo de la situación en forma de una escala doble. Este modelo de la situación se puede transformar en un modelo para el cálculo de los porcentajes o para reflexionar sobre el concepto en general (Bressan (2009)).

El propósito de este taller es presentar una secuencia de actividades para la introducción y el aprendizaje del concepto de porcentajes. Está dirigido a docentes de enseñanza básica y alumnos de pedagogía básica con el objetivo de incorporar en la práctica docente el uso del material concreto y el diseño de actividades organizadas dentro de un marco metodológico adecuado para la enseñanza del concepto de porcentajes. Se espera que las profesoras y profesores, al vivir la experiencia de reconstruir sus conceptos sobre porcentajes por medio de las actividades presentadas, comprendan que los procesos que vivirán las y los estudiantes les permitirán aprender entendiendo a cabalidad las ideas matemáticas y no de forma memorística.

Actividades del taller

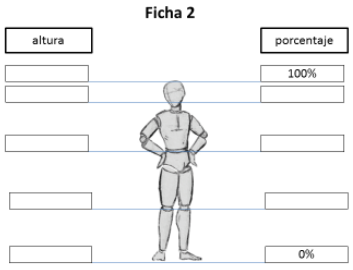
Actividad 1: Trabajo con la banda elástica y cintas

Los participantes repartidos en grupos de a tres o cuatro, reciben distintas cintas de cartulina. Se les presenta la banda elástica como material concreto para medir el valor porcentual de las cintas en relación a dos referentes distintos. Las medidas hechas se documentan en una ficha.



Actividad 2: Trabajo con la banda elástica y medidas corporales

Los participantes trabajan en grupos de a cuatro. Miden sus longitudes corporales personales en cm y las llevan a una relación porcentual a la altura total. Anotan sus mediciones en una ficha personal y después se comparan los resultados en una tabla común.



Actividad 3: Trabajo con la banda elástica y las medidas de los miembros del grupo

Los participantes trabajan en grupos de a cuatro. Deben encontrar la relación de las alturas de cada uno en relación al participante más alto del grupo. Se anotan todos los resultados en forma ordenada en una ficha. A continuación cada participante debe representar su altura en relación al compañero más alto en forma de barra, donde debe anotar las alturas en cm por un lado de la barra y los porcentajes respectivos por el otro lado de la barra. A continuación se repite la actividad con el participante más bajo del grupo como referente de 100%.

Actividad 4: Estimación de porcentajes en representaciones de barras

Se les presenta a los participantes varias situaciones de barras rellenas porcentualmente. Relacionan las situaciones presentadas con los aprendizajes de las actividades anteriores para poder estimar el porcentaje del relleno en comparación con el total. Los participantes aplican distintas escalas para poder medir con mayor exactitud.

Actividad 5: Cálculos con la barra de doble entrada

Los participantes calculan porcentajes de aumento y disminución usando una representación tipo barra.

Fase de cierre:

Se discuten las experiencias vivenciadas, sus posibles aplicaciones en clases, ventajas y limitaciones del material concreto de la banda elástica y su representación en un modelo de doble escala.

La fotografía que forma parte de esta presentación fue realizada con los estudiantes de la asignatura de Educación en Matemáticas II del año 2014 del Instituto Profesional Alemán Wilhelm von Humboldt.

Referencias

Bressan, A. (2009). Representaciones y modelos en la matemática realista. Centro de Estudios de la Realidad Nacional, 8(37), 2. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/representaciones_ymodelos.pdf

Maz, A., & Gutiérez, M. D. P. (2008). Errores de los estudiantes de magisterio frente a situaciones que implican porcentajes. Enseñanza de la Mátemática, 17(1), pp 59-69. Córdoba, España.

Mendoza von der Borch, T. M. (2009). La noción de porcentaje: procedimientos, errores e interpretaciones de estudiantes de secundaria. Vera Cruz, México

Mendoza, T. (2007). Estudio didáctico de la noción de porcentaje (Doctoral disertación, tesis de maestría, México: DIE-CINVESTAV-IPN).

Puscher Dr. R., Vernay R. (2008).Das Prozent-Gummiband. Ernst Klett Verlag GmbH. Recuperado en http://www.klett.de/sixcms/media.php/185/mathe_live_kopiervorlage_therra_band.pdf

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Reflexiones teóricas para la educación matemática, 5, (pp.13 – 66), Libros del Zorzal, Buenos Aires, Argentina.

Schillig W., (2010). Ein Universalwerkzeug, Mit einem Prozentband Größen ins Verhältnis setzen, Mathematik Unterricht – Aufgaben – Materialien 5 bis 10, Nummer 10, 15 -17.

Heuvel-Panhuizen, M. (2009). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. Segunda parte. Correo del maestro, 161, 20 – 36. Recuperado de

http://www.researchgate.net/publication/46724889_El_uso_didctico_de_modelos_en_la_Educacin_Matemtica_Realista_Ejemplo_de_una_trayectoria_longitudinal_sobre_porcentaje_(Segunda_parte)

DISEÑO DE BUENAS TAREAS ESCOLARES. DISCUSIÓN DESDE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

Ramos-Rodríguez, E. [a], Rojas J.[b], Parraguez, M.[c] González Yáñez, B.[d] y Aguayo, C.G.[e]

[a,b,c,d]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso [e]Universidad de Granada

elisabeth.ramos@ucv.cl[a] jonathan.rojas.valero@gmail.com[a] marcela.parraguez@pucv.cl[c]
betsabegonzalez@pucv.cl[d] Carmen.aguayo@correo.ugr.es[e]

Resumen

El objetivo de este taller es consensuar criterios para considerar una buena tarea de enseñanza de las matemáticas. Se presentan elementos relevantes de una tarea escolar, como es su estructura, objetivo de aprendizaje y contenido matemático. Luego, se buscan nuevas dimensiones de análisis, con un carácter más valorativo, como la coherencia entre la tarea propuesta y objetivo de aprendizaje. El punto de partida para iniciar la discusión y el trabajo grupal es con base en una tarea propuesta por un grupo de docentes participantes en un curso formativo continua. La tarea la diseña el grupo con el objetivo de enfrentar las dificultades que tienen los estudiantes al convertir del lenguaje verbal al algebraico, dentro del contexto de la modelación matemática. Se reflexiona en torno a esta tarea para centrar la atención en cómo diseñar buenas tareas para la enseñanza de la matemática y la relevancia de la modelación matemática en dicho proceso.

Palabras clave: *tareas matemáticas, modelación matemática.*

INTRODUCCIÓN

El diseño o selección de tareas es una función diaria e importante que realiza el docente de matemáticas (Ponte, 2005). Si consideramos que el término tarea reúne todo lo que se realiza en clase con intención de lograr el aprendizaje, todo lo que hace el profesor son tareas de enseñanza.

Si bien las tareas más tradicionales arrancan de una explicación del profesor, para luego pedir que los alumnos apliquen lo tratado a resolver ejercicios, no es este el único tipo de tareas. La resolución de problemas, el planteamiento de proyectos, experimentos, talleres, va tomando cada vez más presencia en la enseñanza de las matemáticas.

En este taller afrontamos como objetivo el consensuar criterios con los que considerar una buena tarea de enseñanza de las matemáticas, de modo de apuntar a buenas prácticas docentes (Planas y Alsina, 2009). Para ello partimos de un trabajo de análisis de cualidades de las tareas, lo que exige que pongamos en práctica algunas variables que nos permitan diferenciar y analizar dichas tareas (Doyle, 1933, Ponte, 2005): la meta u objetivo de aprendizaje, la forma en que se formula u organiza, el tipo de materiales y formas de comunicarse, parecen dimensiones objetivas que nos facilitan describir cómo son las tareas.

Si queremos avanzar, debemos buscar nuevas dimensiones de análisis, con un carácter más valorativo. Estudiar la coherencia entre la tarea propuesta y la meta que pretende alcanzar, parece que debe ser una primera dimensión importante (Flores, Gómez y Marín, 2013). Para ello tendremos que aclarar cómo podemos examinar esta coherencia.

Entre las propuestas que hacemos los proponentes del taller está examinar qué tipo de aprendizaje se consigue con la tarea de enseñanza. Una tarea del tipo "explicación – ejercitación", por ejemplo, parece un buen recurso para que el alumno aprenda destrezas mecánicas, como resolver operaciones mediante algoritmos. No está tan clara su eficacia para lograr que comprenda un concepto, pues no estamos seguros de que solo escuchando y siguiendo un razonamiento se comprenda qué papel juega en matemáticas.

En este taller queremos partir de experiencias similares realizadas anteriormente, sobre el análisis y diseño de tareas, con docentes. El diseño de tareas fue una de las tareas formativas que se presentó dentro de un curso de formación continua de profesores de matemáticas de Chile (xxx, xxx, xxx, 2012), en donde los profesores diseñaban y/o seleccionaban tareas para el aula con un objetivo establecido por ellos.

En este contexto, un grupo de docentes diseñó una tarea para mitigar las dificultades que tienen los estudiantes para convertir del lenguaje verbal al simbólico dentro del contexto de la modelización algebraica. En el curso esta tarea fue discutida por el grupo y con sus compañeros, dando lugar a diversas reformulaciones.

Para el taller partiremos de una de estas versiones para proceder a estudiar sus cualidades, empleándolas como punto de partida en vista a seleccionar dimensiones de las tareas matemáticas escolares, y, sobre todo, reflexiones sobre cómo diseñar buenas tareas matemáticas para la enseñanza del álgebra en educación obligatoria.

Este taller es la reformulación de otro (realizado con profesores de matemáticas en el contexto del XV Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Baena, España, 2014) con el propósito de profundizar en el tema con docentes de ibero-américa.

Nos hemos propuesto como objetivo principal consensuar criterios para considerar una buena tarea de enseñanza de las matemáticas de modo de apuntar a buenas prácticas docentes.

Aspectos teóricos

Los aspectos teóricos se basan en la idea de tareas para la enseñanza y de modelación matemática.

A partir del diseño de una determinada tarea, se procede al análisis de cualidades de ésta, tales como: objetivo de aprendizaje, diseño, organización, materiales, comunicación de los participantes (Doyle, 1933, Ponte, 2005). Dimensiones objetivas que facilitan la descripción de tareas.

Luego, se buscan nuevas dimensiones de análisis, con un carácter más valorativo, a saber, estudiar la coherencia entre la tarea y el objetivo, meta que pretende alcanzar (Flores, Gómez y Marín, 2013). Se propondrá examinar qué tipo de aprendizaje se consigue con la tarea de enseñanza. Una tarea del tipo "explicación – ejercitación", por ejemplo, parece un buen recurso para que el alumno aprenda destrezas mecánicas, sin embargo, no está tan clara su eficacia para lograr que comprenda un concepto.

La modelación matemática en educación es un tema de interés que ha tomado espacio en reuniones científicas como la ICTMA, la ICME, en el International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en la Asian Technology Conference in Mathematics y en la RELME, entre otras. Se observa diversos investigadores que han dedicado su interés en conceptualizar este proceso con miras a su comprensión, como Blum y Niss (1991), entre otros.

Diversos autores han propuestos fases que involucra la resolución de problemas. Como por ejemplo, la modelación una forma de resolución de problemas, la caracterización nos lleva a ver la modelación como un proceso. Para la implementación de ésta como un recurso en el aula, algunos autores han sugerido una serie de momentos, fases o etapas (Blum y Niss, 1991). A partir de éstas y otras aportaciones sobre el tema asumiremos (xxx, 2014) el proceso de modelación como un proceso que conlleva cuatro fases principales (figura 1).

- Identificación del modelo real.
- Construcción del modelo matemático.
- Elección de los contenidos y utilización de métodos matemáticos apropiados.
- La interpretación y validación.

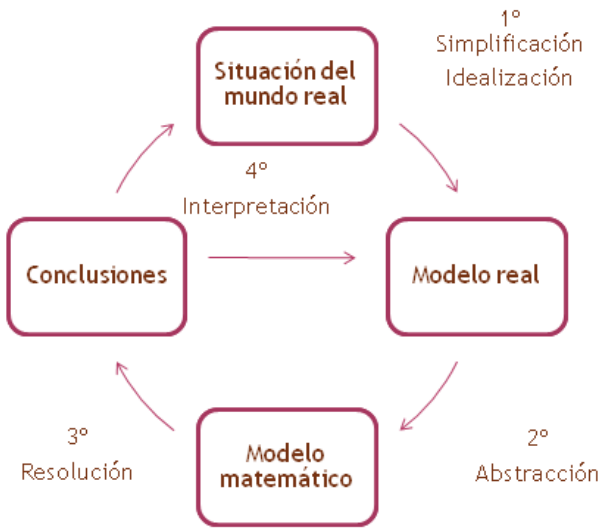


Figura 27. Proceso de modelación matemática

Metodología

Se comenzará con el análisis y diseño de tareas. El diseño de tareas fue una acción formativa que se presentó dentro de un curso con profesores de matemáticas de Chile (xxx, xxx, xxx, 2012), en donde docentes diseñaban y/o seleccionaban tareas para el aula con un objetivo establecido por ellos.

En este contexto, un grupo de docentes diseñó una tarea para enfrentar las dificultades que tienen los estudiantes al convertir del lenguaje verbal al algebraico, dentro del contexto de la modelación matemática, tarea que fue discutida, dando lugar a diversas reformulaciones.

En el taller partiremos de una de estas versiones, con el fin de comenzar a estudiar sus cualidades, en vista a seleccionar dimensiones de las tareas matemáticas escolares, y, sobre todo, a reflexionar sobre cómo diseñar buenas tareas matemáticas para la enseñanza de la matemática. Este análisis se realizará en grupos, dando lugar a una puesta en común en la que determinamos los aspectos que constituirán a ésta como una buena tarea. Finalmente, se propondrán las modificaciones respectivas de ésta, las que responden al análisis realizado en la primera parte.

Resultados

Se espera de este taller, identificar criterios para evaluar y analizar tareas asociadas a las clases de matemáticas desde distintos aspectos, fortalecer habilidades de diseño y análisis de tareas para clases de matemáticas y promover la discusión entre pares para la reflexión en torno al quehacer docente. Se espera que los profesores tomen mayor conciencia de la relevancia del diseño de tareas como una función habitual, pero de importancia para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, se espera profundizar en aspectos de la matemática para la enseñanza, en específico, sobre la noción de modelación matemática.

Una primera parte del taller se dedicará a analizar una tarea de enseñanza de las matemáticas, que llevarán los proponentes. Examinando esta tarea, en relación a su interés para lograr aprendizaje, empleando algunas dimensiones de estudio, estableceremos aquellas dimensiones que parecen más importantes para diseñar buenas tareas de enseñanza de las matemáticas. Este análisis se realizará en grupos, antes de pasar a poner en común al gran grupo, en la que determinamos aspectos que debe tener una buena tarea de enseñanza de las matemáticas.

Posteriormente propondremos transformar las tareas propuestas, parcial o totalmente, para mejorarlas y lograr consensuar una buena tarea para el aprendizaje del álgebra escolar.

A partir de esta tarea se plantea una dinámica de trabajo compuesta de 4 momentos claves.

- Presentación e introducción del taller.

  Presentación del taller, clarificación del concepto de tarea matemática escolar. Presentación de una tarea de enseñanza del álgebra, detallando la descripción de la misma (meta, formulación y condiciones), y pasando a estudiar su coherencia y contenido.

- Trabajo grupal.

  Trabajo en grupos para estudiar coherencia y para crear una nueva propuesta, reformulando la anterior, con el fin de obtener una tarea que cumpla con las expectativas que se plantean.

- Puesta en común.

  Se expone cada propuesta y se discute las mejoras realizadas, empleando como punto de partida las dimensiones presentadas, pero buscando afianzarlas o incluir nuevas dimensiones que, a juicio de los participantes, sean más pertinentes para analizar y valorar las tareas matemáticas.

- Elaboración de buenas tareas matemáticas para la enseñanza del álgebra en educación obligatoria.

  Aplicar las dimensiones consideradas en el momento anterior, para modificar las propuestas o crear nuevas que satisfagan el máximo de cualidades positivas de una tarea matemática escolar, a juicio de los participantes.

Referencias

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving Modelling, Applications,and Links to Other Subjects–State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. Educational Studies in Mathematics, 22, 37-68.

Doyle, W. (1983). Academic work. En Review of Educational Research. v. 53, n. 2, p.159-199.

Flores, P., Gómez, P. y Marín, A. (2013). Apuntes sobre análisis de instrucción. Módulo 4 de MAD. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/2061/

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. En GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA DESDE LA MODELACIÓN MATEMATICA EN EL AULA[i]

[a]Corrial-Ayala, C.y [b]Ramos-Rodríguez, E.

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

[a]carlos.corrial.a@gmail.com, [b]elisabeth.ramos@pucv.cl

Resumen

Ser un profesor reflexivo es una característica que en la actualidad se está reconociendo en todo aquel que quiera desenvolverse en el área educativa con profesionalismo (Jaworski, 1993; Korthagen, Kessels, Koster, Lagerwerf y Wubbels, 2001). El objetivo de este taller es generar una instancia reflexiva, desde la práctica profesional docente, respecto al desarrollo de la habilidad de modelación matemática en los estudiantes. Se basa en la idea de proceso reflexivo denominado desde ALaCT (Korthagen y Verkuyl, 1987). Nos centramos en un tema matemático, la modelación matemática, que ha tomado espacio en reuniones científicas como la International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications, ICTMA.El producto de este taller, es instalar en los docentes la reflexión como una herramienta que facilita la mejorar de la práctica docente, en particular para el trabajo realizado con la modelación matemática.

Palabras claves: *reflexión sobre la práctica, modelación matemática, creencias*

INTRODUCCIÓN

El desarrollo profesional de cada docente pasa por un proceso adaptativo donde dialoga constantemente la teoría aprendida -vista y analizada sobre el aula de clases bajo la guía de un profesor de universidad-con la incertidumbre de la práctica docente y de la implementación de tareas. En este proceso adaptativo, todo profesor novel (y sigue experimentando cualquier docente) ante un concepto nuevo a enseñar, busca promover en los estudiantes tareas y aprendizajes significativos que permitan desarrollar habilidades y competencias en ellos. Este proceso marcado posiblemente por ensayo y error, provoca en el docente reconocer las falencias de su práctica que impiden el logro del objetivo de sus tareas de enseñanza, como no haber considerado elementos, interno o externos a los estudiantes, que permitían alcanzar el objetivo de la propuesta.

Dentro de las habilidades complejas que debe promover el profesor está la modelación matemática, tema que ha tomado espacio en reuniones científicas como la International ConferenceontheTeachingof Mathematical Modelling and Applications, ICTMA (Matos, Blum, Houston y Carreira, 2001).

El programa chileno de matemática declara y define la modelación como: "proceso de utilizar y aplicar modelos, seleccionarlos, modificarlos y construir modelos matemáticos, identificando patrones característicos de situaciones, objetos o fenómenos que se desea estudiar o resolver, para finalmente evaluarlos"(MINEDUC, 2012, p.89). Este proceso de modelación al ser llevado al aula suele salir de la zona de confort (Korthagen, 2010) de algunos docentes. Los problemas o ejercicios de modelación, según el objetivo a alcanzar, requieren de un fuerte trabajo previo de planificación y de preparación, pero ¿eso nos asegura que tengamos un resultado óptimo? No podemos asegurar una afirmación ni una negación. Entonces ¿de qué depende obtener buenos resultados en la implementación de tareas?

Por último, ser un profesor reflexivo es una característica que en la actualidad se está reconociendo en todo aquel que quiera desenvolverse en el área educativa con profesionalismo (Jaworski, 1993;

Korthagen, Kessels, Koster, Lagerwerf y Wubbels, 2001). Contar con docentes con habilidades de reflexión y pensamiento crítico, ha sido uno de las nuevas preocupaciones que surgen dentro de las políticas educativas. Así por ejemplo en Chile, el Ministerio de Educación concreta su interés a través de una inversión de recursos económicos y humanos, con el propósito de apoyar la formación inicial y permanente, generando instancias que "propicien fuertemente el desarrollo de habilidades de reflexión y pensamiento crítico en los docentes" (Miranda, 2003).En este contexto nuestro taller pretende abordar desde la experiencia y el conocimiento de los docentes participantes bajo procesos reflexivos, diversos factores que existen en educación y en enseñanza de la modelación matemática.

MARCO DE REFERENCIA

El marco de referencia se basa en el proceso reflexivo ALaCT y la modelación matemática.

Se ha seleccionado, dentro de los modelos utilizados en educación matemática, un modelo cíclico basado en la reflexión de Kolb, desde la psicología cognitiva (Korthagen y Verkuyl, 1987). El modelo reflexivo a utilizar es el ALaCT de Korthagen consistente en cinco etapas o fases de reflexión que desencadenan un proceso cíclico, posible de repetir.



Figura 28. Modelo *ALaCT* (Korthagen et al., 2001)

Lareflexión organiza la acción de manera nueva, pero fundamentada (producir un cambio), para ello hay que revisar si los principios o creencias están realmente fundamentados o son premisas superficiales. Creencia no es conocimiento, pero se tiende a creer de manera subjetiva, la creencia no se altera con la enseñanza.

Respecto a la modelación matemática, contamos con la noción de modelo que tiene diferentes formas de ser interpretada, dependiendo del ámbito en que ésta se emplee. Así es como en educación matemática tiene una acepción más específica que debemos detenernos a analizar y definir, ya que no es interna a ésta. Cuando la matemática es base de un modelo teórico se crea un modelo matemático (Rico, 2009).

En este ámbito (matemático) existe una variedad de autores que han definido este término (Arora y Rogerson, 1991; Cross y Moscardini, 1985). Siguiendo las ideas de autores mencionados, entenderemos por "modelo matemático "una estructura matemática que se aproxima a las características de un fenómeno" (Swetz y Hartzler, 1999, p. 1).

En todas las propuestas respecto a modelación, se aprecian rasgos invariantes que fundamentalmente asocian la modelación con la interacción entre el mundo real y el mundo matemático. Asumimos la modelación matemática como el proceso mediante el cual se construye y se estudia una relación entre un fenómeno y una estructura matemática, a partir de una situación o problema del mundo real con la finalidad de aproximarnos a este último. Esto significa que las implicaciones del modelo deben orientarse a la comprensión y resolución del problema correspondiente al mundo real.

Diversos autores han propuestos fases que involucra la resolución de problemas. Como la modelación es una forma de resolución de problemas, sucaracterización nos lleva a verla como un proceso (Blum y Niss, 1991). A partir de aportaciones de distintos autores (Blum y Niss, 1991; Swetz, 1989) definimos el proceso de modelación como un proceso que conlleva cuatro fases principales (XXX, 2014): identificación del modelo real, construcción del modelo matemático, elección de los contenidos y utilización de métodos matemáticos apropiados, y la interpretación y validación (Figura 1).

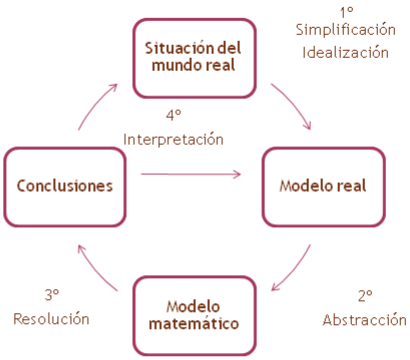


Figura 2. Proceso de modelación matemática

METODOLOGÍA

El objetivo del taller está centrado en generar una instancia reflexiva desde la práctica profesional docente respecto al desarrollo de la modelación matemática en los estudiantes. El taller a presentar se desglosará y categorizará en momentos que están basados en el proceso de reflexión del ALaCT.

Momento 1

Se les plantea a los docentes la pregunta:¿Qué situaciones o conflictos se le ha presentado a usted (docente) desde la práctica de su profesión al intentar desarrollar en los estudiantes la habilidad de modelación matemática?

Se les solicita a los docentes que piensen y reflexionen individualmente respecto de su práctica profesional en el aula, y en qué situación, momento o contenido el desarrollo de esta habilidad le ha sido dificultosa de trabajar. Se les solicita que escojan solo uno de esas situaciones y sea capaz de escribirla. Se sugiere plantear una tarea escolar que ejemplifique el problema detectado.

Momento 2

Se les solicita a los docentes que se reúnan en grupo reducidos y seleccionen una sola problemática. Compartan la situación seleccionada, la intención es la verbalización de la situación escogida, compartir y contrastar opiniones de cada una de ellas. Posteriormente, generar un esbozo de la situación compartida y tener una opinión reflexiva, posterior interacción con sus pares, de la situación seleccionada.

Momento 3

Se genera una puesta en común de todos los participantes, los docentes deberán escoger solo una de las problemáticas conversadas para ser trabajada a modo grupal. El trabajo en este momento está centrado en la distinción de elementos que fueron importantes y relevantes para la implementación del trabajo de modelación seleccionado. Por ejemplo, identificar cuál era el objeto matemático, ¿cuál era el objetivo o intención real de la actividad o clase?,¿cuál era el plan de clase con el que se abordó?, ¿los estudiantes respondieron como se esperaba?, ¿cuáles fueron los errores de los estudiantes o de la planificación?, ¿cuáles fueron los agentes que influyeron en que esta situación la

reconozca como conflictiva?, entre otras. Se puede contrastar la propuesta con la definición entregada por los programas de estudio o las concepciones personales.

Este momento es uno de los más complejos, pues contribuirá poner en juego su conocimiento sobre modelación matemática, sobre enseñanza, entre otros.

Momento 4

Romper creencias; los profesores deben despojarse de todas las creencias que rodean sus problemáticas, la institución educativa, la enseñanza, etc. Así, en particular el "yo creo que…"esto permitirá centrar el trabajo en la matemática directamente y en los elementos que permiten trabajar este proceso reflexivo de manera objetiva y argumentada.

Este es el otro momento intenso del taller, pues devela las formas de ver la matemática y la enseñanza, en particular sobre la modelación matemática.

Momento 5

El momento 5 se caracteriza con la generación de propuestas que permitan abordar errores o elementos defectuosos (conflictivos) identificados y reconocidos en los momentos anteriores. Es así como la creación de elementos nuevos permitirían abordar partes cruciales de una tarea (o plan de clases) respecto de la modelación matemática. Además la búsqueda de elementos que permitan sustentar la situación planteada de mejor manera y propicien el logro del objetivo.

Momento 6

Con todos los elementos presentados se invita a los docentes a formular y replantar el problema detectado y la tareaejemplificadora. Esto permitiría el cierre de un primer ciclo de reflexión en torno a la práctica docente. Compartir la propuesta final con el curso.

Momento 7

Explicitar la reflexión llevada a cabo. En este momento se explicita el ciclo de reflexión que se promovió de forma de hacerlo consciente en los participantes para que puedan llevarlo a otras situaciones de su práctica.

RESULTADOS

Se espera de este taller que los docentes sean capaces de reflexionar de manera individual y colectiva respecto de la práctica y el tratamiento de la modelación matemática, además de compartir experiencias significativas de aprendizaje y retroalimentación que son los espacios brindados por la reflexión. Así también se espera que los docentes adquieran o se vean enfrentados a una herramienta de trabajo (la reflexión) que les permita: problematizar situaciones, describirlas, caracterizarlas y delimitar estas con la finalidad de poder abordarlas de manera óptima y mejor la práctica docente.

El trabajo en grupo permite abordar problemas de manera colectiva respecto al delimitar objetos matemáticos y planes de clases que apoyen el desarrollo de éste. Entrega también la oportunidad de trabajar orientaciones colaborativas del trabajo en base a la reflexión de cada uno de los tópicos tratados.

Desde la reflexión de los profesores, es posible poner en juego definiciones y elementos que permiten, desde la experiencia, el desarrollo de clases que potencien el modelamiento matemático en los estudiantes.

Referencias

Arora, M. S. y Rogerson, A. (1991). Future trends in Mathematical modelling and applications. En M. Niss, W. Blum e I. Huntley (Eds.), Teaching of mathematical modelling and applications (pp.111-116). NY: Ellis Horwood.

Blum, W. y Niss, M. (1991).Applied Mathematical Problem Solving Modelling, Applications, and Links to Other Subjects-States, Trends and Issues in Mathematics Instruction. Educational Studies in Mathematics, 22, 37-68.

Cross, M. y Moscardini, A. (1985).Learning the Art of Mathematical Modelling.Chichester, UK: Ellis Horwood Limited.

Jaworski, B. (1993). The professional development of teachers: The potential of critical reflection. British Journal of In-service Education, 19, 37-42.

Korthagen, F.A.J. (2010). La práctica, la teoría y la persona en formación del profesorado. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 68(24), 83-101.

Korthagen, F.A.J. y Verkuyl, H. S. (1987). Supply and Demand: Towards Differentiation in Teacher Education, Based on Differences in Learning Orientations. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Washington. D.C.

Korthagen, F., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B. y Wubbels, T. (2001).Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Matos, J. F., Blum, W., Houston, S. K. y Carreira, S. P. (Eds.) (2001). Modelling and mathematics education: ICTMA 9 – Applications in science and technology. Chichester, UK: Horwood.

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2012). Matemática. Bases Curriculares 2012. Santiago: Autor

Miranda, C. (2003). El pensamiento crítico en docentes de educación general básica en chile: un estudio de impacto. Estudios pedagógicos, 29, 39-54.

XXX (2015).

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. PNA, 4(1), 1-14.

Swetz, F.J. (1989). Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction. Mathematics teacher, 82(5), 370-77.

Swetz, F.J., y Hartzler, J. S. (1991). Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1906 Association Dr., Reston, VA: NCTM.

---

[i] Este trabajo es parte de una tesis de magister en didáctica de la matemática. Se enmarca dentro de una investigación más amplia, proyecto "Investigación basada en el Diseño para la creación, implementación y evaluación de un curso de formación. Construyendo un escenario para estudiar la reflexión sobre la práctica de profesores noveles de matemáticas", financiado por la Unidad de Mejoramiento de la Docencia Universitaria de la PUCV.

CONDICIONES NECESARIAS O SUFICIENTES, ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS Y ARGUMENTACIONES EN LAS CLASES DE MATEMÁTICA

Lacués, E.

Universidad Católica del Uruguay (UCU);
correo electrónico: elacues@ucu.edu.uy

Resumen

Aprendizajes de Matemática y habilidades de razonamiento aparecen frecuentemente ligadas, hasta el punto en que suele admitirse que conseguir los primeros tiene como consecuencia la adquisición de las últimas. Sin embargo, existen evidencias de que esto podría no ser así y resultaría necesario prestar atención a explicitar las estructuras deductivas presentes en las argumentaciones matemáticas, como manera de propiciar su apropiación por parte de los estudiantes (Durand-Guerrier, 2003; Inglis & Simpson, 2008; Morou & Kalospyros, 2011).

En este taller, dirigido a profesores que se desempeñan en la educación media o en la superior y a estudiantes de profesorado, el objetivo es sensibilizar acerca de la necesidad de mostrar desde la enseñanza el rol que las estructuras deductivas juegan en el aprendizaje de Matemática.

Palabras clave: *Formación de profesores, estructuras deductivas, enseñanza y aprendizaje de Matemática, razonamiento, argumentación.*

INTRODUCCIÓN

Es frecuente que Matemática y razonamiento se asocien, de manera que se asume que el aprendizaje de la primera provoca la adquisición de habilidades en el segundo, y esta razón se ha esgrimido como una de las que justifican la inclusión de Matemática en el currículo.

Sin embargo, las características de este vínculo en general permanecen difusas: ¿el desarrollo de habilidades en qué clase de razonamiento (deductivo, inductivo, por analogía, entre otros) resultan estimuladas por el aprendizaje de Matemática? ¿Este desarrollo se produce como simple efecto colateral del aprendizaje, o existen otros factores relevantes para conseguirlo, como la naturaleza de los contenidos matemáticos o la explicitación desde la enseñanza de la presencia de formas de razonamiento asociadas a los argumentos matemáticos?

Algunos resultados muestran que sin enseñanza intencional, puede ocurrir que los estudiantes no reconozcan las estructuras de razonamiento utilizadas, y en consecuencia, no consigan apropiarse de ellas (Durand-Guerrier, 2003, Inglis y Simpson, 2008, Morou y Kalospyros, 2011, Chávez y Caicedo, 2014).

Este taller busca atender a este problema, focalizándose en estructuras de razonamiento deductivo y en las formas argumentales, a partir de una visión teórica desde los fundamentos lógicos basados en la noción de condicional, y contribuyendo a la práctica cotidiana en clase con ejemplos de temas en los que es posible utilizar la enseñanza de contenidos matemáticos para, además, generar instancias donde los estudiantes pueden razonar y reconocer las formas argumentales que están usando.

A continuación se presenta un breve marco teórico.

MARCO TEÓRICO

Trayecto histórico de la noción de condicional

Aristóteles (384-322 a.C.) es considerado el precursor de la Lógica, al introducir los silogismos y discutir cuáles de estas formas argumentales eran correctas (algunas de sus conclusiones resultaron equivocadas, a la luz de desarrollos posteriores); mostró, además, una preocupación por el problema de cuantificar proposiciones, que vino a tener solución recién en el siglo XX.

Un avance posterior puede encontrarse en Filon de Megara (Durand-Guerrier, 2003) cuyo trabajo se desarrolló alrededor del año 300 a.C., retomando y ampliando el de Aristóteles. A él se debe la definición acerca de cuándo una sentencia condicional es cierta.

En Cálculo Proposicional, si A y B son dos fórmulas bien formadas (fbf), se define el valor de verdad de la fórmula (A) → (B), llamada condicional, diciendo que es falsa si y sólo si la fbf A es cierta y la fbf B es falsa. A y B se llaman, respectivamente, antecedente y consecuente.

Desde Filón, no se registran avances importantes en Lógica hasta Leibnitz, con su objetivo de crear una "Simbólica" o "Característica", ciencia en la que se podrían expresar todos los razonamientos: "Es de esta ciencia que dependería entonces el desarrollo de las diferentes partes de la Matemática" (Brunschvicg, 1945, p. 227).

Esta misma posición fue defendida entre finales del siglo XIX y comienzos del XX por otros matemáticos, como Giuseppe Peano, Augustus de Morgan y George Boole.

Con sus trabajos se resolvieron cuestiones de Cálculo Proposicional (con el uso de la algebrización de este cálculo), se plantearon adecuadamente los problemas relacionados con la cuantificación (aun cuando su solución recién se logró con Gottlob Frege) y se avanzó en la noción de teorías axiomáticas.

Finalmente, se estableció el valor de verdad de fórmulas cuantificadas; con la designación de implicación material que dio Bertrand Russel a estas sentencias condicionales, tenemos que:

La fbf $(\forall x)\ ((A) \rightarrow (B))$ es cierta en un dominio si y sólo si $(A) \rightarrow (B)$ es cierta para cualquier instanciación de la variable x en ese dominio; es cierta si es cierta en cualquier dominio.

La fbf $(\exists x)\ ((A) \rightarrow (B))$ es cierta en un dominio si y sólo si $(A) \rightarrow (B)$ es cierta para alguna instanciación de la variable x en ese dominio; es cierta si es cierta en cualquier dominio.

Relación entre condicional y estructuras deductivas

A lo largo del siglo XX fueron configurándose dos maneras de enfocarse en el problema de la deducción.

En la teoría semántica, se comienza estableciendo el valor de verdad de una fórmula, desde allí se definen las tautologías como fórmulas que son ciertas en cualquier interpretación, y se establecen las reglas de inferencia a partir de tautologías que tengan la forma de un condicional.

Las reglas de inferencia, en esta perspectiva, resultan de las tautologías; si la fórmula:

$(A_1) \wedge (A_2) \wedge \ldots \wedge (A_n) \rightarrow (B)$

es una tautología, entonces la fórmula B es consecuencia lógica de las premisas $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

En la teoría sintáctica, en cambio, lo que se asume como punto de partida en el llamado método de deducción natural, son las estructuras deductivas que se construyen con el uso de reglas de transformación. Estas reglas aparecen de a pares, de manera que una de ellas sirve para introducir

un conectivo y a otra para eliminarlo. Así, por ejemplo, del conocimiento de las fórmulas A y B se deduce A∧B, mientras que del conocimiento de A∧B se deducen tanto A como B.

El método de deducción natural es más próximo a la forma de trabajo en Matemática, y se acerca a la idea primitiva de Euclides, de que deben obtenerse demostraciones de enunciados a partir de otros, tomados como ciertos, mediante reglas que justifican la construcción de secuencias de enunciados que culminan en el que se quiere probar.

Modus ponens y modus tollens

Filón de Megara enunció estas dos reglas, respectivamente, de la siguiente manera:

"Si el primero, el segundo: el primero; por lo tanto, el segundo"

"Si el primero, el segundo: no el segundo; por lo tanto, no el primero"

Estas dos reglas de inferencia son de las más usadas en Matemática. Para ejemplificar lo que se planteó en la sección anterior, se presenta la relación del modus ponens con tautologías y las sentencias condicionales.

La forma verbal que describe el modus ponens puede traducirse en términos del Cálculo Proposicional de la siguiente manera (aunque mediante convenciones sobre precedencia de conectivos, podrían eliminarse paréntesis): ((a → b) ∧ a) → b. En esta formulación, "→" es el signo para el condicional y "∧" el correspondiente a la conjunción. El paréntesis antes del segundo signo de condicional expresa la frase "si el primero, el segundo" (en el paréntesis interno) y "el primero", mientras que el segundo signo de condicional sirve para establecer que de esta conjunción se concluye "el segundo".

Ahora bien, la sentencia ((a → b) ∧ a) → b es una tautología, es decir, una fórmula que es cierta para cualquier asignación de valores de verdad a sus variables. Para ver esto, alcanza con notar que la única forma de que fuera falsa sería que (a → b) ∧ a fuera cierta y b falsa. Pero (a → b) ∧ a, para ser cierta, requiere a → b y a ciertos simultáneamente, con lo que b es obligatoriamente cierto y no falso como hubiera debido ser.

Teniendo en cuenta lo mencionado en la sección anterior, esta tautología conduce a modus ponens como regla de inferencia.

En la teoría sintáctica, entretanto, modus ponens es una de las reglas de transformación: del conocimiento de (A) → (B) y A, se deduce B; la regla que complementa el par con ésta establece que si a partir de A se ha deducido B, entonces se deduce (A) → (B).

Razonamiento por absurdo

La estructura de razonamiento por absurdo se fundamenta en la siguiente tautología:

(a→b) ↔ ((a ∧ ┐ b) → (d ∧ ┐ d))

Esta fórmula puede interpretarse diciendo que es equivalente que podamos deducir b de a (representado en esta fórmula por "a→b") a que podamos deducir de a y la negación de b un absurdo (en el condicional (a ∧ ┐ b) → (d ∧ ┐ d) la conjunción de a y la negación de b se representa con "a ∧ ┐ b", mientras que "d ∧ ┐ d" representa un absurdo, al ser una fórmula siempre falsa).

Vale la pena señalar al menos dos asuntos en relación con los razonamientos por absurdo.

El primero es una dificultad intrínseca al método: no se puede anticipar cuál es el absurdo al que se va a llegar. A veces, se consigue como conclusión la negación de una de las hipótesis; en otras, se llega a una contradicción de algún resultado previamente probado.

Por eso, como forma de abordaje de problemas, el razonamiento por absurdo clasifica como una estrategia heurística, que puede conducir a la solución pero no es seguro el éxito al usarla.

El segundo, es una concepción que frecuentemente se detecta en los estudiantes. Cuando se les pregunta acerca de en qué consiste el método, suelen limitarse a decir que en suponer que no se cumple la tesis. La compleja estructura de esta forma de razonamiento queda inadvertida para muchos de ellos.

Recíproco y contrarrecíproco, falacia abductiva

A cada enunciado condicional, "a → b", se asocian un enunciado recíproco "b → a", y un contrarrecíproco, "¬ b → ¬ a".

Una notable diferencia entre ambos, es que el segundo es equivalente al dado, mientras que el primero no tiene relación alguna con él. Sin embargo, esta diferencia no es percibida por muchos estudiantes.

Una de las explicaciones de este hecho es la presentada por Cecilia Crespo en su tesis doctoral. Muchas de las ocurrencias cotidianas de sentencias condicionales en realidad se refieren a equivalencias (es decir, bicondicionales). Esto puede contribuir a que se pierda de vista el diferente rol que juegan antecedente y consecuente.

Por otro lado, una sentencia bicondicional es cierta siempre y cuando los dos enunciados que la componen tomen el mismo valor de verdad, lo que empuja más en el sentido de confundir estos roles.

Si esto ocurre, entonces es sencillo comprender por qué se incurre en el error llamado falacia abductiva; parafraseando la forma en que Filón enunció el modus ponens, podríamos establecer esta falacia diciendo que: "si el primero, el segundo; el segundo; luego el primero". Es decir, de las sentencias "a→ b" y "b" se obtiene "a".

Para esclarecer este punto, vale la pena hacer notar que de (A) ↔ (B) se obtienen tanto (A)→(B) como (B)→(A). Por eso, si se está entendiendo un condicional como si fuera un bicondicional, la estructura deductiva de la falacia abductiva corresponde a la aplicación del modus ponens al par formado por (B)→(A) y B.

Trabajo en taller

En el taller se presentarán tareas a los participantes, seleccionadas entre las siguientes, teniendo en cuenta sus inquietudes e intereses:

a) Reconocer qué estructuras deductivas aparecen con frecuencia en la argumentación matemática en la clase.

b) Identificar situaciones habituales de clase en la que es posible poner énfasis, además de en el contenido matemático, en las estructuras deductivas que forman parte suya.

c) Identificar en el discurso cotidiano, por un lado, y en el matemático del aula, por otro, sentencias condicionales que se toman como bicondicionales y bicondicionales que se asumen como condicionales.

d) Diseñar una intervención didáctica con la finalidad de utilizar la enseñanza de algún contenido matemático para destacar la estructura de razonamiento por absurdo.

Referencias

Brunschvicg, L. (1945). Las etapas de la filosofía matemática. Buenos Aires: Lautaro.

Chávez, J.D., Caicedo, A.M. (2014). TIC y argumentación: Análisis de tareas propuestas por docentes universitarios. Estudios Pedagógicos XL, N° 2, 83-100.

Crespo, C. (2007). Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología. Tesis Doctoral, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), México, D.F.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. Educational Studies in Mathematics, (53), 5–34.

Inglis, M., Simpson, A. (2008). Conditional inference and advanced mathematical study. Educational Studies in Mathematics, (67), 187–204.

Referencias ampliatorias

Durand-Guerrier, V. (2008). About logic, language and reasoning at the transition between French upper Secondary school and University, comunicación del CI2U en ICME 11. http://tsg.icme11.org/document/get/551 Consultado el 15/10/2014.

Morou, A., Kalospyros, N. (2011). The role of logic in teaching, learning and analyzing proof. comunicación presentada en CERME 7 http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Morou&Kalospyros.pdf Consultado el 28/11/2014.

ENUNCIADO DE UN TEOREMA: ¿ÚNICO COMPONENTE DE SU SIGNIFICADO?[i]

Molina, Ó[a]., Samper, C[b]. y Perry, P[c].

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia;
ojmolina@pedagogica.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co, pperryc@yahoo.com.mx

Resumen

La comunidad de educación matemática sugiere que la práctica de demostrar teoremas se favorece si las reglas lógicas y los enunciados de los elementos del sistema teórico (postulados, definiciones y teoremas) tienen significado para los estudiantes, pues así podrán hacerlos operables en la demostración. Pero, ¿qué significa entender un teorema? Se podría pensar que tal pregunta se refiere a entender el enunciado y, quizá, su demostración. Como resultado de nuestra investigación más reciente, tenemos una propuesta que amplía el mencionado significado. En este taller pretendemos poner a consideración un significado amplio de la expresión 'entender un teorema' e ilustrarlo con teoremas de la geometría euclidiana plana relativos a la mediatriz de un segmento.

Palabras clave: *Teorema, significado de un teorema, enunciado de un teorema.*

ASPECTOS CENTRALES DEL MARCO DE REFERENCIA

Entre 2011 y 2014, el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) adelantó una investigación en la que analizamos la actividad semiótica que tuvo lugar en un aula universitaria, relativa a la construcción de significado de un teorema específico de la geometría euclidiana plana. Para realizar el análisis, nos fundamentamos en la propuesta de Signo tríadico de Charles S. Peirce (según la interpretación de Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2012). Bajo esa perspectiva, se precisó lo que entendemos por construcción de significado. Como resultado del análisis, identificamos los elementos que, desde nuestro punto de vista, integran un significado amplio de la expresión 'entender un teorema'. Nuestra propuesta requiere precisar primero qué entendemos por teorema y por construcción de significado.

¿Qué es teorema?

Haciendo eco a Mariotti et al. (1997), teorema es el sistema ternario conformado por un enunciado, la demostración de la relación de dependencia formulada en el enunciado, y el sistema teórico que la soporta. Nótese que el término "teorema" refiere no solo a un enunciado, como es lo usual. Naturalmente, nuestro significado de entender un teorema deberá darse en términos de los tres elementos referidos. En el taller ilustraremos, por ejemplo, cómo para un teorema particular, el sistema teórico no solo sustenta la respectiva demostración, sino también cómo le da sentido (matemático) al enunciado, específicamente en lo que respecta al antecedente de la proposición condicional a través de la cual se expresa la relación de dependencia que se demuestra. Este es un asunto que rara vez se profundiza en las clases usuales de matemáticas, quizá por razones didácticas, pero cuyo tratamiento es de total pertinencia en un curso formal que aborde la demostración, su aprendizaje y enseñanza.

¿Qué es construir un significado en el ámbito de la educación matemática?

Desde nuestra perspectiva, es el proceso mediante el cual se producen y refinan interpretaciones sobre aspectos de un objeto matemático, generadas en la mente del estudiante cuando interpreta un signo vehículo (e. g., gesto, palabra, gráfico, imagen mental) en el que el profesor u otro estudiante pretende comunicar algo sobre el objeto; el propósito del proceso es que las interpretaciones, a mediano o largo plazo, sean consonantes con el significado que le atribuye la comunidad de matemáticos (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014).

¿Qué es entender un teorema?

Los aspectos que, según nuestra propuesta, definenaquello a lo cual nos referimos con la expresión 'entender un teorema' son los siguientes:

1. Identificar la estructura del enunciado desde el punto de vista de la lógica matemática y teoría de conjuntos, y tener en cuenta el contenido semántico de las palabras que están involucradas en el enunciado mismo;también identificar aquellas proposiciones que son el antecedente y el consecuente del enunciado, acción clave para iniciar el proceso de demostración. Por ejemplo, estudiar la estructura del enunciado del Teorema de la Mediatriz: "*El lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento del mismo plano* ***es*** *la recta mediatriz del segmento en dicho plano*", implica relacionar la palabra "es" con una bicondicional que conecta dos proposiciones:

   i) Sea m el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento del mismo plano.

   ii) Sea m la recta mediatriz del segmento en dicho plano

   Con esta precisión, la mencionada proposición corresponde a la bicondicional:m es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento del mismo plano, **si y solo si** m es la recta mediatriz del segmento en dicho plano.Es decir, se trata de la conjunción de dos condicionales:

   a) Si m es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento del mismo plano, **entonces** m es la recta mediatriz del segmento en dicho plano.

   b) Si m es la recta mediatriz del segmento en dicho plano, **entonces** m es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento del mismo plano.

   En otras palabras, la palabra "es" del enunciado original está aludiendo a la igualdad de dos conjuntos (los aludidos, respectivamente, en las proposiciones del ítem i y ii) cuya demostración implica justificar las dos condicionales a y b. Un asunto interesante para abordar al respecto de la palabra "es" en el enunciado original, es que este evoca la forma como se expresa una definición de un objeto matemático y no necesariamente un teorema. Este en un asunto semántico que vale la pena discutir. El estatus del enunciado como definición o teorema depende de las decisiones que se toman al conformar el sistema teórico: si, por ejemplo, previamente se ha decidido tomar como definición:<u>la mediatriz de un segmento en un plano, esla rectaperpendicular al segmento y a la cual pertenece su punto medio,</u> entonces el enunciado en cuestión se convierte en un teorema. Pero, es posible declarar alenunciado original como la definición de mediatriz, lo que implica que el enunciado subrayado podría ser un teorema. La decisión para escoger un camino u otro en el aula de clase, responde a razones didácticas, pues desde el punto de vista matemático, como se infiere de las condicionales a y b anteriores, los enunciados son equivalentes. Para el caso de taller, se asumirá como definición de mediatriz el enunciado previamente subrayado. Esto por cuanto es la definición usual de dicho objeto en los libros de texto.

Se propondrá a los asistentes al taller identificar la estructura del enunciado del Teorema de la Mediatriz. En la discusión de las propuestas de los asistentes se espera abordar lo anteriormente planteado.

2. Determinar el contenido geométrico del enunciado: identificar objetos y relaciones involucrados y atribuirles significado cercano al de referencia,que sea útil para la interpretación del enunciado. Este aspecto permite establecer tanto los contextos en los cuales es pertinente usar el teorema como objetos que están involucrados en su demostración. Los objetos involucrados en el Teorema de la Mediatrizson, entre otros, mediatriz de un segmento, lugar geométrico, y distancia entre puntos; las relaciones involucradas son equidistancia entre puntos eigualdad de conjuntos.Haber identificadolos objetos y relaciones permite precisar que los contextos en los cuales puede ser útil el Teorema de la Mediatriz serían aquellos en los que se indaga acerca deequidistancia entre puntos o perpendicularidad (aludida con el objeto mediatriz).
3. Realizar y/o entender la demostración de la relación de dependencia expresada en el enunciado. En este aspecto, se incluyen tres ítems:
   a. Método de la demostración: determinar si es directa, indirecta usando el principio de reducción ya sea negando la tesis del enunciado o descartando casos, por inducción, etc.
   b. Estructura de la demostración: determinar los pilares de la demostración. Estos son: i) los elementos teóricos centrales que la soportan (definiciones, postulados y teoremas), ii) el propósito de usarlos en su desarrollo, y iii) la manera en que están involucrados en la demostración (e. g., por medio de una construcción auxiliar).
   c. Prospectiva de la demostración: hacer un análisis con el fin de explorar o de predecir el comportamiento de un paso hipotético en la demostración, y tomar decisiones con base en el análisis realizado, i. e., decidir si dicho paso finalmente hace parte o no de la demostración.

   En el desarrollo del taller pretendemos ilustrar cada uno de estos aspectos, a partir de las propuestas de demostración del Teorema de la Mediatriz que surjan entre los asistentes al taller.
4. Comparar con otros teoremas: la comparación se hace entre enunciados y entre demostraciones. La primera, consiste en determinar si los enunciados se refieren a asuntos semejantes (e. g., existencia de objetos, comportamiento similar de los objetos involucrados como en el caso del punto medio y la bisectriz de un ángulo). La segunda, que puede darse entre demostraciones de una misma relación de dependencia o de dos distintas, consiste en determinar si las demostraciones tienen una misma estructura o no. Específicamente, se trata de determinar si las demostraciones emplean elementos homólogos y, en caso de que así sea, si el propósito de hacerlo es análogo.

   En el desarrollo del taller pretendemos ilustrar estos aspectos, aludiendo al Teorema de la Mediatriz, y al Teorema de la Bisectriz (El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de una ángulo dado y que pertenecen a su interior es el rayo bisector del ángulo).
5. Usar de manera experta el teorema en diversas situaciones: uno de los propósitos de determinar el contenido geométrico del enunciado de un teorema es develar y caracterizar las situaciones o donde se puede utilizar. Reconocemos dos situaciones en las que se puede usar un teorema: i) en la justificación teórica de un procedimiento de construcción de un objeto geométrico con alguna propiedad especial, cuando se emplea como garantía de un paso en tal procedimiento; ii) en la demostración de otro teorema, cuando se usa como garantía de una afirmación en un paso de la demostración. Ahora bien, develar y caracterizar los contextos donde es pertinente usar un teorema no es suficiente; también hay que saber usarlo. Pero…

¿Qué significa saber usar un teorema?

Durante el taller, pretendemos ilustrar lo que significa saber usar un teorema con ejemplos concretos y con ello, describir lo que Selden (2012) denomina uso operable del teorema. A propósito de un problema que usualmentese proponea los estudiantes del curso Geometría Plana (curso que sirvió de contexto para llevar a cabo nuestro proyecto de investigación) para cuya resolución deben usar un programa de geometría dinámica (Geogebra, Cabri, etc.), veamos dos ejemplosque permiten hacer una ilustración de dicho significado. Para el momento en que se propone el problema,los estudiantes cuentan con el Teorema de la Mediatriz y la definición de esta, tal como se mencionaron anteriormente.No conocen asuntos relativos a la reflexión axial o central.

> Problema: Dados dos puntos A y B, ¿cómo construir un punto E de manera tal que pertenezca a una circunferencia de centro X ($\odot X$) que contiene lo puntos A y B, sin construir la$\odot X$? (Este problema se propondrá a los participantes del taller y con base en sus soluciones, se ilustrarán los asuntos que queremos resaltar al respecto).

Su resolución implica usar hechos geométricos relativos a la mediatriz. Veamos un procedimiento: a) construir dos puntos A y B; b) construir la mediatriz m del $\overline{AB}$; c) construir X en m; d) construir una recta n cualquiera que contenga al punto B (o al punto$A$); e) construir la recta s perpendicular a $n$tal que $X \in s$.Sea D el punto su intersección; f) construir la $\odot D$ y radio DB y sea E el otro punto de intersección entre $\odot D$ y s; g) tomar la medida EX y AX para verificar que $EX = AX$ (Figura 1); h) poner rastro al punto E yarrastrar n.$\odot X$ surge a partir de la trayectoria de E (Figura 2).

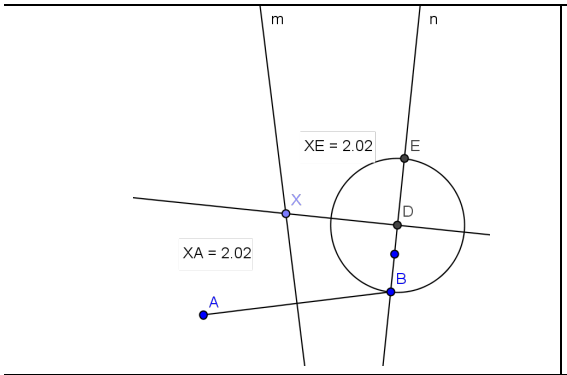


Figura 1

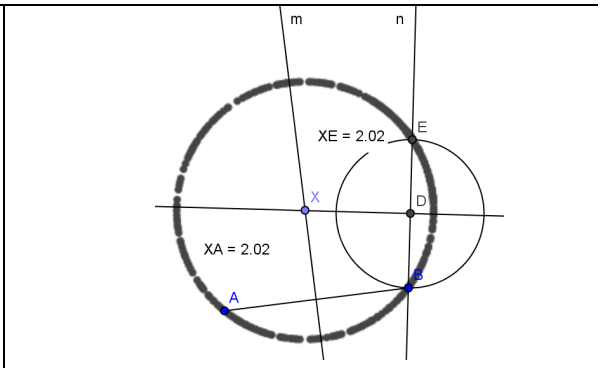


Figura 2

Con este procedimiento se destacauna de las dos situaciones antes referenciados:usar un teorema en el procedimiento de construcción. Nótese que en el paso b, el objeto mediatriz es empleado explícitamente pues gracias al Teorema de la Mediatriz, el punto X equidista de A y B, y ello es suficiente para que estos pertenezcan a $\odot X$. De otro lado, aun cuando dicho objeto (mediatriz) no aparece de manera explícita en otro paso del procedimiento, y por ende no pareciera que el Teorema de la Mediatriz se pueda volver a usar, este se utiliza para poder demostrar que efectivamente el punto E pertenece a $\odot X$. Darse cuenta de tal utilidad, es indicador de tener una buena apropiación tanto de la definición como del teorema. Claro, con los pasos e y f se está garantizando que s es mediatriz del $\overline{EB}$ (usando la Definición de Mediatriz), y al utilizar el Teorema de nuevo, se infiriere que $EX = BX$ y por ende $EX = BX = AX$.

De otro lado, producto de la solución al problema anterior se proveen ideas para demostrar el siguiente teorema clásico de la geometría plana, relativo a una circunferencia que inscribe un triángulo: “Dados tres puntos A, B y C no colineales, existe una única circunferencia que los contiene.”. Demostrar este teorema implica determinar el centro de la circunferencia, esto es un punto equidistante de los puntos dados. El objeto mediatriz es clave para llevar a cabo la

demostración, pues al construir las mediatrices de los $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ por ejemplo, su punto de intersección equidista de A, B y C gracias al Teorema de la Mediatriz. En consecuencia, tal teorema se usa en la demostración de otro.

UN COMENTARIO FINAL

Ponemos a disposición de la comunidad de educación matemática cinco aspectos que definenaquello a lo cual nos referimos con la expresión '*entender un teorema'*. Consideramos que cada uno de ellos puede servirle al profesor de matemáticas en dos sentidos diferentes: i) como indicador para inferir el significado que, en un momento particular del proceso educativo, tienen sus estudiantes de un teorema específico, y ii) como recurso didáctico para la planeación y gestión de clase cuyo propósito sea propiciar en el aula la construcción de significado de un teorema específico. Como se evidencia en la descripción hecha, los primeros dos elementos incluidos en nuestra concepción de 'entender un teorema'se convierten en soporte de los otros tres; no se puede hacer uso experto de un teorema o hacer una comparación entre enunciados o demostraciones de teoremas, si no se ha entendido su enunciado en el sentido expuesto en párrafos anteriores. Con este panorama, nos atrevemos a sugerir entonces que, en un contexto educativo en el que se pretenda iniciar el camino de construcción del significado de un teorema, es necesario propiciar un espacio para que los estudiantes hagan un estudio juicioso de su enunciado, con el propósito de reconocer su estructura y explicitar su contenido geométrico. Insistimos que cumplir con este único indicador, no es suficiente –pero quizá sí necesario- para tener un significado más o menos completo de un teorema, por lo menos a nivel universitario. Los otros tres elementos deben ser parte de este camino, recorridos de manera paulatina pero con la suficiente conciencia de su importancia. Tareas o problemas como las que proponemos en este taller podrían favorecer este recorrido.

Referencias

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finlandia: Universidad de Helsinki.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education (vol. IV, pp. 409-416). Vancouver, Canadá: PME.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En Pre-proceedings of the 12th ICME.Disponible en http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level.En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study (pp. 391-420). Dordrecht, Holanda: Springer.

[i]El proyecto de investigación, del cual surge estetaller, fue financiado por el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia (Colciencias), y el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP).Vale la pena precisar que una versión preliminar de este taller fue presentada en el 22 Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, llevado a cabo en Bogotá-Colombia, en junio del 2015.

UN PROCESO DE MODELIZACIÓN EN LA FORMACIÓN DEL PROFESOR: ANÁLISIS DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

Silvia Catalina, Etchegaray[a]- Julia Edith Corrales[b]y Karina Vanesa nahuin[c]

[1] Universidad Nacional de Río Cuarto – Fac. Cs. Exactas, Físico-Químicas y Naturales.
[2-3] Universidad Nacional de la Patagonia Austral – Unidad Académica Caleta Olivia.
setchegaray@exa.unrc.edu.ar; julia_corrales@hotmail.com;nahuinkarina@hotmail.com

Resumen

La finalidad de este taller es compartir una propuesta didáctica matemática que se "vivió" en el seno de un espacio de formacióndocente inicialque se denomina "Estudio y Reflexión del Conocimiento Matemático I", del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de la Patagonia Austral-Unidad Académica Caleta Olivia.Suobjetivo fundamental es realizar un análisis didáctico matemático de una situación extra-matemática,con el objeto de dar significado a un proceso de modelización y reflexionar sobre los conflictos semióticos que emergenal interpelar el modelo a partir de una dialécticainstitucional-personal entre los objetos función-ecuación.

Palabras Claves: *formación inicial, objetos didácticos matemáticos,modelización*

INTRODUCCIÓN

A partir de una situación extra-matemática en un contexto geométrico, extraída del libro "Modelización Matemática" (Segal, S., Giuliani, D., 2008) se trata de atrapar y socializar un modo de dar significado a un proceso de modelización y reflexionar sobre los conflictos semióticos que emergen al interpelar el modelo a partir de una dialéctica institucional-personal entre los objetos función-ecuación.

Dentro del enfoque teórico ontosemiótico de la Cognición Matemática(EOS) (Godino, 2007, 2009, 2014) en el que se enmarca este taller, entendemos como actividad matemática a la resolución de problemas, mediatizada por un lenguaje simbólico y organizado lógicamente como un sistema conceptual. (Godino 2003) suscribiendoque todo estudio reflexivo sobre un objeto matemático-regulado por un formador de formadores- nos lleva a transitar el siguiente camino:

Analizar la actividad matemática para "pensar" sobre la enseñanza de la matemática.

Entender a los problemas (extra o intra matemáticos) como recurso para el aprendizaje.

Revisar la matemática que se conoce, interrogarla y analizarla para reflexionar sobre algunos procesos y conflictos semióticos29 en la enseñanza.

Reconstruir un aparato teórico que permita volver a utilizarlos para resolver nuevas situaciones, producir nuevos modelos y más teorías a partir de la Resolución de Problemas.

En este taller la propuesta está centrada en reproducir parte de lo vivido en el espacio de formación docente que se denomina "Estudio y Reflexión del Conocimiento Matemático I", del Profesorado en Matemática y cerrar dicho taller con las reflexiones de una alumna que ha cursado este espacio y

[29] Dichos conflictos se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.

eligió esta situación para preparar su presentación de reflexión didáctico-matemático como evaluación del mismo.

DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA DEL TALLER

Momentos

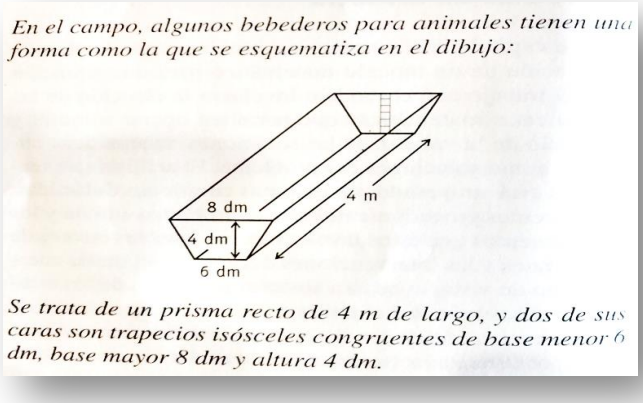
Proponemos un taller en el cual distinguiremos tres momentos de trabajo tomando como unidad de análisis, tal como se anticipara, el problema llamado: "El Problema de Bebedero"

Momento 1: Realizar un trabajo grupal con los asistentes en el cual accionen a partir de la situación elegida y una posterior puesta en común centrándonos en un trabajo reflexivo acerca de la red de relaciones personales entre los procedimientos, lenguajes, argumentos, propiedades, nociones, es decir los diferentes elementos de significado puestos en juego por los estudiantes-futuros profesores- para resolverla y de los emergentes contextuales, dependiendo de las herramientas personales y de los distintos registros de representación utilizados.

Momento 2: Se pondrán al descubierto todos los interrogantes que surgen a partir del problema y a propósito de éste, así como también las proposiciones, conjeturas, propiedades, argumentaciones, que los estudiantes exponen para fundamentar su hacer. Por último se compartirá el proceso de indagación, de intervención, de requerimientos, de cuestionamientos regulado por las docentes de la asignatura con la finalidad de lograr una específica producción teórica, como un claro emergente de un proceso de construcción colectiva.

Momento 3: Compartir un momento de producción matemática colectiva.

La situación extraída del libro "Modelización matemática en el aula" de Segal, S., Giuliani, D., (Edic. 2005 Libros del Zorzal Bs. As.) con la cual pretendemos llevar adelante los diferentes momentos del taller es la siguiente:



Se necesita graduar una varilla colocada en forma vertical sobre uno de los trapecios para precisar el nivel de agua correspondiente a 100, 200, 300, … lts.

Contextualización institucional del taller: Fundamentación y objetivos

El espacio Optativa I: "Estudio y reflexión sobre el conocimiento matemático I" pertenece al plan del profesorado en matemática en el tercer año y es un espacio en el cual se revisa la matemática que conocen, se la interroga y se la analiza para pensar una matemática a enseñar, además se reflexiona sobre las prácticas personales puestas en acción para resolver situaciones seleccionadas por el equipo de la cátedra y que han sido estudiadas y analizadas con anterioridad, siempre con la firme convicción de que el poder atravesar, durante la formación inicial estos espacios, predispone a los estudiantes –futuros profesores- de una manera diferente frente al conocimiento que luego

deberán enseñar. Es decir, el poder participar como constructores de relaciones matemáticas y no como meros reproductores de ellas posiciona a tales estudiantes, con una mirada más flexible y fluida al pensar en las situaciones con las que abordarán determinado conocimiento en sus futuras prácticas docentes. Además, la experiencia de vivir el proceso de construcción de teoría matemática desde diversos espacios en la formación inicial con reflexiones acerca de los significados personales puestos en juego, los registros y producciones de las interacciones es beneficiosa para abordar los objetivos del análisis didáctico-matemático y el estudio de la misma que recién se atraviesa en la etapa final de la formación, Didáctica de la matemática (II Cuatrimestre del 3er año) y Práctica Docente (4to año).

Nosotros asumimos, en consonancia con el EOS; que la distinción entre persona e institución es esencial en el análisis de la actividad matemática y en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta distinción de "posiciones" en el sistema didáctico nos interesa que se refleje también en los propios objetos de enseñanza y de aprendizaje (objetos y significados personales e institucionales), ya que ello permite caracterizar el aprendizaje como "acoplamiento progresivo" entre significados personales e institucionales, lo que consideramos debe estar en el plano de lo explícito en los procesos de formación de profesores.

En el Taller que proponemos se pretende compartir esta experiencia en una clase de este espacio a partir de:

- Analizar los diferentes tipos de resoluciones de la tarea que nos presenten los asistentes, compartir estas prácticas personales, confrontarlas, relacionarlas, identificar sus elementos de significados –lenguaje, argumentos, procedimientos, proposiciones, nociones- tanto los que se ponen a funcionar como los emergentes. Se favorece así a la construcción de relaciones matemáticas que serán consecuencia de este trabajo reflexivo sobre las prácticas operátivas y discursivas de los participantes del taller.
- Compartir el hacer de una alumna de la UNPA ante la misma situación utilizada en el presente taller en la comunicación de su propuesta de evaluación
- Analizar su producción, el lenguaje por ella utilizado, los nuevos problemas a los que se enfrentó, las relaciones matemáticas que emergieron como producto de interactuar con la situación, las producciones matemáticas finales que ella presentó como así también el proceso por el que atravesó para producirlas, revisar el funcionamiento del proceso de modelización y de la dualidad función-ecuación, fuente clara de posibles conflictos que suelen obstaculizar la producción de una micro teoría, etc. utilizando para todo esto fragmentos de los registros de clases tomados, y deteniéndonos especialmente en algunos momentos claves de las clases que ponen de manifiesto esta fuente de conflictos.

Ideas que estructurarán la presentación de la producción personal de una estudiante del espacio de formación

La pregunta que me motivo a desarrollar la situación del Bebedero, como el estudio reflexivo que debía presentar en el momento de evaluación final del taller, fue: ¿Qué es el hacer Matemático?, ¿por qué insistió tanto la profesora que entre "el pensar", "el hacer" y "eldecir" hay cambios de significados que son fuente de conflictos?A través del desarrollo de este trabajo tratare de ir respondiendo a estas preguntas que me plantee como motivación de mi trabajo.

Este problema me llevo a realizar una actividad de modelización, que ayudo a construir una parte esencial del "Quehacer" matemático.

Ahora bien, ¿En qué consiste el Quehacer Matemático?

- Plantear y plantearse nuevas preguntas
- Buscar medios para responderlas

- Desarrollar nuevos métodos
- Conjeturar propiedades
- Validar soluciones
- Interactuar con compañeros
- Confrontar resultados, técnicas, validaciones
- Utilizar y hacer emerger teoremas y definiciones (producto y herramientas)

Esto concluye en un nuevo conocimiento matemático, entonces podemos decir que un quehacer matemático conlleva la emergencia de un conocimiento, pero ahora bien ¿Solo eso?

Seguramente, no, en esta situación, los "haceres" exigen poner a funcionar la dialéctica entre ostensivos y no ostensivos y entre lo que "se piensa"y "se dice" teniendo en cuenta una complejidad mayor en tanto cantidad y tipo de relaciones utilizadas y emergentes, tanto por mi como por mis compañeros. En otras palabras este llamado proceso de modelización, me exigió:

- Observación de la realidad y entendimiento de la observación de otros
- Descripción simplificada de esa"realidad"
- Construcción de un modelo que se adapte a lo solicitado y compatibilización con otros modelos surgidos en el aula de formación
- Trabajo matemático sobre el modelo
- Interpretación del resultado sobre la realidad planteada.
- Modificación del modelo, ante nuevas situaciones que me plantee y que fueron planteadas.

La observación, la descripción, la construcción, el modelo y su interpretación no son más que pasos de una actividad científica. Pero ¿Todo problema genera este tipo de hacer matemática?

Es obvio, que no, tal problema o situación debe:

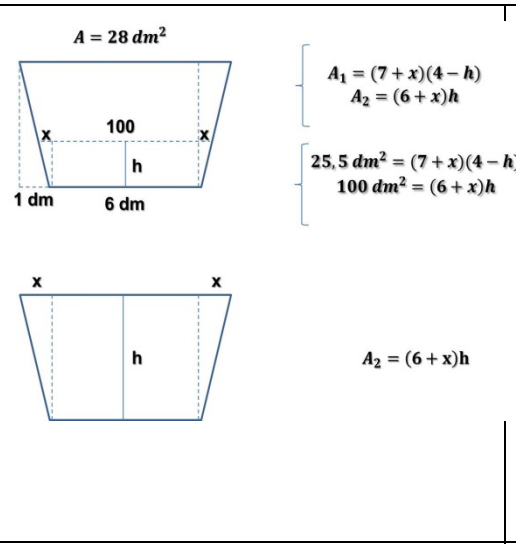
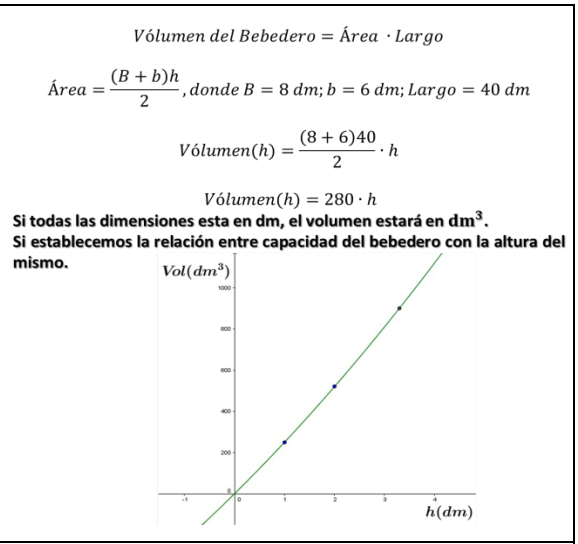
- Atrapar complejidad procesual y contextual: exigencia de seleccionar y usar diferentes herramientas y conocimientos en forma coordinada y simultánea.
- Admitir diferentes procedimientos.
- Exigir toma de decisiones personales.

Conflictos semióticos: Algunos ejemplos

Como mencionamos anteriormente, un objetivo de este taller es el poder reflexionar con los asistentes a partir de sus propias producciones y de las de los estudiantes acerca de los objetos matemáticos involucrados en sus "sistemas de prácticas" y cómo éstos al provocar el enunciado de diferentes propiedades, conjeturas, argumentaciones, etc son fuente de conflictos. Pero siempre pensando en cómo la intervención docente hace dialogar esas producciones generando una genuina construcción o reconstrucción de relaciones matemáticas por parte de los estudiantesconformando una micro sociedad científica.

A modo de ejemplo, de estos momentos de discusión, que consideramos los momentos más productivos para avanzar en nuestros objetivos de formación reflexionando sobre los sistemas de prácticas personales, presentamos a continuación algunos recortes de lo sucedido con los alumnos de la UNPA.Intentan ser una genuina muestra de cómo vive la producción de nuevos problemas y relaciones teóricas de la matemática en el aula y cómo se va generando tal producción, siempre respetando sus primeras preguntas/creaciones/dudas y enfrentando los conflictos que aparecen.

A continuación compartimos dos ejemplos de sistemas de prácticas emergentes donde se contraponen dos tipos de registros productos de dos formas de pensar la relación ecuación-función.

	
Ejemplo 1	Ejemplo 2

Reflexiones finales

El objetivo primordial de este taller, diseñado a partir de uno de los espacios de la Formación Inicial, es generar en cada uno de sus asistentes una nueva experiencia dentro del hacer matemático. Buscando compartir cómo se genera esta propuesta didáctica a través del estudio y análisis a-priori de ciertas prácticas operativas y reflexivas, con el objeto de lograr producciones, a partir de las interacciones docentes realizadas en los encuentros, que avancen hacia la construcción de relaciones matemáticas desde los significados personales interpelados/cuestionados /puesto en tensión tanto entre compañeros estudiantes como por los docentes a cargo del grupo.

A su vez, también se busca reflexionar con los diversos asistentes sobre estas acciones realizadas en dichos encuentros de Formación y en los espacios de Investigación educativa, abriendo la discusión sobre la importancia de "vivir" de otro modo la conformación de la teoría matemática, para poder luego pensarla dentro de la enseñanza de la formación inicial.

Referencias

Godino, J., Batanero C., Font V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción Matemática . http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf, 4. http://www.ugr.es Consultado el 11/05/13.

Godino, J. y Batanero C., (2009). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. Universidad de Granada. Trabajos disponibles en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino.

Segal, S., Giuliani, D. (2008). Modelización matemática en el aula. Posibilidades y necesidades. Libros del Zorzal Bs. As.

Corrales J., Etchegaray S., Leguizamón V., Vázquez L. (2013). Un espacio de reflexión y producción matemática en la formación inicial del profesor. Publicado en las actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (ISSN 2301-079)

Posadas, P. y Godino, J. (2014). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Trabajos disponibles en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino.

OBSERVACIÓN DE CLASES DE MATEMÁTICA USANDO PAUTAS.

Paulina Araya E.[a], Eugenio ChandíaM.[b], Ma. Victoria Martínez V.[c], y Pablo JorqueraR.[d]

[a]CIAE. Universidad de Chile, [b]Pontificia Universidad Católica de Chile, [c]CIAE. Universidad de Chile, [d]Colegio Santa Marta, Santiago.

pauaraya@ciae.uchile.cl[a], echandia@uc.cl[b], mvmartinezv@ciae.uchile.cl[c], pablo.rozbaczylo@gmail.com[d]

Resumen

La observación de clases constituye una oportunidad de aprendizaje reflexivo en la formación profesional de los docentes, tanto en la formación inicial como en la formación continua. Por esto, proponemos un taller que tiene por objetivo conocer y utilizar una pauta, elaborada en el contexto de aulas chilenas, para la observación de clases de matemática.

Palabras clave: *pauta, observación, clases*

INTRODUCCIÓN

La observación de clases constituye una oportunidad de aprendizaje reflexivo en la formación profesional de los docentes, en ese marco desde hace algunos años en el Centro de Investigación Avanzado en Educación (CIAE) de la Universidad de Chile se ha venido desarrollando un trabajo de observación de clases, específicamente de matemática, como una importante fuente de información para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar dentro de la sala de clases. Para ello una parte significativa del trabajo se ha centrado en la adaptación y creación de instrumentos de observación y en el diseño de formas de devolver lo observado a los profesores.

Durante el año 2015 el CIAE,en conjunto con el Centro de Modelamiento Matemático (CMM) de la Universidad de chile y el MINEDUC, ha desarrollado el programa Mejor Matemática. Este programa tiene entre sus objetivos realizar acompañamiento a profesores de matemática con el fin de contribuir a mejorar su trabajo en aula a partir de la observación de clases.

Considerando la experiencia previa,se planteó el diseño de un instrumento que responda al contexto de aulas chilenas y que considere desde su construcción la devolución y retroalimentación a los profesores.

Como antecedentes para el diseño del nuevo instrumento nos basamos, entre otros, en algunas pautas utilizadas a nivel internacional y nacional como son: la pauta Mathematical Quality of Instruction (MQI) desarrollada por Heather Hill en Harvard University (Hill et al. 2012) y la pauta Classroom Assesment Scoring System (CLASS) desarrollada por el grupo de Robert Pianta en la Universidad de Chicago (Pianta et al. 2008).MQI es una pauta que tiene por finalidad evaluar la calidad matemática de la clase observada,mientras CLASS tiene por objetivo evaluar las interacciones existentes en el aula que determinan o influyen en el aprendizaje, independiente del área específica de conocimiento de la clase observada.

Además, estudiamos la utilización de dichos instrumentos en proyectos referidos a desarrollo profesional, por ejemplo, en el Measures of Effective Teaching (MET) Project, que además de hacer profundos análisis de la validez de dichos instrumentos y otros, realizó un diseño de formación de codificadores y devolución a los profesores (Kaine and Staiger, 2012; MET, 2013).

Es así como en base a importantes referentes nacionales e internacionales de observación de clases, tomando como uno de los ejemplos la Evaluación Docente (Manzi et al, 2011), hemos elaborado una pauta de observación de clases de matemática, que considera aspecto generales en el sentido de CLASS, como otros específicos de la disciplina en el sentido de MQI. Una selección de estos últimos son los que proponemos trabajar en el taller, así como las particularidades y complejidades del proceso de uso de pautas y del proceso de codificación de clases.

Pauta mateo

La Pauta de observación de clases mateo está compuesta por dos tipos de indicadores que hacen referencia a distintos elementos presentes en una clase de matemática: Indicadores generales e Indicadores específicos para la enseñanza y el aprendizaje.

Los indicadores generales se refieren a elementos de estructura y organización del aula en un sentido general y no tienen que ver con elementos específicos de la matemática. Estos son: Objetivo de la clase, Disposición de la sala de clases, Participación e involucramiento de los estudiantes, Monitoreo del trabajo de los estudiantes, Clima de aula, Uso del tiempo, Uso de recursos y Cierre de la clase.

Los indicadores específicos para la enseñanza y el aprendizaje, por su parte, refieren a elementos específicos para el desarrollo conceptual dentro del aula y son indicadores más complejos tanto en su composición como en su codificación. Estos indicadores son: Expresión verbal, Lenguaje matemático, Diversidad de representaciones y/o procedimientos, Promoción del pensamiento, Aprovechamiento del error, Uso de las producciones matemáticas de los estudiantes y Errores matemáticos.

Con el fin de abordar de manera detallada el trabajo en la definición de indicadores y poder realizar un ejercicio de codificación, poniendo en juego la rúbrica que define a dichos indicadores, en el taller se trabajarán en profundidad dos de estos indicadores que son los que se presentan a continuación:

Promoción del pensamiento: Se quiere observar las oportunidades que tienen los estudiantes de pensar en torno a ideas, conceptos o procedimientos y elaborar argumentos.

Se observa si se hacen preguntas o requerimientos que promuevan la reflexión, explicaciones o planteamiento de conjeturas. Las intervenciones que promuevan el pensamiento pueden venir de los estudiantes o del profesor.

Se observa también que el profesor dé tiempo a los estudiantes para elaborar sus respuestas respetando lo que demoran en hacerlo, es decir, sin adelantar la respuesta o haciendo nuevas preguntas antes de intentar responder.

Diversidad de representaciones y/o procedimientos: Se quiere observar el uso de distintos tipos de representaciones (concreto, pictórico y simbólico) y de modelos (en varias o en una misma representación) para el desarrollo de conceptos y/o de distintos procedimientos o estrategias para resolver un mismo problema o abordar una situación.

No se pretende valorar un tipo de representación o procedimiento por sobre otro, sino hacer énfasis en la riqueza del uso de más de uno en el aula y la conexión entre ellos.

Se busca que haya presencia de distintos modelos, representaciones y procedimientos y que estos se socialicen, se compartan. No importa si son propuestos por los estudiantes o por el profesor.

Propuesta de taller

Considerando que el objetivo del taller es "Conocer y usar una pauta, elaborada en el contexto de aulas chilenas, para la obervación de clases de matemática" el taller plantea 6 momentos de trabajo, las cuales se describen a continuación.

Momento (tiempo en min)	Actividad
1 (10')	**Presentación de pauta mateo:** Se darán a conocer las bases y antecedentes de cómo la pauta MateO fue desarrollada. En particular se mostrarán los fundamentos teóricos y empíricos que se relacionaron para establecer las dimensiones e indicadores, además de la metodología de observación y registro.
2 (10')	**Codificación libre:** Los participantes del taller observarán un video de clase, en el cual deberán identificar los elementos o características que les llamen la atención. Con esto se pretende dejar en evidencia el marco de referencia y la intensión de los participantes al observar una clase de matemática sin considerar pauta de observación. Al finalizar la codificación libre, en plenaria, se recolectan los elementos y características del video que han observado y relevado los participantes.
3 (15')	**Descripción de indicadores específicos de la enseñanza y aprendizaje:** Sedarán a conocer los indicadores específicos que la pauta MateO establece son necesarios observar en una clase de matemática, a saber: Expresión verbal, Lenguaje matemático, Diversidad de representaciones y/o procedimientos, Promoción del pensamiento, Aprovechamiento del error, Uso de las producciones matemáticas de los estudiantes y Errores matemáticos. Luego de describir estos indicadores de manera general, se analizaran en profundidad los indicadores relativos a: Lenguaje Matemática, Diversidad de representaciones y/o procedimientos.
4 (10')	**Codificación con indicadores mateo seleccionados:** Se codificará el mismo video observado en el momento de Codificación Libre, pero ahora considerando la metodología e indicadores específicos presentados en el momento anterior. Esta codificación se hace de manera individual.
5 (10')	**Consenso grupal:** Luego de haber codificado de manera individual, los participantes se agrupan para discutir y consensuar los elementos y características que desde la descripción de los indicadores han observado en el video. Se toman decisiones respecto de codificaciones discrepantes o conceptos poco claros.

6 (5’)	**Cierre:**Por último se discute y pone en evidencia lo que implica observar una clase considerando una pauta, la que contempla un marco de antecedentes y metodología, cómo esta ayuda a enfocar la mirada en distintos elementos que componen una clase y las dificultades que conlleva aplicarla.

Bibliografía

Hill, H.Charalambous, CY.,Blazar,D., McGinn, D., Kraft, M., Beisiegel, M., Humez, A., Litke, E. & Lynch, K. (2012). Validating Arguments for Observational Instruments: Attending to Multiple Sources of Variation. Educational Assessment, 17, 1–19.

Kane, T. &Staiger, D. (2012).Gathering Feedback for Teaching.Combining High-Quality Observations with Student Surveys and Achievement Gains.Bill and Melinda Gates Foundation.

Manzi, R. González & Y. Sun (2011) La evaluación docente en Chile. Santiago, Chile: MIDE UC, Centro de Medición, Pontificia Universidad Católica de Chile.

MET. (2013). Ensuring Fair and Reliable Measures of Effective Teaching: Culminating Findings from the MET Project's Three-Year Study (pp. 24): Bill & Melinda Gates Foundation.

Pianta, R.C., LaParo, K.M., &Hamre, B. K. (2008) Classroom Assessment Scoring System Manual: Pre- K. Baltimore: Brookes.

PENSAMIENTO CRÍTICO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL CONTEXTO DEL PROGRAMA TUTORES DE LA UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Muñoz Ramírez[a], Henry Matías[b] - Fuentes Castillo[c], y Rodrigo Francisco[d]

Universidad del Bío-Bío,
hmunozr@ubiobio.cl, rfuentes@ubiobio.cl

Resumen

El Programa Tutores de la Universidad del Bío–Bío, cuyo objetivo es la retención de estudiantes de primer año, aborda entre otros aspectos el reforzamiento académico y las estrategias cognitivas, en este contexto, ejecuta el taller de pensamiento crítico y resolución de problemas, que consta de dos momentos; parte incorporando la definición y contextualización de pensamiento crítico y para qué utilizarlo, centrado en el sentido que un estudiante de primer año debe encontrar en el aprendizaje de la matemática, para finalmente presentar un problema que los estudiantes deben solucionar utilizando esta estrategia. En un segundo momento se vincula el pensamiento crítico a la resolución de problemas, mostrando 3 métodos distintos; Pólya, Schoenfeld y Dewey; dando paso a la resolución de un problema matemático, por equipos, utilizando los pasos y fases de cada método. Finalmente se les hace entrega de una guía para ejercitar en cada grupo de tutoría.

Palabras clave:

Pensamiento crítico, resolución de problemas, tutores.

EL PROGRAMA TUTORES EN LA UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

El programa tutores es un programa de acción afirmativa que desde el año 2009 trabaja con estudiantes de primer año que presentan en gran medida problemas tanto en la adaptación al contexto universitario como dificultades académicas para enfrentar los primeros aprendizajes, particularmente en el área de las ciencias básicas. El objetivo de este programa es contribuir al éxito académico de los estudiantes de primer año de los tres primeros quintiles, mejorando sus tasas de aprobación y retención, mediante la aplicación de estrategias institucionales de adaptación a la vida universitaria y el desarrollo de competencias específicas y genéricas. Gracias al aporte del programa, la deserción de primer año bajó desde un 17% en 2007 a un 10,5% en 2014 (Dirección General de Análisis Institucional, 2015), siendo la Universidad del Bío-Bío la tercera institución a nivel de educación superior en retención de estudiantes de primer año (Consejo Nacional de Educación, 2015).

Para abordar la retención de estudiantes, el programa trabaja la temática de manera integral a través de 5 componentes: a) inducción y adaptación b) reforzamiento académico c) estrategias de aprendizaje d) competencias genéricas y e) motivación y orientación. Pese a la ostensible mejora en los indicadores, sigue siendo una de las principales problemáticas de los estudiantes que ingresan, sus habilidades cognitivas para abordar el aprendizaje de las ciencias, y en particular, la matemática, en este contexto, el programa ha venido desarrollando una escuela de tutores en que se habilita a estos para hacer un mejor reforzamiento académico, principalmente a través del desarrollo de estrategias cognitivas, en esta escuela se capacita a los tutores en el taller de desarrollo de pensamiento crítico que a continuación se describe.

PENSAMIENTO CRÍTICO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Jornada I:

Inicio: Docente encargado carreras presenta actividad inicial, la introduce y presenta dos acertijos para trabajar con los tutores dividiendo al grupo en dos equipos.

"ACERTIJO 1: Sin tiempo para la escuela

- Pero no tengo tiempo para la escuela, explicaba Eddie al director. Duermo ocho horas diarias que, sumadas, dan 122 días por año, suponiendo que cada día es de 24 horas. No hay clases los sábados ni los domingos, que suman 104 días por año. Tenemos 60 días de vacaciones de verano. Necesito tres horas diarias para comer, esto es más de 45 días al año. Y necesito al menos dos horas diarias de recreación, lo que suma más de 30 días al año.

- Eddie escribió estas cifras mientras hablaba, después sumó todos los días. La suma daba 361.

- Ya ve, continuó Eddie; eso me deja tan sólo cuatro días para estar enfermo y en cama, y ni siquiera he tomado en cuenta los siete feriados escolares que tenemos cada año.

El director se rascó la cabeza.

- Algo no anda bien aquí, murmuró.

Pero por más que se esforzó, no pudo encontrar nada equivocado en las cifras de Eddie. ¿Puedes explicar dónde está el error?" (Gardner, 2008:73)

ACERTIJO 2: El diablo y el campesino

Iba un campesino quejándose de lo pobre que era, dijo: daría cualquier cosa si alguien me ayudara. De pronto se le aparece el diablo y le propuso lo siguiente:

- Ves aquel puente, si lo pasas en cualquier dirección tendrás exactamente el doble del dinero que tenías antes de pasarlo. Pero hay una condición debes tirar al río 24 pesos por cada vez que pases el puente.

Paso el campesino el puente una vez y contó su dinero, en efecto tenía dos veces más, tiro 24 pesos al río, y paso el puente otra vez y tenía el doble que antes y tiro los 24 pesos, paso el puente por tercera vez y el dinero se duplico, pero resulto que tenía 24 pesos exactos y tuvo que tirarlos al río. Y se quedó sin un peso. ¿Cuánto tenía el campesino al principio?

Compartir opiniones sobre lo expuesto en los acertijos e introducir el concepto de "Pensamiento Crítico" donde el docente plantea situaciones cotidianas que generan el desarrollo de la habilidad de pensamiento crítico de acuerdo al contexto del día a día en situaciones donde es posible que se aplique. Como por ejemplo: *Problema de los altos índices de contaminación ambiental en Chillán producto del excesivo consumo de leña húmeda y verde.*

Conceptualización, ¿Qué es pensamiento crítico? Y utilidad del recurso.

Pensamiento crítico

El pensamiento crítico es el pensamiento basado en una cuidadosa evaluación de hipótesis y evidencia, y se llega a una conclusión lo más objetiva posible a través de la consideración de todos

los factores pertinentes y el uso de procedimientos válidos de lógica. (Carter Victor, 1959)

La toma de decisiones en una democracia es un proceso de alcanzar consenso en situaciones de grupo a través de la discusión, debate y análisis. La toma de decisiones debería ser más que agregar opiniones ya formadas. Las opiniones deben confrontarse unas con otras en la esfera pública, y todos los participantes en este discurso público deben escuchar sinceramente los argumentos de los

demás. Para tomar decisiones democráticas apropiadas, ningún grupo debe ser excluido. (Lipset, 1995)

¿Cómo puedo ocupar la habilidad de pensamiento crítico en la resolución de problemas?

La clave en la solución de problemas es ser sistemático, identifique el proceso correcto, haga un análisis correcto, determine las alternativas y seleccione la mejor de acuerdo a sus resultados e implicaciones. Para ello es necesaria la Información así como la correcta interpretación de esta. Además de una organización sistemática en busca de la solución de los problemas, el pensamiento crítico nos permita un adecuado esquema en la solución de problemas.

a) **resolución de problema aplicando la habilidad de pensamiento crítico**.

Problema del área cercada:

Se dispone de una tela metálica de 150 metros de longitud para vallar una región como la figura 1. ¿Cuáles son los valores de x e y que hacen que el área sea máxima?

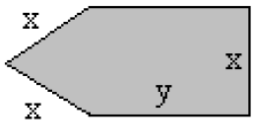


Figura 29.

Jornada II:

Se articula la jornada I de pensamiento crítico con la "resolución de problemas" en un taller de "**Resolución de problemas"**

A) Activación de conocimientos previos a través de preguntas abiertas a modo de reactivar lo trabajado en jornada I, se utilizan preguntas tales como, ¿Cuándo puedes aplicar la habilidad de pensamiento crítico? ¿Cuándo es útil en una tutoría intencionar el pensamiento crítico?, entre otras.

B) Se registra conceptualización de 3 métodos de resolución de problemas.

¿Qué es la resolución de problemas?

La resolución de problemas es una actividad cognitiva que consiste en proporcionar una respuesta-producto a partir de un objeto o de una situación en la que se da una de las siguientes condiciones:

- El objeto o la situación, y la clase a la cual pertenecen, no se han encontrado anteriormente en situación de aprendizaje.
- La obtención del producto exige la aplicación de una combinación no aprendida de reglas o de principios, aprendidos o no previamente.
- El producto y la clase a la cual pertenece no se han encontrado antes.

Se distinguen distintos métodos para resolver problemas, utilizando distintas técnicas y pasos a seguir que finalmente tributan a dar solución a problemas a partir del análisis de datos e hipótesis obtenidas del enunciado de los problemas a solucionar, aplicando la habilidad de pensamiento crítico para ser lo más certero en la resolución de estos problemas. De este modo a continuación se distinguen 3 métodos de resolución de problemas (Pólya, 1989)

1. **Método de pólya**

Método de Pólya para resolver problemas matemáticos identifica 4 pasos a seguir:

Paso 1: Entender el problema

- ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos? - ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Paso 2: Configurar un plan

- ¿Te has encontrado con un problema semejante? ¿O has visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? - ¿Conoces algún problema relacionado con éste? ¿Conoces algún teorema que te pueda ser útil? Mira atentamente la incógnita y trata de recordar un problema que sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar. - He aquí un problema relacionado al tuyo y que ya has resuelto ya. ¿Puedes utilizarlo? ¿Puedes utilizar su resultado? ¿Puedes emplear su método? ¿Te hace falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo? - ¿Puedes enunciar al problema de otra forma? ¿Puedes plantearlo en forma diferente nuevamente? Recurre a las definiciones.

Paso 3: Ejecutar el plan

- Al ejecutar tu plan de la solución, comprueba cada uno de los pasos - ¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedes demostrarlo?

Paso 4: Examinar la solución obtenida

- ¿Puedes verificar el resultado? ¿Puedes el razonamiento? ¿Puedes obtener el resultado en forma diferente? ¿Puedes verlo de golpe? ¿Puedes emplear el resultado o el método en algún otro problema? (Pólya, 1989).

2. Método de schoenfeld:

Inspirado por las ideas de Polya diseña uno de los modelos más completos, sobre todo en estrategias heurísticas. Se basa en una observación minuciosa del proceso de resolución de problemas por sujetos reales y , a posteriori, construye bloques de conductas más o menos homogéneas, que se dan en un periodo de tiempo, y así califica los bloques de modo que especifiquen su función en la globalidad del proceso. Distingue cuatro fases: análisis, exploración, ejecución y comprobación de la solución obtenida. (Schoenfeld, 1985)

Paso 1: Análisis

- Trazar un diagrama, si es posible
- Examinar casos posibles
- Probar a simplificar problemas

Paso 2: Exploración

- Examinar problemas esencialmente equivalentes
- Examinar problemas ligeramente modificados
- Examinar problemas ampliamente modificados

Paso 3: Ejecución

Paso 4: Comprobación de la solución obtenida

- Verificar la solución obtenida y los criterios generales

3. Método de dewey

Psicólogo y pedagogo funcionalista, que destaca por su "teoría del interés", presentó a finales del siglo XX, un modelo para resolver problemas, identificando seis fases siguientes.

Fase 1: Identificación de la situación problemática
Fase 2: Definición precisa del problema
Fase 3: Análisis medios-fines. Plan de solución
Fase 4: Ejecución del plan
Fase 5: Asunción de las consecuencias
Fase 6: Evaluación de la solución, supervisión, generalización.

C) Resolución de problemas: poner en práctica los métodos de resolución de problemas a través del trabajo en conjunto de la resolución de un problema de ecuaciones de primer grado, "La edad de los hermanos"

Edades de los hermanos: Marcos va a comprarle un videojuego a su hermano. Hay videojuego para distintas edades por lo que el vendedor necesita saber la edad de su hermano, pero Marcos le contesta de la siguiente manera. Mi edad es el triplo de la edad de mi hermano y hace cuatro años la suma de ambas edades era igual a la que tendrá mi hermano dentro de 16 años. Puedes ayudar al vendedor a encontrar: ¿Cuál es la edad actual del hermano de Marcos?

D) entregar guía para ejercitar en tutorías.

Referencias:

Carter, V. (1973). Dictionary of education. New York: McGraw Hill.

Lipset, M. (1995). The encyclopedia of democracy. Washington DC: Congressional Quarterly.

Gardner, M. (2008). Matemática para divertirse, un paseo por las diversas ramas de la matemática a través de más de 50 problemas de ingenio. Ciudad y editorial

Pólya, G. (1989). Cómo plantear y resolver problemas. New Jersey: Princeton paperback.

Schoenfeld, A. (1985), Mathematical problem solving

Dirección General de Análisis Institucional. (2015). Informe tasa de retención de primer año de la cohorte 2014. Recuperado de https://inet.ubiobio.cl/documentos/98066d8745c086cbf77d05e7aead8cdb.pdf

Consejo Nacional de Educacion. (2015). Indicadores de retención y duración. Recuperado de http://www.cned.cl/public/Secciones/SeccionIndicesPostulantes/CNED_IndicesTableau_Dimencion01.html?IdRegistro=011

TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: DESARROLLANDO HABILIDADES EN MATEMÁTICA

Reyes, C.[a], Perdomo-Díaz, J.[b], Felmer, P.[c], Espinoza, C.[d] y Peri, A[e],

[a]Centro de Modelamiento Matemático (CMM) de la Universidad de Chile, [b]Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE) de la Universidad de Chile.

Resumen

El taller Resolución de Problemas en Acción busca proveer de una experiencia colectiva, práctica y replicable de resolución de problemas a sus participantes, además de dar la oportunidad de una discusión acerca de la importancia de la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática escolar y la importancia que ha adquirido la resolución de problemas en el nuevo currículo. Este taller en su versión corriente tiene una extensión de 5 horas y se realiza usualmente un día sábado con la participación de un número profesores que va de 21 hasta 120. En esta oportunidad se propone una versión reducida de 90 minutos para 42 participantes.

Palabras clave: *Resolución de Problemas, Desarrollo Profesional, Habilidades*

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas (RP) se encuentra en el centro de la actividad profesional de los matemáticos, quienes en su afán de conocer el mundo crean modelos abstractos de la realidad, estudian las componentes de estos modelos y las relaciones entre ellas. En esta tarea creativa, los matemáticos se plantean interrogantes o problemas que cautivan su interés y ellos vuelcan su energía para resolverlos, buscan estrategias y trabajan hasta que logran resolverlos, comprendiéndolos en su cabalidad. Esta actividad de los matemáticos, la RP, hace su aparición en el curriculum nacional hace ya varios años, pero es elevada a la categoría de habilidad, distinguida claramente de los contenidos en las bases curriculares de 2012, poniendo una serie de desafíos a todo el sistema escolar, en particular a los programas de formación docente, a los docentes en formación y también a los docentes en ejercicio. Es así como surge la necesidad imperiosa de desarrollar esta habilidad en los actuales y futuros docentes, para lo cual se diseñan cursos que privilegian el hacer y el reflexionar, desarrollando la capacidad de resolución de problemas, la cual está inmediantamente relacionada con las capacidades de argumentación, comunicación y modelamiento en los docentes. Además de desarrollar ~~las~~ habilidades y capacidades estos cursos fomentan la autonomía de razonamiento matemático a través del uso sistemático de preguntas, la reflexión sobre las concepciones de la matemática y de su enseñanza, y sobre las emociones a la hora de enfrentarse a problemas y resolverlos.

MARCO TEÓRICO

En la actualidad, la resolución de problemas es un elemento indispensable en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Kilpatrick et al., 2009; Niss, 2002), que ofrece al estudiante oportunidades para establecer conexiones razonadas entre distintos elementos matemáticos y promueve que desarrolle habilidades como examinar, representar, aplicar y la opotunidad de utilizar procesos asociados al pensamiento matemático avanzado como abstraer, analizar, conjeturar, generalizar o sintetizar (NCTM, 2000). La forma en que los profesores e investigadores enfocan la propuesta de utilizar la RP para promover el aprendizaje no es común para toda la comunidad educativa y depende fuertemente de la concepción que se tenga acerca de qué es un problema y qué significa resolverlo.

Entendemos que el término "problema" no es una propiedad inherente a una actividad matemática sino que depende del tipo de interacción que se produzca entre la actividad y la persona que intenta resolverla, sin restringirse a una dificultad de tipo operacional intrínseca. De esta forma, que una actividad sea o no un problema está relacionado con la dificultad que la actividad entrañe para la persona que trata de resolverla (Santos-Trigo, 2007). En este sentido, "La resolución de problemas es un proceso complejo que requiere que un individuo coordine sus experiencias previas, su conocimiento, su comprensión y su intuición para satisfacer las demandas de una situación nueva" (Kaur y Yeap, 2009, p. 308). Así, la forma en que una persona se enfrente a la RP dependerá de sus conocimientos matemáticos, heurísticas, metacognición, su sistema de creencias y las prácticas educativas en las que haya participado (Schoenfeld, 1985). Esta complejidad de la RP se ha, en algunos casos, trivializado a seguir unos pasos en forma algorítmica y lineal, debido a una lectura prescriptiva de los trabajos de Polya.

Las ideas de Polya y sus famosos cuatro pasos para resolver un problema se redujeron a tal punto que se consideraron "el modelo" o "la receta" para resolver problemas o enseñar a resolverlos, ver Kilpatrick (1987) y Santos-Trigo (2007). Esta idea de repetir para resolver problemas hace olvidar que Polya, entendía que en el centro de la capacidad para enseñar resolución de problemas debe estar la experiencia de resolver problemas y no solo la mecanización de su método (Polya 1966, citado por Kilpatrick, 1987): Hay problemas y problemas, y toda clase de diferencias entre problemas. Pero la diferencia más importante para el profesor es entre problema 'rutinario' y 'no rutinario'. El problema no rutinario demanda del estudiante algún grado de creatividad y originalidad, el problema rutinario no... Yo no voy a explicar que es un problema matemático no rutinario: si tu nunca has resuelto uno, si tu no has experimentado la tensión y triunfo del descubrimiento, y si, no has observado tal tensión y triunfo en uno de tus estudiantes, búscate otro trabajo y deja de enseñar matemáticas. La importancia de la experiencia que debe tener un docente para enseñar resolución de problemas ha sido también enfatizada por otros autores. Mason (1992) señala cómo los materiales o guías "a prueba de profesores" no han tenido éxito en la enseñanza de la matemática, que es necesario haber luchado con un problema para apreciar la dificultad que un estudiante puede tener con un problema, que para desarrollar el ser matemático de un estudiante es necesario desarrollar el propio.

Existe evidencia de que los estudiantes en Chile tienen un bajo rendimiento en matemática, lo cual incluye pero no se limita a RP, esto lo indican pruebas internacionales como PISA y TIMMS y la prueba nacional SIMCE. Esto está asociados a un problema más específico: una formación inicial que no provee a los docentes de los conocimientos y habilidades matemáticas y el conocimiento pedagógico de la matemática necesarios para lograr un aprendizaje en los estudiantes, acorde a las necesidades actuales y que están recogidas en el currículo nacional. Esta formación matemática inicial inadecuada no parece ser remediada en los cursos de desarrollo profesional que ofrece el sistema, los que si bien entregan conocimientos, a menudo son teóricos y si son prácticos no se entregan de la forma y en la intensidad necesaria para modificar las prácticas docentes. Además de lo anterior se presenta un nuevo escenario creado por el currículo nacional, ya expresado en el ajuste de 2009, pero enfatizado de manera explícita en las Bases Curriculares de 2012, que plantea el desarrollo de las habilidades matemáticas en los estudiantes en conjunto con los contenidos matemáticos.

Es a raíz de lo anterior que nace la iniciativa ARPA, la cual busca ofrecer cursos de desarrollo profesional efectivos, que provean a los docentes las habilidades matemáticas del currículo, centradas en la resolución de problemas, que signifiquen un cambio en su percepción de la matemática y de su aprendizaje, y que produzcan un cambio consecuente en su acción en el aula. ARPA propone una Estrategia de Desarrollo Profesional centrada en las Habilidades Matemáticas con una fuerte componente en el trabajo y en la reflexión entre pares, constituida por tres talleres:

Resolución de Problemas en Acción (RPAcción - 5 horas en un día). Cursos de Verano (RPVerano - 25 horas en 5 días). Resolución de Problemas para el Aula (RPAula - 30 horas en un año).

Metodología y propuesta del taller

En esta oportunidad presentaremos y analizaremos un taller RPAcción, el cual tiene como objetivo proveer de una experiencia colectiva de resolución de problemas y dar la oportunidad de una discusión acerca de la importancia de la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática escolar y la importancia que ha adquirido la resolución de problemas en el nuevo currículo, cómo trabajar esta habilidad en el aula, distintas estrategias para solucionar problemas y las emociones que surgen en RP. Es un seminario de 5 horas de duración, que se realiza usualmente un día sábado con la participación de un número profesores que puede ir desde 21 a 120.

El taller de 5 horas está pensado para profesores en ejercicio, aunque en oportunidades es realizado para profesores en formación, estos pueden ser tanto de enseñanza básica sin mención, básica con mención como de enseñanza media. En sí el taller consta de dos módulos muy diferentes entre sí, los cuales serán llamados: "trabajo en grupos" y "plenarias". Además, está diseñado para ser una actividad donde el participante experimente en primera persona la resolución de problemas y se vea desafiado por los problemas que se le proponen, donde además debe poner en juego sus habilidades matemáticas de resolución de problemas, argumentar y comunicar, modelar y representar, además de su conocimiento matemático.

La actividad comienza agrupando a los participantes en grupos de tres formados al azar. A cada grupo se le entregan tres copias de un problema (una para cada integrante del grupo) impreso a una plana. El grupo debe solucionar el problema, para lo cual debe valerse de todas sus capacidades, habilidades y estrategias disponibles. Si el grupo tiene dudas debe llamar al monitor quien interactúa con el grupo sólo con preguntas. Una vez el grupo está totalmente de acuerdo de la solución, llama al monitor el cual otra vez interactúa con el grupo, esta vez al igual que en la anterior, la forma de relacionarse con el grupo será sólo con preguntas, pero a diferencia de la anterior, ante la respuesta del grupo el monitor puede optar por darles una simplificación o extensión del problema, dependiendo de la solución y rapidez de trabajo mostradas. Además, el monitor puede decidir entregar un nuevo problema si entiende que este fue solucionado en profundidad y comprendido por todos los integrantes del grupo.

El trabajo en grupos ocupa la mayor parte del tiempo del taller, sin embargo existe una segunda instancia tan importante como la de resolver problemas. Esta instancia es donde se produce la discusión y puesta en común de las ideas desarrolladas y tratadas durante el taller, esta instancia es llamada plenaria.

Durante el taller se realizan dos plenarias las cuales tienen distinto foco; la primera tiene foco en las estrategias utilizadas para resolver un mismo problema y es el monitor quien guía la discusión para que salga la mayor cantidad de estrategias diferentes, donde debe quedar en claro que todas son igualmente válidas y no hay una por sobre otras. El problema que se comenta es seleccionado por el monitor debido a que él está al tanto de las soluciones y estrategias utilizadas por los grupos, de esta forma se alcanza una discusión profunda y con alta participación. Además, en esta plenaria se forma una segunda discusión donde el foco está puesto en las emociones experimentadas por los participantes durante la resolución de problemas, La segunda plenaria, que se realiza en los últimos treinta minutos de taller, pone el foco en que los participantes se hagan conscientes de lo que ocurrió en el taller, en cuanto a los siguientes puntos: metodología de trabajo, implementación y qué es un problema.

En SOCHIEM realizaremos una versión reducida del taller RPAcción, de 90 minutos, la cual busca proveer de una experiencia colectiva de resolución de problemas. Los asistentes al taller trabajaran en grupos de 3 personas resolviendo problemas durante 70 minutos, continuando luego con una

plenaria de aproximadamente 20 minutos, de grupo completo, enfocada principalmente en mostrar, compartir y discutir las estrategias utilizadas por los grupos.

Dinámica de trabajo durante la resolución de problemas

Para describir el trabajo en RP mostraremos a modo de ejemplo un problema utilizado en los talleres de RPAcción. El problema es tal que permite que todos los grupos o participantes puedan resolverlos, al menos la versión original o inicial del problema y una versión con extensiones.

Problema: Los cuadrados

¿Cuántos cuadrados puede identificar en la Figura 1?

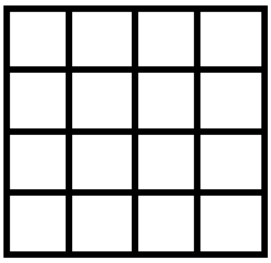


Figura 1. Cuadrado de 4x4

Dado que los participantes solo llaman al monitor cuando tienen dudas o ya han solucionado el problema, presentaremos ejemplos de cómo interacciona el monitor con los participantes en estas dos instancias.

Grupos tienen dudas:

- No entienden el problema: si un grupo no entiende de qué se trata el problema o no encuentra el desafío, se realizan preguntas sobre aspectos específicos del problema, por ejemplo; ¿me puedes indicar un cuadrado de 2x2?
- Si el grupo entendió el problema pero no logra avanzar: esto puede suceder porque cometieron un error, o interpretado mal algún aspecto del problema. Esencialmente hay que promover la discusión en el grupo y realizar preguntas que hagan evidente el error u orientar con pistas que les permitan a los participantes darse cuenta de cómo seguir, no imponiendo ninguna estrategia o método. Por ejemplo; ¿Cómo los contaron? ¿Cuántos cuadrado de 1x1 contabilizaron? ¿Y de 2x2?
- Simplificación del problema: Son preguntas que permiten simplificar el problema original, por ejemplo: Si el cuadrado fuera de 3x3 ¿Cuántos cuadrados podrías identificar?

Grupo terminó el problema: En general cuando el grupo ha terminado, el integrante que mejor entiende el problema es quién querrá explicarlo. Para hacer enfático que el problema se considera resuelto cuando todos los integrantes del grupo son capaces de explicar cómo se resolvió o como lo resolvieron sus compañeros, el monitor evalúa rápidamente la situación a modo de no dejar que explique quién más interesado está en hacerlo sino por el contrario el participante que se ve aparentemente más desconectado o distraído del grupo. ¿Están seguros? ¿Por qué? ¿Me lo puedes explicar tú José?

Cuando el grupo llega a la solución correcta:

- Extensiones del problema: Son en general preguntas que permiten ampliar el problema original, haciéndolo más complejo. Este tipo de preguntas están enfocadas a grupos que encontraron la solución mayoritariamente sin gran dificultad, lo que permite identificar que están capacitados para continuar trabajando el problema ampliando la dificultad, como por

ejemplo: ¿Si ahora la figura fuera de 5x5? ¿Y de 8x8? ¿Y si fuera un cuadrado de 100x100?. Con cada pregunta se busca ver si se generó una estrategia de conteo de cuadrados, donde en el caso del cuadrado de 4x4 una forma contar los cuadrados de manera ordenada es diferenciarlos por sus dimensiones, donde los cuadrados de dimensión 4x4 son 1, de 3x3 son 4, de 2x2 son 9 y de 1x1 son 16. Así el total de cuadrados son 1+4+9+16, lo que también podríamos expresar como $1^2+2^2+3^2+4^2$, lo que es igual a 30. En el caso del cuadrado de 5x5 el número de cuadrados es equivalente a la suma de los cuadrados de 1 hasta 5, es decir, $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$, lo cual es igual 55.

- Otra posible Ampliación es preguntar por la cantidad de rectángulos que hay en la figura.
- La última alternativa, cuando el problema está totalmente resuelto o cuando el monitor lo considera adecuado es entregar un nuevo problema.

Cuando un grupo llegó a una solución incorrecta: Si el problema fue resuelto de manera errada, el monitor realiza una pregunta para que el grupo, por sí mismo se de cuenta de su error. Por ejemplo: su respuesta es 10 porque no contabilizaron los cuadrados de 2x2. El monitor solicitaría que le muestren los cuadrados y preguntaría ¿podrían identificar algún cuadrado de 2x2? o mostraría en la figura un cuadrado de 2x2 preguntando ¿y esto es un cuadrado?

Referencias

Kaur, B. y Yeap, B. H. (2009). Mathematical Problem Solving in Singapore Schools. Mathematical Problem Solving. Yearbook, 2009, Association of Mathematics Educators, cap. 1. World Scientific Printers: Singapur.

Kilpatrick, J. Problem Solving in Mathematics. School Science and Mathematics, 78, 189-192, 1978.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2009). The Strands of Mathematical Proficiency. Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics (7th ed.) (pp. 115-155). Washington, DC: National Academy Press.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project. [Descargado de http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf el 26 de agosto de 2012]

NCTM. (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

Santos-Trigo, M. Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. ZDM,October 2007, Volume 39, Issue 5-6, pp 523-536.

Schoenfeld, Alan 1985, Mathematical Problem Solving Academic Press, New York.

CONJETURA Y DEMOSTRACIÓN. UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA TRANSITAR DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

Olivares, P. [a] y Parra, Y.[b]

[a]Universidad San Sebastián;
Priscilla.olivares@uss.cl[a], Yocelyn.parra@uss.cl[b]

Resumen

Diversas investigaciones señalan uno de los procesos más difíciles dentro del desarrollo de los contenidos matemáticos: el tránsito de la aritmética al álgebra.

Este trabajo se apoya en los estudios realizados por Gómez (2003) y González y Ruiz (2003) en los que se evidencia la disociación por parte de estudiantes entre el álgebra y la aritmética, debido a que no observan la importancia del álgebra en situaciones aritméticas ni la relevancia de usar la aritmética para demostrar una expresión algebraica.

El propósito de este taller, es fortalecer la funcionalidad del sistema algebraico para situaciones diversas que involucran procesos aritméticos, además de identificar relaciones aritméticas en diversas situaciones que comprenden expresiones algebraicas.

Palabras clave: *Álgebra, Aritmética, Conjetura, Demostración.*

INTRODUCCIÓN

En los procesos de enseñanza-aprendizaje los estudiantes presentan dificultades cuando se enfrentan a situaciones que involucran la generalización de procesos y reglas. Diversas investigaciones dan a conocer las dificultades que tienes los estudiantes cuando se enfrentan al tránsito de lo aritmético a lo algebraico.

El trabajo con actividades sobre reconocimiento de patrones y su generalización, proporciona la oportunidad de establecer nuevas formas de comunicación en las que prevalece y se le da sentido y utilidad al lenguaje algebraico como una forma sucinta para expresar conjeturas y someterlas a verificación y refutación Casallas y Estrella (2006).

El propósito de este taller es propiciar estrategias prácticas que permitan facilitar la transición de la aritmética al álgebra. A través de dos actividades se pretende que los participantes logren conjeturar y establecer generalizaciones que sustentan procesos de cálculo aritmético. Posteriormente los participantes se enfrentaran a una centena cuadriculada con el propósito de visualizar patrones numéricos y demostrar la veracidad de las conjeturas establecidas. El objetivo de estas actividades es que puedan ser replicadas con estudiantes que se encuentren en el proceso de transición desde el pensamiento numérico al algebraico.

Antecedentes y elementos teóricos

Dentro de la matemática los estudiantes presentan dificultades cuando se enfrentan a procesos de generalización matemática. Según Enfedaque (1990), los estudiantes presentan conflictos cuando deben realizar traspasos del pensamiento numérico al algebraico, sobre todo cuando el estudiantado realiza como estrategia el contar con los dedos y usar solo números positivos para resolver problemas aritméticos. Sin embargo el mayor problema se suscita cuando los estudiantes comienzan

a sustituir los números por letras. Por otra parte Kieran (1989) plantea que los estudiantes deben realizar ajustes cognitivos cuando se enfrentan altránsito de lo aritmético a lo algebraico estos ajustes complejos para los estudiantes desencadena en errores y dificultades.

El currículo propone que el traspaso del pensamiento numérico al algebraico se realice de manera paulatina, sin embargo estas prácticas no siempre han sido implementadas en las clases de matemática.En el desarrollo del pensamiento algebraico los estudiantes deben llegar a formalizar operaciones aritméticas, relaciones con figuras geométricas, etc., solo se puede tener acceso a este pensamiento si se comienza a trabajar en edades tempranas (Butto&Rojano, 2004).

En investigaciones basadas en generalizaciones como la planteada por Alvarez, Angel, Carranza y Solet-Alvarez (2013), evidencian que "el proceso de conjeturar en matemáticas se constituye en el mecanismo por medio del cual se formulan afirmaciones acerca de las propiedades de determinados objetos o las relaciones que se dan entre éstos, a partir de ciertas observaciones, exploraciones, ensayos o experimentos sobre dichos objetos, que permiten identificar información para plantear conjeturas a través de tales afirmaciones" (p. 76). Así como plantea González y Ruíz (2003), la actividad cognitiva involucrada en el reconocimiento de regularidades en tablas numéricas y/o centenas cuadriculadaspermite que los estudiantes a través de conjeturas, identificación de patrones, verificación, enunciación de teoremas y demostraciones logren fortalecer el paso de la aritmética al álgebra.

Por su parte Butto&Rojano (2004), quienes plantean que "… la vía de acceso de los procesos de generalización implica involucrar a losestudiantes en la detección de patrones y ayudarlos a que sean capaces de expresar tales patrones; esto nos lleva al pensamiento algebraico a través de actividades que involucren el razonamiento acerca de patrones en gráficas, patronesnuméricos y figuras, detectando similitud, diferencias, repetición, recurrencia, generalización o pensamiento en términos de número general puede ser vistayendo de lo general a lo particular y viceversa" (p. 120).

Descripción del taller

El taller busca a través de la actividad práctica reconocer la funcionalidad del álgebra en situaciones aritméticas, entendiendo la aritmética como un sistema matemático organizado según principios definidos (flouroy, 1969).

Este taller contempla una sesión de 90 minutos que a continuación describimos:

Basados en los trabajos de Gómez (2003) la primera parte de este taller se orienta al trabajo del traspaso de operaciones aritméticas al algebraico, proponiendo actividades de construcción de leyes o normas, con el propósito de que los participantes logren conjeturar y establecer expresiones algebraicas que representen la generalidad de la situación planteada

Planteamiento Actividad

1. Se presenta una actividad de trabajo utilizando reglas de generalización de relaciones numéricas multiplicativas como la multiplicación "A la Turca" o "Del Perezoso". La multiplicación a la turca es una vieja técnica de multiplicación de dígitos establecidas en la aritmética de Chuquet. La multiplicación del Perezoso se entenderá en el sentido de Corachán (1699).
   La tarea es encontrar el patrón numérico para luego generar una ley numérica que posteriormente se generalice en una expresión algebraica utilizando una hoja de papel y lápices.

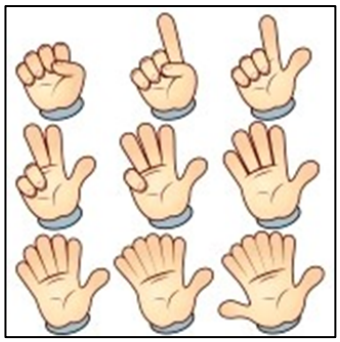


Figura 1: Actividad de Multiplicación a la Turca.

Para multiplicar por ejemplo $7 \cdot 8$, se escribirán los números y a su derecha sus diferencias a 10

$7 \ldots diferencia\ a\ 10 \ldots 3$

$8 \ldots diferencia\ a\ 10 \ldots 2$

Figura 2: Actividad de Multiplicación del Perezoso.

3- Posteriormente en un segundo momento se presenta una actividad utilizando una centena cuadriculada. La tarea consiste en encontrar las regularidades numéricas que se presentan en dicha tabla a partir de procesos de visualización de la plantilla y demostración de la validez de las conjeturas realizadas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 3: Centena cuadriculada

Metodología

La gestión de esta actividad se inspira en la Teoría de la Situaciones Didácticas deBrousseau: Acción, la Comunicación, Validación e Institucionalización.

La primera fase de Acción: implica la manipulación libre individual, en un corto tiempo y que permite un acercamiento al problema a través de la experiencia personal. Los participantes disponen de hojas de papel y lápices.

La segunda fase de Comunicación: Se trata de un trabajo grupal en el que los alumnos podrán intercambiar sus producciones, conjeturas y demostraciones.

En la tercera fase de Validación: se realiza un intercambio para comparar los resultados de cada grupo, el profesor anima este intercambio y se institucionaliza las expresiones algebraicas que generalizan las situaciones planteadas.

Contrato didáctico

El docente a cargo de la actividad presentará problemas asociados a patrones numéricos como la multiplicación "A la turca" y "Del Perezoso" y "centenas cuadriculadas" a los participantes del Taller, entregando las herramientas pertinentes a la tarea: una hoja y lápices, solicitándoles que determinen la generalidad asociada.

Referencias

Álvarez, I., Angel, L., Carranza, E. &Solet-Alvarez, M. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. NÚMEROS, 85, pp. 75-90. ISSN: 1887-1984.

Butto, C. & Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 16, pp. 113-148. Distrito Federal, México. ISSN (Versión impresa): 1665-5826

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. SUMA, 5, pp. 23-34

Gómez, B. (2003). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al algebra y viceversa. Disponible en http://www.uv.es/gomezb/9Losviejosmetodosdecalculo.pdf

González, F. & Ruiz, F. (2003). Las centenas cuadriculadas: un material matemáticamente potente para ilustrar el tránsito de la Aritmética al Álgebra. SUMA, 42, pp. 47-59.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), 8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

CONSTRUCCION DE UN ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Carolina Henríquez Rivas[a], Romina Menares Espinoza[b], Elizabeth Montoya Delgadillo[c] y Paula Verdugo[d]

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso;

carolina.henriquez@pucv.cl, romina.menares@mail.pucv.cl, paula.verdugo@mail.pucv.cl, elizabeth.montoya@pucv.cl

Resumen

El propósito de este taller es invitar a los participantes reflexionar y analizar el trabajo matemático que un docente debe considerar al momento de realizar transposiciones en el aula. Se presentarán tareas desarrolladas en el marco de investigaciones, las cuales serán analizadas desde la Teoría Espacio de Trabajo Matemático y se cuestionará la distancia entre el trabajo personal de cada participante y el trabajo en la enseñanza. Específicamente, serán analizadas las componentes de los planos cognitivo y epistemológico de las tareas propuestas. El taller contempla una puesta en común donde los participantes podrán discutir los alcances e implicancias entre los distintos tipos de trabajo, lo que permitirá reflexionar desde un enfoque teórico aspectos que muchas veces no son abordados ni cuestionados en la formación inicial docente (FID), provocando malos entendidos en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en distintos niveles de la educación.

Palabras clave: *Espacio de trabajo matemático, análisis, geometría, formación del profesor.*

1. INTRODUCCIÓN

El siguiente taller tiene como referente a la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) propuesta por Kuzniak (2011), la cual señala que el alumno al transitar por dos planos –epistemológico y cognitivo– adquiere la comprensión de un saber; ello requiere un diseño de situaciones de manera tal que el profesor se asegure que esto ocurra. En este taller proponemos iniciar a los participantes en la teoría del ETM a través de actividades en las cuales deberán analizar e identificar elementos esenciales que nos señala este constructo. Nuestro propósito es poner en práctica el trabajo personal de cada participante y contrastarlo con el trabajo que se realiza hoy en día en la enseñanza de las matemáticas, particularmente, en situaciones que han surgido desde la investigación.

Este trabajo se enmarca en un proyecto[30] que consiste en determinar fenómenos y estudiarlos (bajo situaciones didácticas) en la FID entre Chile y Francia, teniendo en cuenta la construcción de un espacio de trabajo matemático. Nuestra investigación con profesores debutantes (Henríquez & Montoya, 2015; Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca & Mena-Lorca, 2014) da cuenta que en geometría, el profesor trabaja una geometría "*algebrizada*", esto es, que cuando propone un problema geométrico recurrentemente cambia a un dominio algebraico para resolverlo. El álgebra como dominio traspasa distintos ámbitos de la Matemática y es importante aprovechar los cambios de dominio en el análisis o en la geometría para enriquecer el trabajo matemático (Montoya & Vivier, 2014).

[30] Proyecto ECOS C13H03.

En el taller, la reflexión en conjunto que se realizará con los participantes sobre las situaciones, nos permitirá favorecer la configuración de su espacio de trabajo matemático para responder a la tarea de la transposición de los saberes en juego y reflexionar sobre sus alcances en el aula.

2. ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

Para el desarrollo de este taller, utilizamos como constructo teórico el *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM), teoría desarrollada por Kuzniak (2011) e inspirada en los *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico* (ETG), iniciada por Houdement y Kuzniak (1996, 2006). En el ETM se distinguen dos planos, uno epistemológico y uno cognitivo, y la articulación entre estos mediante un conjunto de génesis (semiótica, instrumental y discursiva) que favorecen su coordinación (Kuzniak, 2011). En el ETM se concibe la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos (geométricos, algebraicos…), en un ambiente organizado por y para el matemático (geómetra, algebrista,…).

El *plano epistemológico* está constituido por tres *componentes*: *representante* o *representamen*, *referencial*, y *artefacto*. El *plano cognitivo* está también conformado por tres componentes: los procesos de *visualización, construcción* y *prueba*. Para describir la articulación de este modelo, se consideran *planos verticales* (Kuzniak & Richard, 2014), los cuales permite analizar una situación de enseñanza y aprendizaje, estos planos se muestran en la siguiente figura (1).

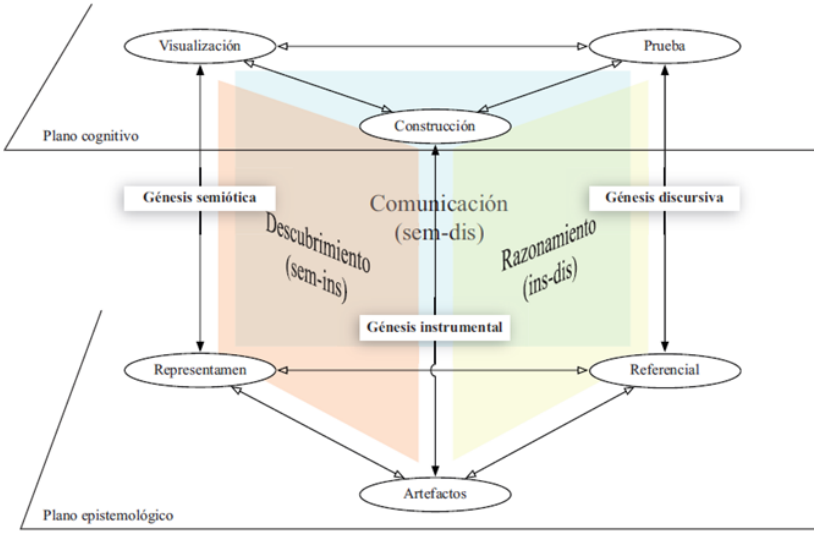


Figura 1: Espacio de trabajo geométrico, sus génesis y planos verticales (Kuzniak & Richard, 2014).

Existen tres tipos de espacios de trabajo: de *referencia,* definido según la relación con el saber, e idealmente sobre criterios matemáticos; *idóneo,* según se enseña este saber en una institución dada con una función definida, y *personal,* según se enfrenta el problema con los propios conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas.

Tanto las génesis, como las componentes de los planos, deben ser reinterpretadas dependiendo del dominio matemático específico en cuestión (geometría, análisis, álgebra, etc.) y como se accede o utiliza a este espacio de trabajo se distinguen sus respectivos paradigmas en los respectivos dominios.

3. ANÁLISIS AL ETM IDÓNEO Y ETM PERSONAL A PARTIR DE LA MISMA TAREA

Para realizar un análisis de los *ETM-idóneo* y *ETM-personal,* a partir de la misma tarea es necesario identificar qué elementos aparecen en cada una de las componentes del ETM y cuál es la relación

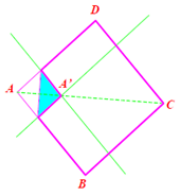
entre una génesis y otra. Como se ha señalado, el objetivo es caracterizar y reflexionar respecto a los ETM *personal e idóneo*, y los respectivos paradigmas. En este taller se presentan tareas que provienen de investigaciones de los proponentes, las cuales activan y dan sentido a distintos ETM. Además, se mostrarán como estas tareas pueden ser abordadas en la formación inicial de profesores, con la finalidad de estudiar el *ETM idóneo* y las consecuencias en el aprendizaje de saberes matemáticos en juego.

El participante, discutirá temas enmarcados en los dominios del análisis y la geometría. En este sentido, se han identificado ciertos fenómenos que están implícitamente abordados en la FID: el pasaje de lo *discreto a lo continuo,* la continuidad en análisis, y la transición entre distintas formas de visualización en geometría.

4. TAREAS PROPUESTAS EN EL TALLER

A continuación, se presentan algunas actividades que se trabajarán en el taller. El participante obtendrá sus conclusiones al comparar dos espacios de trabajo (ETM-idóneo y el ETM-personal) y reflexionará respecto a cómo uno influye sobre el otro. Nos parece necesario el estudio de tareas de referencia, como los que siguen, con el propósito de analizar y discutir su efecto en la enseñanza de las matemáticas.

Tarea 1

Un cuadrado de papel que tiene las caras de distinto color, es doblado formando un triángulo cuyo vértice pertenece a la diagonal de dicho cuadrado. ¿Existe alguna forma de doblar el cuadrado de manera que las áreas de diferente color tengan igual medida? Explique su respuesta.	Figura 2: Cuadrado doblado 

Cuestionamientos

¿Es posible la utilización de la noción de continuidad y el TVI, por parte del profesor, para fundamentar su respuesta?, ¿Qué registros y signos son utilizados por el profesor para resolver el problema? ¿Qué ETM y paradigma se despliega? ¿Qué planos del ETM se privilegia con esta tarea?

Esta tarea es posible resolver en distintos dominios (geométrico, algebraico y en análisis) y diversas instituciones (liceo, universidad). En efecto, la tarea involucra en su enunciado una figura geométrica (cuadrado), diagonal, triángulo, áreas. Luego, es posible abordar la pregunta desde un dominio algebraico (encontrando la solución mediante una ecuación cuadrática), o en un dominio analítico, mediante la formulación de dos funciones continuas que cumplen con las hipótesis del teorema del valor intermedio (TVI).

Tarea 2

Dados tres puntos A, B y C, **verifica** si son o no colineales.

i) ¿Cómo lo haría si solo utiliza compás?

ii) ¿Cómo lo haría si utiliza Geogebra?

iii) Si utiliza Geogebra, pero solo es posible emplear las herramientas "Intersección de dos objetos"  y "Circunferencia dado su centro y uno de sus puntos" , ¿cómo realizaría la verificación?

Cuestionamientos

En este caso, los cuestionamientos han sido divididos en dos partes: distinguir su ETM-personal, y luego, reflexionar desde su ETM-idóneo.

Parte 1: ¿Qué distingue (o caracteriza) el trabajo en cada caso?, ¿Cómo garantiza que la construcción realizada es correcta en cada caso? Identifique propiedades que aparecen en su trabajo (en la veracidad de su trabajo).

Parte 2: Identifique dos niveles escolares en que sería posible realizar este trabajo, atendiendo a las distintas formas de abordar la tarea (parte 1). Justifique su respuesta. ¿Cómo plantearía la tarea en cada caso?, ¿qué elementos distingue y/o diferencian en cada una (definiciones, propiedades, trabajo con figura, uso de herramientas, …)?

La situación es abordada desde un dominio geométrico pero en el que se despliegan distintos paradigmas. Con las preguntas de la primera parte, las respuestas permiten evidenciar un privilegio sobre el plano [Sem-Ins]. Mientras que, en las preguntas de la parte 2, la idea es mostrar el rol de la génesis discursiva a partir de su posición de profesor, y con esto, activar los planos [Ins-Dis] en la justificación de la construcción y [Sem-Dis] si se valida mediante la figura. Estas cuestiones centrales de la teoría, nos permite analizarlas implicancias a nivel de la formación de profesores.

Tarea 3

El comportamiento de dos cultivos A y B de bacterias (ambos comenzaron con aproximadamente 1.000 bacterias). El cultivo A se encuentra en condiciones muy favorables y se triplica cada un minuto, mientras que el B se está probando un antibiótico, y a cada minuto la población disminuye a su tercera parte.

i) Haga una tabla de datos

ii) Grafique las funciones que mejor modela la reproducción de las bacterias (…)[31]

iii) Encuentre una función tal que $f'=f$ et $f(0)=1$.

Cuestionamientos

¿En qué nivel escolar es posible tratar este problema?, ¿por qué?, ¿qué sucede con la curva encontrada? ¿Qué implicancias tiene el "unir puntos" para graficar?

En esta situación se introduce la función exponencial, y muestra elementos del fenómeno discreto-continuo. Se espera hacer un cuestionamiento en términos del ETM-idóneo; cómo se enseña la función exponencial, a pesar del interesante esfuerzo por introducir la modelación matemática al currículo escolar. Asimismo, nos cuestionamos si el fenómeno (discreto-continuo) es abordado en la FID y las posibles rupturas que esto puede producir.

5. CUESTIONES A CONCLUIR

Para finalizar, se espera que los participantes reflexionen sobre el ETM personal que han puesto en juego a la hora de resolver las situaciones (que le hemos llamado tareas), en relación a su ETM idóneo, analizando ambos espacios de trabajo, con el propósito de pensar en los estudiantes y en el éxito de una construcción de los saberes matemáticos en juego. Además, reflexionar sobre la importancia de proponer a los estudiantes ejercicios en los cuales deban recurrir a diversas técnicas para su resolución, transitando por los planos, articulando sus componentes y aprovechando la

[31]Extracto texto escolar II Medio, SM, p. 206

riqueza que significa cambiar de dominios específicos de la matemática y su implicancia en la construcción del conocimiento.

La teoría ETM nos proporciona una herramienta útil para analizar diversos procesos que subyacen a los aprendizajes y al proceso de transposición; en particular, es conveniente para poner atención en la articulación de los 'paradigmas' sobre los cuales debieran ser considerados en una formación inicial de un profesor y los que pone en juego en su enseñanza. Asimismo, disponemos de evidencia, y es parte de lo que queremos discutir en el taller, pues existen fenómenos ligados a la enseñanza del análisis y de la geometría que no siempre son explotados o aprovechados en la FID. También es de interés enfrentar la transposición didáctica para una construcción de un espacio de trabajo matemático que potencie el aprendizaje y posteriormente su enseñanza de la matemática.

En términos teóricos, nos resulta deseable que los profesores articulen intencionadamente las componentes de los planos epistemológico y del cognitivo, las circulaciones y activación de génesis y planos verticales, de manera que se promueva la construcción de un ETM-personal adecuado en sus alumnos (y un adecuado ETM-idóneo del profesor).

Reconocimientos: Proyecto ECOS C13H013, Beca de doctorado PUCV, Beca de doctorado Conicyt, Beca Postdoctorado PUCV.

Referencias

Henríquez Rivas, C. & Montoya Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. Revista Enseñanza de las Ciencias, 33(2), 51-70.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de didactique et de Sciences Cognitives, 11, 175-193.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 17(4-I), 5-15.

Montoya-Delgadillo, E.; Mena-Lorca, A. y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17(4-I), 181-197.

Montoya-Delgadillo, E. & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine de travail dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19, 73-101.