VOL. 20
Nº 1

IMA
Instituto de Matemáticas PUCV

ACTAS

XX JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

VALPARAÍSO

13 Y 14 DE DICIEMBRE, 2016

ISSN 0719-8159

www.ima.ucv.cl/congreso/xxjnem

XX JNEM

Valparaíso, 2016

XX JNEM
Valparaíso, 2016

ACTAS

XX JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

VALPARAÍSO

13 Y 14 DE DICIEMBRE, 2016

COMITÉ EDITORIAL

Soledad Estrella, PUCV, soledad.estrella@pucv.cl
Manuel Goizueta, PUCV, manuel.goizueta@pucv.cl
Carolina Guerrero, PUCV, carolina.guerrero@pucv.cl
Arturo Mena, PUCV, arturo.mena@pucv.cl
Jaime Mena, PUCV, jaime.mena@pucv.cl
Elizabeth Montoya, PUCV, elizabeth.montoya@pucv.cl
Astrid Morales, PUCV, astrid.morales@pucv.cl
Marcela Parraguez, SOCHIEM, marcela.parraguez@pucv.cl
Elisabeth Ramos, PUCV, elisabeth.ramos@pucv.cl
Patricia Vásquez, PUCV, patricia.vasquez@pucv.cl
Diana Zakaryan, PUCV, diana.zakaryan@pucv.cl

www.ima.ucv.cl/congreso/xxjnem

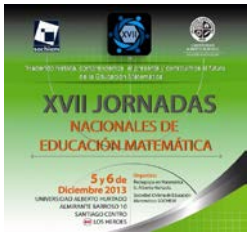
CRONOLOGÍA DE LAS JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2016 – XX: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, diciembre

2015 - XIX: Pontificia Universidad Católica, Villarrica, noviembre

2014 - XVIII: Universidad de Santiago de Chile, Santiago, noviembre

2013 XVII: Universidad Alberto Hurtado, Santiago, diciembre



2012 - XVI: Universidad San Sebastián, Santiago, noviembre

2012 - XV: Universidad Católica de Temuco, Temuco, abril

2008 - XIV: Universidad de Concepción, Concepción, noviembre

2006 - XIII: Universidad Viña del Mar, noviembre

2004 - XII: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, noviembre

2001 - XI: Universidad de Concepción, Concepción, noviembre

1999 - X: Universidad Austral de Chile, Valdivia, noviembre

1997 - IX: Universidad de La Serena, La Serena, julio

1993 - VIII: Universidad Católica de Valparaíso, Valparaiso, octubre

1991 - VII: Universidad Austral, Valdivia, noviembre.

1990 - VI: Universidad de Santiago de Chile, UNESCO/OREALC, Santiago, octubre

1988 - V: Universidad de Santiago de Chile, Santiago, octubre

1986 - IV: Universidad de Santiago de Chile, Santiago, noviembre

1983 - III: Universidad Católica, Santiago

1982 - II: Universidad de Santiago de Chile, Santiago noviembre

1982 - I: Universidad de Santiago de Chile, Santiago abril

CÓMO CITAR

Versión electrónica de Actas:

Estrella, S., Goizueta, M., Guerrero, C., Mena, A., Mena, J., Montoya, E., Morales, A., Parraguez, M., Ramos, E., Vásquez, P., y Zakaryan, D. (Eds.) (2016). XX *Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática,* ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Versión electrónica de Actas: (citación breve)

Estrella, S., Goizueta, M., Guerrero, C., Mena, A., Mena, J., Montoya, E., ..., Zakaryan, D. (Eds.) (2016). XX *Actas de las JNEM,* ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV.

Versión electrónica de Capítulo de un libro: (solo 6 editores y el último)

Apellido, A. A., & Apellidos, B. B. (2016). Título del capítulo. En S. Estrella, M. Goizueta, Guerrero, A. Mena, J. Mena, E. Montoya, ..., D. Zakaryan (Eds.), XX *Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (p. nn-nn), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Versión electrónica de Capítulo de un libro: (todos los editores)

Apellido, A. A., & Apellidos, B. B. (2016). Título del capítulo. En S. Estrella, M. Goizueta, Guerrero, A. Mena, J. Mena, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez, & D. Zakaryan (Eds.), XX *Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (p. nn-nn), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

ÍNDICE

CONFERENCIAS PLENARIAS..... 12

Three paradigms in developing students' statistical reasoning..... 13

La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad..... 23

Tareas para alumnos y tareas para la formación: discutiendo el conocimiento especializado del profesor y del formador de profesores de matemáticas..... 31

CONFERENCIAS ESPECIALES..... 40

¿Existen diversas matemáticas?, una mirada desde la etnomatemática..... 41

¿Cómo lucen las clases de matemática de escuelas chilenas que mejoran?..... 48

STEM integrado con soporte TIC para educación en las habilidades siglo XXI..... 56

Desarrollo matemático y estadístico: explorando su competencia meta-representacional..... 64

El rol de la visualización en el trabajo geométrico del profesor: aportes para su desarrollo y diferenciación..... 71

COMUNICACIONES BREVES..... 79

Hacia la evaluación de competencias matemáticas específicas: una mirada desde la praxis de los formadores de profesores..... 80

Estructuras deductivas y textos matemáticos universitarios..... 84

De la posibilidad a la probabilidad. Un estudio de caso en el aula de educación básica..... 88

Competencias matemáticas- rúbricas de evaluación..... 93

Resolución de problemas de final abierto: análisis de procedimientos y respuestas de un grupo de estudiantes de pedagogía en educación básica, en clases de didáctica de la matemática..... 98

Errores en la construcción de gráficos estadísticos por profesores chilenos de educación primaria..... 103

Experiencias emocionales de los estudiantes en clase de matemáticas: problemas relacionados con la función logaritmica..... 108

Análisis didáctico realizado en un trabajo de fin de máster..... 113

Interacción en un aula de geometría: construcción colectiva y escritura autónoma de una demostración..... 117

Probabilidad en el camino de una hormiga: una propuesta de enseñanza con uso de metáforas..... 122

Introducción de la división en libros de texto chilenos..... 127

Estructuras mentales para un esquema de la implicación como entendimiento común..... 132

La recta numérica en los libros de texto ministeriales 2016..... 136

Problemas de optimización aplicando volúmenes de cuerpos geométricos, una actividad para cuarto medio..... 141

El uso de gráficas en la comunidad de físicos: el caso de un investigador en ciencias..... 146

Una experiencia de aula para la enseñanza de la distribución binomial..... 151

La modelación desde el sordo. Un estudio inclusivo desde la construcción social..... 156

Significados pretendidos por el currículo chileno de octavo año básico sobre la noción de función..... 161

Prácticas de enseñanza de las matemáticas y fracaso escolar de estudiantes marginalizados..... 166

Figuraciones no cartesianas en el proceso de ajuste de un modelo lineal a uno cuadrático 171
Diseño de una propuesta de secuencia didáctica para la enseñanza de la función lineal en base a la modelación 176
Experiencia de enseñanza en estadística para carreras del área sociales 181
Significados escolares del concepto de porcentaje 185
Identificación de cualidades de experticia en un profesor novel participante de un curso de formación 190
Tipos de demostración construidas por estudiantes de un curso-laboratorio de precálculo 195
Hacia el diseño de una descomposición genética de los valores y vectores propios en r2 desde una perspectiva geométrica 200
Estadística con proyectos en el contexto escolar mapuche 204
La resolución de problemas en las matemáticas escolares de educación básica chilena 209
Concepciones de los profesores sobre la argumentación en el aula de matemáticas 214
Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5º curso primaria 219
Valoración de los estudiantes en relación al uso de secuencias didácticas como una estrategia para facilitar sus aprendizajes 223
Algunos conflictos semióticos en la noción de límite en estudiantes de pedagogía 228
Educación matemática en contextos de pobreza: experiencia de una asesoría técnica en renca 232
Razones trigonométricas: un rediseño de situación desde la construcción social del conocimiento matemático 237
Aprendizaje a través del lenguaje matricial 243
La contingencia como herramienta para el análisis de la práctica de la enseñanza de las matemáticas 247
Desarrollo y validación de una pauta de observación de clases de matemática: mateo 251
Espacio de Trabajo Matemático con dominio en la estadística temprana 256
Estudio comparativo de pruebas de ingreso a la universidad en tres competencias matemáticas 260
Didáctica de la matemática de la teoria a la práctica: una experiencia con docentes de aula 265
Modelación tabular, actividad con celdas e interceldas 270
las creencias sobre el conocimiento y sus efectos sobre desempeños específicos: el caso de las fracciones en matemática 274
Análisis de los problemas propuestos en el programa de estudio de matemáticas de costa rica para tercer ciclo de educación general básica en las áreas de números y geometría 279
Actitudes hacias las matemáticas de estudiants de primer curso de universidad y su incidencia en el rendimiento académico 283
Bases para el diseño de una situación. el caso de la resignificación del cálculo integral 288
Habilidad de representar al resolver problemas matemáticos: ¿Cómo promover y qué observar en los estudiantes? 291
Concepciones sobre el infinito de un grupo de estudiantes de cuarto medio: evidencias del obstáculo epistemológico a través de un análisis didáctico 296
Modelación Matemática, una mirada Socioepistemologica en estudiantes de Administración 301

La variación, como razón de cambio, una articulación entre la escuela y cálculo de primer año de universidad 306

Fromación continua en didáctica de la matemática: el caso de los números complejos en tercero medio 311

Educación Matemática Realista: Un enfoque para la apropiación de aprendizajes significativos sobre funciones en tercer año medio 316

La estabilidad y sus usos en una comunidad de conocimiento matemático de ingenieros 320

Espacio de trabajo matemático y estudio de clases: analizando las circulaciones en cinco ciclos de clases en estudio 324

Una práctica de modelación: la parábola vía argumentación gráfica 329

Evaluación matemática bajo una perspectiva socioepistemológica a través del estudio de los estilos de pensamiento en estudiantes de ingeniería 333

Nociones básicas sobre fracciones manifestadas por estudiantes de pedagogía básica 336

Estudio de caso de un profesor universitario en la unidad de sucesiones 341

Inecuaciones lineales implícitas, en el medio en que se desenvuelven los estudiantes de 7º básico 346

Metodología de estudio de las interacciones Profesor-Estudiantes en clases de resolución de problemas en educación superior 349

El triángulo rectángulo como articulador entre los modos sgc y ao de la derivada en lo local 354

Oportunidades para mejorar la calidad de las clases en matemáticas 359

Sistema de ecuaciones cuadráticas: una recta y una parábola, como un objeto matemático desde APOE 364

“Cuántos trozos le faltan” – Uso de estrategias de resta para la comparación de fracciones 368

Problemas abiertos para el traspaso de la aritmética al álgebra, a través de una secuencia neurodidáctica 372

Hacia un modelo cognitivo para el aprendizaje de los fractales geométricos 376

Una situación didáctica para introducir la noción de la suma de Riemann 381

Una actividad sobre estimación del volumen: Apreciaciones de profesores chilenos 386

La justificación de lo infinito en la enseñanza escolar: Un estudio desde las voces docentes y los libros de texto 391

Algunas reflexiones sobre las actitudes de futuros profesores hacia las Matemáticas como construcción humana 396

Programa semi-presencial para el desarrollo de habilidades y conocimientos matemáticos en docentes de Educación Básica 400

Un instrumento para la evaluación del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la matemática elemental en futuros profesores de educación básica 405

CAUCHY: ¿infinitesimales versus límite o infinitesimales y límite? 410

Focos de reflexión para fortalecer prácticas en aula de docentes de matemática en formación 415

Obstáculos y oportunidades después del desarrollo profesional en matemática primaria 420

TALLERES 424

La exclusión que provoca el discurso matemático escolar. El caso de la optimización y de la estabilidad 425

Tratamiento de la inferencia estadística informal a través de un proyecto que integra ideas estocásticas fundamentales 430

Repensando la geometría escolar desde la relación geometría-mundo en la antiguedad 435

Diseño de problemas en contexto y en diferentes representaciones 440

El rol del discurso Matemático escolar en la función social del docente de matemáticas 443

Taller de optimización: Diseño de un diario 447

Resolucion de problemas: abordaje metaforico enactivo 451

POSTERS 456

Caracterización de preguntas que favorecen el aprendizaje del campo aditivo 457

Narrativa de la densidad de los números racionales, una forma distinta de evaluar propiedades matemáticas 458

Acompañamiento para el desarrollo profesional: la experiencia de mejor matemática 460

Concepciones del concepto volumen en estudiantes de primero medio 461

Las concepciones de área de estudiantes de pedagogía de educación básica 462

Resignificacion del concepto teselaciones semiregulares para estudiantes de primero medio técnico profesional 463

Significados escolares del concepto de porcentaje 464

Microingeniería didáctica para la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros utilizando modelos concretos en séptimo básico 465

El sentido del número: taller para padres 466

Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5º curso primaria 467

Propuesta didáctica para introducir el concepto de sistemas de inecuaciones lineales en 2 variables 468

Análisis conceptual de la multiplicación y división de fracciones algebraicas con estudiantes de segundo medio 469

Representaciones semióticas para la división de fracciones en libros de texto 470

Saberes matemáticos en la práctica del volantinismo 471

La modelación matemática en la construcción de conocimiento del estudiante de ingeniería 472

La argumentación como gestión en el aula matemática a través de estudios de caso 474

Propuesta de formación virtual en enseñanza de la estadística y la probabilidad para profesores de matemática en ejercicio 475

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre la ecuación lineal aditiva entorno de un estudio de clases 476

Avance progresivo de la noción de igualdad y ecuación lineal en los niveles 3° y 4° básico, salto de lo pictórico a lo simbólico 478

Una propuesta didáctica para la comprensión de la función derivada en secundaria desde la tad 480

Dominio afectivo y teoría de grafos 482

Significancia de la resolución de problemas para el aprendizaje de la matemática en estudiantes de 1° medio 484

Magíster en matemáticas aplicadas de la universidad católica de temuco: una contribución al continuo educativo del profesor de matemática 486

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas de segundo ciclo básico en la enseñanza de inecuaciones lineales 487

Evaluación de la usabilidad en cursos b-learning para docentes de matemática de Educación Básica 488

Análisis descriptivo de un cuestionario para evaluar el trabajo en un aula virtual del tema integral indefinida 489

Errores en la sustracción de enteros por estudiantes de 12 y 13 años 491

Comparación de textos escolares en la unidad función cuadrática y ecuación de segundo grado 492

Propuesta para el trabajo con errores de aproximación 493

Innovacion en las prácticas educativas la implementacion de apps para dispositivos móviles en la enseñanza de la matemática 495

Una experiencia de inducción a la investigación matemática en la formación de profesores 496

Teoremas de la geometría moderna: inclusión en el aula a través de la geometría dinámica 498

Diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de la probabilidad condicional 499

Análisis de la construcción de un esquema del cálculo diferencial e integral 501

Concepciones de la desviación estándar, su rol e importancia en la inferencia estadística 503

Episodios de violencia simbólica en clases de matemática en colegios particulares subvencionados que han obtenido resultados destacados en simce 505

La competencia profesional didáctico-matemático del profesor 507

Efectividad de las actividades lúdicas como estrategia de enseñanza-aprendizaje 508

Paseos al azar como metaforización enactiva en matemática: propuesta didáctica para enseñanza básica 509

¿Utilizan los estudiantes chilenos de 12 a 14 años la regularidad de la multiplicación para hallar el signo del resultado de la adición de enteros? 510

Propuesta didáctica para conceptualizar la función cuadrática desde la teoría de situaciones 511

Concepciones de los docentes respecto a la representación gráfica de la función probabilidad 513

CONFERENCIAS PLENARIAS

THREE PARADIGMS IN DEVELOPING STUDENTS' STATISTICAL REASONING

Dani Ben-Zvi
University of Haifa, Israel - Faculty of Education, LINKS I-CORE

Abstract: This article is a reflection on more-than-a-decade research in the area of statistics education in upper primary school (grades 4-6, 10-12 years old). The goal of these studies was to better understand young students' statistical reasoning as they were involved in authentic data investigations and simulations in a technology-enhanced learning environment entitled Connections. The article describes three main paradigms that guided our educational and academic efforts: EDA, ISI, and Modeling. The first, EDA, refers to Exploratory Data Analysis – children investigate sample data they collected without making explicit inferences to a larger population. The second, ISI, refers to Informal Statistical Inference – children make inferences informally about a larger population than the sample they have at hand. The third, Modeling – children use computerized tools to model the phenomenon they study, and simulate many random samples from that model to study statistical ideas. In each of these three paradigms, we provide a short rationale, an example of students' products, and learned lessons. To conclude, current challenges in statistics education are discussed in light of these paradigms.

INTRODUCTION

Data is everywhere nowadays and is increasingly used, in large quantities, in all areas of life, to make important human decisions. Statistical reasoning is required in many disciplines and professions, and raises interesting issues and challenges. Therefore statistical literacy must be a key goal of education at all levels. The teaching and learning of statistics has been a focus for research in many areas. A majority of these research studies (reviewed by Garfield and Ben-Zvi, 2007) suggest innovative ways of teaching and learning statistics that differ from the traditional classroom practices. This article offers three approaches (paradigms or models) to teaching statistics in the early age of primary school: EDA, ISI, and Modeling. They can be used by statistics educators in a variety of ways to a) better conceptualize their enterprise; and b) as starting points of theory and design for deep learning (Sawyer, 2014) of statistics to better develop students' statistical reasoning.

We shall first present statistical reasoning, and then provide the context in which all the studies described in this article took place – the Connections learning environment. This will be followed by three paradigms that enabled us design learning trajectories: EDA, ISI, and Modeling. For each paradigm, we provide a rationale, a quick outline of the intervention, empirical example, and brief list of the lessons learnt from that stage. Finally, we conclude with a few thoughts on current challenges of statistics education.

Statistical reasoning

Although statistics is now viewed as a unique discipline, statistical content is most often taught worldwide in the mathematics curriculum (K–12) and in departments of mathematics (college level). This has led to exhortations by leading statisticians, such as Moore (1998), about the differences between statistics and mathematics. These arguments challenge statisticians and statistics educators to carefully define the unique characteristics of statistics

and in particular, the characteristics of statistical literacy, reasoning and thinking (Ben-Zvi & Garfield, 2004). We focus in this article on statistical reasoning.

Statistical reasoning is the way people reason with statistical ideas, consider how to collect data, create, select and interpret sets of data, graphical representations, and statistical summaries, and make sense of statistical information embedded in context. Statistical reasoning may involve connecting one concept to another (e.g., center and spread, sample and population) or may combine ideas about data and chance to make inferences and interpret statistical results. Statistical reasoning also means understanding and being able to explain statistical processes, and being able to interpret statistical results. We see statistical reasoning as the mental representations and connections that students have regarding statistical concepts. Underlying statistical reasoning is a conceptual understanding of important statistical ideas such as: variability, distribution, center, association, uncertainty, sampling, inference and probability (Garfield, 2002). We move on to describe the studies' settings.

The Connections Project

The Connections learning environment is built upon the principles of socio-constructivist theory (e.g., Cobb, 1994) and is designed for young learners (age 10-12). It is a design and research project which started in 2005 (Ben-Zvi, Gil, & Apel, 2007) to develop students' statistical reasoning in an inquiry and technology-enhanced learning environment in primary schools in Israel.

The project extends for five weeks (six hours per week) each year in grades 4-6 during which students actively experience some of the processes involved in statistics experts' practice of data-based inquiry. Students conduct data and statistical modeling investigations through peer collaboration and classroom discussions using TinkerPlots (Konold & Miller, 2011), a computer tool for dynamic data and modeling explorations. By playing a role in helping students learn new ways of representing data and develop statistical reasoning, TinkerPlots gradually becomes a thinking tool for these students; it scaffolds their ongoing negotiations with data, statistical ideas, inferences and their meanings (Ben-Zvi & Ben-Arush, 2014).

The tasks undertaken by Connections students are a series of open-ended real data investigations that provide students with rich and motivating experiences in posing statistical questions, collecting, representing, analyzing and modeling data, and formulating informal inferences in authentic contexts, which result in meaningful use of statistical concepts (Ben-Zvi, Aridor, Makar, & Bakker, 2012). The data are obtained from a questionnaire designed by the research team, teachers and students, and administered by students in their school. The Connections classroom is conceptualized and organized as a learning community (e.g., Bielaczyc & Collins, 1999) that supports collaboration, argumentation, sharing and reflection. This is done physically in the class and virtually in a website that includes all educational materials and supports, students' reflective diaries, and peer and teachers feedback. Students are usually highly motivated to present and discuss their work in short

presentations during the project and at the Statistical Happening, a final festive event with their parents.

In the Connections learning environment, statistical concepts are initially problematized—that is, rather than first teach students directly about these concepts, then ask them to apply them in investigations, the investigations themselves are designed to raise the need to attend to these concepts, hence deepening students understanding of both their relevance and application. Additional strategies are used in the design of the educational materials such as growing samples, which is a pedagogical heuristic (e.g., Bakker, 2004), in which students are gradually introduced to increasing sample sizes that are taken from the same population. For each sample, they are asked to make an informal inference and then predict what would remain the same and what would change in the following larger sample. Thus, students are required to reason with stable features of distributions or variable processes, and compare their hypotheses regarding larger samples with their observations in the data. They are also encouraged to think about how certain they are about their inferences. Beginning with small samples, students are expected to experience the limitations of what they can infer about this current sample. This is a useful pedagogical tool to sensitize and slowly introduce students to the decreasing variability of apparent signals in samples of increasing sizes.

Ben-Zvi (2006) found that the growing samples heuristic combined with "what-if" questions not only helped Connections students make sense of the data at hand, but also supported their informal inferential reasoning by observing aggregate features of distributions, identifying signals out of noise, accounting for the constraints of their inferences, and providing persuasive data-based arguments. The growing awareness of students to uncertainty and variation in data enabled students to gain a sense of the middle ground of 'knowing something' about the population with some level of uncertainty and helped them develop a language to talk about the grey areas of this middle ground (Makar, Bakker, & Ben-Zvi, 2011).

Connections students gained a considerable fluency in techniques common in exploratory data analysis; use of statistical concepts; statistical habits of mind, inquiry-based reasoning skills, norms and habits of inquiry, and TinkerPlots as a tool to extend their reasoning about data (e.g., Ben-Zvi, Aridor, Makar, & Bakker, 2012; Gil & Ben-Zvi, 2011). In a longitudinal mixed methods study (Gil & Ben-Zvi, 2014), long-term impact of teaching and learning was sought among ninth graders, three years after their participation in the three-year Connections intervention. Students from two groups – those who have / have not taken part in the program were compared throughout three extended open-ended data inquiry tasks and took a statistical reasoning test. Connections students had significant gains in terms of their conceptual understanding of aggregate view of a distribution and informal statistical inference. They used statistical concepts in a more meaningful, integrated and accurate manner in their explanations, were more fluent considering uncertainty involved in a generalizations from random samples, and supported their inferences with data-based evidence.

During the more-than-a-decade project, our academic passion is geared to the following three basic research questions:

1. What can young students understand about data and do with data?
2. How does students' statistical reasoning develop?
3. How can we nurture students' statistical reasoning?

EDA: exploratory data analysis

The Connections project was initially based on the exploratory data analysis (EDA) pedagogic approach (Shaughnessy, Garfield, & Greer, 1996). This paradigm is based on Tukey's thought and innovation.

> For a long time I have thought I was a statistician, interested in inferences from the particular to the general. But as I have watched mathematical statistics evolve, I have had cause to wonder and to doubt … All in all I have come to feel that my central interest is in data analysis. (Tukey, 1962)

According to the EDA paradigm, students are encouraged to become "data detectives" who use critically the PPDAC cycle – Problem, Plan, Data, Analysis, and Conclusion (Fig. 1) in order to make sense of data. These stages follow the logical order of an investigation starting from understanding and defining the problem, making a plan, and proceeding to data collection, organization, and interpretation in order to come to a conclusion. Real research, however, seldom proceeds in this orderly fashion due to all sorts of reasons, but the main reason is the interdependency of these research phases (Konold & Higgins, 2003).

> In these respects, data analysis is like a give-and-take conversation between the hunches researchers have about some phenomenon and what the data have to say about those hunches. What researchers find in the data changes their initial understanding, which changes how they look at the data, which changes their understanding, and so forth. (p. 194)

We designed the Connections EDA learning trajectory keeping this complex picture of data analysis in mind. This meant that we wanted students to stay focused on the data and what they have to tell, be attentive to the context from which the data were taken, and use data analysis tools for collecting, graphing, and summarizing in a creative and critical way.

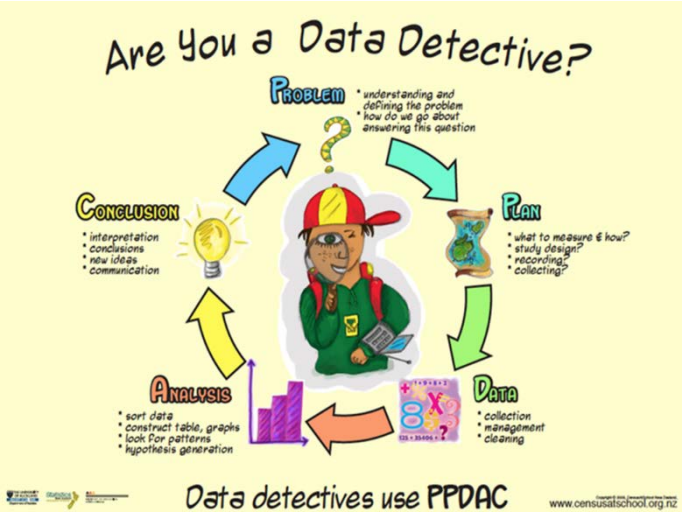


Figure 1: Data detectives use the PPDAC data investigation cycle (www.censusatschool.org.nz).

A typical example from our EDA studies is brought from a ten-hour experiment with second graders. The students studied data they had collected on the baby teeth lost by children in kindergarten to grade 3. The students were capable of making sense of the problem, the data

collection and the organization of the sample data in appropriate inscriptions, some more concrete with names (Fig. 2) and some more abstract (Fig. 3). To develop and deepen their statistical reasoning, we used the growing sample strategy and "what if" questions. Further details will be given during the lecture.

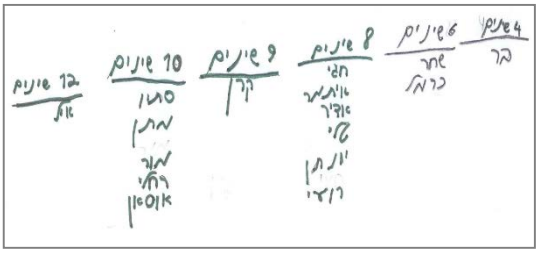


Figure 2: An inscription of baby teeth lost in grade 3.

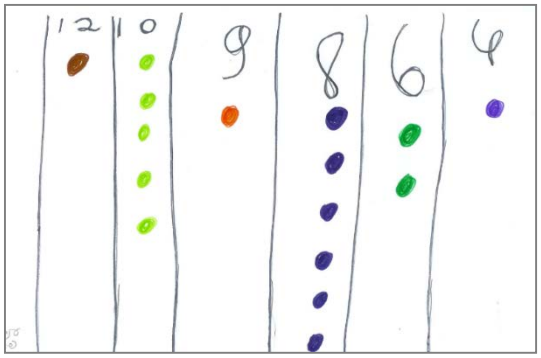


Figure 2: A graph of baby teeth lost in grade 3.

The main challenges identified in students' statistical reasoning during years of study in the EDA learning environment were: a) global (aggregate) views of data versus local (pointwise) views of data (Ben-Zvi & Arcavi, 2001); b) seeing the signal in the noise (Konold & Pollatsek, 2002); c) distribution as an entity (Ben-Zvi & Amir, 2005). Furthermore, we felt that doing statistics without inference misses the main idea and goal of the discipline. We searched for ways to bring statistical inference to the center of the educational arena.

Informal Statistical Inference (ISI)

One ultimate goal and use of statistical reasoning is to enable students to make sound statistical inferences. A statistical inference is a probabilistic generalization, based on data, about a phenomenon under investigation. More specifically, a statistical inference is a statement about a population or process, which is inferred from a sample, along with an explicit level of confidence. Researchers in statistics education have been studying the foundations of students' reasoning about statistical inference for several years (Garfield & Ben-Zvi, 2008, pp. 261–288). More recently, they have focused on students' use of informal statistical inference in shaping these foundations (e.g., Pratt & Ainley, 2008).

While several definitions have been offered for informal statistical inference, its meaning is still fairly ambiguous. Makar and Rubin (2009) identified three features of both an informal and formal statistical inference: (a) a statement of generalization "beyond the data," (b) use of data as evidence to support this generalization, and (c) probabilistic (non-deterministic) language that expresses some uncertainty about the generalization. Makar, Bakker and Ben-Zvi (2011) explained that the word informal is used to "a) make it clear that statistical inference is a broader concept than what is typically presented as hypothesis testing or estimation in an introductory statistics course; and b) emphasize that students are not expected to rely on formal statistical measures and procedures to formulate their inference" (p. 153). This attribution of informality agrees with studies of learning, which highlight the

importance of informal, situated, and contextually rich instructional activities for supporting development of more formal knowledge (e.g., Hershkowitz et al., 2002).

Overall, students tend to have more difficulty with formal ideas of statistical inference than almost any other statistical concept (see Garfield & Ben-Zvi, 2008 for a summary of the research on this topic). We thought that informal inferential reasoning (IIR) may be an important goal on its own, especially with young children. Thus, following these ideas, we have moved in the Connections project from focusing mainly on EDA to focusing on a combination of EDA and ISI. Students drew informal inferences from real samples they had collected and investigated, and made informal inferences about a larger population.

One example that will be elaborated during the lecture is a pair of sixth grade students (age 12) studying the question, "How far do sixth and seventh graders jump?" To respond to this question, they analyzed several graphs of random samples taken from an unknown population of six and seventh graders in their school (an example of such a graph is shown in Fig. 4). A typical informal inference they made was, "based on these samples, it is possible to infer that six graders usually jump farther then seventh graders."

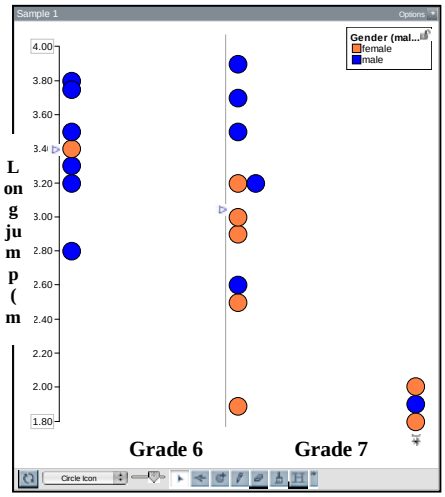


Figure 4: Long jump by grade (color indicates gender, and the blue triangles indicate the mean values).

Guiding students along a continuum from the informal to the formal reasoning may be an effective way of helping them build better foundations of statistical inference (e.g., Garfield & Ben-Zvi, 2008). However students faced many challenges in the study of ISI: a) integration of data and chance ideas; b) quantifying uncertainty using probabilistic language; and c) understanding sample-population relations. To address these challenges we have sought a new direction by integrating data modeling in the ISI learning trajectory.

Modeling

To foster students' appreciation of the power of their informal inferences, a model-based perspective has recently been added to the Connections learning trajectory, in which students build a model (a probability distribution) for an explored (hypothetical) population, and produced data of random generated samples from their model using TinkerPlots.

An Integrated Modelling Approach (IMA) was developed to guide the design and analysis of a learning trajectory aimed at supporting students IIR (Manor & Ben-Zvi, forthcoming). It

is comprised of data and model worlds to help students learn about the relationship between sample and population. The data world is designed to foster in sample reasoning and the model world is designed to foster between samples reasoning.

In the data world, students collect a real sample by a random sampling process to study a particular phenomenon in the population. In this world, students choose a research theme, pose questions, select attributes, collect and analyze data, make informal inferences about a population, and express their level of confidence in the data. However, they may not account for probabilistic considerations, such as the chance variability that stems from the random sampling process.

In the model world, students build a model (a probability distribution) for an explored (hypothetical) population and generate random samples from this model. They study the model and the random process that produces the outcome from this model. The details vary from sample to sample due to randomness, but the variability is controlled. Given a certain distribution of the population, the likelihood of certain results can be estimated.

In the IMA learning trajectory, students iteratively create connections between the two worlds by working on the same problem context in both worlds and by using TinkerPlots, which includes a "Sampler" that allows learners to design and run probability simulations to explore relationships between data and chance, by means of one technological tool.

Our hypothesis is that the IMA can support students' development of reasoning with uncertainty when making ISIs by experimenting with transitions and building connections between the two worlds. Two main features of the IMA that may support students' reasoning with uncertainty are: 1) working on the same problem context in both worlds; 2) the support of the researcher's guiding questions (e.g., what is the minimal sample size needed to draw conclusions about the population with certain confidence, or "what if" questions on optional real data results while exploring model generated random samples).

By analyzing generated random samples and comparing them with the suggested model, students can learn about the relationships between samples and populations. However students face many challenges in this reasoning process. Further details shall be provided in the lecture.

DISCUSSION

The goal of this article was to follow the development of an experimental curriculum that aimed at developing young students' statistical reasoning. We have started from the pedagogical model of data analysis (EDA), in which the emphasis is on exploring authentic real data at hand. We have moved to the ISI paradigm, in which the relationship between sample and population is emphasized while making informal statistical inferences. The goal was to tighten the relations between data and chance (statistics and probability), but we concluded that a third paradigm had to be added, data modeling, to enable students better achieve this goal. Thus a new design emerged (IMA) that integrated reasoning about models and modeling with reasoning about inference.

The three paradigms, EDA, ISI and Modeling, present the progress we made in our study and theory of developing young students' statistical reasoning in the Connections project. Conceptually, we strive for better understanding of young students' abilities to develop statistical reasoning. We show the power of informal ideas of statistics in building students' conceptual basis for future development in their studies at later age. Pedagogically, we wish to develop sound design ideas for a learning environment that changes the way we treat the what (content), the how (pedagogy), and the assessment methods.

A learning environment perspective (Ben-Zvi, Gravemeijer, & Ainley, forthcoming) can guide statistics educators and researchers to view, design and assess statistics teaching and learning. A learning environment is a complex and dynamic educational system, composed of multiple factors: key statistical ideas and skills (content), engaging tasks, real or realistic data sets, technological tools, classroom culture including modes of discourse and argumentation amongst students and between students and teachers, norms and emotional aspects of engagement, and assessment methods. Integrating all these factors in order to reform the way statistics is learnt and taught is a challenging endeavor. A learning environment perspective can support the intentional transformation of an educational setting based upon conjectures about how the integration of features of the designed setting will support learning statistics.

The field of statistics education faces nowadays many complex challenges worldwide. Some of them are "classical": Poor teachers' statistical knowledge, lack of appropriate curricular materials and time at all age levels, shortage of technology and access to data and resources, and more. Recent developments in the emerging discipline of *data science* establish new kinds of challenges regarding the goals of statistics education, the interdisciplinary nature of our discipline, the need to develop new and free technology for schools everywhere, and more. Current research in statistics education must consider these new challenges, and be open to new themes, such as, data science in school, data science in future learning spaces, and data science in citizen science. I hope that these new directions will help us better prepare our school students to the information-based society of the 21st century.

References

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools.* Utrecht, the Netherlands: CD Beta Press.

Ben-Zvi, D. (2006). Scaffolding students' informal inference and argumentation. In A. Rossman and B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* (CD-ROM), Salvador, Bahia, Brazil, July 2006. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Ben-Zvi, D., & Amir, Y. (2005). How do primary school students begin to reason about distributions? In K. Makar (Ed.), *Reasoning about distribution: A collection of current research studies* (Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy, SRTL4), University of Auckland, New Zealand, July, 2005. Brisbane: University of Queensland.

Ben-Zvi, D., & Arcavi, A. (2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational Studies in Mathematics*, 45, 35-65.

Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 44(7), 913-925.

Ben-Zvi, D. & Ben-Arush, T. (2014). Exploratory data analysis instrumented learning with TinkerPlots. In D. Frischemeier, P. Fischer, R. Hochmuth, T. Wassong and P. Bender (Eds.), *Using tools for learning mathematics and statistics* (pp. 193-208). Springer.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. In D. Ben-Zvi and J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers/Springer.

Ben-Zvi, D., Gil, E., & Apel, N. (2009). Creativity in learning to reason informally about statistical inference in primary school. In R. Leikin, A. Berman and B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 325-344). Rotterdam: Sense Publishers.

Ben-Zvi, D., Gravemeijer, K., & Ainley, J. (forthcoming). Design of statistics learning environments. In D. Ben-Zvi, K. Makar, and J. Garfield (Eds.), *International handbook on research in statistics education*. Springer

Bielaczyc, K., & Collins, A. (1999). Learning communities in classrooms: a reconceptualization of educational practice. In C. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional-design theories and models: A new paradigm of instructional theories* (Vol. II, pp. 269-292). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, 23(7), 13-20.

Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, 10(3).

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review*, 75(3), 372-396.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: connecting research and teaching practice*. Springer.

Gil, E., & Ben-Zvi, D. (2011). Explanations and context in the emergence of students' informal inferential reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 87-108.

Gil, E., & Ben-Zvi, D. (2014). Long term impact of the connections program on students' informal inferential reasoning. In K. Makar, B. de Sousa, and R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education* (Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics, ICOTS9, July 2014). Voorburg, The Netherlands: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute. (An IASE excellence award for best paper by an early career author at ICOTS9.)

Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Schwarz, B., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., et al. (2002). Mathematics curriculum development for computerized environments: A designer–researcher–teacher–learner activity. In L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 657–694). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Konold, C. & Miller, C.D. (2011). *TinkerPlots: Dynamic Data Exploration* (Version 2.0) [Computer software]. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Konold, C., & Higgins, T. (2003). Reasoning about data. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, and D.E. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.193-215). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Konold, C., & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as the search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(4), 259–289.

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 152-173.

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82–105.

Manor, H., & Ben-Zvi, D. (forthcoming). Design for reasoning with uncertainty in informal statistical inference. In G. Burrill and D. Ben-Zvi (Eds.), *The teaching and learning of statistics* (Vol. II). Springer.

Moore, D.S. (1998). Statistics among the liberal arts. *Journal of the American Statistical Association*, 93(144), 1253-1259.

Pratt, D., & Ainley, J. (2008). Introducing the special issue on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 3-4.

Sawyer, R. K. (2014). Introduction. In R.K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 1-18). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Shaughnessy, J. M., Garfield, J., & Greer, B. (1996). Data handling. In A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, and C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (Vol. 1, pp. 205-237). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Tukey, J. W. (1962). The future of data analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33(1), 1-67.

LA FUNCIÓN SOCIAL DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS: PLURALIDAD, TRANSVERSALIDAD Y RECIPROCIDAD

Francisco Cordero
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México

Resumen: El docente de matemáticas, como homo academicus, vive en desventaja disciplinar y social. No es claro quién lo forma. Se debate la materia de su formación. No hay acuerdos definitivos. La indefinición de su formación pone al docente en un terreno de sometimiento por el discurso matemático escolar; en consecuencia se adhiere a éste y se niega a trastocarlo. Pero trastocarlo es condición sine qua non para lograr una transformación profunda de la formación del docente. Una esperanza es que el docente en matemáticas construya una identidad disciplinar, cuya fuente de sentido sea la construcción social del conocimiento matemático, la cual definirá su función social y se valorará la pluralidad, la transversalidad y la reciprocidad del saber matemático. Programas permanentes con estas consignas serán los instrumentos de resistencia del aciago discurso matemático escolar. Pero también habrá que preguntarse: ¿Cuáles son los multifactores y estadios de la función del docente para alcanzar un equilibro entre el desarrollo disciplinar de la matemática educativa y el desarrollo profesional docente?

Función del docente, socioepistemología, transversalidad, programa permanente, alianza con el docente.

INTRODUCCIÓN

Educar, en términos llanos, quiere decir que una sociedad se beneficia porque valoriza la realidad: la educación acerca al ciudadano a su realidad para entenderla y transformarla. Los programas educativos orientan sus contenidos para dirigirse a ese objetivo. Siendo así, la educación matemática, en todos los niveles educativos (básico, medio superior y superior), deberá rendir cuentas de la realidad con el que aprende. Sin embargo, el conocimiento matemático, en un sentido epistemológico, en su génesis está vinculada con la realidad; desafortunadamente esta relación no se cumple en la educación. La matemática escolar no está vinculada con la realidad del que aprende. Por ejemplo, en la ciencia de la ingeniería una realidad puede ser el comportamiento de una partícula en un campo electromagnético; el modelo de conocimiento que se genere al respecto responderá a los intereses disciplinares de alguna ingeniería, pero una realidad en la clase de matemáticas no es nada claro: llevar la matemática a la realidad del estudiante y todavía más impactante crear ambientes de la matemática de todos los días, son consignas que no se han podido llevar a cabo cabalmente. La propuesta es sensata, pero choca con nuestra realidad educativa. La matemática escolar, en nuestros días, no está hecha para tal fin: ha perdido el eslabón con la realidad (Cordero, 2016b).

Pero si se habla de realidad, sostenemos, habrá que restringirla para estandarizarla a la educación matemática: se deberá considerar todos los niveles educativos y la diversidad de disciplinas, así como el trabajo y la ciudad. La realidad deberá ser interpretada en lo habitual de todos estos escenarios, donde se expresan usos rutinarios del conocimiento matemático: lo funcional. Es decir; los cotidianos del disciplinario, del trabajador y del ciudadano

deberán ser el marco de referencia para que la matemática escolar recupere el eslabón con la realidad (Cordero, 2016b y Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

PROBLEMÁTICA DE LA EDUCACIÓN DE LA MATEMÁTICA Y LATINOAMÉRICA

Diferentes fuentes ofrecen datos reveladores del Sistema Educativo Nacional (SEN) (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2007) que de alguna manera caracterizan o componen un marco de referencia del sistema educativo mexicano y que pudiera extenderse a cualquier sistema educativo latinoamericano. Por ejemplo, en números redondos, en todo el SEN existen 32 millones de estudiantes distribuidos en los diferentes niveles educativos de la siguiente manera: en el Nivel Básico, un 80%, en el Nivel Medio Superior, un 12% y en el Nivel Superior, un 10%. Lo que significa que de los 15 millones de niños y niñas que entran a la primaria sólo llegan a estudios universitarios 2.4 millones. Además, se sabe que de cada 100 niños y niñas que ingresan a la primaria, cinco terminan una carrera universitaria; de esos egresados, uno es administrador de empresas, otro es abogado, uno más economista, y como medio ingeniero, medio médico. Ninguno de esos cinco estudia física, matemáticas o biología. Otro dato revelador indica que existe una deformación cultural respecto del papel de la ciencia entre la mayoría de la población. La sociedad en sí considera que la ciencia está alejada de la vida cotidiana (Cordero, 2015). Lo que se hace en la ciencia no tiene nada que ver con lo que sucede en la sociedad (Seminario sobre Divulgación de la Ciencia y la Tecnología, 1999).

Todo ello, junto con los aspectos políticos y económicos del país, conlleva una falta de cohesión e inequidad social: por un lado, la disminución notoria del flujo de población estudiantil de la primaria a la universidad y por otro, la selección raquítica de carreras científicas de la población que logra terminar sus estudios universitarios, de alguna manera, expresan una pérdida de valor al conocimiento, así como una educación desigual. Esta es la problemática educativa que los niños y niñas viven en la sociedad, y así se desarrollan en su cotidiano. Habrá que también decirlo: así aprenden, o no, matemáticas.

Para contrarrestar esa falta de cohesión social y esa inequidad, se requiere necesariamente trabajar más e intensamente en la *socialización del conocimiento*: donde se creen entornos de diálogos recíprocos entre el conocimiento escolar y la realidad de la gente (Gómez, 2015; Cordero, 2016b y Cordero et al., 2015). Se deben crear *programas permanentes simultáneos recíprocos* con el desarrollo de la ciencia y el desarrollo de la educación que contribuyan directamente a la construcción de una sociedad de conocimiento (Cordero, 2015). Cualquier programa educativo tendrá que estar articulado a este hecho. Lo funcional y lo cotidiano son elementos insoslayables en los estudios de socialización puesto que expresan el conocimiento y el ambiente propio del ciudadano; la dialéctica entre el saber académico y el nativo: el de la gente (Cordero, 2016b y Cordero et al., 2015).

Las investigaciones educativas, en términos genéricos, donde la socialización juega un papel central, inevitablemente, dimensionan la problemática: en definitiva los episodios de aprendizaje del estudiante en el aula tendrán que *ampliarse al cotidiano de la gente* en la

institución y en la sociedad como un referente educativo y la *función del docente*[1] deberá *mantener los entornos* donde suceden sistemas de relaciones recíprocas de la matemática escolar y de la realidad del que aprende en situaciones específicas del conocimiento.

EL SUJETO OLVIDADO Y LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Cantoral (2013) provee de fundamentos a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, a través de formular el programa de investigación propio de la naturaleza de la teoría. Éste consiste en explicar *el enigma de la construcción social del conocimiento matemático y de la difusión institucional.* Un constructo medular es la práctica social, el cual en un sistema complejo de procesos de dimensión social se problematiza el saber matemático, considerando el saber sabio, culto y popular para sintetizarlo en la sabiduría humana.

La perspectiva teórica se ha valido de un centenar de investigaciones realizadas desde hace un poco más de dos décadas por una comunidad de socioepistemólogos, con diferentes generaciones. Cordero (2016a) considera que el constructo práctica social, en la evolución y desarrollo de la Teoría Socioepistemológica a la luz de las investigaciones, ha provisto de un significado que considera en la problemática hay un sujeto olvidado y que es fundamental recuperar. Esta tesis tiene diferentes expresiones: la realidad, el cotidiano, los usos del conocimiento, y en términos más genéricos la gente (Cordero et al., 2015).

Con esta tesis formula un *Programa Socioepistemológico* llamado *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes* (Cordero, 2016a y 2016b). El objetivo principal consiste en revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente: en la escuela, en el trabajo o la profesión y en sus realidades. A través de dos líneas de trabajo simultáneamente: la Resignificación del Conocimiento Matemático y su Impacto Educativo. En la primera se problematizan las categorías de conocimiento matemático que suceden en las comunidades entre diferentes dominios de conocimiento que obligadamente entran en juego: el discurso matemático escolar, el campo disciplinar y el cotidiano de la comunidad. Y en la segunda se conforman los multi-factores y estadios que coadyuvan a la alianza de calidad de la docencia de matemáticas.

Las principales preguntas de investigación del Programa consideran los siguientes cuestionamientos: ¿Cuál es el estatus epistemológico de la funcionalidad del conocimiento matemático con situaciones específicas en los entornos de la gente? ¿Cuáles son las ampliaciones de los episodios de aprendizaje en el aula cuando se recupera al sujeto olvidado? ¿Cuáles son los multi-factores fundamentales que formulan el nuevo programa permanente de calidad para la función del docente de matemáticas?

[1] El constructo función cada vez está alcanzando mayor precisión en nuestro programa socioepistemológico, sin embargo tiene un origen en el sentido de Gramsci: Los intelectuales y la organización de la cultura.

LA FUNCIÓN DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS. UNA ESPERANZA

El docente de matemáticas como *homo academicus* (en el sentido de Bourdieu (2012)) vive en desventaja disciplinar y, por ende, social. No es claro quién lo forma. Se debate, en la materia de la formación del docente de matemáticas, cuando se quiere precisar su disciplina. No hay acuerdos definitivos, se cuestiona si la disciplina es la pedagogía o la matemática o ambas. Y más aun en países como los nuestros hay *docentes de matemáticas sin formación docente*.

La indefinición de su formación pone, al docente, en un terreno de sometimiento por el discurso matemático escolar y en consecuencia se adhiere a éste, es incapaz de (o no quiere) trastocarlo. Pero trastocarlo es condición *sine qua non* para lograr una transformación profunda de la formación del docente (Cordero et al., 2015).

Una esperanza es que el docente en matemáticas construya una identidad disciplinar, cuya fuente de sentido sea la construcción social del conocimiento matemático. Programas permanentes con estas consignas serán los instrumentos de resistencia del aciago discurso matemático escolar, donde *la función docente mantendrá la autonomía*.

Entonces la función del docente de matemáticas deberá, como lo mencionamos con anterioridad, *mantener los entornos* donde suceden sistemas de relaciones recíprocas de la matemática escolar y de la realidad del que aprende en situaciones específicas del conocimiento, pero para lograr el mantenimiento se tendrá que trastocar el conocimiento matemático escolar acompañado de diferentes líneas: la problematización del saber matemático escolar (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2015); los usos del conocimiento de la gente (Cordero, 2016b; Mota y Cordero, 2016; Yerbes, 2016; Opazo y Cordero, 2016; Medina y Cordero, 2016; Mendoza y Cordero, 2015; Pérez-Oxté, 2015; y Pérez, 2012); y en términos más genéricos: la matemática como una actividad humana, la matematización desde contextos, y matemáticas para todos los estudiantes (Freudenthal, 1968).

PROGRAMA DE INVESTIGACIÓN Y LOS INSTRUMENTOS DE RECUPERACIÓN

No se pretende proponer una nueva metodología de aprendizaje ni una nueva reforma de la formación del docente en matemáticas. Nuestro objetivo principal es, por una parte, presentar un marco de referencia desde el conocimiento nativo del sujeto que aprende; del sujeto que usa su conocimiento matemático en su profesión; y del sujeto que usa su conocimiento matemático para vivir en su sociedad. Y, por otra parte, presentar los procesos por los cuales se pondrá en diálogo, horizontal recíproco, entre el marco de referencia, los modelos educativos y la formación del docente.

Cabe señalar que ese marco de referencia y ese diálogo horizontal recíproco son inexistentes en el sistema educativo, por lo que habrá que constituirlos. Para alcanzar esta encomienda se requiere trastocar la epistemología dominante de la matemática escolar; tiene que abrirse a la pluralidad epistemológica que obliga la inclusión del “sujeto olvidado”. Este sujeto usa su conocimiento matemático en formas y funciones distintas que la escuela, hasta hoy, no ha podido imaginarse. Por eso decimos que esa constitución derivará en una escuela ampliada donde el uso del conocimiento matemático dialogará horizontalmente entre el

descubrimiento académico y la revelación del conocimiento nativo de la gente. Este último, en términos genéricos, es el sujeto que aprende, el que trabaja y el que vive en una ciudad; sin embargo, está fuera de la escuela.

Tal vez por eso, las representaciones sociales del conocimiento matemático de la niñez y de la juventud escolar, mujeres y hombres, admiten que la matemática está alejada de la realidad. Las relaciones entre la obra matemática, la matemática escolar y la matemática del cotidiano, no son nada claras en los programas educativos de las sociedades. La pérdida de valor del conocimiento matemático y la desigualdad educativa (porque solo unos cuántos pueden aprender matemáticas), sigue acrecentándose. Sin duda tenemos que hacer algo.

Nuestro programa de investigación, el cual de aquí en adelante le llamaremos un *Programa Socioepistemológico*, consiste de tres ejes: la educación , la investigación y la intervención.

Una sociedad de conocimiento consiste en valorar el conocimiento y ponerlo en equidad, es decir; que la sociedad crea en éste y le sirva para desarrollarse; para vivir mejor. El elemento primordial para tal fin, en nuestro caso, es la función del conocimiento matemático. Requerimos estudiarla, conocerla y hacer explícito el marco de referencia. Con ello recuperaremos al sujeto olvidado y en consecuencia se ampliará la matemática escolar. Así, deberemos poner atención a los procesos de socialización del conocimiento y reformular los programas de la educación matemática acordes con las sociedades en cuestión.

La investigación deberá hacerse de constructos, cuya naturaleza sustenten la función del conocimiento. Habrá que crear una fuente de sentido para tal fin. Los estudios tendrán que ser orientados hacia la transversalidad del conocimiento para conocer la resignificación de la matemática en la escuela, el trabajo y la ciudad. Cada vez avanzar en la conformación de una caracterización de la funcionalidad de la matemática, es decir; identificar las categorías de uso del conocimiento matemático en situaciones específicas, pero, en términos genéricos, en el cotidiano de la gente.

En síntesis, formular una pluralidad epistemológica compuesta por la funcionalidad, la resignifcación y la transversalidad del conocimiento matemático; la matemática adquirirá nuevas expresiones acorde a la gente. A esta categoría del conocimiento, de aquí en adelante, le llamaremos *lo matemático*.

La intervención en la problemática consistirá en crear instrumentos de recuperación que pongan en diálogo horizontal la matemática escolar y la matemática del cotidiano. Habrá que crear metodologías propias para tal fin. Un debate disciplinar natural consistirá en la articulación de estas dos matemáticas. La primera es la institucionalización de la matemática y la segunda es la funcionalidad de la matemática. Esta última generará un constructo de naturaleza etnográfica, debido a que requerimos de la matemática funcional propia de la gente con su ámbito específico. Por la importancia de este hecho, metodológicamente le llamaremos *la revelación matemática del nativo*; con el cual analizaremos *lo matemático* de la escuela, del trabajo y de la ciudad. La especificidad del ámbito estará definida por los usos permanentes de la gente y por el mantenimiento del ámbito. Se distinguirán los ámbitos y definirán cotidianos con adjetivo. Estos serán los instrumentos de recuperación.

La articulación entre lo institucional y lo funcional consistirá en romper la centración del objeto. Las nuevas argumentaciones corresponderán a las resignificaciones de los usos del conocimiento matemático, las cuales tensarán las orientaciones clásicas de resolución de problemas en contra parte de una orientación innovadora, la modelización. La primera se ha preocupado por los procesos del conocimiento, la segunda llama la atención sobre la funcionalidad del conocimiento.

En resumen; el meollo de la problemática de la educación matemática consiste en la tesis del sujeto olvidado, por ende habrá que constituir una esperanza: recuperarlo.

CONCLUSIONES

Al docente de matemáticas no lo podemos ver más como un ente carente de conocimiento, quien necesita de programas de formación para cubrir sus vacíos. Es necesario entenderlo como una comunidad de conocimiento matemático que construye sus categorías matemáticas propias de su entorno normadas por las relaciones recíprocas entre el conocimiento de la escuela y la realidad.

La disciplina Matemática Educativa, con sus Programas de Investigación, deberá jugar un papel protagónico fundamental, para tal fin, que oriente las articulaciones necesarias en tres grandes acciones: *alianza, inmersión y reciprocidad* con las comunidades de la docencia de las matemáticas en todos los niveles educativos (ver figura 1).

Estas acciones deberán estar en el tenor de los momentos sociales y económicos que vive el mundo, y acordar comunitariamente (donde participen todos los grupos de investigación y de la docencia) estrategias que pongan en el mismo estatus académico y social la formación de investigadores de nuestro campo disciplinar y la profesionalización docente de todos los niveles educativos. Las acciones y estrategias deberán transformarse a la idea concreta “alianza de calidad con la docencia del sistema educativo”, la cual ayudará a precisar la pertinencia del nuevo programa de desarrollo y el impacto educativo de la matemática.

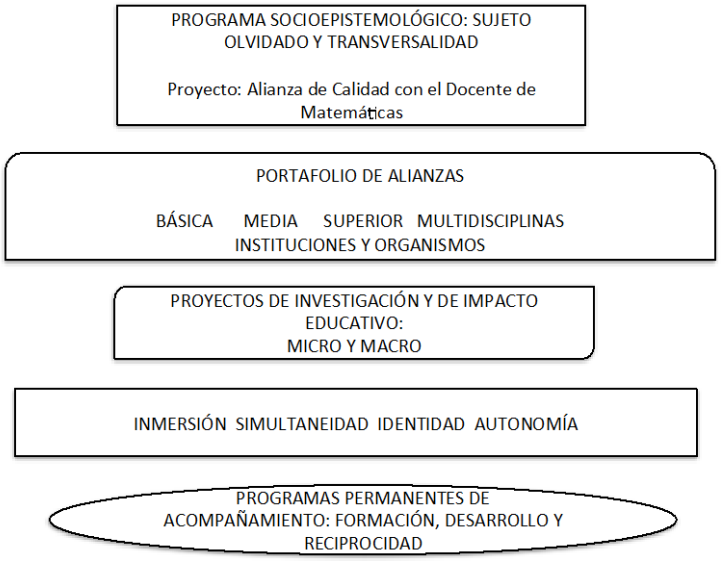


Figura 1. Programa permanente simultaneo recíproco: la función del docente de matemáticas.

Será necesario crear portafolios de alianza con cada uno de los niveles educativos (Básica, Media y Superior) e Instituciones y Organismos, con proyectos de investigación y de impacto, micro y macro; acompañados de programas permanentes multifactoriales (identidad, inclusión, socialización, emancipación): centrado en el constructo diálogo recíproco entre el aula y la realidad, en estadios: desventaja, esperanza, posible y autonomía. Las *transversalidades de los saberes matemáticos* serán los nuevos estatus epistemológicos.

Estos *programas son sistemas* que favorecen la funcionalidad del conocimiento matemático, donde suceden pluralidades, transversalidades y la consideración del otro. Deberán ser *programas propios* de las comunidades de conocimiento, donde suceden reciprocidades entre la matemática y las realidades; categorías de conocimiento íntimas de esas comunidades que más tarde se convierten en jergas disciplinares; y localidades que expresan los movimientos sociales, políticos y culturales.

La inmersión con las Comunidades de Conocimiento Matemático coadyuvará a la alianza de calidad de la docencia de matemáticas puesta en equilibrio con el desarrollo de la disciplina de la matemática educativa.

Referencias

Bourdieu (2012). *Homo Academicus*. Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2015). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116.

Cordero, F. (2016a). *Profesionalización docente. Funcionalidad de la Matemática Educativa. Programa permanente*. Seminario de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (2016b). Modelación, funcionalidad y multidisciplinaridad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (59-88). Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2015). *La ciencia desde el niñ@. Porque el conocimiento también se siente*. Primera Edición. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8. X in Mathematics, 12, 133-150

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la Ingeniería Agrónoma*. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2007). Panorama Educativo de México 2007. Indicadores del Sistema Educativo Nacional. [Extraído el 12 de abril de 2008 de: http://www.oei.es/pdfs/panorama_educativo_mexico2007.pdf].

Medina, D. y Cordero, F. (2016). *Desarrollo profesional docente en matemáticas y la inclusión en la construcción social del conocimiento*. Trabajo presentado en XXX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Monterrey, México.

Mendoza, J. y Cordero, F. (2015). *Matemática funcional en una comunidad de conocimiento. El caso de la estabilidad.* 1-14. Memorias del III Coloquio de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. México

Mota, C. y Cordero, F. (2016). *Elementos para la formación del docente en matemáticas*. Trabajo presentado en XXX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Monterrey, México.

Seminario sobre Divulgación de la Ciencia y la Tecnología (1999). Primer seminario sobre divulgación de la ciencia y la tecnología. Auditorio Bruno Mascanzoni, México, D.F., enero. Instituto Mexicano del Petróleo

Opazo, C. y Cordero, F. (enviado para su publicación). El rol de la identidad disciplinar en la función social del docente de matemática. *Formación de Profesores de Matemáticas en Chile*. Universidad de los Lagos.

Pérez-Oxté, I. (2015). *Los usos de la gráfica en una Comunidad de Ingenieros Químicos Industriales en Formación. Una base para el diseño de una situación de aprendizaje*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Pérez, R. (2012). *Usos de la oralidad numérica Ñuu savi*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Yerbes J. (2016). *El rol de los constructos Cotidiano y Matemática Funcional en la Matemática Educativa: sus diversidades ontológicas y epistemológicas*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

TAREAS PARA ALUMNOS Y TAREAS PARA LA FORMACIÓN: DISCUTIENDO EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR Y DEL FORMADOR DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Miguel Ribeiro
Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Brasil

Resumen: Para la mejora de los aprendizajes de los alumnos se necesita un cambio en la práctica del profesor que solo será posible con una mejora de la formación de profesores. Asumiendo la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas, y su complementariedad con respecto al conocimiento de los alumnos (matemático y didáctico), el conocimiento del formador de profesores tiene también sus especificidades y particularidades con relación al del profesor. Por otro lado, las tareas asumen una importancia central en el desarrollo de la actividad matemática en la clase, de ahí que se configuren también como un elemento nuclear en (y para) el desarrollo del saber matemático (conocimientos, capacidades,…) de alumnos, profesores y formadores de profesores. Teniendo como punto de partida tareas "típicas" para alumnos, este artículo discute algunos aspectos del conocimiento especializado del profesor para interpretar y atribuir significado (matemático) a respuestas de alumnos, y el conocimiento especializado del formador de profesores para conceptualizar dichas tareas y atribuir significado a las respuestas de los profesores.

Tareas matemáticas; conocimiento matemático especializado del profesor; conocimiento matemático especializado del formador de profesores; racionales

INTRODUCCIÓN

A pesar de los cambios curriculares ocurridos con frecuencia (probablemente demasiada – a cada cambio de gobierno – y muchas veces sin evidencias que lo justifiquen), esos cambios no han producido resultados prácticos en el sentido de la mejora de los aprendizajes de los alumnos, ya que resultados de las investigaciones en Educación Matemática continúan poniendo de relieve las mismas áreas problemáticas que hace 20 o 30 años (e.g., Geometría, Estadística, demonstración, operaciones, resolución de problemas – Kammi & Dominick, 1998).

De entre la diversidad de perspectivas existentes, algunos consideran que la mejora de los resultados de los alumnos solo será posible si ocurre un aumento del número de horas de matemática en las escuelas, mientras que otros asumen que esa mejora solo podrá ocurrir si a los alumnos se les solicita que resuelvan una cantidad substancial de ejercicios de cada tipo. La perspectiva que asumo es substancialmente distinta. Sustentado en resultados de la investigación enfocada en los procesos de aprendizaje de los alumnos, en los factores que influencian dichos aprendizajes, en la práctica del profesor e en el conocimiento del profesor que enseña matemática (e.g., Carrillo et al., 2013; Ribeiro & Carrillo, 2011), asumo que la mejora de los aprendizajes matemáticos de los alumnos se sustenta en la mejora de la práctica del profesor y de su conocimiento. En ese sentido, mejorar los aprendizajes de los alumnos no se relaciona con la cantidad de horas de matemática o de ejercicios resueltos,

sino con la calidad de la matemática explorada, con los objetivos matemáticos perseguidos y con las formas en que esa matemática es explorada con los alumnos (oportunidades de aprendizaje facultadas), dejando "la puerta abierta" para aprendizajes futuros.

Para esa mejora dos elementos son esenciales: las tareas que se preparan y discuten con los "resolutores" y el conocimiento del profesor. Estas tareas se pueden considerar desde la perspectiva de reproducción (asociada a conocer un conjunto de procedimientos para obtener la respuesta esperada), hasta tareas que tienen por objetivo contribuir para que los alumnos aprendan matemática entendiendo lo que están haciendo y por qué lo están haciendo. Esa centralidad de las tareas se justifica también porque "*lo que los alumnos aprenden es en gran parte definido por las tareas que les son dadas*" (Hiebert & Wearne, 1993) y se asocia tanto a las formas como son exploradas cuanto, fundamentalmente, a los objetivos matemáticos asociados, lo que pretenden alcanzar en el contexto que exploran, asumiendo la naturaleza de la propia tarea como un lugar destacado en la operacionalización de dichos objetivos. De forma asociada el profesor, y su conocimiento, corresponde al factor que más impacto posee en los resultados (y aprendizaje) de los alumnos (Nye, Konstantopoulos, & Hedges, 2004). Así, el conocimiento que el profesor tiene, o asume tener (Ribeiro & Carrillo, 2011), da forma a las tareas (foco, objetivo, naturaleza) y a los modos en que dichas tareas son exploradas (calidad matemática) con los alumnos, moldeando, a su vez, los modos en que los alumnos consideran la matemática y su enseñanza.

Considerando la centralidad del profesor y de su conocimiento en y para los aprendizajes de los alumnos, y el hecho de que ese conocimiento se considera especializado, se puede considerar un paralelismo entre ese papel del profesor y el rol (deseado) del formador de profesores y de su conocimiento en los aprendizajes (desarrollo profesional) del profesor. También, en la formación de profesores, las tareas conceptualizadas e implementadas (naturaleza y objetivos asociados) deberán asumir una centralidad en el desarrollo de los aprendices – no se considera un paralelismo (transposición) directo, ya que los objetos de trabajo (el foco del trabajo y los objetivos asociados), aunque se refieran a conocimientos y saberes, deberán ser necesariamente distintos (complementarios). Al ser especializado el conocimiento del profesor, también el conocimiento del formador se considera así, pero esa especialización se refiere a aspectos tanto más amplios cuanto profundos. De la misma forma que el profesor cumple con más que ser un "bueno alumno" de la etapa educativa en la que enseña (enseñará), también el formador de profesores cumplirá más que con ser un "bueno profesor", lo que implica que, al menos en parte, la naturaleza del conocimiento especializado en estos dos contextos deberá ser distinta.

En este artículo, teniendo como punto de partida un problema para alumnos de 6º grado en el ámbito de los racionales (cantidad no entera), se discuten algunos aspectos de las especificidades de las tareas que tienen como foco contribuir al desarrollo del conocimiento especializado del profesor (y en ultima instancia de los conocimientos y capacidades de los alumnos) y, de forma asociada, las particularidades del conocimiento especializado del

profesor que enseña matemática y del formador de profesores que enseñan (enseñarán) matemática[2].

BREVES APUNTES TEÓRICOS

Es relativamente consensuado que el conocimiento matemático de alumnos y profesores deberá ser distinto (complementario). En ese sentido, la formación de profesores deberá enfocarse en contribuir para desarrollar dichas complementariedades, que se refieren tanto a un conocimiento y capacidades matemáticas como didácticas. Esa formación deberá permitir desarrollar un conocimiento asociado, por ejemplo, a la articulación de diferentes aspectos de la matemática (elemental y avanzada) y de la historia de la matemática y de la educación matemática de modo que puedan proporcionar oportunidades de aprendizaje que contribuyan al desarrollo de un entendimiento de los por-qués matemáticos asociados a lo que se hace y por qué se hace a cada momento.

Partiendo de la idea de que al profesor no le basta solo "saber más matemática" o conocer un conjunto de estrategias "generales" para la enseñanza, el conocimiento del profesor que enseña matemáticas se considera especializado, tanto en términos del conocimiento matemático como didáctico del contenido, asumiendo la perspectiva del *Mathematics Teachers Specialized Knowledge–MTSK* (Carrillo et al., 2013). Esa especialización en el conocimiento matemático se refina asociada a cada una de las tareas centrales de enseñanza, siendo una de esas tareas de enseñanza el atribuir sentido y significado a las respuestas de alumnos (resolutores), demandando la movilización de lo que denominamos conocimiento interpretativo (Jakobsen, Ribeiro, & Mellone, 2014). Ese conocimiento sustenta el entender y atribuir significado a las respuestas, esencialmente a las que se encuentran fuera de nuestro propio espacio solución (y que no habían sido consideradas – su existencia o posibilidad) e, en ese sentido se encuadra en la dimensión matemática.

Atendiendo a la insuficiencia de que el profesor sea solo un buen alumno o el formador de profesores solo un buen profesor, se considera la existencia de especificidades en el conocimiento especializado de cada uno de estos agentes educativos. Una de las especificidades del conocimiento del formador de profesores, que complementa las del conocimiento del profesor, se refiere a la conceptualización y exploración de tareas que permitan, en simultáneo, desarrollar el conocimiento especializado del profesor y permitir que estos vivencien situaciones de la misma naturaleza que se espera puedan proponer a sus alumnos.

El objetivo de todas las tareas matemáticas deberá ser el de iniciar una actividad matemáticamente provechosa (Mason & Johnston Wilder, 2006), que contribuya al desarrollo de las habilidades y conocimientos de los resolutores. Dado que las formas, y objetivos asociados, de desarrollar esas habilidades y conocimientos depende de los diferentes aprendices (e.g., alumnos, profesores), las tareas para alumnos y para profesores son consideradas desde diferentes perspectivas, lo que implica tener en consideración las

[2] Uso la expresión "profesor que enseña matemática" y no "profesor de matemáticas" como forma de incluir de manera explícita los profesores de los años iniciales (Infantil y Primaria) que son profesores generalistas.

especificidades del conocimiento del profesor – cuando las tareas tienen por objetivo el desarrollo de dicho conocimiento. Así la conceptualización de tareas para la formación de profesores, que pretendan contribuir para desarrollar su conocimiento especializado, tiene que tener en cuenta la necesidad de que estas tareas tengan como punto de partida (y de llegada) situaciones basadas en la práctica y en los problemas/dificultades identificadas en esa práctica (del profesor y en relación con los aprendizajes matemáticas de los alumnos) – situaciones matemáticamente críticas.

Una de las aún muchas situaciones matemáticamente críticas en los aprendizajes de los alumnos y prácticas del profesor se refiere a los racionales (Newstead & Murray, 1998). En este texto, la discusión se hará alrededor de una tarea que tiene por objetivo desarrollar el conocimiento interpretativo del profesor, teniendo como punto de partida la atribución de sentido a respuestas de alumnos a un problema que involucra racionales. En particular se pretende explorar la relación compleja entre diferentes representaciones de un mismo numero racional, explorando diferentes formas equivalentes de representar una misma cantidad usando representaciones gráficas y numéricas.

FORMACIÓN DE PROFESORES DESARROLLANDO EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO

Este articulo tiene origen en trabajos que siguen una abordaje cualitativo e implican varios estudios de caso (instrumentales) – de profesores, futuros profesores y formadores de profesores de diferentes etapas educativas – desarrollados en diferentes contextos (desde Infantil a Universidad) y países (e.g., Brasil, Itália, Noruega, México, Chile). De forma asociada e imbricada se consideran tres focos de investigación (asociados a distintos temas, capacidades y competencias matemáticas) que se informan mutuamente y cuyos resultados contribuyen para guiar el recorrido conjunto a efectuar. Dichos focos se refieren a las dificultades de aprendizajes de los alumnos; el conocimiento especializado revelado por profesores y futuros profesores; y el conocimiento especializado del formador de profesores (nuestra propia práctica). Como elemento que relaciona los tres focos encontramos las tareas para alumnos y profesores (particularidades y especificidades de la naturaleza, tipo y forma para cada contexto especifico). Todos los momentos de recogida de datos (e.g., clases de los profesores; formación inicial y continua; entrevistas individuales y de grupo; grupos colaborativos) son grabados en audio y video y todas las producciones (de alumnos, profesores y formadores de profesores) son también colectadas.

El caso que se discute en este articulo se sitúa en la formación inicial de profesores (con datos de Brasil, Noruega e Itália) y se refiere a la conceptualización e implementación de una tarea que tiene por objetivo desarrollar el conocimiento interpretativo del profesor a partir de la atribución de sentido a respuestas de alumnos a un problema de un libro de texto de 6.º de primaria en Portugal, considerando como punto de partida una situación matemáticamente crítica para los alumnos. Considerando el contexto de implementación de la tarea (formación de profesores), la conceptualización ha tenido como punto de partida respuestas de estudiantes al problema inicial (Ribeiro & Jakobsen, 2012) y a partir de esas respuestas han sido seleccionadas las que tenían más potencialidades matemáticas – tanto en

términos de discutir los motivos matemáticos que podrían sustentar los errores como relacionadas con abordajes no-típicos/alternativos al problema.

La tarea propuesta está compuesta por dos partes: en la primera los profesores deben contestar al problema: *¿Qué cantidad de chocolate recibirá cada alumno si distribuimos equitativamente entre ellos 6 barras de chocolate?* (para sí mismos y no pensando en el contexto de la escuela); en la segunda, se solicita que atribuyan sentido a un conjunto de respuestas de alumnos al problema inicial discutiendo la validez y adecuación matemática y proveyendo de un *feedback* al alumno. Después de contestar a las dos partes de la tarea (en parejas) ocurre la discusión en gran grupo – que es grabada también en audio e video.

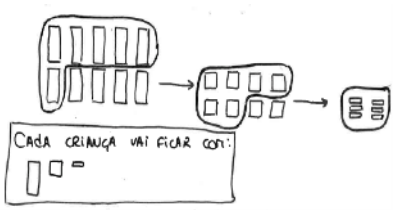


Figura 1: La respuesta de Mariana

La selección de las producciones de los alumnos a incluir en la tarea es algo central en la conceptualización de la propia tarea y de los objetivos que se persiguen. En ese sentido, es esencial analizar y discutir las elecciones efectuadas, mostrando las relaciones entre la representación grafica y el razonamiento matemático asociado, explorando posibles formas de navegar entre ellos[3]. En la solución elegida para incluir en la tarea, las cinco barras de chocolate están representadas por rectángulos e son consideradas divididas en 10 partes iguales. La primera parte encerrada en un círculo muestra la posibilidad de distribuir aquella cantidad de chocolate entre los seis alumnos (cada uno recibe ½ de una barra). La segunda división (de las cuatro mitades) muestra otra división en mitades (ocho partes iguales) siendo seis distribuidas como antes (una para cada alumno), correspondiendo a ¼ de la barra de chocolate. Al final, cada uno de los dos rectángulos pequeños (mitad de mitad) es dividido en tres partes que son encerradas en un círculo, mostrando la posibilidad de distribución entre los seis alumnos (1/3 del pedazo anterior). En la respuesta final los tres pedazos de chocolate son representados recurriendo solamente a dibujos, representando la respuesta correcta correspondiente a la cantidad de 5/6 (½+¼+1/12).

El análisis ha sido hecho en tres etapas: conocimiento de los futuros profesores asociado a resolver el problema propuesto; interpretaciones y argumentos al atribuir significado a las respuestas de los alumnos y el tipo (forma y contenido) del feedback; discusiones en grupo de las respuestas. El análisis se sustenta en la búsqueda de una más amplia comprensión de los motivos matemáticos que pueden sustentar las dificultades de los futuros profesores, considerando dichas dificultades como un punto de partida para la reflexión sobre el foco de la formación y de la propia práctica. Dicho análisis se sustenta en los subdominios del conocimiento especializado del profesor que enseña matemática (MTSK), en particular en

[3] En la tarea los profesores tienen de analizar siete producciones distintas, teniendo cada una sido seleccionada por se asociar a un determinado objetivo específico.

relación con los subdominios del contenido, ya que son estos los que dan forma al conocimiento interpretativo.

A partir de las discusiones de la tarea en gran grupo han emergido situaciones que permiten discutir algunas particularidades del conocimiento del formador de profesores en relación con el tema de los racionales pero, esencialmente, en relación con el propio sentido de la generalización, algo que no había sido contemplado en la selección de la resolución a incluir en la tarea.

CONOCIMIENTO DEL FORMADOR Y DEL PROFESOR

Uno de los objetivos asociados a la discusión del ejemplo presentado se refiere a la posibilidad de explorar las conexiones entre la representación pictórica y la correspondiente numérica y entre símbolos y sus referentes semánticos, trabajando la idea de composición operacional de número (en el sentido de Subramaniam y Banerjee, 2011).

Al contestar la primera cuestión de la tarea (resolver el problema propuesto) muchos futuros profesores aún presentan como respuesta elementos del conjunto de los enteros *(e.g., cada alumno se queda con cinco partes)*, lo que nos hace problematizar la propia formación que han tenido (tanto en el ámbito de la formación de profesores cuanto su formación como alumnos.

Otra respuesta común se torna problemática (por el razonamiento evidenciado) con relación al papel del todo (la unidad considerada) ya que para los futuros profesores lo importante es la representación numérica y no su significado *(e.g., 1/6 del chocolate)*. Esta solución se aproxima al tipo de solución anterior (en los naturales), pero con un ligero movimiento hacia la representación en fracción ya que la primera parte del razonamiento (explicitado en sus respuestas) es similar a lo que permite obtener como respuesta un numero natural (cada alumno se queda con cinco partes de un total de 30 partes de las barras de chocolate), pero la expande, considerando el papel del todo (que es la unidad) pero sin que ocurra una articulación con la situación específica, lo que implica presentar como solución *5/30=1/6*, obteniendo así una respuesta correcta pero que se sustenta en un razonamiento inadecuado.

Los dos ejemplos de respuestas anteriores (muchos otros podrían ser discutidos) llaman la atención para un tipo de responsabilidad del formador de profesores (parte esencial de su conocimiento especializado) que se relaciona con el provocar/obligar la ampliación del espacio solución de los (futuros) profesores (como mínimo saber obtener la respuesta adecuada en el conjunto correspondiente), asumiendo las tareas propuestas (tipo, naturaleza y objetivos) un lugar central en tornar efectiva dicha ampliación. Esta responsabilidad se asocia a un conocimiento sobre las dificultades de los profesores en cada uno de los temas específicos (que a veces son semejantes a las de los alumnos), pero se relaciona también con la necesidad de articulación entre aspectos de la matemática avanzada (frecuentemente de las asignaturas de matemática de la universidad) y la matemática elemental (denominada también de escolar) buscando erradicar este tipo de problemática, posibilitando que puedan aportar un *feedback* constructivo a sus (futuros) alumnos.

Con relación a la atribución de significado a las respuestas de los alumnos, solo un 10% de cada grupo de futuros profesores que han contestado a la tarea presentan un posible

razonamiento correcto para la respuesta de Mariana – esencialmente la descripción que se ha presentado anteriormente. Una vez más, la gran mayoría de los resolutores refieren no entender la solución presentada o la "evaluan" como incorrecta ya que no presenta valores numéricos *(e.g., no entiendo la resolución; la respuesta esta incorrecta ya que Mariana no presenta ninguno número; ella no entiende fracciones, solo esta dividiendo los rectángulos).* El hecho de que la respuesta presentada de Mariana se encuentre fuera del conjunto de respuestas esperado (espacio solución esperado) ha direccionado los comentarios de los futuros profesores para el ámbito general de cualquier respuesta, olvidando la matemática en discusión *(e.g., Mariana presenta muy buenas reflexiones; su forma de resolver el problema es "inteligente").* Este tipo de abordaje pone en evidencia su conocimiento sobre fracciones; sobre diferentes formas de representación de una misma cantidad, en el sentido de la composición operacional de número (Subramaniam & Banerjee, 2011); dificultades en salir de su propio espacio solución; sus creencias respecto del contenido matemático (fracciones) y de la propia resolución de problemas.

Estas evidencias llaman la atención para otro tipo de responsabilidad del formador de profesores (parte esencial de su conocimiento especializado) que se relaciona con el ampliar el ámbito de los conocimientos especializados del profesor para atribuir significado (y sentido) a las respuestas de los alumnos, incluyendo el ver y escuchar más allá de lo obvio, creando la génesis de una constante búsqueda de posibles formas distintas de responder a las situaciones, bien como de cuestiones potentes que podrán surgir (aunque en ese momento uno no las sepa contestar). Acá, en particular, ese conocimiento se relaciona con el leer también numéricamente una representación pictórica de cantidades no enteras en el contexto de la escuela básica, pero tener también en mente posibles conexiones entre esta representación pictórica y, por ejemplo, la representación decimal de una cantidad no entera (0,8(3)), aspectos de la historia de la matemática asociados a las relaciones con otros algoritmos de la suma o con los decimales infinitos periódicos o semiperiódicos.

Complementar lo que se había previsto en un primer momento enfocar con relación a la respuesta de Mariana, las discusiones (e.g., la gestión de la clase; el hábito de discutir los errores considerándolos como origen de aprendizajes; el cuestionar al otro; la búsqueda por abordajes matemáticos alternativos) han permitido expandir el espacio solución de los propios formadores. Esa expansión ha tenido origen en un cuestionamiento de uno de los futuros profesores (Francisca) sobre la posibilidad, o no, de que la respuesta de Mariana haya sido obtenida por ensayo y error sin un razonamiento matemático asociado, y la consecuente (im)posibilidad de que funcione para otras cantidades de alumnos y de barras de chocolate:

Francisca: (…) si fueran siete alumnos no sé si funcionaría. Ha sido un proceso por ensayo y error que ha funcionado con estos valores pero no sé si con otros números va a funcionar.

Educador: ¿Dices entonces que este proceso parece no poder ser utilizado con otros números...?

Francisca: No lo sé…, tal vez no funcione con otros valores.

Asociado a este comentario de Francisca, al formador de profesores cumple un conocimiento sobre prueba y generalización, pero en el sentido de que pueda discutirlos con los (futuros) profesores de forma matemáticamente e didácticamente significativas, explorando diferentes "puntos de ataque" para cada una de las situaciones (aspectos nucleares de la demonstración y de lo que significa obtener generalizaciones y cuándo se puede, o no, buscar esas generalizaciones). El ver y escuchar el comentario de Francisca (más allá del obvio) implica movilizar un conocimiento asociado a una visión amplia de posibles formas de representar un racional cualquiera (en particular 5/6) incluyendo la más tradicional (5x1/6) pero también otras alternativas, como la representación usando series finitas (con recurso a fracciones unitarias) – haciendo también conexiones matemáticas y didácticas con dimensiones de la matemática avanzada. Así, el caso del 5/6 se puede representar como ½+1/4+1/12, que corresponde a la respuesta de Mariana y que es generalizable ya que toda la cantidad representada en fracción se puede escribir como suma finita de fracciones unitarias decrecientes, siendo el primer elemento la parte entera y cada una de las demás corresponde a la fracción unitaria más grande que está contenida en la parte restante.

ALGUNAS REFLEXIONES FINALES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

El conocimiento especializado del formador de profesores (en particular el que se refiere al conocimiento interpretativo) posé una naturaleza y contenidos complementarios del especializado del profesor, ese conocimiento deberá expandir las fronteras del conocimiento didáctico – que es frecuentemente apuntado como el conocimiento central de la práctica docente. Así, al reconocer que para perseguir determinado conjunto de objetivos (e.g., que los alumnos entiendan lo que hacen y por qué lo hacen), al profesor cumple un determinado conjunto de conocimientos, al cambiar el foco de atención, y luego, los objetivos, al formador de profesores cumple otro cuerpo de conocimientos (que se considera expandir los del profesor) buscando posibilitar a que los profesores puedan posteriormente explorar los contenidos con efectiva comprensión, promoviendo el desarrollo de una alfabetización matemática en los alumnos.

Ya se sabe que el profesor (y su conocimiento) es el factor que más impacto tiene en los resultados (y aprendizajes) de los alumnos (Nye et al., 2004), por lo que una cuestión emergente se relaciona con el papel del conocimiento del formador de profesores en la práctica del profesor – y eso se articula, necesariamente, con el contenido de ese conocimiento. Aunque existen algunos trabajos centrados en el formador de profesores (e.g., su desarrollo profesional; el proceso de aprendizaje docente en la enseñanza superior), son muy raros los trabajos que buscan identificar y entender nuestro propio conocimiento especializado como formadores. Esta carencia de evidencias de la investigación permite argumentos como *que "para ser bueno formador es suficiente haber sido bueno profesor del nivel en que se están formando los profesores"*, y que *"para ser bueno formador basta hacer investigación en Educación Matemática"*, lo que me parece asociado a una visión demasiado limitadora del papel del formador, de la investigación, de la práctica y de las necesarias articulaciones entre estos elementos. De forma asociada, las tareas que se preparan, y las formas como se implementan, son centrales en la práctica (en ambos

contextos) por lo que para contribuir a la mejora de la formación de profesores, de la práctica e de las aprendizajes de los alumnos, una discusión más profunda sobre los objetivos asociados a las tareas para la formación se torna esencial.

Articulando las dos dimensiones consideradas centrales en y para la formación de profesores (tareas y conocimiento del formador), se torna evidente la necesidad de investigaciones que contribuyan para avanzar en el área, permitiendo mapear el conocimiento del formador de profesores de forma que la formación se enfoque donde es efectivamente necesaria y ayude a contribuir para perseguir objetivos a medio y largo plazo permitiendo, posteriormente, incluso diseñar programas de formación de formadores de profesores que promuevan el desarrollo de nuestro conocimiento especializado.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. *Proceedings of CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya: ERME.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1993). "Instructional Task, Classroom Discourse, and Students' Learning in Second Grade." American Educational Research Journal, 30: 393-425

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds), The teaching and learning of algorithms in school mathematics (130-140). Resto, V A: NCTM.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St Albans: Tarquin.

Newstead, K., & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings 22nd PME* (Vol. 3, pp. 295-303). Stellenbosch, South Africa.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis, 26*(3), 237-257.

Ribeiro, C.M. & Carrillo, J. (2011). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring Data analysis. In B. Ubuz (Eds.). *Proceedings 35th PME* (vol. 4, pp. 41-48). Ankara, Turkey: PME. (ISBN: 978-975-429-262-6)

Ribeiro, C. M., & Jakobsen, A. (2012). Prospective teachers' mathematical knowledge of fractions and their interpretation of the part-whole representation. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 289-298). Reszów, Poland: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

CONFERENCIAS ESPECIALES

¿EXISTEN DIVERSAS MATEMÁTICAS?, UNA MIRADA DESDE LA ETNOMATEMÁTICA

Veronica Albanese
Universidad de Granada

EL NACIMIENTO DE LA ETNOMATEMÁTICA

La Etnomatemática es un programa de investigación de la Educación Matemática que nace oficialmente en la mitad de los años ’80, pero sus origenes son algo más remotos.

A lo largo del siglo XX los antropólogos han ido observando y recolectando los conocimientos matemáticos de distintos pueblos originarios en todo el mundo, llegando a la conclusión que el pensamiento matemático, si bien con algunos rasgos comunes, toma formas diferentes según las necesidades culturales en el cual se desarrolla.

Esta cuestión ha sido fuente de reflexión de distintos investigadores de la educación matemática que, a partir de la mitad del siglo XX, han empezado a estudiar estas distintas formas de hacer y pensar matemáticas dándole distintos nombres: matemática congelada, matemática escondida, matemática popular, matemática implícita, matemática contextualizada, matemática indígena, sociomatemática, matemática oral, matemática no estandarizada, matemática informal, matemática oprimida, matemática espontanea (Sebastiani, 1997).

Es así que, a mitad de los años ’80 Ubiratan D’Ambrosio (1985), un estudioso brasileño experto en Historia de la Matemática, decide reunir los investigadores interesados en estudiar estas distintas formas de hacer matemáticas bajo un programa común dando origen a lo que él denomina Programa de Etnomatemática.

Este es un paradigma en continua evolución que, desde sus comienzos, ha ido ampliándose hasta abarcar toda cuestión relacionada con el desarrollo, difusión y validación de los modos y técnicas (Ticas) de comprender y manejar (Matema) el entorno bajo los factores sociales y culturales del contexto (Etno) (D’Ambrosio, 2008; 2012).

Estas reflexiones tienen fuertes implicaciones para el ámbito educativo, en sendas educación formal y educación no formal, más adelante veremos más en detalle esta cuestión.

LA VARIEDAD DE LAS INVESTIGACIONES EN ETNOMATEMÁTICA

Ya hemos mencionado que el programa de Etnomatemática nace para reunir los investigadores que estaban interesados en estudiar las matemáticas diversas que se desarrollaban en prácticas específicas de determinados grupos culturales.

Ahora bien, en el trabajo de estos investigadores juega un papel fundamental el contexto. Según las necesidades y las exigencias propias del entorno, los investigadores han tenido (y siguen teniendo hoy en día) propósitos y finalidades muy diferentes para realizar sus trabajos, así como emplean metodologías diferentes que se ajusten y adapten al contexto.

Veamos algunos ejemplos de estas diferentes matemáticas, o etnomatemáticas[4], que la comunidad científica ha encontrado a lo largo de estos últimos 30 años.

Los albañiles de las zonas rurales de Mozambique suelen construir casas con planta rectangular. Dado que no disponen de herramientas para diseñar rectas paralelas (o, lo que es lo mismo, ángulos rectos), se basan en una concepción de la figura geométrica del rectángulo que no necesite para su construcción de estas propiedades geométricas.

En particular ellos utilizan un bastón y dos cuerdas de igual medida; atan estas últimas la una a lo otra en el punto medio -que encuentran doblándolas-; anclan dos de las extremidades de las cuerdas al bastón y finalmente tensan las cuerdas (Figura 1). Encuentran así los vértices del rectángulo.

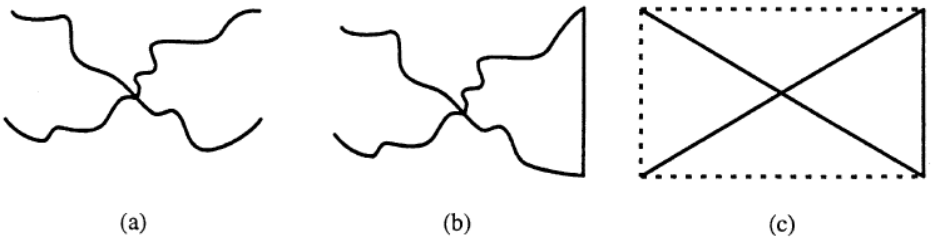


Figura 1. Construcción del rectángulo a partir de las diagonales. Imagen tomada de Gerdes (1998)

Esta construcción se basa en una concepción de rectángulo que parte de las diagonales: el rectángulo es un cuadrilátero cuyas diagonales son iguales y se bisecan. Esta, que en la matemática de los escolares es una propiedad de la figura, se transforma en una definición operativa para los albañiles (Gerdes, 1998).

Un gremio de artesanos-arquitectos de una isla de Indonesia ha desarrollado unas técnicas especiales para realizar las decoraciones de sus casas. Vemos por ejemplo el método kira-kira que permite encontrar el punto medio de un segmento utilizando solo un palito y un lápiz (Albertí, 2007).

El método es el siguiente: se marca *a ojo* el punto que se considera la mitad del segmento, después se acerca el palito al segmento de forma tal que un extremo coincida con un extremo del segmento, y se marca también ese punto medio *a ojo* en el palito; se mueve entonces el palito para que su extremo coincida ahora con la marca del segmento, y se marca en el palito la mitad del error cometido, de nuevo *a ojo*. Con esta nueva marca se vuelve a realizar el proceso (Figura 2).

[4] Nótense el uso del plural y minúsculo, para diferenciarlo del programa de Etnomatemática, indicado al plural y mayúsculo.

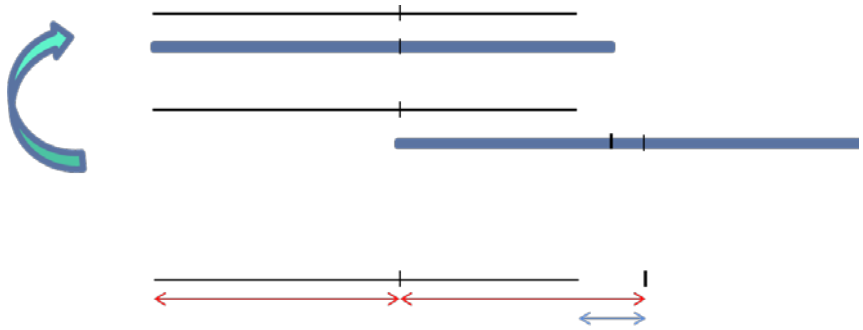


Figura 2. Método kira-kira para encontrar el punto medio de un segmento.

Cabe destacar que con cada reiteración del proceso se alcanza una mayor precisión en determinar el punto medio, sin mencionar que los artesanos-arquitectos tienen muy *buen ojo*.

Si nos paramos a pensar como lo haríamos, acostumbrados a razonar como nos han enseñado en la escuela, la mayoría de nosotros tendríamos que medir el segmento con algún instrumento de medida (por ejemplo una regla), realizar una operación de división, y volver a medir con el instrumento para encontrar el punto.

Todo esto necesita unos recursos materiales como cognitivos y una buena dosis de tiempo, que hace que el método kira-kira resulte mucho más conveniente (y hasta con más precisión, si contamos con las numerosas *oportunidades* de errores que proporciona realizar dos mediciones).

Las poblaciones originarias de Costa Rica tienen su propia forma de contar. En particular los indígenas Cabecares, como otros de la región, tienen distintos nombres para los números según la clase de los objetos a los que el número se refiere (Gavarrete, 2012). Por ejemplos hay una palabra para decir 3 naranjas (que son redondas) y otra distinta para decir 3 plátanos (que son alargados). Además no pueden considerar en el mismo grupo objetos que no pertenezcan a la misma clase. Sintácticamente estas *clases* se llaman clasificadores numerales. En Cabecar existen seis clases: los humanos, los objetos alargados, los objetos redondos, los objetos planos y los conjuntos (los racimos o los sacos) y las partes o piezas.

Hagámonos una pregunta ¿con que autoridad decidimos que esta forma de contar no es más óptima en el contexto donde se desarrolla? En el fondo, en álgebra hemos escuchado muchas veces el refrán ¡no sumar las x con las y!

Una última curiosidad, en las islas polinesianas hay poblaciones que se conocen tan bien el océano que navegan en sus canoas como si existieran senderos en el mar que les permiten ubicarse (Barton, 2008). ¡Y nosotros no podemos más que apreciar esta forma de orientarse ya que es la que comúnmente utilizamos en tierra firme donde nos guiamos por rutas y autopistas!

Ahora veamos las finalidades del trabajo de algunos de estos autores (y de otros) que dependen del contexto de su trabajo y de las exigencias del entorno.

En Mozambique, Gerdes (1998) ha recurrido a la Etnomatemática para fomentar la reflexión de los futuros maestros sobre la recuperación de los valores de su pueblo y con la intención de formar un sentido de identidad y pertenencia a la comunidad, así como se ha dedicado a la búsqueda de patrones y modelización que han permitido extender el campo de la

Etnomatemática (Gerdes, citado en Miarka, 2011). En Costa Rica la Etnomatemática trata de integrar los saberes indígenas con los saberes de la matemática escolar para que no se provoque un choque en los estudiantes debido a los diferentes sistemas de conocimientos en el contexto de la educación formal (Gavarrete, 2012). En Brasil los estudios de Etnomatemática están ligados a movimientos de reivindicación de la tierra, así como a la educación para adultos (Knijnik, Wanderer y Oliveira, 2005). En Portugal la Etnomatemática ha sido un instrumento para dar voces a barrios y gremios marginalizados (País y Mesquita, 2013) ligado a contextos de educación no formal.

ALGUNAS REFLEXIONES TEÓRICAS

Debidas a las particularidades y necesidades de los contextos que hemos resaltado en los párrafos anteriores la Etnomatemática no se puede encasillar en una sola teoría. Los etnomatemáticos creemos que esto, lejos de ser una problemática, es una de las fortalezas del programa (Miarka, 2011).

De hecho uno de los paradigmas propuestos es que la Etnomatemática sea el estudio de la influencia de los factores sociales y culturales en la construcción y difusión del conocimiento (léanse aquí educación). Es así que no se pueden considerar desde un punto de vista global las que son particularidades y riquezas de cada entorno.

A este propósito cabe mencionar una reflexión filosófica de Barton (1999) que insiste en la importancia de concebir la existencia de diferentes (etno)matemáticas no solo desde el punto de vista histórico, sino aceptar que existen y conviven contemporáneamente distintas matemáticas.

Aquí entra en juego una consideración fundamental a tener en cuenta en la metodología de investigación. Existen dos maneras de acercarse a las etnomatemáticas de un determinado grupo cultural.

Por un lado, el investigador puede asumir una perspectiva ética que le permite estudiar las prácticas del grupo desde el punto de vista del investigador, que posee sus propias categorías y esquemas explicativos de los fenómenos dictados por su cultura.

Por otro lado, un investigador que se pone en una perspectiva émica se empeña en estudiar las prácticas desde el punto de vista propio del grupo cultural, buscando las categorías y esquemas determinados por la lógica del grupo.

En todo trabajo de Etnomatemática tendrían que estar presentes ambas perspectivas (Orey y Rosa, 2012). El valor y la riqueza de una investigación en Etnomatemática se sitúan en el diálogo entre estas dos perspectivas.

LA ETNOMATEMÁTICA EN CHILE

En los últimos años Chile está viviendo una reforma educativa que, desde el punto de vista legislativo, va determinando los programas de estudio de las asignaturas impartidas en la educación básica y media. En particular veamos el caso del Programa de Educación Intercultural Bilingüe (EIB).

Si bien en el portal del Ministerio de Educación de Chile se menciona que las estrategias desarrolladas por la EIB promuevan la *revitalización de la cultura y la interculturalidad en el espacio escolar*[5], los programas de estudios de la EIB parecen diferenciarse solo por la introducción de la asignatura de lenguas indígenas. De hecho se han implementado los Planes de Estudio de las cuatro lenguas indígenas[6] que se imparten: Mapuzugun, Aymara, Quechua, Rapa Nui.

Ahora bien, creemos que la revitalización de la cultura se consigue actuando desde un enfoque más interdisciplinar, no solo introduciendo el aprendizaje de la lengua sino incluyendo los saberes y la cosmovisión indígena en otras asignaturas, por ejemplo ciencias naturales y matemáticas, así como en las metodologías de aprendizajes y la contextualización de las actividades didácticas (Albanese, Santillán y Oliveras, 2014).

A este respecto cabe desatacar el estudio de Huencho-Ramos (2015) sobre las "Orientaciones para la Contextualización de los Planes y Programas para la Educación Intercultural Bilingüe" del 2005.

La autora, realizando un análisis fundamentada del documento, apunta a la simple traducción de los términos matemáticos a expensas de una incorporación de los conocimientos etnomatemáticos indígenas. Asimismo destaca las potencialidades de un trabajo intercultural en el ámbito de las matemáticas, que concilie los saberes escolares y la cosmovisión mapuche, señalando por un lado las similitudes que permiten una facilitación de la comprensión de los conceptos matemáticos por parte del estudiante indígena y por otros las diferencias que sería aconsejable sacar a la luz para no crear un choque cultural entre la visión escolar y la indígena.

Merece mencionar algunas de sus consideraciones (Huencho-Ramos, 2015). Las similitudes epistémicas residen en los conceptos relacionados con el sistema de numeración: la base decimal, la existencia del cero -o vacío-. Al contrario un elemento enriquecedor es la *dualidad* de la cosmovisión mapuche, útil en los conceptos de paridad/imparidad, y las acciones concretas de agregar/quitar y avanzar/retroceder que explicitan las operaciones de adición/substracción. También para la ubicación y el desplazamiento rescata la elección de unidades de medidas ancestrales mapuches ligadas al cuerpo humano, así como para el conteo y la estimación rescata la contextualización en juegos y canciones indígenas.

Indicamos ahora, sin la pretensión de ser exhaustivos, estudios sobre el potencial etnomatemático de rasgos de las culturas indígenas de Chile.

- Gavarrete y Casas (2015) analizan el Kultrun mapuche, un objeto que encierra y representa elementos de la cosmovisión indígena de este pueblo, descubriendo conceptos geométricos cuales las simetrías.
- Rojas-Gamarra y Stepanova (2015) describen la relación de la Yupara Inka, una especie de ábaco, con conceptos algebraicos, en particular sumatorias, matrices y vectores.

[5] http://portales.mineduc.cl/index2.php?id_seccion=3442&id_portal=28&id_contenido=14010
[6] http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyvalue-77655.html

- Peña-Rincón y Hueitra-Santibañez (2016) mencionan la concepción del espacio y del tiempo en la cosmovisión mapuche, ligados respectivamente al sol y a la luna, y se proponen analizar el juego del palín.
- Salas y Godino (2016) analizan la estructura morfológica y morfosintáctica de los números en español y en mapunzugun, identificando potencialidades y posibles conflictos semióticos del confronto entre las dos lenguas.

CONCLUSIONES

En esta conferencia hemos querido proporcionar una panorámica sobre el programa de Etnomatemática, con la esperanza que más investigadores chilenos se acerquen a esta línea.

Después de explicar cómo y porque surge el programa de Etnomatemática, hemos facilitado al lector varios ejemplos de etnomatemáticas, de concepciones matemáticas ligadas a prácticas culturales, mostrando similitudes y sobre todo diferencias con las prácticas escolares. Luego hemos revisado las revisiones filosóficas que sustentan el programa y las dos perspectivas metodológicas, la ética y la émica, que nos han permitido proporcionar algunas recomendaciones sobre la realización de una investigación en Etnomatemática.

Finalmente hemos aterrizado a la situación chilena, comentando brevemente los Programas de Estudio, sobre todo los de la Educación Intercultural Bilingüe, en particular revisando las posibilidades que ofrecen "Orientaciones para la Contextualización de los Planes y Programas para la Educación Intercultural Bilingüe" para la revitalización de la cultura, en particular a propósito de los saberes matemáticas.

Queremos concluir subrayando la riqueza cultural de este país, puesta de manifiesto en los trabajos de investigadores que estudian rasgos y prácticas culturales indígenas, que tanto potencial tienen para el diseño de actividades escolares que respondan realmente a estrategias de interculturalidad, como promovido desde el Ministerio de Educación de Chile.

Referencias

Albanese, V., Santillán, A., & Oliveras, M. L. (2014). Etnomatemática y formación docente: el contexto argentino. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(1), 198-220.

Albertí, M. (2007). *Interpretación matemática situada de una práctica artesanal*. Tesis doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Barton, B. (2008). *The language of mathematics: Telling mathematical tales*. Melbourne: Springer.

Barton, B. (1999). Ethnomathematics and Philosophy. *ZDM, 31*(2), 54-58.

D'Ambrosio, U. (2012). The Program Ethnomathematics: theoretical basis and the dynamics of cultural encounters. *Cosmopolis, 3-4*, 13-41.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática - Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the learning of Mathematics, 5*(1), 44-48.

Huencho-Ramos, A. (2015). Estudio de las Orientaciones curriculares del Programa Intercultural Bilingüe: un análisis emergente en función de la matemática y la cultura mapuche. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8*(2), 214-236.

Gavarrete, M. E., & Casis, L. (2014). La cosmovisión indígena y sus perspectivas didácticas: visión etnomatemática de dos grupos étnicos. En: P. Leston (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 27. (pp. 1423-1429). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.

Gerdes, P. (1998). On culture and mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(1), 33-53.

Knijnik, G., Wanderer, F., & Oliveira, C.J. (2005). Cultural Differences, Oral Mathematics, and Calculators in a Teacher Training Course of the Brazilian Landless Movement. *ZDM, 37*(2), 101-108.

Miarka, R. (2011) *Etnomatemática: do ôntico ao ontológico.* Tesis doctoral. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

País, A. & Mesquita, M. (2013). Ethnomathematics in non - formal educational settings: the Urban Boundaries project. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 6*(3), 134-144.

Peña-Rincón, P. A., & Hueitra-Santibañez, Y. (2016). Conocimientos [matemáticos] mapuche desde la perspectiva de los educadores tradicionales de la comuna de El Bosque. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 9*(1), 8-25.

Rojas-Gamarra, M., & Stepanova, M. (2015). Sistema de numeración Inka en la Yupana y el Khipu. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática. 8*(3), 46-68.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2012).The field of research in ethnomodeling: emic, ethical and dialectical approaches. *Educação e Pesquisa, 38*(4), 865-879.

Salas, S. S., & Godino, J. D. (2016). Potencial Educativo de la Aritmética Mapuche en Chile. En: A. M. Rosas (Ed.) *Avances en Matemática Educativa. Tecnología y matemáticas* (pp. 72-84). México: Editorial Lectorum.

Sebastiani, E. (1997). *Etnomatemática: uma proposta metodológica*. Río de Janeiro: Universidade Santa Úrsula.

¿CÓMO LUCEN LAS CLASES DE MATEMÁTICA DE ESCUELAS CHILENAS QUE MEJORAN?

María Leonor Varas
Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE) y Departamento de Evaluación Medición y Registro Educacional (DEMRE), Universidad de Chile

Resumen: Como parte de un proyecto mayor, que estudió en profundidad a escuelas que mejoraron sostenidamente durante una década[7], se realizó un estudio de sus clases de matemática de 4º, 5º y 6º básico. Entre los años 2013 y 2015 se estudiaron las interacciones pedagógicas y las percepciones de los niños acerca de sus clases de matemática. En 35 salas de 11 escuelas, se aplicó el protocolo estandarizado Classroom Assessment Scoring System (CLASS) en su versión Upper Elementary (Pianta et al., 2012) a series de 3 clases de matemática consecutivas filmadas, y se recolectaron 1.159 dibujos de los alumnos de estas salas, obtenidos en la clase de matemática siguiente a las clases filmadas, los que fueron codificados de acuerdo a un protocolo utilizado previamente en un proyecto bilateral Chile-Finlandia[8] en una muestra de 1.059 dibujos de alumnos de esos niveles escolares. También para el caso del protocolo CLASS se contaba con una "muestra testigo" de resultados de su aplicación en aulas del mismo nivel educacional, de escuelas que no tenían trayectorias de mejoramiento, lo que permitió plantear las preguntas de investigación:

- ¿En qué se diferencian las interacciones pedagógicas de las escuelas con trayectorias de mejoramiento?
- ¿En qué se diferencian las percepciones de los niños de sus clases de matemática en las escuelas con trayectorias de mejoramiento?
- ¿En cuánto contribuyen los instrumentos utilizados a comprender mejor el aula?

Los resultados muestran que en las aulas de las escuelas con trayectorias de mejoramiento se producen interacciones pedagógicas de mejor calidad que en otras escuelas, pero los dibujos de los niños exhiben una exacerbación de prácticas de enseñanza centradas en el profesor, las que a su vez correlacionan negativamente con las interacciones de calidad. Por otra parte las percepciones de los niños, expresadas a través de los dibujos, muestran gran coherencia con la observación externa y estandarizada a través del protocolo internacional CLASS, agregando información complementaria, lo que contribuye a una mejor comprensión de las aulas estudiadas. De este estudio surgen alentadoras consideraciones metodológicas acerca del uso de estos instrumentos, además de interesantes reflexiones acerca del potencial de mejoramiento de la instrucción matemática en nuestras aulas de enseñanza básica.

CONTEXTO

El trabajo que aquí se presenta se realizó en el marco del proyecto Anillo en Ciencias Sociales "Mejoramiento de la efectividad escolar en Chile", realizado entre los años 2013 y 2015, por equipos pertenecientes al Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE)

[7] Proyecto Anillo en Ciencias Sociales SOC 1104 financiado por PIA de CONICYT

[8] Proyecto AKA 09, financiado por PIA de CONICYT

de la Universidad de Chile y del Centro de Políticas Comparadas de Educación (CPCE) de la Universidad Diego Portales, bajo la dirección de Cristián Bellei, con el objetivo de:

Comprender cómo mejoran algunas escuelas básicas chilenas, en diferentes contextos institucionales y sociales; cómo se sostiene el mejoramiento a lo largo del tiempo; cómo las políticas públicas y la asistencia técnica externa pueden mejorar el desempeño escolar; y cuáles prácticas de aula fomentan este progreso en el área de matemáticas, un verdadero talón de Aquiles de la educación escolar chilena.

Entre las motivaciones que originaron este estudio, destacan dos: (1) La amplia gama de programas y políticas públicas para mejorar la educación escolar a lo largo de los últimos 20 años acompañada de una política de rendición de cuentas, basadas en las escuelas, evaluando a los estudiantes; (2) Que el aprendizaje de matemáticas, comparado al de lenguaje, es mucho más sensible al potencial "efecto escuela". Por lo tanto, el impacto del cambio en la efectividad del Sistema Educacional debería ser más visible en términos de los logros en matemáticas.

El proyecto consideró tres líneas de investigación: (1) Explicar el mejoramiento de la efectividad escolar, con énfasis en el área de matemáticas; (2) Explorar la sustentabilidad del mejoramiento escolar; (3) Comprender la contribución potencial de las ATE al mejoramiento escolar. El trabajo que aquí se presenta se inscribe en la primera de estas líneas.

En primer lugar fue necesario definir que se consideraría "mejoramiento de la efectividad escolar" y como se lo evaluaría. Con este fin se creo un índice de desempeño educativo (IDE) que consideró resultados SIMCE en dos niveles educativos y otras variables como retención escolar, nivel de selectividad de sus estudiantes, tasa de aprobación de cursos. Aplicado este IDE a todas las escuelas chilenas con información disponible (3.669 = 83% del total de escuelas), permitió estimar la proporción de escuelas que mejoraron entre 2002 y 2010 (41%), permanecieron estables (34%) o empeoraron (aprox. 25%). Solo un 9% de las escuelas mostró un mejoramiento sostenido y relevante en el período. De este conjunto de escuelas, se eligieron 12 que mostraran trayectorias diversas. Un estudio de casos, en profundidad, permitiría comprender cómo se logran estos mejoramientos en distintas etapas de su desarrollo.

En 11 de estas 12 escuelas, debido a que una de ellas declinó participar en esta parte del proyecto, se profundizó el estudio en el aula de matemáticas. Es decir, si bien la unidad de análisis en todo el proyecto fue la escuela, en esta componente de la investigación, se puso el foco en el aula. La observación estructurada de las clases de matemática se realizó con dos instrumentos validados internacionalmente, y en proyectos previos también en Chile: CLASS (Pianta et al., 2012) y MQI (Hill et al., 2008).. El primero de ellos corresponde a un protocolo que evalúa la calidad de las interacciones pedagógicas, independientemente de la disciplina abordada en la lección observada. El segundo (cuya sigla corresponde a las iniciales en inglés de su nombre: Mathematical Quality of the Instruction) evalúa la calidad matemática de las lecciones observadas, que deben ser al menos tres consecutivas, de 45 minutos cada una. Adicionalmente se evaluó el *conocimiento matemático para enseñar*

(conocido en la literatura como MKT por su nombre en inglés), de los profesores que impartieron las clases observadas, mediante la aplicación de pruebas de uso internacional (Hill et al, 2005), validadas en Chile en el proyecto Fondecyt 1090292 (2009-2011). Por último se analizaron dibujos de los niños participantes en las clases observadas, mediante una pauta de origen finlandés (Pehkonen et al., 2011; Tikkanen, 2008) validada previamente en Chile en el proyecto bilateral Chile-Finlandia AKA 09.

En esta presentación solo se incluyen los resultados de la aplicación de dos de estos instrumentos: CLASS y la codificación de los dibujos que los niños hicieron de sus clases de matemática, lo que corresponde a una síntesis del trabajo publicado en tres artículos relacionados (Gody, F., Varas, L., Martínez, M.V., Treviño, E., Meyer, A., 2016). (Martínez, M.V., Godoy, F., Treviño, E., Varas, L., Fajardo, G., 2016), (Treviño, E., Varas, L., Godoy, F., Martínez, M.V., 2016). Todos los gráficos y tablas que aquí se incluyen pertenecen al primero de estos artículos, publicado recientemente en Estudios Pedagógicos, vol.42 no.3**.**

METODOLOGÍA

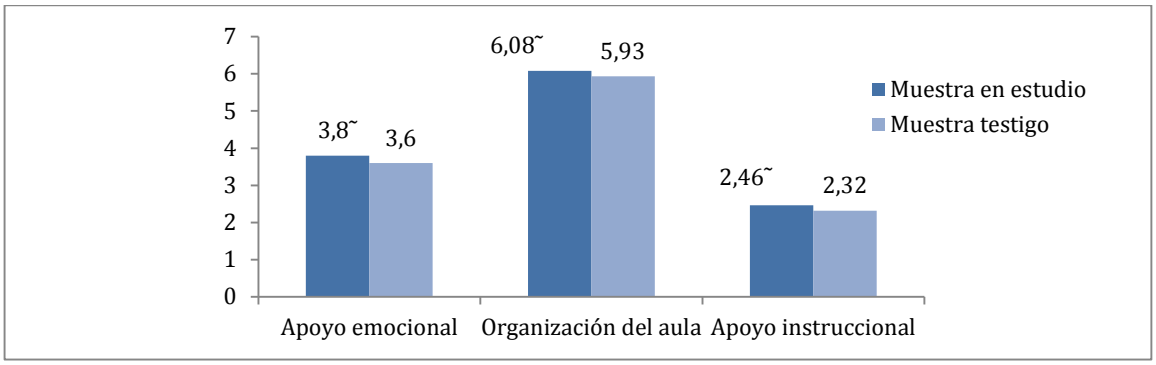
La muestra en estudio se compone de 35 cursos de 4°, 5° y 6° básico, cuyas clases de matemática fueron observadas y video-registradas por 180 minutos en lecciones consecutivas, a lo largo de los años 2013 y 2014. En una clase posterior se pidió a los mismos niños que dibujaran sus clases de matemática utilizando burbujas de diálogo o pensamiento e identificándose a sí mismos en el dibujo. En total se recogieron 1.159 dibujos. Para interpretar correctamente la variabilidad de los datos recogidos y para identificar propiedades características de las clases de matemática en las escuelas estudiadas, se consideraron “muestras testigo” para las cuales teníamos resultados de aplicación de los instrumentos aquí empleados (diferentes para ambos instrumentos). Para los dibujos usamos una muestra testigo de 700 dibujos de 3° básico y 359 de 5° básico de 26 escuelas de Santiago, participantes en el mencionado proyecto de investigación bilateral Chile-Finlandia, entre los años 2011 y 2013. Para CLASS usamos una muestra testigo de 190 cursos de 4° básicos, de 137 escuelas públicas con bajos logros de aprendizaje de 4 regiones distintas, evaluadas con CLASS, en el marco de un programa de intervención. Las aplicaciones realizadas, tanto de la pauta CLASS como de las pautas de codificación de dibujos, estuvieron a cargo de los mismos equipos técnicos que las utilizaron en las muestras testigo (certificados por Teachstone[9], en el caso de CLASS) con idénticas medidas de control de la confiabilidad entre jueces.

RESULTADOS

Las dimensiones evaluadas por CLASS se agrupan en tres grandes dominios: *apoyo emocional, organización del aula* y *apoyo pedagógico.* La escala de puntajes en que se califican tanto las dimensiones como estos dominios, va de 1 a 7. En el cuadro que sigue se observa que la muestra en estudio sigue la misma distribución de puntajes, en los tres dominios, que la muestra testigo, lo que parece ser un patrón típico de las escuelas chilenas.

[9] La empresa creadora de CLASS y encargada de realizar los cursos y entregar certificaciones

Sin embargo se aprecian leves aunque significativas diferencias a favor de las escuelas con trayectoria de mejoramiento.



Significancia estadística: p<0,1=˜, p<0,05=*; p<0,01=**; p<0,001=***

Al nivel de las dimensiones que componen estos dominios, la tabla que sigue permite observar diferencias significativas interesantes.

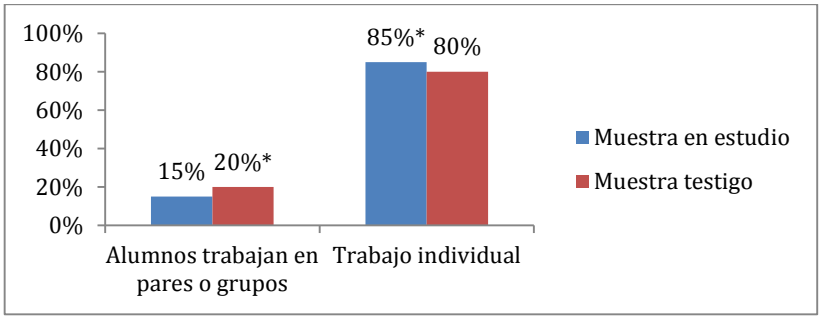
		Muestra en estudio		***Muestra Testigo***		***Diferencias***		
		n	Promedio	n	Promedio	Dif.	Desv. Estd. comb.	Dif. Estd..
Apoyo emocional	Clima positivo	35	4,125	190	3,99	0,13	0,75	0,17
	Sensibilidad del profesor	35	4,9	190	4,74	0,16	0,81	0,20
	Consideración de la perspectiva de los estudiantes	35	2,382	190	2,06	0,32 **	0,60	0,53
Organización del aula	Manejo de la conducta	35	5,735	190	5,50	0,24˜	0,77	0,31
	Productividad	35	5,592	190	5,405	0,19	0,72	0,26
	Clima negativo	35	6,925	190	6,897	0,03	0,18	0,17
Apoyo pedagógico	Formato Pedagógico	35	3,840	190	3,75	0,09	0,71	0,13
	Comprensión del contenido	35	2,910	190	2,61	0,3* *	0,62	0,49
	Análisis de indagación	35	1,740	190	1,4	0,34 ***	0,43	0,79
	Calidad de retroalimentación	35	2,114	190	2,097	0,02	0,60	0,03
	Diálogo instruccional	35	1,710	190	1,73	-0,02	0,50	-0,04
	Participación efectiva	35	4,979	190	4,674	0,3* *	0,52	0,58

Significancia estadística: p<0,1=˜, p<0,05=*; p<0,01=**; p<0,001=***

En las escuelas con trayectoria de mejoramiento, los profesores manejan mejor la conducta, realizan clases más participativas y consecuentemente incorporan en mayor grado la perspectiva de los estudiantes. Especialmente interesante resulta la significativa superioridad exhibida por los profesores de las escuelas en estudio en dos dimensiones del dominio *apoyo instruccional*, de muy bajo puntaje en las aulas chilenas: el foco en la comprensión del contenido y la incorporación del análisis y la indagación, aunque siguen siendo prácticas escasas.

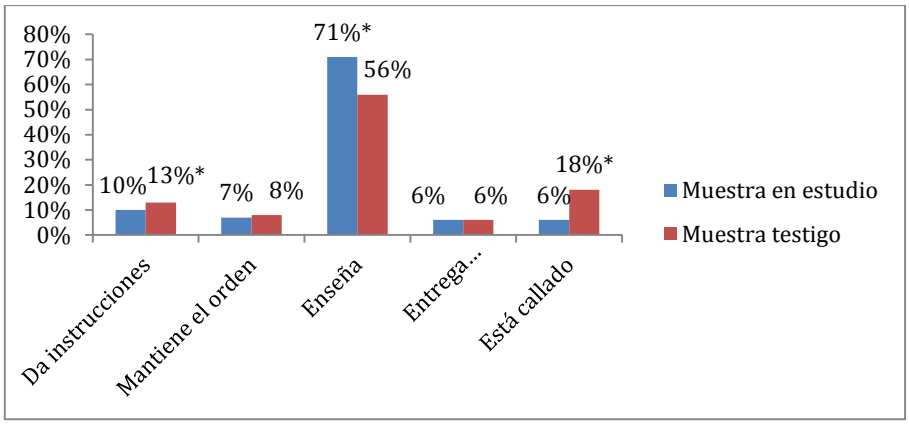
En cuanto a los dibujos, se aclara que el grado de elaboración de estos, depende fuertemente de la edad de los niños, y por lo tanto, para los niveles educacionales más bajos, en todas las dimensiones evaluadas se tiene un mayor número de casos donde las características estudiadas no son reconocibles. Esto llevó a agrupar algunas dimensiones y a no contabilizar los dibujos donde estas dimensiones no se expresaban, eliminando la categoría "no reconocible".

En primer lugar destaca la significativa mayor preponderancia del trabajo individual versus el trabajo en pares o grupos que se presenta en los dibujos de los niños de las escuelas con trayectorias de mejoramiento, que muestra el gráfico que sigue. Como se dijo antes, la muestra aquí considerada testigo, se comparó en un estudio previo con una población escolar finlandesa de la misma edad, en los mismos niveles educacionales, cuyos dibujos mostraban una importante diferencia a favor del trabajo grupal. Es decir, es decir, los dibujos de los niños de las escuelas con trayectoria de mejoramiento, se parecen menos en este aspecto a los dibujos de los niños finlandeses que aquellos de otras escuelas chilenas.



Significancia estadística: p<0,1=˜, p<0,05=*; p<0,01=**; p<0,001=***

En cuanto a la actividad del profesor plasmada en los dibujos de los niños, consignada en el siguiente gráfico, se aprecia a profesores más activos, concentrados en enseñar, dando menos instrucciones, en las escuelas con trayectorias de mejoramiento. La retroalimentación se percibe igualmente escasa y tampoco se observan diferencias significativas en cuanto al control de la conducta.



Significancia estadística: p<0,1=˜, p<0,05=*; p<0,01=**; p<0,001=***

Las características de las clases de matemática observables a partir de los dibujos de los niños, parecen demasiado gruesas, en comparación con la elaboración de las dimensiones evaluadas con el protocolo de observación CLASS, que corresponde a una mirada experta de las interacciones a lo largo de varias clases filmadas. Sin embargo, se esperaba encontrar cierta coherencia entre ambas miradas: la experta y la de los niños.

La tabla que sigue muestra interesantes correlaciones entre las percepciones de los niños, plasmadas en los dibujos, y las dimensiones evaluadas por CLASS. En la primera parte de la tabla, referida a los tres dominios de CLASS, se muestra claramente que aquellos profesores que obtienen altas calificaciones en el dominio *organización del aula*, son representados por los niños dando pocas instrucciones, poco ocupados en mantener el orden y concentrados en enseñar y retroalimentar. Por otra parte, aquellos profesores que promueven el trabajo individual, en la percepción de los niños, obtienen peores calificaciones en cuanto al *apoyo emocional* y al *apoyo pedagógico*.

En la segunda parte de la tabla se muestran las correlaciones detalladas a nivel de las dimensiones evaluadas por CLASS. Las relaciones entre la actividad del profesor plasmada en los dibujos y las dimensiones que componen el dominio de *organización del aula*, no hacen más que fortalecer la coherencia esperada. En cambio el detalle de las correlaciones entre los métodos de trabajo (individual o grupal) con las dimensiones de los otros dos dominios agregan información relevante. El muy preponderante trabajo individual exhibido en los dibujos de los niños de las escuelas con trayectorias de mejoramiento, muestra significativas correlaciones negativas con la consideración de la perspectiva de los niños, la calidad de las retroalimentaciones, el foco en la comprensión del contenido, la incorporación del análisis y la indagación y la participación efectiva. Estos hallazgos resultan paradojales si se considera que es justamente en estas dimensiones donde las escuelas con trayectorias de mejoramiento muestran una leve pero significativa superioridad respecto de otras escuelas chilenas. Considerando adicionalmente, que estas mismas dimensiones son aquellas en las cuales nuestras escuelas exhiben los más bajos desempeños, cabe preguntarse en qué medida, métodos de trabajo que han resultado eficientes para lograr importantes y difíciles mejoramientos de la efectividad escolar, al mismo tiempo podrían estar frenando niveles superiores de desarrollo.

		Mantiene el orden	***Da instrucciones***	***Enseña / retroalimenta***	***Trabajo en grupo***	***Trabajo individual***
Dominios	Apoyo emocional	-0.1105 (0.5540)	-0.2133 (0.2492)	0.1205 (0.5185)	0.3331˜ (0.0671)	-0.3593* (0.0471)
	Organización del aula	-0.4618** (0.0089)	-0.3524˜ (0.0518)	0.3454˜ (0.0570)	0.1257 (0.5006)	-0.1012 (0.5881)
	Apoyo pedagógico	-0.1414 (0.4480)	0.0367 (0.8448)	-0.0345 (0.8539)	0.3003 (0.1007)	-0.3765* (0.0368)
Apoyo Emocional	Clima Positivo	-0.1687 (0.3644)	-0.2720 (0.1387)	0.1711 (0.3573)	0.2366 (0.2001)	-0.2186 (0.2374)
	Sensibilidad del profesor	-0.1636 (0.3791)	-0.4130* (0.0209)	0.2816 (0.1249)	0.2102 (0.2564)	-0.2098 (0.2573)
	Consideración de la perspectiva de los estudiantes	0.0575 (0.7585)	0.1662 (0.3715)	-0.1673 (0.3684)	0.4328* (0.0150)	-0.5242** (0.0025)
Organización del aula	Manejo de la conducta	-0.3944* (0.0281)	-0.40538* (0.0237)	0.3078˜ (0.0921)	0.0940 (0.6150)	-0.1857 (0.7152)
	Productividad	-0.4628** (0.0088)	-0.1357 (0.4666)	0.2796 (0.1277)	0.2109 (0.2547)	0.2576 (0.3173)
	Clima negativo	-0.1234 (0.5084)	-0.5805*** (0.0006)	0.3235˜ (0.0759)	-0.2749 (0.1345)	-0.3716 (0.1618)
Apoyo pedagógico	Formato pedagógico	-0.2076 (0.2623)	-0.1642 (0.3775)	0.1887 (0.3092)	0.3061˜ (0.0939)	-0.3533˜ (0.0512)
	Comprensión del contenido	-0.1320 (0.4789)	0.0448 (0.8110)	-0.0397 (0.8320)	0.2932 (0.1094)	-0.3716* (0.0396)
	Análisis e indagación	-0.0396 (0.8324)	0.2492 (0.1764)	-0.2286 (0.2161)	0.3769* (0.0366)	-0.4724 (0.0073) **
	Calidad de la retroalimentación	-0.0808 (0.6656)	0.1337 (0.4734)	-0.1347 (0.4700)	0.3083˜ (0.0915)	-0.3890* (0.0305)
	Dialogo instruccional	-0.1496 (0.4220)	-0.0804 (0.6673)	0.0322 (0.8633)	-0.0044 (0.9814)	-0.0273 (0.8841)
	Participación efectiva	-0.0569 (0.7612)	0.0103 (0.9563)	0.0308 (0.8696)	0.4017* (0.0251)	-0.4345* (0.0146)

Significancia estadística: p<0,1=˜, p<0,05=*; p<0,01=**; p<0,001=***

Referencias

Gody, F., Varas, L., Martínez, M.V., Treviño, E., & Meyer, A. (2016). Interacciones pedagógicas y percepción de los estudiantes en escuelas chilenas que mejoran: una aproximación exploratoria. *Estudios Pedagógicos*, 42(3). http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000400008

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406

Hill, H. C., Blunk, M.L., Charalambous, C.Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D.L., (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study, *Cognition and Instruction*, *26*, 30–511.

Martínez, M.V., Godoy, F., Treviño, E., Varas, L., & Fajardo, G., (2016). ¿Qué nos revelan los instrumentos de observación de aula sobre clases de matemática en escuelas con trayectoria de mejoramiento?, *Educação e Pesquisa*. (aceptado).

Pehkonen, E., Ahtee, M., Tikkanen, P., & Laine, A. (2011). Pupils' conceptions on mathematics lessons revealed via their drawings. In B. Rösken & M. Casper (Eds.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs* XVII. Proceedings of the MAVI-17 Conference (pp. 182-191). University of Bochum.

Pianta, R., Hamre, B., & Mintz, S. (2012). *Classroom Assessment Scoring System. Upper Elementary Manual*. Charlottesville, Virginia.: Teachstone

Tikkanen, P. (2008). [Easier and more fun than I thought) Mathematics experienced by fourth-graders in Finnish and Hungarian comprehensive schools]. *Studies in Education, Psychology and Social Research*, 337.

Treviño, E., Varas, L., Godoy, F., & Martínez, M.V. (2016). ¿Qué caracteriza a las Interacciones Pedagógicas de las Escuelas Efectivas Chilenas? Una Aproximación Exploratoria. En Manzi, J., García, M. (Eds.), *Abriendo las Puertas del Aula. Transformación de las Prácticas Docentes, Colección Estudios en Educación, Ediciones UC,* ISBN 978-956--14-2005-2. Santiago de Chile, pp. 185-226.

STEM INTEGRADO CON SOPORTE TIC PARA EDUCACIÓN EN LAS HABILIDADES SIGLO XXI

Roberto Araya
CIAE, Universidad de Chile

Resumen: En un mundo cada vez más interconectado, marcado por una creciente automatización, con nuevas tecnologías del lenguaje, computación biológica, enormes cantidades de datos y una nueva generación de inteligencia artificial, muchos trabajos tradicionales van a quedar completamente desplazados. Este nuevo escenario requiere que nuestros estudiantes asimilen y dominen nuevas habilidades. Una de las principales es la de la integración de los conceptos y prácticas centrales de la matemática, física, química, biología, lenguaje y humanidades. Debe ser una integración generadora, que incluya la Tecnología e Ingeniería (STEM), capaz de permitirles construir soluciones eficaces a los nuevos desafíos que irán emergiendo. En este trabajo se muestra cómo Clases Públicas Cross-Border con apoyo TICs promueven la integración no sólo en STEM sino que también la colaboración entre escuelas y el desarrollo de habilidades siglo XXI.

STEM, Integración, Clases Públicas Cross-Border, Habilidades Siglo XXI, TICs

INTRODUCCIÓN

En un mundo cada vez más interconectado, marcado por una creciente automatización, con nuevas tecnologías del lenguaje, computación biológica, enormes cantidades de datos y una nueva generación de inteligencia artificial, muchos trabajos tradicionales van a quedar completamente desplazados. Los vehículos autónomos, las redes sociales digitales, los servicios de auto atención, los diagnósticos basados en el genoma, así como muchas otras tecnologías difíciles de predecir significarán cambios disruptivos en la naturaleza del trabajo. Este nuevo escenario requiere que nuestros estudiantes asimilen y dominen nuevas habilidades. Una de las principales es la de la integración de los conceptos y prácticas centrales de la matemática, física, química, biología, lenguaje y humanidades. Debe ser una integración generadora, capaz de permitirles construir soluciones eficaces a los nuevos desafíos que irán emergiendo.

Esta visión integrada de las disciplinas es la que se denomina STEM por sus siglas en inglés de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas. El desafío es enorme pues tradicionalmente las disciplinas son enseñadas por docentes especializados en cada una de ellas y que no dominan las otras. Aún en el primer ciclo básico donde son enseñadas por un mismo docente la integración es mínima. Esta desconexión se profundiza aún más por el aislamiento docente. A diferencia del trabajo en otras profesiones, cada docente trabaja en aulas desconectadas de las otras y sus docentes respectivos. Mientras hace su clase no puede conectarse con otros docentes que en ese momento hacen clase en otras escuelas.

Además, la integración STEM debe dar lugar a soluciones, y por esta razón, también se incluye la ingeniería. Esto es algo completamente nuevo en la educación básica y media. Requiere enfrentar problemas reales y no de texto escolar. Es esencial también el trabajo en equipo además del multidisciplinario.

En este trabajo se muestra una experiencia piloto de integración de las disciplinas STEM y cómo apoyándose en tecnología es posible establecer conexión sincrónica entre aulas y desarrollar Clases Públicas Cross-Border. Las redes sociales que emergen en esas actividades sincronizadas entre escuelas logran un gran interés y entusiasmo en los estudiantes. Es un adelanto del mundo interconectado que enfrentarán, en una combinación permanente de competencia y colaboración.

INTEGRACIÓN EN UN MUNDO INTEGRADO

Existe un creciente consenso de la urgente necesidad de introducir un cambio de foco en la enseñanza de las ciencias y la matemática. Debe responder a desarrollos actuales con disciplinas integradas así como también a modos innovadores de trabajo de los profesores responsables. Estos cambios provienen de repensar la Educación para este nuevo siglo, y prever lo que los estudiantes requerirán en 20 ó 30 años más: ¿Qué conocimientos y habilidades serán las críticas para cuando terminen la escuela? Es sabido que la velocidad de cambio experimenta una aceleración constante y que hoy la situación laboral es muy diferente a la que se enfrentó hasta hace poco. Es ahora mucho más difícil predecir los empleos que emergerán y los que desaparecerán. Desde la perspectiva de la educación esta tendencia significa que es más difícil pero apremiante y necesario visualizar el mundo en que se insertarán al trabajo aquellos que hoy están recién comenzando a estudiar. La inteligencia artificial, el aprendizaje por máquinas, el reconocimiento de voz, el análisis de imágenes, la “minería de textos”, las nuevas tecnologías computacionales para el análisis del lenguaje, las redes sociales y las tecnologías genéticas están cambiando el mundo a uno más conectado, dinámico e instantáneo. Es seguro que nuestros hijos tendrán trabajos no sólo distintos a los nuestros, sino que radicalmente distintos a los trabajos típicos de toda la generación actual. Un estudio reciente de la Universidad de Oxford (Frey & Osborne, 2013), sobre las 702 ocupaciones catalogadas por el Departamento del Trabajo de EE.UU., estima que la mitad de las ocupaciones están en alto riesgo de automatizarse en los próximos 10 a 20 años.

La cuantificación del problema es compleja debido a la gran cantidad de factores, a la dificultad de prever el impacto a largo plazo en los trabajos de los estudiantes y el impacto en el bien común. Una primera estimación parte por analizar la educación actual y comparar el país con otros. Por ejemplo, el impacto de la educación considerada solo como bien público nos da ciertas luces. Consideremos solo el costo a la sociedad por el mayor tiempo que necesita invertir para lograr el nivel de desempeño típico de otros países. Según el reporte de la OCDE, PISA 2012 Chile logra 423 puntos en PISA de matemáticas, a diferencia de la media OCDE que logra 494. Esto significa según OCDE que nuestros estudiantes requieren 1,75 años adicionales de estudio para lograr el mismo desempeño que el promedio de los estudiantes de los países OCDE obtienen, y más de 3 años adicionales para alcanzar el nivel de los países asiáticos. Dado el enorme costo de educar a los estudiantes, que aproximadamente es 1 millón por alumno al año, este retardo significaría un gasto adicional millonario: el que resulta de educar por 1,75 años extras a cada generación. Dado que cada generación tiene aproximadamente 200 mil estudiantes, entonces podemos estimar el costo anual del retraso. Considerando que entre ciencias y matemáticas se ocupa

cerca de un tercio de los tiempos escolares, entonces el retraso tiene para la sociedad un valor anual de 300.000 pesos por 200 mil estudiantes por 1,75 años, lo que da un total de 105 mil millones de pesos anuales. Esto es un costo directo que afecta a todos. Es claramente una subestimación, pues habría que considerar varios otros costos como los derivados a un menor desarrollo científico y tecnológico, y menos emprendimientos, así como costos personales para los estudiantes. Otra arista cuantificable está por el lado de la solución. Hay más de 100 mil docentes en Chile que deben enseñar ciencias y/o matemáticas, y que deberían ajustar sus prácticas. Son docentes que enseñan desde primero básico a cuarto medio. Adicionalmente, hay que considerar que no es fácil cambiar prácticas y mejorar los desempeños de los estudiantes. Según (Kane et al, 2007, 2008; Harris et al, 2008)), la capacitación y postgrados tradicionales no logran efectos en los logros de los estudiantes. Estos números sólo dan cuenta de cambios en la educación para lograr lo que los países desarrollados actualmente logran. Sin embargo, el desafío es aún mayor. Es necesario preparar para el futuro.

Por otra parte, existe el problema del aislamiento del docente. Por lo general, el docente pasa el día entre cuatro paredes, solo frente a su clase y aislado de sus pares (Labaree, 2010). Tiene pocas oportunidades de observar a pares, de intercambiar información o recibir retroalimentación. El aislamiento espacial dificulta la imitación, adaptación y transferencia de buenas prácticas. En las actividades esporádicas de desarrollo profesional docente es frecuente encontrar que sólo recibe instrucción sobre contenidos y eventualmente conceptos sobre estrategias didácticas, pero no observa a pares realizando clases con estudiantes. Por esta razón las actividades de desarrollo profesional docente no facilitan la transferencia de prácticas y fosilizan el aislamiento.

Frente a estos enormes desafíos han surgido respuestas basadas en la enseñanza integrada de ciencias y matemáticas tal como lo expresa el reporte al presidente de EEUU de la Executive Office of the President: Prepare and Inspire: K-12 Science, Technology, Engineering, and Math (STEM) Education for America's Future. Estos nuevos currículos para la enseñanza básica y media en muchas partes del mundo hablan de concentrarse en prácticas y habilidades STEM (por su sigla en inglés para Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas), y en algunos casos como Corea del Sur incluyen las Artes y Humanidades. Estas prácticas se refieren a cómo construir modelos, tanto físicos, biológicos, computacionales y matemáticos, que a su vez requiere cambios en el modo de enseñar las ciencias y las matemáticas, integrándolas y dejando de aprenderlas por separado como también cambios en actitudes y habilidades interpersonales tales como la habilidad de crear e implementar ideas inusuales, aprender a reconocer y apreciar similitudes y diferencias, aprender a trabajar en equipos, desarrollar mayor perceptividad social y capacidad de persuasión.

Por lo tanto, frente a la situación y necesidades referidas es importante repensar las clases de matemáticas y ciencias. Es necesario asumir el desafío de integrar áreas del conocimiento que tradicionalmente en nuestras escuelas han estado completamente aisladas. El docente de biología usualmente no introduce o no conoce bien los conceptos matemáticos relevantes y no visualiza su potencial para sus clases. Por otra parte, el docente de matemáticas tampoco

vislumbra cómo podría usar la matemática para ayudar a entender la biología. El docente de tecnología a lo más piensa en utilizar algunos videos, internet o software. La ingeniería, por otra parte, no está en el currículum, y es considerada como completamente ajena a la escuela.

Tal como propone las National Academies en su reporte STEM Integration in K-12 Education, es necesario investigar cómo lograr un entendimiento profundo e integrado, y buscar estrategias para enseñar de manera que los estudiantes puedan transferir las estrategias y conocimientos a nuevas situaciones. Se necesita que los docentes puedan enseñar a resolver problemáticas reales y significativas y, por lo tanto, que integren varias disciplinas.

Para enfrentar este desafío educacional una alternativa es el Estudio de Clases y Clases Públicas. Corresponden a una tradición centenaria japonesa de Desarrollo Profesional Docente (Isoda et al. 2012). Por ejemplo, en un proyecto APEC liderado por la Universidad de Tsukuba, la principal formadora de docentes de Japón, se trabaja en el estudio de clases y clases públicas para la preparación frente a desastres naturales como tsunamis, terremotos, huracanes, aluviones e incendios forestales (Araya, 2016). Estos son problemas reales, no problemas de texto ni problemas inventados para las clases. Son problemas que los estudiantes ven en sus vidas diarias o los ven frecuentemente en los medios. Para entender estos problemas y desarrollar soluciones se requiere integrar las ciencias y la matemática. Un punto central es el Modelamiento. Esta ya aparece como habilidad central en los currículums de matemáticas y de ciencias. Es por lo tanto esencial investigar cómo enseñar Modelamiento en Ciencias y Matemáticas. Dada la magnitud y naturaleza del desafío una estrategia posible es la de trabajo en equipo de docentes e investigadores, con Estudio de Clases y Clases Públicas.

En síntesis, los desafíos educacionales para enfrentar la naturaleza del trabajo en los próximos 20 años y la necesidad de integración en STEM requieren cambios muy significativos de prácticas docentes. Una alternativa analizada en este trabajo es el Estudio de Clases y Clases Públicas, con apoyo TICs. De esta forma una comunidad de docentes y estudiantes de diferentes escuelas exploran y perfeccionan las prácticas para integrar las ciencias y matemáticas.

CLASES PÚBLICAS STEM CROSS-BORDER CON APOYO TIC

Presentamos aquí una experiencia de Clase Pública Cross-Border con apoyo TIC que apunta a dotar al docente de esta poderosa e innovadora herramienta para desarrollar una reflexión mucho más profunda sobre sus clases. Esta innovación tiene dos fundamentos conceptuales: la reflexión y la sincronía.

La *reflexión* proviene evolutivamente del diálogo con otros. Según Tomasello (2014), el razonamiento individual o monológico es un parásito del razonamiento dialógico, el que se realiza conversando con terceros. La reflexión individual, en solitario, es en realidad una interiorización de las conversaciones y razonamientos que realizamos para convencer a otros Por esta razón se aprende mucho al conversar con otros. Se lo obliga a ubicarse en la posición del otro, a entenderla, a mirar el mundo desde ese ángulo. Esto ayuda a la

comprensión de lo que uno efectivamente hace y produce en clase. En esta interacción se llega paulatinamente a compartir algunos puntos de vista. Pero no es lo mismo tener niños al frente que también tener a otros docentes. El diálogo es en otro plano. En ese diálogo el docente tiene acceso al punto de vista de un tercero que observa desde un ángulo muy particular. Algunos están concentrados en ciertos alumnos particulares, otros ven la clase más holísticamente. Algunos están siguiendo la lógica de los conceptos y su desencadenamiento, otros están siguiendo la dinámica social. Todos estos son planos de diálogo que ahora no están presente en las prácticas docentes. Al proveerlo con las clases públicas, la conversación es mucho más completa. Además de las interacciones y conversaciones con los estudiantes se provocan otras con los pares. Es una reflexión desde la práctica, situada y colectiva, que no parece existir en la formación docente actual.

Por otra parte, el otro fundamento está en la sincronía (Isoda, 2015). No es lo mismo recibir retroalimentación posterior que estar con los otros docentes in situ. El docente puede inmediatamente observar reacciones de su audiencia. Puede ver si un chiste logra la risa no solo de los estudiantes, sino también de los demás profesores. Puede inmediatamente ver sus reacciones en sus rostros y posturas corporales. En actividades conjuntas como torneos (Araya et al. 2014, 2016) entre escuelas puede también lograr sincronías mayores con varios docentes en clases públicas simultáneas y conectadas. Este es una verdadera innovación que rompe la tradición milenaria de clases aisladas. Con la tecnología este enorme salto es posible. La clase se parece más a un torneo de fútbol, con partidos en los que cada profesor es un entrenador con sus jugadores, y adicionalmente hay una audiencia de docentes presenciales y a distancia observando y estableciendo conversaciones para el mejoramiento de las clases. Según Gamble et al (2014), el lenguaje proviene evolutivamente del acicalamiento entre pares, luego de la risa colectiva que sincroniza pequeños grupos, luego del canto y danza colectiva que sincroniza a muchos más y logra descargas de endorfinas que nos unen, aumenta la cohesión social y muy especialmente la colaboración. En ese estado emocional social que logra la sincronización, estamos más dispuestos a cambiar nuestra conducta. Aquí entonces hay una gran oportunidad de sentirnos parte de una comunidad, a aceptar la retroalimentación y a transformar nuestras prácticas.

El desafío de integrar los conceptos y prácticas claves de STEM es aún mayor que los desafíos de clases tradicionales (Krajcik et al., 2014). Ahora se requiere más que nunca la competencia de docentes y de expertos de varias disciplinas. Es decir, contar con docentes de lenguaje, ciencias y matemáticas, además de expertos en cada una de estas disciplinas, todos observando y participando en la misma clase pública. Es por lo tanto prácticamente imposible hacer la integración y diseñar y ajustar buenas clases en forma aislada. En el Estudio de Clases y particularmente en las Clases Públicas japonesas reside una gran oportunidad para afrontar este enorme desafío. Adicionalmente con el apoyo tecnológico como un Sistema de Soporte al Desempeño (Reynolds & Araya, 1995), esta solución puede potenciarse, aumentar la frecuencia e intensidad, y así poder lograr un mayor impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

CLASE PÚBLICA CROSS-BORDER SOBRE CONTENIDO DE ENERGÍA

Como parte de un proyecto APEC se ha diseñado, piloteado y sometiendo al proceso de Estudio de Clase una primera Clase Pública STEM en el contenido de Energía. La clase integra conceptos y prácticas centrales no sólo de física y matemática, sino además de biología, economía, ciencias sociales, tecnología e ingeniería.

Figura 1: Clase Pública Cross Border donde se integraron conceptos centrales de matemática (estimación de volumen) y de energía (kCal generada por estudiantes). A la izquierda se observa una maqueta de la sala para ayudar a estimar su volumen y cubos blancos en la mano izquierda del profesor que modelan un metro cúbico. Al centro se modela dos kCal con dos pelotas de pimpón naranjas que sostiene el alumno. A la derecha estudiante explica su razonamiento escribiendo en su tablet sincrónicamente con los estudiantes de su curso y los de otros cursos participantes.

Por otra parte, además de la participación de varios cursos de la escuela Santa Rita de Casia de La Pintana, han participado cursos del Internado Nacional Barros Arana (INBA), un curso de la escuela Fray Luis Beltrán de Valparaíso y apoyada por investigadores de la Universidad Católica de Valparaíso, y un curso de la escuela Draper Intermediate de Texas, EEUU.

Figura 2: Clase Pública Cross Border: a la izquierda el INBA, al centro la escuela Draper Intermediate de Texas, y a la derecha la escuela Santa Rita. Todos saltan sincronizadamente.

La clase pública está orientada a la Energía que es un concepto central en física, pero que además es transversal, y es también central en química, biología, economía, desarrollo social, etc. Además la clase tiene por objetivo a despertar la conciencia de la necesidad de mejorar la eficiencia para enfrentar los desafíos ambientales que se irán provocando en la medida que más países salen del subdesarrollo y van aumentando la captura de energía. El desafío ha sido muy estimulante para todos, estudiantes, docentes e investigadores. En septiembre se realizó la primera clase pública piloto con la Escuela Santa Rita y la Escuela Fray Luis Beltrán de Valparaíso. Participaron dos octavos, uno de cada escuela, 8 docentes observadores y un profesor.

El 4 de Octubre del 2016 se realizó la segunda clase pública piloto. Participaron un octavo de Santa Rita de Casia de La Pintana, un primero medio del INBA, y un sexto de Draper Intermediate (Texas, EEUU). El desafío de hacer simultáneamente clase a tres cursos de diferentes niveles (con estudiantes de diferentes edades), de diferentes países, y de diferentes idiomas, fue un desafío muy estimulante y enriquecedor. La clase fue transmitida en vivo

por video streaming y fue observada por decenas de docentes y expertos en una reunión APEC de que se realizaba en Lima, Perú.

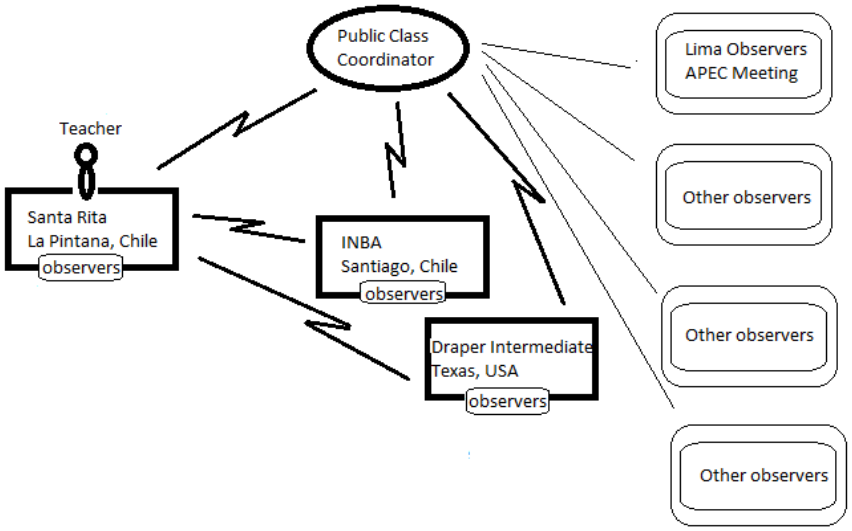


Figura 3: El docente realizó la clase en la Escuela Santa Rita con estudiantes presenciales, y con estudiantes conectados por Skype en INBA y Draper Intermediate de Texas, y recibiendo preguntas por internet que cada uno respondía en sus tablets. El coordinador comentaba y transmitía por video streaming y traducía instrucciones claves.

El impacto de la tecnología se observa en la participación de los estudiantes. Si se mide el discurso por la cantidad de palabras, se encuentra que los estudiantes produjeron el 9% del discurso registrado. Sin embargo, si se consideran también las respuestas escritas en los tablets entonces el discurso de los estudiantes pasa a ser el 66% del discurso de la clase. Este es un aumento enorme. Muestra que la participación no se pierde por tener varios cursos paralelos. La clase Cross-Border con apoyo TIC permite crear una comunidad sincronizada y con participación activa de todos.

CONCLUSIONES

Luego de esta primera experiencia piloto de Clase Pública Cross Border insertada en un proyecto APEC, estimamos que puede tener un gran impacto en el Desarrollo Profesional Docente. El uso de tecnología TIC ha sido fundamental para integrar diferentes escuelas sincrónicamente y asegurar la participación activa de cada uno de los estudiantes. Es un salto cualitativo y disruptivo a la Capacitación y Formación de docentes. Es una poderosa extensión de la centenaria tradición japonesa de estudio de Clases y Clases Públicas, que es posible con TIC de última generación. El mecanismo propuesto es un Sistema de Soporte al Desempeño del docente (Reynolds & Araya, 1995) que por una parte apoya el Desarrollo Profesional Docente durante la misma práctica docente, y, por otra parte, es una poderosa herramienta para el desarrollo de habilidades Siglo XXI de los estudiantes. Los conecta a cursos remotos con los que colaboran sincrónicamente, intercambian puntos de vista, los integra a comunidades de aprendizaje, y los acerca al mundo del trabajo que tendrán que enfrentar al terminar la escuela.

Agradecimientos: Al Proyecto APEC No: HRD 03 2015 A Textbook Development for Energy Efficiency, Energy Security and Energy Resiliency: A Cross-Border Education

Cooperation through Lesson Study, a Basal Funds for the Centers of Excellence Project FB 0003 from the Associative Research Program of CONICYT, y al Proyecto Fondef D15I10017 de CONICYT.

Referencias

Araya, R.; Aguirre, C.; Bahamondez, M.; Calfucura, P.; Jaure, P.(2016) Social Facilitation due to online inter-classrooms Tournaments. *Lecture Notes in Computer Science*. 9891, 16-29.

Araya, R., Jiménez, A., Bahamondez, M., Calfucura, P., Dartnell, P., & Soto-Andrade, J. (2014). Teaching modeling skills using a massively multiplayer online mathematics game. *World Wide Web*, *17*(2), 213-227.

Frey & Osborne (2013) The Future of Employment: How susceptible are jobs to computerisation? Department of Engineering Science, University of Oxford, Oxford.

Gamble, C.; Gowlett, J.; Dunbar, R. (2014). Thinking Big: How the Evolution of Social Life Shaped the Human Mind

Harris, D., Sass, T.: (2008) Teacher training: teacher quality and student achievement. University of Wisconsin and Florida State University.

Isoda (2015) Dialectic on the Problem Solving Approach: Illustrating Hermeneutics as the Ground Theory for Lesson Study in Mathematics Education. In Cho, Jung Je (Ed) Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. Verlag: Springer.

Isoda, M., Arcavi, A., Mena-Lorca. A. (2012). El estudio de clases japonés en matemáticas: su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global, 3a ed. Valparaiso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Kane, T. J., & Staiger, D. O. (2008). *Estimating teacher impacts on student achievement: An experimental evaluation* (No. w14607). National Bureau of Economic Research.

Kane et al (2007). What does certification tell us about teacher effectiveness?

Krajcik, J. S., Codere, Susan, Dahsah, C., Bayer, R., & Mun, K.. (2014). Planning Instruction to Meet the Intent of the Next Generation Science Standards. *Journal of Science Teacher Education*.

Labaree, D. (2010). *Someone has to fail. The Zero-Sum Game of Public Schooling*. Harvard : Harvard University Press.

National Research Council (2012). *A Framework for K-12 Science Education: Practices, Crosscutting Concepts, and Core Ideas*.

National Research Council (2014). *STEM Integration in K-12 Education: Status, Prospects, and an Agenda for Research.*

National Research Council (2015). *Enhancing the Effectiveness of Team Science.*

OCDE, PISA 2012 Results: *What Students Know and Can Do Student Performance in Mathematics, Reading and Science*, Volume I.

Office of Educational Technology (2010) *Transforming American Education. National Educational Technology Plan 2010 Learning Powered by Technology*.

Reynolds, A. & Araya, R. (1995) *Building Multimedia Performance Support Systems*. McGraw-Hill, New York.

Tomasello, M. (2014). *A Natural History of Human Thinking*. Harvard University Press.

DESARROLLO MATEMÁTICO Y ESTADÍSTICO: EXPLORANDO SU COMPETENCIA META-REPRESENTACIONAL

Soledad Estrella
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen: Los currículos y las pruebas internacionales han posicionado la habilidad de representar relevando la importancia educativa de las representaciones como parte fundamental en el análisis de los datos y en la comprensión de conceptos matemáticos y científicos. Las representaciones que producen los estudiantes en primaria y sus componentes han sido poco estudiadas en su diversidad. El estudio ha adoptado un marco cualitativo para identificar los potenciales recursos intuitivos que estudiantes de primaria de primero a cuarto año básico activaron cuando construyeron representaciones. Los resultados muestran diversidad de representaciones construidas por los estudiantes, y la presencia de algunos componentes estructurales de las representaciones, como variable, frecuencia, base-lineal. Todo bajo un reciente enfoque que propone iniciar tempranamente la creación libre de representaciones para propiciar el desarrollo de la competencia metarepresentacional, pues la introducción temprana de experiencias de análisis exploratorio de datos -con representaciones de los mismos-, ofrece a los estudiantes oportunidades para desarrollar familiaridad y fluidez con dichas representaciones.

Estadística temprana, representaciones de datos, competencia metarepresentacional

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, la enseñanza de la estadística se ha enfocado en establecer procedimientos para la construcción de diversas representaciones de datos, pero los alumnos no llegan a entender para qué son las representaciones o las razones por las que los gráficos se construyeron. Además, a menudo los estudiantes ignoran las representaciones que han construido y concluyen basándose en sus propias creencias. Más aún, varias investigaciones han encontrado que tras la recopilación y el análisis de datos los estudiantes no se basan en ellos y esperan confirmar su conocimiento o creencia personal de la situación (Konold et al., 1997; Watson et al., 1995). El reconocimiento de la necesidad de los datos es un elemento fundamental del pensamiento estadístico, cuestión que algunos estudiantes pareciesen no reconocer.

Estrella, Olfos, Vidal-Szabó, Morales y Estrella (2017) sostienen que permitir desde la infancia la creación de las propias representaciones de datos, sin enseñanza previa, comunicarlas, explicarlas y compararlas, permitiría desarrollar con sentido los conceptos en juego al representar los datos.

Precisar estos saberes puede fortalecer el conocimiento de los profesores sobre el nivel de complejidad de la enseñanza referida a las representaciones estadísticas y les ayudaría en su toma de decisiones en la práctica del aula (Estrella, Mena-Lorca, Olfos, 2015).

Marco conceptual de la competencia metarepresentacional

Con el fin de comprender cómo los estudiantes generan representaciones hemos considerado la competencia metarepresentacional, MRC (diSessa et al., 2004; diSessa & Sherin, 2000).

Esta competencia describe la completa gama de capacidades que los individuos utilizan para construir y usar representaciones externas (ver Tabla 1).

Aspectos	Definiciones	Foco
Invención (construcción)	Capacidades y habilidades que permiten a los estudiantes concebir nuevas representaciones	En las ideas y habilidades que poseen los estudiantes que les permiten inventar o diseñar nuevas representaciones
Crítica	Conocimiento crítico sobre lo que es esencial para evaluar la calidad de las representaciones	Los conocimientos de los estudiantes que les permite juzgar y comparar la calidad de las representaciones, en cuanto a lo que constituye una buena representación
Funcionalidad	Razonamiento que permite comprender el propósito de las diferentes representaciones, su uso y sus limitaciones	En el razonamiento de los estudiantes para comprender el propósito y el uso de diferentes tipos de representaciones dependiendo del tipo de datos presentados
Aprendizaje o Reflexión	Estrategias para promover la comprensión de las representaciones	Reflexión que revela la toma de conciencia de los estudiantes acerca de su propia comprensión de las representaciones y de los vacíos en su conocimiento

Tabla 1.Aspectos de la MRC, competencia metarepresentacional (Shering y diSessa, 2000).

METODOLOGÍA

Sujetos

El estudio adoptó un marco cualitativo para identificar los potenciales recursos intuitivos de estudiantes de primaria de primero a cuarto año básico que activaron al construir representaciones y explicar algunos componentes. Tras el análisis de más de un centenar de representaciones de datos construidas por estos estudiantes, se analizó el comportamiento de dichas representaciones en el status personal de herramienta cognitiva exhibida por los estudiantes y la explicación dada para algunas de las componentes estructurales de las representaciones.

Instrumento y aplicación

Se realizó una entrevista que buscaba identificar y caracterizar las representaciones de datos construidas por los estudiantes, compuesta por tres tareas.

Las entrevistas se realizaron individualmente y fueron videograbadas en las dependencias de cada escuela.

Análisis

Los datos fueron las videograbaciones de las entrevistas clínicas semiestructuradas y la transcripción de dichas entrevistas.

Para el análisis de los datos se consideraron las categorías representacionales definidas desde la literatura, textos lineales, listas y tablas, (Estrella, 2014; Martí, 2009); y las categorías levantadas desde las producciones elaboradas por los alumnos, variable, frecuencia, base-lineal.

Recogidos los datos, el análisis se llevó a cabo en tres fases. En este escrito se muestran las Fases I y II.

RESULTADOS

Fase I.

Las representaciones de datos construidas por los estudiantes fueron identificadas y clasificadas según las categorías. Las que más se construyeron fueron tablas y gráficos sin eje Y.

Representaciones	Grado 1	Grado 2	Grado 3	Grado 4
Texto Lineal	2	5	6	0
Lista	7	17	2	1
Tabla	2	5	18	14
Gráfico sin eje Y	19	18	9	18
Gráfico con eje Y	0	0	2	3

Tabla 2. Distribución de las categorías de representaciones de datos construidas.

La Tabla 2 muestra los diversos formatos representacionales producidos. Se observa que el texto lineal y la tabla, fueron poco construidos en el grado 1. El formato tabla fue construido mayoritariamente en los grados 3 y 4, y los gráficos sin eje Y se presentan en todos los grados. No obstante los pocos gráficos con eje Y fueron construidos en los grados 3 y 4.

Del total de representaciones, 108 de ellas fueron construidas por estudiantes de los grados 1 y 2. Según las categorías representacionales, la mayoría de ellas son del tipo gráfico sin eje Y, y lista. Mientras que el resto de las representaciones que fueron construidas por los estudiantes en los grados 3 y 4, mayoritariamente fueron tabla y gráfico sin eje Y.

Desde el Figura 1, se observa la totalidad de las representaciones exhibidas por cada uno de los estudiantes. De estos, 12 estudiantes construyeron más de 6 representaciones, quienes cursaban los grados 1 y 2. Asimismo, los que construyeron no más de dos tipos de representaciones fueron 13 estudiantes.

Respecto a si existen formatos de representación preferidos según los diferentes grados, se observa desde la Figura 1 que los estudiantes de los grados 1, 2 y 4, construyeron preferentemente gráficos sin eje, y desde el grado 3 construyeron tablas de datos.

(1)	(2)	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°
1	1	*L*	*X*	*X*	**X**	**X**	**X**											
	2	*L*	*L*	*L*	**g**	**g**	**t**	**t**										
	3	*g*	**L**															
	4	*X*	*L*	*X*	*X*	*L*	*g*	*g*	*g*	*g*	*T*							
	5	*g*	*g*	*g*	*X*	*X*	*g*	**g**	**g**	**g**	**X**	**T**	**g**					
	6	*g*	**g**															
	7	*X*	*X*	*X*	*g*	**g**												
2	8	*g*	**g**	**g**	**L**	**L**												
	9	*X*	*X*	*X*	*L*	*X*	*g*	*X*	*X*	*g*	*g*	*X*	**t**	**L**	**X**	**t**	**L**	**L**
	10	*X*	*X*	*X*	**g**	**T**												
	11	*L*	*X*	*X*	*L*	**T**	**L**	**L**										
	12	*X*	*X*	*g*	**t**	**g**	**g**											
	13	*L*	*L*	*L*	**t**	**X**	**t**	**T**	**T**									
	14	*L*	*L*	*X*	**g**	**g**	**g**	**g**	**T**									
	15	*X*	**g**	**g**	**g**	**X**	**g**	**L**	**L**									
3	16	*g*	*t*	**t**	**g**	**T**	**T**	**G**	**T**	**X**								
	17	*g*	*g*	*L*	**t**	**t**	**L**	**T**	**T**									
	18	*g*	**t**	**g**	**g**													
	19	**T**	*g*															
	20	*X*	**T**	**T**														
	21	**T**	**t**	*X*	*X*	*T*												
	22	*X*	*X*	*X*	*G*	**X**	**X**	**T**	**T**	**T**								
	23	*g*	*T*	**T**	**T**	**T**	**T**											
	24	*g*	**g**	**T**														
4	25	*g*	*T*	**T**	**T**	**X**	**L**											
	26	*g*	*g*	*X*	**g**	**g**	**g**	**T**										
	27	*g*	**T**	**T**	**g**	**T**	**T**											
	28	*g*	*G*	*G*	**G**	**g**	**T**											
	29	*g*	*T*	**g**	**T**	**T**												
	30	*g*	**g**	**g**	**g**	**T**												

Figura 1. Secuenciación de representaciones producidas por estudiantes. [t: texto lineal, L: lista, T: tabla, g; gráfico sin eje Y, G: gráfico con eje Y, X: otra representación].

Considerando la aparición secuencial de las representaciones, las dos primeras representaciones de datos que los estudiantes producen secuencialmente, en los grados 1 y 2 acuden inicialmente a listas y gráficos sin ejes; los de grado 3 elaboran gráficos sin eje y en grado 4. Comienzan a construir tablas en el grado 3 y en el grado 4; y solo se observa un gráfico con eje Y en este último grado.

Al buscar cierta estabilidad en el comportamiento de la construcción de representaciones en el status personal de herramienta cognitiva exhibida por los estudiantes, y considerando la emergencia al ser creadas secuencial y conjuntamente, destaca que en el grado 4 todos los estudiantes entrevistados (7) crearon gráfico sin eje Y y luego tabla (g → T). Sin embargo, en las representaciones de los demás grados no es posible encontrar esta u otra relación entre formatos representacionales.

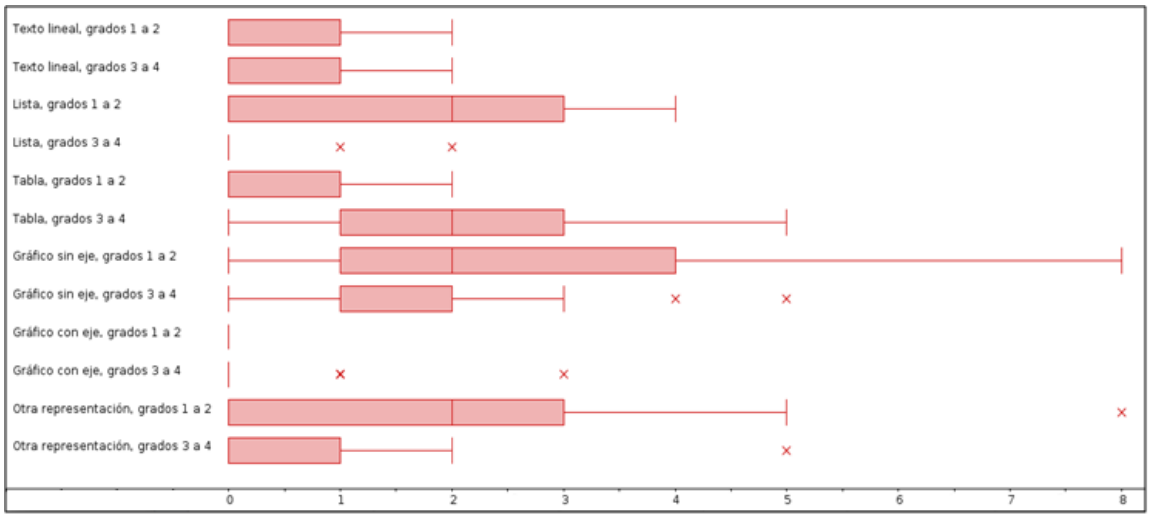


Figura 2. Comportamiento de los tipos de representaciones construidas por estudiantes agrupados por grado.

Desde la Figura 2 se observa mayor variabilidad en el número de representaciones categorizadas como gráficos sin eje Y en los grados 1 y 2. También se observa, que en los grados 3 y 4 no aparece la creación de listas ni de gráficos con eje Y.

Fase II.

La entrevista a cada uno de los estudiantes permitió acercarse a la estructura cognitiva de los estudiantes y ha entregado información acerca de los recursos intuitivos a los que ellos acuden espontáneamente al representar datos.

Componentes	Grado 1	Grado 2	Grado 3	Grado 4
Variable	5	8	8	7
Frecuencia	2	4	6	7
Base-lineal	6	5	6	7

Tabla 3. Componentes en formatos representacionales construidos por estudiantes.

La tabla 3 muestra que la gran mayoría de los estudiantes puede explicitar el concepto de la variable en juego, color de las fichas, independiente del grado que cursa. Solo dos alumnos de grado 1 no presentan este concepto en su desempeño.

El componente numérico de frecuencia se observa en 19 estudiantes. Sin embargo, se destaca que todos los estudiantes del grado 4 presentan este componente frecuencia, en contraste a solo dos del grado 1.

Los componentes geométricos base-lineal se presentan estables en todos los estudiantes de grado 4. Los estudiantes que no presentan estos componentes geométricos se encuentran desde los grados 1 a 3.

CONCLUSIONES

Los datos recabados dan cuenta que estos estudiantes de los grados 1 a 4 muestran competencia metarepresentacional al crear representaciones incluyendo otras representaciones no categorizadas.

En esta investigación exploramos las estructuras numéricas y geométricas evidentes en sus representaciones. Como ambas aparecen simultáneamente en la producción de la representación, observamos la coordinación de componentes estructurales numéricos y geométricos. Al respecto, 20 estudiantes que construyen tablas, dibujan la grilla rectangular (que respeta la noción de base-lineal) en la cual existe una clara distinción entre variable cualitativa y variable cuantitativa.

Todos los estudiantes del grado 4 muestran los componentes numéricos (frecuencia) y geométricos (base-lineal), incluido el componente conceptual variable. Debido a que las representaciones producidas se centran mayoritariamente en los formatos tabulares y gráficos sin eje Y, desde las Tablas 2 y 3, parece natural establecer que a mas grados que hayan cursado los estudiantes realizan mayores relaciones de las componentes estudiadas.

La introducción temprana de experiencias de análisis exploratorio de datos -con representaciones de los mismos-, ofrece a los estudiantes oportunidades para desarrollar familiaridad y fluidez con las representaciones como poderosas herramientas cognitivas.

La MRC se ha evidenciado en la mayoría de estos estudiantes, quienes han desplegado la habilidad de producir y usar representaciones de datos, poniendo en juego las habilidades para criticar y modificar representaciones y diseñar nuevas representaciones, comprenderlas y explicarlas.

Agradecimientos: al Proyecto Ecos C13H03, al Proyecto Fondecyt 11140472 de CONICYT y a Basal Funds for the Centers of Excellence Project FB 0003 from the Associative Research Program of CONICYT.

Referencias

diSessa, A. (2004). Metarepresentation: Native competence and targets for instruction. *Cognition and Instruction, 22*(3), 293-331.

diSessa, A., & Sherin, B. (2000). Meta-representation: an introduction. *Journal of Mathematical Behavior*, 79, 385–398.

Estrella, S., Olfos, R., Morales, S., Vidal-Szabó, S., & Estrella, P. (2017). Competencia metarepresentacional en los primeros grados: representaciones externas de datos y sus componentes. *Enseñanza de las Ciencias* (submitida).

Estrella, S., Olfos, R., & Mena-Lorca, A. (2015). El Conocimiento Pedagógico del Contenido de Estadística en Profesores de Primaria/Pedagogical knowledge of statistics content among primary school teachers. *Revista Educacao e Pesquisa, 41*(2), 477-493.

Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación, 14*(2), 1-23.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., & Gagnon, A. (1997). Students analyzing data: Research of critical barriers. En J. Garfield & G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics* (Proceedings of the 1996 International Association of Statistics Education

round table conference, pp. 151–167). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En Andersen, Scheuer, Echeverría, & Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 133-148). Rotterdam: Sense Publishers.

Watson, J., Collis, K., Callingham, R., & Moritz, J. (1995). A model for assessing higher order thinking in statistics. *Educational Research and Evaluation, 1*, 247–275.

EL ROL DE LA VISUALIZACIÓN EN EL TRABAJO GEOMÉTRICO DEL PROFESOR: APORTES PARA SU DESARROLLO Y DIFERENCIACIÓN

Carolina Henríquez-Rivas
Universidad de La Frontera

Resumen: El propósito de esta comunicación es profundizar en el proceso de visualización en geometría, lo cual contempla analizar su rol en el trabajo del profesor cuando resuelve tareas geométricas. Se identifican dos tipos de tareas que favorecen formas diferentes de visualizar y se aporta con evidencia empírica concerniente al razonamiento geométrico de profesores en situaciones que demandan tratamientos figurales. El marco teórico que sustenta los análisis es el Espacio de Trabajo Matemático, el cual considera aspectos cognitivo, epistemológicos y cómo estos son articulados al resolver una actividad. Asimismo, se identifican las circulaciones en el trabajo matemático y los planos verticales activados. Finalmente, se contempla la profundización de los aspectos teóricos involucrados.

Visualización, trabajo geométrico, profesor, circulación

INTRODUCCIÓN

En la presente comunicación se propone una profundización relativa al proceso cognitivo de *visualización* geométrica en el nivel secundario, lo cual forma parte de una investigación más amplia relativa al trabajo geométrico del profesor de secundaria (Henríquez-Rivas & Montoya-Delgadillo, 2016; Henríquez-Rivas & Montoya-Delgadillo, 2015; Henríquez, 2014). Específicamente, en esta comunicación se analiza el rol de la visualización en el trabajo geométrico del profesor al resolver tareas geométricas, lo cual contempla identificar tipos de tareas que favorecen ciertas formas de visualizar y la caracterización de este proceso. Asimismo, se presentan los análisis de evidencia empírica concerniente a los razonamientos geométricos de profesores en situaciones que demandan tratamientos figurales en coordinación con razonamientos discursivos. El trabajo se sustenta en el marco *Espacio de Trabajo Matemático, ETM* (Kuzniak, 2011; Kuzniak & Richard, 2014), en el cual el proceso de visualización es uno de sus componentes en el plano cognitivo. La investigación se focaliza en la profundización de aspectos teóricos y la documentación de evidencia empírica sobre este tema. Para estos efectos, el ETM se articula con el enfoque de Duval sobre desarrollo de la visualización y coordinación con razonamientos discursivos (Duval, 1995, 1999, 2005).

La investigación relativa a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, específicamente sobre el proceso de visualización ha cobrado valor y vigencia en las últimas décadas, lo cual se aborda por Presmeg (2006) en el marco de la investigación reportada en *el International Group for the Psychology of Mathematics Educations* (PME). Presmeg ofrece una vasta revisión sobre trabajos realizados en relación a la visualización, presentando temáticas como: las dificultades de los estudiantes, la visualización en la enseñanza, la elaboración de currículos escolares, la influencia de los computadores en la visualización matemática, entre otros.

Respecto a los efectos de la informática en la visualización matemática, el trabajo de Yerushalmy, Shternberg y Gilead (1999), expone la visualización no solo en temas geométricos, sino que como un vehículo para resolver problemas algebraicos. Los autores clasifican diferentes tipos de problemas y destacan las ventajas del software dinámico para favorecer la coordinación entre registros semióticos. Otro trabajo sobre el papel de las figuras dinámicas operatorias para el aprendizaje de propiedades geométricas en la escuela secundaria es el desarrollado por Coutat y Richard (2011). El estudio está basado en el constructo de los *Espacio de Trabajo Matemático* (Kuzniak, 2011) y la interacción *sujeto-milieu*, y su propósito es enriquecer el referencial teórico que poseen los estudiantes.

En la perspectiva cognitiva desarrollada por Duval (1995, 1999, 2005), se destacan los sistemas semióticos con registros de representación y tratamientos específicos y, particularmente, investigación relativa al proceso de *visualización* –especialmente en geometría– considerando las condiciones cognitivas para su aprendizaje. En la perspectiva cognitiva de Radford (2007), relacionada con la semiótica cultural, el saber no es considerado como algo anterior a la actividad cognitiva, sino que dependiendo de la cultura, los *Sistemas Culturales Semióticos* pueden alcanzar un nivel más o menos elevado considerados como constitutivos del objeto conceptual –objetivan al objeto–.

Una investigación sustentada en el enfoque *Ontosemiótico* propone una manera de entender y relacionar el lenguaje y el pensamiento visual (Godino, Gonzato, Cajaraville & Fernández, 2012). En el estudio, la configuración de objetos y procesos en una práctica matemática está formada por dos componentes, visual y analítico, los cuales se apoyan en la solución de una tarea. Los autores proponen una tipología de objetos ligados a los procesos de visualización.

La presente investigación presenta un estudio al trabajo geométrico sintético de profesores centrado en el proceso cognitivo de visualización. Cabe precisar que, cuando aquí se habla del enfoque sintético, se hace en el sentido de Klein (1908), es decir “Geometría sintética, aquella en la cual se estudian las figuras en sí mismas sin intervención alguna de fórmulas” (p. 73). Finalmente, esta profundización al proceso de visualización reinterpreta y caracteriza el trabajo matemático de profesores de Educación Media, lo que conlleva a plantear las siguientes preguntas *¿cuál es el rol de la visualización en el trabajo del profesor cuando resuelve tareas geométricas?* Y, en relación a las tareas *¿qué tipos de tareas favorecen diversas formas de visualizar?, ¿qué elementos aportan a su desarrollo y diferenciación?*

En la siguiente sección, se presenta el marco teórico para analizar el trabajo matemático del docente que sustenta esta investigación.

MARCO TEORICO

Espacio de Trabajo Matemático

Este estudio se sustenta en el *Espacio de Trabajo Matemático* (Kuzniak, 2011; Kuzniak & Richard, 2014), específicamente en el dominio de la geometría (ETMG), el cual fue conocido inicialmente como *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico* desarrollado por de Houdement y Kuzniak (2006). El ETM se define como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven tareas matemáticas.

En el ETM se distinguen dos planos, epistemológico y cognitivo, y la articulación entre estos mediante un conjunto de génesis (semiótica, instrumental y discursiva) que favorecen su coordinación (Kuzniak, 2011). El *plano epistemológico* está constituido por tres componentes: *representante* o *representamen*, *referencial*, y *artefacto*. El *plano cognitivo* está conformado por tres componentes: los procesos de *visualización*, *construcción* y *prueba*. En las interacciones entre las génesis y sus componentes se definen los *planos verticales*, los que permiten relacionar el trabajo matemático caracterizando e identificando las diferentes fases (de trabajo) en relación a una tarea dada. Los planos son: semiótico-instrumental [Sem-Ins], instrumental-discursivo [Ins-Dis], y semiótico-discursivo [Sem-Dis] (Kuzniak & Richard, 2014), como se muestra en la Figura (1).

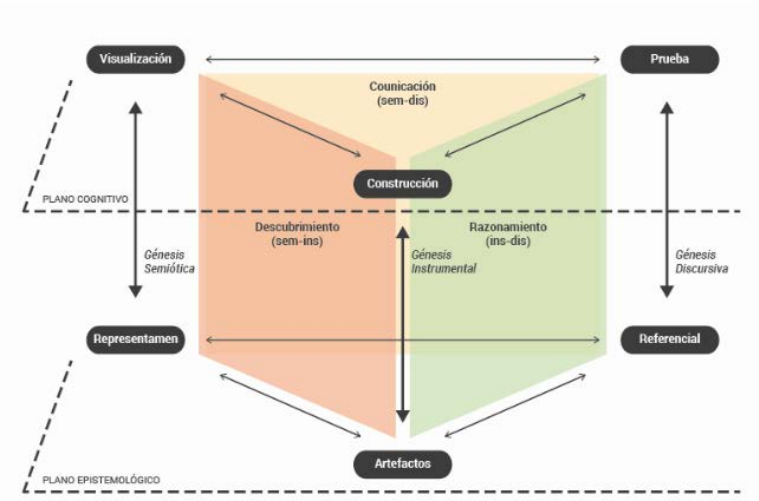


Figura 1: Los planos verticales en el ETM (Kuzniak & Richard, 2014).

Existen tres tipos de ETM: de *referencia*, definido sobre criterios matemáticos; *idóneo*, relativo a la enseñanza de un saber en una institución dada con una función definida; y *personal*, según la relación del individuo con un problema, sus conocimientos y capacidades cognitivas. En la presente comunicación se presentan los análisis relativos al ETM_G personal de profesores de matemática de Educación Media.

Los componentes del ETM deben ser reinterpretados dependiendo del dominio matemático específico, y según como se utiliza este espacio de trabajo se distinguen *paradigmas* en el dominio. En el caso de la geometría se denominan paradigmas *geométricos* y se clasifican como GI, GII y GIII.

Profundización del proceso de Visualización en el ETM

Para profundizar en el proceso de visualización se considera la perspectiva de Duval (1995, 1999, 2005), relativa a las condiciones cognitivas para el aprendizaje de la geometría. Para Duval, la *visualización* está basada en la producción de una representación semiótica (figuras geométricas, gráficos cartesianos) de un objeto, identificando dos modos de visualizar que pueden funcionar según el tipo de operación con las figuras y cómo se movilizan sus propiedades: uno *icónico* y otro *no-icónico*. Estos mecanismos de visualización se relacionan con cuatro formas de *ver* en función del rol de las figuras en las

actividades geométricas propuestas a los alumnos[10]. En el *botaniste* y *arpenteur-géomètre*, el reconocimiento de lo que representan las formas se hace por el parecido con el objeto que representa, o por comparación con un modelo "tipo" de formas; en el *constructeur* e *inventeur-bricoleur*, el trabajo implica la deconstrucción de las formas ya reconocidas visualmente (deconstrucción instrumental, descomposición heurística, y deconstrucción dimensional).

La presente comunicación se focaliza en el proceso de visualización *no-icónico*, específicamente, actividades geométricas que consideran deconstrucción instrumental y deconstrucción dimensional[11]. Cabe señalar que son identificadas las diferentes entradas al ETM según las componentes involucradas, lo que se denomina *circulaciones* entre las componentes de los planos (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca & Mena-Lorca, 2014; Henríquez Rivas & Montoya Delgadillo, 2015).

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

El estudio es de corte cualitativo relativo a los análisis del ETM_G *personal* de 19 profesores de secundaria al resolver dos tareas dadas. Las tareas fueron desarrolladas el mismo día, resolvieron primero la tarea 1, luego la tarea 2. La formación inicial de los profesores corresponde a instituciones chilenas (dos públicas y una privada), quienes fueron clasificados según su experiencia en: futuro profesor (FP), profesor debutante (PD) y profesor experimentado (PE). Del total de los participantes, serán considerados aquellos que utilizaron métodos geométricos sintéticos para resolver.

El propósito de las dos tareas planteadas es favorecer el proceso de visualización *no-icónica*, la primera del modo *constructeur* y, la segunda, del modo *inventeur-bricoleur* (Duval, 2005), ambas en coordinación con razonamientos discursivos y uso de artefactos, las que privilegian el trabajo en el *paradigma geométrico* GII (o bien, el paso de GI a GII).

La primera tarea se presenta en la modalidad con uso de software Geogebra, pues considerada otra versión con herramientas tradicionales (regla y compás). En relación a las temáticas involucradas en ambas tareas, se consideran elementos básicos de la Geometría Euclidiana en el plano tales como puntos, rectas, trazos, figuras planas, propiedades y definiciones de dichos elementos primarios. El criterio utilizado para la selección obedece a que son nociones que están presentes en el currículo de Educación Media y, por tanto, deberían poder ser abordadas por todos los participantes. Cabe señalar que, los análisis de las posibles estrategias de solución de las tareas no son contemplados en este escrito dada su extensión. A continuación, se muestran las tareas propuestas.

Tarea propuesta 1

La tarea formulada (en versión sintética) se presenta en la siguiente Tabla (1).

[10] Se han conservado los nombres en francés para no alterar su sentido.
[11] Parte de estos trabajos han sido presentados en la investigación de Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo (2016) y, recientemente en ICME-13 en el TSG 20 Visualisation in the teaching and learning of mathematics.

Dados dos puntos A y B en el plano, construir el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y B. Para ello use un software dinámico y **solo utilizando las herramientas "Intersección de dos objetos"** **, "Recta que pasa por dos puntos"** **y "Circunferencia dado su centro y uno de sus puntos"** . Marca con rojo el lugar geométrico y verifica la construcción moviendo los puntos A y B. 1. Describa paso a paso la construcción realizada. 2. ¿Cómo justifica que la construcción realizada es la correcta? ¿Qué definiciones y/o propiedades aparecen involucradas? 3. Si se movieran los puntos A y B ¿la solución sigue teniendo validez? Justifique su respuesta.

Tabla 1: Tarea propuesta 1

En esta tarea se espera favorecer el potencial dinámico que entrega el programa, específicamente, en la pregunta 3 para validar los procedimientos de la construcción realizada. Por otro lado, al restringir las herramientas del software (las mediciones), el trabajo en el paradigma GI queda limitado.

Desde el punto de vista del ETM se privilegia el modo de visualizar *constructeur*. Inicialmente, es activado el proceso de construcción, a través del uso de herramientas que proporciona el software y las operaciones realizadas en cierto orden. Estos procedimientos de construcción se deben comunicar, activando así la génesis discursiva y el plano [Sem-Ins]. La pregunta 2 coordina la génesis instrumental con la génesis discursiva, pues es preciso justificar la técnica de construcción. En esta fase del trabajo es activado el plano [Ins-Dis]. En la justificación de la construcción aparecen definiciones (como circunferencia, mediatriz) y propiedades (como de mediatriz, de paralelogramo). En términos de prueba, el trabajo tiene características de *pragmática e intelectual*, específicamente, del tipo *ejemplo genérico* (Balacheff, 1987). La validación de la construcción es activada en la pregunta 3, aprovechando el potencial dinámico del software, lo cual activa el plano vertical [Sem-Dis]. El trabajo favorece la génesis discursiva de la prueba sobre una configuración previamente construida.

Tarea propuesta 2

La tarea que se propone es: *Probar que las rectas que unen los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.*

En los análisis a priori se consideró la posibilidad que los profesores respondan en el enfoque sintético o analítico. Como ya fue mencionado, en la presente comunicación es considerada la perspectiva geométrica sintética.

En la perspectiva del ETM, el trabajo contempla, en una fase primera fase de descubrimiento, la construcción de una configuración geométrica (con o sin uso de artefacto), activando en plano [Sem-Ins], luego, las operaciones involucran añadir un trazo auxiliar para transformar y descomponer la figura de partida en sus unidades figurales (igual y menor dimensión) y reconfigurarla de otra manera. Esta tarea demanda la coordinación con razonamientos discursivos de la prueba y elementos de la componente referencial (una propiedad de los segmentos que unen los puntos medios de dos lados del triángulo es la que se ha considerado). En este caso, el tipo de prueba es *intelectual*, específicamente del tipo

demostración[12], activando así el plano [Sem-Dis], lo cual es el centro del trabajo. Cabe señalar que en esta tarea el plano [Ins-Dis] tiene menor presencia.

RESULTADOS

En los resultados de la tarea 1 según el ETM_G *personal* de los 19 profesores participantes, se identificaron 6 tipologías de respuestas, lo cual se resume en la siguiente Tabla (2). Además, se muestra el paradigma geométrico privilegiado según cada tipología

VERSIÓN SINTÉTICA						
Tipologías de respuesta	Recta que pasa por dos puntos	Solución por simetría	Solución figural	Construcción de paralelogramo	Solución recta perpendicular	Solución en versión analítica
Nº de casos	11	1	2	3	1	1
Paradigma privilegiado	GI/gII GII/gI	GII/gI	GI	GII/gI	GI/gII	GI/gII

Tabla 2: Resumen de resultados en tarea propuesta 1

En los resultados de la tarea 2, de los 19 participantes, 11 responden usando métodos sintéticos (el resto utilizan métodos analíticos). El resumen de los resultados se presenta en la siguiente Tabla (3).

Enfoque Sintético	
Participantes	Paradigma privilegiado
FP1, FP3, FP5, FP11, FP12, PE1, PE2	GI
PD1	GI/gII
FP7, FP9, PD2	GI (no terminan el trabajo solicitado)

Tabla 3: Resumen de resultados en tarea propuesta 2

CONCLUSIONES

El resultado principal de esta investigación concierne a la profundización y documentación del trabajo geométrico de profesores, especialmente cuando las tareas demandan un trabajo que activa el proceso de visualización. Estos trabajos han permitido proponer tipos de tareas según modos de visualización que estas demandan. Por otro lado, se han reconocido diversas

[12] Para estos efectos consideramos las tipologías de prueba según Balacheff (1987) y la noción de razonamiento de Duval (1995).

clases de visualización asociadas a una tarea específica y las circulaciones en el ETM que estos trabajos activan.

Estudios anteriores desarrollados en el marco del ETM respecto a la práctica en el aula del profesor de secundaria en temas de geometría, han evidenciado el predominio del trabajo aritmético/algebraico, la visualización icónica y poco énfasis en los razonamientos discursivos. A lo anterior, se suma la falta de orientaciones didácticas para el profesor que potencien un ETM_G *personal* en los estudiantes. La investigación que se desarrolla aporta específicamente en su desarrollo, diferenciación, estudio de evidencia empírica y profundización teórica, lo cual es un trabajo que aún continua. Se destaca aquí el potencial del ETM como herramienta de análisis al trabajo matemático.

En la tarea 1 presentada se privilegia el proceso de construcción, lo cual demanda su justificación y validación. En la presente versión de la tarea se destaca la relevancia de la variable didáctica al restringir las herramientas del software, lo cual obligó a realizar una construcción geométrica y la visualización dinámica en la validación de la construcción. En la tarea 2, que exige añadir un trazo auxiliar, la deconstrucción dimensional en coordinación con razonamientos discursivos, donde la mayor cantidad de los participantes desarrolla un trabajo que privilegia el paradigma geométrico GI, y en general, se observa un débil *referencial* que permita desarrollar un trabajo discursivo de la prueba.

Finalmente, es parte de los propósitos ampliar el trabajo y proponer categorías de tareas asociadas a formas de visualizar que se conecten con otras, por ejemplo nos cuestionamos sobre las *tareas que favorecen el tránsito de la visualización icónica a la no-icónica*, así como otras formas de visualización no consideradas en la perspectiva teórica que aquí se propone.

Referencias

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics, 18*(2), 147-176.

Coutat, S. & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétes géométriques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 97-126.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Traducción al castellano de Myriam Vega. Berne, Suisse: Peter Lang.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference, 1*, 3-26.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Godino, J. Gonzato, M. Cajaraville, J. & Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(2), 109-130.

Henríquez-Rivas, C. (2014). El trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el nivel secundario. Tesis para obtener el grado de Doctor en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile (no publicada).

Henríquez-Rivas, C. & Montoya-Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 51-70.

Henríquez-Rivas, C. & Montoya-Delgadillo, E. (2016). El Trabajo Matemático de Profesores en el Tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. *Boletim de Educação Matemática, 30*(54), 45-66.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11,* 175-193.

Klein, F. (1908). *Matemática elemental desde un punto de vista superior: Geometría vol. 2.* Traducción de R. Fontanilla. Madrid, España: Biblioteca Matemática.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*(4-I), 5-15.

Montoya, E. Mena, A. & Mena, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4-I), 191-210.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). UK: Sense Publishers.

Radford, L. (2007). Semiótica cultural y cognición. En Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 669-689). México DF, México: Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Yerushalmy, M., Shternberg, G., & Gilead, S. (1999). Visualization as a vehicle for meaningful problem solving in algebra. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference, 1,* 197-211.

COMUNICACIONES BREVES

HACIA LA EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS ESPECÍFICAS: UNA MIRADA DESDE LA PRAXIS DE LOS FORMADORES DE PROFESORES

Alonso Quiroz Meza
Universidad Católica Silva Henríquez

Resumen: En esta comunicación, se analizan las creencias y disposiciones de los formadores de profesores de matemáticas hacia los métodos e instrumentos de evaluación asociados al enfoque de formación por competencias. En el contexto de la tesis doctoral "Análisis de las estrategias para evaluar competencias matemáticas específicas que ponen en juego los formadores de profesores de Educación Media en Chile" y en el Marco de la Teoría Fundamentada, se describen los resultados de la fase cuantitativa de dicha tesis. Se aplicó un cuestionario a 56 formadores de profesores, determinándose mediante un análisis factorial, las componentes principales a ser analizadas. Los resultados indican que la mayoría de los formadores (78,57%) es optimista respecto de la factibilidad de aplicar métodos e instrumentos para evaluar competencias, de hecho, poco más de la mitad de los formadores declara implementar métodos e instrumentos de evaluación formativa y la mayor parte de ellos valora, aunque no implementa, la participación de los estudiantes en la evaluación del desempeño de sus compañeros.

Formación de profesores, evaluación de competencias, competencias matemáticas, métodos e instrumentos de evaluación

LA EVALUACIÓN COMO MEDIO PARA EL APRENDIZAJE

Como afirman Romero, Manuel & Martínez, (2008) "Profundos cambios en los diseños curriculares recorren actualmente los ámbitos educativos, tanto a nivel mundial como nacional, y como era de esperarse una nueva conceptuación de la evaluación ha ido desarrollándose en correspondencia con estas transformaciones" (p. 3). Por su parte, Ángelo (1999) afirma que:

La evaluación es un proceso orientado a comprender y mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Ello implica: hacer explícitas y públicas las expectativas educativas; [...], obtener, analizar e interpretar sistemáticamente evidencias que permitan establecer la relación entre el desempeño y los estándares y criterios establecidos [...]. La evaluación ha de permitir a los miembros de una comunidad académica, examinar sus propias premisas y crear una cultura dedicada al aseguramiento y la mejora de la educación superior (p. 3-6).

La evaluación considerada como un medio para favorecer el aprendizaje ha sido poco estudiada, sobre todo en lo que se refiere a la retroalimentación que conlleva de manera sustancial (Evans, 2013). En este sentido es importante señalar que todas las fuentes de retroalimentación deben ser consideradas a la hora de evaluar. Funcionalmente, se puede afirmar que el objetivo de la retroalimentación es constituirse en un puente entre el nivel real del aprendiz y la meta de aprendizaje que se ha propuesto el maestro (Ramaprasad, 1983; Sadler, 1989). De esta forma, se puede señalar que, junto al programa, la evaluación es uno de los elementos del proceso de enseñanza-aprendizaje más importantes debido a la dimensión de retroacción que proporciona al profesor (Marcelo & Vaillant, 2009)

El enfoque de formación por competencias se ha extendido por el mundo y Chile no ha sido la excepción, sin embargo, en el ámbito de la formación de profesores de matemáticas, se observa un retraso en su implementación, particularmente en lo que se refiere a las estrategias de evaluación asociadas a este enfoque. Las causas de dicho retrazo son diversas e involucran a los formadores de profesores, por tanto será necesario indagar desde su praxis evaluativa, las creencias y dispociciones hacia el enfoque de formación por competencias y sus formas de evaluación asociadas. Esta primera aproximación será la base para generar, desde la práctica docente, propuestas orientadas a la evaluación de competencias matemáticas específicas en la formación inicial docente de educación media.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

El diseño de la investigación es mixto de profundización en dos fases, una extensiva a objeto de describir las disposiciones y creencias de los formadores de profesores de matemáticas respecto del enfoque de formación por competencias y sus implicancias en el ámbito evaluativo y otra intensiva en la que mediante un estudio de casos se analizaron las estrategias que ponen en juego los formadores de profesores de matemáticas que más se acercan al enfoque de formación por competencias y a partir de su praxis se caracterizaron estrategias de evaluación pertinentes y viables para enriquecer las que actualmente implementan los formadores. Para tal efecto, se elaboró un cuestionario que fué validado por juicio de expertos y prueba piloto. A continuación se describe la parte del cuestionario que aborda los métodos e instrumentos asociados al enfoque de formación por competencias. El tipo de cuestionario corresponde a un diferencial semántico con puntuaciones directas e inversas de uno a seis puntos, según si las afirmaciones con mayor valoración están en el lado izquierdo o en el lado derecho de la escala.

Instrumento

A continuación se muestran algunos items del cuestionario. Los primeros tres se refieren a métodos y los restantes a instrumentos.

		A	B	C	D	E	F	
18.	No conozco métodos que hayan funcionado bien para evaluar la integración de saberes en matemáticas							Conozco métodos que funcionan muy bien para evaluar la integración de saberes en matemáticas
19.	No es posible evaluar desempeños de los estudiantes en el caso de matemáticas							Es posible evaluar desempeños de los estudiantes en el caso de matemáticas
28.	Las pruebas escritas son excelentes para evaluar integración de saberes en asignaturas de matemáticas							Las pruebas escritas son inadecuadas para evaluar integración de saberes en asignaturas de matemáticas
29.	Las rúbricas son excelentes para evaluar desempeños en asignaturas							Las rúbricas son inadecuadas para evaluar desempeños en asignaturas de

	de matemáticas							matemáticas
31.	Los exámenes orales son imprescindibles para evaluar el logro de aprendizajes matemáticos en alumnos de pedagogía							Los exámenes orales son inadecuados para evaluar el logro de aprendizajes matemáticos en alumnos de pedagogía

Tabla 1. Ejemplo de items el cuestionario sobre métodos e instrumentos de evaluación.

Muestra

El cuestionario fue enviado a través de internet bajo el formato de Google Drive a todos los formadores que realizaran cursos iniciales de matemáticas en carreras de pedagogía media, en universidades y/o carreras acreditadas con ingreso de estudiantes. La siguiente tabla muestra la caracterización de la muestra

GENERO	MASC. (66.07 %)	FEM. (33.93 %)			
LUG. TRAB.	NORTE (32.50 %)	RM (45.00 %)		SUR (22.50 %)	
TITULO	S/T (22.50 %)	PROF. MAT. (70.00 %)		PROF. DE MAT. Y O.E.(7.50%)	
GRADO	LIC.ED. (7.50%)	MAG.ED. (12.50%)	DOC.ED. (5.00%)	MAG.E.M. (12.50%)	OTRO (62.50%)
ASIG. IMP.	ALG. (25.00 %)	CALC. (20.00%)		GEOM. (15.00%)	OTRA (40.00 %)
ANTIG. DOC.	< 5 A. (27.50%)	> 5 Y < 10 A. (12.50%)		> 10 A. (60.00%)	
T. DE CONT.	P. H. (20.00 %)	M. JOR. (12.50%)		J. COM. (67.50 %)	
ENFASIS	LABORAL (12.50 %)	ESTANDAR (22.50%)		AUTORR. (7.50%)	INT. SAB (57.50%)

Tabla 2. Caracterización de los formadores que respondieron el cuestionario (n=56).

RESULTADOS

En términos generales la mayoría de los formadores (78,57%) es optimista respecto de la factibilidad de aplicar métodos e instrumentos para evaluar competencias, de hecho, poco más de la mitad de los formadores declara implementar métodos e instrumentos de evaluación formativa y la mayor parte de ellos valoran la participación de los estudiantes en la evaluación del desempeño de sus compañeros.

Las formadoras son las más optimistas al sostener que es factible la aplicación de instrumentos para evaluar competencias, aplican métodos e instrumentos de evaluación formativa y están de acuerdo con la participación de estudiantes en la evaluación del desempeño de sus compañeros, sin embargo cabe recordar que éstas son en cantidad la mitad de los hombres.

En cuanto a los formadores con menos de cinco y hasta diez años de antigüedad en la docencia vemos que también son optimistas respecto de la factibilidad de aplicar métodos e instrumentos para evaluar competencias y valoran la participación de los estudiantes en la

evaluación del desempeño de sus compañeros. A este respecto cabe señalar la importancia de la participación de estudiantes en sus procesos de aprendizaje. Celman (1998), citando a Álvarez Méndez (1996) lo expresa de una manera muy clara:

En la medida en que un sujeto aprende, simultáneamente evalúa, discrimina, valora, crítica, opina, razona, fundamenta, decide enjuicia, opta… entre lo que considera que tiene un valor en sí y aquello que carece de él. Esta actitud evaluadora, que se aprende, es parte del proceso educativo, que como tal es continuamente formativo (p.7)

Por último, los formadores que imparten asignaturas que mezclan temáticas son optimistas respecto de la factibilidad de implementar métodos e instrumentos para evaluar competencias y valoran los métodos para evaluar integración de saberes, sin embargo, la aplicación de dichos instrumentos es escasa o nula. Esto se condice con lo que plantea la literatura en el sentido que no existe una relación unívoca entre la enseñanza de determinadas áreas o materias y el desarrollo de las competencias (Perales 2014). De esta forma se podría afirmar que cada una de las áreas temáticas contribuye a la consecución de diferentes competencias por lo que podría pensarse que asignaturas que integran temáticas se prestarían de mejor forma para desarrollar competencias.

Referencias

Angelo, T. A. (1999). Doing assessment as if learning matters most. AAHE Bulletin, 51(9), 3-6.

Álvarez Méndez, J. M., & Mendez, J. M. A. (2011). Evaluar para conocer, examinar para excluir (No. 001.4).

Celman, S. (1998). ¿Es posible mejorar la evaluación y transformarla en herramienta de conocimiento. La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo, 35, 66.

Evans, C. (2013). Making Sense of Assessment Feedback in Higher Education. Review of Educational Research, 83(1), 70–120. Doi: 10.3102/0034654312474350

Marcelo, C., & Vaillant, D. (2009). Desarrollo profesional docente: ¿ Cómo se aprende a enseñar? Narcea.

Perales, R. G. (2014). Diseño y validación de un instrumento de evaluación de la Competencia Matemática: rendimiento matemático de los alumnos más capaces (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Educación a Distancia).

Ramaprasad, A. (1983). On the definition of feedback. Behavior al Science, 28(1), 4-13.

Romero, A. M., Manuel, J., & Martínez, S. (2008). Una perspectiva crítica de la evaluación en matemática en la Educación Superior, (1), 35–69.

Sadler, D. R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. Instructional science, 18(2), 119-144.

ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS Y TEXTOS MATEMÁTICOS UNIVERSITARIOS

Eduardo Mario Lacués Apud
Universidad Católica del Uruguay, Uruguay

Resumen: Para muchos estudiantes, los primeros cursos universitarios constituyen la ocasión de su encuentro con las demostraciones formales en Matemática, y las formas de razonamiento asociadas a ellas. Sin embargo, las estructuras deductivas subyacentes en ellas no suelen ser objeto de atención desde la enseñanza. En este trabajo se reporta el análisis realizado sobre la forma en que textos usuales en cursos universitarios iniciales tratan estructuras deductivas y procesos de demostración. Se seleccionaron dos textos de Cálculo y otros dos de Álgebra Lineal, y un tópico en cada uno de ellos (límite de una función en un punto en el primer caso, e independencia lineal de vectores, en el segundo) en ambos casos por la importancia conceptual del tema y por la naturaleza de su estructuración lógica. Se buscó detectar la eventual existencia de advertencias explícitas en los textos, que alertaran a los lectores acerca de las formas deductivas que estuvieran siendo utilizadas. Se encontraron pocas instancias de explicitación sobre este aspecto, lo que puede interpretarse como ausencia de intención para enseñarlas.

Estructuras deductivas, demostración, razonamiento, textos universitarios de matemática

INTRODUCCIÓN

Desde Euclides se ha concebido a la Matemática como una ciencia deductiva. Más allá de la evolución histórica que la noción de demostración ha ido teniendo, ésta resulta asociada con formas de razonamiento donde juegan un rol fundamental las estructuras lógicas que permiten la afirmación de ciertas sentencias a partir de otras.

Por eso, examinar cómo se presentan en la enseñanza las formas argumentales usuales en esta disciplina resulta de interés. En este trabajo se revisan algunos textos usuales en los cursos iniciales en la universidad (Cálculo y Álgebra Lineal), examinando de qué manera aparecen estas estructuras en el tratamiento de ciertos contenidos que resultan relevantes por su importancia dentro de la organización conceptual de la Matemática.

En la primera sección se presentan antecedentes acerca del objeto de este trabajo. En la segunda se revisa el tratamiento que dos textos de Cálculo dan a los aspectos lógicos de la definición de límite (presencia de cuantificadores, estructura condicional). En la tercera se hace lo propio con dos textos de Álgebra Lineal y la definición de independencia lineal de vectores. Se cierra con un análisis de los resultados de la indagación y reflexiones sobre cuestiones didácticas implicadas en ellos.

ANTECEDENTES

La necesidad de atender desde la enseñanza a los aspectos relacionados con las estructuras lógicas usadas en Matemática ha sido destacada por diferentes autores desde varias perspectivas. Durand-Guerrier (2008) ha señalado que los procesos de negación, implicación y cuantificación tiene una presencia preponderante en la noción de rigor matemático. Refiriéndose en particular a la enseñanza de Matemática en la universidad, ha abogado por

la necesidad de abordar el tratamiento del Cálculo de Predicados y explicitar su rol en los procesos de demostración (Durand-Guerrier, 2005).

Experiencias como las descritas por Morou y Kalospyros (2011) o Hodds, Alcock e Inglis (2014) aportan intervenciones didácticas con esta finalidad, mientras que los trabajos de Inglis y Alcock (2012) y Mejía-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads y Samkoff (2012) proporcionan elementos teóricos para diseñar estas.

REVISIÓN DE LOS TEXTOS DE CÁLCULO

Para este estudio se seleccionaron los textos de George Thomas (2015) y James Stewart (1999).

La elección de la definición de límite como elemento de análisis está motivada por su complejidad desde el punto de vista lógico y además, por su posición destacada en el currículo de Cálculo.

El texto de George Thomas

Para dar la definición en términos de ε y δ, se elige la siguiente formulación en la Sección 2.3:

> "Sea *f(x)* definida en un intervalo abierto alrededor de *c*, excepto posiblemente en *c* mismo. Decimos que el límite de *f(x)* cuando x se aproxima a *c* es el número *L*, y escribimos
>
> $$\lim_{x \to c} f(x) = L$$
>
> Si, para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ correspondiente, tal que, para toda x,
>
> $0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - c| < \varepsilon$"[13] (Thomas, 2013, p. 60)

Es destacable la decisión de explicitar las instancias de cuantificación (universal para ε y x, existencial para δ) y la estructura condicional final. En los ejemplos que siguen a esta definición se presta especial atención a enfatizar este aspecto, ya sea a través de una representación gráfica o algebraica.

Esta intención se continúa desarrollando en los ejemplos, donde en particular aparece la propuesta de probar que un cierto número no es límite de una cierta función en un cierto punto. Este ejercicio conduce a la necesidad de negar una sentencia que incluye cuantificadores y una estructura condicional, lo que es desarrollado en detalle en el texto.

El texto de James Stewart

El texto de Stewart (1999) aborda la definición de límite, en la sección 2.2, mediante una introducción informal, expresada en lenguaje coloquial y basada en la noción de distancia entre números reales. La definición formal aparece en el apéndice D:

> "Sea *f* una función definida en algún intervalo abierto que contenga el número *a*, excepto posiblemente en *a* mismo. Entonces decimos que el límite de *f(x)* cuando *x* se aproxima a *a* es *L*, y escribimos
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> Si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ correspondiente tal que

[13] En todas las transcripciones textuales, cursivas y negritas figuran en el original.

Si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - c| < \varepsilon$" (Stewart, 1999, p. A28)

Aunque aparece destacadas las cuantificaciones de ε y δ y la estructura condicional, no ocurre lo mismo con la de x. Por otro lado, no existen comentarios respecto a lo que significaría negar la definición, ni ejercicios o ejemplos en este sentido.

REVISIÓN DE LOS TEXTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

Los textos de Álgebra Lineal revisados fueron los de David Poole (2004) y David Lay (2013).

Se eligió la definición de independencia lineal como contenido a analizar debido a que en su estructura aparecen instancias de cuantificación, ya sea existencial o universal, además de o bien una conjunción o bien un condicional, respectivamente.

El texto de David Poole

En la sección 6.2 se retoma la introducción a la noción de independencia lineal para espacios R^n dada en la sección 2.3 y define conjunto linealmente dependiente de la siguiente manera:

"Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de un espacio vectorial V es *linealmente dependiente* si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *al menos uno de los cuales no sea 0,* tales que

$$C_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k = o.$$

Un conjunto de vectores que no es linealmente dependiente se dice que es *linealmente independiente*." (Poole, 2004, p. 443)

Se elige usar un cuantificador existencial ("…existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$…"); la última parte está constituida por la conjunción (significada con "tal que") de una disyunción ("al menos uno de los cuales no sea 0" expresa sintéticamente que $c_1 \neq 0$ o $c_2 \neq 0$ o … o $c_k \neq 0$) con la sentencia que afirma que la combinación lineal tenga como resultado el vector nulo ($c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$).

A continuación de esta definición se plantea que "…$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente independiente en un espacio vectorial V si y solo si $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_k\, v_k = o$ implica que $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$" (Poole, 2004, p.443).

Para justificar esta equivalencia con la definición dada, se opta por un razonamiento en el que se expresa que la dependencia lineal establece que el vector nulo puede ser expresado como una combinación lineal no trivial de los vectores del conjunto; por eso, la independencia lineal significa que el vector nulo puede expresarse como combinación lineal de esos vectores únicamente de la manera trivial. Esta explicación no pone en claro el proceso de negación de una sentencia con una estructura compleja como la descrita, que requiere la transformación del cuantificador existencial en uno universal y la conjunción en un condicional.

El texto de David Lay

En la sección 4.3 se vuelve sobre la definición dada para R^n en la sección 1.7 para decir que "Un conjunto indexado de vectores $\{v_1, \ldots, v_p\}$ es linealmente independiente si la ecuación vectorial $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_pv_p = o$ tiene *solamente* la solución trivial $c_1 = 0 \ldots = c_k = 0$" (Lay, 2013, p. 226).

Se elige una aproximación a la definición diferente a la anterior, haciendo referencia a la estructura condicional a través del destaque de la palabra "*solamente*" pero no hay mención a la instancia de cuantificación implícita en que la ecuación vectorial puede ser cualquiera, y por lo tanto, cualesquiera pueden ser los escalares.

Continúa definiendo conjunto linealmente dependiente como aquel para la cual la ecuación vectorial dada admite al menos una solución no trivial. Con esto, tampoco se explicita el proceso de negación de las instancias de cuantificación ni de la sentencia condicional.

REFLEXIONES FINALES

En general, en los textos analizados se encuentra escasa evidencia de tratamiento explícito de los contenidos referidos a estructuras deductivas. Aunque en algunos casos se ponen de relieve las instancias de cuantificación, las estructuras lógicas implicadas (condicionales, conjunciones o disyunciones) y los procesos de negación no aparecen destacados.

Teniendo en cuenta que los textos tienen una influencia importante en las prácticas de los profesores, puede conjeturarse que tampoco en el aula aparezcan tareas cuyas consignas atiendan a la enseñanza de estructuras deductivas.

Éste es un punto que requiere ser estudiado. En ese sentido, observaciones de clases y revisión de los registros tomados por estudiantes en sus apuntes pueden ser fuentes de información.

Referencias

Durand-Guerrier, V. (2005). Natural deduction in predicate calculus a tool for analysing proof in a didactic perspective. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, (págs. 409-419).

Durand-Guerrier, V. (2008). About logic, language and reasoning at the transition between French upper Secondary school and University. *ICME 11*.

Hodds, M. Alcock, L.Inglis, M. (2014). Self-Explanation Training Improves Proof Comprehension. *Journal For Research in Mathematics Education, 45*(1), 62-101.

Inglis, M., Alcock, L. (2012). Experts and Novices Approaches to Reading Mathematical Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 358-390.

Lay, D. (2013). Álgebra lineal para cursos con enfoque por competencias. México: Pearson Education.

Mejía-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 3-18.

Morou, A., & Kalospyros, N. (2011). The role of logic in teaching, learning and analyzing proof. *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7).* Rzeszów.

Poole, D. (2004). *Álgebra Lineal Una introducción moderna*. México: Thomson.

Stewart, J. (1999). *Cálculo, conceptos y contextos.* México: International Thomson Editores.

Thomas, G. (2015). *Cálculo. Una variable.*

DE LA POSIBILIDAD A LA PROBABILIDAD. UN ESTUDIO DE CASO EN EL AULA DE EDUCACIÓN BÁSICA

Claudia Vásquez Ortiz[1], Ángel Alsina[2]
Pontificia Universidad Católica de Chile[1], Universidad de Girona, España[2]

Resumen: En este trabajo se presenta un análisis de cómo estudiantes de un segundo año básico se aproximan a la probabilidad de ocurrencia de un suceso por medio del uso de términos y expresiones que constituyen una escala cualitativa de los grados de posibilidad de ocurrencia de un suceso. Para ello, nos focalizamos en el lenguaje probabilístico empleado por los estudiantes, entendido como un lenguaje preciso y especializado que permite expresar de forma cualitativa la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso, el cual a su vez constituye un soporte para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Los resultados muestran un fuerte predominio de términos y expresiones verbales provenientes del lenguaje común vinculadas principalmente al significado intuitivo de la probabilidad, que transitan hacia conceptos de corte probabilístico.

Posibilidad, probabilidad, educación básica, alfabetización probabilística, lenguaje probabilístico

INTRODUCCIÓN

En los últimos treinta años se observa una fuerte tendencia por incorporar la probabilidad en los currículos de Educación Básica, con el propósito de contar con ciudadanos alfabetizados probabilísticamente "capaces de hacer frente a una amplia gama de situaciones del mundo real que implican la interpretación o la generación de mensajes probabilísticos, así como la toma de decisiones" (Gal, 2005, p. 40). En este sentido, el *National Council of Teachers of Mathematics* (1989) incluyó a "Datos y Azar" como área temática en *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics*, reforzando posteriormente esta iniciativa en *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000), en los cuales se explicita claramente la necesidad de contar con programas de enseñanza orientados a capacitar a los estudiantes para aprender conocimientos relacionados con el análisis de datos y probabilidad a partir del nivel Pre-K (tres años). Nuestro país no es ajeno a esta tendencia, por lo que ha incluido en las Bases Curriculares (2012) el estudio de la probabilidad a lo largo de todo el currículo escolar, con el propósito de que "todos los estudiantes se inicien en temas relacionados con las probabilidades" (Mineduc, 2012, p. 5). Sin embargo, en Chile la mayoría de los profesores de Educación Básica tienen poca o ninguna preparación sobre probabilidad y su didáctica (Vásquez y Alsina, 2015). Por tanto, es primordial que el profesorado cuente con herramientas que les permitan abordar el proceso de enseñanza de la probabilidad. Es desde este prisma que enfocamos este estudio, a través del cual se busca dar mayor claridad de cómo emergen los primeros elementos lingüísticos en el desarrollo de dos clases introductorias de probabilidad con estudiantes de Educación Básica que no han recibido instrucción previa sobre este tema. Para ello, se ha optado por realizar un estudio exploratorio, por medio de la observación no participante, durante un proceso de instrucción con un grupo de estudiantes de segundo curso de Educación Básica (años 7-8 años) que contempla el análisis de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. En concreto, se analiza la multiplicidad de términos, expresiones orales y escritas, símbolos y

representaciones (tablas y gráficos) que se usan cuando se pretende que los estudiantes aprendan gradualmente la noción de probabilidad y adquieran el respectivo lenguaje probabilístico asociado, sin haber recibido instrucción previa sobre el tema.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La probabilidad no ha estado exenta de desafíos, observándose a lo largo de su desarrollo histórico, distintos significados vinculados a su interpretación que en la actualidad coexisten y son estudiados, con mayor o menor énfasis, en el contexto de la matemática escolar: a) significado intuitivo, b) clásico, c) frecuencial, d) subjetivo y e) axiomático. En lo que respecta al tratamiento de la probabilidad en el currículo chileno se observa un fuerte predominio del significado intuitivo sobre todo en los primeros niveles educativos, que enfatiza el trabajo con situaciones cotidianas en las que emergen o están presentes los conceptos posible, seguro, imposible, etc., para luego continuar con un enfoque frecuentista de la probabilidad el cual permitirá que los estudiantes complementen gradualmente estos significados con los demás (Vásquez y Alsina, 2014). De ahí la importancia de centrarse en describir y analizar cómo emergen los primeros elementos lingüísticos, sobre todo si consideramos que en muchas ocasiones utilizar el lenguaje matemático puede ser una barrera para el aprendizaje de los estudiantes debido a los requerimientos y convenciones específicas necesarias para expresar los conceptos matemáticos. Por tanto, dado el estrecho vínculo existente entre las expresiones de uso común y el lenguaje probabilístico, los primeros elementos lingüísticos resultan ser un elemento fundamental para el estudio de la probabilidad en los primeros niveles educativos y para el desarrollo de la alfabetización probabilística, sobre todo si consideramos el rol que esta última otorga al lenguaje como uno de los componentes básicos del modelo de alfabetización probabilística (Tabla 1) propuesto por Gal (2005).

Elementos de conocimientos	Elementos disposicionales
Grandes ideas de probabilidad: variabilidad, aleatoriedad, independencia, predicción/incertidumbre. *Asignación de probabilidades*: diversas maneras para encontrar o estimar la probabilidad de ocurrencia de un evento. *Lenguaje*: términos y métodos para comunicar el azar. *Contexto*: comprensión del rol e impacto de la probabilidad en diversos eventos y procesos. *Preguntas críticas*: incorporación de temas que permitan reflexionar y evaluar la calidad de la información proveniente de diversos contextos en que la probabilidad se encuentra presente.	*Postura crítica* *Creencias y actitudes* *Sentimientos personales* para el desarrollo de un apostura positiva hacia la información probabilística.

Tabla 1. Componentes básicos del modelo de alfabetización probabilística (Gal, 2005).

Así a partir de lo propuesto por Gal (2005) y de acuerdo con Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013), es posible distinguir cinco grandes focos en la adquisición del lenguaje probabilístico que los estudiantes requieren desarrollar para alcanzar una comprensión adecuada de la probabilidad como una progresión de sus intuiciones probabilísticas: a) lenguaje verbal, b) lenguaje numérico, c) lenguaje tabular, d) lenguaje grafico, y e) lenguaje simbólico.

METODOLOGÍA

Se registraron en vídeo dos sesiones de clase de 90 minutos de un segundo curso de Básica de una escuela chilena. En el estudio han participado 20 estudiantes cuyas edades fluctúan entre los 7 y 8 años, y que no han recibido instrucción previa sobre el tema. El profesor a cargo de las sesiones de clase es profesor de Básica con especialización en matemática, tiene 5 años de experiencia en aula y es reconocido por sus pares y estudiantes por la buena calidad de sus clases y el dominio del contenido que enseña. Cabe señalar que este profesor ha realizado durante los últimos años cursos de formación permanente orientados a la enseñanza de la estadística y probabilidad en la Educación Básica. Para describir cómo emergen estos primeros elementos lingüísticos ligados al lenguaje probabilístico, hemos realizado un análisis de corte cualitativo que consideró los siguientes pasos: a) transcripción de las clases grabadas en vídeo; b) identificación de episodios de las clases en los que se aborden términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones (tablas y gráficos) asociados a la probabilidad, que constituyen las unidades de análisis; c) categorización de los diversos términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones asociados a la probabilidad; d) descripción de cómo los estudiantes de Básica construyen la noción de probabilidad y adquieren un lenguaje probabilístico a partir del uso de diversos términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones.

RESULTADOS

A continuación se presenta un muy breve resumen, por cuestiones de espacio, de los resultados, siendo el lenguaje verbal el que presenta un mayor predominio.

Al inicio de la case el profesor propone un conjunto de situaciones en las que está presente la incerteza, en el sentido de que, aun existiendo algunos patrones de comportamiento, resulta imposible predecir una situación futura con toda seguridad. Una de las situaciones propuesta es la siguiente: *"Supongamos que nos interesa saber si mañana tendremos un día soleado"* y luego les solicita que expresen qué tan posible es que esto suceda. Algunos estudiantes señalan que la respuesta "depende de muchos factores" como por ejemplo el clima del lugar, la estación del año, el tiempo del día de hoy, etc. En este momento el profesor hace hincapié en que estos "factores" pueden llevar a asignar distintos grados de posibilidad de ocurrencia de este suceso, y es aquí donde plantea ciertos posibles escenarios, para situar sus respuestas. Por ejemplo: *"Si estos últimos días han sido lluviosos y nos encontramos en el mes de junio, ¿será posible que mañana sea un día soleado?"* Luego, el profesor pide a los estudiantes que realicen algunas predicciones, con el objeto de que identifiquen diferentes grados de posibilidad de que ocurra un determinado suceso y posteriormente, con base en la diversidad de expresiones dadas por los propios estudiantes,

llegar a establecer una escala cualitativa que permita valorar las oportunidades de ocurrencia de un conjunto de situaciones dado. De este modo, a partir de diversas suposiciones de contextos diversos comienzan a emergen los primeros elementos lingüísticos por medio de expresiones tales como imposible, más posible, menos posible, etc. Lo que lleva a los estudiantes guiados por el profesor identifiquen grados de posibilidad de ocurrencia que pueden ir desde lo imposible hasta lo seguro.

REFLEXIONES FINALES

A partir del análisis de los distintos tipos de lenguajes que promueven la adquisición del lenguaje probabilístico (verbal, numérico, tabular, gráfico y simbólico), podemos señalar que se observa un fuerte predominio del lenguaje verbal y cotidiano en la introducción de las primeras nociones y conceptos básicos sobre el azar y la probabilidad. Este dato coincide, a grandes rasgos, tanto con las orientaciones curriculares vigentes (Mineduc, 2012; NCTM, 2000) como con diversos trabajos que han señalado las fases de adquisición de los conocimientos probabilísticos en las primeras etapas educativas (Vásquez, 2016). En estos trabajos se señala que la primera fase de adquisición de conocimientos probabilísticos se caracteriza por la adquisición de lenguaje probabilístico elemental asociado al significado intuitivo de la probabilidad. Lo anterior, propicia el desarrollo progresivo de la alfabetización probabilística al cimentar el camino para la adquisición del pensamiento probabilístico por medio de la construcción de conocimiento matemático en situaciones donde este tenga sentido, así como a través de la experimentación, intuición y capacidad para relacionar y abstraer conceptos. También fue posible observar, en concordancia con el planteamiento de las orientaciones curriculares nacionales e internacionales, cómo los estudiantes van avanzando hacia la adquisición de nuevos conceptos vinculados al azar y a la probabilidad (lenguaje más específico) a partir de sus intuiciones e ideas previas (lenguaje cotidiano común). Desde esta perspectiva, nuestro análisis sugiere que en el momento de iniciar el estudio de la probabilidad se considere el desarrollo de las primeras nociones y elementos de aproximación hacia la adquisición y el desarrollo del lenguaje probabilístico. En otras palabras, los conceptos de probabilidad son conceptos complejos con un alto grado de abstracción, por lo que es necesario avanzar de manera gradual hacia la comprensión adecuada del lenguaje específico de la probabilidad para así aproximarse a la cuantificación de la incerteza, y finalmente al cálculo de probabilidades en los últimos cursos de Educación Básica.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT INICIACIÓN Nº 11150412, financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile y desarrollado en la Pontificia Universidad Católica de Chile.

Referencias

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, *35*, 75-91.

Mineduc (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática.* Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Vásquez, C. (2016). Bolas, fichas, monedas … ¿Cómo podemos ir introduciendo la probabilidad en primaria? *Aula de Innovación Educativa, 251*, 23-27.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Números, 85*, 5-23.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). *Evaluación del conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad en profesores de Educación Primaria*. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 511-520). Alicante: SEIEM.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS- RÚBRICAS DE EVALUACIÓN

Magdalena Pagano, Alejandra Pollio
Universidad Católica del Uruguay, Uruguay

Resumen: La siguiente comunicación expone y analiza el proceso de selección de la competencia básica elegida como eje de los cursos de matemática de las carreras de la Facultad de Ciencias Empresariales (FCE) de la Universidad Católica del Uruguay UCU y la construcción de una rúbrica en la que se describen los indicadores y los criterios de evaluación de las mismas. Se ejemplifica el uso de la rúbrica en una evaluación escrita de una de las asignaturas de área matemática de la FCE.

Currículum, competencias, resolución de problemas, rúbricas de evaluación

UN CURRÍCULUM ORIENTADO HACIA LAS COMPETENCIAS

En el año 2015 la Vicerrectoría Académica (VA) de la UCU elaboró un documento marco para la definición de lo que se dio en llamar un currículum orientado hacia las competencias. Dicho documento explicita el diseño curricular de las carreras de grado y postgrado de la institución; en el mismo se asume incorporar las competencias en los diseños curriculares, de manera sistemática y siguiendo los procedimientos que surgen de las buenas prácticas internacionales (UCU, 2015).

En este sentido la VA adopta la definición de competencia considerada como una combinación entre destrezas, habilidades y conocimientos necesarios para desempeñar una tarea específica propuesta por el Departamento de Educación de los Estados Unidos (U.S. Department of Education, 2001).

Desde este enfoque la VA (UCU, 2015) ha asumido que las competencias consideradas son el resultado de experiencias integradoras de aprendizaje, que son posibles de ser constatadas por otros, a manera de "demostraciones" o "resultados de aprendizaje" factibles de ser evaluados.

Finalmente se consideraron diferentes tipos de competencias, al estilo de las que se definen en el proyecto Tuning (2007) como competencias generales y competencias específicas. Las competencias generales son transversales a todo el proceso formativo, integrando de manera uniforme el currículo de una carrera en relación a las grandes líneas que marcan el perfil de una institución (el "sello institucional"). Las competencias específicas son, por el contrario, particulares y precisas a un área o contenido propio y se traducen en la resolución de tareas complejas.

Competencias generales y competencias específicas

El Consejo Directivo de la UCU (UCU, 2015) ha definido cinco competencias generales que identifican el sello institucional y deben por lo tanto estar integradas en las carreras de grado y postgrado de la institución, las cuales son:

C.G.1 Competencias comunicativas fluidas y de calidad, en el lenguaje oral y escrito.

C.G. 2 Gestión y organización de personas y recursos.

C.G. 3 Aprendizaje permanente en base a la metacognición y estrategias heurísticas.

C.G. 4 Innovación, iniciativa y emprendimiento.

C.G. 5 Humanización, justicia y fe.

En un segundo orden jerárquico cada titulación deberá redactar sus competencias específicas en consonancia con las competencias generales. Finalmente cada asignatura debe definir sus propias competencias indicando la contribución, que desde su área del conocimiento, las mismas efectúan a las competencias generales y específicas de la titulación.

La Licenciatura en Economía (LE) de la FCE fue tomada como referencia para definir las competencias de los cursos de Matemática y se enumeran a continuación las competencias a las cuales específicamente podrían aportar los cursos de Matemática:

C.E.2 Formular proyectos, realizando una evaluación financiera y económico-social, con herramientas cuantitativas para simulación y proyección de variables.

C.E.4 Elaborar análisis estratégico de mercados, sectores y cadenas de valor, en un marco global.

COMPETENCIAS EN LOS CURSOS DE MATEMÁTICA

Una vez definidas las competencias generales y las competencias específicas de cada titulación el equipo docente del área Matemática de la FCE fue encomendado con la tarea de seleccionar una competencia a desarrollar en los cursos de Matemática que estuviera en consonancia con alguna de las competencias generales y alguna de las competencias específicas de la LE.

De acuerdo con Niss (2003), ser matemáticamente competente (mathematical competence) se entiende como la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar matemática en una variedad de contextos intra y extra matemáticos. A su vez esta competencia matemática está constituida por competencias matemáticas (mathematical competency) y entre las mismas se mencionan ocho competencias específicas: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, modelizar matemáticamente, razonar matemáticamente, representar entidades matemáticas, manejar símbolos y formalismo, comunicarse en, con y sobre la matemática, hacer uso de ayuda y herramientas, incluidas las tecnológicas.

Estas ideas dieron marco a la competencia seleccionada, a la que denominó resolución de problemas y se acordó en especificar que: resolver un problema en una variedad de contextos intra y extra matemáticos implica interpretar, modelar y representar utilizando el lenguaje matemático, calcular, argumentar y comunicar el resultado obtenido. Esta definición intenta hacer explícitas algunas de las ocho competencias mencionadas por Niss (2003) y adecuadas al lenguaje utilizado por Pisa (OEDC-INECSE, 2004).

RÚBRICA DE EVALUACIÓN

Una vez definida la competencia se elaboraron los indicadores de logro de la misma atendiendo algunos de los aspectos involucrados: calcular (tratamiento), modelar, representar, interpretar (conversión), argumentar y comunicar el resultado obtenido; se definieron los descriptores de logro y se plasmaron en la rúbrica de evaluación que se comunica a los alumnos al inicio del curso tal cual se presenta en la Tabla 1, estipulando que

cada nivel de los descriptores equivale a un 20% del puntaje total. La elección de los dos primeros indicadores de la rúbrica se apoya en la teoría de Registro de representación de Raymond Duval(1995) y las actividades cognitivas que involucran son las de tratamiento y conversión.

INDICADORES	DESCRIPTORES				
	1	2	3	4	5
I) Trata los datos del problema en un mismo registro	Efectúa un tratamiento no significativo de los datos con errores	Efectúa un tratamiento no significativo de los datos sin errores	Efectúa un tratamiento significativo de los datos, aunque comete errores u omisiones	Efectúa un tratamiento significativo de los datos, llega a la solución	Efectúa un tratamiento significativo de los datos, llega a la solución y explicita el resultado
II) Convierte los datos del problema a otros registros	Convierte parcialmente los datos del problema a otro registro con errores	Convierte parcialmente los datos del problema a otro registro sin errores	Convierte sin errores los datos básicos del problema	Convierte todos los datos del problema con errores	Convierte todos los datos del problema sin errores
III) Argumenta la pertinencia de los métodos empleados para la resolución del problema	Intenta argumentar la pertinencia de los métodos empleados o a emplear	Parcialmente argumenta la pertinencia, y lo hace con errores	Parcialmente argumenta la pertinencia, sin errores	Argumenta totalmente la pertinencia de los métodos, aunque con errores	Argumenta correctamente la pertinencia de los métodos empleados
IV) Hace un adecuado uso del lenguaje simbólico y/o coloquial en el contexto del problema	Intenta expresarse en un lenguaje adecuado al contexto del problema	Se expresa en forma incompleta e incorrecta en un lenguaje adecuado al contexto del problema	Se expresa con algunos errores en el lenguaje adecuado al contexto del problema	Se expresa con algunas omisiones en el lenguaje adecuado al contexto del problema	Se expresa correctamente en el lenguaje adecuado al contexto del problema

Tabla 1: Rúbrica de evaluación para la competencia resolución de problemas.

Su implementación

En el transcurso de este año el uso de la rúbrica se hizo explícito a los estudiantes de dos maneras: comunicándoles en la misma evaluación qué indicadores serían evaluados en cada

ejercicio y entregándoles una planilla de corrección en la que se explicitaban los resultados obtenidos.

El siguiente es un ejemplo de la manera en que uno de los ejercicios de la evaluación fue presentado a los estudiantes y la Tabla 2 es parte de la planilla de corrección entregada al estudiante al efectuar la devolución de su evaluación.

Un país productor de cierto mineral se ve obligado a exportar anualmente una cantidad del producto no inferior a 2000 toneladas ni superior a 4000 toneladas. La exportación del producto se puede realizar en el mercado internacional a 2000 unidades monetarias la tonelada, o bien en un país vecino a un precio $p_1 = 4000 - x_1$, siendo x_1 el número de toneladas vendidas a dicho país. El gobierno del país desea saber qué parte de sus exportaciones deberá vender en el mercado internacional (x_2) y que parte al país vecino(x_1) para maximizar sus ingresos por la exportación del mineral. (Conversión, tratamiento, argumentación y comunicación).

		Descriptores					Subtotal	Puntaje	Total
Ejercicio 2	Indicador	1	2	3	4	5			
	II				0,8		0,8	3,2	2,56
	I			0,6			0,6	3,2	1,92
	III	0,2					0,2	3,2	0,64
	IV					1	1	3,2	3,2
								12,8	10,24

Tabla 2: Planilla de corrección.

REFLEXIONES FINALES

La elaboración de la grilla nos ha permitido organizar y sistematizar la corrección de las evaluaciones parciales de las diferentes asignaturas, asegurando uniformidad en los criterios de corrección y haciendo transparentes los criterios utilizados a los estudiantes. Si bien aún queda camino por recorrer en la mejora en el diseño e implementación de la rúbrica de evaluación, entendemos que es un buen inicio. Como continuación de este trabajo estamos trabajando en la percepción que los estudiantes tienen sobre su aplicación, para dicha tarea hemos elaborado una encuesta auto-administrada que se encuentra en proceso de evaluación y será insumo para un trabajo complementario al presente.

Referencias

Duval, R. (1995). “Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels”. Suisse: Peter Lang.

Niss,M. (2003). Quantitative Literacy and Mathematics Competencies. En Quantitative Literacy: Why Numeracy Matter for Schools and Colleges, 215–220. Recuperado de http:/www.maa.org/ql

OECD (2004). Marcos teóricos de Pisa 2003. Recuperado de http//www.oecd.org/pisa/39732603.pdf.

Tuning América Latina (2007). Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Recuperado de http://tuning.unideusto.org/tuningal/

UCU-VA (2015). Diseño Curricular orientado hacia las competencias. Universidad Católica del Uruguay. Documento de difusión interna.

U.S. Department of Education (2001). National Center for Education Statistics. Defining and Assessing Learning: Exploring Competency-Based Initiatives. Washington D.C.: U.S. Department of Education, National Center of Statistics.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FINAL ABIERTO: ANÁLISIS DE PROCEDIMIENTOS Y RESPUESTAS DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN BÁSICA, EN CLASES DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Pierina Zanocco Soto
Universidad Santo Tomás

Resumen: Esta comunicación tiene como propósito analizar cómo enfrentan problemas matemáticos de final abierto, (entendidos como problemas que tienen más de una solución), dieciséis estudiantes de Pedagogía en Educación Básica, en el marco de las clases de Didáctica de la Matemática. Se trabajaron quince problemas presentados en una publicación producto del proyecto bilateral Chile-Finlandia. La clase se organizaba de acuerdo a los siguientes momentos: a) Lectura del problema b) Análisis del contexto del problema. c) Identificar el o los ejes programáticos y Objetivos de Aprendizaje con los que se relaciona el problema d) Explicar por escrito el procedimiento de resolución e) Resolver el problema f) Analizar las respuestas dadas por el grupo. g) Comparar las estrategias utilizadas para resolver el problema h) Formular conclusiones pedagógicas. Se caracterizan tanto los procedimientos de los estudiantes para resolver los problemas matemáticos como las respuestas dadas y se formulan conclusiones relacionadas con los mismos.

Problemas matemáticos de solución abierta, formación de profesores, enseñanza de la matemática

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es una competencia fundamental que los alumnos deben adquirir en la Educación Básica; es necesario prepararlos para la aplicación de conocimientos y habilidades matemáticas, aprendidas en la escuela, en situaciones reales del mundo. A su vez, es indispensable favorecer la construcción de aprendizajes matemáticos significativos anclándolos en situaciones experienciales de los alumnos.

PISA (2004) afirma los planteamientos anteriores y Rico (2006) resalta esta competencia citando: “Plantear y resolver problemas. Esta competencia incluye (a) plantear, formular definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados); y (b) resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías”.

En las Bases Curriculares 2012 publicada en la página web del MINEDUC dice lo siguiente “En la Educación Básica se busca desarrollar el pensamiento matemático. En este desarrollo, están involucradas cuatro habilidades interrelacionadas: resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar. Todas ellas tienen un rol importante en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos para resolver los problemas propios de la matemática (rutinarios y no rutinarios) y de otros ámbitos Donde la habilidad en cuestión es definida así:

"Resolver problemas es tanto un medio como un fin para lograr una buena educación matemática. Se habla de resolver problemas, en lugar de simples ejercicios, cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir. Mediante estos desafíos, los alumnos experimentan, escogen o inventan y aplican diferentes estrategias (ensayo y error, transferencia desde problemas similares ya resueltos, etc.), comparan diferentes vías de solución y evalúan las respuestas obtenidas y su pertinencia."

A lo cual Cattaneo y otros (2013) agrega "No tenemos que olvidar que la resolución de problemas es el camino más adecuado para la enseñanza de la Matemática, fundándose tal elección en la posibilidad que brinda para poner en práctica el principio general del aprendizaje activo. Lo que se persigue con esta enseñanza es poner en acción procesos de pensamiento eficaces para la construcción del conocimiento".

Charnay en Parra y Saiz (2014) dice "Solo hay aprendizaje cuando el alumno percibe un problema para resolver…es decir cuando reconoce el nuevo conocimiento como medio de respuesta a una pregunta"

Dada la relevancia de esta temática para los niños y niñas de Educación Básica, se requiere entonces preparar a los futuros profesores de este nivel en el proceso enseñanza aprendizaje de la Resolución de Problemas.

A través de las distintas asignaturas de su formación los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica tienen la oportunidad de vivenciar esta temática resolviendo problemas de diverso tipo, a continuación algunas de sus reacciones expresadas en la etapa de cierre de cada experiencia donde se resolvían problemas:

"Este problema no se puede resolver faltan datos"

"Mi compañero lo resolvió dibujando, eso está malo, hay que solucionarlo con operaciones o álgebra"

"Este problema está mal redactado, no se puede encontrar una respuesta"

"Los problemas deben tener una sola solución, si hay más de una es porque su redacción es ambigua"

" Si yo no puedo resolver un problema, es obvio que mis alumnos tampoco lo harán"

"Los problemas se deben resolver por un solo camino"

Estas opiniones frente a la temática motivaron la necesidad de trabajar con dieciséis estudiantes de Pedagogía en Educación Básica, problemas matemáticos de final abierto en clases de Didáctica de la Matemática I. Entenderemos como este tipo de problemas a aquellos que tienen más de una respuesta.

METODOLOGÍA DE TRABAJO

Para la realización del trabajo con los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica se siguieron las siguientes etapas:

a) Lectura del problema: este proceso se llevaba a cabo primero a través de una lectura silenciosa y luego lectura en voz alta: cada uno contaba con una copia del problema. La instrucción estaba dirigida a que realizaran un análisis del problema desde diferentes puntos

de vista, como por ejemplo posible estrategia de solución, identificar el contexto, en qué curso lo trabajaría, con qué eje programático estaría relacionado. Esta etapa no presentaba dificultad para los estudiantes.

b) Análisis del contexto del problema: identificaban el campo de contextualización, por ejemplo: dinero, entretención, comercio, terreno, juegos matemáticos, entre otros .Esta etapa presentaba algunas dificultades, ya que se equivocaban, inicialmente nombraban las operaciones, luego del trabajo con unos tres problemas lograron realizarlo correctamente.

c) Identificar el o los ejes programáticos con los que se relaciona el problema: asociaban el problema a un procedimiento de solución, aludiendo por ejemplo a Números y operaciones con números decimales, a Medición, perímetro y área, a Geometría con Cuerpos geométricos. Esta etapa presentó algunas dificultades ya que si bien identificaban correctamente el o los Ejes programáticos con los cuales se relacionaba el problema, tenían algunas dificultades para identificar el tema específico trabajado.

d) Explicar por escrito el procedimiento de solución: antes de resolver el problema debían explicar por escrito cómo resolverlo, proponiendo pasos específicos para el problema y no genéricos como por ejemplo “Identificar los datos”. También presentó algunas dificultades inicialmente ya que tendían a enunciar las etapas propuestas por Polya. Esta dificultad fue superada luego del desarrollo de unos cuatro problemas.

e) Resolver el problema: con anterioridad se habían trabajado las siguientes habilidades metacognitivas en la realización de una tarea matemática: orientación, planificación, monitoreo, reflexión y evaluación, al enfrentar cada problema se les solicitaba aplicarlas en el proceso de resolución. La gran dificultad que enfrentaban los estudiantes era admitir que había más de una respuesta posible y que la meta era identificar muchas formas de dar respuesta al problema.

f) Analizar las respuestas dadas por el grupo: frente a esta etapa, al concluir el desarrollo de un problema se exponían aquellas respuestas diferentes, para analizarlas en función del tipo de estrategia utilizada: concreta pictórica, simbólica a combinación de ellas. También se identificaban número de respuestas dadas al problema pertinentes a su enunciado.

g) Comparar las estrategias utilizadas para resolver el problema: en esta etapa se pretendía que se analizaran todas las estrategias utilizadas para responder el problema, describiéndolas, entregando fundamentos del por qué la seleccionaron, valorando cada una de las estrategias, dejando de lado calificaciones como “esta es mejor porque se dan menos pasos”,

h) Formular conclusiones pedagógicas; .esta etapa se trabajó luego del desarrollo del quinto problema, del décimo problema y del decimoquinto problema, a continuación se presentan algunas de sus conclusiones:

- “No tengo que pensar que porque resolví de determinada manera un problema, los niños deben hacerlo de la misma forma”

- “Un problema de solución abierta motiva a los niños a buscar varias posibilidades de respuesta”
- “Ahora tengo claro que si un problema puede tener varias formas de encontrar la respuesta, no significa que esté mal redactado”
- “Los problemas de final abierto favorecen la creatividad de los niños”
- “No porque a mí me cueste resolver un problema debo pensar que los niños no podrán resolverlo”
- “Para hacer una buena clase de problemas es necesario preparar una excelente planificación”
- “Es importante que nuestros alumnos sean perseverantes para encontrar más de una solución a un problema de final abierto, nosotros a veces no lo éramos”
- “Resolviendo problemas se aprende mucha matemática”…

ANÁLISIS DE PROCEDIMIENTOS Y RESPUESTAS

Frente a los procedimientos para encontrar la respuesta, estos se clasificaron de acuerdo a la propuesta planteada en las Bases Curriculares 2012, en el capítulo referido a “Orientaciones didácticas” denominada COPISI (concreto, pictórico y simbólico) y que se refiere a resolución con apoyo: de material concreto, representación gráfica , representación simbólica. En cuanto a las respuestas, estas se clasificaron en convencionales, definidas como correctas pero sin demostrar necesidad de experimentar otras respuestas validas, y aquellas creativas que se plantean experimentando una mayor cantidad de respuestas correctas que se escapen de modelos estereotipados.

Divide un cuadrado en dos piezas que sean iguales (congruentes). Muestra tantas formas distintas como puedas.

Tipos de procedimientos			Tipos de respuestas	
Concreto	Pictórico	Simbólico	Convencional	Creativas
9 estudiantes utilizan hojas de papel lustre para presentar sus respuestas.	7 dibujan cuadrados para presentar sus respuestas,	----------	16 estudiantes presentan las respuestas convencionales: división horizontal, división vertical, las dos diagonales..	----------

Tabla 1. Tipos de procedimientos y respuestas dadas por los 16 estudiantes

Con el propósito de que presenten soluciones más creativas se les muestra un par de soluciones que aparecen en el texto mencionado, realizadas por niños. Sus primeras reacciones se traducen en que las respuestas dadas por los niños no son correctas, se les solicita que fundamenten sus respuestas, luego de una discusión donde los estudiantes se van acercando a aceptar que todas son propuestas adecuadas pertinentes porque respetan la condición dada en el enunciado del problema, se los motiva a encontrar otras soluciones.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Luego de finalizada la experiencia, que tuvo una duración de 18 horas de clases de 90 minutos se plantearon las siguientes conclusiones:

- Es necesario que los futuros profesores se vean enfrentados periódicamente a la resolución de problemas relacionados con los diferentes ejes programáticos.
- Se considera necesario presentarle a los estudiantes diferentes estrategias heurísticas que faciliten su acercamiento a proponer un camino de solución a un problema matemático.
- Se debe promover la autonomía en la resolución de un problema, esto no significa que el estudiante, en algunas ocasiones, no necesite de un andamiaje que le ofrezca el profesor para producir un acercamiento al problema.
- El estudiante tiene que asumir un rol activo para guiar su propio proceso de aprendizaje, rol que se relaciona directamente con el proceso metacognitivo, en cuanto éste le permite a las personas funcionar independientemente como sujetos que aprenden y que se dan cuenta de sus procesos.
- El estudiante debe comprender el proceso de transferencia, capacidad de las personas de aplicar lo que han aprendido a distintas situaciones, en otras palabras, como el estudiante adapta o modifica sus actividades cognitivas de acuerdo con la tarea que realiza.

Una proyección de este trabajo, una vez vivenciada la experiencia de resolver problemas de final abierto, es lograr que los estudiantes de Pedagogía Básica generen problemas matemáticos con las mismas características, para alumnos de los distintos cursos de la Enseñanza Básica.

Referencias

Araya, P. Varas, L (2014) *Resolución de problemas de final abierto en clases de matemática"* del proyecto bilateral Chile-Finlandia, AKA 09, CIIE .Universidad de Chile. Santa Fe.

Cattaneo, C y otros (2013) *Didáctica de la Matemática: Enseñar Matemática*. Ediciones Homosapiens 48-62.

Charnay Rolland (2014) Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Parra, C : Saiz I Compiladoras *Didácticas de la Matemáticas: Aportes y reflexiones.* 51-64.Paidos. Buenos Aires ,Barcelona, Méxixo.

Rico, L. (2006). *La competencia matemática en Pisa*. *PNA*(1), 53-59.

ERRORES EN LA CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS POR PROFESORES CHILENOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Danilo Díaz-Levicoy[1], Rafael Parraguez[1], Cristian Ferrada[1], Elisabeth Ramos-Rodríguez[2]
Universidad de Granada[1], Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[2]

Resumen: Se presentan resultados parciales de una investigación sobre la construcción de gráficos estadísticos por un grupo de 54 profesores en activo de Educación Primaria chilena, en particular, abordamos los errores cometidos en dicha tarea. Para la obtención de los datos se planteó una actividad en la que deberían graficar la cantidad de palabras de acuerdo a su longitud; la que fue desarrollada en parejas. Los resultados evidencian variedad de errores, coincidiendo en su mayoría con los descritos en investigaciones con profesores en formación. Entre los errores más recurrentes se observan rótulos ausentes o poco precisos y barras con anchos no uniformes en un gráfico de barras.

Gráficos estadísticos, educación primaria, formación continua

INTRODUCCIÓN

La presencia de los temas de estadística y probabilidad es una realidad en el currículo chileno de Educación Primaria establecido por el Ministerio de Educación (MINEDUC, 2012), lo que exige de los profesores conocimientos didácticos y disciplinarios para enseñar estos contenidos en las aulas. En particular, el trabajo con gráficos estadísticos se estipula desde el primer curso de educación obligatoria y lo que se ve confirmado con su presencia en los libros de texto de estos mismos niveles (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea, 2016). Además, los estándares pedagógicos y disciplinarios definidos por el MINEDUC (2011) establecen, en el estándar *"es capaz de conducir el aprendizaje de la recolección y análisis de datos"*, que los profesores de Educación Primaria deben tener los conocimientos sobre los temas de estadística y probabilidad en cada nivel educativo. Además, deben ser capaces de:

(…) diseñar actividades y unidades que le permitan conducir el aprendizaje de sus alumnas y alumnos, en cada nivel, respecto a la recolección, organización, representación y análisis de datos, haciendo posible la extracción y la presentación de información referida a una muestra, fomentando su pensamiento crítico respecto de la validez y representatividad de esa información. (…). Está[r] capacitado[s] para diseñar evaluaciones que permitan diagnosticar y observar el avance de los alumnos y verificar el logro de los objetivos planteados (MINEDUC, 2011, p. 111).

Así, en particular, sobre los gráficos estadísticos se menciona que los profesores han de planificar la instrucción para "desarrollar habilidad para la construcción de tablas y lectura e interpretación de gráficos en los distintos niveles" (MINEDUC, 2011, p. 111).

En lo que sigue, describimos los antecedentes que han sido utilizados para identificar los errores de los profesores en activo, describimos la metodología seguida en el trabajo, para luego pasar a detallar los resultados y las conclusiones del estudio.

ANTECEDENTES

Diversos estudios han centrado su interés en los gráficos estadísticos en la formación inicial y continua de profesores de Educación Primaria (e.g., Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas, 2016; Cabral dos Santos y Selva, 2011; Campos, Jacobini, Ferreira y Wodewotzki, 2015; Rodríguez y Sandoval, 2012), los que detectan las dificultades al trabajar con estas representaciones.

Arteaga et al (2016) realizan una clasificación de los errores que presentan profesores de Educación Primaria en formación la Universidad de Granada (España), en la construcción de gráficos estadísticos con los datos extraídos en el desarrollo de un proyecto. Entre los errores encontramos:

Gráficos básicamente correctos. Cuando construye adecuadamente el gráfico considerando los convenios de construcción y elementos estructurales, usa una escala adecuada y representa de manera correcta los datos y asigna rótulos y etiquetas claras y precisas. También se incluye los gráficos que se apartan un poco de las normas (por ejemplo, hay líneas adicionales) pero son correctos.

Gráfico con errores de escala. Estos errores pueden ser: a) escalas no proporcionales, a las magnitudes representadas, ya que las distancias que deberían ser iguales entre pares distintos de puntos, no lo son; b) valores numéricos faltantes en la recta real, como la omisión de los valores de la variable que tienen frecuencia nula; c) rótulos confusos, valores erróneos en las escalas o falta escala; d) barras no centradas en los gráficos de barras; e) escala inapropiada, por ejemplo aquellas que no cubren el campo de variación de la variable representada o las que contienen subdivisiones excesivas.

Gráfico incorrecto. Se trata de gráficos claramente inadecuados de acuerdo a la tarea solicitada. Estos errores pueden ser: a) altura de la barra no proporcional a la frecuencia, implicando problemas con los convenios de construcción de gráficos; b) intercambiar frecuencia y valor de la variable en los ejes; c) representa cada valor de la variable junto con su frecuencia, construyéndose un gráfico de barras adosadas con dos variables diferentes; d) barras con ancho diferente.

METODOLOGÍA

En este trabajo utilizamos una metodología cualitativa, de nivel descriptivo, mediante el análisis de contenido (López, 2002). A una muestra de 54 profesores, de dos grupos diferentes de 12 y 15 parejas, que se encontraban cursando un programa de especialización en Educación Matemática en una universidad tradicional chilena. A estos profesores se les presenta el texto, mostrado en la Figura 1, en la cual debían construir dos gráficos estadísticos distintos (54 en total), a elección, considerando para ellos las frecuencias de las longitudes de cada palabra (sin considerar el título).

Perro y el reflejo

Había una vez un perro, que estaba cruzando un lago. Al hacerlo, llevaba una presa bastante grande en su boca. Mientras lo cruzaba, se vio así mismo en el reflejo del agua. Creyendo que era otro perro y viendo el enorme trozo de carne que llevaba, se lanzó a arrebatársela.

Decepcionado quedó cuando, por buscar quitarle la presa al reflejo, perdió la que él ya tenía. Y peor aún, no pudo obtener la que deseaba.

Fuente: http://www.fabulascortas.info

Figura 1: Texto usando en la actividad para obtener los datos

Las construcciones de los profesores se han analizado para identificar, entre otras cosas, los errores que cometen, ya que son estos los encargados de enseñar la lectura y construcción de estas representaciones en estudiantes de Educación Primaria.

RESULTADOS

En la Tabla 1 observamos la distribución de los errores que hemos encontrado tras analizar las construcciones realizadas por los profesores en activo. En ella vemos que, a nivel general, presentan como error más frecuente la ausencia de los rótulos (palabras) o cuando estos son poco precisos. Errores con estos elementos de los gráficos dificultan la compresión de la información que se representa. Ejemplo de esta situación la mostramos en la Figura 2, en la que vemos un gráfico en el que se omite el título principal y donde los títulos de los ejes son poco precisos, dificultado la comprensión de la información mostrada.

El segundo error más frecuente es la poca precisión con la que se realizan las construcciones de los gráficos, lo que lleva a representar barras no uniformes en su ancho. En tercer lugar, tenemos aquellos errores en que los profesores dibujan la altura de las barras o sectores circulares no proporcionales a las frecuencias. Como cuarto identificamos la omisión de valores en el eje X cuando la frecuencia es nula, lo que supone un fallo en el sentido numérico de los profesores. Finalmente, como quinto error, observamos el uso de gráficos no adecuado a la naturaleza de los datos o la no finalización de la misma.

Tipo de error	Grupo 1 (n= 24)	Grupo 2 (n=30)	Total (n=54)
Valores numéricos faltantes en la recta real	25	16,7	20,4
Rótulos confusos, valores errados en las escalas, o ausencia de los mismos	62,5	73,3	68,5
Gráficos no apropiados a los datos o construcción no finalizada	25	13,3	18,5
Altura de las barras o sectores circulares no proporcionales a las frecuencias.	37,5	10	22,2
Barras con ancho no uniformes	33,3	33.3	33.3

Tabla 1: Porcentaje de errores observados en la construcción de gráficos por profesores en activo

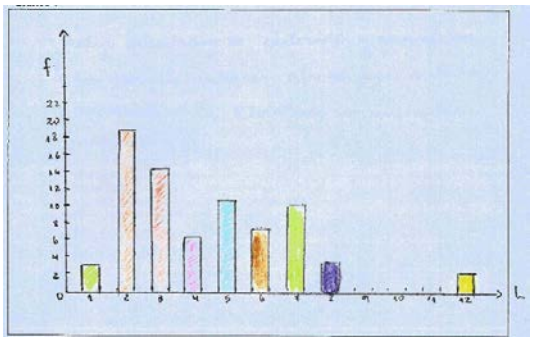


Figura 2: Construcción de un gráfico de barras (equipo 6, grupo 1).

CONCLUSIÓN

Es necesario que los profesores de matemática, de todos los niveles de enseñanza obligatoria, tengan un conocimiento integro de los temas que deben enseñar, para poder hacer clases con seguridad y ayudar a sus estudiantes a lograr aprendizajes, así como generar estrategias metodológicas para superar obstáculos en el aprendizaje de la matemática y, en particular, de los gráficos estadísticos.

Este trabajo permite visualizar la dificultad que tienen los profesores al trabajar gráficos estadísticos, tema que deben enseñar desde el primer curso de Educación Primaria y con amplia presencia en los libros de texto. Los resultados de este estudio son preocupantes, porque existe la posibilidad de que estos errores sean transmitidos en el proceso de instrucción, dificultando que los estudiantes obtengan las herramientas para alcanzar una adecuada cultura estadística. Más aún, muchos de estos errores también se identifican en los libros de textos chilenos de matemática para la Educación Primaria, como lo evidencia el estudio de Arteaga y Díaz-Levicoy (2016), por lo que si el profesor no es consciente de estos errores y están presentes en los textos, es altamente probable que sean transmitidos a los estudiantes.

Se espera, con este trabajo, motivar otras investigaciones en la formación continua e inicial de los profesores, como una forma para asegurar que estos temas se trabajan adecuadamente en el aula.

Agradecimientos: Beca CONICYT PFCHA 72150306.

Referencias

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J.M. y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 15-40.

Arteaga, P. Y Díaz-Levicoy, D. (2016). Conflictos semióticos sobre gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria. *Educação e Fronteiras On-Lne,* en prensa.

Cabral dos Santos, K.B. y Selva A.C.V. (2011). Interpretação de gráficos: explorando a concepção de professores. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife, Brasil.

Campos, C.R., Jacobini, O.R., Ferreira, D.H.L. y Wodewotzki, M.L.L. (2015). O ensino de gráficos estatísticos no contexto da Educação Crítica. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Chiapas, México.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. Y Gea, M.M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: Un estudio comparativo entre España y Chile. *Boletim de Educação Matemática, 30*(55), 713-737.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI. Revista de Educación, 4*, 167-180.

MINEDUC (2011). *Estándares orientadores para egresados de carreras de pedagogía en Educación Básica. Estándares pedagógicos y disciplinarios*. Santiago: CIAE y CEPPE.

MINEDUC (2012). *Matemática Educación Básica. Bases curriculares*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

Rodríguez, F. Y Sandoval, P.R. (2012). Habilidades de codificación y descodificación de tablas y gráficos estadísticos: un estudio comparativo en profesores y alumnos de pedagogía en Enseñanza Básica. *Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior, 17*(1), 207-235.

EXPERIENCIAS EMOCIONALES DE LOS ESTUDIANTES EN CLASE DE MATEMÁTICAS: PROBLEMAS RELACIONADOS CON LA FUNCIÓN LOGARITMICA

Anita Vega-Salgado, Adriana Breda
Universidad de Los Lagos

Resumen: El objetivo de esta propuesta de investigación cualitativa en enseñanza de álgebra, es identificar las experiencias emocionales de los estudiantes en la clase de matemática de una escuela secundaria chilena. Para eso, con un grupo de 27 estudiantes, se hará entrevistas en la modalidad grupos focales y reportes diarios de dos talleres de función logarítmica que implican: a) la resolución de problemas contextualizados y b) la representación la función por medio del software Winplot. El análisis de datos se basa en la teoría de la estructura cognitiva de las emociones OCC (Ortony, Clore, y Collins, 1988), que especifica provocar situaciones para cada tipo de emoción y las variables que afectan a la intensidad de estas. Con este estudio se espera que los alumnos proporcionen respuestas con mayor detalle en relación a lo experimentado en la clase de matemáticas y que hablen de sus experiencias emocionales en términos de la situación desencadenante.

Emociones, identificación de emoción, álgebra, función logarítmica, resolución de problemas

INTRODUCCIÓN

El papel que juega la Matemática en la sociedad actual continúa siendo de vital importancia, tanto para el mundo de los negocios, el arte, la ciencia y la tecnología como para la resolución problemas y la toma de decisiones en la vida cotidiana. La situación en el campo de la educación matemática, la mayor parte de la investigación sobre los estudiantes emociones se centra en su papel en la resolución de problemas matemáticos (Goldin, et al., 2011). Entre otros resultados, estos estudios han confirmado que las personas tienden a experimentar emociones similares en el proceso de resolución de problemas (Hannula, 2012). La Matemática Educativa ha demostrado que el afecto influye directamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto en profesores como en estudiantes. Enfocando nuestros esfuerzos a estos últimos, se ha demostrado que las creencias, actitudes y emociones, son importantes para el bienestar, el aprendizaje y el logro académico en las matemáticas (Hemmings, et al., 2011). El tema afectivo en el currículo escolar de Chile, se apunta que dentro de las nociones básicas se proyecta que el estudiante integre tres elementos: conocimientos, habilidades y actitudes. Se establece que tanto las habilidades como los conocimientos deben estar atravesados por los valores y los afectos, pero el dominio natural de ellos son las actitudes. Se señala: “Las actitudes son disposiciones aprendidas para responder, de un modo favorable o no favorable, frente a objetos, ideas o personas; incluyen componentes afectivos, cognitivos y valorativos” (Mineduc, 2013). Para lograr la identificación de las emociones de los estudiantes en la clase de matemáticas, se aplica la Teoría de la Estructura Cognitiva de las Emociones o también conocida como Teoría OCC de los autores Ortony, Clore y Collins (OCC). Ortony et al. (1988) explican que aunque “Las emociones son inestables son muy reales y muy intensas, sin embargo,

proceden de las interpretaciones cognitivas impuestas a la realidad externa", es decir, las emociones tienen una base cognitiva esencial y profunda.

Conforme lo expuesto, comprendemos que es de grande importancia comprender lo que experimentan los estudiantes en relación con las matemáticas abstractas, en particular, en la unidad de Álgebra y contenido funciones logarítmicas, ya que el pensamiento algebraico funcional permea toda la matemática y es fundamental para hacer matemáticas que son importantes y útiles para la vida real. En este sentido, la presente investigación tiene como objetivo identificar *cuáles son las experiencias emocionales en la clase de matemática de una escuela secundaria chilena, a través de la resolución de problemas de la función logarítmica.*

MARCO TEÓRICO

Para lograr el objetivo es importante definir el término Afecto en Matemática Educativa, que de acuerdo con mcleod (1992) es "un extenso rango de sentimientos y estados de ánimo que son generalmente considerados como algo diferente a la pura cognición e incluye como componentes específicos las creencias, las actitudes y las emociones". A estos componentes en la literatura se le conoce como los descriptores del dominio afectivo.

De acuerdo a las consideraciones de McLeod (1992), sobre los descriptores del dominio afectivo, las emociones son lo más intenso e inestable, al contrario de las creencias que son las más estables, y menos intensas. Las actitudes, por su parte, se encuentran en un punto intermedio. La investigación sobre las emociones en la educación matemática pone de relieve la necesidad de ir más allá de la visión simplista de distinguir entre las emociones positivas y negativas, y se centran en las emociones durante las experiencias matemáticas de rutina porque la mayor parte de la investigación se ha centrado en las emociones y las emociones intensas en las actividades matemáticas no rutinarias (Hannula et al., 2010).

Así, Martínez-Sierra y García (2014), hacen a un lado de las palabras y frases comunes para referirse a las experiencias emocionales y lograr la objetividad analítica. En segundo lugar, los estudiantes sólo hacen referencia a situaciones que son importantes para ellos porque se les permitió hablar libremente. Por lo tanto, las situaciones están provocando expresadas en un sentido estricto.

La estructura global de los tipos de emoción se origina en base a reacciones a acontecimientos, agentes u objetos. La reacción con valencia ante acontecimientos es el estar contento o disgustado, para agentes es la aprobación o desaprobación de una acción de algún agente y la reacción con valencia ante los objetos son de agrado o desagrado. Las consecuencias a los acontecimientos se subdividen tomando en consideración las consecuencias para otros y las consecuencias para uno mismo. Las acciones de los agentes se separan tomando en consideración uno mismo como agente u otros agentes. Para las reacciones con valencia ante aspectos de los objetos son pertenecientes al grupo de atracción.

En la rutina escolar la resolución de problemas, que es una contribución importante a la metacogniciones y creencias, pero que afronta la problemática de la incorporación de los problemas contextualizados en el currículum, se suele distinguir entre problemas escolares

descontextualizados, problemas escolares contextualizados y problemas reales. Las dos últimas categorías se matizan mejor con la clasificación propuesta en Martínez (2003). Este autor distingue los siguientes tipos de contextos: A) Contexto real: refiere a la práctica real de las matemáticas, al entorno sociocultural donde esta práctica tiene lugar. B) Contexto simulado: tiene su origen o fuente en el contexto real, es una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características (por ejemplo, cuando los alumnos simulan situaciones de compra-venta en un (rincón) de la clase. C) Contexto evocado: refiere a las situaciones o problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula, y que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho. En este caso, el objetivo es que sirvan, por una parte, como problemas de consolidación del conocimiento matemático adquirido y, por otra parte, para que los alumnos vean las aplicaciones de las matemáticas al mundo real y que a través de la función que es un concepto central en las matemáticas, muchos fenómenos físicos, químicos, económicos y sociales son modelados.

Algunos investigadores como O'Farrill (2000) y Silva (2012) están interesados en determinar el efecto de la educación basada en computadoras sobre diferentes dimensiones del razonamiento matemático y las implicaciones del uso de tecnología digital sobre las emociones y aptitudes de los aprendices.

METODOLOGÍA

Con un grupo de 27 estudiantes de una escuela pública sur de Chile, se recolectan datos de entrevistas en la modalidad de grupos focales ya que la interacción con otros, que potencialmente se sienten de la misma forma, permite una mayor libertad de expresión (Krueger, 1994) y reportes diarios con talleres de resolución de problemas relacionados a función logarítmicas debido a que los descriptores del dominio afectivo son personales y un informe personal diario mantendría al descriptor en cuestión, sin tener alteraciones (Ortony et al., 1988).

El objetivo del protocolo de entrevista es que los estudiantes proporcionen respuestas con mayor contenido, que solo lo positivo o negativo experimentado en la clase de matemáticas. Haciendo uso de la Teoría OCC, la intención de las preguntas es que los estudiantes hablen de sus experiencias emocionales en términos de la situación desencadenante. Es así que se interpreta la narrativa, identificando la emoción y la variable que la intensifica, si es el caso. De acuerdo a la Teoría OCC, para poder identificar el tipo de emoción se consideraron tres especificaciones:

1. ***Frases concisas*** que expresan la situación desencadenante. Se destacan en letras cursivas y negritas.
2. ***Palabras de Emoción*** que expresan la experiencia emocional. Se escribe en letras cursivas.
3. ***Variables*** que afectan la intensidad de la emoción. Se subrayan las frases que expresan la intensidad de las emociones, afectada por las diferentes variables en las transcripciones.

Por ejemplo, un estudiante al no terminar una actividad en clase declara "no tenía conocimiento de cómo resolverlos", entonces "tenía miedo". Para la teoría OCC la situación desencadenante es "*no tenía conocimiento de cómo resolverlos*". La emoción que el estudiante declara es tener "miedo". La situación desencadenante del estudiante se interpreta de la siguiente manera, el no tener conocimiento de cómo resolver la actividad en clase es el no estar complacido sobre los resultados siendo un acontecimiento valorado como no deseado. Aunque, el estudiante declara tener "miedo", la Teoría OCC permite interpretar que la emoción manifestada es una reacción de un acontecimiento no deseado, tomando en consideración las consecuencias para uno mismo. Permitiendo identificar a la emoción como perteneciente al grupo de bienestar, valorada negativamente y por lo tanto la emoción experimentada es "*congoja*".

CONSIDERACIONES FINALES

Con el objetivo de identificar las experiencias emocionales en la clase de matemática de una escuela secundaria chilena, a través de la resolución de problemas de la función logarítmica, por medio de un análisis basada en la Teoría OCC esperamos que los estudiantes proporcionen respuestas con mayor detalle, que no solo lo positivo o negativo experimentado en la clase de matemáticas y que hablen de sus experiencias emocionales en términos de la situación desencadenante.

Referencias

Adams, V, & mcleod, D. (1989). Afectan y resolución de problemas matemáticos. Una nueva perspectiva. Nueva York: Springer Verlag.

Goldin, G., Epstein, Y., Schorr, R. & Warner, L. (2011). Creencias y estructuras de acoplamiento: Detrás de la dimensión afectiva del aprendizaje matemático de ZDM-La *Revista Internacional de Educación Matemática*, 43 (4), 547-560.

Hannula, M. (2012). Explorar nuevas dimensiones de las matemáticas-relacionados afectan a:. Encarnada y las teorías sociales de Investigación en Educación Matemática, 14 (2), 137-161.

Hannula, M., Pantziara, M., Waege, K., & Schlöglmann, W. (2010). Introduction multimethod approaches to the multidimensional affect in mathematics education. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, y F. Arzarello (Eds.), Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 28-33). Lyon, Francia: Service des publications.

Hemmings, B., Grootenboer, P., Kay, R. (2011). Predicting mathematics achievement: The influence of prior achievement and attitudes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(3), 691-705.

Krueger, R. (1994). Grupos de discusión: Una guía práctica para la investigación aplicada. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Martínez, M. (2003). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado, *Tesis doctoral no publicada*, Barcelona, Universitat Autònoma de Barcelona.

Martínez-Sierra, G., & García, M. (2014). (En prensa). Las experiencias emocionales de los estudiantes en sus clases de matemáticas. *La investigación en educación matemática*. 16(3), 234–250.

Mineduc, (2013). Bases Curriculares de séptimo a segundo medio. Recuperado de http://educrea.cl/wp-content/uploads/2015/04/Bases-Curriculares-7%C2%B0-B%C3%a1sico-a-2%C2%B0-Medio.pdf, (pp 19).

O'Farrill, Y. (2000). Sistema Entrenador Inteligente con Tecnología Multimedia. Optima-Geometría. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa.* Vol. 002,03, (pp. 99-129).

Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1988). La estructura cognitiva de las emociones. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Silva, R. (2012). O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na escola básica (*tesis de magíster*). Universida de Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

ANÁLISIS DIDÁCTICO REALIZADO EN UN TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Adriana Breda
Universidad de Los Lagos

Resumen: El objetivo de este trabajo es presentar cuáles son los criterios utilizados por un profesor cuándo este realiza el análisis didáctico en su trabajo final de master. Para eso se realizó un estudio de caso que toma como objeto de estudio un trabajo de fin de máster realizado por un profesor de matemáticas en servicio. El análisis se basó en los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2007). Como resultado del análisis fue posible notar que el profesor, presenta una reflexión más elaborada en relación con los criterios epistémicos, mediacionales y sobre todo ecológicos y una baja reflexión en cuanto a los componentes que conforman los criterios cognitivos, emocionales y de interacción.

Criterios de idoneidad, trabajo de fin de máster, análisis didáctico

INTRODUCCIÓN

La tendencia a una convergencia internacional en la planificación de los estudios universitarios y, en particular, a los que se refieren a la formación en maestría profesional centrado en la formación del profesorado, ha impulsado una serie de reformas en diferentes países, de manera que presenta un modelo organizado por un cierto refinamiento y la evolución en torno a las competencias profesionales. En el escenario de Brasil, la *Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes)* propone los Másteres Profesionales (MP) como un modo de Postgrado direccionado a la formación de profesionales en los diversos campos del conocimiento, mediante el estudio de técnicas, procesos o cuestiones que cumplen parte de la demanda del mercado de trabajo que proporciona, entre los objetivos principales, la formación de profesionales cualificados para el ejercicio de la práctica profesional innovadora avanzada y transformadora. En el contexto brasileño, en un intento de formar a los profesores de matemáticas en ejercicio, se inició en 2010, a través de la recomendación del *Conselho Técnico-Científico da Educação Superior da Capes*, el Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional (PROFMAT) que constituye un postgrado, presencial y a distancia, ofrecido a profesores de matemáticas que trabajan en la educación básica en Brasil, que tiene como objetivo principal, fomentar la mejora de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles (Brasil, 2013).

El trabajo que se presenta aquí, forma parte de una investigación más amplia que tiene como finalidad investigar cuáles son los criterios de idoneidad y en qué medida son utilizados por los profesores (alumnos participantes del PROFMAT) para justificar que sus propuestas de trabajo de fin de máster (TFMs) implican una mejora en la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica. Por el hecho de que los estudiantes que cursan dicho máster no reciben ninguna orientación o pauta para realizar las reflexiones sobre su propia práctica, analizamos las memorias de los trabajos finales de dicho curso, dado que en ellas los profesores consideran trabajos de reflexión mediante los cuales deben demostrar que adquirieron los objetivos de la maestría, los cuales los capacita para dar continuidad a su actuación como

docentes de matemáticas en la Educación Básica, ya que las directrices proporcionadas por PROFMAT demuestran que el trabajo final debe ser desarrollado de acuerdo con temas específicos del currículo de matemáticas de Enseñanza Básica, de forma innovadora y que tenga aplicación directa en el aula. En este sentido, el objetivo de este trabajo es presentar un estudio de caso mediante el cual se analiza cuáles y en qué medida son utilizados los *criterios de idoneidad didáctica* propuestos por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2007) en el proceso de reflexión que realiza un profesor al que llamaremos Reis (2013), que tiene como innovación el desarrollo de la ciudadanía y del pensamiento crítico por medio de la enseñanza de la Matemática financiera, lo cual propone como TFM en el programa PROFMAT.

MARCO TEÓRICO

En este trabajo partimos suponiendo que el trabajo de fin de máster (TFM) es una tarea que implica, de forma implícita o explícita, un ejercicio de análisis didáctico, ya que en el TFM los profesores deben explicar una propuesta didáctica y justificar por qué esta significa una mejora para la enseñanza.

En campo de la Educación Matemática no hay un consenso sobre la noción de "calidad" y, en particular, no hay consenso sobre los "métodos para la valoración y mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas". Básicamente existen dos maneras de afrontar esta problemática, desde una perspectiva positivista o desde una consensual (Font & Godino, 2011). Desde la primera, la investigación científica realizada en el área de Didáctica de las Matemáticas nos dirá cuáles son las causas que hay que modificar para conseguir los efectos considerados como objetivos a alcanzar, o, como mínimo, nos dirá cuáles son las condiciones y restricciones que hay que tener en cuenta para conseguirlos. Desde la perspectiva consensual, aquello que nos dice cómo guiar la mejora de los procesos de instrucción de las matemáticas, debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad científica, cuando ésta está orientada a conseguir un consenso sobre “lo que se puede considerar como mejor”.

La noción de criterios de idoneidad didáctica propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS, a partir de ahora) (Godino, Batanero & Font, 2007 y 2008) se posiciona en la perspectiva consensual. Dicha noción es una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Los criterios de idoneidad pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones. Los criterios de idoneidad son reglas de corrección útiles en dos momentos de los procesos de estudio matemáticos. *A priori*, los criterios de idoneidad son principios que orientan “cómo se deben hacer las cosas”. *A posteriori*, los criterios sirven para valorar el proceso de estudio efectivamente implementado.

METODOLOGÍA

Optamos por realizar el estudio de un caso donde se investiga el análisis didáctico realizado por un profesor de matemáticas en servicio cuándo este realiza su trabajo de fin de máster. Corroboramos con Ponte (1994) e Yin (2001), que el estdio de caso, se caracteriza por un análisis muy particular. En este tipo de estudio el investigador no pretente cambiar la situación, pero si comprenderla tal com se presenta.

Para analizar las reflexiones realizadas por el profesor sobre cómo mejorar su práctica docente, relacionada con la implementación de la propuesta didáctica que propusieron como parte de su TFM, utilizamos los *criterios de idoneidad didáctica* propuestos por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, 2011; Breda, Font & Lima, 2015), los cuales son considerados, por dichos autores, como criterios mínimos para que se tenga una enseñanza de matemáticas de calidad:

Idoneidad Epistémica, para evaluar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas".

Idoneidad Cognitiva, para evaluar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar.

Idoneidad Interaccional, para evaluar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos.

Idoneidad Mediacional, para evaluar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.

Idoneidad Emocional, para evaluar la implicación (intereses, motivaciones,…) de los alumnos durante el proceso de instrucción.

Idoneidad Ecológica, para evaluar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional (Font, Planas & Godino, 2010, p. 101).

RESULTADOS Y CONSIDERACIONES FINALES

Aunque el autor no recibió, del máster, una pauta para orientar sus reflexiones y justificaciones, en sus argumentos y justificaciones presenta evidencias implícitas y explicitas del uso de los critérios de idoneidad didáctica (epistemico, cognitivo, mediacional, interaccional, emocional y ecologico). Por ejemplo, en relación al critério epistémico y ecológico el autor sostiene que su propuesta didáctica incluye cierta riqueza de procesos cuando él argumenta que las actividades requieren un proceso inductivo, generalización y la conexión entre las matemáticas y situaciones reales (proceso de modelado). Por otra parte, el autor sostiene que las actividades propuestas promueven la identificación, interpretación y evaluación crítica para ayudar al estudiante en la toma de decisiones.

> Esta propuesta pedagógica presentado en esta tesis, tiene como objetivo proporcionar herramientas y recursos para que los estudiantes aprendan a actuar en el mundo en el que operan, lo que lleva a identificar, interpretar, evaluar y criticar las matemáticas, para que la formación

> contribuya para formar ciudadanos libres y críticos, responsables de sus acciones. (Reis, 2013, p. 08).

En el análisis del TFM se concluye que el autor presenta una reflexión más elaborada en relación con los criterios epistémicos , mediacionales y sobre todo ecológicos . El mejor desarrollo de este último puede explicarse por la innovadora elección de la propuesta didáctica presentada en su TFM - para hacer frente a los conceptos de matemática financiera a través de la perspectiva de la Educación Matemática Crítica - ya que esta perspectiva se centra en el contenido del enfoque dirigido a la contextualización y el desarrollo de la ciudadanía y el pensamiento crítico.

La baja reflexión del autor en cuanto a los componentes que conforman los criterios cognitivos, emocionales y de interacción , puede estar relacionado con el hecho de que la propuesta que él presenta en su TFM no se ha aplicado en el aula y en este sentido, es difícil encontrar argumentos de cómo los estudiantes aprendieron tales conceptos , como fuerón resueltos los conflictos de significados o como el tiempo de trabajo dedicado para cada actividad puede promover el aprendizaje de los estudiantes. Estos resultados se pueden corroborar en Breda y Lima (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2016).

Referencias

Brasil. (2013). Un análisis cualitativo y cuantitativo de los perfiles de los candidatos a la Maestría Profesional en Matemáticas en la Red Nacional (PROFMAT).

Breda, A., Font, V., y Lima, V. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8(1), 4-41.

Breda, A., & Lima, V.M.R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, 5(1), 74-103. doi: 10.4471/redimat.2016.1955.

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2016). Establishing criteria for teachers' reflection on their own practices. In Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 283). Szeged, Hungary: PME.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas [Indicators of didactical suitability of process of teaching and learning of mathematics]. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME).* Recife, Brasil.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127 – 135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e da instrução matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10(1), 7-37.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.

Yin, R. (2001). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman.

INTERACCIÓN EN UN AULA DE GEOMETRÍA: CONSTRUCCIÓN COLECTIVA Y ESCRITURA AUTÓNOMA DE UNA DEMOSTRACIÓN

Óscar Molina
Universidad de los Lagos

Resumen: como resultado parcial de la más reciente investigación del grupo Æ•G de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), cuyo objetivo consistió en involucrar a estudiantes de básica media y secundaria en el razonamiento científico en geometría, esta comunicación presenta diferencias entre su actividad cuando participan en interacciones colectivas y su escritura autónoma de demostraciones. Para analizar este fenómeno, se presenta un dispositivo analítico que articula marcos teóricos relativos a los intercambios instruccionales, normas sociomatemáticas y discurso reflexivo. Se ilustra la complejidad de la situación mediante un ejemplo de actuación exitosa que tuvo un estudiante durante la interacción colectiva, pero que no se vio reflejada por completo en su escritura autónoma de la demostración. Se discuten posibles causas de este hecho.

Interacción, discurso reflexivo, contrato didáctico, norma sociomatemática, demostración

INTRODUCCIÓN

Los educadores matemáticos tienen un desafío importante: lograr que los estudiantes comprendan el papel de la demostración en matemáticas (Hanna & de Villiers, 2012) y del razonamiento matemático como parte del razonamiento científico. En este sentido, el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), en el marco del proyecto[14]. *Geometría: Vía al Razonamiento Científico* diseñó e implementó una secuencia didáctica enfocada en buscar que los estudiantes (entre 14 y 15 años) de un curso de geometría de un colegio público ubicado en Bogotá-Colombia, se involucraran en una actividad demostrativa y, en esa vía, desarrollaran razonamiento científico. Análisis preliminares de los registros de información llamaron la atención acerca de las diferencias entre la participación de los estudiantes en las interacciones colectivas y su escritura autónoma de demostraciones. Este aspecto es el foco central de la comunicación; en consecuencia, se presenta un dispositivo analítico para estudiar este hecho. Una vía metodológica es abordar: i) el rol del discurso en el aula para apoyar el desarrollo matemático de los estudiantes (Cobb, Boufi, McClain, & Whitenack, 1997); y ii) el rol de la interacción en el aula, específicamente el papel de profesor (Jones & Herbst, 2012). Para esta comunicación, se ponen en juego estos aspectos para analizar dos sesiones de una clase de geometría: una, en la que se pretende que los estudiantes participen en la construcción colectiva de una demostración de un enunciado, y otra en la que parejas de estudiantes sin la compañía del profesor[15], intentan escribir la demostración producida colectivamente. Para

[14] Financiado por el Centro de Investigaciones de la UPN y desarrollado durante 2015 y 2016. Agradezco la lectura previa de este documento a Carmen Samper, Leonor Camargo y Patricia Perry, integrantes del grupo de investigación.

[15] A la actividad en parejas, sin la compañía del profesor, le denominamos trabajo “autónomo”.

mostrar la complejidad de la situación, se presenta un ejemplo de actuación exitosa de un estudiante durante la interacción colectiva, que no se vio reflejada por completo en su escritura autónoma de la demostración, y se discuten posibles causas de este hecho.

MARCO REFERENCIAL Y ANALÍTICO

Para abordar el asunto, se articularon tres referentes: conceptualización de *discurso reflexivo*[16] (Cobb, Boufi, McClain, & Whitenack, 1997), *norma sociomatemática* (Yackel & Cobb, 1996) e *intercambios instruccionales* (Jones & Herbst, 2012). Tales *intercambios* proveen una estructura útil para articular los demás elementos teóricos, pues se compone de tres elementos centrales que permiten analizar (o diseñar) una clase en la que se pretende construir una demostración (Jones & Herbst, 2012): contrato didáctico, actividad de clase en variadas escalas de tiempo y formas de intercambio. Dado el espacio limitado, no se describen en detalle tales elementos; se presenta parte de las relaciones que fueron establecidas entre ellos (Tabla 1), las cuales generaron un dispositivo para analizar la interacción en el aula. Las cláusulas (para profesor y estudiantes) del contrato didáctico y las respectivas normas sociomatemáticas descritas en la Tabla 1 se basan en las ideas de Martin, McCrone, Bower & Dindyal (2005) y Herbst (2006, en Jones & Herbst, 2012). Los tipos de discurso, que señalan cambios en el mismo, se toman de los indicadores para evaluar la comprensión de una demostración (Mejía-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads & Samkoff, 2012; Molina, Samper & Perry, 2015).

<table>
<tr><td>FORMAS INSTRUCCIONALES</td><td colspan="2">CONTRATO DIDÁCTICO</td><td rowspan="2">NORMAS SOCIOMATEMÁTICAS
DE CLASE</td><td rowspan="2">TIPOS DE DISCURSO DE ESTUDIANTES</td></tr>
<tr><td>Negociación de Tareas Nuevas[17] (TN)</td><td>Profesor</td><td>Estudiante</td></tr>
<tr><td>Construir conjuntamente (con participación de “todos”) una demostración de un hecho geométrico.</td><td rowspan="2">CDP_1 Debe favorecer la participación de los estudiantes mediante preguntas de indagación (por qué).
CDP_2 Debe analizar los</td><td rowspan="2">CDE_1 Debe argumentar sus afirmaciones en el marco del sistema teórico dado en la clase, i.e., usando garantías provenientes de la geometría plana euclidiana.</td><td rowspan="2">NS_1 Toda afirmación debe argumentarse en el marco del sistema teórico (de la geometría euclidiana) dado en la clase.</td><td rowspan="2">D_1 Aluden explícitamente, a garantías teóricas para justificar afirmaciones. (C)</td></tr>
<tr><td>Situaciones de Instrucción[18] (SI)</td></tr>
</table>

[16] Se caracteriza por un cambio de discurso (hacia uno matemático) producto de la discusión acerca de un objeto sobre el cual previamente se ha hablado o actuado.

[17] Toma lugar cuando se propone a los estudiantes tareas que son nuevas para ellos.

[18] Toman lugar cuando deben ser recordadas normas sociomatemáticas constituidas en la clase.

Proveer un formato para que estudiantes formulen por escrito, la demostración de un hecho geométrico.	argumentos de los estudiantes. CDP_3 Debe orientar a los estudiantes a medida que ellos argumentan, y redirigirlos cuando las garantías, argumentos, o cadenas de argumentación no son válidos.	CDE_2 Debe dar demostraciones de acuerdo a una cadena de argumentos válidos en las matemáticas. CDE_3 Debe responder toda indagación que se le haga.	NS_2 Una demostración es una cadena de razonamiento válida en las matemáticas.	D_2 Aluden a pasos estructurales de la demostración. (M) D_3 Aluden a pasos que posibilitan argumentos que soportan pasos estructurales. (L)
Actividad de clase en escalas de tiempo	De momento a momento			De Corto (C), Mediano (M) y Largo (L) plazo

Tabla 1. Relación entre formas de intercambio, contrato didáctico, normas sociomatemáticas y discursos[19]

METODOLOGÍA Y CONTEXTO GENERAL DE LAS CLASES

Se realizó un experimento de enseñanza que pretendía que los estudiantes del curso citado se involucran en un ambiente de actividad demostrativa. El equipo de investigación diseñó e implementó una secuencia de problemas cuyo objeto de estudio se centró en las conexiones entre mediatriz y circunferencia a partir de la relación de equidistancia. La secuencia, que consistía de cuatro problemas, fue implementada por dos profesores del colegio, el titular del curso (P1) y una profesora (P2) que apoyó la actividad. Los estudiantes debían encontrar la solución de los problemas con el uso del software GeoGebra y reportarla a manera de conjetura (proposición condicional). Para este escrito, interesa la conjetura que se produjo a partir del segundo problema[20], esta es: *Dados dos puntos A y B. Si A y B pertenecen a una circunferencia, entonces el centro C de esta pertenece a la mediatriz del segmento AB*. En la primera sesión de clase[21] (sesión 1), P1 y P2 lideraron la interacción para que entre "todos", se dieran ideas para hacer la demostración de la conjetura. En la otra (sesión 2) por pareja de estudiantes se entregó una hoja con el enunciado de la conjetura y un formato a doble columna (Figura 1) en el cual ellos debían escribir la demostración "autónomamente". Para recoger los datos de la investigación, las sesiones fueron grabadas en audio y video. Para la sesión 1 se hizo una transcripción completa de la interacción; para la sesión 2 se

[19] Los acrónimos (en negrilla) se usaron como códigos para analizar las interacciones de la clase.

[20] Su enunciado es el siguiente: Dados dos puntos A y B: i. ¿Existe una circunferencia que los contiene?; ii. ¿Existe otra? ¿Existen más?; iii. Con base en las respuestas dadas a los ítems i y ii, ¿dónde se encuentra el centro de la(s) circunferencia(s) que contiene(n) a los puntos A y B?

[21] Los elementos teóricos que conforman la demostración hacían parte del sistema teórico disponible en clase.

fotocopiaron las producciones de los estudiantes. Ambos registros (trascripción y fotocopias) se utilizaron para hacer el análisis a la luz de los elementos expuestos en la Tabla 1.

UN EJEMPLO DE ANÁLISIS

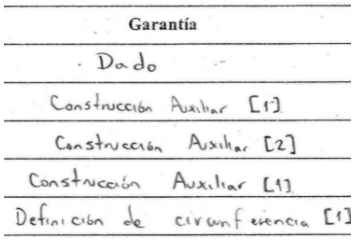
Se toma parte de uno de los ocho fragmentos en que se dividió la sesión 1; estudiantes (I, J, E5, Varios) y P2 participan en la construcción colectiva de uno de los argumentos de la demostración ($\overline{AC} \cong \overline{BC}$). La Tabla 2 presenta la trascripción de la interacción y el análisis de cada intervención.

P2	Tenemos que A y B pertenecen a la circunferencia, ¿Cierto?	[CDP_3] P2 procura recapitular lo hecho hasta el momento, con el fin encaminar la discusión; para este caso, busca precisar lo que permite justificar la congruencia en cuestión.
I, J	[Solo ellos asienten con la cabeza]	
P2	Como pertenecen ¿qué pasa?	[CDE_3] I y J responden las preguntas de P2
I, J	Son equidistantes de C	
P2	Por…	[CDP_1] Reitera la pregunta con el fin de corregir lo dicho por I, J.
Varios	Por definición de Circunferencia.	[CDE_1] Proveen una garantía solicitada. Actúan conforme a NS_1.
P2	Y como son equidistantes ¿quiere decir que qué?	[CDP_1] Indaga por la conclusión que sigue luego de usar la garantía “definición de equidistancia”.
J	AC = BC	[CDE_3] Responde dando una conclusión válida. Actúa conforme a NS_1.
P2	Tienen la misma medida, ¿Entonces?	Parafrasea lo dicho por J.
E5	Son congruentes	[CDE_3] Responde dando una conclusión válida. Actúa conforme a NS_1.

Tabla 2. Trascripción y análisis.

La Figura 1 muestra parte de la producción escrita hecha por I en la sesión 2 y lo que se esperaba que reportara; nótese que, aunque alude a $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, no presenta los pasos *finos* (*i.e.*, subcadenas deductivas que soportan pasos estructurales de la demostración) que permiten inferir tal relación (ver filas sombreadas). Con respecto a lo anterior se comentan tres asuntos: i) P2 busca reorientar a los estudiantes en la búsqueda de argumentos para justificar $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (CDP_3); aunque en la trascripción no está, ellos previamente aludieron a una garantía no válida (definición de radio). ii) Producto de la actividad de P2 (CDP_1 y CDP_3) y su interacción con los alumnos, NS_1 se ha constituido en la clase; no solo I y J tienen un discurso (D_1) acorde con dicha norma, también dos estudiantes más (se verificó la

hipótesis planteada). iii) NS_2 es parcialmente constituida, puesto que los estudiantes no actúan autónomamente acorde a ella; en la demostración, I reportó la cadena con pasos estructurales de la demostración (D_2), pero no escribió en ella los pasos *finos* sombreados.



Afirmación	Garantía
$A, B \in \odot_{C,r}$	Dado
A, B equidistan de *C*	Def. circunfereia
AC=BC	Def. equidistancia
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Def. congruencia

Figura 1. Parte de la demostración escrita por I, y la esperada por los profesores.

ALGUNAS CONCLUSIONES

El dispositivo analítico permitió establecer que la hipótesis planteada se verifica parcialmente: en la demostración escrita hay evidencia de un cambio en el discurso en términos de D_1 y D_2 pero no en términos de D_3. Posibles razones: i) NS_2 no se había constituido completamente como norma de clase; I reproduce la cadena deductiva estructural, pero no es consciente de la necesidad de pasos *finos* para completarla. ii) Salvo el fragmento ilustrado, no hubo otra ocasión para hacer una reflexión que llevara a la necesidad de pasos *finos* en una demostración; hizo falta involucrar a los estudiantes en más tareas que favorecieran la explicitación de tales pasos, asumiendo CDE_2 con mayor autonomía. Es razonable pensar que un *objeto* de *conocimiento a largo plazo* (Jones & Herbst, 2012) es la explicitación de pasos finos en una demostración.

Referencias

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 258-277.

Hanna, G. & de Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education.* NewYork: Springer.

Jones, K. & Herbst, P. (2012). Proof, proving, and teacher-student interaction: theories and contexts. En G. Hanna & M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp.261-278). NewYork: Springer.

Martin, T., McCrone, S., Bower, M., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 95-124.

Mejia-Ramos, J.P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79,* 3-18.

Molina, O., Samper, C., & Perry, P. (2015). Enunciado de un teorema: ¿Único componente de su significado? *Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática: XIX JNEM 2015* (pp. 651-654). Villarrica, Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458-477.

PROBABILIDAD EN EL CAMINO DE UNA HORMIGA: UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA CON USO DE METÁFORAS

Gamaliel Cerda-Morales
Universidad Austral de Chile

Resumen: Basado en la teoría de Lakoff y Núñez (2000) sobre "¿De dónde vie¬nen las matemáticas?", este trabajo muestra algunas reflexiones sobre los fenó¬menos relacionados con el uso de metáforas en el aprendizaje de las matemáticas. En particular, se propone un ejemplo concreto de modelización matemática que permite explicar cómo puede sustentarse la construcción del concepto "probabilidad" mediante el uso de metáforas que existen en el discurso del profesor.

Educación, matemáticas, metáforas, ciencias cognitivas, modelización

INTRODUCCIÓN

La teoría sobre "¿De dónde vienen las matemáticas?", propuesta por Lakoff y Núñez (2000), hace énfasis en el estudio de los procesos cognitivos que ponen en juego quienes aprenden las matemáticas. La principal tesis que construyen los autores afirma que el origen de las estructuras matemáticas que construyen las personas, y también las que se construyen en instituciones, se encuentran en los procesos cognitivos cotidianos como son la percepción, la memoria y el pensamiento metafórico. Según los autores, dichos procesos permiten explicar cómo la construcción de los objetos matemáticos está sostenida por la forma en que se relacionan el cuerpo humano y los objetos de la vida cotidiana.

Desde lo abstracto, las metáforas se caracterizan por construir un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada. Soto-Andrade (2006) pone énfasis en el tránsito del modo cognitivo verbal-secuencial, dominante en la enseñanza de la matemática, a otros modos cognitivos menos habituales, eventualmente no verbales y no secuenciales, que deben ser en medida estimulados en el aprendizaje actual de las matemáticas. Se propondrá un ejemplo en este trabajo con el fin de evidenciar que las metáforas crean una cierta conexión que permite que se trasladen una serie de características y estructuras desde un dominio concreto a otro más abstracto. Primero, asumimos la interpretación de la metáfora como la comprensión de un dominio en términos de otro y proponemos un ejemplo concreto de modelización que permite conocer la naturaleza del concepto probabilidad y abordar su enseñanza en la educación secundaria (16-17 años) mediante el uso de metáforas en el discurso del profesor.

METÁFORAS CONCEPTUALES

Nuestra representación concreta del mundo está siempre influida por las metáforas que inyectamos en él, casi siempre de una manera inconsciente (Acevedo, 2005). La mayor parte de los seres humanos conceptualizamos cosas abstractas en términos de cosas concretas que tenemos a la mano. Una posible explicación de estas metáforas, llamadas metáforas conceptuales, es que se sustentan en las experiencias que vive nuestro cuerpo para relacionarse con su entorno físico y cultural. En este sentido, Lakoff y Núñez (2000) distinguen dos tipos de metáforas que se observan comúnmente en matemáticas y cuyo

dominio de llegada podría estar dentro o fuera de ellas. Las metáforas de anclaje (*grounding metaphores*) son las que tienen su dominio de partida dentro de las matemáticas, pero su dominio de llegada fuera de ellas. Mientras que las metáforas de vinculación (o *linking metaphores*) tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas.

PROPUESTA DE METÁFORAS EN LA ENSEÑANZA DE PROBABILIDADES

La probabilidad es esencial para preparar a los estudiantes, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno (Bennet, 1998). Por otro lado, la cultura en probabilidad (Gal, 2005) requiere no sólo conocimientos, sino actitudes que lleven a los estudiantes a interesarse por mejorar su conocimiento, incluso finalizado su aprendizaje en la escuela o universidad. Proponemos la siguiente situación: Una hormiga se pasea alegremente por un tetraedro de alambre, eligiendo, cada vez que llega a un vértice, cualquiera de las tres aristas a las que está conectado, con igual probabilidad.

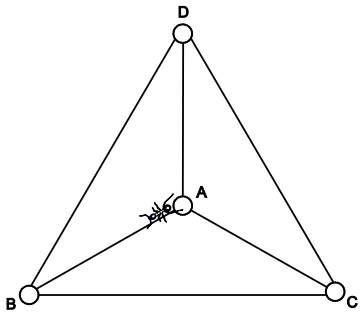


Figura.1. La hormiga en los vértices del tetraedro regular.

Si la hormiga se encuentra inicialmente en el vértice A del tetraedro (como indica la figura 1), ¿dónde estará después de recorrer una arista, dos aristas, tres aristas? ¿Dónde estará después de recorrer m aristas? ¿Dónde estará al cabo de recorrer muchísimas aristas?

Soto-Andrade (2007) se refiere a las metáforas de los paseos al azar para un polígono regular (específicamente un triángulo equilátero). Utilizando la notación de este autor, este trabajo generaliza los paseos o caminatas a un poliedro regular en tres dimensiones, evidenciando ciertas variantes que, desde el discurso del profesor, podrían mejorar la enseñanza-aprendizaje del concepto probabilidad. A continuación, los abordajes metafóricos de nuestra problemática:

La metáfora *salomónica* ve a la hormiga partida en tres porciones en el primer paso, donde cada tercio de hormiga aterriza en uno de los tres vecinos inmediatos, y así en cada paso de manera sucesiva. Van apareciendo así pedacitos de hormiga en cada vértice del tetraedro, que podemos ir añadiendo fácilmente paso a paso, para calcular la porción de hormiga presente en cada vértice después de m caminatas. Nótese que esta metáfora facilita el descubrimiento de la analogía entre el paseo de la hormiga y la evolución de un mercado de consumidores (en iguales condiciones) disputado por cuatro productores. En este caso, la probabilidad de encontrar a la hormiga en cierto vértice resulta ser la parte del mercado controlada por un productor.

La metáfora *hidráulica* ve el cálculo de las probabilidades en cuestión como el flujo o escurrimiento de un litro de fluido probabilista por una red de mangueras, con repartición

equitativa en cada bifurcación. Así, la repartición de un litro de jugo de naranja entre cuatro personas no se trata de una metáfora de los paseos al azar, sino más bien de una representación concreta de éste.

La metáfora *frecuentista* ve un enjambre de hormigas que parte del vértice dado y se divide en tres partes iguales entre los tres vecinos, cada vez. Si se considera m = 8, por ejemplo, astutamente soltamos 38 = 6 561 hormigas, que se irán repartiendo por tercios en los vértices del tetraedro. Basta ir registrando la cantidad de hormigas que van llegando a cada vértice hasta la octava bifurcación. El porcentaje de hormigas que llegó a cada vértice da entonces la probabilidad de presencia de la hormiga aleatoria original en ese vértice, al cabo de la octava caminata.

Finalmente, en la metáfora *platónica*, que es cuando se lanza una moneda de tres caras (si existiese una), donde cada cara cae una vez con igual probabilidad, la hormiga tira una moneda de tres caras para elegir el camino que tomará en el tetraedro. Así, las probabilidades se asignan o calculan como frecuencias relativas de una estadística platónica.

Si el profesor plantea en su discurso un tipo de metáfora salomónica o hidráulica, podría inducir al alumno a entender la probabilidad como una parte de la hormiga determinada sobre los vértices en el camino que recorre o parte de un fluido que transita por una red de mangueras. Palabras como “la hormiga se particiona”, “el líquido se reparte de manera equitativa” pueden producir este efecto en el alumno. Para Lakoff y Núñez (2000, p. 38) esta es una poderosa metáfora utilizada muy a menudo por los profesores en todos los niveles de enseñanza. En dicha metáfora se sugiere una organización espacio-temporal, se tiene un origen (“de”), un camino (“pasa por”, “aquí”, “en su caminata”), y un fin (“a”, “hasta”, “dónde estará”) y además se contempla algo que se mueve y que se puede localizar en un momento dado (los vértices en el camino).

EL PAPEL DE LA METÁFORA EN LA NEGOCIACIÓN DE SIGNIFICADOS

En su discurso, el profesor tiene por objetivo recordar el concepto “punto de partida” y los posibles caminos por seguir desde ese punto de partida. En el paseo al azar, el profesor propone un primer ejemplo breve con el uso de una moneda; en este sentido, el profesor introduce la formulación: la probabilidad de obtener cara o sello es la misma. Esta formulación resulta más operativa para el cálculo de una probabilidad, ya que facilita entrar en un “juego de lenguaje” que permite llegar a un consenso sobre cuáles son las reglas del juego. Un caso especial resulta si ya no tenemos una moneda y el dominio de aplicación se incrementa en tres posibles opciones.

A continuación, algunas indicaciones que podrían orientar el discurso del docente al tratar esta problemática en el aula, con ella se pone en juego el siguiente lenguaje:

Introducción de un elemento genérico. El profesor introduce el elemento genérico *hormiga* sobre la cual se realizarán las operaciones indicadas en la formulación del enunciado, mediante la frase “camina a cualquiera de las tres aristas a las que está conectada con igual probabilidad” (señalando los caminos desde el vértice A del tetraedro con el dedo), y después dice “¿qué ocurre en la primera caminata?” y espera que los alumnos mentalmente

encuentren los valores para los cuales se pueden realizar las operaciones indicadas en la formulación del enunciado.

Consenso sobre el rango de valores del elemento genérico. Los alumnos podrían formular hipótesis sobre el dominio hasta llegar a un consenso que es aceptado por todos y, sobre todo, por el profesor. En este caso, los alumnos podrían decir que "todos tienen probabilidad 1/3 menos el vértice A que tiene probabilidad 0" y el profesor da por buena esta afirmación.

En la segunda parte, el profesor puede reproducir el mismo juego de lenguaje con algunas variantes. La primera variante es que, en este caso, el elemento genérico está en un punto de partida distinto. En efecto, en este caso el profesor escribe 1/3 en cada vértice, salvo en A, donde escribe 0, y espera que los alumnos mentalmente apliquen la técnica de: *1)* pensar en nuevos puntos de partida, *2)* graficar los resultados en un cuadro según la caminata observada, *3)* observar que en el cuadro hay datos que se repiten y deben omitirse (la probabilidad de estar en los vértices B, C y D es la misma), y *4)* que este razonamiento es válido para cualquier punto de partida. La segunda variante es que, cuando los alumnos responden "parece que tiene mayor probabilidad de estar en A", el profesor considera ambigua esta respuesta para llegar a un consenso y decide intervenir pidiendo a los alumnos que centren su atención en los demás vértices, omitiendo cierta afirmación a priori desde el vértice A.

Es importante remarcar que el consenso al que se llega podría estar expresado en términos metafóricos, donde los alumnos y el profesor utilizan la expresión "tres vértices o nodos tienen igual probabilidad", los alumnos lo hacen oralmente, mientras que el profesor, a esta expresión oral, asocia la representación del cuadro originado del enunciado y también la gesticulación sobre la parte externa de la figura 1, moviendo la mano desde el origen a los demás vértices; con ello hace corporal un conocimiento previo, las otras tres opciones son iguales. Así, el movimiento de las manos en el profesor podría dar a entender una respuesta errada por parte del alumno; es decir, el vértice A tiene menos probabilidad de albergar a la hormiga, ya que me "trasladé" desde A. Por ejemplo, Marghetis y Núñez (2013) estudian el movimiento ficticio (o *fictive motion*) presente en la enseñanza del concepto "continuidad" en matemáticas, poniendo énfasis en las consecuencias que puede traer el acto corporal en el actuar de quien lo enseña.

COMENTARIOS

La combinación del lenguaje dinámico y la distribución del mercado entre cuatro productores permiten entender el dominio del enunciado como el resultado de una distribución que verifica el principio de repartición equitativa (lo que matemáticamente se entiende como equiprobables). Según Lakoff y Núñez (2000, p. 158), entendemos este caso de paseo al azar como resultado de un movimiento sin fin que tiene un principio gracias a que solemos proyectar metafóricamente sobre este tipo de procesos nuestro conocimiento de los procesos cotidianos, que en su mayoría tienen principio y fin. Más aún, los procesos que continúan indefinidamente se conceptualizan metafóricamente como que tienen un final y un último resultado. Para los autores, este tipo de conceptualización es el resultado de la aplicación de lo que ellos llaman la metáfora básica del infinito. En mi caso, y por

experiencia empírica, he decidido llamarla metáfora del juicio final. Presentamos este problema de paseos al azar como mecanismo de aprendizaje y enseñanza en educación secundaria. No tan sólo como forma discreta de analizar un problema de tipo probabilístico (azaroso a priori), sino como herramienta matemática para verificar conjeturas que suelen ser advertidas en este tipo de contenidos en la enseñanza tradicional, ahora mediante el uso de metáforas.

Referencias

Acevedo, I. (2005). Metaphors in mathematics classrooms: Analyzing the dynamic process of teaching and learning to graph function, en *Proc. cerme 4.* Recuperado de http://ermeweb.free.fr/CERME4/

Bennet, D. J. (1998), *Randomness*, Nueva York, Cambridge University Press.

Gal, I. (2005). Democratic access to probability: Issues of probability literacy, en G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Nueva York, Springer, pp. 39-63.

Johnson, M. y G. Lakoff (2003), *Metaphors we live by*, Nueva York, The University of Chicago Press.

Lakoff, G. y R. Núñez (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Nueva York, Basic Books.

Marghetis, T. y R. Núñez (2013). The motion behind the symbols: A vital role for dynamism in the conceptualization of limits and continuity in expert mathematics, *Topics in Cognitive Science*, vol. 5, núm. 2, pp. 299-316.

Soto-Andrade, J. (2006). Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques, *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, vol. 11, pp. 123-147.

Soto-Andrade, J. (2007). "La cognición hecha cuerpo florece en metáforas…", en A. Ibañez y D. Cosmelli (eds.), *Nuevos enfoques de la cognición. Redescubriendo la dinámica de la acción, la intención y la intersubjetividad*, Santiago de Chile, Universidad Diego Portales, pp. 71-90.

INTRODUCCIÓN DE LA DIVISIÓN EN LIBROS DE TEXTO CHILENOS

Carmen Gloria Aguayo-Arriagada[1], Juan Luis Piñeiro[1], Pablo Flores Martínez[2]
CONICYT[1], Universidad de Granada[2]

Resumen: Este trabajo describe cómo se introduce la división en los libros de texto chilenos. Para esto, se revisan los lineamientos curriculares, y luego se analizan libros de texto, indagando en la estructura conceptual (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013) que ponen de manifiesto sobre este concepto. Esto permitirá obtener una idea general de cómo se introduce la división, con el objeto de mostrar a los docentes aspectos didácticos de este proceso presente en los libros de texto.

Educación básica, división, currículo, libro de texto, estructura conceptual

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la división presenta un grado de dificultad que ha sido motivo de diferentes investigaciones, desde su introducción hasta llegar a la enseñanza del algoritmo (Castro, 2008). En este trabajo nos centraremos en la división de números naturales, pues coincide con su punto de partida y por tanto, donde se introduce su concepto.

Los textos escolares son una de las aristas que permiten de abordar la dificultad en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la división. Estos recursos implementan los currículos entregando contenidos seleccionados y estructurados (Rico, 1990). Por lo tanto, lo primero es tener claridad de los planteamientos que establece el currículo, y segundo comprender cómo se presenta el contenido en los libros de texto. Para la revisión del currículo utilizaremos el análisis previamente realizado en Aguayo-Arriagada, Piñeiro y Flores (en prensa), dónde utilizamos como criterios aspectos generales del área, lineamientos del contenido y objetivos, estableciendo que los fines de la asignatura, dan cuenta de la existencia de una postura que enfatiza el desarrollo de competencias matemáticas, al sentido funcional que deben tener las matemáticas para la vida de los alumnos y la resolución de problemas como eje transversal. Para el análisis de los textos nos valemos del Análisis Didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013). En el desarrollo de este trabajo, nos centraremos en el análisis de contenido; enfatizando en sus tres organizadores: la estructura conceptual, sistemas de representación y la fenomenología.

ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES

El comparar libros de texto escolares se justifica por el gran protagonismo que tienen en su rol articulador en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Martínez Bonafé, 2008). En este trabajo utilizamos el análisis de contenido, definido por Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) como una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las matemáticas escolares. La estructura del análisis de contenido contempla tres organizadores del currículo: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología (Lupiáñez, 2013). Estos serán usados como elementos teóricos para hacer la revisión de los libros de textos.

Por tanto, el análisis de contenido nos permitirá identificar el enfoque dado por las editoriales al introducir la noción de división. Por otro lado, nos dará luces sobre algunos elementos que permitan establecer la coherencia de los lineamientos editoriales con el currículo.

Los libros que analizaremos son:

Texto 1: Editorial SM. Proyecto Savia. Matemáticas 3. Texto del estudiante. Unidad 4: Operaciones matemática. Lección 2: División.

Texto 2: Editorial Pearson. Matemática 3º básico. Texto del estudiante. Unidad 5: La división.

La elección de los textos corresponde a la disponibilidad y la utilización de ellos por el sistema público y subvencionado (texto 2) y por el sistema privado (texto 1).

Estructura conceptual

Lupiáñez (2013) plantea que la estructura conceptual de un tema matemático determina la variedad de significados y su relación con los diferentes contenidos. Los textos estructuran las lecciones de manera similar. Respecto a esto, podemos destacar que:

Ambos textos comienzan presentando la división como una división partitiva, es decir, se tiene un total de objetos y se reparten según una cantidad de grupos conocidos.

El texto 2 presenta explícitamente el significado de la división como resta repetida, mostrando y hacienda hincapié en el proceso de ir restando una misma cantidad a un total de objetos. En cambio, el texto 1 plantea el reparto por medida, explicando que esta forma permite conocer la cantidad de grupos en los que se divide el total de elementos. Al analizar esta situación nos damos cuenta que finalmente, el significado es el mismo y lo que difiere es que en un caso se utiliza la resta y en el otro no.

En ambos textos se presenta el significado de los elementos de la división pero solo en el texto 2 se dan sus respectivos nombres, dejando de lado el resto.

Se observan actividades sobre la relación de la división con la multiplicación en ambos textos, sin embargo el texto 2 lo realiza de manera más extensa.

Sistemas de representación

Los sistemas de representación son las diferentes formas de representar el contenido, su significado y sus relaciones con otros conceptos y procedimientos (Lupiáñez, 2013). La importancia de emplear los diferentes sistemas de representación está avalada por el aporte que da a la comprensión de conceptos y procedimientos (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). En el análisis realizado a los libros de texto, aparecen cuatro tipos: gráfica, concreta, simbólica y verbal.

Al realizar la comparación sobre los sistemas de representación que aparecen en los textos, encontramos que ambos utilizan la totalidad de los sistemas de representación antes señalados. En el caso del texto 1, solo difiere la ausencia de la verbal. Sin embargo, es importante destacar los siguientes aspectos:

Ambos textos dan mayor énfasis a las representaciones gráficas. Sin embargo, consideramos que el texto 1 promueve en mayor medida este tipo de representación, ya que facilita el diagrama gráfico que los estudiantes deben utilizar.

Llama la atención que los dos textos dan como opcional el sistema de representación concreto. Difiriendo con las recomendaciones metodológicas de comenzar por este tipo de modelo (Flores, Castro-Rodríguez y Fernández-Plaza, 2015). En el caso del texto 1 plantea que pueden utilizar la caja Mackinder, pero al darle la representación gráfica de esta, no se hace necesario la manipulación de material. En cambio, en el texto 2 desde un primer momento presenta la opción que se puede utilizar material concreto o gráfico.

Fenomenología

Dentro del análisis de contenido, la fenomenología cumple la función de establecer los contextos, situaciones y problemas que dan sentido a un contenido matemático (Lupiáñez, 2013). Para la división, estas situaciones reciben el nombre de problemas de estructura multiplicativa. Y según el significado de su contextualización se han identificado tres grandes clases: proporcionalidad simple o isomorfismo de medidas, producto cartesiano y comparación multiplicativa (Flores, Castro-Rodríguez y Fernández-Plaza, 2015).

Además del análisis del tipo de problemas que presentan los textos escolares, utilizamos la categorización de dificultad y orden de su enseñanza de Flores, Castro-Rodríguez y Fernández-Plaza (2015). En ella se determinan el tipo y subtipo de problema, y el orden según su grado de dificultad.

Al hacer la revisión de ambos libros de texto, lo primero que se observa es el gran número de problemas que se presentan. Esto se correspondería con el enfoque del currículo que tienen a esta noción como habilidad transversal. Luego nos enfocamos en determinar el tipo de problema y si se cumplía el orden secuencial en cuanto a su dificultad, evidenciándose que:

En los dos textos se comienza con problemas del subtipo incógnita en tasa (división partitiva), para luego seguir con problemas del subtipo incógnita en medida de la primera magnitud (división cuotitiva). La diferencia se encuentra que el texto 2, cuando trabaja la relación entre la división y multiplicación incluye varios del subtipo incógnita en medida de la segunda magnitud (multiplicación), situación que no se presenta en el texto 1.

En cuanto al orden de dificultad para la enseñanza, no es posible de observar pues todos los problemas trabajados en los textos corresponden al primer orden.

Es importante destacar que una diferencia significativa entre ambos textos es el trabajo con la creación de problemas por parte del alumno, situación que se presenta solo en el texto 2.

CONCLUSIONES

Luego de la revisión de los elementos curriculares y del análisis de los libros de texto, nos planteamos las siguientes conclusiones:

Ambos libros de texto introducen la división utilizando el mismo significado, coincidiendo en el contenido y secuenciación.

El uso de los sistemas de representación es uno de los aspectos que más llama la atención. Existe un mayor énfasis en las representaciones gráficas, dejando la decisión del uso de material concreto a los profesores.

Los problemas que se plantean en ambos textos son similares en su nivel de dificultad y en su clasificación. Es importante destacar es el esfuerzo por contextualizarlos y acercarlos a los intereses de los estudiantes.

Se observan puntos de correspondencia en los contenidos que se plantean para introducir el concepto de división y el énfasis de la resolución de problemas contextualizados.

Existen aspectos incongruentes con el currículo. Primero los documentos curriculares plantean la necesidad de introducir conceptos utilizando material concreto y luego transitar a la representación gráfica, situación que no se refleja en los libros de texto. Así mismo, el currículo enfatiza en el desarrollo de estrategias de calculo mental como un eje transversal, lo cual tampoco se aprecia en los textos.

Finalmente es importante señalar que la realización de este tipo de trabajo posibilita el debate crítico entre los responsables de llevar a las aulas las directrices curriculares. Es deseable tener una visión crítica sobre libros de textos escolares y usarlos como un recurso de aprendizaje, no depositando en ellos las decisiones pedagógicas. Por tanto, promovemos que los maestros sean los encargados de tomar las decisiones sobre sus planificaciones.

Referencias

Aguayo-Arriagada, C. G., Piñeiro, J. L. y Flores, P. (en prensa). La introducción a la división en educación primaria. Un análisis comparativo. En *Actas del XVI Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, ni más ni menos.* Jérez: SAEM THALES.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: SEIEM.

Charles, R. I., Caldwell, J. H., Cavanagh, M., Chancellor, D., Copley, J. V., Crown, W. D., Fennell, F., Ramírez, A. B., Sammons, K. B., Schielack, J. F., Tate, W. y Van de Walle, J. A. (2014). *Matemática 3º Educación Básica. Texto del estudiante*. Chile: Pearson Educación.

Cortés, C., Pinto, E., Piñeiro, J. L. y Rodríguez, R. (2016). *Matemática 3. Proyecto Savia*. Chile: SM.

Flores, P., Castro-Rodríguez, E. y Fernández-Plaza, J. A. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 205-229). Madrid: Pirámide.

Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico: La planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 81-102). Granada: Comares.

Martínez Bonafé, J. (2008). Los libros de texto como práctica discursiva. *Revista de la Asociación de Sociología de la Educación (RASE)*, 1(1), 62-73.

Ministerio de Educación. (2012). *Matemática. Educación básica. Bases curriculares*. Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: una perspectiva cultural. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 17-62). Sevilla: Alfar.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 21 - 40). Madrid: Pirámide.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, (58), 7-23.

ESTRUCTURAS MENTALES PARA UN ESQUEMA DE LA IMPLICACIÓN COMO ENTENDIMIENTO COMÚN

Isabel García-Martínez[1], Marcela Parraguez[2]
Universidad Católica del Norte[1], Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[2]

Resumen: Como han reportado diversos autores, la implicación es un tópico que presenta dificultades en la comprensión por parte de los estudiantes. En este reporte se determinan componentes para un esquema (en el sentido de la teoría APOE) de la implicación como entendimiento común. Este último es uno de los cuatro tipos de sentencias condicionales considerados por Durand-Guerrier (2003). Como resultado, se destaca la importancia de que los estudiantes realicen actividades que incluyan frases contingentes, donde se considere como posibilidad "no se puede decir", para poder interiorizar acciones en procesos, en la implicación como entendimiento común.

Teoría APOE, esquema, implicación, entendimiento común

ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Varios autores (Alvarado y González, 2009, 2013; Durand-Guerrier, 2003; Epp, 2003; Reid, 1992) han reportado que los estudiantes universitarios presentan dificultades con la comprensión de la implicación.

En García-Martínez y Parraguez (2015), se muestran dificultades de estudiantes universitarios cuando se enfrentan a actividades relacionadas con la implicación. Una de las preguntas que respondieron en la entrevista semiestructurada fue: "*Decida si la siguiente proposición es verdadera o falsa: Si hoy es viernes, entonces mañana es domingo*". En donde se evidencia que uno de los estudiantes entrevistados confunde el entendimiento común de la implicación (no considera el antecedente falso) con el uso en matemática (Figura 1).

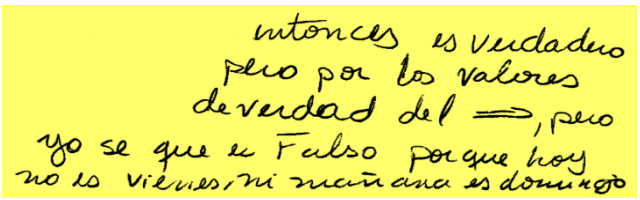


Figura 1: Respuesta dada por un estudiante universitario (García-Martínez y Parraguez, 2015).

Por otro lado, Durand-Guerrier (2003) en su artículo sobre *¿qué noción de implicación es la correcta?*, sostiene que las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la implicación, están relacionadas con la complejidad de esta noción debido a sus diferentes aspectos. En dicho artículo la autora considera los cuatro tipos de sentencias condicionales dados por Quine (1950).

El entendimiento común (donde, en general, el antecedente falso no se considera).

El conectivo proposicional (definido mediante la tabla de verdad).

El condicional lógicamente válido (reglas de inferencia).

El condicional generalizado (implicación con cuantificador universal).

En este reporte, se presenta un análisis del primero de estos cuatro tipos de sentencias, con base en una teoría de la Didáctica de la Matemática –teoría APOE–, de corte cognitivo, que permite explicar cómo se construye el conocimiento inserto en el entendimiento común de la implicación.

Teoría APOE

Esta teoría está basada en la construcción del conocimiento dada por Piaget (Arnon et al., 2014). A través de ella se explica el aprendizaje de conceptos matemáticos mediante las estructuras mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas, que dan origen a su nombre. Un esquema es una estructura coherente de acciones, procesos y objetos relacionados con un concepto matemático determinado. Los mecanismos mentales permiten pasar de un estado de construcción de un concepto matemático a otro, entre ellos se destacan: interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación.

El objetivo general de investigación fue describir elementos para un esquema de la implicación como entendimiento común.

Diseño metodológico

Esta investigación está situada en el paradigma interpretativo, en el cual se ha considerado la metodología estudio de casos (Stake, 2010), para indagar en profundidad una realidad específica de cómo los estudiantes conciben la implicación como entendimiento común. El único caso de estudio está constituido por cinco estudiantes de pedagogía en matemáticas de una universidad chilena, a los cuales se les aplicó un cuestionario con dos actividades (Tabla 1).

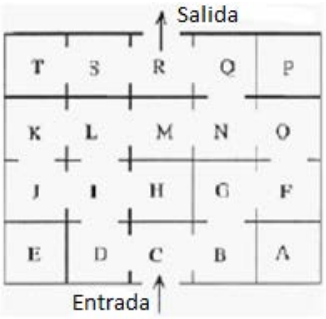
Números primos	Laberinto
Determine el universo más grande dentro de los números enteros desde 1 hasta 20, para el cual la siguiente implicación es verdadera: "si n es un número par, entonces $n+1$ es un número primo".	Una persona llamada X logró pasar a través del siguiente laberinto (desde *Entada* hasta *Salida*) sin utilizar la misma puerta (abertura) dos veces.  Se pueden formular frases pertinentes a la situación. Para algunas de estas frases, podemos determinar un valor de verdad (VERDADERO o FALSO); para otras, no tenemos suficiente información para decidir si son verdaderas o no (en ese caso, responda NO SE PUEDE DECIR). De esta forma, analice cada una de las siguientes seis frases (justificando sus respuestas): 1- X cruzó P; 2- X cruzó N; 3- X cruzó M; 4- Si X cruzó O, entonces X cruzó F; 5- Si X cruzó K, entonces X cruzó L; 6- Si X cruzó L, entonces X cruzó K.

Tabla 1: Actividades del cuestionario. (Durand-Guerrier, 2003, pp. 6-8).

Estructuras mentales para un esquema de la implicación como entendimiento común

Los resultados de la medición, muestran elementos que permiten consolidar un esquema de la implicación como entendimiento común. Específicamente, en las respuestas de los estudiantes se pueden reconocer diferentes elementos, que permiten interpretarlos desde las estructuras mentales de la teoría APOE, como se muestra a continuación.

Estado de construcción acción de la implicación como entendimiento común

Temporalidad. Evidenciada cuando el antecedente sucede antes del consecuente (Figura 2).

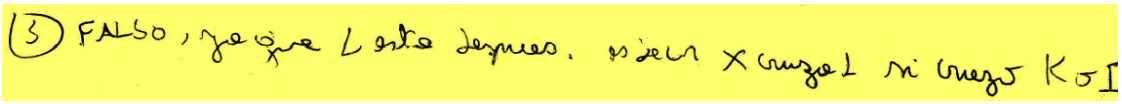


Figura 2: Respuesta de E3 a la pregunta del laberinto.

Antecedente siempre verdadero. Considera solamente el caso en el cual el antecedente es verdadero (Figura 3).

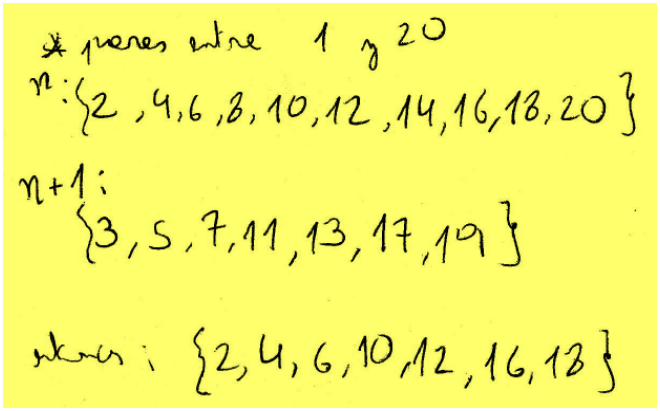


Figura 3: Respuesta de E3 a la pregunta de los números primos.

Frase cuantificada. Evidenciada al considerar la frase cuantificada (Figura 4).

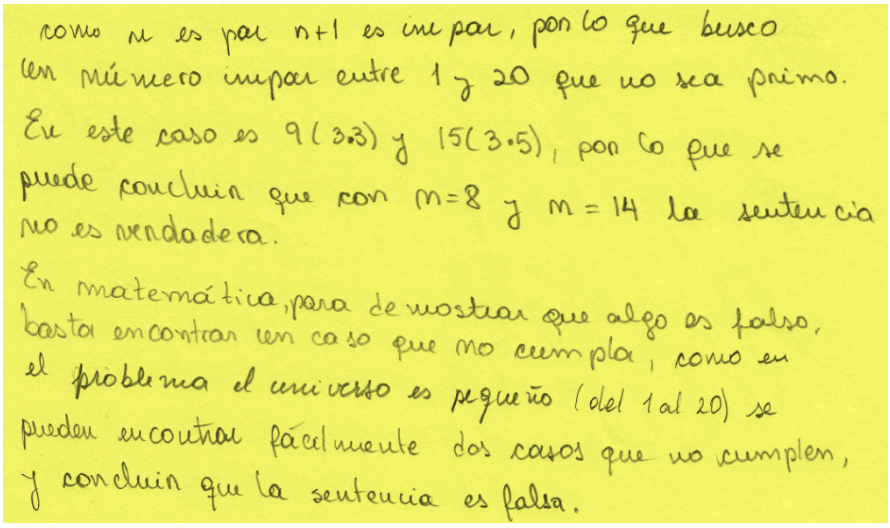


Figura 4: Respuesta de E2 a la pregunta de los números primos.

Además se evidenció que 3 de los 5 estudiantes no consideran que el antecedente de una implicación pueda ser falso, en el problema de los números primos; sin embargo cuando se

les otorga la posibilidad de respuesta “no se puede decir”, responden correctamente la pregunta.

COMENTARIOS FINALES

El estudiante podrá mostrar una construcción proceso de la implicación como entendimiento común, cuando al enfrentar una actividad constituida por frases contingentes, interpretadas éstas desde la teoría como acciones; las interioriza a través de la búsqueda de conjuntos específicos para los cuales la proposición abierta sea verdadera y otros para los cuales sea falsa.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto FONDECYT Nº 1140801. Una de las autoras es Beneficiaria Beca Postgrado PUCV 2016. Las autoras manifiestan sus agradecimientos por la buena disposición de todos los participantes en la investigación.

Referencias

Alvarado, A. y González, M. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias, 28* (1), 73-84.

Alvarado, A. y González, M. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16* (1), 37-63.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in mathematics, 53* (1), 5-34.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly 110*, 886-899.

García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2015). Validación de una descomposición genética del concepto de inducción matemática. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (eds.). *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX* (pp. 277-283). Villarrica: SOCHIEM.

Quine, W.V.O. (1950), *Methods of Logic*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Reid, D. (1992). *Mathematical induction. An epistemological study with consequences for teaching.* (Thesis for the degree of Master of Teaching Mathematics). Montreal: Concordia University.

Stake, R. (2010). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

LA RECTA NUMÉRICA EN LOS LIBROS DE TEXTO MINISTERIALES 2016

Daniela González, Joelys Piñero
Corporación Tecnológica de Chile

Resumen: La presente investigación se enmarca en el análisis de los libros de textos entregados por el (MINEDUC) durante el año 2016, se observará en ellos la presencia y uso de la recta numérica desde primero año básico a cuarto año medio en las unidades didácticas de números. Se ha utilizado como referencia la investigación de Bruno y Cabrera (2006) donde han establecido tres categorías para el uso de la recta numérica, en cuanto a los aspectos numéricos, tipo de representación y estructura de los problemas, categorías que se utilizarán en este estudio. Se analizará la presencia de la recta numérica en cuanto a conjunto numérico y a las categorías de Bruno y Cabrera (2006), con el fin de determinar si esta representación se mantiene con el transcurso de los niveles educativos o existe alguna pérdida de este uso en algún nivel.

Recta numérica, libros de textos, conjunto numérico, representaciones, nivel educativo

En la práctica docente existen diversos usos al texto escolar que entrega el (MINEDUC), como una herramienta metodológica, de aprendizaje e interacción con los educandos.

El profesor puede dar diversos usos al Texto Escolar, aplicando variadas metodologías de aprendizaje e interacción educativa con sus alumnos. El Ministerio llama por su parte a utilizarlo para planificar y preparar clases, que sea una herramienta activa en el aula, es aquí donde nace esta investigación, frente a este llamado a la utilización de los libros de textos nos preguntamos como docentes en ejercicio: Existe una consecución en la utilización de la recta numérica en todos los niveles educativos o más aún se utiliza la recta numérica como representación de cada conjunto numérico.

La recta numérica es una representación fundamental en la enseñanza de los números (Bruno y Cabrera 2006), herramienta que permite comprensión de las operaciones fundamentales, implica intercambio entre dos registros de representación geométrico y algebraico, es posible de utilizar en todos los conjuntos numéricos.

Para analizar la presencia de la recta numérica en los textos entregados por el (MINEDUC) en 2016, utilizaremos la misma metodología que Bruno y Cabrera (2006), esta refiere a:

1. Estudiar en qué sistemas numéricos (N, Z, Q y R) y con qué frecuencia se utiliza la recta numérica.
2. Analizar para qué aspectos numéricos y con qué continuidad se emplea la recta: concepto, operaciones u orden.
3. Estudiar las representaciones de las rectas horizontales o verticales.

De las observaciones y análisis se ha detectado que la recta numérica se presenta a comienzos de primero básico como cinta numerada, objeto protomatemático que prepara el camino para la abstracción de la recta numérica, no es hasta cuarto básico que comienza a utilizarse este concepto.

A continuación, se muestra una tabla que resume la información obtenida:

Nivel/Conjunto	**N**	**Z**	**Q**	**R**	**IR**
1º Básico	8	No aplica	No aplica	No aplica	No aplica
2º Básico	11	No aplica	No aplica	No aplica	No aplica
3º Básico	4	0	0	No aplica	No aplica
4º Básico	3	1	5	No aplica	No aplica
5º Básico	2	0	7	No aplica	No aplica
6º Básico	0	0	2	No aplica	No aplica
7º Básico	0	8	4	No aplica	No aplica
8º Básico	0	6	3	No aplica	No aplica
1º Medio	0	0	0	0	2
2º Medio	0	0	0	0	3
3º Medio	0	0	0	0	0
4º Medio	0	0	0	1	0
Total	28	15	21	1	5

Tabla 1: Número de veces que aparece la recta numérica por nivel y conjunto numérico.

Se observa en la tabla anterior que el conjunto numérico donde más se utiliza la recta numérica es en el conjunto de los números naturales, por otra parte, este uso disminuye considerablemente en el conjunto de los números enteros, y aumenta cuando se introduce el conjunto de los números racionales.

Por otra parte, a través del análisis de los textos se puede observar que es hasta sexto básico que el niño conoce la palabra conjunto numérico, aun cuando ya ha estado aprendiendo sobre cantidades negativas, fracciones y decimales.

A continuación, se muestra una tabla con el uso detallado por operación y nivel de la recta numérica donde se puede visualizar la cantidad de apariciones por contenido en los textos de primero básico a sexto:

Operación/Nivel	Adición	Sustracción	Multiplicación	División	Orden
1º Básico	3	2	NA	NA	3
2º Básico	7	2	0	0	2
3º Básico	1	0	0	0	3
4º Básico	1	0	0	0	8
5º Básico	1	0	0	0	7
6º Básico	0	0	0	0	2
7º Básico	1	3	4	0	4
8º Básico	1	1	1	1	5
1º Medio	0	0	0	0	2
2º Medio	0	0	0	0	3
3º Medio	0	0	0	0	0
4º Medio	0	0	0	0	1
Total	15	8	5	1	40

Tabla 2: Número de veces que se utiliza la recta numérica por nivel en operaciones básicas y orden.

Es interesante acotar, que es el docente quien debe explicar en el tercero básico el cambio de términos de cinta numerada a recta numérica, pues no aparece la aclaratoria en el texto lo que pudiese causar confusión en el estudiante, además se observa como la recta numérica en algún momento se utiliza para la adición, pero no para la sustracción y mucho menos para la multiplicación y división. Este uso es poco frecuente y aparece de manera discontinua en los textos lo que pudiese también causar vacíos cognitivos y confusiones en los estudiantes.

Se observa también que la recta numérica es utilizada mayormente para ordenar cantidades y que la operación donde más aparece es en la adición. En los dos primeros textos de básica se utiliza para la sustracción, pero luego se pierde dicho uso, reapareciendo en los últimos dos niveles de enseñanza básica. Es interesante destacar que esta recta no se utiliza en ningún momento para la multiplicación o división ya que utilizan “arreglos rectangulares”, aparece únicamente en séptimo y octavo, estando la división solo en este último nivel. Lo que muestra una disparidad entre el uso de la recta numérica en todos los niveles y una no prosecución en la enseñanza de las operaciones básicas.

Otro de los puntos a considerar en la investigación, es la forma de representación en la que aparece la recta numérica en los textos ministeriales, al respecto se observó:

Orientación/Nivel	Horizontal	Vertical
1º Básico	8	0
2º Básico	11	0
3º Básico	4	0

4º Básico	9	1
5º Básico	8	6
6º Básico	2	5
7º Básico	11	1
8º Básico	9	0
1º Medio	2	0
2º Medio	3	0
3º Medio	0	0
4º Medio	1	0
Total	68	13

Tabla 3: Orientación de la recta en los textos ministeriales.

Se observa en la tabla anterior que, en los textos ministeriales, la recta numérica aparece por preponderancia de forma horizontal. En primero básico cuando se llega a la unidad de tablas y gráficos se presentan las barras como una construcción con bloques; luego, en cuarto básico presentan el plano cartesiano como dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical para ubicar puntos en el mismo, así como también en el quinto y sexto básico se utiliza con el mismo fin, en séptimo básico tiene una presentación sólo como orden en un termómetro. En el resto de los niveles se continúa utilizando la recta numérica de forma horizontal.

El conjunto numérico en el que más se utiliza la recta numérica es N, Q y Z. Se logra indagar que no hay secuencia en el uso de la recta numérica, al no tener un uso constante en cada nivel educativo lo que puede generar discontinuidad del sentido del objeto recta numérica por parte de los estudiantes, además se aplica mayormente para ordenar, ubicar, identificar y comparar, acotando su uso.

En cuanto a las operaciones básicas se ocupa para la adición, en menor medida sustracción y casi nula la presencia de la recta numérica en la división; y solo en séptimo y octavo en multiplicación. En cuanto a las representaciones, se observa que se utiliza mayormente la representación horizontal y prácticamente no se usa la representación vertical salvo para medir temperaturas o distancias, esto puede indicar, primero, que el estudiante sólo puede conocer la recta numérica como una línea horizontal, más no vertical, lo que puede causar confusiones al momento que se le presenta el plano cartesiano, pues no han trabajo con rectas numéricas verticales, esto es un desfase en la secuencia de aprendizajes.

Es así como se ha observado que los textos no presentan un trabajo continuo entre básica y media, ya que no tiene permanencia la utilización de la recta numérica a lo largo de la escolaridad, queda a criterio de los autores de los textos la importancia que le darán a este objeto, y en el aula corresponderá al docente planificar la inclusión y ampliación de los usos de la recta numérica, para que no solo quede como un objeto de representación y sea un

modelo para las operaciones en distintos conjuntos numéricos a lo largo de la enseñanza escolar.

Referencias

Castañeda, A. B., & Cabrera, N. (2006). La recta numérica en los libros de texto en España. *Educación matemática*, *18*(3), 125-149.

Ministerio de educación de chile (2016). *Texto del estudiante Matemática" 1 Básico*. Chile

Ministerio de educación de chile (2016). *Texto del estudiante Matemática" 2 Básico*. Chile

Ministerio de educación de chile (2016). *Texto del estudiante Matemática" 3 Básico*. Chile

Ministerio de educación de chile (2016). *Texto del estudiante Matemática" 4 Básico*. Chile

Ministerio de educación de chile (2016). *Texto del estudiante Matemática" 5 Básico*. Chile

Ministerio de educación de chile (2016). *Texto del estudiante Matemática" 6 Básico*. Chile

Ministerio de educación de chile (2016). *Texto del estudiante Matemática" 7 Básico*. Chile

Ministerio de educación de chile (2016). *Texto del estudiante Matemática"8 Básico*. Chile

Ministerio de educación de chile (2016). *Texto del estudiante Matemática" 1 Medio*. Chile

Ministerio de educación de chile (2016). *Texto del estudiante Matemática" 2 Medio*. Chile

Ministerio de educación de chile (2016). *Texto del estudiante Matemática" 3 Medio*. Chile

Ministerio de educación de chile (2016). *Texto del estudiante Matemática" 4 Medio*. Chile

Robayna, M. M. S. (2002). La organización de los sistemas numéricos desde su estructura decimal: Algunas expresiones ambiguas. *Números*, (50), 19-34

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN APLICANDO VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS, UNA ACTIVIDAD PARA CUARTO MEDIO

Marcelo Ozimica Pérez
Liceo Mauricio Hochschild del CEAT

Resumen: La manera tradicional para enseñar matemática ha provocado que se tenga una visión parcializada de esta disciplina. Las nuevas demandas del sistema social han desencadenado en nuevas formas de ver e interpretar la realidad. Por este motivo es necesario modificar prácticas de enseñanza más acordes a los nuevos requerimientos sociales. Por medio de reflexiones desde su propia práctica, el docente a cargo del diseño considera modelos didácticos de enseñanza sumado al conocimiento de la teoría de situaciones didácticas, y genera una actividad introductoria al uso de cálculos de volúmenes de cuerpos geométricos para dar respuesta a un problema de optimización devenido de los sistemas de riego. Mediante la elaboración de informes los estudiantes dan cuenta de su trabajo en donde también se considera su opinión acerca de la actividad propuesta obteniendo una crítica positiva con respecto a la actividad.

Problemas de optimización, volúmenes de cuerpos geométricos, reflexión didáctica, didáctica de la geometría

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática, de manera tradicional, es reconocida como procedimental y simbólica, puesto que para un estudiante saber matemática está determinado por el conocimiento de un número suficiente de procedimientos y algoritmos que permitan representar una expresión simbólica en otra (Gómez, 1996). Esta situación provoca en la enseñanza de la matemática una isla en términos del conocimiento, ya que no se articulan procesos y conceptos matemáticos con otras áreas del saber, esto finalmente tiene como consecuencia que el estudiante no conciba la utilidad que tiene la matemática en su formación (Aravena y Caamaño, 2007).

Lo anterior no dista del contexto en el que se desarrolla esta intervención, en donde el estudiante considera que aprender matemática es repetir algoritmos y procesos que previamente fueron explicados por el docente. La secuencia de enseñanza se cierra con la evaluación tradicional consistente principalmente en calificar numéricamente el uso de técnicas y cálculos desarrollados por el estudiante.

Uno de los principales problemas en el aprendizaje de este tipo, es que hay poca retención y transferencia, es decir, que el estudiante olvida lo que aprendió dos o tres días después de haber realizado la evaluación, y no es capaz de transferir el conocimiento matemático a entornos y situaciones diferentes de aquellos en los que aprendió (Resnick, Ford y Pareja, 1990).

Por otra parte, esta visión de contenidos como una secuencia de partes, y el consiguiente aprendizaje secuencial de conceptos, símbolos y procedimientos, genera en el estudiante una

visión por compartimentos de un conocimiento matemático que no tiene estas características (Gómez, 1996).

Sin embargo, el Ministerio de Educación mediante el programa de estudio de matemática para cuarto año medio señala que los aprendizajes deben ser entendidos como una integración de conocimientos, habilidades y actitudes que deben ser puestos en juego por parte de los estudiantes para enfrentar diversos desafíos de su entorno. Lo anterior supone una orientación por parte del docente hacia el logro de estas competencias para desarrollar de manera efectiva una acción determinada, lo que no ocurre en el contexto intervenido.

Así es que se decidió adaptar la unidad de Cuerpos Geométricos específicamente en lo relacionado con el cálculo de volúmenes presente en el programa de estudio de matemática de cuarto año medio, de forma que al ser aplicada en un curso del mismo nivel se sintonice con la visión declarada en el currículum nacional con una estrategia de enseñanza adecuada al estándar propuesto.

DESARROLLO

Basado en el programa de estudio de cuarto año medio en la asignatura de matemática se observa una especificación separada de dos aprendizajes esperados relativos al cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos, diferenciándolos por la forma en cómo estos se generan orientados a trasladar y rotar figuras planas. Por su parte, el texto del estudiante de esta asignatura hace una separación aún más específica, en la cual se desarrolla un tratamiento separado de cálculos de volúmenes de prismas, cilindros, pirámides rectas y oblicuas, conos, conos truncados; usando en todos los casos anteriores el principio de Cavallieri.

Tanto en el programa de estudio como el texto del estudiante al mostrar la manera de cómo se obtienen las fórmulas para calcular el volumen de las variadas figuras se procede a aplicar dichas fórmulas en ejercicios rutinarios o contextualizados. Este proceso no promueve lo planteado por el mismo programa de estudio al declarar que los aprendizajes deben ser una integración de conocimientos, habilidades y aptitudes para la comprensión de su entorno.

En este sentido el dominio que estudia el proyecto PISA se conoce como competencia matemática, y está referido a las capacidades que tiene el estudiante para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven un problema en una variedad de situaciones (Rico, 2009).

La importancia que se le dan a la resolución de problemas en las pruebas estandarizadas internacionales, tiene su principal fundamento no en cómo se comportan las actuales sociedades, sino más bien en cómo se ha ido generando el conocimiento matemático a través de la historia. Charnay (1994) afirma que el conocimiento matemático se ha ido forjando como respuesta a preguntas de una cierta gama de problemáticas que van desde el orden doméstico (división de tierras, cálculos de créditos,…), o problemas que tienen estrecha vinculación con otras ciencias (astronomía, física,…), y finalmente concluye que hacer matemática es resolver problemas.

Para llevar a cabo el aprendizaje basado en la resolución de problemas se deben considerar los modelos de referencia, en donde Charnay (1994), hace una descripción de ellos y que

fueron considerados desde las variadas investigaciones llevadas a cabo por Brousseau (1983), de las cuales se establecen tres tipos:

El modelo normativo, centrado principalmente en el contenido.

El modelo iniciativo, centrado en el estudiante, en donde el profesor escucha los intereses de sus educandos para dar respuesta a sus demandas.

El modelo aproximativo, centrado en la construcción del saber por el alumno.

Para efectos de esta intervención se ha seleccionado el modelo aproximativo, puesto que de acuerdo a Shoenfeld, (como se citó en Santos Trigo, 1996), establece que para las enseñanzas de las matemáticas, el estudiante debe reconocer que:

Encontrar la solución a un problema no es al final del proceso de enseñanza y aprendizaje, sino que debe ser el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones del problema. Además, en el desarrollo de las matemáticas el proceso de formular o rediseñar el problema se identifica con un componente esencial en el quehacer matemático.

Una de las maneras de llevar a cabo este tipo de procesos consiste en comprender que el sujeto (estudiante) siempre está en constante relación con el medio, provocando procesos adaptativos del estudiante con lo que lo rodea, posibilitando su comprensión para su beneficio. Cuando esto ocurre se logra un aprendizaje adecuado (Brousseau, 2007).

La labor del docente en este sentido conlleva a modificar el medio en el cual el estudiante está inserto, por ende se deben diseñar actividades que permitan comprender de manera sistemática el medio, provocando situaciones de aprendizaje que son asimiladas por parte del alumno (Brousseau, 2007).

Luego de todo este análisis es que se decidió diseñar una actividad introductoria de aprendizaje en la que se intervienen todos los elementos antes descritos tratando de cumplir el aprendizaje esperado: Optimizar los sistemas de riego del liceo aplicando cálculos de cuerpos geométricos.

Otro aspecto considerado para el diseño fue el contexto del liceo, que presenta una gran cantidad de áreas verdes mantenidas de manera constante, y al consultar a la persona encargada del cuidado de los espacios exteriores sobre qué hacía para mantener en buen estado el césped, apareció el problema del riego que consiste en dejar un tiempo indeterminado el dispersor de agua en distintos puntos del patio.

Es así como surgió la necesidad de conocer cuánta agua necesita realmente un metro cuadrado de pasto para que esté regado de forma adecuada y cómo podríamos ayudar al jardinero a optimizar el recurso usado para el riego, puesto que al dejar los dispersores de agua un tiempo desconocido se podría estar usando más agua de la necesaria o bien podría estar sucediendo el caso contrario.

De esta manera los estudiantes debieron desarrollar un informe con ciertas especificaciones, entre ellas describir el cómo usar un cuerpo geométrico para recolectar la información relativa a cuánta agua entregaban los dispersores en un cierto intervalo de tiempo.

Finalmente, se les solicitó a los grupos de trabajo que al final de cada producto elaborado emitieran una opinión acerca de la actividad desarrollada, la cual le permitiera al docente verificar el interés de los estudiantes por este tipo de actividades.

CONCLUSIONES

Según las calificaciones, de un total de 20 estudiantes, el 50% del curso obtiene nota máxima (7,0), el 30% de los estudiantes tiene una calificación entre 4,0 y 5,0. El 20% tiene una calificación insuficiente. Esto indica un alto porcentaje de logro en el aprendizaje esperado propuesto, y se contrasta con resultados anteriores en grupos de curso de similares características en donde el porcentaje de aprobación alcanzaba al 40% versus el 80% ocurrido con este tipo de actividad.

Con respecto a las opiniones de la actividad por parte de los estudiantes se observa una variedad de percepciones como: la necesidad de determinar una utilidad práctica del conocimiento matemático; el gusto por este tipo de actividades, ya que se usan variados ambientes de aprendizaje; también se consideró interesante lo desarrollado, puesto que se tiene la posibilidad de conocer otros temas; se aprendía bajo un ambiente relajado; y que es una manera más interactiva de obtener conocimiento.

Pero no todas las opiniones fueron de carácter positiva, porque un grupo de trabajo consideró que el procedimiento para determinar el tiempo óptimo de regado no fue el adecuado debido a que se consideraba un pequeño espacio de riego, por lo que propusieron tomar mediciones en distintos puntos del alcance del aspersor, y mediante el promedio de los resultados obtenidos generar una conclusión más contundente con respecto al tiempo que debe ser expuesta la regadera para la mantención del césped.

De acuerdo a las opiniones vertidas por los estudiantes se observa una preferencia por este tipo de actividades, las cuales mantienen el interés y motivación por aprender matemática. Aunque la actividad no haya sido bien catalogada por una parte de estudiantes se da pie para mejorar el diseño de ésta considerando los análisis de los estudiantes lo que da paso a una mayor integración de contenidos entre la misma disciplina matemática.

Finalmente dejo los enlaces de algunos de los informes desarrollados por los estudiantes:

https://goo.gl/DdX6lc (Video)

https://goo.gl/Q3rS3l (Informes y presentaciones)

Referencias

Aravena, M., y Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca Chile. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, 33(2), 7-25.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de teorías de situaciones didácticas* . Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Charnay, R. (1994). Aprender por medio de resolución de problemas. En C. Parra, y I. Saiz, *Didáctica de matemáticas* (pp. 51-63). Buenos Aires: Paidos.

Gómez, P. (1996). Riesgos de la innovación curricular en matemáticas. *Ciencia y tecnología*, 13(4), 25-36.

Ministerio de Educación. (2009). *Matemática, Programa de Estudio cuarto año medio*. Santiago: Unidad de Curriculum y evaluación.

Muñoz, G., Gutierrez, V., y Muñoz, S. (2013). *Matemática IV Medio texto del estudiante*. Santiago: Santillana del Pacífico S.A.

Resnick, L., Ford, W., y Pareja, A. (1990). *La enseñanza de la matemáticas y su fundamento psicológico.* Barcelona: Ministerio de Educación y Ciencia.

Rico, L. (2009). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista Educación*, 275-294.

Trigo, S. (1997). *Principios y métodos en la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo editorial Iberoamericana.

EL USO DE GRÁFICAS EN LA COMUNIDAD DE FÍSICOS: EL CASO DE UN INVESTIGADOR EN CIENCIAS

Astrid Marlene Morales Soto, Alba Gabriela Lara Medina
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen: Presentamos un avance de una investigación en curso de un proyecto interno de la PUCV cuyo objetivo es colaborar con la formación de científicos desde el escenario de la enseñanza-aprendizaje de la matemática. Para ello, estudiamos a profesionales investigadores (científicos) de la disciplina de Física y Biología en su relación con los modelos y con la matemática. Estos investigadores conocen y manejan los modelos matemáticos propios de su disciplina, los cuales les permiten desarrollar su ciencia y a la vez brindar aquella "matemática" que necesita para enseñar su disciplina. Investigamos cómo es que usan la matemática, en su rol de profesores y en el de investigadores, de modo de determinar aquellos elementos comunes en las disciplinas en las cuales poner énfasis en los cursos iniciales de matemática de estas carreras. Hemos identificado a la gráfica como un elemento común e importante en ambas disciplinas. La investigación se desarrolla con un enfoque Socioepistemológico, y con una metodologia cualitativa. Se reporta el caso del científico de Física y el rol de la gráfica en esta disciplina.

Matemática escolar, modelos gráficos, gráficas, Socioepistemología

INTRODUCCIÓN

Los avances sostenidos y crecientes en la ciencia, la innovación y la tecnología impactan fuertemente en las economías de los países y presionan sobre la formación en Ciencias. Ahora bien, una determinada comunidad profesional o científica tienen sus propios modos de análisis y de discusión, maneras de trabajar y de comunicarse. Por ejemplo, un biólogo y un administrador de empresas no solo comunican de diferente manera sus disciplina, sino que además sus modos de pensar son también diferentes; la investigación muestra que esa manera incluye también el modo en que se piensa y se utiliza una disciplina que sea parte de su formación, como por ejemplo, la matemática.

La cuestión aquí es si acaso los cursos comunes de matemáticas, dictados para una pluralidad de disciplinas, podrían ser más sensibles a esa especificidad; ello no sólo por su rol de insturmento de cálculo en las difernetes disciplinas ni solo por la manera simbólica en que permite expresar y trabajar conocimineto. Aún más, la matemática podría ayudar a formar profesionales que podrían ponerse en sintonía con los requerimientos del uso en el desempeño profesional. Ello requiere de precisar cuál es la matemática que pone en juego esa disciplina, y qué rol juega en ella.

FUNDAMENTO TEÓRICO

Nuestra investigación adopta la perspectiva teórica de la Socioepistemología, que resulta particularmente apropiada para el estudio y las propuestas de enseñanza, dada la consonancia entre sus supuestos epistemológicos y los propósitos del proyecto en cuanto a fines del aprendizaje y la importancia social e individual que ello comporta. Esta perspectiva

que pone el acento en el trabajo diferente que hacen de la matemática las distintas comunidades –científicas, en este caso–.

La Socioepistemología contextualiza, sitúa el problema del saber, considera el papel que escenarios institucionales desempeñan en la actividad (Cantoral y Farfán 2006). Ella enfatiza una concepción de la matemática como un conocimiento con significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto mismo de la actividad que realiza el hombre (Cantoral 2013). Tiene una mirada crítica al discurso matemático escolar (dME), entendido como la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico acerca de lo que son la matemática y su enseñanza; y nos invita a realizar un *rediseño* del dME (Morales y Cordero 2014). Procura una matemática *funcional*, es decir, una que está incorporada orgánicamente al individuo, que sea un conocimiento que lo transforme y que transforme su realidad. Para ello se deben identificar los elementos que permitan desarrollar esa funcionalidad (Cordero 2006, 2014).

En lo que se refiere a las gráficas, hemos visto (Morales, Mena, Vera y Rivera 20102) que ellas toman un rol predictivo y que permiten generar argumentos que juegan un papel gravitante para lograr un modelo matemático. Asumimos como hipótesis que la argumentación gráfica genera conocimiento matemático, sabemos que la argumentación gráfica no se entiende como un concepto pero si como un saber matemático por lo que requiere de cierto estatus en el dME, que hoy no lo tiene tan presente. Creemos necesario estudiar con mayor profundidad el uso de las gráficas por parte de los científicos, en las disciplinas ya mencionadas, cuando enseñan y cuando comunican sus ideas a sus pares. Desde esta postura es que se pretende dar evidencia que la argumentación gráfica habita en diferentes comunidades de conocimiento a nivel funcional, en nuestro caso la de Físicos y Biólogos. Aspecto que nos ayuda a tener en cuenta para los cursos iniciales de matemática en las carreras de licenciaturas de estas disciplinas.

ANTECEDENTES: FÍSICA Y GRÁFICAS

Algunos artículos han evidenciado la importancia de las gráficas en la Física, declarando que, desde el punto de vista de esta disciplina, la gráfica cumple un papel fundamental y el que los estudiantes no comprendan su vinculación con los modelos físicos provoca dificultades (McDermott, Rosenquist, Van Zee, 1987; Hale, 2000; Laverty, Kortemeyer, 2012). En McDermott et al. (1987) se destaca la relevancia de las gráficas en el estudio de la física, señalando que es una de las habilidades más importantes a desarrollar. Estos autores además hacen un contraste respecto al uso de las gráficas durante la formación y en el trabajo académico futuro.

Lo anterior nos hace cuestionar respecto a por qué no son ampliamente utilizadas las gráficas en el ámbito escolar, ¿acaso se debe al discurso que el profesor mantiene durante sus clases?

Por su parte, Hale (2000) menciona que en las gráficas relacionadas con la cinemática, los estudiantes pueden comprender los conceptos pero no logran hacer conexiones entre los conceptos matemáticos con sus respectivas gráficas. Otro aspecto que esta autora destaca es el hecho de la relación entre el Cálculo Diferencial y la Física, en especial se refiere al

concepto tasa de cambio. El trabajo de Laverty y Kortmeyer (2012) hace referencia a que los estudiantes pueden ser muy eficientes al momento de trazar gráficas con funciones dadas o interpretar los valores de la misma, eso no significa que sean hábiles para construir gráficas e interactuar con ellas. Los autores también indican que la habilidad de trabajar con gráficas puede aprovecharse en el aula y más aún si además de interpretar se interactúa con ellas.

Los trabajos mencionados aún cuando se han realizado en lapsos de tiempo diferentes, dan evidencia que las gráficas han sido y siguen siendo importantes en el área de la Física, para entender fenómenos, modelos, etc. y que a pesar del paso del tiempo existen elementos que no se han logrado aprovechar en el aula, por ejemplo, conectar con mayor énfasis los conocimientos de cálculo a la física, promover la construcción de gráficas e interactuar con las mismas.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación tiene un enfoque cualitativo y el diseño de investigación escogido es el Estudio de Caso (Stake, 2007). Hemos focalizado la toma de información en cada científico en dos escenarios: a) en el ámbito de investigación: analizando artículos, material de difusión y entrevistas y b) en el ámbito de enseñanza: se ha revisado material de docencia como guías, pruebas y clases. En esta oportunidad reportamos una de las entrevistas realizadas a un doctor en Física de la PUCV, quien dicta clases a la carrera de licenciatura en Física de esta misma universidad. La elaboración de la entrevista fue llevada a cabo con el fin de situar al experto en los dos escenarios (a y b). La validación de la misma fue realizada por expertos en el área. Se adoptó el formato semi-estructurado para la entrevista, ya que nuestro interés fue el de explorar la postura del entrevistado. Las transcripciones de la entrevista recogen datos que nos permiten obtener información del rol de la gráfica asignado en la construcción del conocimiento científico relacionado a al física y de las experiencias personales del entrevistado en torno de este tema.

Respecto a la entrevista

Las preguntas del M_1 son enfocadas a la labor en el aula del académico físico (F) como profesor universitario. En este apartado se mostrará un pequeño extracto de algunas de las respuestas dadas al entrevistador (E) que evidencian el rol de las gráficas al momento de impartir clases.

> E: ¿Encuentra alguna dificultad en las variables?
>
> F: En qué es lo que tienen que graficar sí. Lo que pasa es que uno sabe lo que hay que graficar pero ellos no. Por ejemplo, la definición de pendiente, que es lo que les interesa a ustedes, pero aquí llegan con que, entonces toman una posición y la dividen por el tiempo y eso no es, y es difícil sacarles esto.

Nuestro entrevistado reconoce que existen dificultades relacionadas con las variables, es decir, coincide, con lo reportado por Hale (2000). Al preguntar cómo abordan dicha dificultad, menciona:

> F: Lo que hacemos es que hagan todo, que calculen de las dos maneras y que vean que es distinto […]. La idea es que ellos discutan […] el profesor entra en la discusión una vez que ellos hayan discutido […].

> F: Les hacemos construir gráficos cualitativos […] pedimos que construyan el gráfico posición vs. Tiempo, entonces aparentemente es difícil porque no es el típico gráfico de una parábola o línea recta. Les decimos ustedes ven el gráfico y grafican las variables, pero después tiene que afinar el ojo, tiene que hacer el gráfico pero ahora van viendo las pendientes. Entonces el mismo gráfico (posición vs tiempo) van viendo que pasa con las velocidades y eso es de un grado de abstracción un poquito más allá. Entonces una vez que llegan a entender el gráfico y además entender las pendientes que se comportan de tal manera realmente están aprendiendo a leer el gráfico y poder hacer el gráfico.

Llama la atención el hecho que mencione que las gráficas no son las típicas, y que para comprenderla se requiere reconocer otros elementos de la misma, como las pendientes. Ahora bien, del extracto anterior surgen las siguientes preguntas: ¿Qué entiende F por hacer (construir) una gráfica?, ¿A qué se debe que no existe una correcta interpretación de las variables en los estudiantes?, ¿Cómo el discurso matemático escolar afecta en ello?

A MANERA DE CONCLUSIÓN

El estudio realizado mostró que el uso de las gráficas son parte del escenario de enseñanza y de investigación en el caso reportado y que desempeñan un rol trascendente en el trabajo disciplinar. La información obtenida a través de la entrevista realizada al académico físico nos dan evidencia que existen dificultades en los estudiantes relacionadas con las variables al momento de graficar. Por otra parte los antecedentes mencionados concuerdan con lo descrito por el académico en el sentido que reconoce que los estudiantes pueden comprender ciertos conceptos y sin embargo no implica que puedan relacionarlos con las gráficas, aspecto que debe ser considerado al momento de enseñar. Las gráficas aportan a comprender fenómenos propios de la disciplina y dar sentido a distintos conceptos (matemáticos, físicos, entre otros). El estudio de este caso nos aporta elementos que evidencian la necesidad de un diálogo y el de resignificar conocimiento matemático. Las gráficas deben cambiar de estatus y deben ser atendidas con mayor profundidad en clase para poder adquirir un conocimiento funcional de ellas y poder llevarlos a la disciplina que desarrollen los futuros licenciados tanto de física como de otra disciplina.

Referencias

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(4), 83-102. Número Especial.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España. Editorial Gedisa.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matemática. *La Matemática e la sua Didattica*, 20(1), 59-79.

Cordero, F. (2016) Modelación, funcionalidad y multidisciplinareidad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.). Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa. Barcelona. España: Editorial Gedisa.

Morales, A., Mena, J., Vera, F., Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos fisicos. *Enseñanza de las Ciencias*. 30(3), 237-25.

Morales, A. y Cordero, F. (2014). La Graficación-Modelación y la Serie de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3), 319-354.

Hale, P. (2000). Kinematics and Graphs: Students' Difficulties and CBLs. Connecting Research to Teaching. 93(5), 414-418.

Laverty, J., Kortemeyer, G. (2012). Function plot response: A scalable system for teaching kinematics graphs. American Journal of Physics, *80*(8), 724-733.

McDermott, L. Rosenquits, M., Van Zee, E. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples for kinematic. American Journal of Physics, 55, 503-513.

Stake, R. (2007). The art of case study research. Thousand Oaks: Sage Publications.

UNA EXPERIENCIA DE AULA PARA LA ENSEÑANZA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Cristian Zamorano Sánchez, Max Muñoz Pichinao
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen: En el presente trabajo informamos sobre los resultados de una experiencia didáctica para la enseñanza de la distribución binomial, construida en el contexto metodológico del estudio de clase japonés. Dicha experiencia se aplicó a un grupo de 92 alumnos de tercero medio, distribuidos en dos colegios de las ciudades de Temuco y Santiago respectivamente. Los resultados muestran que los estudiantes construyen un proceso de cálculo y análisis probabilístico desde sus conocimientos previos, favoreciendo la significancia y la apropiación de los nuevos contenidos, y la motivación al trabajo de aula.

Distribución Binomial, Estudio de clase, Experiencia didáctica, Construcción de conocimiento, Motivación

SECUENCIA DIDÁCTICA

Sobre la problemática abordada

La incorporación del eje temático Datos y Azar a toda la matemática escolar ha puesto de manifiesto cierta problemática en cuanto al tratamiento, análisis, y resultados académicos relativos a los contenidos que establece el currículo. En particular, nuestro análisis observa el tratamiento del objeto matemático Distribución Binomial (DB), sobre el cual se ha evidenciado la siguiente problemática:

Desde el estudio del objeto matemático observamos que en Meyer (1970) se establece una definición de la DB idéntica a la propuesta por MINEDUC (2015) para sus textos escolares. Esta evidente falta de evolución en el tratamiento del contenido nos habla sobre una deuda en cuanto a la escolarización del conocimiento, sus metodologías asociadas y la transposición didáctica de la DB en la matemática escolar.

Con el objetivo de identificar los contenidos mínimos necesarios para comenzar el estudio de la DB, realizamos un análisis exploratorio basado en una encuesta en donde 4 profesores de matemática del colegio polivalente Santa María identificaron cuales era a su juicio estos contenidos mínimos necesarios. Las respuestas muestran dos enfoques distintos. Uno desde el cálculo de probabilidades, y otros con una visión funcional de la distribución. Esta diferencia en los puntos de partida expone una realidad de inconsistencia en la interpretación y aplicación del currículo por parte de los profesores que se traspasa también a los alumnos.

En respuesta a esta problemática, establecemos la necesidad de generar estrategias metodológicas que, como se enuncia en Batanero (2005), permitan a los alumnos construir los procesos de cálculo de probabilidades a partir de sus errores y esfuerzos, y que además, unifique los contenidos mínimos necesarios para la formalización del concepto.

Sobre la metodología

Podemos dividir la metodología utilizada en tres fases: análisis documental, análisis exploratorio, y diseño e implementación de la clase. Para el análisis documental se estudió el tratamiento metodológico y matemático que hace el texto de estudio propuesto por el Ministerio de Educación (2015), desde donde se establecen los límites curriculares que debe tener nuestra secuencia didáctica.

En cuanto al análisis exploratorio, seleccionamos a 4 profesores de matemática del Colegio Polivalente Santa María, de entre 33 y 42 años con un rango de 6 a 16 años de experiencia en docencia. Todos ellos con título de profesor de matemática; dos de ellos de la USACH, uno de la universidad Mayor y uno de la UMCE. El objetivo del análisis es identificar los contenidos mínimos necesarios para el tratamiento de la DB. Se evidenciaron dos focos: uno en el cálculo de probabilidades, y el otro en la función de probabilidades. En base a estas distintas perspectivas de entrada diseñamos la secuencia didáctica considerando que estos distintos enfoques suponen también una diferencia en cuanto a la enseñanza previa que tienen los alumnos de nuestro grupo de estudio.

Finalmente, el diseño de la clase se efectuó considerando las fases de alfabetización estadística propuesta por Araneda et al (2011) las que indican que en la resolución de un problema estadístico se deben plantear pregunta de interés, recopilar y analizar datos, e interpretar los resultados. así también el ambiente de aprendizaje para el razonamiento estadístico propuesto por Cobb & McClain (2004) y citado por Estrella S & Olfos, R (2013), que propone la existencia de seis elementos claves en el ambiente de aprendizaje de modo que se lleve a cabo un razonamiento estadístico en los estudiantes: Ideas estadísticas fundamentales, Datos reales y motivadores, Actividades de indagación, Herramientas tecnológicas, Discursos y argumentos estadísticos y Evaluación alternativa.

La secuencia didáctica se aplicó en el colegio Lasalle de Temuco. Colegio particular católico con un promedio de 20 alumnos por sala. Luego del primer análisis se modificó la planificación y se volvió a aplicar en el Colegio Polivalente Santa María. Colegio particular subvencionado de la comuna de Quilicura en Santiago, con un promedio de 38 alumnos por sala. Luego de esta segunda aplicación se volvió a modificar la planificación y se incorporaron cambios en la metodología de trabajo. En el presente trabajo se exponen los resultados de la tercera implementación en el colegio Polivalente Santa María.

Sobre la clase pública implementada

Objetivo: Construir un método de cálculo de probabilidades para eventos dicotómicos, utilizando el principio multiplicativo y el número combinatorio, en el contexto de juegos aleatorios.

Fase inicial: los alumnos observan un video con 3 peleas del juego Street Fighter, apostando a los resultados antes de ver las peleas. Luego de finalizar el profesor recoge los resultados de los alumnos. Los resultados se acumularan en uno o dos aciertos. De acá surge la primera actividad reflexiva: ¿Porque hay más alumnos que aciertan a tres resultados? ¿Porque parece más difícil acertar a cero o acertar a todas las peleas? Los estudiantes reflexionan y anotan sus conclusiones de manera individual. Se comentan algunas en plenario y se anotan en la pizarra aquellas que apunten a la probabilidad.

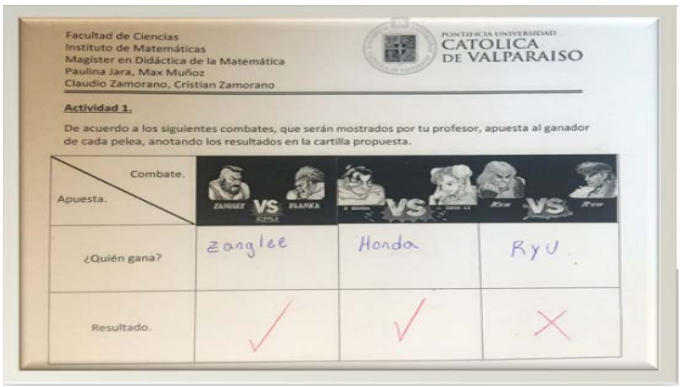
Fase de desarrollo: todo el trabajo de esta fase se lleva a cabo en equipos de 4 alumnos, utilizando una metodología que hemos llamado Grupos Cordiales (GC). La metodología trata de que cada grupo trabaje en el desafío durante 10 minutos. Luego, el profesor interrumpe el trabajo y solicita al un representante que proponga ideas sobre cómo están enfrentado el desafío. Lo que conseguimos al aplicar esta metodología es una reorientación de aquellos grupos que no están alcanzando la resolución de la situación, desde las ideas de sus pares, con lo que fortalecemos la construcción del conocimiento desde los estudiantes.

El primer desafío es buscar una explicación a la acumulación de frecuencia en los tres aciertos. Una vez establecida una explicación, el profesor desafía a los GC a probar con un mayor número de peleas con preguntas como ¿Cuál es la probabilidad de que si son 10 peleas, aciertes a 4? Una vez obtenido un método plausible de cálculo. El profesor desafía a someter a prueba el método encontrado en eventos no equiprobables. Para esto, se introduce un nuevo problema, donde se estudia la probabilidad que un basquetbolista profesional tiene de encestar tiros de triple. Los GC tienen el siguiente desafío: Si la probabilidad de encestar un triple es 1 de 4. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar 5 veces, enceste en 2 oportunidades? Una vez obtenido un método. Los GC exponen sus resultados y los comparan con los de sus compañeros.

Fase de cierre: Cada GC genera una pregunta para sus compañeros. Los equipos se dan a la tarea de resolver dicha pregunta y luego la devuelven al GC evaluador. Ellos revisan los resultados de sus compañeros y luego, el representante de cada equipo expone los resultados que les fueron entregados, aportando críticas o correcciones según corresponda.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En cuanto a los resultados obtenidos por los alumnos, es posible evidenciar una construcción de la DB como método de cálculo de probabilidades desde las actividades propuestas en cada fase se la clase reportada. La actividad inicial invita a realizar una apuesta sobre eventos de resultado incierto, basándose únicamente en intuición. (Figura 1)


Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas
Magister en Didáctica de la Matemática
Paulina Jara, Max Muñoz
Claudio Zamorano, Cristian Zamorano

CATOLICA DE VALPARAISO

Actividad 1.

De acuerdo a los siguientes combates, que serán mostrados por tu profesor, apuesta al ganador de cada pelea, anotando los resultados en la cartilla propuesta.

Apuesta. / Combate.			
¿Quién gana?	Zanglee	Honda	RyU
Resultado.	✓	✓	✗

Figura 1: Apuesta realizada por un alumno

Esta fase inicial es trascendental para el éxito de la secuencia propuesta, ya que dota a la actividad de un sentido de competencia que le aporta dinamismo y uso efectivo del tiempo a la clase. Y además aporta contexto y datos reales al estudio, lo que se enmarca en las sugerencias de Araneda et al (2011) para la alfabetización estadística.

Luego los alumnos reflexionan sobre los resultados totales del curso en cuanto a sus apuestas. Como se esperaba, la gran mayoría de los alumnos obtiene uno o dos aciertos, lo que abre paso a la reflexión sobre el porqué de esta distribución de probabilidades. Algunos grupos aluden a razones extra matemáticas, y otros a razones ligadas a la probabilidad. De estas respuestas se sirve el profesor para dar paso a la siguiente etapa de la clase.

Como se muestra en la figura 2, al ampliar la cantidad de peleas y proponer a los alumnos un soporte adecuado para sus resultados, se establece una relación entre métodos de conteo y triangulo de pascal. Ambos contenidos trabajados en las clases previas de la secuencia.

Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas
Magíster en Didáctica de la Matemática
Paulina Jara, Max Muñoz
Claudio Zamorano, Cristian Zamorano

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO

Un paso más.

Supón ahora una secuencia de 4 rounds y completa la siguiente tabla.

Cantidad x de aciertos	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
Formas de obtener x aciertos	XXXX	XVXX VXXX XXVX XXXV	XXVV VVXX VXVX VXXV XVVX XVXV	VVVX XVVV VXVV VVXV	VVVV
Cantidad de formas posibles para x aciertos	1	4	6	4	1
Probabilidad de acertar x veces	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Figura 2: Aumento de peleas y probabilidad.

Luego de este paso, muchos de los grupos realizaron la conexión con los contenidos previos, por lo que el paso al siguiente desafío resulto un poco más sencilla. Se les propuso a los alumnos realizar el cálculo para 10 peleas y acertar a 7 de ellas. El aumento de eventos dificulta la posibilidad de que construyan árboles o diagramas, por lo que incentiva la aplicación de los métodos de conteo trabajados en las clases anteriores

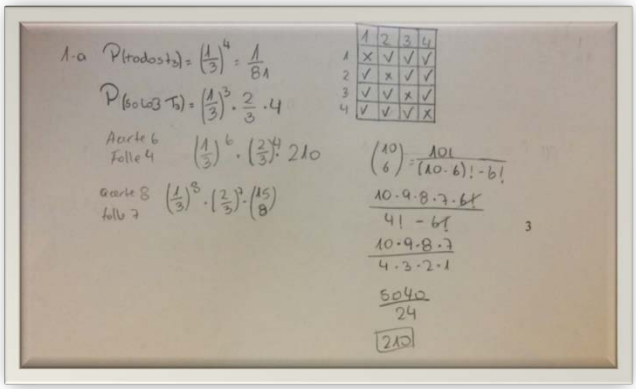


Figura 3: Aproximación a la distribución binomial.

Luego de establecer un método de cálculo, los alumnos son desafiados a ponerlo a prueba con eventos no equiprobables. Como se muestra en la figura 3. Algunos grupos consiguen un método de cálculo muy cercano a la distribución binomial. El desafío consistió en calcular la probabilidad de que un basquetbolista cuya probabilidad de acertar al aro es de 1/3 acierte 4 lanzamientos, que acierte 3 de 4 lanzamientos, y luego, forzando el método, que acierte 6 de 10 u 8 de 15.

Para finalizar, podemos establecer que la construcción de una secuencia de aprendizaje bajo la metodología del estudio de clases, favoreció a la construcción efectiva del concepto de la distribución binomial, y que algunos estudiantes evidenciaron un crecimiento en cuanto a sus métodos de cálculo, a la interiorización de un nuevo objeto matemático y, no menos importante, a la seguridad con la que se enfrenta a los desafíos de su aula.

Referencias

Araneda, A., del Pino, G., Estrella, S., Icaza, G., & San Martín, E. (2011). *Recomendaciones para el currículum escolar del eje Datos y Probabilidad.* Recuperado de http://www. soche. cl/archivos/Recomendaciones. pdf.

Batanero (2005). *Significados de la probabilidad en la educación secundaria*. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 8(3), 247-264.

Meyer, P. L. (1970). *Introductory probability and statistical application*.

MINEDUC (2015). Programa de Estudio, Cuarto Año Medio. Ministerio de Educación. Chile

Estrella, S., & Olfos, R. (2013). Estudio de clases para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística en Chile. *Educación Estadística en América Latina.*

LA MODELACIÓN DESDE EL SORDO. UN ESTUDIO INCLUSIVO DESDE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL

Siegfried van-Lamoen Gómez[1], Daniela Soto Soto[2]
Centro de Estudios y Capacitación para Sordos (Valparaíso)[1], Universidad de Santiago de Chile[2]

Resumen: Desde nuestra perspectiva, la construcción social del conocimiento matemático, consideramos que la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemática, en el caso del Sordo, no es tan sólo la mera interpretación de lo explicado por el profesor en el aula, como se ha propuesto por los programas de integración (PIE), sino que también se produce porque existe una exclusión proveniente del propio discurso Matemático Escolar (dME) que no considera las formas de construir conocimiento del estudiante sordo. En este documento reflexionaremos sobre la exclusión que produce el dME hacía el Sordo, y propondremos, entendiendo a la matemática como una construcción social, a la modelación como el eslabón que nos permita examinar los procesos de construcción de conocimiento de esta comunidad.

Sordo, exclusión, modelación, construcción social, discurso matemático escolar

INTRODUCCIÓN

La cultura sorda es una cultura inmersa en otra; la cultura oyente, la cual actúa de forma dominante, pues es en esta última en donde se construyen y desarrollan mayormente los conocimientos teóricos, prácticos, comunicativos, entre otros. Es en la cultura oyente donde se establecen los diferentes parámetros por los cuales se regirá el aprendizaje formal, y así mismo, los paradigmas que lo conduzca, así como también las normas comunicativas que se utilicen.

En particular en la educación, la sordera es considerada como Necesidad Educativa Especial (NEE) de carácter sensorial, por lo que la implementación de medidas adaptativas es mayormente de orden instrumental, es decir considerando la barrera del acceso al conocimiento un tema netamente comunicacional. Las opciones de educación *regular* que se entregan para estudiantes sordos, son por lo general, el ingreso de un intérprete al aula, suponiendo que esto es suficiente para que el alumno pueda socializar y participar del proceso educativo, y más aún, de la construcción del conocimiento. La matemática que se presenta en el sistema escolar consta de términos, conceptos e ideas formales que se aplican en la clase para la construcción, sin embargo, para el niño sordo son herramientas que ni siquiera conoce su uso, y a su vez, se le pide que use estas herramientas para la construcción de nuevos *elementos matemáticos*. Al Sordo, todo este encadenamiento matemático-formal le parece casi laberintico. (Delgado y Plasencia, 1996).

La comunicación juega un papel fundamental en el proceso de construcción del conocimiento, una comunidad de aprendizaje necesita de mensajes claros en las actividades, ya que los modos de pensar, razonar y justificar guían nuestras comunicaciones y explicaciones, y viceversa, se modifican los diferentes modos. Así como se estructura, se presenta y se desarrolla la matemática escolar no está pensada para estudiantes sordos. En general, todo lo que rodea a la matemática les es ajeno: definiciones, objetos matemáticos,

aplicaciones, problemas, por nombrar algunos. Hablamos entonces de caminos errados en cuanto a la forma y el fondo, de como se ha orientado o considerado la sordera, pues más que una *NEE* creemos que la sordera implica un modo diferente de construir conocimiento. Por tanto, consideramos que desde la estructuración de una clase, las actividades, los elementos, e incluso el progreso curricular debe ser rediseñado, pues sus razonamientos, su forma de pensar el mundo, su lengua, son diferentes a la de los oyentes.

OBJETIVOS

Este trabajo es parte de un proyecto más amplio que tiene por objetivo proponer un modelo teórico-práctico para la educación matemática inclusiva desde el sordo.

La construcción del modelo se desarrollara a partir de los datos proveniente de la caracterización de formas de construcción del sordo, cuando se ve enfrentado a una situación de modelación. Para ello en esta primera etapa rediseñaremos algunas situaciones que se han desarrollado bajo la Teoría Socioepistemológica (TS). En particular, consideraremos la situación de modelación propuesta por Méndez (2015). La cual será rediseñada a partir de las particularidades de los sordos chilenos y la experiencia de profesores de matemática que desarrollan su quehacer profesional en este contexto.

Los objetivos específicos para fines de esta presentación son: visibilizar la exclusión de la construcción del conocimiento matemático que ha vivido el sordo, proponer una matemática escolar inclusiva desde la *TS*. Y por último, mostrar la situación de modelación rediseñada, señalada en el párrafo anterior.

La exclusión del discurso matemático escolar en el sordo

Las investigaciones que se han ocupado del *dME* para nociones específicas (Buendía, 2011; Cantoral 1990; Cordero, 2001; Montiel, 2011; entre otras), han evidenciado una serie de características que enunciamos a continuación y que fueron analizadas en profundidad en Soto y Cantoral (2014):

- La atomización en los conceptos
- El carácter hegemónico
- La concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continúo
- El carácter utilitario y no funcional del conocimiento
- La falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar

Por separada, cada una de estas características permite tratar al *dME*, mientras que, en su conjunto, brindan una información novedosa, pues permite reconocer y estudiar al fenómeno de *exclusión*. Con estas características, consideramos al *dME* como impositivo, donde el conocimiento matemático aparece en forma estática, no susceptible de construcción o modificación de parte del individuo. Es decir, profesores y estudiantes aparecen como comunicadores y aprendices de un conocimiento legítimo socialmente, sin contar con la posibilidad de construirlo o modificarlo.

Consideramos a la exclusión en un sentido más amplio que el proceso de afectación del individuo al quedar fuera de determinado grupo o carecer de cierto derecho, sino al hecho de tener acceso sin ser considerado, a ser invisible. Por tanto, la exclusión que describimos en este trabajo hace referencia a la caracterizada por Bourdieu y Passeron (2005), a saber: la violencia simbólica. Ésta se manifiesta en la imposición de significados, argumentaciones y procedimientos que provoca el *dME* a los sujetos frente a la construcción del conocimiento matemático, en particular al estudiante Sordo.

En este caso, la problemática se agrava ya que no tenemos estudios que nos indiquen de qué manera construye un Sordo el conocimiento matemático, ni cómo afecta el *dME* en esta. Sin embargo, hay investigaciones (van Lamoen y Parraguez, 2011; Mora y Parraguez 2012; Méndez, 2015) que nos muestran que algunos de los principales obstáculos que tienen para acceder a la matemática escolar hacen relación con los objetos matemáticos formales, algunas de sus representaciones, sus argumentaciones y procedimientos. Asimismo, encontramos otras investigaciones (Aeloíza, 2011; Delgado y Plasencia, 1996) que nos hablan respecto a la importancia del ambiente donde se generen las actividades educativas y el acceso completo a la información, pues esta posibilidad de acceso sería uno de los orígenes de las diferencias en el desarrollo con sus pares oyentes. En esta misma línea, la utilización de un intérprete de lengua de señas, no asegura una comprensión de una situación, y más aún, no ayuda al desarrollo y enriquecimiento de la lengua de señas, puesto que el uso de una seña no es solo una *transcripción* literal, en muchos casos es la representación concreta de una idea más amplia.

La inclusión: los usos de la modelación del Sordo

Sabemos la importancia que tiene la vinculación de la matemática con la realidad. Hoy dentro de la didáctica de la matemática hemos reconocido una categoría para ese vínculo, a saber: la modelación.

Si bien existen diferentes perspectivas sobre la modelación; algunas la justifican a partir de las representaciones y otras a partir de las prácticas. Sin embargo, todas ellas coinciden en la importancia que genera para acercar la matemática escolar a la realidad de los estudiantes, y así poder entregarles significación en su cotidiano y cultura. Consideramos que la modelación puede ser el puente que nos permita observar de qué forma construye el Sordo su conocimiento matemático, para así reflexionar sobre la inclusión y la importancia del rediseño del *dME* desde el Sordo.

Situación a rediseñar: ¿Cómo es el movimiento? (Méndez, 2015)

Actividad 1. *¿Cómo es el movimiento?* (Se pide dibujar el movimiento de tres personas que se trasladan de un punto de referencia a otro: caminando, corriendo y en bicicleta)

Actividad 2. *El recreo* (traslado de personas de un punto de partida a uno de llegada. Tres personas que se mueven al mismo tiempo, en el mismo espacio; y una de esas personas es ella o él mismo).

Actividad 3. *Vamos al salón de clases* (misma situación que la Actividad 2, pero en ésta, las tres personas parten del mismo lugar del patio, ninguno de ellos es el estudiante-

participante) Responder, a) ¿Qué gráfica corresponde a cada persona? y b) ¿Qué distancia recorrió cada uno de ellos?

Actividad 4. *El movimiento de la pelota* (imaginar que patean una pelota y dibujar el movimiento que tendrá ésta en un eje coordenado) Responder: a) ¿Qué distancia crees que puede recorrer? y b) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer esa distancia?

Actividad 5. *Patea la pelota*, (ejecutar la Actividad 4). Responder, a) Dibuja el movimiento de la pelota que pateaste y b) comparar con la gráfica de la Actividad 4 ¿En qué se parecen? ¿En qué se diferencian?

REFLEXIONES

La pérdida de la audición, no significa solamente la pérdida de un sentido, significa también percibir el mundo de forma diferente, y a partir de ello, construirlo nuevamente. Esta diferencia no se encuentra mayormente documentada en cuanto a la construcción de conocimiento matemático, sin embargo, desde la socioepistemología encontramos herramientas que permiten acercarnos a esta *realidad*. Los obstáculos evidenciados en investigaciones de corte cognitivo, coinciden con algunas de las características de un *dME* impositivo que solo genera barreras, más allá de las comunicativas, para el acceso al conocimiento por parte de la comunidad sorda.

En este sentido, el rediseño de las actividades desde el Sordo, buscara sentar las bases para generar situaciones *ad-hoc* en las cuales pueda mostrar sus procesos de construcción e interacción y un marco referencial inclusivo para la resignificación de la matemática escolar.

Referencias

Aeloíza, R. B. (2011) *Desarrollo y aprendizaje en niños sordos breve perspectiva teórica para una extensa crisis histórica*. Cuadernos de trabajo, pp. 83-95. Universidad Diego Portales, Chile.

Bourdieu, J. y Passeron, J-C. (2005). *La reproducción; elementos para una teoría del sistema de enseñanza*. (Trad. J. Melendres y M. Subirat). México, D.F, México: Edición Fontamara. (Original en Francés, 1970)

Buendía, G. (2011). *La construcción social del conocimiento matemático escolar: un estudio socioepistemológico sobre la periodicidad de las funciones*. Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analítica*. Tesis de (Doctorado) no publicada. Cinvestav-IPN, D.F, México.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(2), pp. 103-128.

Delgado, M. A. G., y Plasencia, D. A. (1996). La adquisición de los conceptos lógico-matemáticos en el niño sordo. Revista *Números*, (27), pp. 33-44. España.

Méndez, C. (2015). *Comunidad de conocimiento matemático de sordos. Lo matemático y la escuela.* Tesis de (Doctorado) no publicada. Cinvestav-IPN, D.F, México.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico: Un estudio Socioepistemológico.* Ciudad de México: Ediciones Díaz de Santos. 2011.

Mora, G. y Parraguez, M. (2012). *Estudio de la función lineal en estudiantes con déficit auditivo: ¿un problema de tiempo o ritmo de aprendizaje?* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 25, pp. 615-623.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). *El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica*. Bolema- Boletim de Educação matemática. V.28, n. 50. Pp 1525-1544.

van-Lamoen, S. y Parraguez, M. (2011). *Construcción del concepto función cuadrática en estudiantes sordos.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 24, pp. 331-339.

SIGNIFICADOS PRETENDIDOS POR EL CURRÍCULO CHILENO DE OCTAVO AÑO BÁSICO SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Yocelyn Parra Urrea, Luis Pino-Fan
Universidad de Los Lagos

Abstract: This research analyzes the representativeness of the intended meaning by the Chilean eighth grade curriculum on the notion of function with respect of the holistic meaning reference. To achieve our purpose we reconstructed, through a historical-epistemological review, the holistic meaning of reference and determined the meaning intended by the Chilean eighth grade of curriculum through the revision of the program of study and textbook. For the analysis, we use the theoretical tools from Onto-Semiotic Approach (OSA) of knowledge and mathematical instruction. This study allowed us to evaluate the mathematical richness of meaning intended by the Chilean eighth grade curriculum, in addition to providing information that will properly manage learning when the notion of function is introduced.

Función, Enfoque Ontosemiótico, currículo chileno

INTRODUCCIÓN

La noción de función, como objeto matemático básico y unificador, es considerada uno de los conceptos más importantes de la matemática. Su presencia y estatus dentro del currículo chileno conduce la atención hacia el análisis de sus procesos de enseñanza aprendizaje. Diversos estudios (Aravena, 2001, entre otros) han reportado una variedad de dificultades en su aprendizaje, impidiendo que los estudiantes logren apropiarse, comprender y dar significado a la noción de función. La comprensión de este objeto matemático es fundamental, dado que opera sobre otros objetos matemáticos y además presenta una utilidad práctica en la resolución de problemas y en la modelación de fenómenos. El objetivo de esta investigación es identificar la representatividad de los significados pretendidos por el currículo chileno de octavo básico respecto del significado holístico de referencia de dicho objeto matemático, esto con el propósito de avanzar en la caracterización de los conocimientos que requieren los profesores de matemática cuando se introduce la noción de función.

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

El marco teórico que hemos adoptado es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino y Batanero, 1994). El EOS permite a través de sus herramientas teóricas realizar un análisis detallado de los significados de la noción de función pretendidos en el currículo chileno. Para ello, hemos utilizado la noción de *configuración ontosemiótica*, la cual nos permite analizar y describir los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos/definiciones, proposiciones/ propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en prácticas matemáticas cuando se aborda la noción de función (Pino-Fan, Godino y Font, 2015). Para la implementación en el aula de los significados del objeto función, el profesor toma como referencia los significados pretendidos por el currículo de matemáticas (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013), de ahí la importancia que los

significados pretendidos por el currículo sean representativos del 'verdadero' significado de la noción de función (significado holístico de referencia).

Esta investigación trata de un estudio cualitativo, ya que pretende caracterizar las configuraciones ontosemióticas asociadas a las prácticas matemáticas propuestas por el programa de estudio y libro de texto de octavo básico sobre la noción de función. La investigación se desarrolló en tres fases: 1) *Determinación del significado holístico de referencia de la noción de función*. A partir del estudio histórico-epistemológico se identificaron seis significados parciales que constituyen el significado holístico de referencia: la función como correspondencia, como relación entre variables, como expresión gráfica, como expresión analítica, como correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos. 2) *La determinación del significado pretendido por el currículo chileno de octavo básico sobre la noción de función*. Para ello, adoptamos la metodología propuesta por Pino-Fan et al., (2013), la cual establece cuatro criterios para la caracterización de los significados curriculares: Representatividad de los campos de problemas propuestos; Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas; Representatividad de los elementos regulativos y argumentativos y *Representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto del significado holístico de referencia.* Este último criterio se corresponde con la última fase de nuestro estudio.

ANÁLISIS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO DE OCTAVO BÁSICO

El Programa de Estudios (PE) para octavo básico propuesto por el Ministerio de Educación de Chile presenta en su cuarta unidad de álgebra, la noción de función. El propósito de esta unidad es:

> […] los alumnos comienzan el reconocimiento de funciones y su distinción con las relaciones en contextos diversos. Por una parte, la idea es desarrollar el concepto de función asociado a algunas metáforas que facilitan su comprensión y vincularlo a conceptos matemáticos ya trabajados en años anteriores. Por otra parte, en el trabajo propuesto los estudiantes deben reconocer conceptos claves, como dominio y recorrido, lo que introduce algunos elementos de lenguaje conjuntista (Mineduc, 2011a, p.73).

Con base en lo anterior, podría decirse que el PE para octavo básico pretende introducir la noción de función como *relación entre variables* para posteriormente definir la noción de función desde un punto de vista conjuntista. Esta reflexión cobra fuerza cuando el Mineduc (2011a) señala:

> Interesa que los alumnos analicen las funciones desde la relación entre dos variables y, en particular, distingan entre variables dependientes e independientes. Se abandona la clásica progresión que se iniciaba con una rigurosa definición de producto cartesiano, para luego definir el concepto de relación y terminar presentando las funciones como un caso particular de las relaciones. Es importante que los estudiantes sean capaces de reconocer el dominio y recorrido de una función. Aunque el currículo no propone como tema el uso del lenguaje conjuntista, si el docente lo estima conveniente puede utilizar aquellos términos y conceptos relacionados con teoría de conjuntos que sean necesarios y faciliten el aprendizaje. (p.76)

Con respecto a los *conceptos/definiciones* se mencionan algunos como relaciones, variables (independientes y dependientes), dominio, recorrido, entre otros. En cuanto a los *elementos lingüísticos*, aunque se señala que se estudiarán diferentes representaciones de la función, no

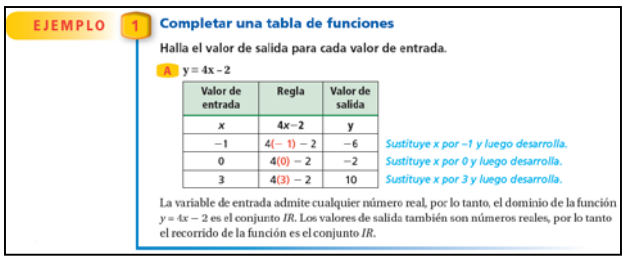
se explicita el tipo concreto de representaciones. Sin embargo, en los ejemplos de actividades sólo se ilustra el uso de representaciones verbal y simbólica. Es importante mencionar que en el (PE) no se encuentra evidencia explicita de los otros elementos de la configuración ontosemiótica (tipos de problemas, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos).

ANÁLISIS DEL TEXTO ESCOLAR DE OCTAVO BÁSICO

El primer elemento de la configuración ontosemiótica refiere al tipo de *situaciones/problemas* propuestos en el libro de texto. Al respecto, identificamos tres tipos de problemas: 1) problemas para ejemplificar definiciones introducidas; 2) problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas; y 3) problemas contextualizados para reforzar los conocimientos 'adquiridos'. Los *elementos lingüísticos* identificados son de tipo verbal, tabular, simbólico y, en menor medida, el gráfico. Los *conceptos/definiciones* que se introducen en el texto escolar son: función, valor de entrada y salida, dominio, recorrido, variable (dependiente, independiente), tabla y par ordenado. La noción de función es introducida por primera vez mediante la siguiente definición:

> "Una función es una relación que asigna a cada valor de la variable independiente x un solo valor de la variable y. Opera según una regla para producir exactamente un valor de salida por un valor de entrada" (Bennett, et al., 2014, p. 206).

Dicha definición se establece sobre la base de la clásica metáfora de la "máquina", la cual es presentada de manera muy sucinta previa a dicha definición. Posteriormente, se presenta un primer problema (del tipo 1 descrito anteriormente), que permite ejemplificar la definición introducida. Otras definiciones, que llevan implícitas concepciones conjuntistas para la noción de función, son las de dominio y recorrido. Las *propiedades/proposiciones* que identificamos podemos describirlas con el ejemplo de la Figura 1. Dichas proposiciones se establecen en el sentido de describir la regla de correspondencia. Del mismo modo, hacen referencia a *procedimientos* que tienen que ver con las operaciones que los estudiantes deben de realizar para encontrar los valores de *y* dado *x*. Otro tipo de proposiciones hacen referencia a explicaciones adicionales a la definición dada, o bien a *justificaciones/argumentos* de los procedimientos realizados; por ejemplo, "La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto, el dominio de la función $y = 4x-2$ es el conjunto $\mathbb{R}$".



EJEMPLO 1 **Completar una tabla de funciones**

Halla el valor de salida para cada valor de entrada.

A $y = 4x - 2$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida	
x	$4x-2$	y	
-1	$4(-1) - 2$	-6	Sustituye x por –1 y luego desarrolla.
0	$4(0) - 2$	-2	Sustituye x por 0 y luego desarrolla.
3	$4(3) - 2$	10	Sustituye x por 3 y luego desarrolla.

La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto, el dominio de la función $y = 4x - 2$ es el conjunto IR. Los valores de salida también son números reales, por lo tanto el recorrido de la función es el conjunto IR.

Figura 1. Ejemplo de problema tipo 2 (Bennett, et al., 2014, p. 206).

En cuanto al tipo de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de los problemas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para éstos, encontramos cuatro clases de problemas. El primero, refiere a problemas para los cuales se proporcionan

datos verbales de la función, y se espera una respuesta en que la función se represente simbólicamente. La segunda clase refiere a problemas en los que se proporcionan datos verbales de la función y se pide una respuesta tabular. Para ello, los estudiantes deberán transitar de lo verbal a lo simbólico y de lo simbólico a lo tabular. La tercera clase refiere a tareas que proporcionan en su planteamiento datos simbólicos de la función y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello el estudiante debe transitar de lo simbólico a lo tabular y de lo tabular a la gráfica de la función. La última clase de tareas, refieren a aquellas que proporcionan una representación simbólica de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación tabular de la misma.

CONCLUSIONES

A partir del análisis realizado se constató que el significado pretendido por el currículo chileno de octavo básico sobre la noción de función no es representativo del significado holístico de referencia, esto pues el enfoque actual que se da a este objeto matemático se basa fundamentalmente en su acepción de *relación entre variables*. Del mismo modo, se encuentra implícita una aproximación al significado de función desde un punto de vista conjuntista. Sin embargo, ni los tipos de problemas identificados en la caracterización de la configuración ontosemiótica, ni las representaciones activadas en el planteamiento y solución de los problemas, dan cuenta del uso de la función en su acepción conjuntista. Por otro lado, la definición de *función* es introducida sobre la base de la clásica metáfora de la "máquina" que produce un 'único' valor de salida para cada valor de entrada. De acuerdo con Mesa (2004) los profesores tienden a privilegiar la metáfora de la máquina para ilustrar un proceso de transformación, esto por sobre definiciones esenciales que utilicen términos como el de relación y correspondencia. Es así que hemos constatado que el currículo no promueve el estudio de relaciones funcionales definidas en conjuntos distintos a los numéricos usuales. Es decir, no moviliza la noción de *función como correspondencia arbitraria*. Orton (1983) explicita que una aproximación inicial "informal" a los conceptos del cálculo, debe involucrar exploraciones numéricas y gráficas. Esto no se evidencia en la exploración realizada en el libro de texto de octavo básico, pues en la aproximación inicial a la noción de función, predominan fuertemente representaciones de tipo simbólicas y no se evidencian tareas donde la función sea planteada desde su *representación gráfica*. El estudio de la idoneidad epistémica de los significados sobre la noción de función que se pretenden en el currículo chileno, es de suma importancia, puesto que la "adecuación pobre" del significado holístico en la enseñanza, podría obstaculizar la correcta comprensión de este objeto matemático.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto de investigación FONDECYT de iniciación N°11150014.

Referencias

Aravena, M. (2001). *Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica*. (Tesis Doctoral). Departament de Didáctica de la Matemática i de les Ciències Experimentals, Universitat de Barcelona, España.

Bennett, J., Burger, E., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfro, F., Roby, T., Scheer, J., & Waits, B. (2014). *Texto para el estudiante*. *Matemática 8°*. Chile: Galilieo Libros Ltda.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,*14(3), 325-355.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 255-286.

Mineduc. (2011a). *Programa de Estudio para Octavo Año Básico Unidad de Curriculum y Evaluación.* Santiago de Chile.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, 34(2), 123-150.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA*, 29(51), 60-89.

PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y FRACASO ESCOLAR DE ESTUDIANTES MARGINALIZADOS

Luz Valoyes-Chávez
Centro de Investigaciones Avanzadas en Educación, Universidad de Chile

Resumen : El presente documento reporta los resultados preliminares de una investigación en curso que indaga por las relaciones entre prácticas de enseñanza de las matemáticas y fracaso escolar de estudiantes socialmente marginalizados. Así, se analiza la forma en la cual las prácticas de enseñanza de una maestra de cuarto básico, determina el fracaso en el aprendizaje de las matemáticas de sus estudiantes. Tales estudiantes, quienes asisten a una escuela municipal, provienen de los sectores más pobres de la ciudad. Para adelantar el análisis, se introduce un modelo alternativo de las prácticas de enseñanza de las matemáticas. Dicho modelo comprende tres dimensiones denominadas representaciones sociales de los estudiantes, conocimiento profesional e interacciones en el aula. Se utiliza la técnica del estudio de casos y un enfoque interpretativo para analizar los datos. Los resultados preliminares indican que las dimensiones propuestas se articulan con un grado alto de coherencia para determinar la forma que toma el aprendizaje de los estudiantes y, en particular, sus posibilidades de acceso a educación matemática de calidad.

Prácticas de enseñanza de las matemáticas, representaciones sociales, interacciones, fracaso escolar en matemáticas

INTRODUCCIÓN

Diversos estudios en el campo de la educación matemática (e.g., Anyon, 1995) evidencian que el fracaso escolar en matemáticas afecta mayoritariamente a estudiantes provenientes de grupos socialmente marginalizados. En abierta contraposición a discursos esencialistas (Boaler, 2002), desde los cuales se asigna la responsabilidad de dicho fracaso a las identidades sociales de los estudiantes, estos estudios muestran que las prácticas de enseñanza determinan el acceso a educación matemática de calidad por parte de los estudiantes, particularmente de aquellos pertenecientes a grupos históricamente marginalizados como los pobres, las mujeres, los inmigrantes y los indígenas. En esta perspectiva, las prácticas de enseñanza de las matemáticas constituyen un determinante fundamental tanto en el fracaso así como en el éxito escolar en el aprendizaje de esta disciplina. Sorprendentemente, aunque este es un problema que afecta el desarrollo de las sociedades occidentales y pone en entredicho sus objetivos de equidad y justicia social, poco se ha explorado en el campo de la educación matemática. En particular, en América Latina existe una escasez de estudios que analicen las prácticas de enseñanza de las matemáticas desde perspectivas que permitan entender el acceso inequitativo al saber matemático y que posibiliten transformar esta realidad. El presente trabajo pretende contribuir en esta dirección. Para ello, se propone un modelo de prácticas de enseñanza de las matemáticas que permita adelantar el estudio las condiciones en las cuales se configura e instala el fracaso escolar en matemática de estudiantes de estratos socioeconómicos bajos en la ciudad de Santiago. Utilizando el método del estudio de casos, se analizan las prácticas de enseñanza

de una maestra, Julia[22], quien enseña en una escuela municipal. Así, la pregunta que se pretende responder se formula de la siguiente manera:

¿Cuáles son las características de las prácticas de enseñanza implementadas por una maestra de grado cuarto en una escuela municipal de Santiago, que podrían contribuir al fracaso escolar en el aprendizaje de las matemáticas por parte de sus estudiantes? Se espera caracterizar las prácticas de enseñanza que contribuyen al fracaso escolar en matemáticas, las cuales se instalan y perpetúan en los salones de clase en escuelas particularmente atendidas por estudiantes pertenecientes a grupos históricamente marginalizados.

MARCO TEÓRICO

No hay consenso en el campo de la educación matemática en relación con los principales componentes de las prácticas de enseñanza de las matemáticas ni de la forma que toman las relaciones entre dichos componentes. Desde distintas perspectivas teóricas se han construido modelos para estudiar y comprender los procesos a través de los cuales los maestros promueven la apropiación del saber matemático en el aula. Por ejemplo, desde perspectivas eminentemente antropológicas, las prácticas han sido modeladas a partir de la noción de *praxeología* (Chevallard, 1999) en la cual se destaca, por un lado, su carácter institucional, y por otro, su doble dimensión práctica y teórica. Igualmente, las prácticas de enseñanza han sido propuestas como todo aquello que hace y piensa el maestro, incluyendo sus sentimientos, emociones e intuiciones (Simon & Tzur, 1999). Sin embargo, estos modelos no permiten comprender fenómenos relacionados con la distribución desigual del conocimiento y las habilidades matemáticos a lo largo de líneas de clase, género, raza y etnia, tal y como se evidencia en los resultados de aprendizaje de los estudiantes en pruebas estandarizadas. Investigadores como Martin, Gholon y Leonard (2010) afirman que esto es debido, en parte, a que las prácticas de enseñanza trascienden la tradicional relación entre las matemáticas, el maestro y el estudiante. Ellas se desarrollan en contextos sociales y culturales específicos y en momentos históricos y políticos concretos, determinando así sus características y efectos sobre el aprendizaje.

Con base en estos elementos, en el presente estudio se proponen tres dimensiones para caracterizar las prácticas de enseñanza de las matemáticas. La primera dimensión denominada *representaciones sociales de los estudiantes* se refiere a las anticipaciones, significados e interpretaciones que hacen los maestros sobre las habilidades matemáticas de sus estudiantes con base en sus identidades de clase, género, raza o etnia (Battey, 2013). Tales representaciones son fundamentales en la medida en que parecen influir fuertemente en las decisiones que toma el maestro en relación con las estrategias de enseñanza (Valoyes, 2014). La segunda dimensión denominada *dominios del conocimiento* alude, entre otros aspectos, al conjunto de saberes sobre y de las matemáticas, el aprendizaje de esta disciplina y la gestión en el aula, los cuales el maestro pone en juego cuando selecciona, diseña, gestiona o evalúa una práctica matemática (Hill, Ball & Schilling, 2008). La última dimensión denominada *las interacciones en el aula* se refiere a los actos de posicionamiento

[22] Pseudónimo.

entre el maestro y los estudiantes durante la comunicación del saber matemático. Tales actos pueden posibilitar o dificultar la construcción de identidades matemáticas positivas por parte de los estudiantes (Martin, 2006). Los actos de posicionamiento comprenden, entre otros, el tipo de preguntas que el maestro realiza, las dinámicas de participación y las posibilidades de discusión de las ideas matemáticas de los estudiantes (Turner et al., 2002). Con base en estos elementos, se caracterizan las prácticas de la maestra participante en este estudio.

METODOLOGÍA

Participante. La maestra seleccionada, Julia, enseña en una escuela municipal en el grado cuarto de la básica ubicada en Santiago. Los estudiantes en el curso de Julia provienen de sectores marginales de la ciudad, son diversos en términos raciales y étnicos y algunos son inmigrantes. La diversidad de los estudiantes en términos de género, raza, etnia y clase social fue uno de los criterios para seleccionar a Julia como participante del estudio. Adicionalmente, los bajos niveles de desempeño alcanzados por los estudiantes en las pruebas nacionales estandarizadas, así como en las pruebas internas, constituyen criterios importantes para la selección de la escuela en la cual trabaja Julia.

Métodos de Recolección de Datos. En la presente investigación se utiliza el estudio de casos para adelantar la recolección de los datos. Se filmaron 6 clases de la maestra participante. Se aplicó un cuestionario previo al inicio de las observaciones y se aplicará una entrevista semi-estructurada. Durante esta entrevista, se observarán videoclips de algunos episodios de clase previamente seleccionados por la investigadora para permitir la reflexión de la maestra acerca de concepciones e ideas sobre los estudiantes y sobre su práctica de enseñanza de las matemáticas.

Análisis de los Datos. Para el análisis de los datos se utiliza un enfoque interpretativo (Hatch, 2002) de manera que sea posible realizar inferencias sobre los hechos observados, significarlos y elaborar conclusiones sobre ellos. Los videos y las entrevistas se analizan teniendo en cuenta las tres dimensiones de las prácticas de enseñanza propuestas en este documento. En el marco de cada una de las dimensiones, se buscarán regularidades y patrones que permitan identificar líneas comunes de actuación y pensamiento por parte de la maestra de manera que se pueda dar respuesta a la pregunta de investigación.

Dimensiones de las Prácticas de Enseñanza de las Matemáticas		
Representaciones Sociales de los Estudiantes	Dominios del Conocimiento	Interacciones en el Aula
Marcos utilizados por el maestro para expresar explicar, justificar y anticipar las posibilidades de éxito de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.	Características de las estrategias y de los discursos utilizados por el maestro para posibilitar la apropiación del contenido matemático por parte de los estudiantes.	Interacciones discursivas y actos de posicionamiento entre el maestro y los estudiantes.

Tabla 1: Categorías de Análisis

RESULTADOS

Los resultados preliminares de este estudio evidencian importantes articulaciones entre las distintas dimensiones propuestas para el análisis de las prácticas docentes de la maestra participante. Es decir, representaciones, conocimientos e interacciones se articulan con un grado alto de coherencia para determinar la forma que toma el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, en relación con las dimensiones *Representaciones sociales de los estudiantes* e *Interacciones en el aula*, se evidencia la ausencia de discusión sobre las ideas matemáticas de los estudiantes. Las interacciones entre la maestra y los estudiantes responden al modelo *Initiation-Reply-Evaluation* (IRE, Mehan, 1978), en el cual el maestro propone una pregunta, espera la respuesta del estudiante y decide si es correcta o incorrecta. En este sentido, los estudiantes no tienen la oportunidad de discutir su pensamiento o de adelantar procesos de razonamiento y comunicación, lo cual podría socavar sus posibilidades de desarrollar habilidades matemáticas fundamentales. Esta dinámica podría responder a las representaciones construida por la maestra, quien considera que la condición de pobreza de sus estudiantes es un impedimento para el aprendizaje de las matemáticas y por lo tanto, se enfoca en los aspectos procedimentales de la disciplina. Así, representaciones sociales de los estudiantes e interacciones en el aula parecen articularse para configurar la forma que toma el aprendizaje de los estudiantes. Obviamente, el análisis completo de los datos permitirá confirmar esta tendencia.

Referencias

Anyon, J. (1995). Race, social class, and educational reform in an inner-city school. *Teacher College Record, 97*(1), 69-94.

Battey, D. (2013). “Good” mathematics teaching for students of color and those in poverty: The importance of relational interactions within instruction. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 125–144.

Boaler, J. (2002a). Paying the price for “sugar and spice”: Shifting the analytical lens in equity resarch. *Mathematics Thinking and Learning 4*(2\3), 127–144.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2). 221-266.

Hatch, J. A. (2002). *Doing qualitative research in education settings*. Albany, NY: The State University of New York Press.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knoweldge of students. Journal for Research in Mathematics Education, 39(4), 372-400.

Martin, D. B. (2006). Mathematics learning and participation as racialized forms of experience: African American parents speak on the struggle for mathematics literacy. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(3), 197–229.

Martin, D.B., Gholson, M., & Leonard, J. (2010). Mathematics as gatekeeper: Power and privilege in the production of knowledge. *Journal of Urban Mathematics Education, 3*(2), 12–24. Mehan, H. (1978). Structuring school structure. *Harvard Educational Review, 48*(1), 32- 64.

Mehan, H. (1978). Structuring school structure. *Harvard Educational Review, 48* (1), 32-64.

Simon, M., & Tzur, R. (1999). Explicating the teacher's perspective from the researchers' perspectives: Generating accounts of mathematics teachers' practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(3), 252-264.

Turner, J., Midgley, C., Meyer, D.K., Gheen, M., Anderman, E., Kang, Y., & Patrick, H. (2002). The classroom environment and students' reports of avoidance strategies in mathematics: a multimethod study. *Journal of Educational Psychology, 94*(1), 88–106.

Valoyes, L. (2014). Colombian teachers' expectations of black and poor students' ability to learn algebra (Tesis doctoral no publicada), University of Missouri, Missouri, The United States.

FIGURACIONES NO CARTESIANAS EN EL PROCESO DE AJUSTE DE UN MODELO LINEAL A UNO CUADRÁTICO

Ivan Perez[1], Eduardo Carrasco[2]
Universidad de las Américas[1], Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación[2]

Resumen: Esta investigación da cuenta de características de usos estudiantiles de figuraciones previas a la construcción de modelos lineales y cuadráticos ante fenómenos de variación. En particular aborda el estudio de procesos del uso de modelos gráficos y algebraicos, colocando en escena una situación de modelación del movimiento estudiando fenómenos de cambio a través de distintos registros. Se explicitan resultados obtenidos en términos de análisis que van desde la noción de Modelación-Graficación, recurriendo a nociones provenientes de teoría de imagen y análisis semánticos que permitieron caracterizarla.

Modelación, figuración, gráfica

ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

La manera de dar cuenta del uso e interpretación de las gráficas que hacen los estudiantes, supone naturalmente, la adopción de una postura epistemológica que permite la interpretación que se hace del trabajo del alumno. En la actualidad, la socio epistemología contempla el binomio modelación-graficación (Suarez & Cordero, 2008) y representa un eje para desarrollar acciones en el sistema didáctico a través del diseño de situaciones de modelación del movimiento, ofreciendo una posibilidad de acceder a una situación de aprendizaje, que permite estudiar un fenómeno de cambio a través de las gráficas. Por su parte investigaciones recientes han ido relevando el rol que tienen figuraciones no cartesianas en la actividad matemática estudiantil de modelación gráfica (Carrasco, Díaz, Buendía, 2014, Perez y Díaz, 2016, Miranda, Radford, y Guzmán, 2013). En base a lo propuesto en el estándar número tres del eje sistemas numéricos y álgebra del documento "matemáticas para la formación inicial de profesores de enseñanza media" (Felmer, Varas, & Martínez, 2010), el futuro profesor o profesora debiera estar capacitado para promover el aprendizaje de los estudiantes en la comprensión del concepto de función, propiedades de ellas y de los principales ejemplos de funciones a nivel de enseñanza media. En este marco, el objetivo de la investigación es avanzar en el uso estudiantil de figuraciones previas a la gráfica cartesiana construcción y su rol en la transición desde un primer modelo gráfico lineal a un modelo gráfico cuadrático. La pregunta que guía el estudio es la siguiente: ¿cuál es el rol que cumplen las figuraciones realizadas por estudiantes en la transición de un modelo lineal a uno cuadrático?

Antecedentes teóricos. Suárez (2008) establece la noción de Modelación-Graficación (M-G) como una categoría del cálculo que se propone estudiar el uso de las gráficas cartesianas en la actividad matemática a partir del debate entre los elementos de funcionamiento y de forma del uso de las gráficas en la figuración de las cualidades. Más precisamente, los elementos de funcionamiento son las circunstancias que hicieron posible la modelación de fenómenos de variación a través de figuras geométricas en tanto que los elementos de forma son las clases de tareas. Por su parte En Carrasco, Diaz y Buendía (2014) se aborda la indagación de

prácticas de figuración de lo que varía; esto es, prácticas de construcción e interpretación de una figura de entidades -ostensibles y no ostensibles– que se distinguen en un fenómeno de variación, tales como las magnitudes de tiempo y de distancia o de tiempo y de velocidad. En Perez (2015) se trabaja en la construcción de modelos gráfico y algebraico de un fenómeno de movimiento, logrando identificar que las figuraciones previas a la gráfica cartesiana pueden presentarse con mayor o menor frecuencia según la necesidad de cada individuo, por lo que si bien cada figuración ha de tener sus propias características se hace necesario englobarlas a todas en un mismo análisis como una escala previa realizada por los estudiantes en la construcción de un modelo gráfico. En Díaz y Pérez (2016) se muestra como las figuraciones de los estudiantes permiten caracterizar el conocimiento que ponen en acción los estudiantes al realizar gráficas y/o interpretarlas. Esto posibilita avanzar en innovaciones que mejoren la enseñanza de las matemáticas. Por ello, se propone establecer a las figuraciones previas a la gráfica cartesiana evidenciadas en Díaz y Perez (2016), como elementos que, articuladas con el fenómeno, permiten construir significados variacional del fenómeno y permiten establecer las características de este. Al decir, de Arrieta y Diaz (2015) las figuraciones, en cuanto son articuladas con el fenómeno, se constituyen en una modelación del mismo. Toda vez que la figura, como modelo, es articulada para entender o intervenir en el fenómeno. En síntesis, el reporte considera la caracterización del funcionamiento y forma, de las figuras precartesiana, en cuanto modelos gráficos de un fenómeno de variación.

Antecedentes metodológicos. Se aplica la situación “epifanía” (Suarez & Cordero, 2008), que solicita a los estudiantes construir la gráfica del movimiento de una persona. La implementación exploratoria, en el marco de un estudio de caso, aborda un caso de análisis, compuesto por cuatro estudiantes de la Carrera Pedagogía en Matemática y Estadística de la Universidad de las Américas de la sede Providencia, que cursan la asignatura de “Algoritmos y Programación”. Para el análisis de la información de las figuraciones previas a los distintos modelos desde la mirada del funcionamiento y forma propuesto por Suárez (2008), identificando las circunstancias que hacen posible la modelación de fenómenos de variación a través de figuras geométricas y las distintas clases de tareas. Se da cuenta del proceso de articulación de las figuras no cartesiana en el proceso de construcción de los distintos modelos. Se muestran resultados del proceso de modelación-graficación vivido por los estudiantes ante una situación de variación, se articulan las nociones de funcionamiento y forma con el estudio de las prácticas de figuración y su rol en la transición de un modelo lineal a uno cuadrático.

Implementación y Análisis La estudiante construye una representación icónica del patio (ver Figura 1). Le representa con un círculo conformando el escenario donde se desarrolla fenómeno de movimiento. Con flechas indica el sentido y dirección del movimiento, mientras que es dibujado en el diámetro del círculo. (1) Primer análisis: Diversas textualidades describen la ubicación de los distintos elementos que completan el escenario (Sala de música y biblioteca) e indican las distancias y los tiempos correspondientes a cada recorrido. Un punto indica expresamente el punto de encuentro; (2) Segundo Análisis. La figuración se constituye en la medida que el movimiento queda metaforizado en el conjunto, flecha, diámetro del círculo. Ambos elementos en conjunto establecen la dirección u

longitud del movimiento, el cual se estructura desde tres puntos claves, partida, llegada y encuentro. Estos puntos establecen los tres movimientos descritos en el enunciado: Partida a la biblioteca, encuentro con amado, llegada biblioteca, retorno. El tiempo de espera, no queda figurado, tomando el texto el relevo y con números y palabras establece la velocidad supuesta por la estudiante. El recorrido no plantea la velocidad, solo distancias y tiempo. El gráfico cartesiano se realiza sobre la distancia recorrida (eje y) contra el tiempo (eje x),en base al análisis del fenómeno y de la figuración realiza gráfica cartesiana, identifican puntos de inflexión que se corresponden con los presentados en la figuración previa, trazan segmentos rectos manifestando una velocidad constante.

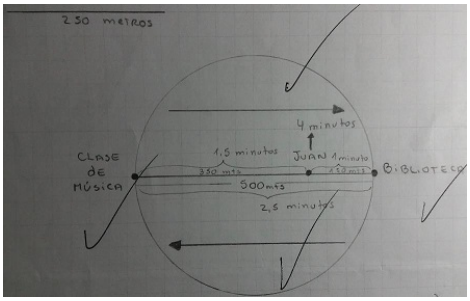


Figura 1- Figuración no cartesiana 1

Las únicas textualidades presentes son aquellas que nombran los ambos ejes, presentando graduación ambos (ver Figura.2). Plantea modelo algebraico en base a funciones por ramas (segmentadas) que representan los distintos momentos que se desarrolla el fenómeno, según la interpretación de la situación. Los tramos o segmentos coinciden con los puntos que articulan las figuraciones anteriores y con los distintos momentos expresados en la figuración no cartesiana (Ver Figura. 3).

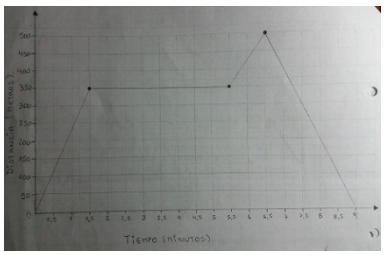


Figura 2 - Modelo Grafico Lineal

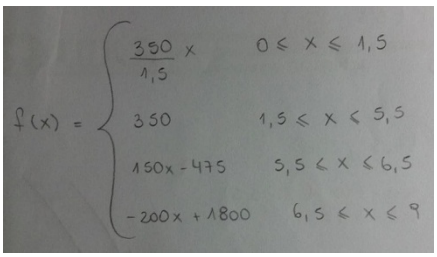


Figura 3- Modelo Algebraico Lineal

Una nueva figuración representa de forma pictórica elementos que en la primera figuración no cartesiana estaban representados solo por textualidades (ver *figura* 4), se indica el recorrido del trayecto, incorpora elementos del comic que reciben un carácter secuencial indicado por las flechas que asignan movimiento y temporalidad a los eventos. Se evidencia diferencias en la extensión de las fechas que manifiestan movimiento, en el recorrido de ida la extensión de flechas es menor a las utilizadas en el recorrido de vuelta, lo que genera que en el recorrido de ida se presenten nueve escenas y en el recorrido de vuelta solo cinco escenas.

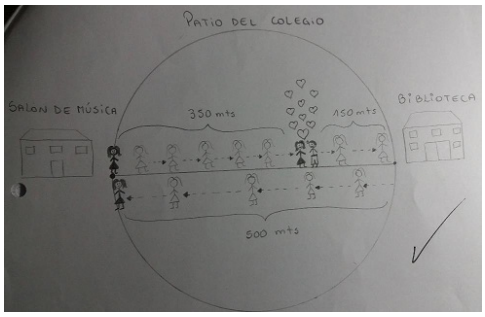


Figura 4- Segunda Figuración no cartesiana

Emerge un nuevo gráfico cartesiano, que al igual que el Gráfico cartesiano lineal inicial se realiza sobre la distancia recorrida (eje y) contra el tiempo (eje x). Los tres momentos, siguen siendo articuladores de la gráfica. Pero se diferencia principalmente en los trazos curvos por los que se compone la gráfica (Figura 5), manifestando una velocidad no constante en todo el recorrido. Esto evidencia un ajuste a la interpretación inicial del fenómeno. Dado el ajuste del modelo gráfico se genera un nuevo modelo algebraico (Figura 6). De igual forma, este se construye con base a funciones por ramas (segmentadas) que representan los distintos momentos que se desarrolla el fenómeno según la interpretación de la situación. Los segmentos de análisis son los mismos utilizados en el modelo lineal, pero en este caso salvo el tramo donde no se genera movimiento, las ramas son expresadas por funciones cuadráticas.

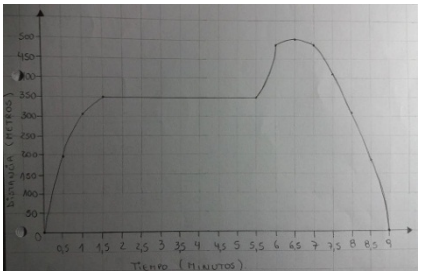


Figura 5- Modelo Grafico Cuadrático

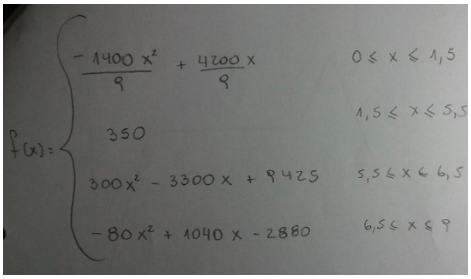


Figura 6- Modelo Algebraico Cuadrático

A modo de conclusión proponemos establecer las prácticas de figuraciones previas a la gráfica cartesiana como elementos que dan significado al fenómeno y permiten establecer las características de este que necesitan los estudiantes para la construcción y ajuste de los distintos modelos, identificando una necesidad particular de cada individuo bajo una instucionalidad escolar.

Referencias

Arrieta Vera, J., & Díaz Moreno, L. (2015). *Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología.* Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18(1), 19–48.

Carrasco, E., Diaz, L., & Buendia, G. (2014). *Figuración de lo que varía*. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 32(3), 365–384.

Díaz Quezada, V., & Pérez Vera, I. (2016). *Uso de gráficas en una situación de modelación del movimiento en matemática en la enseñanza secundaria en Chile*. PARADIGMA, 37(1), 161–180.

Felmer, Varas, & Martínez. (2010). *Estándares de matemáticas para la formación inicial de profesores de enseñanza media (Informe Final)*. Universidad de Chile.

Perez Vera, I. (2015). *Práctica de figuración en la construcción de modelos gráfico y algebraico: un caso de estudio con estudiantes de pedagogía en matemática*. En Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática: XIX JNEM 2015 (pp. 207–214). Villarrica, Chile.

Suárez, L. (2008). *Modelación–Graficación, Una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*.

Suarez, L., & Cordero, F. (2008). Modelación-Graficación. Una categoría en Cálculo para resignificar la variación en una situación de modelación del movimiento. ICME 11.

DISEÑO DE UNA PROPUESTA DE SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LINEAL EN BASE A LA MODELACIÓN

Denisse Guzmán, Luis Vega Bahamondes, Iván Pérez Vera
Universidad de las Américas

Resumen: En la actualidad, dentro de las habilidades matemáticas, se le da mayor énfasis a la modelación como una herramienta del proceso enseñanza aprendizaje. Enmarcados en la ingeniería didáctica, esta investigación propone el diseño de una secuencia didáctica llevada al aula, con alumnos de primero medio, donde se vivió un proceso de modelación de una situación cotidiana utilizando la función lineal. Para luego poder analizar resultados y descubrir cómo la modelación afecta el proceso de aprendizaje, estableciendo si permite una mayor aprehensión del objeto matemático y así mismo el uso de diversas representaciones.

Modelación, modelo, función lineal, ingeniería didáctica

ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

En las aulas es común tener conflictos a la hora de poder enseñar la función lineal, por su grado de abstracción y por cómo los docentes logran abordar este contenido, ya sea de manera eficaz o no para el proceso de enseñanza-aprendizaje. La utilización de variados registros de representación y de situaciones cotidianas a la hora de enseñar un contenido es de vital importancia. El conocer las diversas representaciones semiótica, su forma gráfica, su forma algebraica, verbal, natural, entre otros, le permite, con todas las propiedades diferentes que nos entrega cada una de ellas, a los alumnos comprender este objeto matemático de forma más eficaz. Además sabemos que como docentes la enseñanza en las aulas, ya no es solo del contenido, sino que también debemos incluir el desarrollo de las habilidades y las actitudes. Es por eso que el fin de esta investigación es ver como con la utilización de la modelación como herramienta del proceso de enseñanza-aprendizaje y el uso de diversos tipos de representación, logra un proceso más eficaz cuando se enseña la función lineal, como modelo de un fenómeno cotidiano, en diversos contextos.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS

Esta investigación está orientada y enmarcada en la siguiente pregunta ¿Es posible mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la función lineal utilizando la modelación como metodología de enseñanza, y sus distintas representaciones para su aprehensión? Desprendiendo como objetivos específicos de esta investigación, donde se destaca el realizar un análisis, histórico, curricular y didáctico de la función lineal y la modelación, con el fin de diseñar una secuencia didáctica y poder aplicarla en el sistema escolar, pudiendo analizar posteriormente los resultados y beneficios que logro el utilizar la modelación a la hora de enseñar función lineal.

ANTECEDENTES TEÓRICOS

Esta investigación se orienta desde los estudios de Bassanazi y Biembengut (1997), quienes ven a la modelación como una herramienta que permite mejorar el proceso de enseñanza-

aprendizaje, con el fin de poder comprender con mayor profundidad un fenómeno cotidiano. Este proceso de modelación, hace al estudiante creador de su conocimiento con ciertos pasos, entre los cuales se destaca elegir el tema, investigar sobre este, elaborar problemas de interés común, hacerse preguntas, sistematizar y matematizar la situación, interpretar y validar los modelos, con el fin de dar respuesta a las problemáticas planteadas. Otra arista de esta investigación son los sistemas de representación semiótica de Reymond Duval (1998).Duval hablaba de la aprehensión del objeto por medio del uso de distintas representaciones, en distintos registros. Desde aquí Duval reconoce tres actividades, la formación de una representación conocida y manejable, luego el tratamiento que es la habilidad de transformar el objeto dentro del mismo registro, y luego la conversión que es transformar el objeto con el fin de hacer una representación en otro registró.

ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO

Dentro de lo que es la función lineal y su desarrollo dentro del tiempo, inició con la representación gráfica que hizo Nicolás Oresme en el siglo XIV, quien utilizó la función lineal, en su forma gráfica, con el fin de analizar la velocidad. Luego con Descartes en el 1637 y el comienzo de la geometría analítica, estableció que toda gráfica estaba sujeta a una fórmula que la represente y viceversa. Además de esto Descartes fue el primero en representar una variable independiente como “x” y una dependiente como “y”. Pero no fue hasta el siglo XVII, que Fermat estableciera, lo que hoy llamamos como la forma principal, de la función lineal, y = mx +b, utilizando longitudes como demostración desde un triángulo. Por otro lado tenemos la epistemología desde la modelación, ya que a pesar de que el tema de modelación en el sistema escolar, es relativamente nuevo, esta habilidad se ha encontrado dentro de la matemática desde sus inicios. Desde que Thales (IV a.C.) intento medir la pirámide de Keops con trazos proporcionales, se busca dar solución por medio de la matemática a sucesos cotidianos, poder darle explicación. Con el paso del tiempo solo han variado sus distintos significados pero su fin siempre es el mismo y el lograr entregar estructuras matemáticas que permitan comprender fenómenos, es decir matematizar la cotidianidad.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Podemos separar el análisis didáctico en tres aristas, el análisis curricular, texto escolar y formal. Desde el punto de vista curricular podemos localizar la función lineal en dos cursos, según la actualización del año 2016, este contenido se encuentra el 8°, donde el aprendizaje esperado habla de poder comprender la función lineal, por medio de la utilización de tablas, reglas entre X e Y y la modelación de situaciones de la vida cotidiana. Y dentro de los programas antiguos, podemos encontrar la función lineal en I° medio, donde los aprendizajes esperados hablan de poder diferenciar la función lineal y afín, organizar pares ordenados, reconocer esta función como un caso de proporción directa y general gráficos. Desde los textos escolares, tomando el texto escolar de Editorial SM, Matemática I medio 2016, tenemos que hay una estructuración por pasos donde los estudiantes por medio de un experimento, Ley de hooke, lograr modelar con la función lineal. Identificando la relación de dependencia, modelando la situación, construyendo tablas, estableciendo pares ordenados y graficándolos, para finalmente institucionalizar el contenido.

Finalmente dentro de lo que es la formalidad, la función lineal como objeto matemático, tiene características muy particulares. La definición en la cual se guía este trabajo es la del texto de Serge Lang, Cálculo 1:

> "Uno de los tipos más fundamentales de función es aquel cuya gráfica representa una lineal recta. Ya hemos visto que la gráfica de la función $f(x) = x$ $f(x) = x$ es una línea recta. Si notamos $f(x) = 2x$ $f(x) = 2x$, entonces la recta sube mucho más rápidamente y aún más para, por ejemplo $f(x) = 3x$. La gráfica de la función $f(x) = 10.000x$ $f(x) = 10.000x$nos parecería casi vertical. En general, si aa es un número positivo, entonces la gráfica de la función $f(x) = ax$ $f(x) = ax$ representará una línea recta."(Cálculo 1, Serge Lang, 1927).

Aquí se define función lineal, solo a las rectas que tienen como coeficiente de posición el 0.

Propuesta de secuencia

La secuencia propuesta para poder enseñar la función lineal en un primero medio consta de dos partes. La primera donde los alumnos podar crear un modelo desde un fenómeno dado, pudiendo llevar este modelo a una forma algebraica, gráfica, pictórica y tabular, sin perder la vista de la situación. Es por esto que la secuencia primero que todo se enmarca dentro de un fenómeno:

"María es una dueña de casa de la comuna de Puente Alto. María tiene un nieto llamado Pedro, quien durante toda la semana ha estado pidiendo que le haga una tartaleta de manzana, por lo cual, María tiene pensado darle en el gusto a su nieto.

A pocas cuadras de su casa, los días viernes se ubica una feria, donde ella compra las frutas y verduras para la semana. Por lo cual llegado ese día, María se dirige a la feria donde un puesto se encuentra con manzanas a muy bajo precio, el cual se muestra en el siguiente cartel:"

Desde este fenómeno se comienza la actividad, partiendo por reconocer las variables y establecer una relación de dependencia, con el fin de que puedan asociar la función lineal con la proporción directa y así poder crear aprendizajes significativos. Luego de esto la situación nos da pie para poder hacer cálculos, y comenzar a crear el modelo. Primero se les pide poder realizar una representación pictórica de la situación.

4) ¿Y si decide comprar 1, 2, 4, 5 o 6 kilos más de manzana? Realice una representación pictórica de la situación, sabiendo que:

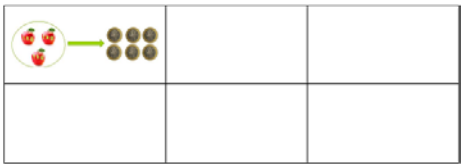


Figura 1: Actividad 4 secuencia didáctica

Para luego con esta misma representación poder realizar una tabla de pares ordenados, para poder llevarlo a una gráfica y realizar conversiones de registros.

Luego se les hará tres preguntas, 1: "¿Cómo varia el costo total de cada compra según la cantidad de kilos de manzana? ¿Qué se puede observar respecto a la variación en el total de las distintas compras? Justifica tu respuesta.". 2: "María se pregunta si existirá una forma de calcular el costo total de cualquier cantidad de kilos de manzanas. Suponiendo que los kilos

de manzana son “m” kilos; ¿cómo calcularíamos su costo? Justifica tu respuesta”. 3: “Y si asociamos la letra “x” al número de kilos de manzana que se compran e “y” al costo de la compra ¿Cómo quedaría esta fórmula?”, con el fin de que logren poder encontrar la función lineal de forma algebraica y luego poder utilizarla para resolver más preguntas.

Finalmente el segundo ítem de la secuencia invita al alumno a realizar el mismo una situación común que se pueda ajustar a una tabla de pares ordenados. Con el fin de lograr establecer preguntas, un gráfico y una forma algebraica para el modelo. Con esto los alumnos completan el proceso de modelación estableciendo situaciones significativas para ellos.

Validación de secuencia

La validación de la secuencia se realizó con docentes del sistema escolar y docentes de educación superior. A nivel escolar la validación fue realizada por Rubén Avendaño y José Sandoval, ambos docentes de segundo ciclo. Y a nivel de educación superior la validación fue realizada por los académicos Luis Zuñiga y Claudia Cuesta, ambos del Instituto de Matemática de la Universidad. Finalmente una última validación fue realizada por la profesora Sara Tarisfeño, encargada de las líneas de didáctica de la escuela de pedagogía en matemática.

ANALISIS Y REFLEXIONES

El objetivo mayor de esta investigación era poder avalar que la metodología de la modelación matemática unida con el registro de representaciones semióticas podría mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje con el contenido de función lineal. Desde el punto de vista de la aplicación que se hizo es posible mejorar el proceso ya que los resultados fueron positivos, pero es claro que con una clase el contenido no está bien adquirido por los alumnos, por lo cual se debe trabajar aún más en las clases futuras, pero con la misma metodología, ya que con esto los estudiantes descubren el conocimiento en vez de solo recibirlo, y con esto lo aprenden de una mejor manera y se vuelve algo propio, incentivando una mayor motivación.

Referencias

Ministerio de educación. (2013). Bases curriculares de 7° a 2° medio.

Ministerio de educación. (2016, Mayo). Programas de Matemática de 7°. Texto escolar 2016, Matemática 1° Medio, Editorial SM, página 136. Chile.

Jaime Arrieta, Leonora Díaz. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socio epistemología. *RELIME*, 18(1), 19-48.

Rodney C. Bassanezi y M. Salett Biembengut (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. N° 32, *Revista didácticas de las matemáticas*.

Edwin Oswaldo Roldán Cruz. (2013). El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8vo y 9no grado de educación básica. *Tesis de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de ciencias, Bogotá, Colombia.

Oviedo, Lina Mónica, Kanashiro, Ana María. (2012). Los registros de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 29-36.

Lozano, M., Haye, E., Montenegro F., Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas.

Serge Lang. Texto de Cálculo 1.

EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA EN ESTADÍSTICA PARA CARRERAS DEL ÁREA SOCIALES

Silvana María Santellán, Mariela Cravero, Liliana Mabel Tauber
Universidad Nacional del Litoral, Argentina

Resumen: En el presente trabajo describimos los lineamientos generales de una propuesta de evaluación continua de Estadística para alumnos universitarios del área de las Ciencias Sociales. Presentamos en el mismo, el marco de referencia en la que se desarrolla la experiencia, las características particulares de los alumnos y los propósitos perseguidos por las docentes de la cátedra teniendo como premisa lograr formar estudiantes estadísticamente cultos.

Cultura estadística, razonamiento estadístico, evaluación, estudiantes universitarios

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la Estadística en carreras no matemáticas genera grandes desafíos para los docentes a la hora de tomar decisiones respecto de la propuesta de enseñanza que llevan adelante. Diversos autores plantean esta problemática y proponen algunas ideas para introducir contenidos de Estadística que sean significativos para los alumnos de estas carreras (Behar y Pere Grima, 2014).

Justamente, esta ha sido una de las problemáticas con la que nos enfrentamos, quienes integramos el equipo de cátedra del espacio “Métodos estadísticos para Ciencias Sociales”, en la Facultad de Humanidades y Ciencias en la Universidad Nacional del Litoral. Esta cátedra es compartida por alumnos de las Licenciaturas en Sociología, Ciencia Política, Geografía y en Historia. Desde que iniciamos el dictado de este espacio, hemos podido observar que los alumnos comienzan el cursado indicando que aprender los contenidos estadísticos es tarea difícil y, en definitiva, no logran realizar o terminar exitosamente el recorrido. A esto, se agrega que, aunque estos alumnos evidencian mucha autonomía en la lectura de textos específicos de las Ciencias Sociales, no la tienen cuando deben leer textos de carácter más técnico como puede ser un texto de Estadística. Por otra parte, no acostumbran a cursar regularmente, lo cual es un problema agregado para la planificación de las clases ya que una gran proporción abandona rápidamente sin darse la oportunidad (a ellos y a los docentes) de trazar una trayectoria completa y continua por la cátedra. Todo ello nos ha llevado a proponer instancias de trabajo colaborativo y en equipo para el abordaje de la resolución de problemas reales. Considerando este marco de referencia, presentamos la propuesta siguiente.

FUNDAMENTOS DE LA PROPUESTA

El escenario descrito nos llevó a pensar en la necesidad de diseñar una propuesta que priorice la participación activa de nuestros estudiantes y en la que el eje mentor de ésta sea la continuidad de los contenidos desarrollados, enmarcada y sostenida siempre en situaciones problemáticas acordes al área de su especialización, pretendiendo que estos contextos logren captar el interés del alumnado. Así, surge la propuesta de una evaluación continua mediante cuatro prácticos que siguen un “hilo conductor” basado en un texto de

Escudero (2014), a partir del cual se propone la discusión de los datos, variables e indicadores que se deben tener en cuenta para la construcción del índice de pobreza considerado por el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos.

El principal objetivo de la propuesta fue, propiciar el desarrollo del *razonamiento estadístico* de los estudiantes; adhiriendo a lo que Gal (2004) considera como: "la forma de razonar y de dar sentido a la información estadística". Por lo tanto, proponemos una enseñanza de la Estadística que se centra en realizar interpretaciones de datos reales, buscando permanentemente lograr la transnumeración de diferentes representaciones. Conscientes de la importancia de que nuestros estudiantes razonen estadísticamente, no perdemos de vista que las actividades deben promover el razonamiento crítico basado en: la calidad de los datos, la variabilidad presente en los mismos, el significado de las distribuciones y de sus resúmenes y el alcance de las inferencias que podrían realizarse. Así, considerando la realidad del contexto en el que desarrollamos nuestras prácticas, creemos que estamos en camino de lograr lo que Behar y Pere (2014) plantean como *aprendizaje a largo plazo*, fomentando la formación de ciudadanos y profesionales cultos estadísticamente (Batanero, 2013).

Los autores citados sostienen que los cursos de Estadística que se ocupan en la aplicación continua de reglas, con problemas simples y artificiales, no aportan elementos al sistema explicativo del estudiante que luego, en su vida profesional, deberá enfrentarse a un problema real. Es así que consideran indispensable para lograr un aprendizaje a largo plazo lo siguiente:

Considerar los conocimientos previos que tienen nuestros estudiantes al comenzar el cursado. Esto implica que debemos tener en cuenta que nuestros alumnos se han enfrentado muchas veces en su vida cotidiana a la variabilidad e incertidumbre, lo cual puede servir de base para construir nuevos conocimientos.

Cuestionar los dichos populares sobre el tamaño indicado de una muestra para representar la población. Esto implica que mediante ciertas analogías simples se podría enseñar que el tamaño de la muestra difiere según el estudio requerido.

Apartar la planificación de la clase del desarrollo clásico de los libros de estadística en los cuales se incita a ir explicando los indicadores uno a uno. Esto implica, abordar desde el inicio del curso, situaciones problemáticas donde ellos deben exponer sus ideas y luego, a medida que se incorporan algunos conocimientos vuelvan a las situaciones para poder resolverlas. Al comienzo, los estudiantes responderán con herramientas y justificaciones muy artesanales, pero estas irán mejorándose con el desarrollo del curso.

Desarrollar, de manera informal, el concepto de probabilidad mediante la idea de "propensión" basada en la frecuencia relativa; al analizar tablas de contingencia, desarrollar las ideas de probabilidad condicional conectando muestra y población.

Características que hemos tenido en consideración para elaborar la propuesta que describimos a continuación.

LA PROPUESTA DE EVALUACIÓN

Esta propuesta consta de cuatro etapas interconectadas por una misma problemática y persigue los siguientes objetivos:

Objetivo General: generar una propuesta inclusiva que permita fortalecer nuestra práctica de enseñanza, vinculando de manera significativa el aprendizaje del alumno con su futura práctica profesional.

Objetivos Específicos: Analizar, de manera comprensiva, la información presentada en bases de datos reales. Favorecer la comprensión conceptual y en contexto de los contenidos seleccionados. Promover el aprendizaje activo y colaborativo en los alumnos. Incorporar el uso de las TIC. Redactar informes como síntesis del proceso de aprendizaje.

Buscamos lograr estos objetivos a través de una propuesta de trabajo grupal, promoviendo que los alumnos piensen, reflexionen y resuelvan las siguientes temáticas tratadas en los prácticos evaluativos.

El primer práctico evaluativo se centró en la lectura del capítulo seis del libro "Qué es (y qué no es la Estadística). Usos y abusos de una disciplina clave en la vida de los países y las personas", de Walter Sosa Escudero. En este capítulo, el autor analiza de manera puntual la complejidad de la construcción de un índice de pobreza fiable, resaltando la necesidad de este índice para la toma de decisiones, sobre todo en el campo de lo socio-económico de un país. Las actividades que planteamos en este trabajo evaluativo fueron planeadas para que los estudiantes se enfrenten, y luego razonen críticamente sobre las dimensiones que deben considerarse para comunicar la información que aporta este tipo de índices. Es así que, en este contexto específico, descrito con un lenguaje sencillo y poco formal por el autor, los alumnos deben reconocer la unidad elemental, el dato y las variables estadísticas que deben identificarse y medirse para poder obtener el índice referido. De esta manera, nos propusimos que, durante el desarrollo de las actividades, los estudiantes logren reconocer en un contexto particular, los conceptos enseñados en la asignatura hasta ese momento.

En el segundo trabajo evaluativo, sumamos información importante sobre las múltiples dimensiones de cómo medir la pobreza. Aquí, presentamos a los estudiantes el software Gapminder creado por Hans Rosling, disponible en el sitio www.gapminder.org. Los objetivos en estas actividades se centran en la necesidad de que nuestros estudiantes conozcan cómo las nuevas tecnologías colaboran con el análisis estadístico, que confronten información sobre cómo considerar los niveles de ciertos índices y que defiendan sus ideas a través de la elaboración de un informe escrito. Para este informe, les hemos solicitado que retomen los conceptos asociados a las variables estadísticas, de tal manera que los propios estudiantes puedan re-significar los conceptos y reflexionar sobre las dificultades y errores que habían presentado en el primer trabajo práctico.

El tercer trabajo práctico se inscribe dentro del análisis de bases de datos reales, surgidos de la Encuesta Permanente de Hogares de la provincia de Santa Fe (Argentina) del año 2013. Como actividades iniciales se les propone el reconocimiento de algunas de las variables en estudio, la unidad experimental y las formas más adecuadas de representar esta información, para culminar con un informe escrito con la descripción del lote de datos analizado. Esta actividad permite entrelazar las ideas trabajadas en los dos prácticos anteriores con datos

reales del entorno en el que viven nuestros alumnos. También aquí se les presenta una actividad basada en el análisis de datos reales del Índice de Desarrollo Humano, publicado por Naciones Unidas en: http://hdr.undp.org/es/countries/profiles/ARG sobre la que deben tomar decisiones respecto del resumen más adecuado para representar la información contenida en la página web.

En el último trabajo evaluativo, se les presenta la representación gráfica de la variable "Ingresos Familiares" de la Encuesta Permanente de Hogares (que se utilizó en el práctico 3) y se les pide a los alumnos que calculen las medidas que permiten describir la distribución de dicha variable y que relacionen éstas con lo analizado en el trabajo 1, a partir del texto de Escudero respecto de la línea de pobreza.

De esta manera, lejos de proponer exhaustivos cálculos e informes estadísticos de datos descontextualizados, perseguimos que, mediante lecturas relacionadas a sus perfiles profesionales y enfrentándose a datos reales zonales los alumnos puedan dar significado a conceptos estadísticos básicos y puedan enfrentar la necesidad de escribir informes claros y objetivos para informar de manera adecuada sobre un contexto.

CONCLUSIÓN

Consideramos que hemos realizado un avance importante en nuestra cátedra, pues luego de aplicar estas evaluaciones hemos podido detectar que los alumnos han logrado aprendizajes más significativos de los conceptos estadísticos y esperamos haber logrado instalar aprendizajes a largo plazo. Además, como Batanero (2013) plantea, hemos intentado educar para promover futuros profesionales estadísticamente cultos, más allá de promover una actitud crítica en nuestros estudiantes frente a la información estadística. Asimismo, nuestra propuesta persigue lograr el razonamiento a partir de datos empíricos, considerando el contexto donde se obtuvieron y el alcance y las limitaciones de los mismos. Además, hemos enfocado las actividades de aprendizaje sobre los gráficos estadísticos de manera que permitan a los estudiantes decidir sobre las medidas descriptivas más apropiadas a cada situación. Al conectar el trabajo de las bases de datos con las consideraciones para la elaboración de los índices hemos, de alguna manera, insistido en que el conjunto de datos se debe analizar como tal, en conjunto y no pensar cada dato de manera aislada, posibilitando predecir comportamientos en función de esto.

Referencias

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componente y desarrollo. En: Actas de I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria.

Behar, R., Pere, G. (2014). Estadística: aprendizaje a largo plazo. Algunas reflexiones. En: Actas de II Jornadas en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.

Escudero, W. (2014). Qué es (y qué no es) la Estadística. Usos y abusos de una disciplina clave en la vida de los países y las personas. 1ª edición. Colección Ciencia que ladra. Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores Argentina.

Gal, I. (2004). Statistical Literacy: meanings, components, responsibilities. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking, pp. 47 – 78.

SIGNIFICADOS ESCOLARES DEL CONCEPTO DE PORCENTAJE

Mery Salinas Hernández, Luis Rico Romero, Elena Castro Rodríguez
Universidad de Granada

Resumen: En este estudio se realiza un análisis del significado que escolares chilenos de educación básica, le atribuyen al concepto de porcentaje. El análisis se realiza en base a tres componentes de significado de un concepto matemático escolar que son: los sentidos y modos de uso, los sistemas de representación y la estructura conceptual. En el análisis de las respuestas recogidas mediante un cuestionario semántico, especialmente diseñado para la noción de porcentaje, identificamos que las situaciones laborales son predominantes. Destaca el "descuento" como un término asociado con frecuencia al porcentaje, la notación tradicional del numeral seguido del símbolo como sistema de representación principal y como estructura conceptual la relación parte-todo junto a relaciones de cambio en la estructura aditiva, relaciones proporcionales y la consideración del porcentaje como un operador que se presentan con menor frecuencia.

Significado, porcentaje, representación, sentido, estructura conceptual

INTRODUCCIÓN

Trabajos como los de Parker y Leinhardt (1995), Zurbano (2002) y Mendoza (2007), afirman que, a pesar de que la noción de porcentaje es de conocimiento público y de cultura general, en diferentes ámbitos de la cotidianidad hay dificultades que subyacen a su significado, es decir, a su comprensión, interpretación y aplicación. Este hecho nos motivó a indagar y describir los significados del concepto "porcentaje" que manifiestan los estudiantes de educación básica tras un primer acercamiento escolar a esta noción. Este objetivo lo abordamos en términos de tres componentes de significado: la estructura conceptual en que se ubica, los sistemas de representación que lo expresan y los sentidos y modos de uso con que se emplean.

MARCO TEÓRICO

Basados en las ideas de Frege (1998), entendemos que el significado de un concepto matemático escolar se establece por tres componentes: una estructura formal (conceptos, propiedades y relaciones); unos símbolos y notaciones que lo representan y expresan junto con unas reglas de procesamiento y conversión; y por último, unas situaciones, contextos y modos de uso que le dan sentido y emplean. Dichas componentes dan respuesta a tres cuestiones fundamentales: cómo se define, cómo se expresa y para qué se usa (Rico, Flores y Ruiz-Hidalgo, 2015). Establecer el significado de un concepto matemático escolar, requiere contemplarlo como aquella totalidad de nociones básicas relacionadas que lo constituyen, junto con los símbolos, procedimientos y propiedades que lo hacen operativo, lo cual también depende de sus sentidos y modos de uso (Fernández-Plaza, 2016).

Se realiza un análisis conceptual del concepto de porcentaje, la primera de las etapas del análisis didáctico propuesto por Rico (2016) para establecer su significado, clarificar las categorías de análisis y como referente para interpretar las nociones parciales que se recogen de los estudiantes. Consideramos importante escudriñar las expresiones manifestadas por el

alumnado con el fin de detectar e identificar las concepciones, es decir, aquellas "parcelas" de significado (significados parciales) que emergen de las respuestas (verbales, escritas, gráficas, etc.) de los estudiantes ante las demandas planteadas (Fernández-Plaza, Castro-Rodríguez, Estrella, Martín-Fernández, Rico, Ruiz-Hidalgo y Vílchez-Marín, 2016).

METODOLOGÍA

El estudio llevado a cabo es de tipo cualitativo, con carácter exploratorio, sigue un diseño transversal y tiene un propósito descriptivo.

Participaron 108 estudiantes chilenos que cursan séptimo año básico, fueron seleccionados intencionalmente y por disponibilidad, buscando que cumplan ciertas características tales como: haber estudiado en el curso anterior el concepto de porcentaje por primera vez según las directrices curriculares y no haber estudiado nuevamente el concepto en el transcurso del presente año escolar (2016). Consideramos un importante periodo de latencia para así recoger y analizar el significado como aquello que permanece sobre un concepto, más allá de su definición formal.

Para la recolección de datos se utilizó un cuestionario semántico con 8 enunciados de respuesta abierta, que buscó recoger información factible de interpretar en términos de las componentes del significado de la noción de porcentaje. Las preguntas se diseñaron bajo la terna semántica, buscando una redacción clara, sencilla, libre de distractores y que respondiesen a los objetivos planteados para cada una de ellas. Se sometió a juicio de expertos y una aplicación piloto. Tras la aplicación definitiva del instrumento, identificamos que ocho estudiantes no responden a ninguna pregunta, razón por la que no se consideran parte del estudio, quedando finalmente una muestra de 100 participantes.

ANÁLISIS DE DATOS

Tras la codificación, organización y transcripción de datos, realizamos un análisis inductivo de las respuestas obtenidas a las preguntas 1, 2 y 7 del cuestionario. Buscamos identificar variabilidad e indicios de las tres componentes de la terna semántica. De este análisis surgieron temas e identificamos subcategorías y categorías que permitieron clasificar las respuestas para su interpretación.

La primera pregunta, "Las personas utilizan porcentajes. Piensa y escribe situaciones cotidianas en las que aparecen porcentajes. Nombra todas las que recuerdes.", busca recoger información sobre los sentidos y modos de uso. Identificamos que destacan las situaciones laborales como predominantes, siendo el "descuento" un término asociado con frecuencia al porcentaje. Ejemplos de este tipo de situaciones son: "En los supermercados cuando hay descuentos. En las tiendas de ropa en descuento" (B7a07); "El porcentaje de venta. Porcentaje de descuento" (B7a13) y "En tiendas, almacenes o supermercados (descuento)" (B7b04). En estos ejemplos de respuesta se evidencia claramente situaciones del ámbito laboral, ya que incluyen ideas relativas al comercio y el término "descuento" es el que se presenta con mayor frecuencia.

La segunda pregunta, "Veinticinco por ciento", es una forma de expresar porcentajes. Representa en éste espacio otras formas que conozcas para mostrar ese mismo porcentaje.",

se enfoca a las representaciones. El sistema de representación más empleado del porcentaje es la notación numérico-simbólica convencional de un numeral seguido del símbolo %. Las representaciones gráficas se presentan con menor frecuencia, destacando los diagramas continuos de área, que reflejan una relación parte-todo, que se asocia a las formas gráficas de representar las fracciones. La figura 1 muestra dos ejemplos de los diagramas de área.

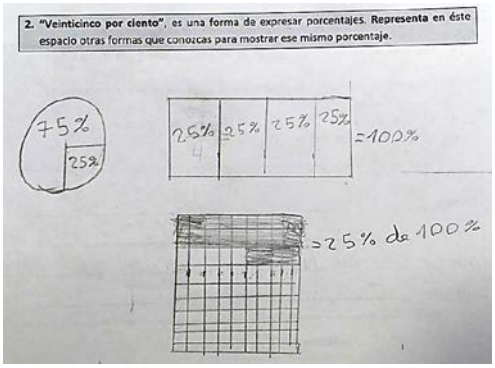


Figura 1. Respuesta del alumno A7a15 a la pregunta 2

Se aprecia que la cuadricula 10x10, muy utilizada en la representación gráfica de los números decimales, gracias a su particular subdivisión en cien partes iguales, permite representar porcentajes reforzando su interpretación como expresión fraccionaria (25/100) y a su vez como expresión decimal (0,25). Este particular modo de representación logra posicionar al porcentaje como una forma de representar fracciones o decimales mediante una notación que no implica ni la raya fraccionaria o la coma decimal respectivamente. Nuevamente destacan las situaciones de descuento en las respuestas obtenidas a esta segunda pregunta, tal como se ejemplifica en la figura 2.

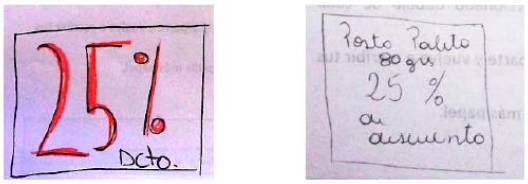


Figura 2. Respuesta de A7a09 y de B7a15 a la pregunta 2

Notamos que cuando los estudiantes muestran un determinado porcentaje, lo asocian al término "descuento", aun cuando no se les solicita indicar una situación de uso, incluso utilizan abreviaturas que no son propias de un lenguaje matemático como "Dcto.".

La séptima pregunta se enfocó a la estructura conceptual: "Explica con tus propias palabras en qué consiste un tanto por ciento". Las respuestas "Un porciento es una parte de un número como el 2,3% de 2" (alumno A7a13) y "El porciento es una parte de algo como 25% de 100" (alumno B7a06) dan cuenta de indicios que aluden a la relación parte-todo en las ideas de los estudiantes. Muestran una concepción del porcentaje diciendo "...es una parte de algo", un "algo" que podría ser un todo, un número o una cantidad, según expresan en sus respuestas.

Resalta la frecuencia obtenida por las relaciones de cambio (estructura aditiva), principalmente las de disminución, asociadas al descuento, término clave que también se manifiesta fuertemente en el análisis de esta pregunta. Ejemplos de ello son las respuestas de

los estudiantes A7a05 “consiste en descontar del total”, A7a14 “que se baja un número o algo rebajado”. También identificamos respuestas que dan cuenta de relaciones proporcionales, relaciones inversas (figura 3) y la consideración del porcentaje como un operador.

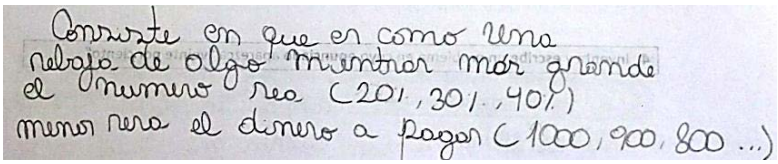


Figura 3. Respuesta de B7b07 a la pregunta 7

La figura 3 ejemplifica una relación proporcional inversa, el estudiante utiliza representaciones que complementan su explicación y dan cuenta de la riqueza de significado asimilado.

CONCLUSIONES

Como se aprecia en las respuestas ejemplificadas, los sistemas de representación, la estructura conceptual y los sentidos y modos de uso están presentes, de manera explícita o implícita, en los significados parciales que internalizan los escolares.

Desde un planteamiento curricular, contribuimos a identificar variables que pueden incidir en el tratamiento dado a la noción de porcentaje en las matemáticas escolares. En cuanto al aprendizaje, este estudio permite detectar los significados parciales internalizados por el alumnado que han manifestado en sus respuestas al cuestionario semántico. Al tomar conciencia de la interpretación incompleta del concepto, queda la responsabilidad de tomar decisiones en la planificación de la enseñanza y en el diseño de tareas que puedan mejorar esa interpretación parcial de la noción en cuestión y por ende, mejorar los aprendizajes. Finalmente, se aporta evidencia empírica de la pertinencia que tienen las componentes de significado como sistema de clasificación, análisis e interpretación de las respuestas proporcionadas por los estudiantes mediante el cuestionario semántico.

Referencias

Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Vílchez-Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. En *Investigación en Educación Matemática XX*. Málaga, España: SEIEM.

Fernández-Plaza, J. A. (2016). Análisis de contenido. En L. Rico y A. Moreno (Coords). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*, (pp. 103–118). Madrid, España: Pirámide.

Frege, G. (1998). *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (Valdés, L. M., Trad.). Madrid, España: Tecnos.

Mendoza, T. (2007). *Estudio didáctico de la noción de porcentaje* (Tesis de maestría no publicada). CINVESTAV-IPN, México.

Parker, M. y Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, 65(4), 421-481.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *UNO*, (70), 48-54.

Rico, L. (2016). Significados de los contenidos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno (Coords). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*, (pp. 153–174). Madrid, España: Pirámide.

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Coords). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*, (pp. 85–100). Madrid, España: Pirámide.

Zurbano, E. (2002). Los porcentajes y su interpretación. En C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 265-276). España: Universidad de Alicante.

IDENTIFICACIÓN DE CUALIDADES DE EXPERTICIA EN UN PROFESOR NOVEL PARTICIPANTE DE UN CURSO DE FORMACIÓN

Elisabeth Ramos-Rodríguez, Carlos Corrial-Ayala
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen: Desde el sustento teórico basado en la noción de reflexión y de profesor experto, nos proponemos identificar cualidades de experticia en una profesora novel de matemática que está realizando su Evaluación Docente y participa en un proceso reflexivo estimulado en un curso de formación en Chile. Se adopta el paradigma cualitativo, para analizar el primer ciclo reflexivo promovido en la docente, ciclo relativo al diseño de un plan de clases. Recogemos datos de las planificaciones de la docente, las discusiones en el curso formativo y las retroalimentaciones escritas para la profesora. En el proceso reflexivo promovido, la profesora manifiesta cualidades de experticia, por ejemplo al generar cambios en sus propuestas de enseñanza, estimulando el desarrollo de estrategias propias, conceptos y representaciones.

Formación de profesores, reflexión, profesor experto, ecuación lineal, resolución de problemas

INTRODUCCION

Una cuestión que sigue vigente es cómo identificar profesores de excelencia (Rojas, Carrillo y Flores, 2012) y cómo desarrollar sus características (López y Basto, 2010). Esto se hace más complejo cuando observamos los resultados de la Evaluación Docente (ED) del año 2014 (MINEDUC, 2014). Éstos muestran que ha aumentado considerablemente, en relación a años anteriores, la población de profesores menores de 30 años que ha rendido la prueba, en el que el 25% de ellos se sitúa en el nivel básico e insatisfactorio. También se observa que la dimensión con más bajo rendimiento en los docentes es la "reflexión a partir de los resultados de la evaluación", provocándonos una llamada de atención sobre el desarrollo de la capacidad reflexiva de los docentes evaluados. Para hacer frente al problema de acompañar al docente en su desarrollo hacia la excelencia, se diseña y ejecuta un curso formativo que pretende apoyar al profesor novel en la realización de la ED de manera de desarrollar en él cualidades de excelencia. De ahí, el objetivo de investigación que se propone es identificar cualidades de experticia en un profesor novel participante de un curso de formación que promueve la reflexión en la realización de su Evaluación Docente; asumiendo que la formación continua realza la reflexión en, para y desde la práctica sobre conocimientos matemáticos y didácticos, desarrollando características de excelencia.

Para ello, nuestro sustento teórico se basa en la noción de reflexión y de profesor de excelencia. La reflexión la observamos desde las ideas de Dewey (1910) y la práctica aportada por Schön (1983), quien se refiere a la reflexión durante y sobre la acción. Además, consideramos el modelo de reflexión ALaCT de Korthagen (2011), proceso cíclico en el que se distinguen cinco fases: experiencia o identificación de una problemática, mirar hacia atrás, determinar puntos importantes, buscar y preparar comportamientos alternativos y reformular la problemática.

La caracterización de profesor de excelencia que emplearemos se basa en estudios de autores como Li y Kaiser (2012), Ponte (2012) y Rojas (2014), representado como aquel que: i) Comprende los contenidos disciplinarios, del aprendizaje de estudiantes y de estrategias de enseñanza; ii) Selecciona y, si es necesario, ajusta las tareas adecuadas -tomando en consideración aquellas de mayor dificultad-, especialmente las tareas exploratorias, que involucra a los estudiantes activamente en el trabajo matemático, estimulando el desarrollo de sus estrategias propias, conceptos y representaciones; y iii) Lleva a cabo discusiones en clase que crean oportunidades para la negociación de significados, el desarrollo del razonamiento matemático, y la institucionalización de nuevos conocimientos, para la relación del contenido con diversas situaciones.

Este estudio involucra un paradigma cualitativo, situado bajo un enfoque descriptivo-interpretativo de la realidad, a partir de un estudio de caso (Strauss y Corbin, 2002). El contexto del estudio se enmarca dentro de un curso de formación dictado en el año 2016 para profesores noveles de matemáticas chilenos inscritos en la ED del año en curso. La formación pretendió apoyar en la realización de la ED, favoreciendo procesos reflexivos en pos de su desarrollo profesional que den sentido a sus conocimientos docentes en miras de la experticia. El sujeto informante es una profesora novel escogida por criterio de disponibilidad (voluntarios e idoneidad) que trabaja en un colegio municipal de la región de Valparaíso de Chile.

Para este trabajo se mostrará el primer ciclo reflexivo, relativo al diseño de un plan de clases, en donde la profesora debió diseñar la planificación de la clase que luego implementó y grabó para la ED. Por tanto, los instrumentos asociados a la recogida de datos fueron la grabación de las sesiones formativas donde se analiza la planificación y tres tipos de documentos elaborados por la docente que contienen: 1) la planificación de la clase, 2) los comentarios de los formadores en los archivos digitales sobre las planificaciones reformuladas y 3) el plan de clases reformulado. Estos se emplean en distintos momentos del proceso reflexivo como se verá en el análisis. Una vez recogidos los datos, se utilizó el análisis de contenido (Flick, 2004), fijando como unidades referenciales, los conjunto de párrafos que tienen conexión o idea en común. Las categorías de análisis fueron las tres características de profesor experto.

DESARROLLO Y REFLEXIONES

Los docentes participantes de la ED deben planificar una clase (primera fase ALaCT) que posteriormente implementarán. La docente estudiada plantea una clase cuyo aprendizaje esperado es “analizar representaciones de la función lineal y de la función afín” (MINEDUC, 2011, p. 46) en la que incitará graficar distintas funciones lineales para que conjeturen sobre la relación gráfica-algebraica de los parámetros involucrados en ella (pendiente y coeficiente de posición).

En este plan de clases la profesora plantea una tarea que si bien estimula el trabajo matemático activo de los estudiantes, no es una tarea exploratoria y no estimula el desarrollo de sus estrategias propias, conceptos y representaciones, segunda característica de un profesor experto (Rojas, 2014). Tampoco se percibe la creación de oportunidades para

negociar significados y desarrollar razonamiento matemático del alumno (característica tres de profesor experto). En cuanto a la primera característica de profesor experto, ella manifiesta en la planificación débil comprensión del aprendizaje de los alumnos sobre ecuaciones lineales; por ejemplo, al no prestar atención a dificultades de estudiantes para el análisis de los gráficos. Por último, exhibe problemas de coherencia entre el objetivo de la clase y la tarea (primera característica de profesor experto).

Con el suceso definido se le solicitó a la docente explicar su planificación (segunda fase ALaCT),. La profesora al exponer y luego de los comentarios de formadores y pares, reconoce las inconsistencias de su plan y decide diseñar otra clase, por lo que volvemos a la fase inicial (A de ALaCT) del proceso reflexivo.

La docente redefine el aprendizaje esperado de la clase como "establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales" (MINEDUC, 2011, p. 46) en el contexto del objetivo fundamental "analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos, para fundamentar opiniones y tomar decisiones" (MINEDUC, 2011, p. 46). Se plantea una clase en la que incitará a sus alumnos la necesidad de considerar una ecuación lineal para resolver un problema relativo al cálculo de edades. Así se define la fase A del proceso ALaCT promovido en la profesora.

En este plan de clases la docente manifiesta diversos aspectos de la primera y segunda característica de profesor experto, como una mayor coherencia entre la tarea central de la clase y lo que se quiere lograr (aprendizaje esperado de la clase).

En la siguiente sesión del curso formativo, los formadores provocan a la docente (fase "L" de proceso ALaCT) para que aclare como concretará su planificación, con qué tarea y de qué forma (gestión) se iniciará. La profesora plantea que empezará la clase con una tarea que estimule la traducción del lenguaje verbal al algebraico de problemas contextualizados, de manera de activar los conocimientos previos para iniciarlos en la resolución de problemas que involucran ecuaciones (Objetivo Fundamental de la clase). Se observa en la docente comprensión del conocimiento sobre estrategias de enseñanza sobre ecuaciones lineales, primera característica de profesor experto.

Se continúa el curso formativo proponiéndole (agentes externos, fase "a" del proceso ALaCT) a la profesora aspectos para mejorar la clase y la forma de gestionarla, se le menciona que la ecuación asociada al problema es muy compleja para lo que pretende. Posterior a esta sesión, ella redefine elementos de su clase (fase "C" del proceso ALaCT), planteando para su inicio un juego de competencia de dos problemas relativo a edades, donde se observa en la profesora su conocimiento para el aprendizaje de ecuaciones lineales, primera característica de profesor experto. La docente acoge la sugerencia de colocar una ecuación más simple en el problema central de la clase.

Finalmente la docente aporta con una clase (quinta y última fase, T, del proceso ALaCT) más estructurada, con coherencia entre el objetivo de la clase y las tareas propuestas y una variada gama de sugerencias de gestión en el aula (primera característica de profesor experto). La tarea central de la clase es más simple que la inicialmente planteada, estimulando el desarrollo de estrategias propias y conceptos (segunda característica de

profesor experto). Además la profesora prevé dificultades en la construcción de la ecuación lineal, lo que manifiesta conocimiento sobre el aprendizaje de las ecuaciones lineales, primera característica de profesor experto. Si bien es un plan de clases que no muestra mayores elementos sobre la creación de significados, si explicita la institucionalización de saberes, relacionado con la tercera característica de profesor experto. Este ciclo reflexivo es el primero promovido en los docentes dentro del curso de formación. Continuamos luego con la implementación de curso, estando así presente la práctica, elemento determinante en todo proceso reflexivo (Ramos, 2014). En este ciclo se favoreció que los docentes transiten de una experiencia laboral (realizar la ED y dentro de ella la planificación de una clase) a la problematización de esta, fundamentándola en la búsqueda de elementos que la caracterizaron.

CONCLUSIONES

A la luz de los hallazgos, hemos observado cualidades de experticia en un profesor novel de matemática que se involucra en un proceso reflexivo estimulado en un curso de formación. El proceso deja en evidencia aspectos favorecedores de la experticia, en particular respecto a la característica relativa a la coherencia de una tarea con su objetivo y a los aprendizajes de los estudiantes, a la adecuación de tareas que estimulan en los alumnos el desarrollo de sus estrategias, conceptos y representaciones. La docente estudiada va evolucionando en su mirada de la práctica, considerando elementos que no eran explícitos para hacerlos conscientes.

Esta herramienta, la reflexión, permitió avanzar en la identificación de características de profesor experto, de manera de observar en su actuación elementos favorecedores de su práctica. Pretendemos continuar observando cómo se manifiestan las características de profesor experto, en los otros ciclos reflexivos promovidos en el curso formativo, de manera de observar las virtudes que ofrece la reflexión en pos del profesor experto, sujeto que debe estar presente en las aulas, para beneficios de nuestros estudiantes.

Agradecimiento

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto VRIEA-PUCV 039.356/2016 “Principios de actuación para acompañar al profesor novel de matemáticas en su Evaluación Docente, con propósito de desarrollar en él características de profesor de excelencia”.

Referencias

Dewey, J. D. (1910). *How we think*. Boston, MA: D.C. Heath.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Korthagen, F. A. (2011). Making teacher education relevant for practice: The pedagogy of realistic teacher education. *Orbis scholae, 5*(2), 31-50.

Li, Y., & Kaiser, G. (2012). Conceptualizing and developing expertise in mathematics instruction. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 121-124). Taipei, Taiwan: PME.

López-Vargas, B. I. y Basto-Torrado, S. P. (2010). Desde las teorías implícitas a la docencia como práctica reflexiva. *Educación y Educadores, 13*(2), 275-291.

MINEDUC (2011). *Matemáticas Programa de estudio Primer año medio*. Chile: MINEDUC.

MINEDUC (2014). *Resultados de la evaluación docent*e. Chile: MINEDUC.

Ponte, J. P. (2012). What is an expert mathematics teacher? In T. Y. Tso (Ed.), Proceedings of the 36th *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp.125-128). Taipei, Taiwan: PME.

Ramos-Rodríguez, E. (2014). *Reflexión docente sobre la enseñanza del álgebra en un curso de formación continua*. Disertación doctoral, Universidad de Granada. Granada.

Rojas, N., Carrillo, J. y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Conteras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J.García, & L. Ordoñez (Eds.). *Investigación en educación matemática XVI* (pp. 479-485). Jaén: SEIEM.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. Tesis doctoral: Universidad de Granada. Granada, España.

Schön, D. (1983). *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Madrid: Paidós.

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín: Universidad de Antioquía.

TIPOS DE DEMOSTRACIÓN CONSTRUIDAS POR ESTUDIANTES DE UN CURSO-LABORATORIO DE PRECÁLCULO

Edwin López Velandia, Jorge Enrique Fiallo Leal
Universidad Industrial de Santander

Resumen: En este documento se presentan los principios y la metodología de una investigación en curso, cuyo objetivo es analizar los procesos de conjetura y demostración e identificar las dificultades que presentan los estudiantes que participan en un curso de precálculo que ofrece la Universidad Industrial de Santander. Para este propósito se implementará la herramienta de análisis propuesta por Pedemonte (2005) y la tipología propuesta por Fiallo (2011). Una primera aproximación al contexto de estudio pone de manifiesto que en los estudiantes predominan las demostraciones inductivas, por la implementación de sistemas de referencia soportados en concepciones perceptivas.

Demostración, modelo cK¢, modelo de Toulmin, curso de precálculo, tipos de demostración

INTRODUCCIÓN

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas destaca como un objetivo de la educación matemática el desarrollo de la capacidad de efectuar demostraciones matemáticas (NCTM, 2003), pero desde hace décadas se reportan dificultades de los estudiantes en el desarrollo de este proceso (Harel y Sowder, 1998; Hanna & Jahnke, 1996). Investigaciones recientes muestran que el uso de ejemplos es utilizado como única estrategia para realizar demostraciones (Sen y Guler, 2015; Lockwood, Ellis y Lynch, 2016). Otros estudios basados en intervenciones en el aula (Fiallo, 2011; Sandefur, Mason, Stylianides y Watson, 2012; Stylianides y Stylianides, 2013) logran que los estudiantes comprendan los límites del uso de ejemplos como única estrategia de demostración y avancen hacia la construcción de demostraciones deductivas.

Presentamos algunos avances de una investigación en curso que pretende dar respuesta a la pregunta: *¿Qué dificultades estructurales y referenciales tienen los estudiantes en el desarrollo del proceso de conjetura y demostración en un curso-laboratorio de precálculo mediado por software matemático interactivo?*

MARCO TEÓRICO

Para responder a la pregunta de investigación, este estudio se adhiere a la caracterización de demostración de Fiallo (2011) quien considera la demostración como "todos los argumentos planteados por los estudiantes para *explicar, verificar, justificar o validar* con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática" (ibíd., pág. 85).

Para analizar e identificar fortalezas y dificultades en los procesos de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones de los estudiantes se utiliza el "Modelo de Pedemonte" (Pedemonte, 2005) y los tipos de demostración planteados por Fiallo (2011).

Modelo de Pedemonte

Pedemonte (2005) integra el modelo cK¢ (Balacheff y Margolinas, 2005) al modelo de Toulmin (Toulmin, 1958):

Modelo de Toulmin. Este modelo permite analizar la estructura de la argumentación del estudiante atendiendo al contenido empleado. Para ello tiene en cuenta seis elementos básicos (ibíd.): el *enunciado "E"* que se refiere a la conclusión de cada argumento que se basa en un cierto número de *datos "D"*. Para pasar de los datos al enunciado-conclusión es necesario un *permiso de inferir "Pi"* que legitime ese paso (por ejemplo, una regla o un principio general). Vale decir que *Pi* establece la conexión lógica entre *D* y *E* al mostrar que el paso de *D* hacia *E* es adecuado y legítimo; El *indicador de fuerza "F"* que precisa la fuerza con la que la unión entre *D* y *Pi* permite alcanzar *E*; las *refutaciones potenciales "Rp"* establecen las restricciones que se aplican a *E*, es decir, las situaciones bajo las cuales *E* no sería válida; y un *soporte "S"* que apoya el *Pi*, ya que éste puede ponerse en duda y va a ser necesario respaldarlo con algunos justificativos.

Modelo ck¢. Balacheff y Margolinas (2005) señala cuatro componentes indisociables, que se imponen cuando se requiere evidenciar una concepción *C*: a partir de un *problema matemático "P"* un estudiante puede representarlo con un conjunto de afirmaciones que expresa utilizando un *sistema de representación "L"*, a su vez que lo transforma aplicando una *regla "R"* (un operador); en dicho proceso aplica una *estructura de control "Σ"* para organizar las funciones de decisión, de elección, de juicio de validez y de adecuación de la acción, asegurando la no contradicción de la concepción. La cuádrupla (*P, L, R, Σ)* es suficiente para caracterizar una concepción.

El Modelo de Pedemonte (Ilustración1) integra los dos modelos ya que en la resolución de problemas de demostración, las *concepciones* de los estudiantes permiten movilizar los procesos argumentativos y justificar la existencia del argumento, por lo que pueden remplazar el *soporte* en el modelo de Toulmin y los *operadores* de la concepción pueden reemplazar los *permisos de inferir* (Pedemonte, 2005).

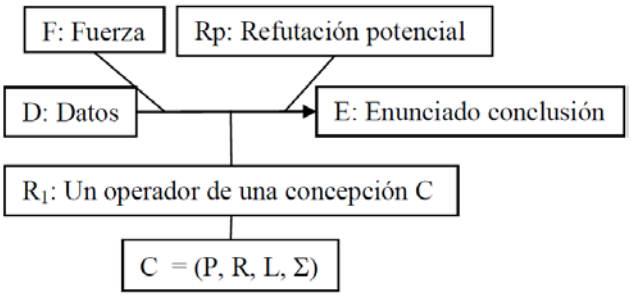


Ilustración 1: Integración del modelo cK¢, al modelo de Toulmin (Fiallo, 2011)

TIPOS DE DEMOSTRACIÓN

Fiallo (2011), basado en las categorías planteadas por Marrades y Gutiérrez (2000), plantea que en la clase de matemáticas se deben considerar los siguientes tipos de demostración:

Demostraciones empíricas o inductivas: caracterizadas por el uso de ejemplos como el principal elemento de convicción. Dentro de esta categoría está el *empirismo ingenuo*

inductivo (EII), el experimento crucial (basado en ejemplos o constructivo) y el ejemplo genérico (analítico o intelectual).

Demostraciones deductivas: caracterizadas por la descontextualización de los argumentos usados, se basan en los aspectos genéricos del problema, operaciones mentales, y deducciones lógicas, que apuntan a validar la conjetura de una manera general. Dentro de esta categoría están el experimento mental (transformativo o estructural) y la deducción formal (transformativa o estructural).

METODOLOGÍA

Esta investigación es de tipo cualitativa, se lleva a cabo con estudiantes admitidos a carreras de ciencias o ingenierías en la Universidad Industrial de Santander, quienes participan en un curso de precálculo que pretende el desarrollo del pensamiento variacional con un trabajo de aula (de 14 sesiones) basado en resolución de problemas y el uso de la tecnología (Fiallo y Parada, 2014). En el primer semestre de 2016 se realizó una fase preliminar que permitió esclarecer la metodología del estudio exploratorio que llevará a responder la pregunta de investigación:

De aproximadamente 240 estudiantes que reciben al curso, se trabajó con 8 estudiantes, quienes fueron seleccionados bajo los criterios de participación constante, compromiso por realizar lo que le pedía los talleres y asistir a todas las clases. El investigador fue un observador participante ya que, para la recolección de los datos, interactuó con cada estudiante (o parejas de estudiantes) para explicitar el proceso de demostración. Para el posterior análisis, los datos de los vídeos se sistematizaron para identificar momentos donde se presentaron demostraciones, y se transcribieron para examinarlos a la luz de los elementos del marco teórico.

Ejemplo

A continuación una demostración realizada por un estudiante cuando aborda el siguiente problema.

Toma una hoja de tamaño carta y sin recortar forma un cilindro sin tapas

¿Cómo se obtiene el mayor volumen: formándolo a lo largo o a lo ancho de la hoja? Justifica tu elección.

¿Qué se puede decir de cualquier hoja rectangular? ***Explica*** *tu respuesta.*

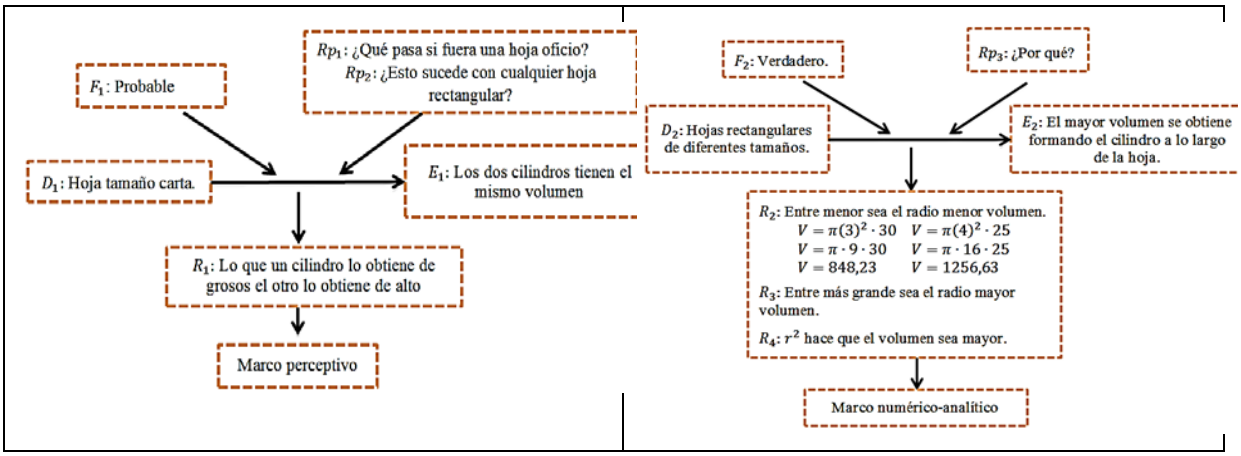


Tabla 1: Elementos de la demostración del estudiante.

Para el estudiante, los datos D_1 y D_2 provienen del problema planteado y los operadores de la concepción son reglas que generaliza de lo que ve (R_1), o lo que hizo o analizó (R_2 *a* R_5), o lo que en algunos casos explicitó como consecuencia de las refutaciones del investigador (Rp_1 a Rp_3). Estas Rp evidencian la fuerza del argumento que comenzó siendo débil (F_1) pero que se transformó en (F_2) por el procedimiento numérico posterior, con lo que mostró confianza en lo realizado. La Rp_2 hizo que el estudiante utilizara otros datos que cambiaron el enunciado-conclusión, de E_1 a E_2. Se debe considerar que en los ejemplos realizados y analizados para justificar el segundo enunciado, se tomaron números con un criterio basado en la percepción inicial de la situación y no con un argumento teórico.

En la argumentación del primer enunciado (E_1), la representación es verbal y el control es perceptivo ya que el estudiante se basó en lo que vio y conjeturó, lo que le resultó suficiente para plantear una solución del problema. Dada la intervención del investigador (Rp_2) el estudiante realizó un nuevo procedimiento con un ejemplo numérico y un nuevo control que emergen del análisis realizado sobre el ejemplo.

Con todo se concluye que el proceso de demostración emergente de la actividad matemática del estudiante es de tipo Empirismo Ingenuo Inductivo, ya que predomina lo perceptivo y la escogencia de ejemplos sin criterios teóricos que le den fuerza al análisis realizado.

CONCLUSIONES: PRIMEROS HALLAZGOS

El análisis de los primeros datos, nos permite tener por hipótesis que las demostraciones de tipo empíricas son las que predominan en los estudiantes al iniciar el curso, y aunque en las últimas sesiones también son utilizadas, ellos comprenden que con ellas no es suficiente la demostración e intentan realizar procesos más elaborados.

Referencias

Balacheff, N., Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Fiallo, J. (2011*). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* (Tesis doctoral). Universitat de València, Valencia, España.

Hanna, G., Jahnke, N. (1996). Proof and proving. En A. Bishop y otros. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer.

Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: results from exploratory studies. En A. Schoenfeld y otros (Ed.), *Research in collegiate mathematics education III*, (pp. 234-283). Providence, EEUU: American Mahematical Society.

Lockwood, E., Ellis, A. B., & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' Example-Related Activity when Exploring and Proving Conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(2), 165-196. DOI: 10.1007/s40753-016-0025-2.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemáticas*. Sevilla, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l`analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathematiques*, 25(3), 313 - 348.

Sandefur, J., Mason, J., Stylianides, GJ, y Watson, A. (2012). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics*, 83 (3), 323-340. DOI: 10.1007/s10649-012-9459-x.

Sen, C., & Guler, G. (2015). Examination of Secondary School Seventh Graders' Proof Skills and Proof Schemes. *Universal Journal of Educational Research* 3(9): 617-631. DOI: 10.13189/ujer.2015.030906

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: classroom-based interventions in mathematics education. *ZDM*, 45(3), 333-341. DOI: 10.1007/s11858-013-0501-y.

Toulmin, S.E., (1958) The use of argument, Cambridge University Press.

HACIA EL DISEÑO DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LOS VALORES Y VECTORES PROPIOS EN R2 DESDE UNA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA

Marcela Parraguez[1], Raúl Jiménez[2], Andrés Yáñez[1]
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[1], Universidad Católica del Norte[2]

Resumen: Basados en la teoría APOE como marco teórico y metodológico, investigamos, desde una postura cognitiva, las estructuras mentales necesarias para modelar la construcción cognitiva de los valores y vectores propios en R2 desde un aspecto geométrico. El diseño de una descomposición genética (DG) para este fin, mostró que los elementos desde el ámbito geométrico –la Rotación en 180° con centro en el origen y la Homotecia– son conceptos matemáticos previos para la construcción del concepto valor/vector propio en R2 como objeto, en estudiantes de primer año de universidad.

Valor propio, vector propio, teoría APOE

ANTECEDENTES

Los procesos de enseñanza y aprendizaje en álgebra lineal para estudiantes de Ingeniería, Pedagogía y/o de licenciatura en Matemáticas, Física y Química, precisan en general, de elementos de las teorías de espacios vectoriales, de coordenadas, de transformaciones lineales y de valores/vectores propios. Dorier y Sierpinska (2001) plantean que el problema central en esta materia consiste en que el estudiante tiene que trabajar con conceptos matemáticos de naturaleza muy general, pero tratados con elementos particulares. Especificamente, los conceptos de valor y vector propio representan un obstáculo mayor, porque precisan de una construcción previa y fuerte de espacio vectorial y transformación lineal, y como los aprendices no entienden su naturaleza general, se inclinan fuertemente por procedimientos calculatorios específicos que sabe manejar, pero no necesariamente los comprende (Robinet, 1986; Moore, 1995; Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016).

Salgado y Trigueros (2014), reportan los resultados de una investigación acerca del aprendizaje de los valores y vectores propios de los estudiantes en un curso en el que estos conceptos se han enseñado, usando un diseño didáctico basado en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Sin embargo, aún no se ha reportado un modelo cognitivo y su validación propiamente tal, plasmado en una descomposición genética, para el caso particular de valores y vectores propios en R^2 desde una perspectiva geométrica, dirección que toma la presente investigación, cuya finalidad es develar elementos del ámbito geométrico, que permiten la construcción de este objeto matemático en R^2.

La noción intuitiva en álgebra lineal de los valores/vectores propios

Para tener un acercamiento más intuitivo (desde lo geométrico) de lo que es un valor/vector propio, prestemos atención a la Figura 1. En ella se puede apreciar, que en esta transformación de la GALLINA la imagen se ha deformado de tal forma que su eje vertical no ha cambiado.

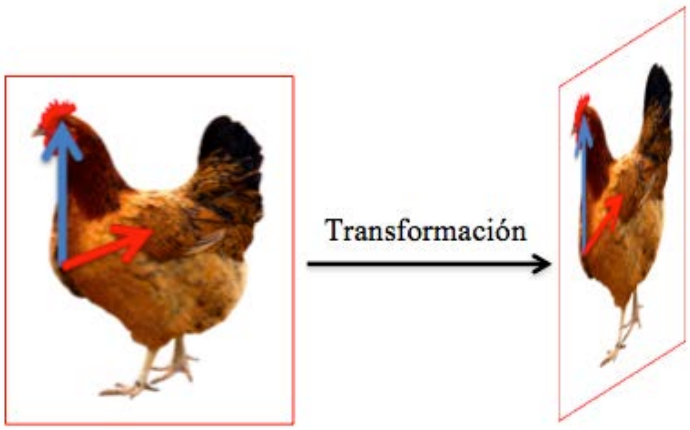


Figura 1: Transformación de la galllina.

El vector rojo, representado por la flecha roja que va desde el pecho hasta el ala de la gallina, ha cambiado de dirección, mientras que el azul, representado por la flecha azul, no ha cambiado. El vector azul es entonces un vector propio de la transformación, mientras que el rojo no lo es. Dado que el vector azul no ha cambiado de longitud, su valor propio es 1. Todos los vectores de esta misma dirección y sentido son vectores propios, con el mismo valor propio. Forman el espacio propio de este valor propio.

De acuerdo a varios textos de estudio (Por ejemplo: Lay, 2007 y Poole, 2011) los valores/vectores propios se definen de la siguiente forma:

Si A es cualquier matriz numérica cuadrada, de tamaño nxn, entonces:

(1) Un valor propio, denominado "λ", es un escalar, que para un vector "v" distinto de cero, se cumple la siguiente condición: $Av = \lambda v$.

(2) El vector v se llama vector propio de λ, si: $Av = \lambda v$.

Relevancia de los valores/vectores propios

Los valores y vectores propios pertenecen a los tópicos de mayor aplicación del álgebra lineal. De hecho, es raro encontrar un área de la ciencia aplicada donde nunca se hayan usado. Por ejemplo, se usan en áreas de las matemáticas, física, mecánica, ingeniería eléctrica y nuclear, hidrodinámica, aerodinámica, economía, etc., entre los que cabe destacar, el problema de la diagonalización de una matriz.

PREGUNTA Y OBJETIVO GENERAL DE INVESTIGACIÓN

Las preguntas que guiaron la investigación son, por un lado desde la matemática de un primer año de universidad: ¿Qué prerrequisitos son necesarios para el aprendizaje de los valores /vectores propios en R^2 desde una perspectiva geométrica? y por otro, desde la cognición y la didáctica ¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales asociados a la construcción de los conceptos valores/vectores propios en R^2 desde una perspectiva geométrica? Para responder estas preguntas, se condujo esta investigación utilizando como marco teórico la teoría APOE. Consideramos que esta teoría es pertinente para este estudio, dado que justamente se aboca al análisis de la construcción de conceptos matemáticos y

proporciona una metodología que permite el diseño de un análisis teórico congruente con la propuesta de investigacion.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA: TEORÍA APOE

La teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), desarrollada por Dubinsky (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014) y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), es una teoría reconocida en la comunidad de investigación en Didáctica de la Matemática. En ella se toma como punto de partida el mecanismo de abstracción reflexiva propuesto por Piaget, para describir la construcción de objetos mentales relacionados con objetos matemáticos específicos. La abstracción reflexiva se pone de manifiesto en la teoría a través de distintos mecanismos: interiorización, coordinación, generalización, encapsulación, y reversión.

Para operacionalizar la teoría como marco de investigación se diseñó un modelo, llamado descomposición genética, (DG) que es un modelo hipotético que describe en detalle las estructuras y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014) que son necesarios para que un estudiante de primer año de unversidad aprenda el concepto matemático de valor/vector propio en R^2 desde una perspectiva geométrica.

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LOS VALORES Y VECTORES EN R^2

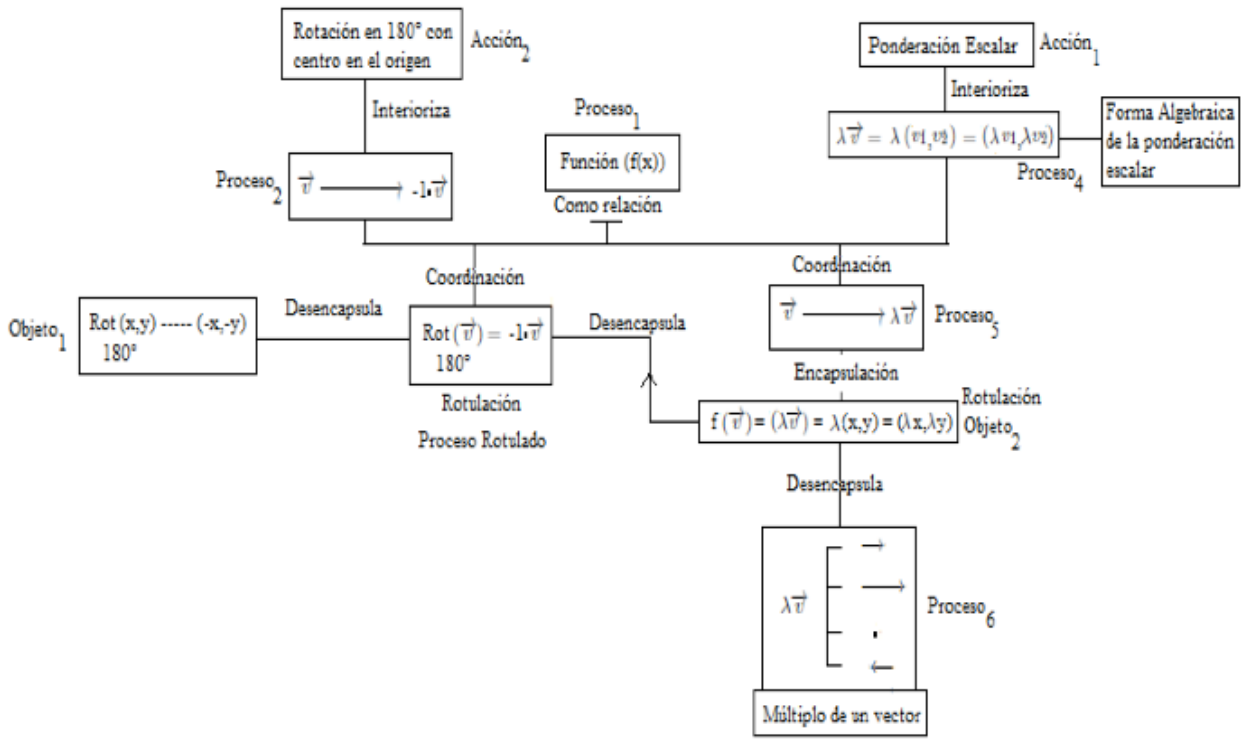


Figura 2: DG para el aprendizaje en estudiantes de primer año de universidad de los valores y vectores propios en R^2 desde una perspectiva geométrica.

Un estudiante de primer año de universidad construye (hipotéticamente) el objeto valor/vector propio en R^2, realizando acciones (Acción 2) sobre el objeto rotación en 180º con centro en el origen, rotando casos particulares de vectores dados, como se muestra en la

Figura 2. La Acción 2, es interiorizada, por el uso de una relación de correspondencia, que dado un vector se le asigna otro, este proceso obtenido (Proceso 2) se puede describir mediante la formula, $v \longrightarrow -1 \cdot v$. Al realizar acciones (Acción 1) sobre el objeto ponderación escalar, por ejemplo, calculando para algunos vectores de forma geométrica casos particulares, permite que, al ser interiorizadas por la forma algebraica de ponderación escalar para vectores en R^2, originen el proceso $\lambda v = \lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$.

Al coordinar el proceso 2 y proceso 4, por separado con la idea de función (proceso 1) como relación, generan nuevos procesos –Proceso 5 y Proceso rotulado–, como una fórmula. Un estudiante que logre encapsular el proceso 5, es decir, que tenga como objeto la ponderación escalar, utilizando como articulador la idea de función, obtiene el objeto 2, que al ser rotulado se puede expresar mediante una relación algebraica. Este objeto rotulado de esta forma, muestra la construcción objeto de los valores y vectores propios en R^2. El objeto 2 al ser desencapsulado, para dar cuenta de dos procesos como casos particulares: por un lado, la rotación en 180◦ (Proceso rotulado), donde el articulador, que produce esto es el caso $\lambda = -1$; y por otro lado, se puede desencapsular para dar cuenta de una idea geométrica, donde el articulador es la variación de la magnitud del vector (homotecia), en la idea de múltiplo de este (Proceso 6).

A MODO DE CONCLUSIÓN

El diseño de la DG mostró que las estructuras mentales previas, desde el ámbito geométrico, para el aprendizaje en estudiantes de primer año de universidad de los valores y vectores propios en R^2, son los objetos Rotación en 180° con centro en el origen y Homotecia.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto Fondecyt 1140801.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Nueva York: Springer.

Dorier, J. L. Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En Derek Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level,* 255-273 ICMI Study. Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Lay, D. (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones (3ª Ed.). México: Pearson educación.

Moore, G. H. (1995). The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. *Historia Mathematica*, 22, 262-303.

Parraguez M., Lezama, J. y Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores. *Revista enseñanza de las Ciencias*, 34(2), 129-150.

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna* (3º Ed.). México: Thomson.

Robinet, J. (1986). Les réels: quels modeles en ont les éléves? *Educational Studies in Mathematics*, 17, 359-386.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Revista Educación Matemática*, 26(3), 5-42.

ESTADÍSTICA CON PROYECTOS EN EL CONTEXTO ESCOLAR MAPUCHE

Hernán Rivas, María Isabel Lara, Anita Vicuña, Anita Zúñiga
Pontificia Universidad Católica de Chile, Campus Villarrica

Resumen: Se describen las fases de diseño e implementación de una trayectoria didáctica basada en el uso de proyectos de análisis de datos como estrategia para la enseñanza de la estadística en el contexto escolar mapuche. La propuesta se fundamenta en la idea de proyecto estadístico y en el rol del saber cultural en la construcción del conocimiento matemático. El análisis se realiza aplicando herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), siguiendo una metodología particular de ingeniería didáctica basada en este enfoque.

Estadística, contexto escolar mapuche, proyectos de análisis de datos

ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En la actualidad, tanto en Chile como en diferentes países latinoamericanos, se demanda una educación escolar que reconozca y respete los principios, valores y conocimientos de las culturas originarias. En nuestro país esta situación ha sido abordada parcialmente a través del planteamiento de la ley 19.253 de 1993 en la que se reconocen los derechos de los pueblos indígenas, y la posterior creación del Programa de Educación Intercultural Bilingüe (PEIB) en el año 2010 por parte del Ministerio de Educación. Una de las estrategias planteadas por este programa, ha sido la incorporación del sector de aprendizaje de lengua indígena, el cual ha comenzado a regir gradualmente desde primer año básico a partir del año 2010, hasta llegar a octavo año básico el año 2017 (Decreto Supremo N° 280 de 2009). El decreto señala que el sector de aprendizaje es obligatorio en establecimientos que cuentan con una matrícula indígena igual o mayor al 50%, a partir del año 2010; e igual o mayor al 20%, a partir del año 2013.

Esta iniciativa constituye un avance importante en la materia. Sin embargo, es necesario tener en cuenta la diversidad cultural y lingüística en un sentido más amplio; esto es, considerar dichos componentes como elementos esenciales para enriquecer las oportunidades de aprendizaje en diferentes áreas. Esta postura es avalada por uno de los principios del currículo escolar nacional, donde se declara que “el docente debe tomar en cuenta la diversidad entre los estudiantes en términos culturales, sociales, étnicos y religiosos” (MINEDUC, 2011, p. 15).

En este trabajo nos proponemos describir las fases de diseño e implementación de un proceso formativo, basado en un proyecto de análisis de datos, como estrategia para contextualizar los conocimientos disciplinares y las acciones pedagógicas a la realidad de una escuela, con alta concentración de alumnos mapuches, adscrita al PEIB.

MARCO TEÓRICO

La metodología didáctica se basa en la idea de proyectos de análisis de datos (Batanero y Díaz, 2011; Franklin y cols., 2005) y en el planteamiento que la educación matemática se puede mejorar si se tiene en cuenta el trasfondo cultural de los estudiantes (D’ Ambrosio,

1985; Oliveras, 2006). El análisis se realiza teniendo en cuenta elementos teóricos del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) de Godino colaboradores; en particular, usamos las nociones de *idoneidad didáctica* (ID) y *hecho didáctico significativo* (HDS). La ID se define como la articulación coherente y sistémica de seis dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006). Los HDS son acontecimientos que tiene lugar en un proceso de instrucción matemático, cuyas acciones o prácticas didácticas que los componen desempeñan una función, o admiten una interpretación, en términos del objetivo instruccional pretendido. Dicha interpretación debe hacerse siempre desde una teoría (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa, y Wilhelmi, 2014).

METODOLOGÍA

El estudio se enmarca en un tipo particular de ingeniería didáctica basada en el Enfoque ontosemiótico ID- EOS (Godino, et al., 2014). En esta metodología se distinguen cuatro fases: *estudio preliminar* (delimitación del contenido del diseño y su alcance), *diseño de la trayectoria didáctica* (selección y secuenciación de los problemas, análisis a priori) *implementación* (experimentación) y *análisis retrospectivo* (contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación). En cada una de las fases la ID-EOS propone tener en cuenta las dimensiones de análisis: epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional (interaccional y mediacional).

La experiencia se aplicó en un séptimo año básico de una escuela chilena adscrita al PEIB.

RESULTADOS

Los siguientes son los principales resultados obtenidos en las fases de diseño e implementación. En la fase diseño, se presenta el proyecto de análisis de datos y parte del análisis a priori epistémico-ecológico. La implementación se describe citando algunos ejemplos de HDS.

Diseño de la trayectoria didáctica

Se aborda el objetivo de aprendizaje “Seleccionar formas de organización y representación de datos de acuerdo al tipo de análisis que se quiere realizar” (Programa de matemática, 7° año básico, p. 31, 2011). Los contenidos culturales y linguíticos refieren a costumbres y significados de palabras asociados a una de las principales festividades mapuches, el We tripantü.

Para trabajar estos contenidos se ha seleccionado el siguiente proyecto de análisis de datos que se encuentra descrito en el proyecto GAISE (Franklin y cols., 2005), adaptando su formulación y las preguntas según los propósitos de nuestro estudio.

Para recoger los datos los estudiantes aplicarán una encuesta al interior del curso.

Situación problema

La comunidad mapuche Winkulpüle se encuentra organizando el We tripantü y ha decidido invitar a los estudiantes de la escuela del lugar. Para ello, desean conocer las preferencias de

la clase sobre las siguientes comidas típicas del "lof": kan kan ilo, lliwin kofke, rüngan kofke, ñako y poñi.

a. ¿Qué tipo de comida es la favorita entre los estudiantes del curso?

b. ¿En cuál de los dos grupos (comparando hombres y mujeres), la comida favorita representa un mayor nivel de preferencia?

c. ¿Los estudiantes a quienes les gusta la comida favorita tienden a elegir o no la comida de segunda preferencia?

Análisis a priori

Se presenta a continuación una síntesis del análisis epistémico-ecológico para las componentes *conceptos* y *lenguajes*. Por razones de espacio no se incluye el análisis de las otras componentes.

Conceptos: Los conceptos de: censo, población, dato estadístico, tabla de frecuencias, frecuencia absoluta y gráfico de barras, son parte de los conocimientos previos y por tanto, no presentarán mayor dificultad. Los nuevos aprendizajes estarán centrados en los conceptos de variable estadística, frecuencia relativa, abscisa, ordenada, moda y tabla de contingencia. El profesor tendrá que poner especial atención en los conceptos de frecuencia relativa y tabla de contingencia, los cuales serán difíciles de manejar por los estudiantes.

Lenguajes: Se supone que los estudiantes están familiarizados con las expresiones claves para comprender el problema. Los términos y expresiones lingüísticas asociadas a conocimientos previos no presentarán mayor dificultad; sin embargo, se requerirá prestar atención a aquellos significantes que representan conceptos nuevos. Se prevén dificultades al momento de representar los datos en tablas de frecuencias y gráficos y, en el significado de expresiones asociadas a la hoja de cálculo. Una situación similar sucederá en la elaboración de la tabla de contingencia.

Implementación

Mostramos a continuación ejemplos HDS, interpretados desde las seis dimensiones de la ID. El conjunto de HDS permiten describir la trayectoria didáctica implementada.

HDS N° 2

Manuel:	¿Qué significa "Rüngan"?
Elena:	Y la palabra "lliwin", ¿la sabes? […]
Profesora:	Está escrito en Mapudungun. Rüngan, significa "enterrar" y lliwin es "grasa" […]

Este HDS tiene importancia desde el punto de vista epistemico y ecológico. Se manifiesta una dificultad para atribuir significado a palabras escritas en mapudungun, cuya comprensión es clave al momento de aplicar la encuesta para recoger los datos. Este, podría ser un tipo particular de "obstáculo epistémico-ecológico" que habrá que tener en cuenta en una enseñanza que promueva la coexistencia del conocimiento occidental con el saber de los pueblos originarios.

HDS N° 9

Ángela: Profesora, ¿cómo sabemos cuál es la comida favorita en el gráfico?

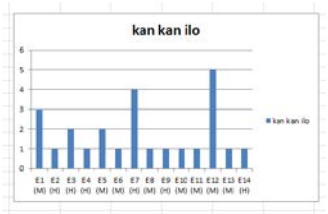


Figura 1. Gráfico “no estadístico”

Este HDS, generado frente a la pregunta “a”, puede ser interpretado desde el punto de vista epistémico y cognitivo. Los estudiantes han construido un gráfico “no estadístico” que da cuenta de dos errores que dan origen a su construcción: (a) el gráfico se construye directamente desde la matriz de datos y no a partir de una tabla de frecuencias y (b) al momento de recoger los datos se han usado valores numéricos para graduar las preferencias de cada estudiante sobre los cinco tipos de comidas. En efecto, con respecto a esto último, lo que se lee en el gráfico es que el E1 (estudiante1) ha elegido el “kan kan ilo” como tercera preferencia, el E2 (estudiante 2), como primera preferencia y así se continúa con esta misma lectura para el resto de los casos.

DISCUCIÓN FINAL

El desarrollo de este trabajo nos ha permitido reconocer ventajas y limitaciones del trabajo mediante proyectos como estrategia para contextualizar contenidos curriculares a la realidad de una escuela chilena con alta concentración de alumnos mapuches. El estudio revela que esta metodología didáctica resulta apropiada para conectar los conocimientos y acciones pedagógicas con elementos de la lengua y cultura de origen. Sin embargo, han quedado de manifiesto algunas dificultades que revelan la necesidad de reforzar aspectos culturales y lingüísticos del pueblo mapuche y otros, relacionados con el conocimiento matemático-estadístico que deberían manejar los estudiantes.

El proyecto aplicado podría ser ampliado para trabajar otros contenidos estadísticos y profundizar el significado del valor de los alimentos para la salud y los aspectos tradicionales del mundo mapuche.

Referencias

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con proyectos.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada. Recuperado el 31 de julio de 2016 desde, http://www.ugr.es/local/batanero/publicaciones%20index.htm

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M, & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association. Disponible en, www.amstat.org/Education/gaise/

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 26(1): 39-88.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 34(2/3), 167-200.

Ministerio de Educación. (2009). *Decreto Supremo N° 280.* Santiago: Chile.

Ministerio de Educación. (2011). *Programa de estudio para 7° año básico.* Santiago: Chile.

Oliveras, M. L. (2006). Etnomatemáticas: De la multiculturalidad al mestizaje. En Coñi, J., Albertí, M., Burgos, S., Díaz, R., Dominguez, G., Fioriti, G., (Eds.), *Matemática e interculturalidad* (pp. 117-149). Barcelona, España: GRAÓ.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES DE EDUCACIÓN BÁSICA CHILENA

J. L. Piñeiro, E. Castro-Rodríguez, E. Castro, C. Aguayo-Arriagada
Universidad de Granada

Resumen: En este trabajo analizamos el significado sobre la resolución de problemas matemáticos, que presentan las Bases Curriculares (Ministerio de Educación, 2012) en la educación básica chilena. A través de un análisis de contenido, encontramos que el currículo enfatiza aspectos teóricos de la resolución de problemas, dejando a un lado factores no cognitivos.

Resolución de problemas, educación primaria, currículo, análisis de contenido

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas ha evolucionado y se ha configurado como una herramienta fundamental para un desempeño competente en las sociedades actuales (English y Gainsburg, 2016; Lesh y Zawojewski, 2007). Dentro de la educación matemática, ésta noción ha adquirido relevancia a lo largo de los años. El Informe Cockcroft (1985), uno de los primeros documentos de carácter curricular ampliamente difundido, otorgó a la resolución de problemas un lugar central en las matemáticas escolares. En este contexto, el último marco teórico de la OECD para la evaluación PISA, establece que la resolución de problemas no solo es un medio para demostrar competencia matemática, sino que es una competencia por si misma (OECD, 2013). La educación matemática chilena no ha estado ajena a esta tendencia y el Mineduc (2012) ha otorgado a la resolución de problemas la nomenclatura de habilidad, separándola de los contenidos. Además, se ha realizado un esfuerzo por establecer objetivos de aprendizaje para cada nivel educativo, que guíen la enseñanza de la resolución de problemas.

Dado que dentro del currículo de las matemáticas escolares, la resolución de problemas se presenta desde diversas perspectivas, entre las que destacan: (a) como un medio o camino para lograr objetivos más amplios, y (b) como una habilidad o fin por sí misma (Stacey, 2005; Stanic y Kilpatrick, 1989), en este trabajo, nos centramos en identificar la conceptualización que presenta el currículo chileno en la educación básica.

MÉTODO

Este estudio utiliza la técnica del análisis de contenido, pues permite estudiar la naturaleza del discurso con detalle y en profundidad, pudiendo descubrir la estructura interna que subyace en la muestra de documentos (Krippendorff, 2004).

Para cumplir con el objetivo de este trabajo, se utilizaron dos tipos de unidades que conjuntamente colaboran para dar una mayor fiabilidad al estudio: sintácticas y temáticas (Krippendorff, 2004). Hemos definido las unidades de análisis como frases u oraciones que hagan referencia explícita a las palabras “resolución de problemas”, “situación problema” y “problema” y que además incluyan elementos sobre que debería lograrse con ellas, cómo deberían trabajarse o que a través de ellas se logre otro cometido.

Procedimiento y categorías de análisis

Para la realización del análisis, el primer paso fue establecer mediante un proceso deductivo categorías de análisis generales. Las categorías surgen de la investigación en resolución de problemas; partimos desde la categorización de Chapman (2015), y las ampliamos a partir de las ideas de Schoenfeld (1992), Castro (2008) y Kilpatrick (1978). Dichas categorías se corresponden con: problemas matemáticos, resolución de problemas matemáticos, invención de problemas, formas de pensar la resolución de problemas, formas de trabajar la resolución de problemas y factores afectivos y creencias. Estas categorías ya han sido validadas en estudios previos (e.g. Piñeiro, Castro y Castro-Rodríguez, 2016). Una vez realizado dicho análisis, se realizó un proceso inverso, es decir, inductivo dentro de cada categoría general. De este proceso surgen subcategorías para cada categoría.

RESULTADOS

Sobre la noción de problemas matemáticos, las directrices curriculares chilenas muestran una detallada conceptualización sobre lo que debe entenderse como problema. También encontramos clasificaciones como el contexto, rutinarios y no rutinarios, y la organización según el área de contenido en el que se deben resolver: sistema monetario, perímetros, polígonos, tiempo, longitud y masa, fracciones y decimales, ecuaciones e inecuaciones, y factores y múltiplos. Sobre los PAEV (problemas aritméticos de enunciado verbal), aparecen conocimientos como las cuatro operaciones básicas, las estrategias utilizadas para resolverlos (representaciones, familia de operaciones, combinaciones multiplicativas básicas, paréntesis) y las variables de tarea: cantidad de cifras de los números y cantidad de pasos para resolverlo.

Respecto a la resolución de problemas matemáticos, el documento presenta el modelo de Pólya y sus fases como idóneo para las actividades. Además muestra estrategias como búsqueda de patrones o uso de dibujos. Al describir sus objetivos para los cuatro pasos de Pólya, especifica que la comprensión del problema debe hacerse usando material concreto o gráfico. Se hace hincapié en el uso de diversidad de estrategias (sin detallarlas), saber seleccionarlas y usarlas de manera flexible; admitiendo la posibilidad de crear nuevas. También se señala el uso de la generalización de tipos de problemas a partir de la estrategia utilizada para resolverlo y aparece la argumentación y comunicación como elementos importantes en estas fases. Finalmente se hace relación entre la creatividad y la adaptación y/o creación de estrategias.

Para la categoría de invención de problemas, aparecen escasas referencias. Se hace énfasis en la invención de problemas utilizando operaciones aritméticas. También se señala, en menor medida, el contexto familiar para realizar esta tarea y el uso de TIC’s y representaciones (concretas, pictóricas y gráficas) para realizarlo.

Referido a las formas de pensar la resolución de problemas sólo aparecen cuatro menciones. La primera de ellas detalla las habilidades, destrezas y conocimientos que se ponen en juego para resolver problemas, sin explicar ninguna de ellas. Otra hace referencia a las potencialidades que tiene conocer las formas de pensar de los estudiantes cuando utilizan

estrategias. Las dos últimas, a ejemplos de tareas que ayudan a reconocer como piensan: patrones y uso de representaciones.

Sobre las formas de trabajar la resolución de problemas se presentan dos enfoques o vías de acceso en forma explícita: enseñar a través y para la resolución de problemas. Sin embargo, al ser identificada como una habilidad transversal que debe enseñarse en todos los niveles, se puede inferir que también se encuentra presente el enfoque de enseñanza sobre resolución de problemas. Además de estas menciones metodológicas, encontramos dos más referidas, una a evaluación y otra, una sugerencia específica.

Finalmente, sobre los factores afectivos y las creencias, encontramos tres alusiones. Estas mencionan que las emociones: perseverancia, seguridad, confianza y disfrute al resolver problemas se relacionan y son un resultado de una buena instrucción de la resolución de un problema.

A modo de síntesis, la tabla 1 muestra la frecuencia de las categorías y subcategorías consideradas en el currículo chileno de educación básica.

Categorías	Subcategorías	Frecuencia
Problemas matemáticos	a. Caracterización de problema	1
	b. Clasificación de problemas según criterios diversos	34
Resolución de problemas matemáticos	a. Heurísticos generales	12
	b. Heurísticos específicos	3
	c. Estrategias de otras áreas de contenido	0
	d. Estrategias personales	2
Invención de problemas	a. Contextos en dónde realizarla	5
	b. Beneficios de su uso	0
	c. Estrategias metodológicas	2
Formas de pensar la resolución de problemas	a. Pensamiento de los estudiantes	4
	b. Dificultades de los estudiantes	0
	c. Conductas de resolutores exitosos	0
Formas de trabajar la resolución de problemas	a. Enfoques o vías de acceso	5
	b. Metacognición	0
	c. Evaluación	1
	d. Estrategias metodológicas	2
Factores afectivos y creencias	a. Papel e implicaciones de diferentes emociones	3
	b. Rol del profesor	0

Tabla 1: Frecuencia de las subcategorías en el currículo chileno de educación básica.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados muestran que el currículo chileno presenta una fuerte tendencia a aspectos teóricos o conceptuales de la resolución de problemas, como son los tipos de problemas y la resolución de estos. Los datos revelan que no se consideran aspectos considerados por la investigación como centrales en la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo los factores no cognitivos. Este hecho puede ser debido a la tendencia del currículo de plasmar lo que una sociedad desea para sus ciudadanos. Sin embargo, nos indica una marcada preocupación por el contenido a enseñar y resta importancia a la complejidad que tiene la resolución de problemas para los estudiantes (Lesh y Zawojewski, 2007; Schoenfeld, 1992). Por otro lado, este mismo aspecto indica un intento por relacionar las matemáticas escolares con la resolución de problema, haciéndola explícita y evitando lo que Puig (2008) señala como un peligro: que esté en todos lados y por lo tanto en ninguno.

La descripción hallada muestra puntos coincidentes con los currículos anglosajones en los que la resolución de problemas toma dos posiciones: como una meta por si misma y como un camino para lograr lo que entendemos como competencia matemática (Stacey, 2005). No obstante, a pesar de este posicionamiento de los currículos, se observan numerosas alusiones a aplicar los contenidos en la resolución de problemas. Esta dicotomía podría provocar que los profesores interpreten el proceso de resolver problemas como resolver PAEV o problemas rutinarios, dejando de lado la resolución de problemas que involucre a los estudiantes en tareas de alto nivel cognitivo para las que no tienen estrategias inmediatas y que fomenten su desarrollo del pensamiento matemático.

Finalmente, a partir del desarrollo de este trabajo, surgen una serie de actuaciones futuras, cuyo tratamiento consideramos adecuadas para futuras líneas de investigación. Especialmente, consideramos que sería interesante estudiar la repercusión que tienen los documentos curriculares propuestos en las prácticas docentes y en los libros de texto.

Referencias

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz, España: SEIEM.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT*, *3*(1), 19-36.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockroft.* Madrid, España: MEC.

English, L. D. y Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st century mathematics curriculum. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education [3rd Ed.]* (Vol. 3, pp. 313-335). Nueva York, NY: Taylor and Francis.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (pp. 7-20). Columbia, OH: ERIC/SMEAC.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis* (2nd ed). Thousand Oaks, CA: Sage.

Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 763-804). Charlotte, N.C.: NCTM.

Ministerio de Educación. (2012). *Matemática. Educación Básica. Bases Curriculares*. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

OECD. (2013). *OECD skills outlook 2013*. París, Francia: OECD Publishing.

Piñeiro, J. L., Castro, E. y Castro-Rodríguez, E. (2016). Resultados PISA y resolución de problemas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *5*(2).

Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 225-235). Badajoz, España: SEIEM.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grows (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Nueva York, NY: Macmillan.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 341–350.

Stanic, G. M. A. y Kilpatrick, J. (1989). Historical perspective on problem solving in the mathematics curriculum. En R. I. Charles y E. A. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (Vol. 3, pp. 1-22). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES SOBRE LA ARGUMENTACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

H. Solar, J. Cervantes, R. Ulloa, A. Ortiz
Pontificia Universidad Católica de Chile, Universidad Autónoma de Guerrero, Universidad Católica de la Santísima Concepción

Resumen: A partir de una experiencia de formación de profesores de enseñanza básica en que se utiliza el modelo de formación "Mejoramiento de la Experiencia Docente", en esta comunicación se analizan las concepciones que tienen los docentes que participaron en la formación sobre la argumentación en el aula de matemáticas. Por medio de indicadores emergentes de sus respuestas se establece que los profesores tienen distintas interpretaciones del origen de la argumentación en el aula de matemáticas.

Competencias matemáticas, argumentación en el aula de matemáticas, formación continua de profesores, concepciones del profesorado

INTRODUCCIÓN

En el grupo de Investigación "Competencias Matemáticas" (COMMAT) se ha venido realizando investigaciones sobre el desarrollo de las competencias matemáticas en el aula, en particular, la argumentación (Solar, Azcárate, Deulofeu, 2012; Solar y Deulofeu, en prensa). En proyectos anteriores (Fonide 511091, Fondecyt 11130675) se ha concluido que, por medio de un proceso de formación continua, los profesores son capaces de cambiar sus prácticas para promover la argumentación en el aula de matemáticas. Este proceso de formación se llevó a cabo por medio del modelo "Mejoramiento de la Experiencia Docente" (Solar, Ortiz, Ulloa, en prensa). En esa comunicación se analiza de qué manera este modelo de formación impacta en las concepciones de los profesores sobre la argumentación en el aula de matemáticas.

MARCO TEÓRICO

Los antecedentes teóricos para fundamentar esta problemática consisten en el modelo de formación y sobre la argumentación en el aula de matemáticas.

Modelo de formación Mejoramiento de las Experiencia Docente

El modelo de formación "Mejoramiento de la Experiencia Docente" surgió progresivamente y se desarrolló a partir de diversos proyectos de investigación y de desarrollo ya descritos. En estas investigaciones, el modelo de formación permitió que los docentes se apropiaran de conocimiento pedagógico del contenido específico, articulado con prácticas para la gestión del aula matemática, en relación a la promoción del desarrollo de competencias matemáticas (Solar, Ortiz y Ulloa, en prensa). El modelo de formación Mejoramiento de la Experiencia Docente consta de 4 etapas: a) estudio de un conocimiento pedagógico del contenido (CPC) del aula de matemáticas mediante el análisis de la práctica de otros, b) análisis de la propia práctica, c) diseño e implementación de clases con criterios basados en el CPC, d) evaluación de la implementación. El modelo de formación se organiza en bases principios orientadores que actúan de forma transversal a la secuencia de formación: existencia con un Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC), trabajo colaborativo, estudio de un CPC

debe hacerme de manera articulada con las experiencias de aula y el estudio de la práctica se realiza con base a evidencias, en especial aquellas propias de su contexto.

Argumentación en el aula de Matemáticas

Entendemos la argumentación como el intento de convencer o persuadir al otro en el aula de matemáticas, y la diferenciamos de la "argumentación matemática", entendida como el proceso de prueba que enfrenta un resolutor ante una tarea matemática sin necesariamente confrontar dos puntos de vista (León y Calderón 2003). Basándose en el modelo de argumentación de Toulmin (1958), algunos trabajos han estudiado la construcción individual de los argumentos en el aula de matemáticas, mientras que otros investigadores, entre ellos Krummheuer (1995), han destacado la argumentación colectiva como una parte importante del discurso en el aula de matemáticas que incluye cualquier instancia en que el profesor y los estudiantes establecen una sentencia que se puede asociar a la argumentación. Los análisis de argumentación en el aula se sustentan en el modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958), que sigue un proceso lineal desde los datos hasta las conclusiones. Esta secuencia consta de seis elementos (Goizueta y Planas, 2013): Datos, Conclusión, Garantía, Respaldo, Calificador modal, Refutadores. Si bien la mayoría de los trabajos se enfocan a estudiar la argumentación en el aula de matemáticas, han aparecido investigaciones que han trasladado el foco a cómo el profesor entiende el desarrollo de la argumentación. Goizueta y Planas (2013) estudiaron las interpretaciones sobre la argumentación en clase de matemáticas de un grupo de profesores. De los resultados se destaca la difícil distinción que hacen los profesores de la estructura argumentativa. En esta misma línea, han aparecido otros estudios que utilizan la estructura argumentativa de Toulmin para analizar las respuestas de profesores que se exponen a situaciones hipotéticas de enseñanza y aprendizaje en el aula de matemáticas, en los cuales se han encontrado diferentes tipos de garantías que da el profesor en sus argumentos: de índole didáctico, curricular, pedagógico y personal (Nardi, Biza y Zachariades, 2012).

METODOLOGÍA

El estudio se realizó en el marco del proyecto Fondecyt 11130675 en que uno de sus objetivos era estudiar las condiciones para el desarrollo de la habilidad de argumentar en el aula de matemáticas. Para ello, se implementó un seminario de 1 año de duración, compuesto por 20 sesiones, en los que participaron 10 profesores de educación básica de la provincia de Concepción. Para el diseño del seminario se decidió utilizar el modelo de formación "Mejoramiento de Experiencia Docente" ya descrito. Se ha focalizado el análisis en la sesión 12 del seminario, correspondiente a la segunda etapa *Análisis de la práctica propia*. El propósito de esta sesión, era que los participantes identificarán acciones que promueven argumentación en estudiantes.

Para ello, se analizó un episodio de clase de una de las profesoras participantes, realizada a alumnos de 4to básico, cuyo foco estuvo en la resolución de un problema complejo no rutinario, bajo la consigna "Estimar la cantidad de dinero necesaria, lo más rápido posible, sin calculadora". En el anexo 1 se muestra parte de la sesión 12 con la tarea matemática de la clase. La sesión del seminario fue grabada y transcrita. El análisis se centra en las

respuestas de los docentes ante la pregunta si en el episodio mostrado existe un proceso argumentativo según el modelo de Toulmin.

La estrategia de análisis consiste en analizar las respuestas a partir de indicadores sobre la argumentación los que cuales se han definido de manera mixta, es decir provenientes de la literatura y emergentes. En la comunicación se muesra en análisis de tres indicadores que se asocian al significado de DATO que atribuyen los profesores.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En la estructura de Toulmin el primer elemento es el dato que es el punto de partida de quien argumenta, y puede ser un hecho o una información. De manera emergente en la sesión aparecieron tres interpretaciones distintas de datos: como enunciado, como desencadenante de la discusión, y como procedimiento.

Concepto de *Dato* como enunciado: dato como el enunciado del problema matemático o como valores pertenecientes al enunciado.

El enunciado del problema fue considerado como dato por parte de las profesoras, pero en sentidos diferentes; primero, se tiene que la profesora Claudia establece el dato como el problema en general, pero centrándose en el valor de la bebida, ya que fue esta la información que emplearon para la resolución del problema. Además, otra parte del enunciado que tomó esta profesora como parte del dato es la lista de precios, recalcando que de esa lista solo se empleó el precio de la bebida. Por consecuente el dato del problema lo entendió está profesora por: el precio de la bebida y la lista de los productos:

> Claudia: El problema en general, pero solamente considerando la bebida. O sea, el problema del enunciado, que Esteban está a cargo de organizar la convivencia de un grupo de nueve amigos. Eso. La siguiente, la lista de precios del supermercado, pero solamente se vio aquí que tomaron el precio de la bebida, se trabajó solamente con la bebida.

Luego, la profesora Isabel consideró el dato como el enunciado, pero tomó la parte inicial del enunciado del problema planteado. Esta profesora sustenta que con base en esta información se produce todo el desarrollo del problema:

> Isabel: Para mí el dato es cuando hay dos amigos que van a hacer una fiesta y quieren saber cuánto le salen las bebidas. Eso es todo, porque en base a eso se genera todo lo que ocurrió. O sea, entre esos niños que hayan dado una respuesta correcta sin haber dicho si estaba bueno o malo cuando pasó la niña y empezó de ahí el otro problema.

Concepto de *Dato* como desencadenante de la discusión: Cuando el problema a resolver tiene como dato la interpretación de la situación discursiva generada por el sujeto (profesor, alumno, etc.) con respecto al enunciado.

La profesora Sonia reconoció el dato del episodio de la clase como un episodio específico, donde una estudiante pasa a la pizarra, muestra el desarrollo de su ejercicio y genera una discusión con los compañeros del salón de clases. En otro momento del seminario la profesora Sonia reconoce que el proceso argumentativo de la clase sucede cuando la niña pasa a la pizarra y explica lo que hizo.

> Formador: Ok. ¿Sonia, cuál era tu dato?
>
> Sonia: Era en el proceso, en el episodio específico.

Formador: En la niña, en el episodio específico. Es decir cuando la niña sale adelante y muestra su desarrollo. ¿Tú te refieres al desarrollo específico con la descomposición que hace?

Sonia: Sí.

Concepto de *Dato* como procedimiento: El dato es considerado como los procedimientos matemáticos realizados con valores conocidos del enunciado.

Los datos en este indicador fueron reconocidos como el procedimiento de las operaciones: estimar y multiplicar. La profesora Mónica justifica su respuesta en que estas operaciones fueron resueltas con datos: el valor de la bebida y el número de personas.

Mónica: Para mí, cuando aproximan 490 a 500 y lo multiplican por 9, porque está trabajando solo con datos.

CONCLUSIONES

Las concepciones de las docentes en cuanto al origen de una argumentación, asociado al DATO en la estructura de Toulmin, se ha identificado en diferentes sentidos: en el dato como el enunciado, en el dato como desencadenante de discusión donde las profesoras fueron capaces de ver más allá de los datos e identificar una discusión y por último el dato como procedimiento centrado en el desarrollo del problema. La visión de dato que se promovía en el seminario era asociado a desencadenante de la discusión. En lo que sigue, se seguirán analizando las sesiones del seminario para indagar si existe un aumento de docentes que interpreten el dato como desencadenante de la discusión y de qué manera las diferentes etapas del modelo de formación están contribuyendo a ello.

Referencias

Goizueta, M. y Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 31 (1), 61-78.

León, O. y Calderón, D. (2003). Caracterización de los requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas en el aula. *Revista Ema*, 8(3), 297-321.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Nardi, E.; Biza, I. & Zachariades, T. (2012). 'Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 157–173.

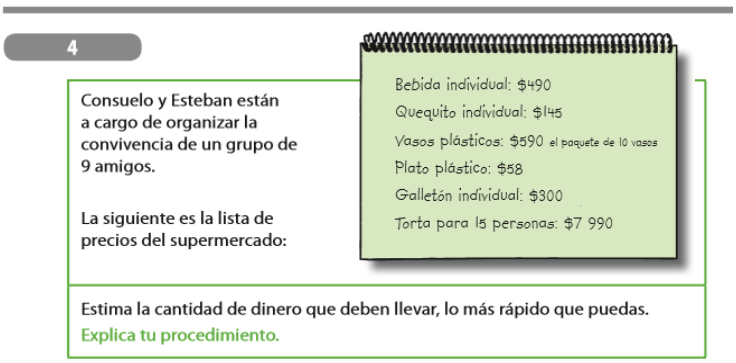
Solar, H., Azcárate, C. y Deulofeu, J. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias*. 30 (3), 133-154.

Solar, H. y Deulofeu, J. (en prensa). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *BOLEMA.*

Solar, H. Ortiz, A. y Ulloa. R. (en prensa). MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia. *Estudios pedagógicos.*

ANEXO 1: EXTRACTO SESIÓN 12

Actividad 1: Observar el episodio de la clase de Bernardita, en el cual se muestra parte de la gestión de la siguiente actividad*. Respecto a lo observado en el episodio, ¿existe un proceso argumentativo según el modelo de Toulmin? Justifique brevemente considerando los elementos de la estructura de Toulmin.



*Mineduc (2013). *Apoyo compartido. Matemática. Periodo 1. Cuaderno de trabajo*. Descargado el 20-08-2014 desde http://basica.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/25/2016/03/3Basico-Cuaderno_trabajo.pdf.

ANÁLISIS DE EVIDENCIAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN ESTUDIANTES DE 5º CURSO PRIMARIA

Karla Bastías Sepúlveda, Antonio Moreno Verdejo
Universidad de Granada

Resumen: El presente trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación "Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico", en España. Tiene como objetivo identificar evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de quinto curso de educación primaria. En el contexto de un experimento de enseñanza, se ha realizado un análisis cualitativo de los datos tomados de una sesión de clase, dirigida a un grupo de 24 estudiantes, en la cual se presentó una situación modelizable por una relación funcional (función lineal). El análisis de las transcripciones de la sesión, más las fichas de trabajo que completaron los estudiantes, ponen de manifiesto la presencia de diversas vinculaciones entre las variables de la relación funcional planteada en la tarea, así como las interpretaciones de la noción de variable y las distintas representaciones para explicarlas.

Pensamiento funcional, early algebra, relación funcional, variable, representación

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

A partir del pensamiento algebraico surge la propuesta early algebra que promueve la integración del álgebra en el currículo de educación primaria. El early algebra ofrece herramientas que pueden llevar a enriquecer la enseñanza de las matemáticas tanto en los grados primarios como en los grados posteriores. Existen diversos modos de pensamiento propios del algebra, cuando el foco matemático del pensamiento algebraico se sitúa en las funciones, se habla de pensamiento funcional. Smith (2008), lo define como el pensamiento representacional que estudia la relación entre dos o más cantidades variables, particularmente los tipos de pensamiento que van de relaciones específicas a generalizaciones.

La investigación del pensamiento funcional en estudiantes de primaria tiene como fundamentos el que puede servir de andamiaje en la instrucción, comenzando con los primeros grados. Además, las diversas relaciones funcionales, las formas de controlar y organizar datos, las operaciones matemáticas empleadas para interpretar las relaciones funcionales y cómo se expresan relaciones de covariación y correspondencia entre las cantidades justifican esta propuesta (Blanton y Kaput, 2011).

Los antecedentes de investigación han sido utilizados para analizar las interpretaciones empleadas por los estudiantes como respuesta a una tarea en la que está implicada una relación funcional. Algunas de estas investigaciones establecieron la presencia de relaciones de covariación, correspondencia y el uso de patrones recurrentes para establecer las relaciones entre las variables (e.g., Blanton, et al., 2011; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016; Smith, 2008).

Un elemento clave en el estudio del pensamiento funcional es la noción de variable. Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Murphy (2015) han investigado para

proporcionar evidencia, de que la noción de variables está al alcance de los alumnos de grados inferiores de educación primaria. Han identificando una variedad de interpretaciones sobre sobre esta notación efectuada por los mismos estudiantes.

En cuanto a la representación de las relaciones entre variables, Cañadas, et al. (2016), han encontrado que los niños de primaria pueden desarrollar y utilizar una variedad de herramientas de representación para razonar acerca de las relaciones funcionales.

Objetivos de investigación

En base a las ideas anteriores, nos hemos planteado el objetivo general de identificar evidencia de pensamiento funcional en estudiantes de quinto curso de educación primaria. Del objetivo general se desprenden tres objetivos específicos:

Analizar el uso de las representaciones en el desarrollo de una tarea sobre pensamiento funcional.

Identificar las principales relaciones entre variable establecida por los estudiantes de 5º de primaria investigado.

Estudiar el papel atribuido a la variable por los estudiantes de 5º de primaria investigado.

MÉTODO

Esta investigación es de tipo cualitativa. Diseñamos e implementamos un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), sobre el que hemos realizado un estudio de naturaleza exploratoria y descriptiva. El experimento de enseñanza consiste en la investigación del pensamiento funcional de un grupo de estudiantes de 5º año de primaria, realizado en cuatro sesiones, que implicaban el desarrollo de distintos problemas contextualizados. En este trabajo nos centramos en el análisis de la primera sesión. Los sujetos fueron 24 estudiantes de quinto curso de educación primaria (10-11 años), seleccionados de forma intencional de acuerdo con la disponibilidad del centro, un colegio privado de Granada, España. Los estudiantes no habían abordado los tópicos relacionados con el pensamiento funcional antes de la recolección de datos, debido a que es un contenido que no se imparte en cursos de primaria.

El instrumento utilizado en la recogida de datos, fue una tarea escrita compuesta por ocho cuestiones relacionadas con una situación modelizable por una relación funcional (función lineal). La recogida de información fue realizada a través de un protocolo escrito con la realización grupal del “problema de las camisetas”, registrado a través de la utilización de medios audiovisuales para la grabación de la sesión. El curso fue organizado en grupos de trabajo de 4 a 5 alumnos para analizar y debatir la tarea expuesta por los investigadores. El problema fue: “Carlos quiere vender camisetas con el escudo de su colegio para poder ir de viaje de estudios con su clase. Por cada camiseta ganaría 3 € ¿Cuánto dinero podría conseguir Carlos?”.

ANÁLISIS DE DATOS

Hemos determinado categorías donde se consideran como unidades de análisis las respuestas de los estudiantes que provienen de la transcripción, y las fichas de trabajo que han servido

como instrumento complementario de análisis. Las categorías han sido definidas en base al revisión teórica de la investigación y para su conceptualización se han tomado como referencia las categorías expuestas por Yañez (2015), la cuales han sido adecuadas para que aporten al desarrollo de los objetivos de esta investigación, con base en la información recogida y según la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990). Finalmente, utilizamos las siguientes categorías:

Evidencia pensamiento funcional (identifica una relación entre dos cantidades variables y describe el patrón apropiado que exprese dicha relación. Esta categoría implica tres subcategorías, covariación, correspondencia y patrón recursivo). Un ejemplo: es la respuesta de A1 a la pregunta "¿Cuántas camisetas crees que puede vender en una mañana? ¿Cuánto ganaría con ellas?"

1 A1: a lo mejor seis de su colegio quieren una camiseta y uno de otro, por ejemplo, y eso por tres, 21 euros, y 23 por 3, sesenta y nueve.

No evidencia pensamiento funcional (expresa respuestas no basadas en un patrón funcional adecuado y no identifica la relación entre variables). Un ejemplo: es la respuesta de A19 a la pregunta "Carlos no recuerda cuánto ganó ayer vendiendo camisetas. Si supiera cuántas camisetas vendió, ¿cómo puede saber el dinero ganado ayer?"

2 A19: sumando nueve más seis y después ponderar 15 más 69.

Interpretación de variable (categoría que implica las siguientes subcategorías: cantidad desconocida, cantidad variable, cantidad numérica, etiqueta u objeto y número generalizado). Un ejemplo: es la respuesta de A10, quien interpreta la variable como "cantidad variable", en la pregunta "Carlos ha vendido todas sus camisetas. Como no tiene suficiente dinero ha realizado un pedido extra de camisetas. ¿Cuánto podrá ganar con ese pedido extra?"

3 A10: el segundo pedido depende de cuantas camisetas pide, si solamente vende una camiseta va a ganar 3 euros, pero si pide 100 va a ganar 300.

Representaciones (esta categoría implica los sistemas de representación como subcategorías: verbal, tabular, pictórica, simbólica, que engloba dos subtipos: numéricas y algebraicas, y múltiples). Un ejemplo es la representación verbal que se observa en el siguiente fragmento:

4 A9: y como 50 por tres es 150 y 25 por 3 es 75 y sumamos los dos es 225.

CONCLUSIONES

La información de la sesión de trabajo en la cual hemos basado nuestro estudio, nos ha permitido identificar evidencias de pensamiento funcional en los estudiantes de quinto curso de educación primaria. En el desarrollo de las preguntas sobre la tarea, los estudiantes fueron reconociendo la relación entre las variables "número de camisetas vendidas y ganancia total", siendo la relación de correspondencia, la primera que explicitan y la que se manifiesta claramente en el desarrollo de la actividad. La covariación se identificó en respuestas a preguntas que propiciaban el uso de este tipo de relación funcional. En cuanto a la manifestación del patrón recursivo, es un tipo de relación no identificado.

El análisis de los datos ha demostrado que los estudiantes interpretan de diversas formas la variable. Además, los resultados nos dan cuenta de nuevos hallazgos, relacionado con la interpretación de la variable como un número decimal y como la relación que hace un estudiante con la letra de una ecuación.

La mayoría de estudiantes logró modelar un sistema de representación apropiado para representar el patrón de la relación entre cantidades variables. La mayoría de los estudiantes expresaron el patrón funcional a través de la representación verbal, sin necesidad de utilizar ejemplos. El uso de tablas no es una representación que utilicen de manera natural. Desconocen cómo construirlas. Sin embargo, cuando se les facilita dicho modelo de representación les sirve de ayuda para expresar algebraicamente la relación funcional. Además, inferimos que debido al desconocimiento de que elaboración de tablas, esto pudo suponer que no apareciera el uso de la recursividad.

Con este trabajo hemos dado cuenta que el problema propuesto ha sido útil para promover pensamiento funcional en alumnos de 5º curso de primaria, ya que se evidencia que los estudiantes establecieron relaciones entre variables y expresaron el patrón funcional adecuado. Por tanto, es viable proponer en el aula este tipo de problemas como forma de promover el pensamiento algebraico.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5–23). Berlin, Alemania: Springer.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Murphy, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 34-63.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, 13(1), 3-21.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, (3), 135-156.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En Kaput, J. J., Carraher, D. W., y Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.133-160) Nueva York, NY: Routledge.

Yáñez, J. (2015). Pensamiento funcional puesto de manifiesto por alumnos de 5º de educación primaria (*Trabajo fin de máster*). Universidad de Granada, España.

VALORACIÓN DE LOS ESTUDIANTES EN RELACIÓN AL USO DE SECUENCIAS DIDÁCTICAS COMO UNA ESTRATEGIA PARA FACILITAR SUS APRENDIZAJES

Cecilia Herrera Cruz, Ricardo Monge Rogel, Ángela Silva Salse
Universidad de las Américas

Resumen: La presente investigación da los resultados de una experiencia llevada a cabo el primer semestre del año 2016 en la asignatura Introducción a la Matemática Aplicada de la Universidad de Las Américas con estudiantes de primer año. Para este curso se implementó el uso de Secuencias Didácticas en el aula como una forma de generar el aprendizaje colaborativo y activo acorde al modelo educativo de la institución. El problema se presenta porque no se estaba utilizando una metodología centrada en el estudiante y además obtenían bajos rendimientos y alta deserción. Como la propuesta didáctica incluía un cambio de rol en el estudiante, transformándose en el actor principal dentro de su proceso de aprendizaje, se hizo necesario para los investigadores determinar sus opiniones en relación a si ¿valoran positivamente el uso de Secuencias Didácticas como una estrategia que les facilita sus aprendizajes? y si ¿la valoración es distinta si los estudiantes han cursado la asignatura por primera vez, o más veces? Los resultados muestran una valoración positiva hacia el cambio metodológico y se lograron sugerencias de mejoras que serán de gran utilidad para perfeccionar el material para próximos semestres.

Secuencia didáctica, didáctica, aprendizaje activo, aprendizaje colaborativo

INTRODUCCIÓN

La presente investigación recoge las valoraciones de los estudiantes en relación al cambio metodológico propuesto en el curso Introducción a la Matemática Aplicada.

La experiencia consistió en trabajar en el aula durante el primer semestre de 2016 con 12 Secuencias Didácticas que fueron diseñadas y construidas por la profesora Cecilia Herrera y el equipo del Instituto de Matemática, Física y Estadística y revisadas por los profesores que dictaban la asignatura.

Por otra parte, el estudiante deja el rol pasivo al cual estaba acostumbrado en las clases de matemática en la búsqueda de la obtención de aprendizajes activos y colaborativos, ya que cada uno era responsable del aprendizaje propio, pero también del de su grupo. Como el estudiante pasa a ser el principal actor de este proceso sus opiniones entregadas fueron de mucha importancia para los investigadores.

Los investigadores llegaron al uso de las secuencias didácticas en el aula, después de una búsqueda de estrategias metodológicas que mejoraran los rendimientos y bajaran la deserción en los estudiantes, pero que además consideraran las directrices que plantea el Modelo Educativo de La Universidad de Las Américas, el cual promueve el uso de métodos, estrategias y técnicas que abandonen el aprendizaje pasivo centrado en la retención de conocimientos, estrategias que potencien la creatividad y reflexión en los estudiantes y cuya finalidad sea que éstos se conviertan en educandos autónomos.

MARCO TEÓRICO

Para diseñar e implementar en el aula las secuencias didácticas como un cambio en la metodología de trabajo, nos basamos fundamentalmente en las ideas planeadas por Tobón y Pimienta(2010) quienes sugieren por ejemplo, un cambio en el rol del profesor el cual debe propiciar instancias que lleven al estudiante al logro del aprendizaje, especialmente ellos hacen referencia al aprendizaje colaborativo. Hacen además referencia a la importancia del problema, que este sea significativo y pertinente para el estudiante. También nos proporcionan algunos ejemplos de secuencias didácticas.

Díaz (2013) nos entrega algunos lineamientos a considerar para la construcción de secuencias didácticas y la importancia de que estas incluyan tres fases: apertura, desarrollo y cierre. Oicata, Diaz y Talero (2013) proponen algunos ejemplos de secuencias didácticas en el área de las ciencias naturales y matemáticas y hablan de que las secuencias ayudan tanto a los estudiantes como a los profesores enriqueciendo sus conocimientos didácticos. Schwartz (1995) hablan justamente de los beneficios que trae enseñar bajo este modelo ya que los estudiantes no solo escuchan sino también reflexionan, comunican, interactúan y experimentan. García y Troyano (2010) hablan del aprendizaje colaborativo y la importancia que radica que en el aula se logre ya que el aprendizaje es más duradero y significativo para los estudiantes.

OBJETIVO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

Analizar la valoración que tienen los estudiantes del primer semestre del año 2016 de la asignatura Introducción a la Matemática Aplicada de la Universidad de Las Américas, respecto a la utilización de secuencias didácticas como un recurso que potencia su aprendizaje.

DESARROLLO

La Universidad de Las Américas, promueve en su modelo educativo que “en el caso del ciclo inicial, deben usarse predominantemente métodos, estrategias y técnicas que permitan a los estudiantes desarrollar habilidades deseables para tener éxito en la formación universitaria, abandonando así el aprendizaje pasivo centrado en la retención de conocimientos”, fue así que en la asignatura Introducción a la Matemática Aplicada, el primer semestre del 2016, hubo modificaciones en la forma en que los profesores fueron abordando los contenidos en el aula. Esta experiencia se aplicó a 23 cursos a nivel nacional e impactó a número estimado de 1.000 estudiantes.

A partir de esta fecha se comenzó a trabajar semanalmente con Secuencias Didácticas en las cuales, con una estrategia de trabajo colaborativo, en donde los estudiantes iban desarrollando las diversas actividades propuestas en este material. Esta metodología pretendía que los estudiantes lograran en el aula aprendizajes activos. Por esta razón, en todas las clases se generaban grupos de trabajos y el profesor cambiaba su rol, siendo ahora un mediador de los aprendizajes.

Para esta propuesta los investigadores querían conocer el grado de percepción hacia este cambio metodológico. Por tal razón, a los investigadores les interesaba contrastar la siguiente hipótesis:

¿Valoran los estudiantes el uso de las secuencias didácticas como un recurso que los ayuda a alcanzar los resultados de aprendizaje de la asignatura? y sus respuestas, ¿guardan relación si han tomado el curso por primera vez o segunda o más veces?

Como una manera de responder las preguntas anteriores, al finalizar el semestre se aplicó una encuesta voluntaria abierta y cerrada la cual fue contestada por 587 estudiantes.

DISEÑO METODOLÓGICO

Se hizo un estudio en base a un cuestionario de apreciación que fue contestado voluntariamente por los estudiantes que cursaban la asignatura el cual fue analizado a través de algunas medidas estadísticas.

Sobre el Cuestionario

El cuestionario fue elaborado en base a 9 preguntas, 6 de ellas eran cerradas y 3 abiertas. El instrumento de consulta a los estudiantes fue elaborado por los investigadores y sometidos a juicio de expertos del área. Los estudiantes respondieron en forma anónima, voluntaria y sin límite de tiempo. Las preguntas fueron formuladas para conocer las opiniones de los estudiantes sobre: 1) Adhesión a la metodología empleada y 2) evaluación del material utilizado. Se decidió optar por preguntas abiertas y cerradas ya que las abiertas eran más rápidas de contestar, tabular y analizar, pero las abiertas permitían que el estudiante se expresara más libremente en sus opiniones. El cuestionario se llevó a juicio de expertos los cuales validaron el instrumento. Finalmente el cuestionario fue aplicado voluntariamente a los estudiantes durante la semana n°16 en el horario de clases.

Definición conceptual de las variables

Para definir las variables y dimensiones, se consideró el marco teórico y las características de la investigación:

Adhesión a la metodología empleada: Grado de aceptación de parte de los estudiantes de la propuesta didáctica empleada en relación a:

Favorecer la asistencia a clases

Facilitar la participación en el proceso de aprendizaje

Facilitar el logro de los Resultados de Aprendizajes.

Perfeccionar habilidades y competencias genéricas de utilidad en otros ámbitos sociales y laborales, como es la búsqueda y captura de información, trabajo en equipo, entre otros.

Evaluación del material utilizado: Material del curso compuesto por 12 Secuencias Didácticas, aplicadas semanalmente durante el semestre, las cuales se elaboraron según los lineamientos entregados por Díaz (2013), Tobón y Pimienta(2010), entre otros.

La fiabilidad del cuestionario fue calculada a través del Alfa de Cronbach, que para el conjunto de datos aplicados dio un valor de 0,951 lo que nos indica un alto grado de consistencia interna de los ítems analizados.

RESULTADOS

A continuación se presentan los principales resultados de la investigación. Los estudiantes participantes pertenecían a las carreras de: Enfermería, Nutrición y Dietética, Construcción, Medicina Veterinaria, Hotelería y Turismo, Agronomía, Kinesiología, Terapia Ocupacional, Gastronomía, Arquitectura y Fonoaudiología. La carrera con más estudiantes en la asignatura bajo estudio es Enfermería (61% del total).

Respecto de la consulta a los estudiantes sobre la valoración que realizan los estudiantes a la metodología de "Secuencias didácticas" en la Tabla 1 se presenta la distribución de frecuencia de las respuestas de los estudiantes para cada sub ítem.

Ítem 2. La metodología de "Secuencias didácticas…"	1	2	3	4
2.1 Favorece mi asistencia a clases. (2)	37	37	223	288
2.2 Incentiva mi participación en clases. (4)	23	66	302	192
2.3 Facilita que logre los resultados de aprendizaje de esta asignatura. (8)	28	68	263	220
2.4 Facilita mi participación general en el proceso de aprendizaje (mi propio aprendizaje y el aprendizaje con mis compañeros) de esta asignatura. (5)	25	66	286	205
2.5 Me permite discernir valores susceptibles de hacerme mejorar como estudiante y como persona (ética, responsabilidad, compromiso, respeto, tolerancia, etc.). (7)	26	68	308	178
2.6 Me permite perfeccionar mis habilidades y competencias genéricas de utilidad en otros ámbitos sociales y laborales (búsqueda y captura de información, tratamiento de información, realización de síntesis, trabajo en equipo, etc.). (8)	26	71	296	186
2.7 Mi desarrollo en esta asignatura es mejor que la tradicional fundamentada principalmente en clases magistrales (clases expositivas) (6)	36	104	285	156

Tabla 1. Distribución de frecuencias para los ítems consultados a los estudiantes. (Los valores entre paréntesis indican el número de datos perdidos) (1=Totalmente en desacuerdo, 2=En desacuerdo, 3=De acuerdo, 4=Totalmente de acuerdo) (Fuente: elaboración propia).

De acuerdo a estos resultados se puede establecer que con la metodología propuesta se logró el objetivo planteado. Finalmente frente a la pregunta ¿Le gustaría que las clases del próximo semestre tuvieran esta metodología de "Secuencias Didácticas"? un 81% de los estudiantes respondió que sí.

CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos, podemos establecer que los estudiantes del grupo estudiado, establecen una valoración positiva de la metodología llamada aquí "Secuencias didácticas", tanto, en que: favorece su asistencia a clases, incentiva la participación durante la clase, facilita el logro de los resultados de aprendizaje, y es preferida respecto de una clase tradicional expositiva.

Como trabajo a futuro, los investigadores indagarán sobre el impacto de la metodología de "Secuencias didácticas" en los rendimientos académicos así como también la valoración hacen los docentes al trabajo con esta metodología. Asimismo cobra especial interés indagar en profundidad la distribución de respuesta que realizaron los estudiantes en el sub ítem 2.7 referida a la comparación con las clases magistrales.

Referencias

Oicata Ojeda, L., Díaz Barragán, N., & Talero López, P. (2013). *Secuencias Didácticas en Ciencias Naturales y Matemáticas para educación media.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional - Colombia.

Díaz Barriga, Á. (2013). Secuencias de aprendizaje ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Revista de Curriculum y Formación del Profesorado*, 11-33.

García, A., & Troyano, Y. (2010). Aprendizaje cooperativo en personas mayores universitarias: Estrategias de implementación el Espacio Eurpeo de Educación Superior. *Revista interamericana de educacion de adulto*.

Schwartz, S., & Pollishuke, M. (1995). *Aprendizaje activo: Una organización de la clase centrada en el alumnado.* Madrid: Narcea.

Tobón, S., & Pimienta, J. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias.* México: Pearson Education.

ALGUNOS CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN LA NOCIÓN DE LÍMITE EN ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA

Daniela Araya, Wilson Gordillo
Universidad San Sebastián, Universidad de Los Lagos, Universidad Distrital

Resumen: En este trabajo analizamos las respuestas a tareas propuestas sobre la noción de límite a estudiantes de pedagogía de educación media en matemática de un curso de cálculo diferencial. Utilizando herramientas del Enfoque Ontosemiótico, realizamos un análisis de las respuestas, en la relación a la tarea propuesta–estudiante, lo que permitió proponer categorías cognitivas comunes para detectar algunos conflictos semióticos en la introducción de la noción de límite.

Límite, pensamiento variacional, configuración ontosemiótica, conflicto semiótico

INTRODUCCIÓN

La noción de límite ha tenido gran interés en investigaciones como la de Artigue (1995), Blázquez y Ortega (2001), entre otros. Han sido muchos los elementos que se analizan en esta noción, entre ellos errores, dificultades de enseñanza y aprendizaje.

El propósito de esta investigación es identificar los conflictos semióticos que tienen los estudiantes cuando se les pide resolver tareas que introducen la noción de límite. Asimismo, analizamos las respuestas dadas por los estudiantes con las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico (Godino, 2002), con este análisis se busca categorizar algunos conflictos semióticos que se presentan en los estudiantes con la noción.

MARCO TEÓRICO

En este trabajo utilizamos la noción de *configuración ontosemiótica* (Pino-Fan & Font, 2015), proporcionada por el marco teórico conocido como *enfoque ontosemiótico* (EOS). Esta configuración puede ser de carácter epistémica o cognitiva, según se refiera a objetos y procesos matemáticos institucionales o personales, respectivamente. Se ha utilizado porque permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen y emergen de la practica matemática, además, permite realizar detalladamente el análisis de los contenidos que se movilizan en las prácticas necesarias para resolver la tarea. ~~y~~ La herramienta *configuración cognitiva* ayuda caracterizar las soluciones plausibles y de esta forma permite identificar posibles *conflictos semióticos* definidos como "disparidad o diferencia de interpretación entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)." (Godino, Batanero & Font, 2007, p. 133).

METODOLOGÍA

Inicialmente se diseña varios tipos de tareas, las respuestas institucionales a las tareas fueron analizadas con la herramienta configuración ontosemiótica epistémica para identificar los objetos matemáticos primarios. Posteriormente se aplica el reactivo a 17 estudiantes de pedagogía media en matemática que cursan cálculo diferencial. Se analizan las respuestas dadas por los estudiantes con la herramienta *configuración ontosemiótica* y se contrastan en

las respuestas institucionales para encontrar coincidencias o disparidades con el fin de identificar conflictos semióticos en la noción de límite.

TAREAS PROPUESTAS

El cuestionario propuesto consta de 5 tareas, cada una de ellas aborda la noción de límite desde su significado personal hasta el uso de la definición atribuida a Weierstrass. (citado en Bottazzini, 1986).

A modo de ejemplo en la tabla 1, se presenta la tarea 3 del cuestionario acompañada de la respuesta institucional.

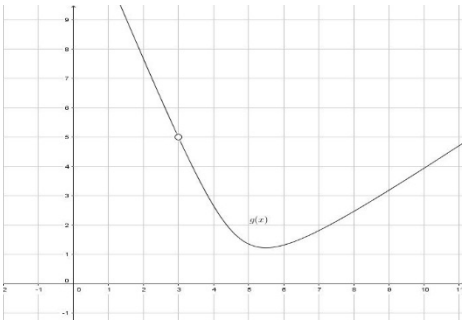
Tarea 3	Respuesta Institucional
Considere la función $\boldsymbol{g}$, tal que $\boldsymbol{g}: \mathbb{R} - \{\mathbf{3}\} \rightarrow \mathbb{R} - \{\mathbf{5}\}$ tenga la siguiente gráfica.  ¿Existe $\boldsymbol{\delta > 0}$ tal que si $\boldsymbol{|x-3| < \delta}$ entonces $\boldsymbol{|g(x)-5| < 0,000004}$? Justifique su respuesta.	Según la gráfica de $\boldsymbol{g}$, se tiene que existen los límites laterales de $\boldsymbol{g}$ en el punto $\boldsymbol{x = 3}$, $$\boldsymbol{\lim_{x\to 3^-} g(x) = 5 \; y \; \lim_{x\to 3^+} g(x) = 5.}$$ Por tanto, existe el límite en $\boldsymbol{x = 3}$, $$\boldsymbol{\lim_{x\to 3} g(x) = 5}$$ que es equivalente a afirmar $$\boldsymbol{\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ con\ \delta\,(\varepsilon,\ 3)\ tal\ que\ si}$$ $\boldsymbol{|x-3| < \delta \ \Rightarrow\ |g(x)-5| < \varepsilon}$. En particular para $\boldsymbol{\varepsilon = 0,000004}$ existe $\boldsymbol{\delta > 0}$ tal que cumple con la condición solicitada.

Tabla 1: Tarea 3 y respuesta institucional

Con la respuesta institucional se hace un análisis ontosemiotico de las tareas, como el propuesto por Gordillo y Pino-Fan (2015), para reconocer los objetos matemáticos involucrados en la respuesta. A continuación, se muestran algunos de los objetos identificados.

Elementos lingüísticos: son los símbolos, las notaciones y las expresiones algebraicas que denotan la noción de límite, por ejemplo:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 3} g(x) = 5}$$

Situaciones/Problemas: en este caso sería la tarea propuesta.

Conceptos/Definiciones: sería la descripción de límites, mediante símbolos $\boldsymbol{\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ con\ \delta\,(\varepsilon,\ 3)\ tal\ que\ si\ |x-3| < \delta \ \Rightarrow\ |g(x)-5| < \varepsilon}$.

Proposiciones/Propiedades: La proposición involucrada que ayuda a resolver esta tarea es el teorema de existencia de límite.

Procedimientos: El procedimiento utilizado, es particularizar el radio ε.

Argumentos: Los argumentos se desprenden de la gráfica de la función *g* y la aplicación del teorema de existencia de límite.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

Para el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, se hace el desglose de los objetos matemáticos primarios que emergen, cada respuesta es comparada con el fin de identificar elementos comunes y de esta forma caracterizar cognitivamente las respuestas dadas.

Un ejemplo de análisis de las respuestas dadas por los dos estudiantes (E1 y E2), se presenta en la figura 1.

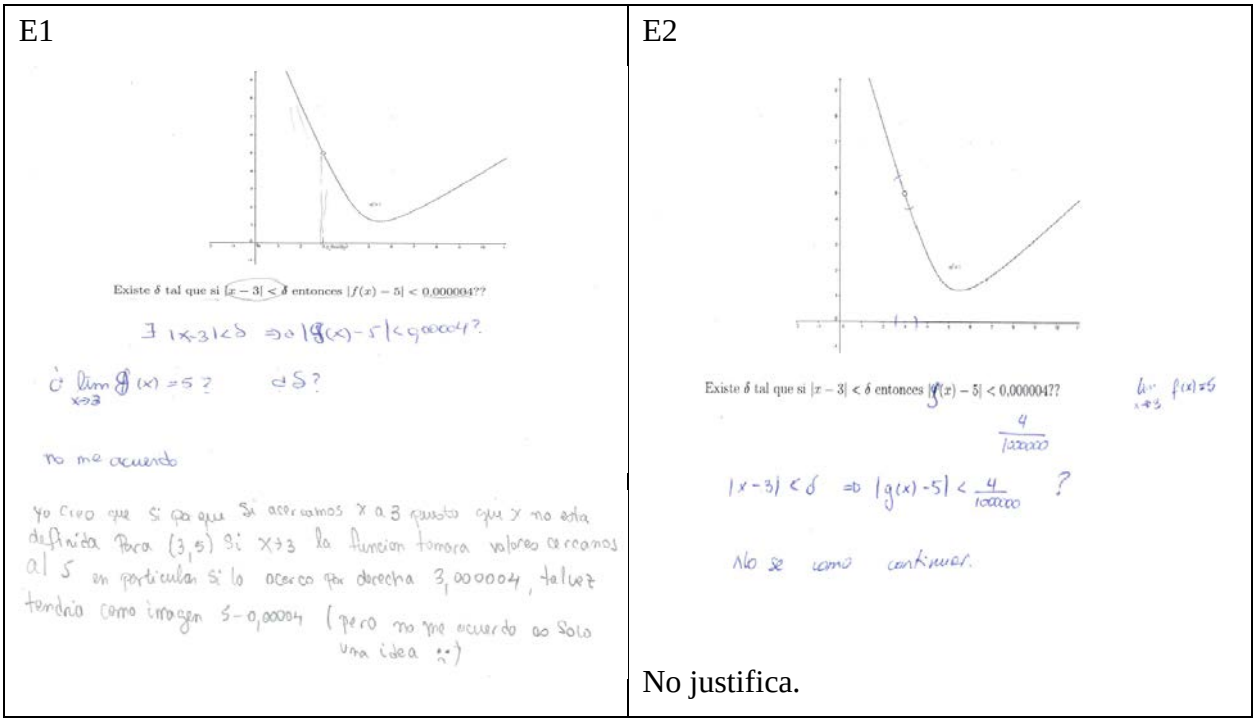


Figura 1. Respuestas estudiantes E1 y E2.

En las respuestas dadas por el estudiante (E1), se identifican los siguientes elementos lingüísticos verbales y algebraicos a través de los cuales aborda los conceptos/definiciones de límite. El uso de la gráfica, es primordial al señalar en la curva que representa la función, la posible existencia del límite en el punto dado. Las proposiciones/propiedades que utiliza están dadas por el teorema de existencia de límite, el cual se es expresada de forma verbal. Sus argumentos están dados al usar verbalmente la demostración solicitada. Por último, no se identifica en la respuesta de este estudiante algún tipo de procedimiento algorítmico. Con respecto al estudiante E2, se puede inferir que los conceptos/definiciones de límite se identifican de manera gráfica, dado que identifica los intervalos y "raya" la curva. Las proposiciones/propiedades utilizadas es el teorema de existencia de límite, que es expresada mediante el análisis de la gráfica de la función y por medio de ésta afirma la existencia de límite. Sin embargo, la respuesta no muestra argumentos que justifique sus procedimientos.

CONCLUSIONES

Al comparar los objetos matemáticos primarios de las respuestas entregadas por los estudiantes, con el desglose de los objetos matemáticos primarios de la respuesta institucional, se evidencia disparidad entre cada uno de estos elementos, esta disparidad lleva a inferir un conflicto semiótico (Godino, Batanero & Font, 2007), entre la institución y los estudiantes, esto conlleva a que la noción de límite pueda generar mala comprensión, a pesar que se identifica e interpreta correctamente en la gráfica de la función. Sin embargo, esta concepción carece de significado dado que no pueden interpretar la definición propuesta por Weierstrass y resolver la tarea solicitada. Este hecho se puede deber a que la enseñanza de esta noción, se basa principalmente en el cálculo de límites de forma algorítmica la cual está desprovista de significado. (Férnandez, 2000).

Por otra parte, se validan las herramientas propuestas por el EOS las cuales se prevén como potentes para el análisis de contenido de tareas y respuestas, este análisis ontosemiótico (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) permitió el desglose de objetos matemáticos primarios, que con características comunes generaron configuraciones cognitivas de la noción.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 97-140) México: Grupo editorial Iberoamérica.

Bottazzini, U. (1986). *The higher calculus: A history real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlang.

Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 219-236.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.

Fernandez, M. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema de límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(2), 171-187.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education.* 39(1), 127-135.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2015). Un ejemplo de análisis ontosemiótico para una tarea de antiderivada. En Vásquez, C,. Rivas, H., Pincheira, N., Rojas, F., Solar, H., Chandía, E., & Parraguez, M. (Eds.), *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX*, (pp.170-175). Villarica: SOCHIEM.

Pino-Fan, L., & Font, V. (2015). A methodology for the design of questionnaires to explore relevant aspects of didactic-mathematical knowledge of teachers. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 25-32). Hobart, Australia: PME.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CONTEXTOS DE POBREZA: EXPERIENCIA DE UNA ASESORÍA TÉCNICA EN RENCA

Roxana Aranda, Francisco Rojas
Centro Educacional Goyenechea

Resumen: El siguiente artículo presenta el análisis de la experiencia de una asesoría técnica en Educación Matemática realizada durante los años 2015 y 2016, en un colegio con alto índice de vulnerabilidad y categorizado como "en recuperación" por la Agencia de Calidad de la Educación. El propósito central de dicha asesoría fue mejorar la calidad de la enseñanza y los resultados de aprendizajes de los estudiantes. Constó del acompañamiento e intervención en clases de matemática, así como de sesiones de trabajo pedagógico con los docentes, en las que se analizaban las clases respecto del currículum, la didáctica, las evaluaciones y la gestión de aula. Con ello, se buscó dejar instaladas las capacidades técnicas en el establecimiento, de manera que los docentes las puedan aplicar y seguir desarrollando en forma autónoma a través del tiempo. A continuación, se establecen las características del contexto en que se enmarcó la asesoría, luego se muestra el modelo de trabajo con los docentes del establecimiento y finalmente se sintetizan los principales cambios implementados y sus resultados.

Educación matemática, pobreza, acompañamiento docente, eficacia escolar

INTRODUCCIÓN

El Centro Educacional Goyenechea (CEG) se fundó en 1985 como la escuela general básica "San Benildo" en la comuna de Renca. Posteriormente, pasó a ser propiedad de la sociedad de colegios Britania, que en 2006 hizo crisis con un gran revuelo mediático, puesto que su sostenedor se retiró con los dineros de mantención del establecimiento y el Ministerio de Educación decidió cerrar el colegio por mala gestión. A partir de la férrea lucha que dieron sus directivos, docentes, apoderados y estudiantes, lograron contactar a la sociedad educacional Santa Teresita, quienes asumieron el riesgo de tomar la responsabilidad administrativa y pedagógica del colegio con una visión de mejora que comenzaron a implementar en el 2007, priorizando inicialmente la normalización de los servicios básicos y su funcionamiento hasta el 2013, para posteriormente pasar a una etapa de mejoramiento centrada en la calidad de la educación que se imparte, desde el 2014 en adelante.

Actualmente, el CEG es un establecimiento particular subvencionado sin selección, gratuito, no cobra matrícula ni mensualidad y entrega todos los materiales escolares a los estudiantes. Ofrece el currículum que propone el Ministerio de Educación desde Pre-escolar hasta 4º Medio en modalidad Técnico Profesional con las especialidades de Educación Parvularia y Contabilidad, además de enseñanza media para adultos. Más del 90% de su estudiantado proviene de poblaciones cercanas de la comuna y tiene un índice de vulnerabilidad del 88% con una matrícula de 612 estudiantes.

En este contexto, el establecimiento contrató desde al año 2010 la Asistencia Técnica Educativa de Focoescuela, asociada a Traverso Consultores, teniendo múltiples versiones a través del tiempo, desde centrada únicamente en la producción de recursos educativos en sus inicios (planificaciones y guías), pasando por la supervisión del desempeño docente y el

apoyo focalizado en temas de gestión directiva, hasta el modelo de acompañamiento docente actual que se presentará a continuación.

DESARROLLO

La asesoría técnica en Matemática se enmarcó dentro de un contexto más amplio del servicio, que contempló también el área de gestión (a través de la implementación del Programa de Integración Escolar), el área técnico pedagógica (a través de la conformación de un gabinete técnico que opera dentro del colegio para enseñanza básica) y el acompañamiento a los docentes titulares de lenguaje y matemática. Para efectos de este reporte, nos centraremos en el modelo de acompañamiento a los docentes de matemática de primer ciclo, el cual consideró 4 dimensiones:

Análisis curricular: que implicó la revisión de Bases Curriculares, Programas de Estudio, material PAC (Programa de Apoyo Compartido), las planificaciones de clases, y la selección y progresión de los aprendizajes. Se ajustaron las planificaciones clase a clase, permitiendo asegurar la cobertura curricular y establecer una clara progresión en los niveles de habilidad para el logro de cada objetivo de aprendizaje. También se aseguró el vínculo entre las clases de horario obligatorio (cátedra) con las clases de taller de matemáticas de las horas de libre disposición, las cuales cumplieron una doble funcionalidad (reforzamiento y complemento para el desarrollo del gusto por las matemáticas a través del juego).

Didáctica de las Matemáticas: que incluyó las concepciones sobre la disciplina, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, las estrategias para el desarrollo de habilidades de razonamiento matemático, la organización del conocimiento matemático y su representación a través del lenguaje natural, pictórico, notacional y simbólico-algebraico (Soriano, 1996). Se reorganizó el aula en grupos, se pasó de clases expositivas a clases participativas, reduciendo la presentación del docente a un 40% del tiempo de la clase y dejando el 60% restante para trabajo práctico de los estudiantes. Se estableció una clara estructura de inicio, desarrollo y cierre de la clase, explicitando la transición también entre distintas clases (a través del uso de mapas conceptuales). Finalmente, se incorporó en todas las clases la resolución de problemas, mediante el uso del método de G. Pólya, el registro escrito en los cuadernos y la expresión oral del razonamiento matemático en los distintos niveles del lenguaje.

Evaluación: que involucró el diseño, revisión y ajuste de instrumentos de evaluación, el apoyo en el procesamiento y análisis de los resultados, así como su uso para tomar decisiones respecto a la retroalimentación y reorganización de la enseñanza. Se establecieron calendarios de evaluaciones cada tres semanas, con instrumentos que reprodujeron las principales actividades realizadas en cada clase. Se redujo el tiempo de corrección y análisis de los resultados para que fuera oportuno y se implementó el uso de los datos para reprogramar el taller de libre disposición, donde se reforzaban los contenidos con menor logro, mediante la incorporación de actividades lúdicas.

Gestión de Aula: que buscó probar diversas estrategias de manejo de grupo para la generación de un ambiente propicio para el aprendizaje, desarrollar la motivación y gusto por la matemática y la incorporación de técnicas participativas en aula. Se incorporaron

dinámicas para la concentración y autorregulación del comportamiento, estrategias para el manejo de conflictos, el seguimiento individual de actitudes, a través del registro sistemático y persistente en el tiempo, la retroalimentación y estímulo mediante refuerzo positivo, así como la explicitación de metas asociadas a conducta (contrato didáctico).

Para trabajar estas cuatro dimensiones con los docentes durante todo el año, se generó un programa de asistencia técnica semanal, que incluyó:

8 horas pedagógicas de observación, modelamiento e intervención de la asesora especialista en las clases y el apoyo directo a los estudiantes durante las actividades realizadas en aula.

4 horas pedagógicas de trabajo técnico con los docentes, en las que se hizo retroalimentación sobre lo observado en clases, se prepararon las clases de la semana siguiente, se revisó material didáctico (guías, actividades, recursos), se analizaron los resultados de las evaluaciones y se diseñaron mecanismos de reforzamiento de los aprendizajes no logrados.

4 horas pedagógicas de trabajo administrativo para la elaboración de informes, búsqueda de material pedagógico, diseño de capacitaciones y reuniones técnicas con los directivos.

Por último, como cierre semestral del proceso de acompañamiento, se realizaron jornadas con los docentes de matemática para analizar y evaluar la asesoría, además de una capacitación anual de cinco días a todos los docentes del establecimiento en temáticas prioritarias.

AVANCES

Los resultados SIMCE del colegio en Matemática de 4º básico mostraron una tendencia sostenida a la baja entre el 2011 y 2014, produciéndose un punto de quiebre con un alza significativa en el año 2015 (a un año de la asesoría), como se observa en la tabla 1.

Año	Puntaje SIMCE Matemática	Diferencia año anterior	Porcentaje Nivel "Insuficiente"	Porcentaje Nivel "Elemental"	Porcentaje Nivel "Adecuado"
2011	224	+ 2	/	/	/
2012	219	- 5	66,7%	30,8%	2,6%
2013	212	- 7	78,8%	18,2%	3%
2014	204	- 8	78,4%	16,2%	5,4%
2015	234	+ 30	48,6%	45,9%	5,4%

Tabla 1: Resultados SIMCE 2011 a 2015 del CEG.

Si bien los resultados del 2015 son auspiciosos y nos permiten suponer que existe una relación entre los cambios implementados en la enseñanza y los mayores logros obtenidos por los estudiantes, todavía falta alcanzar el puntaje promedio de establecimientos del nivel socioeconómico similar, lograr el puntaje promedio nacional, aumentar la proporción de estudiantes en el nivel adecuado y ver la sostenibilidad de la mejoría en el tiempo como para poder evaluar el impacto de la asesoría, más allá de su resultado inmediato. Aun así, la

asesoría técnica ha sido positivamente valorada por los distintos actores del establecimiento. Por ejemplo, un docente resume su experiencia manifestando que: "hemos cambiado el paradigma del profesor como ente entregador de información y el alumno como receptor de esta, por un trabajo conjunto de construcción de su aprendizaje. Pasé de ser un profesor convencional a uno más intenso, con desafíos por delante, más ambicioso en cuanto a lo que quiero lograr con mis alumnos. Ha cambiado la mirada que los estudiantes tienen de la matemática, ellos esperan poder ser parte de su aprendizaje con un profesor que trabaje entre ellos y no parado delante de ellos" (Francisco Rojas, docente de matemática en primer ciclo, CEG).

CONCLUSIONES

La experiencia de la asesoría técnica en el CEG nos permite afirmar que si bien enseñar matemática es difícil (Gil y Guzmán, 1993), y en contextos vulnerados es más difícil aún, es un desafío absolutamente alcanzable. Se puede generar un cambio concreto en las prácticas pedagógicas que, a su vez, repercuta en una diferencia significativa en los logros de aprendizaje de los estudiantes. Este cambio requiere, en primer lugar, un cuestionamiento profundo del docente sobre las perspectivas de enseñanza de la matemática y la educación en contextos de pobreza.

Es vital abandonar la perspectiva tradicional de enseñanza de la matemática, en la cual el docente está al centro y es el único poseedor del conocimiento docto que transfiere a sus alumnos, asumiendo que siempre habrá algunos talentosos que podrán captarlo y otros que arrastrarán por años un rezago conceptual socialmente aceptado, que incluso puede llegar a ser traumático para ellos. Entender que el conocimiento y las habilidades matemáticas son posibles de desarrollar por todos los estudiantes y que el rol del docente es facilitar ese proceso, es un cambio crucial para relacionarse de un modo distinto con los estudiantes y el saber matemático.

Por su parte, entender la pobreza como una característica desfavorable, que requiere un tratamiento diferenciado, legitimando la fragmentación y estratificación de la educación escolar (Serra y Canciano, 2006) suele derivar en una postura paternalista que baja las expectativas de logro. Por el contrario, entender que los estudiantes se encuentran en una situación que los vulnera (debido a la precariedad socioeconómica en que viven), pero que esta puede ser transitoria y superada, pues también cuentan o pueden desarrollar capacidades intelectuales y socioemocionales que les permiten enfrentarse a la adversidad, es un cambio que posiciona a los docentes de este tipo de establecimientos, agobiados por los factores contextuales, externos, estructurales e invariantes (Cornejo y Redondo, 2007) en una perspectiva donde los factores intra-escolares, y específicamente el espacio de influencia dentro del aula, puede marcar la diferencia.

En segundo lugar, así como los docentes requieren cuestionar sus concepciones, es fundamental motivar y generar conciencia en los estudiantes sobre los propósitos asociados al aprendizaje de la matemática, así como incorporar sistemáticamente el desarrollo de habilidades sociales y la autonomía para que las interacciones cotidianas permitan un ambiente propicio de trabajo.

Por último, un cambio de la envergadura descrita en la experiencia del CEG, requiere un plan de intervención multidimensional del proceso de enseñanza-aprendizaje, que se realice de manera metódica, persistente y articulada. Esto implica no solo incorporar elementos propios de la didáctica de la disciplina, sino también aspectos curriculares, evaluativos y de gestión de aula, así como el monitoreo continuo de la implementación en la sala de clases y sus efectos, junto con la coordinación permanente de la labor docente con los demás estamentos del establecimiento (otros docentes, paradocentes, inspectores, orientación o convivencia escolar, directivos y apoderados).

Agradecimientos

A los estudiantes, docentes y directivos del CEG que han hecho un tremendo esfuerzo por mejorar la calidad de la educación en el colegio. A la Sra. María del Carmen Rencoret por toda su formación en didáctica de las matemáticas, así como por la reflexión y revisión de este documento.

Referencias

Cornejo R. y Redondo J. (2007). Variables y factores asociados al aprendizaje escolar. Una discusión desde la investigación actual. *Revista Estudios Pedagógicos XXXIII*, Nº 2, 155-175.

Gil D. y Guzmán M. (1993). Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones. *Organización de Estados Iberoamericanos para la educación, la ciencia y la cultura OEI*.

Román, M. (2004). Enfrentar el cambio en escuelas críticas urbanas: una mirada a la realidad y posibilidades chilenas. *Revista Persona y Sociedad, Vol XVIII*, Nº3: 145-172.

Serra M. y Canciano E. (2006). Las condiciones de enseñanza en contextos críticos. *Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación. Argentina*.

Soriano E. (1996). Enseñar a pensar al alumnado del primer ciclo de primaria a través de la matemática. *Revista Suma*, Nº 23, 7-20.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS: UN REDISEÑO DE SITUACIÓN DESDE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Gabriel Meza Pereira, Héctor Silva-Crocci
Universidad de Santiago de Chile

Resumen: En la construcción y difusión de la trigonometría escolar se presenta sólo al triángulo rectángulo como argumento de construcción, así lo evidencian diversas investigaciones. Mediante un estudio epistemológico reportamos un rediseño de situación cuyo propósito es habilitar otro argumento de construcción en la enseñanza de las razones trigonométricas. Su configuración se sustenta con base en argumentos epistemológicos que suministran las líneas de investigación de Montiel (2005), Maldonado (2005) y Scholz (2014). Se presenta el análisis preliminar, y el análisis a priori del rediseño.

Razones trigonométricas, rediseño de situación, socioepistemología

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de la trigonometría, y en particular de las razones trigonométricas, se destaca sólo al triángulo rectángulo como argumento en su construcción. Así lo evidencian diversas líneas de investigación (Montiel, 2005; Maldonado, 2005; Scholz, 2014). En este sentido, reportamos un rediseño de situación cuyo propósito es habilitar otro argumento de construcción en la enseñanza de las razones trigonométricas, incorporando elementos geométricos de la circunferencia y de semejanza de triángulos.

Lo epistemológico de la situación se sitúa en el paradigma del programa de investigación socioepistemológico, y lo metodológico del análisis en la ingeniería didáctica propuesta por Artigue (1995). Esta metodología suministra fases que, en este proyecto, nos permite denotar un análisis epistemológico en el proceso de configuración del rediseño. En particular, en este documento, nos referiremos al análisis preliminar y al análisis a priori del rediseño.

REDISEÑO DE SITUACIÓN sobre las razones trigonométricas

Análisis preliminar del rediseño de situación

Diversas líneas de trabajo (Scholz, 2014; Vhons, 2006; Montiel, 2005) reportan las dificultades que genera el discurso Matemático Escolar (dME) en la construcción y difusión de las razones trigonométricas en el sistema escolar. En este sentido, se reconoce una presentación que privilegia al triángulo rectángulo por sobre otros argumentos en la construcción de esta noción.

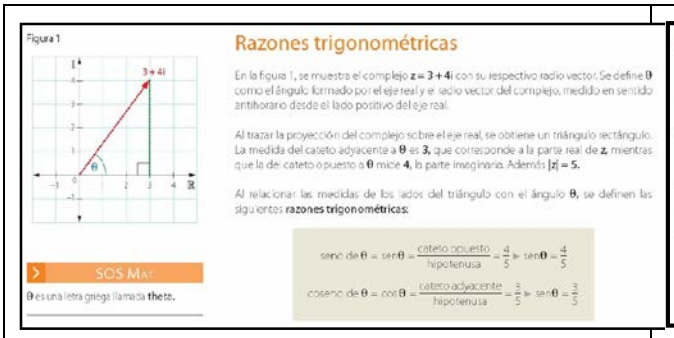


Figura 1: Las razones trigonométricas en un texto escolar (Blanco et al, 2009, p. 32)

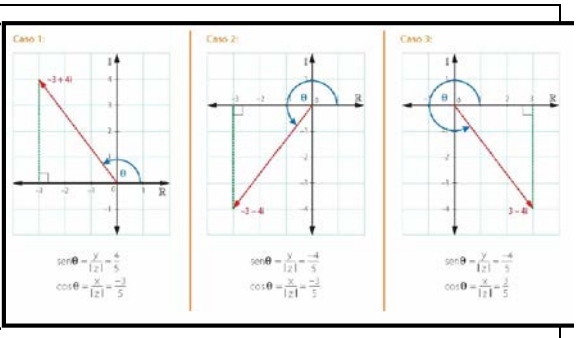


Figura 2: Razones trigonométricas en ángulos mayores a 90° (Blanco et al, 2009, p. 34)

En la *figura 1* podemos constatar este hecho, la cual denota la presentación de las razones trigonométricas en un texto escolar chileno donde las definiciones se introducen a partir de un triángulo rectángulo en el marco de los números complejos. Entre los conflictos que podemos señalar, destacamos la confusión que se genera al definir las razones trigonométricas sólo para ángulos agudos. Luego se definen las razones de los demás ángulos (Figura 2) a pesar de que el ángulo de 360°-Ɵ puede ser entendido como el ángulo -Ɵ. Esta presentación genera, entre otros conflictos, el de la aritmetización de la trigonometría (Scholz, 2014). La aritmetización se entiende como la utilización de las razones trigonométricas para encontrar valores desconocidos en los lados de un triángulo rectángulo. En efecto, un estudiante podrá considerar a las razones trigonométricas como la división de los lados del triángulo, opacando otros argumentos de construcción para las razones trigonométricas, como la circunferencia y la semejanza de triángulos.

En la construcción del rediseño de situación se consideraron diferentes líneas de investigación. La primera de ellas (Montiel, 2006), nos brindó tres momentos asociados a la construcción social de lo trigonométrico. Cada momento tiene una práctica social, una práctica de referencia y un objeto matemático: la anticipación, la matematización de la astronomía, y las razones trigonométricas; la predicción, la matematización de la física, y las funciones trigonométricas; la formalización, la matematización de la transferencia del calor, y las series trigonométricas. Para el rediseño de situación consideramos el primer momento de la construcción social de lo trigonométrico.

La matematización de la astronomía es un contexto plausible para reconocer a la circunferencia como argumento de construcción de lo trigonométrico. En este sentido, una Realidad Macro No Manipulable (RMNM) da pie al uso de modelos micro en el contexto geométrico de la circunferencia y el uso de la semejanza de triángulos (Scholz, 2014; Vohns, 2006). En síntesis, los principales argumentos de construcción usados en el rediseño de la situación de aprendizaje son:

La circunferencia como lugar geométrico.

La semejanza de triángulos como justificación para el uso de modelos a escala en RMNM.

El uso del triángulo rectángulo para determinar los valores de las cuerdas en una circunferencia.

De este modo, podremos entender a las razones trigonométricas como un caso particular de la semejanza de triángulos en el contexto geométrico de la circunferencia.

Análisis a priori del rediseño de situación

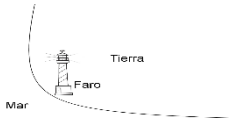
El rediseño de situación consta de tres fases que sintetizamos de la siguiente manera:

Fase 1: El objetivo de esta fase es reconocer cómo la circunferencia y la semejanza de triángulos permiten trabajar situaciones cuyo contexto no es manipulable. En la fase 1 se considera el uso de un modelo de RMNM, con la intención de generar la necesidad de construir un modelo micro que permita su manipulación. Esto hace emerger la noción de semejanza de triángulos para justificar el uso de razones y proporciones en la actividad. Es por ello que recreamos un modelo de RMNM. En este caso el problema trata de la distancia entre dos barcos, cuya única información conocida es la distancia de éstos con relación a un faro. Resulta relevante la situación macro puesto que para poder trabajar es necesario un modelo a escala, lo que lleva de manera inherente a la idea de semejanza de triángulos. Elemento fundamental para la construcción de las razones trigonométricas.

Fase 1: Un modelo micro de una situación macro

En el mar los capitanes de dos barcos que navegan en la niebla hablan por radio. No quieren estrellarse así que intercambian información. Ambos pueden ver el otro barco, pero no saben a qué distancia se encuentran. La única información con la que cuentan es que ambos están a la misma distancia de un faro, que es de 2kms.

Dibuja las posibles ubicaciones que pueden tener en el siguiente esquema:



¿Cuántas posibles posiciones existen?

Pensemos ahora que el faro está en una solitaria isla en medio del océano ¿Cómo pueden representarse las distintas posiciones que pueden tener los barcos? Dibuja tu respuesta.

¿Qué figuras geometricas puedes identificar?

¿Qué elemento de estas figuras debemos determinar para saber la distancia entre cada barco?

¿De qué depende esta distancia?

¿Cómo varía esta distancia?

Los barcos están lejanos uno del otro si:

Los barcos están cercanos uno del otro si

Establezcan una manera de encontrar la distancia entre los barcos. ¿Qué valores necesitan conocer?

Fase 2: En esta fase se pretende que usen la razón trigonométrica en un modelo de RMNM en el contexto geométrico de la circunferencia. El propósito es que se logre relacionar los distintos elementos del problema y determinen los datos necesarios para lograr inferir una posible respuesta. Hasta el momento no se ha dado un valor fijo para el ángulo del centro porque el argumento está en la semejanza, y como ésta logra transformar una RMNM en una realidad manipulable. En este sentido, las razones trigonométricas serán resignificadas como una herramienta de resolución cuando no se pueden hacer mediciones a grandes escalas.

Fase 2: La semejanza de triángulos como un método para resolver el problema

Sabemos que los barcos están a 2 km del faro y que el ángulo que forman con éste es de 50°.

Intentaremos determinar la distancia entre ellos. Para esta fase necesitar una regla graduada y un transportador.

Dibuja un esquema de la situación

Si tomamos el triángulo rectángulo que se forma con la mitad del triángulo isósceles, ¿qué elementos podemos identificar?

Para resolver usaremos la semejanza de triángulos. Construye un triángulo rectángulo pequeño con un ángulo de 25° para medir sus lados.

Ahora, mediante proporciones intenta calcular el valor del cateto que necesitamos para calcular la distancia. Con ello podrás encontrar la distancia que necesitamos.

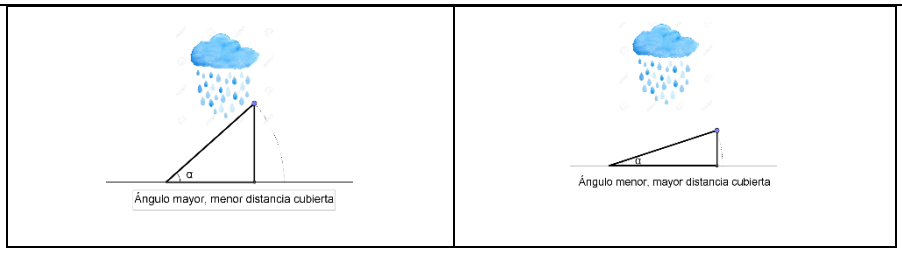
¿Es posible realizar los cálculos más rápidamente si conociéramos anticipadamente el valor de la constante de proporción en un triángulo rectángulo con un ángulo de 25°?

Tomando como inicio el final de la actividad anterior, se comienza con la relación entre la cuerda y el ángulo. No obstante, es posible que algunos participantes utilicen las razones trigonométricas para encontrar lados desconocidos de triángulos. El trabajar con la RMNM no opaca lo geométrico como un argumento de construcción y hace más evidente la importancia de la semejanza.

Fase 3: En esta fase se enmarcan las razones trigonométricas en un contexto dinámico. Atendiendo a un paso necesario en la construcción social de lo trigonométrico, esto es el tránsito entre las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas, se construye una tabla trigonométrica. La importancia de esta fase radica en completar el primer momento de la construcción social apuntando hacia el segundo momento. Esta fase tiene por objetivo que los participantes usen las razones trigonométricas obtenidas por ellos mismos para resolver el problema.

Fase 3: Las razones trigonométricas para modelar una realidad no manipulable

Un grupo de campistas tiene un pequeño problema: se ha puesto a llover y sólo cuentan con una lona de 5 metros de largo para cubrirse. Además, esta lona debe estar enganchada al suelo en uno de sus extremos. Supondremos que en éste caso la lluvia cae sin intervención del viento, es decir lo hace en ángulo recto. Su dilema consiste en encontrar el ángulo adecuado para que la lona cubra la mayor distancia sin ser demasiado baja, como se muestra



Intentaremos ayudar a nuestros amigos campistas con algunos cálculos. Ellos piensan en ocho opciones, 25°, 30°, 35, 40°, 45°, 50°, 55° y 60° como ángulo de la lona.

¿Qué necesitaríamos saber para determinar la distancia que cubre dados estos ángulos?

Para ello construiremos nuestros triángulos rectos para luego usar la semejanza. Construye triángulos rectángulos con los ángulos anteriores.

Podemos realizar cálculos más rápidos utilizando la semejanza si conocemos anticipadamente el valor de la constante de proporción en cada triángulo. Para ello completa la siguiente tabla:

Ángulo	Cateto Adyacente dividido en la hipotenusa	Cateto opuesto dividido en la hipotenusa
30°		
45°		
50°		
60°		

El propósito es resignificar las razones trigonométricas como una herramienta que precisa de un contexto geométrico, el de la circunferencia y de la propiedad de semejanza de triángulos.

CONCLUSIONES

Reconocemos a este rediseño como el principal producto de nuestro proyecto de investigación (Meza, 2015). Pretendemos con esto rediseñar el dME de las razones trigonométricas incorporando los argumentos señalados, los cuales se encuentran opacados por el dME.

Referencias

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Blanco, M, Bozt, J, Calderón, F, Romero, L, Jiménez, L, Jammet, C, (2009). *Bicentenario, Educación Media 3° Matemática.* Santiago: Editorial Santillana.

Maldonado, E. (2005). Un análisis didáctico de la función trigonométrica. México: *Tesis de Maestría no publicada*, Cinvestav - IPN.

Meza, G. (2015). La resignificación de las razones trigonométricas: Un estudio desde la construcción social del conocimiento. Santiago: *Tesis de Magíster no publicada***,** USACH.

Montiel, G. (2005). Análisis Socioepistemológico de la función trigonométrica. México: *Tesis Doctoral no publicada*. Cinvestav – IPN.

Scholz, O. (2014). Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo. México D.F.: *Tesis de Maestría no publicada*.I.P.N CICATA Legaria.

Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry - An empirical approach. *ZDM, Mathematics Education.* 38(6), 498 - 504.

APRENDIZAJE A TRAVÉS DEL LENGUAJE MATRICIAL

Gabriela Tomazzeli, Ricardo Palma
Universidad Nacional de Cuyo, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina

Resumen: Este trabajo muestra una instancia nueva basada en el álgebra matricial, en la que es posible involucrar a alumnos de los últimos años de carreras de ingeniería, de especializaciones y maestrías. De este modo, se pone de manifiesto la oportunidad que poseen los estudiantes de poder establecer nuevas relaciones con los conceptos básicos adquiridos en el inicio de sus carreras. A esto, se suma la posibilidad para los mismos, de forjar un modelo mental distinto, el cual facilita un enfoque de comunicación diferente. En este caso en particular, se utiliza como pretexto para generar esta instancia, el tratamiento de los problemas relativos a las emisiones de gases de efecto invernadero (GHG) en la cadena de suministro de una industria.

Lenguaje, álgebra, matrices, ingeniería, vinculación

INTRODUCCIÓN

Es cierto que son numerosos y constantes los esfuerzos que se realizan en relación a la enseñanza-aprendizaje de la matemática a lo largo de las carreras de ingeniería. En el caso particular del álgebra lineal, considerada una ciencia básica para esta especialidad, se tiene un inconveniente, relativo a su temprana introducción en las carreras, conjuntamente con la relativa imposibilidad de los profesores de ciencias básicas, de volver a tomar contacto con los alumnos en las asignaturas correspondientes a los últimos años. Por lo que este trabajo pone su enfoque en la generación de circunstancias favorables donde a través del lenguaje matricial, se posibilita, desde la elaboración de un método, su lectura, interpretación, valoración, inclusive su posterior aplicación. De modo que, a continuación, el lector encontrará una breve descripción de una situación problema a modo de disparador. Luego se esbozará una estrategia para utilizar el método elaborado por la autora en su tesis de maestría, mediante la comparación de cadenas de suministros de industrias disímiles. Para ello, se usará la normalización de matrices. Finalmente, se discutirá acerca del potencial que representa la herramienta del lenguaje algebraico, que a su vez, induce a los estudiantes a reflexionar acerca de su valiosa utilidad.

SITUACIÓN PROBLEMA Y GENERACIÓN DE NUEVA INSTANCIA DE APRENDIZAJE

Uno de los principales problemas que pueden presentarse en una industria, en relación a la cadena de suministros, radica en las grandes diferencias en la logística del transporte. Esto tiene una consecuencia económica y un alto nivel de impacto ambiental por las emisiones de gases de efecto invernadero al medioambiente. Razón suficiente para que esta problemática pueda ser considerada como un interesante disparador para los estudiantes.

Teniendo en cuenta la situación problema, se recurre al método desarrollado en base al álgebra matricial, el cual provee un marco computacional para la contabilización de pasivos (GHG) relativos a una cadena de suministro. El método mencionado, a su vez, está basado parcialmente en el principio del análisis input/output aplicado a LCA (Heijungs & Suh:

2002). Una de las numerosas aplicaciones de este método consiste en su utilidad para comparar cadenas de suministros de diversas industrias, empleando el análisis de las matrices de emisiones correspondientes a dos o más cadenas, dadas en su forma normalizada. El objetivo consiste en efectuar comparaciones mediante el ¨contraste¨ de matrices, para luego, realizar análisis y evaluación de las cadenas elegidas como objeto de estudio.

A modo de ejemplo de aplicación del objetivo mencionado en el párrafo anterior, se consideran dos matrices de emisiones de gases, relativas a las contribuciones de dos cadenas de suministros. En primer lugar, se construye la matriz S, la cual representa las contribuciones de gases de efecto invernadero correspondientes a una cadena de suministro del vino, asociada a una bodega de la provincia de Mendoza. La matriz en su forma normalizada, es la siguiente:

$$S = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.00 & 0.38 & 0 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0.00 & 0 & 0.06 \\ 0.01 & 0 & 0.03 & 0 & 0.00 \\ 0.00 & 0.01 & 0.13 & 0 & 0.88 \\ 0.00 & 0.01 & 0.43 & 0.00 & 0.24 \end{pmatrix}$$

Los registros correspondientes a las cinco columnas se han obtenido a partir de las emisiones correspondientes a cinco eslabones de la mencionada cadena, previamente seleccionados. Las entradas en cada una de las filas de la matriz, indican las emisiones de un gas en particular. Así, por ejemplo la primera fila representa cantidad de emisiones de CO_2 (dióxido de carbono) al medio, la segunda fila, las emisiones de gas metano, es decir, de CH_4, la tercera corresponde al dióxido de nitrógeno emitido o NO_2, la cuarta, al SO_2 (dióxido de azufre) y la última fila, al NO_x (constituido por todos los óxidos de nitrógeno) entregados al medio. De este modo, cada registro de la matriz S, representa la emisión del gas correspondiente a la fila considerada, según el eslabón de la cadena definido por la columna a la cual pertenece.

Luego, se incorpora la matriz T:

$$T = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.02 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.02 & 0.23 & 016 & 0.01 & 0.96 \\ 0.00 & 0.03 & 0.02 & 0.01 & 0.02 \end{pmatrix}$$

Los registros de esta matriz se corresponden con las emisiones al medio ambiente, relativas a la industria automotriz canadiense, previa selección de cinco eslabones de la cadena de suministros correspondiente.

Para la obtención de ambas matrices S y T, se tuvieron en cuenta las mismas consideraciones en lo que respecta a la definición de gases objetos de estudio, unidades de medida y otras.

Por lo que ahora sí, ambas cadenas son susceptibles de ser comparadas a partir de las matrices S y T obtenidas. Este análisis comparativo permite evaluar el posicionamiento de

una empresa en relación a su contribución de GHG al medio, con respecto a otra empresa elegida para tal fin.

Para afrontar el tema y abordar la construcción de las matrices, los estudiantes deben recordar, los conceptos de notación matricial, operaciones con matrices, espacio vectorial, subespacio, vectores, sistemas de ecuaciones lineales y normalización, entre otros. A su vez, deberán contextualizar los conceptos mencionados, en relación al tema que fue considerado en el caso problema elegido para tal fin.

REFLEXIÓN Y CONCLUSIONES

De lo presentado en la sección anterior, se deduce que, resulta fundamental familiarizar a los alumnos de cursos superiores, acerca de la utilidad de revisar y aplicar conocimientos adquiridos en los años básicos de sus carreras y que ahora podrán integrar con nuevos conocimientos.

Además, es destacable en este tema de estudio, la gran importancia de las consecuencias en relación a las contribuciones de gases al medio, ya que están directamente relacionadas con el cambio climático, lo cual justifica ampliamente su medición, análisis y comparación. Si bien, con la simulación, y con la normalización de matrices, se da apenas un primer paso, la lectura del impacto de los GHG, en cualquier contexto, es el inicio de la solución a un problema en el cual debe involucrarse un ingeniero, independientemente de la especialidad elegida. Y más aún, considerado en el entorno de una industria, este análisis conlleva a la reflexión y posterior empleo de estrategias.

Es claro que la utilización del lenguaje del álgebra lineal como marco para el desarrollo de diversos trabajos, le permitirá al futuro ingeniero o investigador lograr numerosas aplicaciones, ya sea en lo que se refiere al tema de las contribuciones de gases nocivos al medio como en innumerables temas relacionados con su entorno estudiantil o profesional. En todos los casos, tanto la construcción de un modelo, como el aprendizaje logrado a través de sus aplicaciones, resultarán de significativa importancia. Lo cierto es que, esto responde a una constante demanda actual en cualquier carrera de grado: el tratamiento de la interdisciplinariedad del álgebra lineal.

Referencias

Clift, R., (2003) "Metrics for supply chain sustainability", *Cleaner Technology and Environmental Policy*, 5 (3-4), 240-247.

Clift, R., Wright, L., (2000) "Relationship between environmental impacts and added value along the supply chain", *Technological Forecasting and Social Change*, 65, 281-295.

Cuadrado G., Gómez L. (2014) *Educación en Ciencias Empíricas en Facultades de Ingeniería* (1º ed.). Mendoza. Ed. Ex-Libris. p. 28-48

Farahani, R... &..,(2009). *Supply chain and logistic in national, international and governmental environment: concepts and models.* Vol. 3 (pp. 1-10). Berlin/ Heidelberg: Verlag, Springer.

Heijungs, R. & Suh, S. (2010). *The Computational Structure of Life Cycle Assessment.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Senge, P. M. (2004). *La quinta disciplina: el arte y la práctica de la organización abierta al aprendizaje*. México, D.F.: Ediciones Granica S.A.

Sierpinska, A. (1989). *On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of functions and atractive points*. Warsaw, Poland: Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, preprint.

LA CONTINGENCIA COMO HERRAMIENTA PARA EL ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Alicia Zamorano-Vargas[1], Jordi Deulofeu-Piquet[2]
Universidad de Tarapacá[1], Universidad Autónoma de Barcelona[2]

Resumen: Una de las cuatro dimensiones del Knowledge Quartet, la Contingencia, puede ser utilizada como una herramientas para analizar la práctica, desde el conocimiento que utiliza el profesorado para responder a las situaciones no planificadas. En esta comunicación se da cuenta de la importancia de la práctica y del análisis de la misma a la luz de la complejidad de enseñar y de la conciencia profesional de que existen situaciones que no podemos prever. Analizar estas acciones no previstas, es decir acciones contingentes nos permitiría incrementar nuestro conocimiento para enseñar y así profundizar en el desarrollo profesional para realizar una enseñanza más efectiva.

Práctica, contingencia, enseñanza, reflexión, desarrollo profesional

LA IMPORTANCIA DE LA PRÁCTICA DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

La práctica de la enseñanza de las matemáticas es uno de los elementos que mayor interés investigativo ha demostrado en los últimos años (Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna, 2005), lo cual también ha entregado gran importancia a los profesores y cómo desarrollan su enseñanza (Sfard, 2005). Uno de los precursores de esta línea fue Shulman, quien en la presentación de la AERA en 1986 manifestó la necesidad de centrarse en lo que hacía el profesor y qué conocimientos necesitaba para ello.

Shulman (1986, 1987) destaca que hasta ese momento las descripciones de un profesor ponen su atención en el manejo de los alumnos en la clase, cómo se organizan las actividades, cómo distribuye el tiempo, cómo se planifican las lecciones, pero no se preguntan acerca del contenido que tienen esas lecciones ni el tipo de preguntas y explicaciones que el profesor entrega. A esta falta de interés en las acciones de enseñar del profesorado es a lo que denominó el paradigma perdido (the missing paradigm).

Para centrarse en lo que saben los profesores, indicó que existían tres tipos de conocimientos que eran propios del enseñar: subject matter content knowledge, SMK, (la cantidad de conocimiento que el profesor maneja y cómo lo organiza para enseñar), pedagogical content knowledge, PCK, (el conocimiento del contenido para ser enseñado) y curricular knowledge, CK, (los programas de estudio y el curriculum que debe ser enseñado).

Desde este momento (finales de la década de los 80) se han realizado numerosas investigaciones que han utilizado estos conceptos para enfocar su problema de estudio en lo que debe saber un profesor para ejercer la enseñanza. Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans (2013) hace una extensa y profunda revisión de los trabajos que han utilizado el PCK. Aunque Ball, Thames y Phelps (2008) también destacan que se han realizado muchas investigaciones que utilizan las ideas de Shulman, sus conceptos se han desarrollado desde lo general, quedando al debe en lo que respecta a lo específico de las asignaturas enseñadas

en la escuela y sobre la práctica de los profesores, a lo que indican que es una gran debilidad de la investigación.

Tal como mencionamos al comienzo, la práctica de la enseñanza de las matemáticas, es un tema de moda en las investigaciones. Existen muchos trabajos que apuntan a ello, pero hay un par que destaca por su rigurosidad y la aplicabilidad a diferentes contextos, el trabajo de Ball y su equipo de la Universidad de Michigan con el Mathematical Knowledge for Teaching (Ball et al, 2008) y el Knowledge Quartet de Rowland y colegas de la Universidad de Cambridge (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005).

Estas investigaciones utilizan las ideas del SMK y del PCK de Shulman en la enseñanza de las matemáticas para analizar la práctica del profesor y responder a preguntas como estos conocimientos son visibles mientras realizan la enseñanza de las matemáticas en la escuela.

La práctica es un acto de alta complejidad que necesita que los profesores empleen una amplia variedad de conocimientos y habilidades que se perfeccionan con el tiempo (Darling-Hammond y Bransford, 2005; Ball y Forzani, 2009; Hargreaves y Fullan, 2014). Una de las acciones que demanda un alto grado de conocimiento por parte de los profesores, es lo que Rowland et al (2005) denominó Contingencia. La contingencia es una de las cuatro dimensiones del Knowledge Quartet y que consiste en la idea que el profesor no puede saber con anticipación todo lo que sucederá mientras enseña, que en algún momento puede ser tomado por sorpresa y que necesariamente tendrá que improvisar. La conciencia de que no todo puede ser planificado indica que si bien un profesor puede intuir por donde pueden ir las preguntas, las dudas, donde estarán los errores comunes y se pueda reducir la sorpresa, lo que ocurra en la clase seguirá siendo incierto hasta que ocurra (Rowland, Thwaites y Jared, 2015).

La contingencia ha sido estudiada desde la potencialidad que tiene el análisis de aquellas situaciones que no pueden ser planificadas y que obligan al profesor a movilizar conocimientos que puede poseer pero que no pensaba que utilizaría. También en estas situaciones el profesor puede descubrir que no posee o posee débilmente un determinado conocimiento para la enseñanza. Del punto de mira que se le observe, estas situaciones permitirán analizar la práctica desde el grado de dominio de sus conocimientos y no desde los aspectos normativos de la clase, permitiendo que el profesor profundice o amplíe sus conocimientos profesionales.

Del estudio de la contingencia, se ha podido caracterizar que existen desencadenantes que permiten que estas situaciones se generen, a saber, las intervenciones de los alumnos, la propia reflexión del profesor y la disponibilidad de un material necesario para la enseñanza. De las investigaciones sobre la contingencia, se ha podido establecer que son las intervenciones de los alumnos las que ocurren en mayor cantidad y probablemente son las más interesantes de analizar desde el punto de vista del aprendizaje matemático. (Rowland, et al, 2015).

La potencialidad de analizar la práctica desde la perspectiva desde la contingencia es que, siguiendo las ideas de Schön (1992), los profesores podemos aprender de nuestras propias acciones y de las de nuestros colegas, para así disminuir la sorpresa frente a lo que suceda en

la sala de clases y pasar de profesores novatos a expertos en la enseñanza. (Rowland, et al, 2015; Zamorano, 2015).

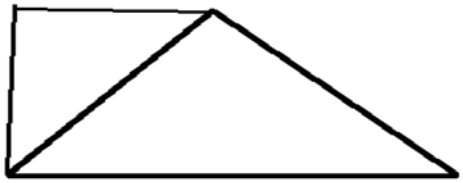
Ejemplo de una situación contingente

La siguiente es una situación de contingencia que ocurrió en un sexto año básico durante una clase de geometría. La profesora comienza la clase recordando las características de los triángulos: tres lados, tres bases y que por tanto poseen tres alturas. Les recuerda cómo calcular el área de un rectángulo y les indica que el triángulo es la mitad de un rectángulo. También les recuerda que la altura es la línea perpendicular desde la base hasta el vértice.

Dicho esto, la profesora dibuja un triángulo acutángulo en la pizarra y pide que algún alumno salga a dibujar una altura.

Profesora: A ver, ¿Quién quiere dibujar la altura? A ver Valentina

Valentina: [Sale a la pizarra y dibuja una altura]



Profesora: A ver, esperen [lo dice mirando la altura que dibujó Valentina]

Ah, ahora verán un problema en el computador, a ver si esta es la altura o no es la altura. A ver, ahora miraremos si es la altura o no lo es.

Valentina dibuja una línea que comienza en un vértice del triángulo y es perpendicular a la base horizontal. Luego une esa línea perpendicular con el vértice más cercano del triángulo. Mira a la profesora, y ésta no le indica si es o no correcta la altura del dibujo, sino que pospone la respuesta al desarrollo de otra actividad. En términos de la contingencia, el dibujar de esa forma la altura es una acción inesperada, la profesora la observa y no incorpora la respuesta al desarrollo de la clase, sino que comento que en un momento posterior verificarán si el dibujo de Valentina es o no una altura. El desencadenante corresponde al primer tipo, intervenciones de los alumnos.

Si analizamos la práctica de la enseñanza desde esta situación de contingencia se puede destacar que la alumna entrega una respuesta incorrecta a la tarea, pero que pudo ser aprovechada como una oportunidad para indagar en el concepto de altura, ya que el dibujo de Valentina es un segmento de igual medida a una de las alturas del triángulo. La profesora no le indica su error ni le pide explicaciones de por qué ese segmento sería una altura, pasando a la siguiente actividad planificada.

Probablemente lo más interesante de esta situación sería indagar en el pensamiento de Valentina y en su forma de dibujar la altura para conocer y profundizar en el concepto que la alumna manejaba. Además cuando se producen este tipo de contingencia, desencadenadas por una intervención incorrecta, es una entrada interesante para analizar la gestión que

desarrollan los profesores y así reconocer debilidades y fortalezas en los conocimientos para enseñar.

Como conclusión del análisis de la práctica a través de las situaciones de contingencia, se puede destacar que es meritorio por parte de los profesores de tratar de responder a las preguntas, ideas e intervenciones en general de los alumnos durante el desarrollo de una clase y que esa respuesta permita que los alumnos construyan nuevas conexiones y logren aprender; también es posible que un profesor no responda a todas las intervenciones, y sin duda el factor tiempo es una variable que se debe considerar, no solo que no se responda porque el profesor tenga una falta de conocimiento (Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2010). La reflexión que se podría realizar desde el análisis de este tipo de situaciones enriquecería el desarrollo profesional de los profesores, permitiendo profundizar en aspectos deficitarios y consolidar aquellos que son más fuertes en cada uno de los profesores.

Referencias

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L., y Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 359-381.

Ball, D., Forzani, F. (2009). The work of teaching and the challenge for teaching education. *Journal of Teacher Education 60*(5), 497–511.

Ball, D., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education 59*(5), 389–407.

Darling-Hammond, L., & Bransford, J. (2005). *Preparing Teachers for a changing world. What teachers should learn and be able to do.* San Francisco: Jossey Bass.

Depaepe, F., Verschaffel, L., y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education 34*, 12–25.

Hargreaves, A., & Fullan, M. (2014). *Capital Profesional* (1ª Edición). Madrid: Editorial Morata.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: the Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255–281.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2010). *Developing Primary Mathematics Teaching*. London: SAGE Publications Ltd.

Rowland, T., Thwaites, A., & Jared, L. (2015). Triggers of contingency in mathematics teaching. *Research in Mathematics Education2*, *17*(2), 74–91.

Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Barcelona: Paidós.

Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? On mutual relation between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 393–413.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–22.

Zamorano, A. (2015). *La práctica de la enseñanza de las matemáticas a través de las situaciones de contingencia*. Universidad Autónoma de Barcelona.

DESARROLLO Y VALIDACIÓN DE UNA PAUTA DE OBSERVACIÓN DE CLASES DE MATEMÁTICA: MATEO

Ma. Victoria Martínez Videla[1], Josefa Perdomo Díaz[1], Paulina Araya[2]
CIAE y CMM Universidad de Chile[1], CIAE y Doctorado en Educación UAH-UDP[2]

Resumen: En este trabajo se presenta la pauta MateO, diseñada para la observación de clases de matemática, la retroalimentación al docente y el diseño de planes de desarrollo profesional docente. MateO fue diseñada tomando como referencia pautas de observación de clases validadas a nivel internacional, como CLASS y MQI, y la experiencia de observaciones de clases chilenas del equipo usando distintos tipos de pautas. MateO está formado por indicadores generales que hacen referencia a elementos de la estructura y la organización de la clase e indicadores específicos para el desarrollo conceptual en matemática. Se realizó un proceso de validación de la pauta que revela la consistencia interna de cuatro dimensiones: Organización y planificación, Interacciones en el aula, Presentación del contenido y Gestión matemática.

Pauta de observación, observación y retroalimentación, matemáticas

INTRODUCCIÓN

La observación y retroalimentación de clases es un proceso de larga data, empleado como forma de aprendizaje en diversas profesiones. Específicamente en educación es parte de los procesos de formación inicial y continua de profesores. En formación inicial la observación es clave en las prácticas profesionales y en la formación continua en los procesos de acompañamiento para el desarrollo profesional docente. Además, es cada vez más frecuente como uno de los componentes para evaluar el desempeño docente (Manzi, González & Sun, 2011).

La valoración de la observación de clases unido a la retroalimentación de dicha observación es la base de muchos programas de desarrollo profesional, entendiendo la observación y la retroalimentación como centro de la actividad que promueve la reflexión docente y permite el desarrollo de capacidades para el trabajo en aula. En este trabajo presentamos una pauta de observación de clases de matemática desarrollada en el marco de un programa de desarrollo profesional docente, la cual hemos denominado MateO.

ANTECEDENTES

A lo largo del trabajo desarrollado en el Centro de Investigación Avanzado en Educación (CIAE) de la Universidad de Chile, la observación de clases ha sido una herramienta que ha permitido recolectar información de gran valor como un medio para aprender respecto de los procesos de enseñanza y aprendizaje, específicamente en matemática (Godoy, Varas, Martínez, Treviño & Meyer, 2017; Martínez, Godoy, Treviño, Varas & Fajardo, 2017; Felmer, Perdomo-Díaz, Giaconi & Espinoza, 2015).

En alguno de dichos proyectos se han utilizado instrumentos de observación de clases como CLASS (Pianta, Hamre & Mintz, 2012) y MQI (Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep & Ball, 2008). El primero de ellos permite la evaluación de las interacciones en el aula y el segundo tiene por objetivo medir la calidad matemática de la instrucción. Ambos

instrumentos han sido utilizados en Chile, sin embargo, para evaluar y retroalimentar a profesores de matemática, tienen limitaciones. CLASS es un instrumento que no está asociado al trabajo conceptual de alguna asignatura, por lo tanto, no evalúa elementos específicos de la actividad matemática que se lleva a cabo al interior del aula. Contrariamente, MQI es un instrumento que evalúa exclusivamente la actividad matemática del aula, dejando de lado indicadores relativos a clima u organización de la clase. La especificidad de MQI lo convierte en un instrumento costoso de utilizar y a la vez difícil de emplear en retroalimentación, por las detalladas y complejas distinciones que hace del trabajo matemático.

A partir de la experiencia utilizando pautas de observación como CLASS y MQI, nos planteamos la necesidad de elaborar un instrumento para observar clases de matemática que:

Emerja de la experiencia de observaciones de aulas chilenas

Permita la retroalimentación de lo observado a los profesores

Permita estructurar un plan de trabajo que tenga por fin el desarrollo profesional del docente.

Pauta de observación de clases de matemática: mateo

El desarrollo de MateO en el marco del programa Mejor Matemática, responde al objetivo del mismo, que se propone la mejora continua de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en escuelas públicas a través del fortalecimiento de las capacidades de las comunidades escolares y del desarrollo profesional de los docentes a través del acompañamiento individual.

La pauta MateO está formada por 14 indicadores que hacen referencia a distintos elementos presentes en una clase de matemática y que agrupamos en *indicadores generales* (8) e *indicadores específicos* (6).

Los indicadores generales se refieren a elementos de estructura y organización del aula, sin ser específicos de la matemática. Son *Objetivo de la clase, Disposición de la sala de clases, Participación e involucramiento de los estudiantes, Monitoreo del trabajo de los estudiantes, Clima de aula, Uso del tiempo, Uso de recursos* y *Cierre de la clase*.

Los indicadores específicos refieren a elementos específicos para el desarrollo conceptual dentro del aula. Estos indicadores son *Expresión verbal, Lenguaje matemático, Diversidad de representaciones y/o procedimientos, Promoción del pensamiento, Aprovechamiento del error* y *Uso de las producciones matemáticas de los estudiantes*.

Para cada indicador se definen tres niveles de desempeño: inicial mejorable, intermedio mejorable y adecuado. Para efectos de codificación, los indicadores generales se puntúan de 1 a 3, mientras que en los específicos se puntúa de 1 a 5, asignando al nivel intermedio mejorable una puntuación entre 2 y 4 dependiendo de si la práctica observada se acerca más a los niveles extremos (Figura 1).

Promoción del pensamiento				
Se quiere observar las oportunidades que tienen los estudiantes de pensar en torno a ideas, conceptos o procedimientos y elaborar argumentos. Se observa si se hacen preguntas o requerimientos que promueven la reflexión, explicaciones o planteamiento de conjeturas, dando tiempo suficiente para ello. Las intervenciones que promuevan el pensamiento pueden venir de los estudiantes o del profesor.				
Inicial mejorable	Intermedio mejorable			Adecuado
1	2	3	4	5
Las preguntas o requerimientos apuntan únicamente a la identificación de conceptos o al uso de procedimientos.	Hay preguntas o requerimientos que tienen las características listadas en "Adecuado", sin embargo no se da tiempo a los estudiantes para sus elaboraciones.			Se plantean preguntas o requerimientos: • que provocan a los estudiantes a pensar y analizar en ideas, conceptos o procedimientos. • que demandan elaboración de argumentos • de extensión (cambiar las condiciones, generalizar, detallar un argumento, etc.) y los estudiantes tienen tiempo suficiente para sus elaboraciones

Figura 1: Ejemplo de uno de los indicadores específicos de MateO

VALIDACIÓN

La pauta MateO fue construida por un equipo de expertos en educación matemática con amplio bagaje en uso de pautas de observación de clases. Posteriormente, fue sometida a un proceso de validación en dos partes. Primero se sometió a prueba en un taller en el que profesores y directivos la utilizaron observando segmentos de videos de clases. De esa instancia se rescataron sugerencias con las que se elaboró una pauta final que recoge las ideas de los profesores en cuanto a la precisión de sus conceptos y la mayor descripción de los niveles.

El segundo paso en el proceso de validación fue aplicar la pauta MateO a un total de 51 profesores pertenecientes a 6 escuelas municipales de Santiago, a los que se les grabó una clase. Esta aplicación fue realizada por un grupo de 7 codificadores que fueron previamente formados por el equipo de expertos que construyó la pauta. Se realizó un proceso de seguimiento de la confiabilidad, consistente en la doble codificación de un 20% por expertos. La concordancia de la codificación entre los expertos y los codificadores entrenados fue de un 93%, aceptando una diferencia de un punto en los indicadores específicos y cero en los indicadores generales.

Consistencia interna de las escalas

La separación en indicadores generales y específicos resultó consistente estadísticamente con valores de Alpha de Cronbach 0,763 y 0,657 respectivamente. Buscando información más detallada, se dividieron los indicadores generales y específicos en 4 dimensiones (Tabla 1).

Dimensiones	Número de ítems	Alfa de Cronbach
Organización y planificación	5	0,354
Interacciones en el aula	3	0,778
Presentación del contenido	3	0,792
Gestión matemática	3	0,615
Todos	14	0,810

Tabla 1: Dimensiones teóricas en MateO y consistencia interna

Dado que la dimensión "organización y planificación" no resultó consistente, se realizó un análisis factorial con estos 5 indicadores que arrojó 2 grupos: (i) *Objetivo de la clase, Cierre de la clase y Uso del tiempo*, y (ii) *Disposición de la sala de clases y Uso de recursos.* El primer grupo mostró un alpha de Cronbach de 0.607 y el segundo de 0.114, por lo que se decidió eliminar este último grupo de la pauta, quedando en total 12 indicadores agrupados en 4 dimensiones (Tabla 2).

Escala	Alfa de Cronbach	Indicadores que la componen
Organización y planificación	0,607	Objetivo Uso del tiempo Cierre de la clase
Interacciones en el aula	0,778	Participación de los estudiantes Monitoreo Clima de aula
Presentación del contenido	0,792	Expresión verbal Lenguaje Matemático Procedimientos y representaciones
Gestión matemática	0,615	Promoción del pensamiento Uso del error Uso de las producciones matemáticas

Tabla 2: Dimensiones finales de MateO, consistencia interna e indicadores de cada dimensión

COMENTARIOS FINALES

El creciente interés en los procesos de observación y retroalimentación como práctica para formación docente inicial y continua hace surgir la necesidad de diseñar instrumentos que incorporen características y necesidades identificadas a nivel país. Es fundamental, además que esos instrumentos pasen por un proceso de validación que los convierta en herramientas útiles tanto para el estudio de las salas de clase como para la toma de decisiones. MateO es una pauta diseñada para la observación de clases de matemática, en video o in situ, que además sirve como instrumento para el diseño de planes de desarrollo profesional docente individualizados. El proceso de validación muestra cuatro dimensiones estadísticamente consistentes, dos de ellas específicas de la matemática (Presentación del contenido y Gestión matemática) y otras dos, generales (Organización y planificación e Interacciones en el aula). Cabe destacar la necesidad de diseñar proceso de formación de codificadores y observadores utilizando estas pautas, como base para poder utilizarlos de manera confiable.

Agradecimientos

Programa Mejor Matemática desarrollo por Universidad de Chile y MINEDUC. Trabajo parcialmente financiado por el proyecto Fondecyt 3140597 de Conicyt.

Referencias

Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Giaconi, V., & Espinoza, C. (2015). Problem solving teaching practices: Observer and teacher's view. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. pp. 3022-3028. Disponible en https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289734

Godoy, F., Varas, L., Martínez, M., Treviño, E. & Meyer, A. (2017). Interacciones pedagógicas y percepción de los estudiantes en escuelas chilenas que mejoran: una aproximación exploratoria. *Estudios Pedagógicos*, En prensa.

Hill, H., Blunk, M., Charalambous, Y., Lewis, J., Phelps, G., Sleep & Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and theMathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study, *Cognition and Instruction*, 26: 4, 430 — 511

Martínez, M., Godoy, F., Varas, L., Treviño, E. y Fajardo, G. (En prensa) ¿Qué nos revelan los instrumentos de observación de aula sobre clases de matemática en escuelas con trayectoria de mejoramiento?. *Educação e Pesquisa*, aceptado.

Manzi, J., Gonzalez, R., & Sun, Y. (2011). *La evaluación docente en Chile*. Santiago: MIDE UC.

Pianta, R., Hamre, B., & Mintz, S. (2012). *Classroom Assessment Scoring System. Upper Elementary Manual*. Charlottesville, Virginia: Teachstone.

ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO CON DOMINIO EN LA ESTADÍSTICA TEMPRANA

Pedro Vidal-Szabó, Soledad Estrella, Sergio Morales, Raimundo Olfos
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen: A partir de una propuesta de Espacio de Trabajo Matemático con dominio en la estadística temprana como marco teórico y con la metodología de estudio de casos, se analiza el plano semiótico-instrumental que activan dos estudiantes de 4° año básico referidas a representaciones de datos, las cuales emergen como producciones que dan respuesta a una situación de análisis exploratorio de datos con final abierto. Se identificaron algunos elementos de la estadística en la activación de las génesis y planos verticales en las representaciones de datos analizadas.

ETM, estadística temprana, representaciones de datos, análisis exploratorio de datos

INTRODUCCIÓN

Varios reportes han establecido la necesidad que los estudiantes en los primeros años de escolaridad comprendan aspectos fundamentales del análisis de datos y que sean alfabetizados estadísticamente (Franklin et al., 2015; National Council of Teacher of Mathematics, 2000).

Por lo tanto, y en el contexto de la educación en Chile, específicamente de la estadística en los primeros niveles escolares (estadística temprana), existe la necesidad de estudiar la construcción de representaciones de datos, que den aproximaciones de solución a las problemáticas referidas a su enseñanza y aprendizaje, especialmente, en cuanto a la elaboración y valoración de diversas representaciones de datos, y a la comunicación de la información que se puede extraer.

ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO CON DOMINIO EN LA ESTADÍSTICA

Para estudiar dichas representaciones de datos la investigación se enmarca en el Espacio de Trabajo Matemático, en adelante ETM, (Kuzniak & Richard, 2014), el cual da acceso a organizar analíticamente el trabajo de los estudiantes por medio de dos planos, el epistemológico y el cognitivo. La extensión ETM-Estadística Temprana, ETM_{ET}, busca una diferenciación entre el trabajo matemático y el trabajo estadístico y algunos elementos que caracterizen las génesis semiótica, instrumental y discursiva, según la naturaleza propia del conocimiento estadístico y sus ideas claves para el desarrollo de su pensamiento, entre ellas, los datos, la variabilidad y las representaciones (Garfield & Ben-Zvi, 2008; Burrill & Biehler, 2011; Estrella, Olfos, Morales, & Vidal-Szabó, 2016).

Los componentes del plano epistemológico del ETM en el ETM_{ET}

En el contexto de la estadística, en el componente de *representamen* se sitúan signos de tipo simbólico como X (variable estadística), x_i (dato i-ésimo), f_i (frecuencia absoluta i-ésima), entre otros. También, otros signos como imágenes reales que representan los datos. En el componente *artefactos*, reconocibles en la educación estadística temprana, se considera la calculadora, una encuesta en papel para el registro de los datos, regla y/o compás para construir representaciones de datos, iconos como datos, entre otros. El componente

referencial como un sistema teórico, está basado en definiciones y propiedades. Para la estadística, por ejemplo, la suma de las frecuencia absoluta, el concepto de variable y sus categorías, tipos de variable, entre otros.

El plano cognitivo y el plano epistemológico del ETM_{ET}

El ETM en particular para la geometría, se precisan para la actividad geométrica procesos de *visualización* que tienen relación con el soporte material y la representación del espacio, procesos de construcción relativos a las configuraciones e instrumentos puestos en acción por el sujeto y procesos discursivos que proveen al sujeto de pruebas y argumentos. En cambio, se propone para la estadística temprana que el sentido del dato permita la vinculación entre los componentes del plano epistemológico con el plano cognitivo, al distinguir los datos como "números en un contexto". Cabe destacar, que la caracterización de los procesos de visualización, construcción y discursivos, son parte de la investigación aún en curso.

Las génesis y los planos verticales del ETM_{ET}

La noción de "génesis" alude a generar, y en el ETM se distinguen tres generadores, la génesis semiótica que nace del vínculo e interacción entre el componente *representamen* con el de *visualización*; la génesis instrumental que se origina de la relación interactiva entre el componente *artefactos* con el de *construcción*; y la génesis discursiva que emana del nexo articulado entre el componente *referencial* con el de *prueba*. La tres génesis contribuyen a la asociación de los planos epistemológico y cognitivo del ETM_{ET}.

La génesis semiótica da cuenta de los registros de representación semiótica y garantiza la sintaxis, semántica, función y estructura de los signos. Mientras que la génesis instrumental operacionaliza los artefactos que colaboran durante el trabajo matemático en el proceso de construcción. Y la génesis discursiva sirve al razonamiento matemático por medio de los procesos de prueba que se abastecen de teoremas, propiedades o definiciones del referencial. Los planos verticales conocidos como el de descubrimiento, comunicación y razonamiento parecen apropiados para analizar el trabajo estadístico de los estudiantes. Estos planos se constituyen desde la vinculación de las génesis semiótica e instrumental para el plano del descubrimiento; la vinculación de las génesis semiótica y discursiva para el plano de la comunicación; y la vinculación de las génesis discursiva e instrumental para el plano del razonamiento, (Kuzniak & Richard, 2014).

Esta investigación indaga en ¿cuál es la naturaleza de las génesis semiótica e instrumental en relación al trabajo estadístico de los estudiantes de 4° año de enseñanza básica enfrentados a una situación de análisis exploratorio de datos? Específicamente pretende caracterizar dichas génesis y el plano vertical del descubrimiento en el ámbito de la estadística temprana.

METODOLOGÍA

*Casos***.** Esta investigación de carácter exploratorio indaga en las representaciones de datos que realizan dos estudiantes que cursan 4° año de educación básica, cuyas edades son 10 años 4 meses (José) y 9 años 7 meses (Javier). Ambos estudiantes pertenecen a un

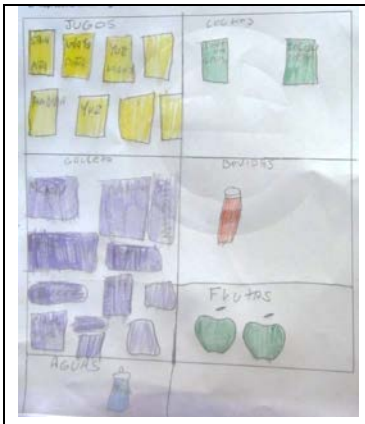
establecimiento municipal de la comuna de Viña del Mar y fueron elegidos por la riqueza de las representaciones de datos en sus producciones.

Tarea. Los estudiantes resolvieron una situacion de análisis exploratorio de datos construida por profesores de su establecimiento en un Grupo de Estudio de Clases de tres docentes del nivel escolar. La situación estadística propuesta se enfocó en torno a la pregunta" ¿Cómo podríamos saber si nuestras colaciones son saludables/sanas? Para ello, los profesores recogieron los datos reales de las propias colaciones llevadas a la escuela por los estudiantes en un día de escuela, las reunieron y fotografiaron. Los datos fueron dados en forma de imagen (foto) a los alumnos en una hoja de trabajo y otra hoja para que los alumnos organizaran sus datos con el fin de responder al problema propuesto. Los estudiantes del curso trabajan individualmente para responder a la situación problema planteada por el profesor, y produjeron diversas representaciones a partir de los 24 datos entregados en la imagen.

Recogida de datos. Los datos se recabaron desde el registro fotográfico y video grabado de su producción durante el transcurso de la clase. El análisis posteriores de las producciones, fueron realizados por los investigadores desde el marco ETM, con el fin de identificar elementos y vinculaciones de las génesis y los planos verticales con el trabajo estadístico del estudiante.

RESULTADOS

Los dos casos que se reportan dan respuestas a la situación planteada, presentan de formas diferentes los datos para dar respuesta a la misma pregunta. Se observa que ambos niños clasifican los datos, uno usa el concepto de frecuencia absoluta de la categoría de la variable, y el otro produciendo una escala de cinco niveles de la categoría de la variable; ambos producen listas icónicas pero diferentes y ambos producen representaciones adicionales (ver Figura 1A y 1B).

<table>
<tr>
<td> 
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Lista icónica-textual enceldada con ícono repetido como dato sin cardinal en cada celda y texto como categoría de la variable.</td>
<td>Tabla de frecuencias absolutas con categorías de la variable representada por color y total de datos.</td>
<td>Lista icónica-textual con repetición del ícono como dato sin cardinal y texto como categoría .de la variable</td>
<td>Escala que asocia a "saludable, medio saludable, medio chatarra, chatarra y muy chatarra".</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Figura 1A. Representación de datos de José</td>
<td colspan="2">Figura 1B. Representación de datos de Javier</td>
</tr>
</table>

DISCUSIÓN

En el primer caso (José), emergió la construcción de la tabla de frecuencia desde la interacción de las génesis semiótica e instrumental a partir de la primera producción (lista icónica-textual enceldada con ícono repetido como dato sin cardinal). La construcción tabular se forjó con el uso de colores para cada conjunto de iconos de una categoría (nueva categoría de la variable) prescindiendo del texto escrito de su primera producción. Además, exhibe un razonamiento estadístico en la representación tabular, pues escribe el nombre de la variable en juego (colaciones), anota la frecuencia para cada categoría, y la suma de las frecuencia absolutas, ver Figura 1A. En el segundo caso (Javier), crea una escala de cinco niveles referido a la colación saludable asociada a la primera producción (lista icónica-textual con repetición del ícono como dato sin cardinal), la activación también se inicia desde la génesis semiótica a la génesis instrumental. Su argumentación verbal se basa en la escala creada a partir del conocimiento contextual y el conocimiento estadístico que posee, ver Figura 1B. Los dos casos exhibidos muestran diferentes génesis instrumentales para una misma génesis semiótica, solo difieren los artefactos puestos en juego en las producciones, uno utiliza el color como criterio nominal (tabla) y el otro, el textual como criterio ordinal (escala). El plano de descubrimiento fue activado desde los datos de la imagen (*representamen*) visualizándolos en su contexto.

A modo de conclusión, el estudio permitió observar cómo una tarea estadística de análisis de datos permitió transitar por dos génesis del ETM_{ET}, activando el plano vertical del descubrimiento. Ambos casos se apoyaron en sus representaciones de datos para responder a la situación inicial, descubriendo el comportamiento de los datos, comunicando y razonando respecto al contexto de la situación planteada.

Agradecimientos

Al Proyecto Ecos C13H03 y al Proyecto Fondecyt N° 11140472, y Fondo Basal FB0003.

Referencias

Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Netherlands: Springer.

Estrella, S., Olfos, R., Morales, S., & Vidal-Szabó, P. (2016). ETM in the domain of early statistics: two cases of second-grade students and their data representations. Ponencia en E*TM5*, Florina, Grecia.

Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R., & Spangler, D. (2015). *SET: The Statistics*

Education of Teachers. American Statistical Association.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer Science & Business Media.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(4-I), 5-15.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

ESTUDIO COMPARATIVO DE PRUEBAS DE INGRESO A LA UNIVERSIDAD EN TRES COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Gabriela Otheguy Martínez
Universidad Católica del Uruguay, Uruguay

Resumen: Durante los últimos años nos hemos encontrado con informes provenientes de universidades públicas y privadas de nuestro país, que dan cuenta de la situación en Matemática que presentan los estudiantes ingresantes a las carreras de estas instituciones. Algunos de ellos, muestran un panorama poco alentador que necesita de atención. Por este motivo, y en el marco de un trabajo de investigación, se ha realizado un estudio comparativo de los resultados obtenidos por los estudiantes que realizaron las pruebas de diagnóstico de Matemática al ingreso a la Facultad de Ingeniería y Tecnologías de la Universidad Católica del Uruguay en 2007 y en 2015. Uno de los principales objetivos de la investigación, ha sido arrojar luz sobre el desempeño de los estudiantes egresados de dos planes diferentes de Educación Secundaria en tres competencias matemáticas: comunicación matemática, conceptualización y ejecución de algoritmos. En este informe se da a conocer el diseño de la investigación, el estudio de campo y el análisis preliminar de los datos.

Competencias, conceptualización, diagnóstico, ítems

INTRODUCCIÓN

Las pruebas de Matemática de ingreso a las universidades han tenido variados objetivos, en particular, las de ingreso a la Universidad Católica del Uruguay han servido como instrumento para analizar el perfil de ingreso de los estudiantes y diseñar o rediseñar estrategias pedagógicas para acompañar a los ingresantes en el trayecto académico, principalmente, en el primer año de curso.

Los trabajos que se han realizados entorno a pruebas de diagnóstico en las diferentes universidades comenzaron hace más de diez años y en ellos se evidencian carencias en el desempeño en Matemática de los ingresantes.

Ahora bien, en el presente trabajo se ha puesto el foco en el desempeño de los estudiantes egresados de Educación Secundaria (público y privado) de los planes: 1976 y de la actual Reformulación 2006[23], en tres competencias específicas que se consideran presentes en la construcción del conocimiento matemático: la comunicación matemática, la conceptualización y la ejecución de algoritmos. Para ello, se ha realizado un estudio comparativo de los resultados obtenidos por dos muestras de estudiantes egresados del bachillerato de Ingeniería y del Físico-Matemático de Educación Secundaria, que realizaron la prueba de diagnóstico de los años 2007 y 2015, respectivamente.

[23] En Uruguay, el Plan 1976 fue, en bachillerato (4°año, 5°año y 6° año), el plan de estudio vigente en la mayoría de los centros de estudios públicos y privados del país, hasta la implementación de la actual Reformulación 2006.

A continuación, se detallan las características de las muestras elegidas, la selección de los ítems que formaron parte de las pruebas de múltiple opción propuestas y los ítems seleccionados para un análisis preliminar.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Para la muestra del grupo experimental, se procedió a una selección no probabilística donde se tomaron todos los estudiantes inscriptos en la Facultad de Ingeniería y Tecnologías que realizaron la prueba de diagnóstico de Matemática en el año 2007, egresados del bachillerato de Ingeniería de Educación Secundaria del Plan 76.

Para el grupo de control se tomaron los estudiantes que realizaron la prueba de ingreso a la Facultad de Ingeniería y Tecnologías en el año 2015, provenientes del bachillerato Físico-Matemático de la Reformulación 2006.

En este caso, a diferencia de la muestra anterior, la prueba no fue obligatoria y se presentaron 71 estudiantes de los cuales 45 fueron seleccionados por egresados de la orientación antes mencionada.

Cabe aclarar que se optó por la orientación Ingeniería del Plan 76 y la Físico-Matemático de la Reformulación 2006, por ser las orientaciones de bachillerato de cada plan con mayor carga horaria en Matemática. Las características de cada muestra se presentan en la siguiente tabla.

Estudiantes egresados de:	Año 2007 (89 estudiantes)	Año 2015 (45 estudiantes)
Enseñanza Pública	49.4	24.5
Enseñanza Privada	50.6	75.5
Instituciones del interior del país.	40.5	26.5
Instituciones de Montevideo	59.5	73.5

Tabla 1: Características de los estudiantes de cada muestra en porcentajes.

El análisis comparativo de resultados fue triangulado con información obtenida de entrevistas semi-estructuradas a docentes y mediante estudio documental de los programas curriculares de los dos planes de estudio.

Selección de ítems comunes

Para el estudio comparativo fue necesario proponer en las dos pruebas ítems comunes. Para ello se procedió a hacer un análisis psicométrico de los ítems de la prueba propuesta en el 2007 que incluyó: nivel de dificultad y poder de discriminación.

Para el análisis psicométrico se utilizó un software de hoja de cálculos que se aplicó a la base de datos de los resultados obtenidos. Se seleccionaron de la prueba correspondiente al 2007, 18 ítems por tener índice de discriminación excelente (16 ítems) o bueno (2 ítems) y por incluir en su resolución, contenidos comunes a los dos planes de estudio que se buscaba comparar.

Características del instrumento de evaluación

Las dos pruebas fueron de múltiple opción con una opción correcta y tres distractores. Los 18 ítems comunes a las dos pruebas refieren a contenidos que según el estudio documental de programas que se realizó, deben o debieron ser trabajados en los dos planes y a competencias vinculadas a la resolución de cada uno de ellos.

Para la realización de la prueba, en ambos casos, los estudiantes no tuvieron preparación previa por parte de la universidad.

En cuanto a contenidos, los ítems corresponden a las siguientes áreas: álgebra, aritmética, probabilidad y cálculo, distribuidos de la siguiente forma: 8 ítems correspondientes a álgebra, 3 ítems de aritmética, 1 ítem de probabilidad y 6 ítems de cálculo.

En este trabajo, se habla de competencia en los términos planteados por D´Amore, Godino y Fandiño (2008), donde propone, desde la postura de la investigación didáctica, la competencia como un concepto complejo y dinámico, que se centra en la actividad del estudiante, en el uso y dominio que el mismo realiza en relación a diversos contenidos y que encierra, además, factores motivacionales que llevan al estudiante, a querer hacer uso de ella.

En particular, está centrado en algunos de los diversos componentes de la competencia matemática y que son el objetivo de investigación en las pruebas de diagnóstico analizadas. Estos componentes de la competencia matemática, en los que se ha trabajado, y sobre los que se buscaron dar luz, son:

- El dominio de los aspectos semióticos (elección de las características representativas del objeto a representar, tratamiento y conversión de las representaciones semióticas en los diversos registros). En esta dirección, se hace referencia a la conceptualización, como construcción conceptual que realiza el estudiante y en la cual se pone en juego las representaciones semióticas.
- El dominio para elegir algoritmos matemáticos de resolución adecuados y desarrollarlos correctamente.
- El dominio de la comunicación en cuanto al manejo adecuado de la justificación, de la argumentación, de la demostración, etc.

Cada uno de estos dominios dio lugar a las características de las competencias que se buscó evaluar. Por lo que se clasificaron los 18 ítems y se realizó una tabla de especificaciones de doble entrada Área-Competencia, resultando la siguiente distribución.

Competencia	N° de ítems
Conceptualización	10
Algoritmización	6

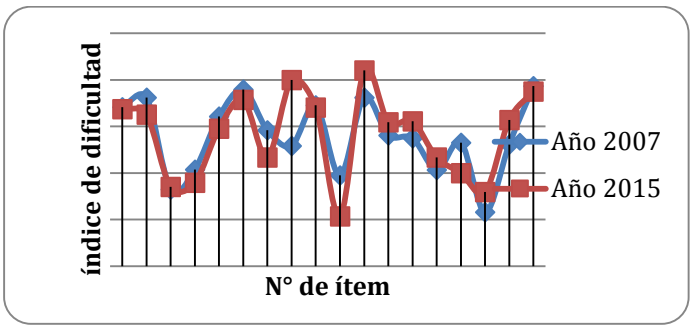
Comunicación matemática	2

Tabla 2: Distribución según competencia de los 18 ítems comunes.

Algunos datos comparativos de los 18 ítems

En el análisis comparativo de los niveles de dificultad se observó que los promedios generales de dificultad de los ítems fueron de: 0.56 con una desviación estándar de 1,16 para los 89 estudiantes del 2007 y de 0.56 con una desviación estándar de 1.18, para los 45 estudiantes del 2015.

En las dos pruebas, como muestra el gráfico 1, se presentó un bajo índice de dificultad en el ítem N° 10 y en el N° 16, lo que implica que los ítems resultaron altamente difíciles o medianamente difíciles. Los contenidos de ambos ítems corresponden a estudio de funciones cuadráticas en diferentes contextos de representación. En cuanto a competencias, para la resolución de ambos ítems, los estudiantes debieron realizar procesos matemáticos relacionados con la conversión entre registros y tratamiento dentro de un mismo registro, lo que los ubica en la competencia de conceptualización.



Nivel de dificultad
Altamente difícil $(0 \le p \le 0,32)$
Medianamente difícil $(0,33 \le p \le 0,52)$
Dificultad media $(0,53 \le p \le 0,73)$
Medianamente fácil $(0,74 \le p \le 0,86)$
Altamente fácil $(0,87 \le p \le 1)$

Gráfico 1. Índice de dificultad por ítem en los años 2007 y 2015

Para la interpretación de los índices de dificultad (p), se consideró la escala de clasificación que acompaña al gráfico, aportada por Backhoff, Larrazolo y Rosas (2000).

REFLEXIONES

En este trabajo se ha presentado un análisis preliminar de los datos obtenidos en la investigación que se ha realizado. El estudio en profundidad de los índices de dificultad y de discriminación ha aportado datos para un análisis más profundo de la comparación.

Si bien, no es posible realizar generalizaciones sobre el desempeño de los estudiantes proveniente de uno u otro plan, si ha sido posible vincular los resultados específicos de las pruebas con los programas de Educación Secundaria, y triangular la información con las entrevistas que se llevaron a cabo a docentes que han trabajado en los dos planes de estudio.

La experiencia docente de los entrevistados complementa la investigación, y ha aportado datos sobre la necesidad de realizar un trabajo más profundo en la ejecución de algoritmos y en la conversión entre registros de representaciones.

Referencias

Backhoff, E., Larrazolo, N., & Rosas, M. (2000). Nivel de dificultad y poder de discriminación del Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos. *Revista electrónica de Investigación Educativa, 2*(1). Recuperado en: http://redie.uabc.mx/vol2no1/contenido-backhoff.html

D´Amore, B., Godino, J.D., & Fandiño, M. (2008). *Competencias y Matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE LA TEORIA A LA PRÁCTICA: UNA EXPERIENCIA CON DOCENTES DE AULA

Daniela Bonilla Barraza, Claudia Toledo Robles
Universidad de la Serena

Resumen: La siguiente comunicación consiste en la descripción de una experiencia de innovación didáctica donde participan investigadores y docentes de liceos municipales, la iniciativa surge en el marco del Programa de acompañamiento y acceso efectivo a la educación superior (PACE) y tiene como propósito acercar las teorías de didáctica de la matemática al aula, principalmente, aquellas que faciliten el diseño de secuencias de aprendizaje para la comprensión de los diversos contenidos de tercero y cuarto medio. Como resultado de esta experiencia se muestran secuencias de aprendizaje para tópicos, como la distancia entre dos puntos del plano y conjunto solución de una inecuación líneal, ambas realizadas por los docentes utilizando elementos de la teoría antropológica de lo didáctico de Yves Chevallard y la teoría de Registros y Representaciones semióticas de Duval.

Innovación didáctica, programa PACE, profesores en ejercicio

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

La presente comunicación muestra elementos de una experiencia de innovación didáctica donde participan investigadores en didáctica de la matemática en conjunto a un grupo de docentes pertenecientes a liceos municipales de las comunas de Limarí y Choapa, en la cuarta región de Coquimbo.

Diversas investigaciones en el área dan cuenta de que "*la orientación actual de buena parte de la investigación en Matemática Educativa no ha resuelto totalmente cómo conectar los resultados de investigación con acciones concretas que permitan mejorar la práctica educativa. Las implicaciones didácticas de los papers, muchas veces quedan en eso, en implicaciones que no logran concretarse en la práctica*" (Ochoviet, pág 59).

Es por esta razón que se definen los lineamientos de una propuesta de trabajo, que surge en el marco del programa de acompañamiento y acceso efectivo a la educación superior (PACE), "*política pública inclusiva, que promueve la equidad, buscando restituir el derecho a la educación superior de jóvenes de sectores vulnerables, mediante el impulso de una educación de calidad, integral, que valora el mérito académico en contexto, superando la segregación socio-económica y cultural de los actuales mecanismos de acceso a la educación superior, generando, además, espacios de articulación entre la educación secundaria y la educación superior, promoviendo la participación de los distintos actores del sistema escolar e incluyendo a las comunidades educativas en la corresponsabilidad de la educación de estos estudiantes*."(MINEDUC, pág 15).

Nuestra propuesta de trabajo se articula desde el área de Preparación Académica y Acompañamiento Docente una de las tres estrategias que contempla el Programa PACE, el cual su propósito especificado en los términos de referencia del Programa PACE indica, "*Mejorar la preparación de los estudiantes de los establecimientos PACE, para su ingreso y*

permanencia en la educación superior, mediante el mejoramiento de las prácticas pedagógicas de los docentes de Lenguaje, Matemática (y otra(s) asignaturas), de 3º y 4º año de enseñanza media, favoreciendo así el desarrollo de las competencias (conocimientos, habilidades y actitudes) comprendidas en los Objetivos de Aprendizaje para dichos niveles, del Marco Curricular de la Enseñanza Media."(MINEDUC,pág 17); y en su componente Plan de acompañamiento de las prácticas pedagógicas nos permitirá la implementación de acciones con el propósito de hacer partícipe a los docentes de matemática de los procesos de reflexión pedagógica que enriquezcan su práctica. Al respecto nos hemos propuestos los siguientes objetivos:

Acercar las teorías de didáctica de la matemática al aula, en particular, aquellas teorías que faciliten el diseño de secuencias de aprendizaje que favorezcan la comprensión de los diversos tópicos de la matemática de tercero y cuarto medio.

Diseñar y aplicar propuestas didácticas incorporando elementos de diversos enfoques teóricos en al aula.

- Las acciones pedagógicas del programa atienden a la necesidad de profesionalizar al docente y tiene la intención de superar la relación lineal y mecánica entre una teoría o conocimiento científico-técnico entendido como superior y una práctica de aula subordinada a éste.
- En este reporte se presentan dos experiencias de aula, donde se han considerado elementos de teorías como: teoría antropológica de lo didáctico de Yves Chevallard y representaciones semióticas de Duval, en el diseño de secuencias de aula.

2. Experiencias de aula.

2.1. Primera experiencia: Una propuesta para la comprensión de la distancia entre dos puntos del plano desde la teoría antropológica de lo didáctico.

Para este diseño se utiliza elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999). Se entenderá como organización matemática, a un conjunto de tipos de tareas, de técnicas o procedimientos para resolver estas tareas y de definiciones, propiedades y teoremas que permitan describir y justificar la resolución de la tarea, estas últimas se conocen como tecnologías.

Para la aplicación y análisis de una propuesta, la TAD cuenta con una organización didáctica donde se distingue distintos momentos, entre ellos, el encuentro inicial con la organización matemática, exploración del tipo de tareas T, elaboración de una técnica, trabajo de la técnica e institucionalización.

Se destaca de la teoría, que la necesidad de elaborar nuevas técnicas para un mismo tipo de tarea da origen al objeto matemático.

i) Descripción de la propuesta didáctica.

Se describe una organización matemática que consiste en determinar una expresión analítica para calcular la distancia entre dos puntos del plano. La Tabla 1 siguiente resume la organización matemática.

Organización Matemática	Tipo de tareas	Técnicas	Tecnología
determinar una expresión analítica para calcular la distancia entre dos puntos del plano	$\boldsymbol{T_1}$: Determinar las distancias entre los puntos dados.	$\boldsymbol{t_1}$: Cuentan las unidades del plano cuadriculado entre dos puntos ubicados en la misma recta vertical u horizontal. $\boldsymbol{t_2}$: Dibujan un triángulo rectángulo y calculan la medida de la hipotenusa.	$\boldsymbol{\theta_1}$: valor absoluto de un número real $\boldsymbol{\theta_2}$: Teorema de Pitágoras
Momentos didácticos: exploración del tipo de tareas T, elaboración de una técnica, trabajo de la técnica e institucionalización.			

Tabla 1: Organización Matemática para la distancia entre dos puntos

A continuación se presentan ejemplo de las actividades diseñadas en conjunto profesor–investigador, posterior a un taller donde se muestran elementos de TAD.

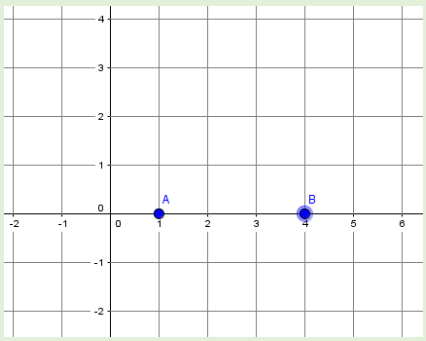
La distancia entre dos puntos del plano equivale a la longitud del segmento de la recta que los une.

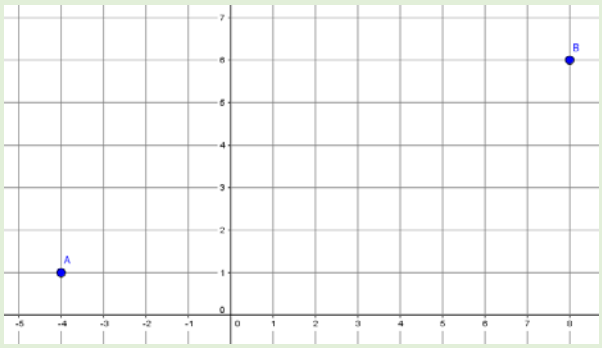
Actividad 1: Considere los puntos A, B, C, D en el plano de la ciudad de Combarbalá y estime la distancia en cuadras. Entre

A y B ii) B y C iii) A y C iv) A y D.

Reflexione sobre: i) La distancia entre A y B, es la misma que entre B y A. ii) La distancia entre A y A, siempre es cero.

Actividad 2: Encuentre la distancia entre los puntos A y B. Escriba las coordenadas de los puntos A y B.





Actividad 3: Encuentre la distancia entre los puntos A (50,90) y B (56, 98).

Análisis a priori de la actividades: En un primer momento de exploración (actividad 1) el docente puede utilizar las esquinas de calles o lugares conocidos por los estudiantes, para introducir el concepto de distancia euclidiana, luego los aprendices elaboran técnicas (actividad 2), donde pueden "contar unidades en un misma recta vertical u horizontal" o bien utilizar el teorema de Pitágoras para determinar las distancias entre los puntos dados. La actividad 3, produce un desequilibrio en las técnicas utilizadas e invita al estudiante a elaboras nuevas técnicas, que permitan establecer un procedimiento para calcular las distancias dados dos puntos. A partir de las técnicas que surgen en la actividad 3, es tarea del profesor realizar la institucionalización de la expresión analítica para calcular la distancia entre dos puntos de plano.

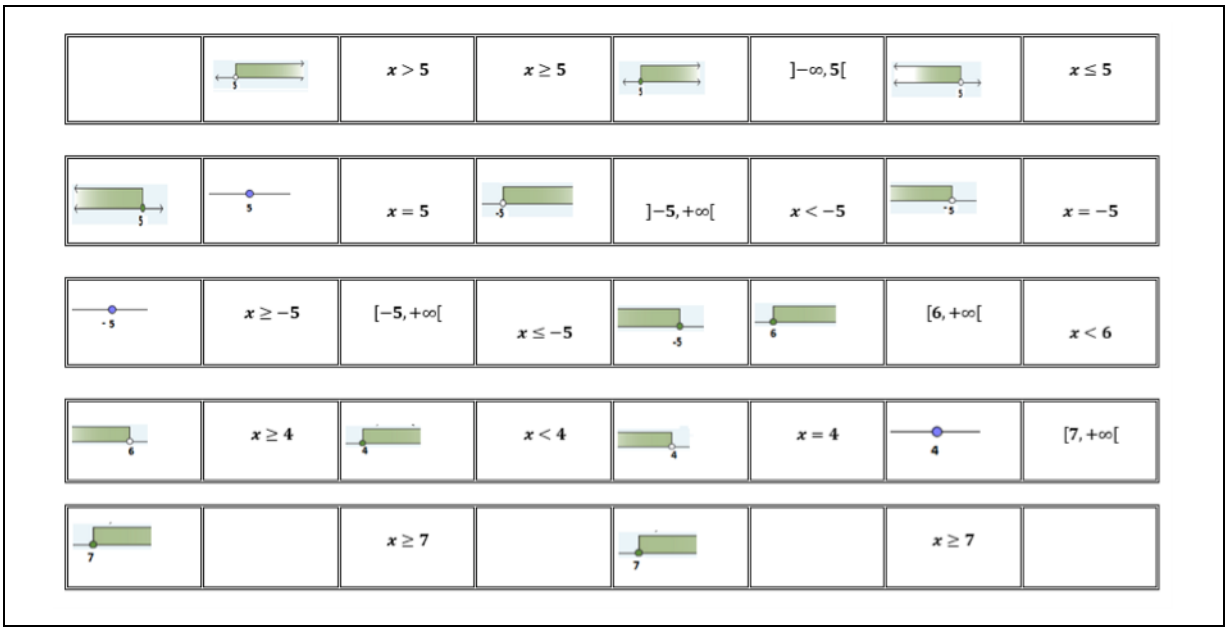
2.2. segunda experiencia: Una propuesta para la comprensión de las distintas representaciones del conjunto solución de una inecuación lineal con una incógnita en R.

Para este diseño se utiliza elementos de la teoría de registros y representaciones semióticas de Raymod Duval.

Duval, postula que un objeto matemático ha sido aprehendido por el alumno, solo si puede conocer y trabajar las transformaciones de este, en al menos dos registros de representación semiótica. Distingue como representaciones semióticas a aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc.) y registro al medio de expresión y representación semiótica, que está constituido por signos: símbolos, íconos, trazos, etc.

El conjunto solución de una inecuación en R, obedece a distintos registros entre ellos el lenguaje natural, algebraico y lenguaje figural. Con el objeto de fortalecer las distintas representaciones semióticas asociadas al tema en estudio, se ha diseñado la siguiente propuesta:

Actividad 1: formar grupos de 4 personas- Comenzamos a jugar al dominó matemático el cual contiene 20 piezas con distintas representaciones de conjuntos en los números reales, a cada integrante le corresponde 5 piezas y gana aquel estudiante que coloca todas sus piezas, siguiendo los turnos del juego.



REFLEXIONES FINALES

De la experiencia realizada, se destacan los siguientes aspectos, por una parte el rol del docente en el aprendizaje de la matemática es fundamental y es tarea de los investigadores hacer partícipe a los profesores en ejercicio de los aportes de la nueva mirada en educación matemática, que entrega la didáctica.

En segundo lugar, se subraya que los docentes de liceos vulnerables participaron activamente en el diseño de situaciones de aula, a partir de los elementos que consideraron importante para sus propuestas y bajo su realidad, pues, son ellos quienes conocen a sus estudiantes y están dispuestos a fortalecer sus prácticas pedagógicas con estos elementos teóricos.

Referencias

Chevallard, Y. (1999) L´analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2),221-266.

Duval, R. (1988). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigación en Matemática Educativa II* (pp. 173–201). Cd. de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ochoviet, C., & Oktac. A (2011). Comprender los resultados de investigación: el rol docente del investigador en la enseñanza de la matemática educativa, En Buendía avalos. G (coord.), *Reflexión en investigación en matemática educativa*, (pp. 53-80). México: Editorial Lectorum.

Mineduc (2016). Lineamientos de Programa PACE. www.mineduc.cl

MODELACIÓN TABULAR, ACTIVIDAD CON CELDAS E INTERCELDAS

Nayadeth Curiqueo, Leonora Díaz, Maximiliano Nuñez, Scarlett Zambrano
Universidad de Valparaíso

Resumen: En este trabajo se reporta una actividad estudiantil en ambiente tabular. La actividad forma parte de una investigación acción que pone en escena un diseño de modelación validado internamente, el que mediante las fases de modelación tabular, analítico algebraica y figural, procura la construcción de significados de lo cuadrático por los estudiantes. Aquí se presenta la actividad estudiantil de modelación tabular, en la que identifican valores que covarian y añaden interceldas con nuevos valores obtenidos desde una tabla con datos de los desplazamientos de un objeto en caída libre y de los tiempos en que ocurren esos desplazamientos. El análisis de casos aporta evidencias de predicciones estudiantiles cuando responden preguntas por datos que no aparecen en la tabla. Uno de los casos construye una expresión analítico algebraica de segundo orden desde los datos numéricos, avanzando a la fase de modelación algebraica del diseño.

Modelación tabular, covariación, diferencias de diferencias

INTRODUCCIÓN

La actividad que se reporta se inscribe en la problemática que emerge desde prácticas de modelación que procuran el desplazamiento desde lo lineal a lo cuadrático, esto es, que los estudiantes construyan significados para lo cuadrático, desde variaciones lineales.

Al decir de Arrieta y Díaz (2015)

> Concebimos a la modelación como una práctica que articula dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas, llamada lo modelado, a partir de la otra llamada el modelo. La diversidad, tanto de las entidades que intervienen en la articulación como la naturaleza de la intervención, hacen posible identificar a la modelación como una práctica recurrente en diferentes comunidades (op. cit., 2015: 19).

La concepción de modelación que se suscribe plantea que no hay modelación sin interacción con el fenómeno que se intenta modelar, por lo que la primera fase del diseño es la experimentación en sentido amplio. Esta experimentación puede ser presencial, discursiva o virtual (op. cit., 2015). En este reporte se presentan desarrollos de modelación tabular de estudiantes de tercer año de enseñanza media, con datos de una experimentación discursiva, parte de una investigación acción guiada por la pregunta orientadora ¿Cómo los estudiantes construyen significados para lo cuadrático desde variaciones lineales?

LA ACTIVIDAD

Inmersión en la experimentación discursiva

La actividad inicia solicitando a los estudiantes que figuren la siguiente situación: *Neil Armstrong, previo a su descenso en la luna, realizó el siguiente experimento: dejó caer una piedra desde la Apolo 11 cuando esta se encontraba a 81 m de la superficie lunar.* Para la inmersión de los estudiantes en la experimentación discursiva, ellos configuran el experimento articulando la situación, la figura que han elaborado de ella y la Tabla 1, que se

les entrega con el registro de los datos provenientes de la situación, en la que identifican covariaciones de distancias con tiempos en que se recorren esas distancias.

tiempos (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
distancias (metros)	0	0,81	3,24	7,29	12,96	20,25	29,16	39,69	51,84	65,61	81

Tabla 1. Covariación de tiempos y distancias en la caída libre de una piedra en la superficie lunar

Modelación tabular

En la actividad de predecir datos no ostensibles, los estudiantes articulan el fenómeno de caída libre de la piedra con la tabla construida, esto es, constituyen el dipolo modélico tabular (fenómeno, tabla construida) con base en sus predicciones de datos que no aparecen en la Tabla 1 y que se encuentran entre sus valores, equidistantes o no a ellos. Enseguida conforman una segunda tabla con los datos de la Tabla 1, añadiendo columnas con las variaciones de tiempos y variaciones de distancia, en este caso de tipo lineales y las variaciones de las variaciones de distancias, para este caso constantes. Siguen preguntas de valores que no aparecen en la tabla con variaciones construida hasta aquí y que se encuentran entre valores explícitos de ella, equidistantes y no equidistantes a sus datos manifiestos. A continuación el diseño procura que los estudiantes construyan generalizaciones desde las cantidades que registra la tabla que construyeron. Con base en sus generalizaciones, en la fase de modelación algebraica, constituirán más adelante el dipolo modélico analítico algebraico cuando articulen fenómeno y expresión analítico algebraíca.

ANÁLISIS DE LOS CASOS

Se analiza el trabajo en un ambiente tabular de tres estudiantes de tercer año medio. Ellos ponen de manifiesto en inter-celdas, cantidades de variaciones implícitas en la tabla inicial (Tabla 1).

Con base en la articulación de la Tabla 1 junto con la situación narrada y la figura que concurren a constituir al experimento discursivo en comento, se abre la oportunidad a los estudiantes de construir nuevas columnas dando paso a una tabla más compleja que añade, al dar cuenta de covariaciones de cantidades de la tabla inicial (Tabla 1), columnas con variaciones de cantidades de tiempo y de distancia y, con variaciones de variaciones de cantidades de distancia. Así, la tabla que construyen los estudiantes, responde a un esquema de cinco columnas con cuatro de ellas elaboradas mediante cálculos de variaciones de las cantidades registradas en la tabla inicial. Presentan entre-celdas en las que escriben los resultados de los cálculos de diferencias y diferencias de diferencias.

Análisis de la actividad tabular de tres estudiantes

Al decir de Estrella (2014) el espacio bidimensional de una tabla, en tanto ambiente de recolección y análisis exploratorio de datos, presenta altas demandas cognitivas al estudiantado que ella identificó en estudiantes de primer ciclo básico. Según la autora (op.cit., 2014: 11) comprender una tabla requiere la activación, entre otros, de los procesos

de lectura, búsqueda e interpretación y evaluación. Por su parte, construir una tabla conlleva procesos de escritura, de construcción y compleción, que signifiquen para el fenómeno en estudio un conjunto "completo" de datos en el sentido de dar cuenta de las peculiaridades que lo distingan. En Tabla 2 se presenta un resumen de celdas e inter-celdas confeccionadas por tres estudiantes.

t(s)	$\Delta t = t_2 - t_1$			$\Delta d = d_2 - d_1$			$\Delta[\Delta d] = \Delta d_2 - \Delta d_1$		
	E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3
0	0	1 –0 =1	1	0	0,81 -0=0,81	0,81	0	0,81-0=0,81	0
1	5,67	2 -1 = 1	1	3,67	3,24 -0,81=2,43	2,43	5, 67	2,43-0,81=1,62	0
2	12,72	3 –2= 1	1	12,72	7,29 – 3,24=4,05	4,05	12,72	4,05-2,43=1,62	0
3	22,32	4 – 3=1	1	28,32	12,96- 7,29=5,67	5,67	22,32	5,67-4,05=1,62	0
4	28,62	5 - 4=1	1	29,67	20,25-12,96=7,29	7,29	29,67	7,29-5,67=1,62	0
5	32,15	6 – 5=1	1	32,15	29,16-20,25=8,91	8,91	32,15	8,91-7,29=1,62	0
6	48,13	7 -6= 1	1	48,13	39,69-29,16=10,53	10,53	48,13	10,53-8,91=1,62	0
7	57,52	8 -7=1	1	51,84	51,84–39,69=12,15	12,15	57,52	12,15-10,53=1,62	0
8	68,30	9 -8=1	1	65,30	65,61-51,84=13,72	13,77	65,30	13,77-12,15=1,62	0
9	81	10 -9=1	1	71,128	81 – 65,61=15,39	15,39	81	15,69-13,77=1,62	0

Tabla 2: Tabla resumen de las celdas e interceldas construidas por tres estudiantes

Estudiante 1. Se observan indicios de coherencias cognitivas locales, de la estrategia de los puntos medios para predecir, reportada en estudios anteriores como el de Sepúlveda, Díaz y Arrieta (2015). En lo global presenta valores de celdas e interceldas inconducentes. Esto evidencia la complejidad del ambiente tabular que no ha sido objeto de enseñanza en el aula, permaneciendo invisibles obstáculos epistemológicos, cognitivos y didácticos ya reportados para estudiantes de primer ciclo básico (Estrella, 2014) y los que se develan en esta actividad en ambiente tabular con celdas e interceldas para estudiantes de enseñanza media.

Estudiante 2. El estudiante identifica los valores para obtener la diferencia de tiempos, los que registra en una nueva tabla con celdas e interceldas. El registra la regularidad de las diferencias de tiempo, $\Delta t=1$ en la segunda columna. Anota las diferencias de distancias recorridas por la piedra en la tercera columna. Obtiene las diferencias Δd relacionando los valores tomados desde la tabla inicial. Considera duplas de distancias consecutivas y registra su variación en las interceldas correspondientes. Al trabajar con las diferencias de diferencias, que inscribe en la cuarta columna, el estudiante retrocede a una primera dupla de diferencias de distancias, estrategia que difiere desde el segundo valor en adelante, obteniendo valores constantes para las respectivas diferencias de diferencias. La intercelda que no llena con la variación de la variación de desplazamientos nos advierte acerca de la complejidad involucrada en la actividad en el ambiente tabular con interceldas, el que de modo análogo al ambiente tabular inicial (Estrella, 2014), se soslaya como objeto de enseñanza. Se conjetura que la inmersión del estudiante en el contexto de experimentación y modelación aportó significados que facilitaron su trabajo en ambiente tabular salvando los obstáculos que este suele presentar. En efecto, el estudiante en su inmersión al experimento

discursivo señala: *El experimento (de)muestra la velocidad de una piedra al caer, estamos intentando saber la gravedad de la luna fisicamente hablando, pero matemáticamente hablando, es el planteo del cálculo lógico de una piedra* (al caer libremente). Ante la pregunta por una expresión generalizada para la distancia *d* correspondiente a un tiempo *t*, plantea una expresión que relaciona valores de distancias con valores de tiempos al cuadrado, con un coeficiente constante, a la manera de Galileo quien establece que el movimiento de caída libre de un objeto relaciona cantidades enteras con esas cantidades al cuadrado (Díaz y Arrieta, 2015).

Estudiante 3. Como en el caso anterior, el estudiante identifica los valores para obtener la diferencia de tiempos que registra en la nueva tabla con celdas e interceldas. Registra $\Delta t=1$ en la segunda columna. Anota las diferencias de distancias recorridas por la piedra en la tercera columna. El valor 0 que anota en la cuarta columna pudiera corresponder con la estrategia que considera diferencias de diferencias de tiempos en lugar de distancias como se le solicitara y registra ese valor en la cuarta columna. Cabe notar la relevancia que cobra el esquema tabular que le presentó el diseño. Este no figuró las interceldas de las diferencias de diferencias, aumentando la complejidad involucrada en una actividad en ambiente tabular y más aún con interceldas como se ha comentado antes.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Los casos de desarrollos estudiantiles en ambiente tabular, provenientes de un diseño de modelación orientado al estudio del comportamiento de un objeto en caída libre, hicieron visibles las complejidades del trabajo con tablas para estudiantes e investigadores. Más específicamente sus producciones aportan evidencias, por una parte, acerca de las complejidades de la actividad en un ambiente tabular que considera celdas e interceldas y, por otra, relevan la importancia de la inmersión en un contexto de modelación para superar los obstáculos emergentes en el trabajo con tablas que no han sido objeto de enseñanza. En efecto, las textualidades del segundo caso ilustran su cabal inmersión y esta concurre con la expresión que levanta, precursora del modelo analítico algebraico, con base en su actividad en el ambiente tabular.

Referencias

Arrieta, J., & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 19 – 48.

Díaz, L., & Arrieta, J. (2015). Una deriva de tiempos en la obra de Galileo. En *Actas de las XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, CIAEM. Tuxtla Gutiérrez, México.

Estrella, S. (2014). *El objeto tabla: un estudio epistemológico, cognitivo y didáctico*. Resumen de Tesis para obtener el grado de Doctora en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Sepúlveda, C., Díaz, L., & Arrieta, J. (2015). Trayectorias constituidas y emergentes en prácticas de modelación desde una mirada socioepistemológica. En *Actas de las XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Villarrica, Chile.

LAS CREENCIAS SOBRE EL CONOCIMIENTO Y SUS EFECTOS SOBRE DESEMPEÑOS ESPECÍFICOS: EL CASO DE LAS FRACCIONES EN MATEMÁTICA

Orielle Cisternas[1], Mario Reyes[1], Pablo Dartnell[2], David M. Gómez[2]
Departamento de Psicología, Facultad de Ciencias Sociales[1], Universidad de Chile
Centro de Investigación Avanzada en Educación[2] (CIAE), Universidad de Chile

Resumen: Se exponen los resultados preliminares de un estudio de desempeño en tareas de comparación de fracciones y la posible influencia que las creencias epistemológicas de dominio general pueden tener sobre él. Se aplicó un cuestionario basado en el Inventario de Creencias Epistemológicas (EBI) a 57 sujetos de entre 18 y 25 años, y luego se les presentó un test de 180 ítems de comparación de fracciones. El objetivo fue revisar de qué manera las creencias acerca de la naturaleza y adquisición del conocimiento se relacionaban con el desempeño en dominios específicos de la matemática. Los resultados sugieren un efecto de las creencias acerca de la estructura del conocimiento, dado que los sujetos más cercanos al polo ingenuo en dicha dimensión son quienes obtienen, además, los resultados más bajos en todos los tipos de ítems de la tarea de comparación de fracciones.

Creencias epistemológicas, fracciones, matemática, educación

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de números racionales es un asunto problemático de abordar en la enseñanza, puesto que la forma en que éstos se representan puede resultar engorrosa en comparación a la disposición casi intuitiva que pareciera existir por parte de las personas para comprender y trabajar con cantidades discretas como los números naturales. Las fracciones se abordan típicamente a partir de cuarto año básico, demandando una nueva forma de entender los números, distinta a la usada hasta ese entonces por los niños e incluso incompatible en ciertos aspectos, como por ejemplo la comparación de fracciones en términos de su magnitud.

Estudios anteriores han mostrado que un error usual en tareas de comparación de magnitud de fracciones es llegar a la solución fijándose únicamente en los números naturales que las componen (Stafylidou y Vosniadou, 2004). Esta lógica lleva a que, por ejemplo, se piense que en la comparación entre 2/7 y 2/3 la primera fracción sea considerada como la mayor puesto que 7 es mayor que 3. También puede ocurrir que, en el desarrollo de una operación básica, por ejemplo, una adición, el razonamiento adquirido anteriormente acerca de los números nos lleve a una conclusión del estilo de “1/2 + 1/3 es igual a 2/5”, en la línea de lo aprendido anteriormente acerca de los números naturales.

Un marco conceptual que nos permite comprender la lógica aplicada en lo expuesto anteriormente se denomina *Natural Number Bias (NNB),* el cual se refiere a la tendencia inapropiada de aplicar las propiedades de los números naturales durante el trabajo con números racionales (Vamvakoussi, Van Dooren y Verschaffel, 2012). Éste es un sesgo que puede tener antecedentes en la forma en que se aborda la enseñanza de las fracciones en la escuela, por lo que es relevante poner atención en la manera en que los estudiantes están comprendiendo esta materia.

El siguiente ámbito de interés en el presente estudio trata acerca de las *creencias epistemológicas*, las cuales han sido conceptualizadas como aquellas creencias que las personas poseen acerca de la naturaleza y la adquisición del conocimiento (Schommer-Aikins y Duell, 2013). Éstas se conformarían en función de la experiencia del sujeto dentro de la cultura en que se desenvuelve, pudiendo situarse dentro de un espectro que va desde un polo ingenuo hacia un polo sofisticado **(**Hofer y Pintrich, 1997; King y Kitchener, 2004, citado en García y Sebastián, 2011). Considerando el marco conceptual de Schommer (1994), las creencias epistemológicas se comprenden conformadas por cuatro dimensiones que se mueven cada una entre un polo ingenuo y sofisticado. Estas cuatro dimensiones son: estructura del conocimiento, estabilidad del conocimiento, control del aprendizaje y velocidad del aprendizaje. Acerca de la *estructura*, en su polo ingenuo se consideraría que el conocimiento está conformado por piezas desordenadas y en su polo sofisticado que éste es un todo integrado. En cuanto a la *estabilidad*, el polo ingenuo refiere a que el conocimiento es inmodificable, mientras que en su polo sofisticado el conocimiento sería tentativo, modificable. Por su parte, el *control del aprendizaje* oscila entre la creencia de que la capacidad que una persona tiene para aprender está dada desde el nacimiento y la creencia de que la capacidad para aprender puede mejorarse, entre el polo ingenuo y sofisticado, respectivamente. Por último, la *velocidad del aprendizaje* dice principalmente que el aprendizaje o bien ocurre rápido o bien no ocurre, en su polo ingenuo, mientras que en su polo sofisticado se concibe el aprendizaje como un proceso gradual.

En la literatura del presente siglo, se han reportado numerosos hallazgos de efectos de las creencias epistemológicas sobre el desempeño de aprendizaje de estudiantes escolares en diferentes áreas, incluyendo matemática y el efecto de las creencias de los profesores –en ejercicio o en formación- acerca del conocimiento y de la matemática, y cómo éstas afectan sus prácticas de enseñanza y los resultados de sus alumnos (Schommer-Aikins y Duell, 2013). Sin embargo, no existen datos acerca de cómo las concepciones que las personas jóvenes (estudiantes, cesantes y trabajadores) poseen acerca de la naturaleza y la adquisición del conocimiento –las cuales, en efecto, fueron adquiridas en función de sus experiencias en la etapa escolar y han sido moduladas (o no) durante su formación posterior– podrían tener incidencia en su enfrentamiento a contenidos específicos, pertenecientes al currículo escolar. En este estudio, por tanto, nos preguntamos si los marcos de creencias epistemológicas que se estructuran durante las experiencias educacionales de los sujetos pueden modular la forma en que, posteriormente, éstos se enfrentan a áreas del conocimiento que son percibidas como complejas. En este sentido, si un sujeto tuvo una experiencia escolar donde estructuró una creencia más cercana al polo ingenuo acerca del conocimiento, es probable que luego tenga mayores dificultades al enfrentarse a nuevas situaciones de aprendizaje o sea más reticente a reabordar contenidos que, con antelación, haya percibido como áridos.

MÉTODO

Participaron 57 sujetos (27 mujeres), pertenecientes al rango etario de 18 a 25 años. De todos ellos, 47 eran estudiantes de alguna institución de educación superior y 10 eran jóvenes no estudiantes. Se les aplicó un cuestionario con escala tipo Likert de 24 ítems, basado en el Inventario de Creencias Epistemológicas (*EBI*) de Schraw et al. (2002, citado

en García y Sebastián, 2011), el cual debía ser contestado en un computador. Una vez que finalizaban con el cuestionario, se les aplicaba un test de comparación de fracciones, compuesto por 180 ítems, presentados en tres bloques de 60 pares de fracciones. En esta tarea, los sujetos debían seleccionar la fracción mayor o menor, según las instrucciones que se le dieran antes de comenzar el test y que, de todos modos, aparecían en la presentación de cada par de fracciones a comparar. Es necesario señalar que los ítems de esta tarea fueron diseñados en función de una serie de variables que escapan al alcance de este reporte, los cuales son analizados en el marco del proyecto Fondecyt 1160188 que engloba este trabajo.

RESULTADOS

El análisis de los datos comenzó con la agrupación de los sujetos en función de los resultados obtenidos en el cuestionario de creencias epistemológicas usando el método de *k-means clustering*. La distribución de los grupos por cantidad de personas, resultados en el cuestionario de creencias epistemológicas y el resultado global obtenido en la tarea de comparación de fracciones se describen en la Tabla 1. Es necesario señalar que, en el caso del cuestionario de creencias, promedios sobre 0 dan cuenta de creencias tendientes al polo ingenuo de cada dimensión y, por el contrario, promedios por debajo de 0, corresponden a creencias más sofisticadas.

A través de análisis de ANOVA, para el cuestionario de creencias, se obtuvo que existen diferencias significativas entre estos grupos en todas las dimensiones excepto en velocidad del aprendizaje (Estructura: $p < .0001$; Estabilidad: $p < .0001$; Control: $p < .0001$; Velocidad: $p = .14$). Además, otro análisis de ANOVA aplicado esta vez a los puntajes generales obtenidos por cada grupo en el test de comparación de fracciones, permite señalar que –tal como se puede apreciar en términos de porcentaje global de aciertos– el grupo C obtuvo resultados significativamente más bajos ($p = .02$). Esta misma diferencia fue encontrada a la hora de revisar los resultados para algunos tipos específicos de pares de fracciones, particularmente en el caso de los ítems con iguales numerador o igual denominador, y el caso de ítems sin componentes iguales.

Grupo	Estructura	Estabilidad	Control	Velocidad	Fracciones
A (n=21)	-0,37	-0,86	-1,19	-1,44	82%
B (n=19)	0,48	0,60	-0,94	-1,39	83%
C (n=17)	0,63	-0,39	-1,70	-1,66	66%

Tabla 1: Distribución de puntajes de los grupos para cada dimensión del cuestionario de creencias epistemológicas y porcentaje de respuestas correctas del test de fracciones para cada uno de ellos.

Es especialmente interesante que los datos se hayan agrupado de esta manera, dado que en el análisis se consideraron, como punto de partida para el agrupamiento, sólo los resultados del cuestionario de creencias epistemológicas. A la luz de los resultados obtenidos por cada grupo para la tarea de comparación de fracciones, es posible ver que el grupo C, que obtuvo el peor rendimiento en el test de fracciones, es también el que está más cercano al polo ingenuo en la dimensión de *estructura del conocimiento*. Por tanto, los sujetos de dicho conglomerado tienden a pensar en el conocimiento como elementos atomizados que no

necesariamente responden a un orden o a una globalidad integrada. No obstante, la dimensión de *estabilidad del conocimiento* tiende a la relativa sofisticación, es decir, a una percepción sobre el conocimiento como dinámico en vez que estático. En cambio, en los grupos A y B, ambas dimensiones acerca de la naturaleza del conocimiento responden en una misma dirección (ambas hacia el polo sofisticado y ambas, hacia el polo ingenuo), no registrándose diferencias entre ellos a la hora de revisar sus resultados en la tarea de comparación de fracciones.

CONCLUSIONES

Dados los resultados obtenidos en esta mirada preliminar de los datos recogidos, es posible evidenciar que los sujetos del grupo con peor rendimiento en la tarea de fracciones poseen inconsistencias en los ámbitos referentes a la naturaleza del conocimiento (estructura y estabilidad), lo cual puede presentarse como un inconveniente a la hora de que el sujeto enfrente nuevos conocimientos, toda vez que al considerarlos como un conglomerado inconexo de elementos que se debe aprender (sin un motivo ni una base integrada) y que puede mutar constantemente, podría afectar en diferentes niveles su capacidad de aprendizaje y, por tanto, su capacidad de desempeñarse adecuadamente en distintos ámbitos del saber. Esto se vería reflejado, por ejemplo, en ámbitos como la integración de la información que se recibe y la dificultad en enfrentarse a dominios complejos como el de las fracciones. De esta manera, se afectan la motivación y el interés por aprender que posee el sujeto (Schommer-Aikins, 2004), aspectos sumamente relevantes para el aprendizaje matemático. Esto resulta ser, en consecuencia, relevante a la luz de las estrategias que se deben desplegar en el aula, dado que es en este espacio donde ocurre gran parte de la experiencia de los individuos con las situaciones de aprendizaje formales y donde, en estricto rigor, se conforman las concepciones que se poseen en torno a qué es, cómo opera y cómo se produce el conocimiento (Schommer-Aikins, 2004), en este caso matemático.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por los proyectos Fondecyt 1160188, PAI/Academia 79130029 y Fondo Basal FB0003.

Referencias

García, M. R. y Sebastián, C. (2011). Creencias epistemológicas de estudiantes de pedagogía en educación parvularia, básica y media: ¿diferencias en la formación inicial docente?. *Psykhé, 20*(1), 29-43.

Schommer, M. (1994). Synthesizing epistemological belief research: Tentative understandings and provocative confusions. *Educational Psychology Review*, *6*, 293-319.

Schommer-Aikins, M. (2004). Explaining the Epistemological Belief System: Introducing the Embedded Systemic Model and Coordinated Research Approach. *Educational Psychologist*. *39*(1), 19-29.

Schommer-Aikins, M. y Duell, O. K. (2013). Domain specific and general epistemological beliefs. Their effects on Mathematics. *Revista de Investigación Educativa*, *31*(2), 317-330.

Stafylidou, S., Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, 503-518.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*, 344-355.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL PROGRAMA DE ESTUDIO DE MATEMÁTICAS DE COSTA RICA PARA TERCER CICLO DE EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA EN LAS ÁREAS DE NÚMEROS Y GEOMETRÍA

Eric Mata Delgado, Milena Granados Montero
Liceo Unesco, CTP San Isidro

Resumen: Durante muchos años, la resolución de problemas ha sido uno de los temas de interés en la investigación en didáctica de las Matemáticas, incluso para algunas propuestas curriculares es considerada como estrategia metodológica principal. En esta investigación se analiza en qué medida las sugerencias que dicta el currículo de Costa Rica son coherentes con las características de los problemas que este ofrece para tercer ciclo de Educación General Básica en las áreas de Números y Geometría. Mediante un análisis de contenido de los programas de estudio, nos permitieron concluir que existe una incoherencia entre lo que el currículo anhela y lo que brinda.

Matemáticas, resolución de problemas, números, geometría, educación secundaria

INTRODUCCIÓN

Nuestra investigación surge de la preocupación de ¿en qué medida las sugerencias que dicta el currículo de Matemáticas de Costa Rica son coherentes con las características de los problemas que el mismo ofrece en las áreas de Números y Geometría? Para contestar esa pregunta propusimos los siguientes objetivos específicos: a) Caracterizar los problemas del currículo en las áreas de Números y Geometría atendiendo al contexto, formulación, solución y nivel de complejidad. b) Establecer las semejanzas y diferencias que presentan las indicaciones del currículo oficial sobre el tipo de problema a utilizar en el aula y los problemas que el mismo brinda en la parte de las indicaciones puntuales.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Se hace una breve fundamentación teórica acerca de la Resolución de Problemas en el aula (RP), que nos permitirá tras mostrar lo qué es un problema, qué entendemos por RP, expresado por Carrillo (1996) y por el ministerio de Educación Pública de Costa Rica, MEP (2012) y con las características de los problemas (mediante el instrumento de análisis de los problemas), basados en la clasificación utilizada por López y Contreras (2014), estableceremos la coherencia o no entre el tipo de problema detectado en el currículo y el tipo de problema que este ofrece.

METODOLOGÍA

Considerando las características de nuestra investigación, se sitúa en el paradigma interpretativo, es de corte cualitativo, dada la naturaleza de la investigación, sin embargo para interpretación de los datos se realizó un análisis cuantitativo. Efectuamos un análisis de contenido del currículo propuesto por el MEP, tanto en forma general para mostrar el tipo de problema que este anhela, como en el apartado de indicaciones puntuales en el área de Números y Geometría. El instrumento de análisis de la información obtenida para caracterizar los problemas del currículo está compuesto por parte de la categorización hecha

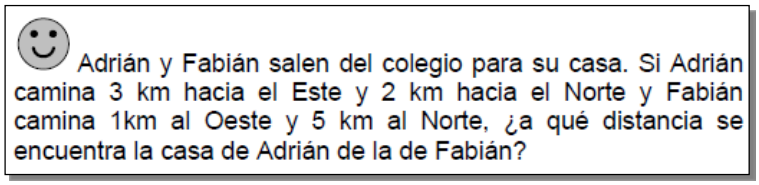
por López y Contreras (2014, p. 4), donde consideramos las categorías de Contexto, Formulación y Solución. Además agregamos la categoría Nivel de complejidad sugerida por el MEP (2012, p.32).

RESULTADOS

El currículo propone 47 problemas para tercer ciclo, de ellos 15 son de Números y 32 de Geometría, están distribuidos de la siguiente manera: 25 en sétimo, 12 en octavo y 10 en noveno n ☺. El símbolo que aparece en la columna de indicaciones puntuales del programa de cada ciclo educativo se refiere a que el ejemplo o sugerencia corresponde a un problema, MEP (2012, p. 75). Dos problemas de octavo año no se analizaron pues no se ajustaban con la categorización utilizada.

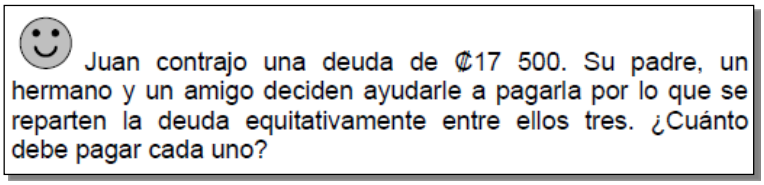
Contexto: veintidós de los problemas presentan un contexto de la vida real personal (48,89%), cuarenta proporcionan datos falsos (88,89%), un total de veintinueve problemas no tienen conexión con otras ramas de la matemática (64,44%), éstas características las presenta el siguiente Problema 2, MEP (2012, p. 316).

Problema 1



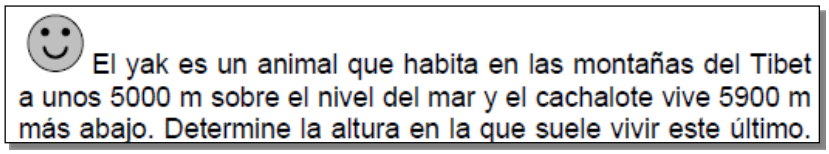
Formulación: Veintinueve de los problemas tienen una formulación sin ilustración (64,44%), veintiséis problemas presentan una formulación simple en cuanto a las cuestiones desde el punto de vista sintáctico (57,78%), treinta y un problemas tienen una formulación sencilla sobre el número de cuestiones desde el punto de vista semántico (68,89%), cuarenta y un problemas muestran información proporcionada suficiente (91,11%), treinta de los problemas tienen una formulación exclusivamente verbal (66,67%) y treinta y dos problemas no requieren de algún recurso extra (71,11%). Un ejemplo que cumple con estas características es el siguiente Problema 3, MEP (2012, p. 286).

Problema 2



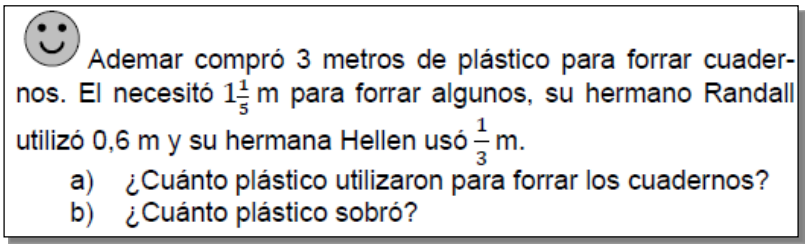
Solución: Treinta y ocho problemas tienen una solución con respuesta cerrada corta (84,44%), la misma cantidad de problemas requieren de una solución única y exacta, cuarenta problemas requieren de una representación exclusivamente numérica o verbal en su solución (88,89%) y veintiocho no requieren de toma de decisión en cuanto a las soluciones (62,22%), como se puede observar en el Problema 4, MEP (2012, p. 280).

Problema 3



Nivel de complejidad: hay diecisiete problemas que son del nivel de conexión (37,78%), catorce son de reproducción (31,11%), misma cantidad son de reflexión. El siguiente Problema 5, MEP (2012, p. 287) es un problema del nivel de complejidad de reproducción.

Problema 4



DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El currículo considera que “el uso de tecnologías debe asumirse como un componente muy importante para un enfoque curricular basado en la resolución de problemas” MEP (2012, p. 32) pero solo el 22,22% de los problemas analizados en su formulación requieren del uso de nuevas tecnologías (B6-FRNT). Para el currículo “un problema debe poseer suficiente complejidad para provocar una acción cognitiva no simple” MEP (2012, p. 29), pero la mayoría de los problemas analizados (68,89%) muestran una formulación sencilla (una sola estrategia cognitiva), según el número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista semántico (B3-FSen). En el marco de la contextualización activa, para despertar el interés y por tanto la participación de los estudiantes en la clase se recomienda “diseñar problemas sacados de las informaciones de prensa, de la escuela, de la comunidad, de la clase, de Internet” MEP (2012, p. 36), pero solo cinco de los problemas (11,11%) tienen un contexto de datos verdaderos es decir, si los datos sobre los que se basa son genuinos, aparece la fuente de donde fueron tomados (A2-CDV). Uno de los procesos matemáticos que el currículo espera activar es el de conectar, “las conexiones se pueden desarrollar en muchos contextos: por ejemplo, dentro de cada área matemática (como cuando se aplican los procedimientos y operaciones de los números naturales en los racionales o reales). Pero también entre las distintas áreas matemáticas y de manera general con otras materias”, pero el 64,44% de los problemas tienen un contexto sin conexión (A3-CSC). Otros procesos ligados son comunicar y representar, el primero “sugiere la comunicación en distintos niveles y formas, desde las más simples como verbales o escritas, hasta gráficas, simbólicas y formales” MEP (2012, p. 57), pero las representaciones pedidas en las soluciones de los problemas son casi en su totalidad (88,89%) exclusivamente numérica o verbal (C2-SRNV). Además los problemas tienen en su mayoría en su formulación una representación empleada exclusivamente verbal (B5-FREV). Otra de las características de los problemas que el currículo resalta es la respuesta abierta, “resulta conveniente subrayar la importancia de problemas de final abierto, es decir aquellos que admiten varias soluciones y

aproximaciones" MEP (2012, p. 29); pero el 84,44% de los problemas tienen en su solución una respuesta cerrada (C1-SCR) y el mismo porcentaje de problemas con solución única y exacta (C3-SUE).

Dentro de las semejanzas entre lo que se anhela y lo que se brinda, consideramos en la categoría de contexto lo expuesto en MEP (2012, p. 14) "si bien se promueve el uso de problemas en contextos reales, los abstractos se consideran muy importantes", esto se confirma ya que el 60% de los problemas son del contexto de la vida real y el restante son puramente matemático (A1).

Para finalizar, consideramos que hemos dado respuesta a nuestra pregunta de investigación, pues se evidencia en gran medida la incoherencia entre las sugerencias que dicta el currículo de Costa Rica con las características de los problemas que este ofrece, esto nos lleva a pensar en la importancia de que el profesor investigue y pueda confeccionar sus propios problemas o modificar los que el Ministerio de Educación Pública sugiere en las indicaciones puntuales.

Referencias

Carrillo, J. (1996). Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (1998). Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula. Educación Matemática, 10(1), 26 -37.

López, E. M. y Contreras, L.C. (2014). Análisis de los problemas matemáticos de un libro de texto de 3º ESO en relación con los contenidos de geometría plana. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau, T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de trabajo. XVIII Simposio de la SEIEM, (pp. 425-434). Salamanca: SEIEM.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, [MEP] (2012). Programas de estudio de matemáticas. I, II y III ciclos de Educación General Básica y ciclo diversificado. San José, Costa Rica. MEP.

ACTITUDES HACIAS LAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTS DE PRIMER CURSO DE UNIVERSIDAD Y SU INCIDENCIA EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO

Marcelo Casis, Alexis Curiche, Ana María Oyaneder
Universidad Finis Terrae

Resumen: Estudiamos las actitudes hacia las matemáticas que manifiestan los estudiantes de primer curso de universidad, matriculados en carreras profesionales que dentro de su malla académica cursan asignaturas matemáticas el primer semestre de la UFT, y cómo éstas se relacionan con el rendimiento académico. Para los propósitos de este encuentro, mostramos los resultados obtenidos con los estudiantes de la carrera de arquitectura. Concluimos que estas actitudes son moderadamente positivas y que la correlación entre ellas y su rendimiento académico, pese a existir, es baja.

Actitudes, rendimiento académico, afectos

INTRODUCCIÓN

Dos supuestos educativos están generalmente aceptados; uno es que la capacitación matemática de los individuos es necesaria para desenvolverse en el mundo tecnológico y globalizado actual, en donde las matemáticas juegan un papel primordial en la formación de las personas e intervienen en los diversos ámbitos de la vida privada, social y civil (Anthony y Walshaw, 2009); el otro se refiere a que la competencia matemática se alcanza mayoritariamente en los centros educativos con la intervención del profesorado (Anderson, 2007; Rico, 2005), siendo el profesorado que interviene en la formación matemática de los estudiantes uno de los agentes más influyentes en la consecución de dicha capacitación. Pero a pesar de la necesidad de formación matemática de los individuos, los estudiantes de muchos países no muestran haber alcanzado el nivel que deberían (Lipnevich, Krumm, Burrus, y Roberts, 2011; Varas, Felmer, Gálvez, Lewin, Martínez, Navarro, Ortiz y Schwarze, 2008). Algunos investigadores relacionan este bajo rendimiento con el elemento emocional que hay implícito en el aprendizaje. La investigación sicológica confirma que aun siendo el aprendizaje un proceso cognitivo, este se ve afectado por factores tales como actitudes que posean los sujetos; y se han llegado a determinar variables tales como el sexo, el origen étnico, las creencias y la motivación, asociadas con las actitudes hacia las matemáticas (Hannula, 2006). La actitud hacia las matemáticas es considerada una variable que dirige el comportamiento de los individuos en su relación con esta materia. Están directamente relacionadas con el gusto por las matemáticas, por obtener placer cuando se trabaja con ellas y al temor a no llegar a los logros deseados. Las actitudes negativas que a veces muestran los estudiantes hacia las matemáticas se atribuyen a factores como no lograr entenderlas, falta de autoconfianza, ansiedad cuando han de trabajar en matemáticas y el comportamiento del profesor en su enseñanza (Memnun y Akkaya, 2012). Algunos investigadores entre los que se encuentran McLeod (1992), Goméz-Chacón (2000) y Goldin (2008), conceden al afecto gran importancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Hablan del significado psicológico y cognitivo del afecto y su implicación en la educación matemática. McLeod (1992) articula el afecto como una preocupación importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y describe aspectos de las

creencias, las actitudes, las emociones y la autoconfianza, constructos ligados al afecto. También explica la naturaleza del dominio afectivo en la educación matemática en términos de auto-concepto, ansiedad matemática, autoeficacia, esfuerzo, motivación, autonomía y estética. Partiendo del acercamiento que hace McLeod (1992) del afecto, Saint-Pierre y Lafortune (1995) lo amplían, considerándolo una categoría general cuyas componentes serían las actitudes y los valores, el comportamiento moral y ético, el desarrollo personal, las emociones (entre las que se encuentra la ansiedad) y los sentimientos, el desarrollo social, la motivación y la atribución. La ansiedad es tomada como un estado emocional que puede dar lugar a varios trastornos como nerviosismo, aprensión, preocupación, miedo; miedo a no ser capaz de hacer la tarea o a fracasar en ella, que podría ser causado por falta de autoconfianza. La ansiedad matemática afecta a cómo se sienten los estudiantes y se comportan (Pérez-Tyteca, Castro, Rico y Castro, 2011).

La interacción entre actitud y consecución de logro académico ha recibido una gran atención (Belbase, 2013; Khine, Al-Mutawah y Afari, 2015). Esta atención ha podido ser motivada por la constatación de que otros factores, como la capacidad cognitiva o la exposición de los estudiantes a los recursos necesarios para el aprendizaje de las matemáticas y requisitos para el rendimiento en matemáticas, no explican las diferencias entre el rendimiento en matemáticas de los individuos (Lipnevich, MacCann, Krumm, Burrus y Roberts, 2011). Los resultados de estas investigaciones sobre la relación entre actitudes de los sujetos y rendimiento en pruebas de avaluación sobre logros no han sido unánimes. Parte de la investigación muestra una relación causa efecto altamente significativa entre la actitud hacia las matemáticas y el éxito académico alcanzado en esta materia (p. ej., KalderyLesik, 2011), mientras que en otras investigaciones la relación encontrada es poco significativa o nula (Aiken, 1970). Nuestro objetivo es estudiar la actitud que presentan hacia las matemáticas los estudiantes de primer curso de universidad que en sus carreras cursan asignaturas matemáticas durante el primer semestre y su relación con el rendimiento académico. La decisión de trabajar con estos estudiantes la justificamos por el elevado número de reprobación matemática que se han venido presentando en el último tiempo en aquellas carreras que estudiamos. El estudio de las actitudes lo basamos en tres descriptores: motivación, autoconfianza y ansiedad.

MÉTODO

Este estudio es de tipo encuesta o “survey”, como técnicas de recogidas de datos para el que se ha realizado un diseño no experimental, transeccional o transversal de tipo exploratorio descriptivo que se desarrolla considerando las etapas señaladas por Colás y Buendía (1994).

Participantes. Como se indica en el objetivo, los participantes son 650 estudiantes que el año 2016 cursaban sus estudios en el primer año de carreras con asignaturas matemáticas del primer semestre.

Instrumento. El instrumento utilizado para recoger los datos ha sido una escala de actitud tipo Likert. Estas escalas se han usado ampliamente para medir las actitudes y las creencias de los estudiantes en todos los niveles del currículo de matemáticas (Kalder y Lesik, 2011), siendo la escala de Fennema y Sherman (1976) la más utilizada. Para este trabajo hemos

construido una escala adaptada a nuestros propósitos a partir de tres escalas diferentes de actitud y la creación de ítems nuevos. Las escalas consideradas han sido: Escala de Actitudes y Matemáticas (Fennema y Sherman, 1976); Escala de actitudes y emociones ante las Matemáticas (Caballero, Blanco y Guerrero, 2007) y Escala de Factores asociados a la actitud hacia las matemáticas (Candia, Navarro y Jacobo, 2009). A partir de estos instrumentos, hemos construido nuestra escala, respetando las etapas de elaboración de un instrumento (Donoso, Rico y Casis, 2013) con la que indagar sobre las actitudes hacia las matemáticas. El conjunto de ítems (enunciados algunos en negativo) se clasificaron en función de la o las variables de actitud que interesaba medir que habían sido establecidas de acuerdo a los objetivos planteados en la investigación, y las variables que de ahí surgieron. De esta manera determinamos dos grandes dimensiones para la actitud, las que a su vez, se acompañan de sus correspondientes descriptores. Entendemos estas dimensiones como la manifestación de aquellas conductas que resultarían de las influencias tanto individuales como sociales en las que se ve envuelto el individuo y a las que hemos llamado *Dimensión Personal* y *Dimensión Social*. Cada uno de los ítems del cuestionario de actitudes consta de cinco posibles respuestas, con un valor asociado que varía de 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo). La confiabilidad medida a través del método de dos mitades es de 0.79, valor que nos indica que nuestra escala goza de fiabilidad al presentar un índice que supera los valores señalados por Fox (1981) y Pérez-Juste (1983) como deseables.

ANÁLISIS DE DATOS

Con los datos recogidos hemos identificado la puntuación media obtenida por los participantes, tanto en las escalas de cada categoría de la dimensión personal y social, como en la totalidad de ambas dimensiones, con la finalidad de determinar la orientación que presentan las actitudes personales y sociales de los estudiantes de primer curso de universidad. Para la interpretación de los resultados nos valemos de los tres elementos característicos de las actitudes (Carver y Scheiler, 1997), referidos al signo, dirección y magnitud (positivas o negativas). Para tal efecto utilizamos el valor de media "3" como valor neutro o indiferencia del individuo respecto al descriptor actitudinal a medir. Cualquier puntuación mayor a 3 representaría una orientación positiva hacia el constructo. Cuanto más cercana a 5 esté la media, podemos inferir que más positiva e intensa es la manifestación del constructo. Del mismo modo, cualquier puntuación menor a 3 representaría una orientación negativa hacia el constructo. La herramienta escogida para implementar este análisis ha sido el paquete estadístico SPSS en su versión 20.

RESULTADOS

Respecto a las actitudes que manifiestan hacia las matemáticas los estudiantes de la carrera de arquitectura, concluimos que son positivas por tener un valor superior a 3.0, con un valor medio de 3.4. Sin embargo, inferimos que este valor al estar más cercano al valor neutral se manifiesta de manera menos intensa y con tendencia a la indiferencia. En relación al estudio del rendimiento académico de estos estudiantes, concluimos que superan en un 100% los requerimientos académicos para aprobar la asignatura. El promedio del curso estudiado es de 5.24 (74,8%). Con estos resultados inferimos que si bien es un curso que aprueba, no manifiesta un rendimiento académico por sobre lo normal. Finalmente, respecto al grado de

correlación entre actitudes y rendimiento, concluimos que pese a existir correlación entre ambas variables, esta es baja, con un coeficiente de correlación lineal de Pearson de 0.338. Inferimos que si bien existe una relación entre la variable actitudinal y el desempeño académico la correlación es baja.

Referencias

Aiken (1970). Attitudes toward Mathematics. *Review of Educational Research*, 40 (4) 551-596.

Anderson, R. (2007). Being a Mathematics Learner: Four Faces of Identity. *The Mathematics Educator,* 17 (1), 7-14.

Anthony G. y Walshaw, M. (2009). Characteristics of Effective Teaching of Mathematics: A View from the West. *Journal of Mathematics Education,* 2(2), 147-164.

Caballero, A., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2007). Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Comunicación en el Grupo de Trabajo Conocimiento y desarrollo profesional del profesor, XI SEIEM. *Simposio de Investigación y Educación Matemática*. Universidad de La Laguna.

Candia, P. T., Navarro, L. B. y Jacobo, A. (2009). *Actitud hacia las matemáticas de estudiantes de ingeniería de un tecnológico del sur de Sonora*. Manuscrito no publicado. ITS de Cajeme. México.

Carver, C. y Scheiler, M. (1997). *Teorías de la personalidad*. México: Prentice-Hall.

Colás, M. P.y Buendía, L. (1994). Investigación Educativa. Sevilla: Ediciones Alfacar.

Donoso, P., Rico, N. y Casis, M. (2013). Etapas de elaboración de un instrumento para indagar sobre actitudes hacia las matemáticas. En Rico, L., et al. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp, 211-218). Granada, España: Editorial Comares

Goldin, G. A. (2008). *Some issues in the study of affect and mathematics learning.* Draft version for discussion in tsg 30, ICME-11. July 8, Monterrey, Mexico.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática Emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.

Fennema, E., y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for research in Mathematics Education, 7*(5), 324-326.

Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 165-178.

Kalder, R. S., y Lesik, S. A. (2011). A Classification of Attitudes and Beliefs towards Mathematics for Secondary Mathematics Pre-Service Teachers and Elementary Pre-Service Teachers. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 5*.

Khine, M. S., Al-Mutawah, M. y Afari, E. (2015). Determinants of Affective Factors in Mathematics Achievement: Structural Equation Modeling Approach. *Journal of Studies in Education*. 5(2), 199-211.

Lipnevich, A. A., MacCann, C., Krumm S., Burrus, J. y Roberts, R. D. (2011) Mathematics Attitudes and Mathematics Outcomes of U.S. and Belarusian Middle. *Journal of Educational Psychology,* 103(1), 105-118.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualisation. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 575-596). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Memnun, D. S. y Akkaya, R. (2012). Pre-Service Teachers' Attitudes towards Mathematics in Turkey. *International Journal of Humanities and Social Science*, 2 (9), 90-99.

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (2011). Ansiedad matemática, género y ramas de conocimiento en alumnos universitarios. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 237–250.

Rico, L. (2005). Valores educativos y calidad en la enseñanza de las matemáticas, en Martínez, J.M. (ed.), *Matemáticas, Investigación y Educación. Un homenaje a Miguel de Guzmán* (pp. 158-1809. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

St-Pierre, L. y Lafortune, L. (1995). Intervenir sur la métacognition et l'affectivité. *Pédagogie collégiale*, 8(4), 16-22.

Varas, L, Felmer, P., Gálvez, G., Lewin, R., Martínez, C., Navarro, S. Ortiz, A. y Schwarze, G. (2008). Oportunidades de preparación para enseñar matemática. *Revista Calidad en la Educación*. Consejo Nacional de Educación. Chile, 29.64-88.

BASES PARA EL DISEÑO DE UNA SITUACIÓN. EL CASO DE LA RESIGNIFICACIÓN DEL CÁLCULO INTEGRAL

Cristina Isabel Mota Santos, Francisco Cordero Osorio
CINVESTAV, México

Resumen: Mostramos los avances de una investigación que se interesa por el diseño de situaciones para resignificar el Cálculo integral, cuya base epistemológica exprese la funcionalidad del conocimiento matemático y por ende rescate los usos del conocimiento. Presentamos consideraciones teóricas, en particular, retomamos constructos teóricos de la línea de investigación Socialización de la Ciencia.

Discurso matemático escolar, funcional, diseño de situaciones

INTRODUCCIÓN

Una problemática identificada es que la matemática escolar no está relacionada con la vida real (cotidiano), en la matemática escolar impera la justificación razonada mientras que en el cotidiano se atiende a la justificación funcional. Dado que por lo general la enseñanza se basa en libros de textos, se ha observado a través de ellos y de los currículos, que el cálculo de la escuela está basada en una enseñanza formal y mecanicista.

En trabajos como el de Muñoz (2003) se menciona como problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo Integral la separación entre lo conceptual y lo algorítmico. En esta enseñanza se ha reducido el aprendizaje de los algoritmos a la ejercitación del procedimiento subyacente del algoritmo. Es decir, en estos casos se espera que el estudiante conciba a los procedimientos preestablecidos como objeto de conocimiento. O por otro lado que su objeto de conocimiento sea la definición de la integral. Dada esta situación es que Muñoz en su trabajo busca las condiciones que puedan propiciar la relación de lo algorítmico y conceptual pero vista como unidad dialéctica.

Al pretender que el objeto de conocimiento sean los procedimientos preestablecidos, es común ver que los malos resultados se atribuyan a las malas tareas realizadas por los estudiantes o por los malos métodos de enseñanza que utiliza el profesor, pero muy pocas veces se cuestiona el saber que es enseñado. Se suele preguntar ¿cómo enseñar? y no cuestionarse por el ¿qué enseñar?

DESARROLLO

La matemática escolar por sus programas, sus currículos y sus modelos educativos generan un discurso Matemático Escolar (dME) al cual el profesor se adhiere, favoreciendo así una epistemología dominante, la cual no considera, ni conoce el uso del conocimiento matemático U(CM) de la gente.

El proyecto de investigación se enmarca en la Teoría Socioepistemológica (TSE) la cual sostiene que la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática no recae sobre el profesor, ni sobre el estudiante, sino que le apuesta a que es el discurso Matemático Escolar (dME) el causante (Gómez y Cordero, 2013). Se plantea un rediseño del mismo basado en la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM), el cual debe responder a los tres fenómenos provocados por el dME: adherencia, exclusión y opacidad.

El fenómeno de adherencia no permite, tanto al estudiante como al docente, cuestionar ni trastocar la matemática escolar, se produce una especie de fidelidad absoluta que resulta nociva para reconocer otras epistemologías que permitan generar prácticas y usos del conocimiento matemático. Los fenómenos de exclusión y opacidad inhiben esas prácticas y usos de tal suerte que a los ciudadanos no les deja otra opción que adherirse a la epistemología dominante del dME. Por lo tanto habrá que construir un programa académico permanente (el rediseño del dME) que permita, tanto a estudiantes como a docentes, generar una variedad epistemológica del dME para afrontar los fenómenos mencionados y así puedan, en el mejor de los casos, trastocar la matemática escolar (Cordero, Gómez, & Viramontes, 2009, citado por Cordero, 2016).

En el nivel superior estos fenómenos están presentes. Ejemplo de ello es lo presentado en el trabajo de Cordero (2005), en el cual se presenta cómo los aspectos formales de los conceptos del Calculus tienen un énfasis significativo. Conceptos como la derivación y la integración son explicados a través de las concepciones de límite y función, acompañados de sus representaciones geométricas, provocando así una "cultura" en la cual el profesor y el estudiante "aprenden a decir" lo que es la derivación y la integral y a representar geométricamente, sin tener una comprensión que les permita estudiar fenómenos de variación continua. Esto es porque profesores y estudiantes se adhieren a un dME que no les permite trastocar la matemática, opacando así el uso que el Cálculo puede tener en diferentes situaciones.

Cordero (2016), señala que:

> Socialmente hablando, el tipo de explicación, filosófica y epistemológica, que se acepte sobre la construcción del conocimiento repercute directamente en las maneras de organizar el sistema educativo, seleccionar modelos de enseñanza, diseñar el currículo escolar, formular episodios de aprendizaje, e inclusive, definir el "conocimiento" en el aula. De este modo, un enfoque que concibe al conocimiento construyéndose a la par de la experiencia del humano permite entender que el conocimiento se construye cuando es utilizado; cuando tiene una función específica situacional. (pp.77-78)

Por ello es importante cuestionar qué conocimiento es el que se debe enseñar. En esta investigación se trabaja con la línea de investigación "La Socialización de la Ciencia". La cual tiene como objetivo principal identificar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones cuando suceden comunidades de conocimiento en la escuela, en el trabajo y en la ciudad. Junto con la TSE se propone otro marco de referencia (MR) enfocado a lo que pudiera ser el conocimiento institucional cuya base es la manifestación de sus usos en el discurso matemático escolar U(CM), en otros dominios y en el cotidiano, donde se resignifican (Res) al debatir entre sus funcionamientos (Fu) y sus formas (Fo) al paso de la vivencia escolar, del trabajo y de la ciudad (Cordero, 2016).

Desde esta línea de instigación se han brindado ejemplos del papel que juega la justificación funcional donde la matemática es un instrumento en la construcción del conocimiento (Cordero, 2001, 2005 y 2008, citado por Gómez, 2009). Propiamente se analizaron dominios científicos, fuera del aula de matemáticas, como la ingeniería, la toxicología, la biomatemática o la bioingeniería.

REFLEXIONES

Como parte de la investigación se pretende construir un diseño de situaciones cuya base epistemológica exprese la funcionalidad del conocimiento matemático y por ende rescate los usos del conocimiento. En estos momentos, nos encontramos trabajando en la base epistemológica del diseño. Se pretende aplicar el diseño a profesor en formación inicial pues como se mencionó anteriormente el tipo de explicación filosófica y epistemológica que se acepte sobre la construcción del conocimiento va a repercutir en la manera de enseñar en el aula.

Se considera como parte de la epistemología el trabajo de Muñoz (2000) pues en él se muestran elementos que proporcionan evidencias para hablar de una relación entre las nociones y los algoritmos del Cálculo integral pero que el discurso matemático escolar no considera y por lo cual propicia su separación. Dichos elementos son problemas específicos que exijan o requiera de una integración para hallar la solución.

> Son los problemas específicos que se derivan de los fenómenos de variación continua. Estos problemas específicos no se refieren a las causas del fenómeno de variación (¿por qué varían?) sino al cuánto varían una vez que se reconoce cómo varía el fenómeno; es decir, se plantean preguntas acerca de la ley que cuantifica al fenómeno de variación continua (cantidad desconocida F(t) que relaciona funcionalmente a las variables involucradas). La configuración de esta ley depende de que sean dadas, o no sean dada, las condiciones iniciales del problema específico. (Muñoz, 2000, p.142).

Hasta el momento se pretende que el diseño de situaciones se enfoque más a situaciones específicas de variación continua y cambio, como en la noción de acumulación, destacando la situación fenomenológica que favorece su constitución.

Referencias

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8(3)*, 265-286.

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinaridad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (59-88). Barcelona, España: Gedisa.

Gómez, K. (2009). *Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav –IPN, México.

Gómez, K. y Cordero, F. (2013). La institucionalidad, funcionalidad e historicidad. Elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. En P. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1325-1332. 2013. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(2)*, 131-170.

Muñoz, G. (2003). Génesis didáctica del Cálculo Integral: el caso de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico. En J. Delgado Rubí (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16(2),* 415-421. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

HABILIDAD DE REPRESENTAR AL RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS: ¿CÓMO PROMOVER Y QUÉ OBSERVAR EN LOS ESTUDIANTES?

Eugenio Chandia Muñoz, Paula González Isamit, Carmen Sepúlveda Vázquez
Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE), Universidad de Chile

Resumen: La habilidad de representar es crucial al pensar o razonar matemáticamente. Entonces cómo se puede promover, o bien qué debería observar el profesor en los estudiantes para darse cuenta que esta habilidad está en uso, es una cuestión que en la última década a despertado bastante interés. De esta forma, esta investigación aborda una manera de dar oportunidades para el desarrollo de esta habilidad en estudiantes de Educación Básica al resolver problemas matemáticos, analizando los tipos de representaciones que estos usan,, las transformaciones que hacen y las interacciones que emplean entre un tipo de representación y otra. Los resultados parciales muestran que al resolver problemas los estudiantes crean una primera representación real del problema, significando los elementos de las situaciones que les presenta el profesor, luego trazan verbalmente estrategias, las cuales algunas se transforman en concretas o visuales.

Resolución de problemas matemáticos, representaciones, transformación

INTRODUCCIÓN

Tanta es la importancia de la habilidad de Representar al razonar y pensar matemáticamente, que se ha incluido tanto en pruebas internacionales como en currículos escolares de matemáticas, por ejemplo se encuentra en los currículos de Singapur, EEUU y Chile (CCSS, 2010; MINEDUC, 2012; Yee, 2006). En este último, Representar es una de las cuatro habilidades transversales que se espera pueda desarrollar un estudiante al egresar del sistema escolar. Sin embargo, al analizar los planes y programas de Chile, o bien las bases curriculares, no se observa qué debe hacer un profesor para promover alguna habilidad en específico y tampoco, qué se debe observar en los estudiantes para corroborar que un estudiante esté interpretando, usando, diseñando o comunicando una representación matemática. En este último aspecto, en cuanto a qué se debe observar en los estudiantes o en sus producciones, ya hay avances, por ejemplo PISA incluye ítems para medir esta habilidad, donde se demanda a los niños y niñas a usar, interpretar o diseñar representaciones (OCDE, 2015). Sin embargo, y tal como lo plantea en la literatura, las habilidades debieran observarse en conductas y acciones, donde el sujeto muestra el desarrollo de sus procesos al abordar un tarea (Blömeke, Gustafsson, & Shavelson, 2015). De esta forma analizar solo los registros escritos de los estudiantes, no permite observar todas las destrezas que éste pone en acción para llegar a la producción esperada, como las conexiones y transferencias que hace entre un sistema de representación y otro, o bien cuando se comunica e interactúa con sus compañeros o con el profesor.

Respecto a qué debería hacer el docente para estimular el desarrollo destrezas, capacidades o habilidades matemáticas, es una de las cuestiones que se ha venido investigando con bastante fuerza la última década (Blömeke et al, 2015), con resultados parcelados donde destaca el uso de las categorías de representación de Brunner en el diseño y gestión de

clases, así como también en el análisis y diseño de material curricular relativo al uso de material concreto para aproximar los conceptos matemáticos (NCTM, 2014).

De lo anterior, y dada la necesidad de desarrollar investigaciones que orienten a los profesores respecto de qué hacer y qué observar en sus estudiantes para asegurar el uso de la habilidad en las clases de matemática, es que la siguiente investigación da cuenta de una forma de promover la habilidad de Representar al Resolver Problemas Matemáticos. En paralelo se analizaran las representaciones que los estudiantes usan, diseñan e interpretan en el proceso de interacción de búsqueda de una estrategia de solución al problema.. Por lo tanto, las preguntas de investigación que orientan este reporte de investigación son: ¿Qué acciones realiza un profesor que promueve la habilidad de representar en los estudiantes que resuelven problemas matemáticos? ¿Qué acciones o conductas muestran los estudiantes que aplican la habilidad de representar matemáticamente?

MARCO TEÓRICO

El National Research Council (NRC) en el año 2001 planteó que las personas tienen acceso a la naturaleza abstracta de las matemáticas, sólo a través de representaciones. A su vez, el profesor y los estudiantes tienen acceso al pensamiento de otro estudiante al observar las representaciones que este último construye y explica. En esta misma línea Lesh, Post y Behr ya en 1987 planteaban que las representaciones son un medio para comprender la relación entre la imagen mental o abstracta del pensamiento del estudiante y su caracterización externa. De esta forma, las representaciones son tanto un medio como un fin al aprender y enseñar matemática.

Lesh et al (1987) planteó 5 categorías de representaciones: contextuales, concretos, visuales, simbólicas y verbales. Las representaciones contextuales se refieren a “guiones” que los sujetos han experimentado, en los cuales el conocimiento se organiza alrededor eventos del mundo real. Estos contextos sirven para interpretar y resolver problemas. Las representaciones concretas se refieren a modelos manipulables como bloques multibase, barras fraccionarias entre otros recursos, los cuales tienen por si solos algún tipo de significado en el conocimiento matemático. Las representaciones visuales se refieren a diagramas o modelos figurativos de las representaciones concretas, los cuales pueden ser internalizadas como imágenes de los conocimientos matemáticos. Las representaciones simbólicas se refieren al uso de lenguaje matemático específico. Por último las representaciones verbales se refieren al lenguaje hablado por lo estudiantes. De esta forma, y tal como lo observó Tripathi (2008), el uso de estas “distintas representaciones es como examinar el concepto matemático a través de una variedad de lentes, donde cada uno ofrece una perspectiva diferente que hace que la imagen (el concepto) sea más rica y profunda”. Así, el uso de un tipo de representación para caracterizar un objeto matemático puede ser pobre para su comprensión. Por otra parte, Lesh et al (1987) proponen que los diferentes tipos de representaciones forman un sistema que al trasladar o transformar un tipo a otro permite enriquecer la comprensión. También plantean que las translaciones y transformaciones entre uno y otra representación permite crear modelos, posiblemente, más ajustados del objeto matemático que se quiere abordar o comprender.

METODOLOGÍA

Para responder las preguntas que guían esta investigación se seleccionó un método cualitativo desarrollado por un grupo de investigadores del instituto para el aprendizaje de la Universidad de Rutgers (Powell, Francisco, & Maher, 2003). El método se creó para analizar videos de clase de matemática con foco en el levantamiento de información relativa a ideas y razonamiento matemático de los estudiantes de primaria. Las etapas del análisis son: Visualización atenta; Descripción del video; Identificación de eventos críticos; Transcripción; Codificación: Construcción de la trama; composición de la narrativa. La muestra de videos se obtuvo del proyecto FONDEF "Activando la Resolución de Problemas en el Aula (ARPA)".

De esta forma se analizaron clases de matemática que se estructuraban en 5 etapas: 1) Agrupamiento, donde el profesor reúne a los estudiantes en grupos de manera aleatoria. 2) Entrega, donde el profesor entrega un problema previamente desarrollado dando las posibilidades extenderlo o simplificarlo en función de las habilidades de los estudiantes. 3) Activación, donde el profesor monitorea el trabajo de los estudiantes observando si estos tienen alguna dificultad o están trancados y no generan un primera estrategia. 4) Consolidación, donde el profesor y los estudiantes ya han resuelto el problema y lo tienen que explicar a sus compañeros y al profesor, el cual puede activar o bien extender el problema, aumentando la complejidad del problema. 5) Discusión, donde los estudiantes pasan a la pizarra y explican y justifican sus estrategias al resto del curso, y el profesor interviene para generar discusión matemáticamente productiva entre los estudiantes.

La muestra la componen estudiantes y profesores de una escuela particular subvencionada de la comuna de Cerro Navia. Los estudiantes y profesores pertenecen a los cursos 3º, 4º y 6º básico. Estos estudiantes y profesores fueron observados en tres actividades ARPA en tres momentos diferentes usando tres problemas diferentes. Por lo que se han obtenido 9 videos de clases.

Avances

Considerando la estructura metodológica de análisis, las primeras etapas contemplan la familiarización con el trabajo que los estudiantes realizaban al abordar el problema matemático bajo la estructura de una clase ARPA, se levantaron eventos críticos relativos a la interpretación, uso y diseño de representaciones al abordar por primera vez un problema matemático. A su vez se identificaron acciones del profesor que promovían representaciones matemáticas. De esta forma, se levantaron categorías de análisis para la codificación de los videos en cada una de las etapas de una clase ARPA. De lo anterior, las oportunidades que entregaban los profesores se agruparon respetando los momentos de gestión de ARPA, diferenciado por el nivel del curso, conocimientos de los estudiantes y expectativas de desarrollo del problema por parte de los estudiantes. En particular los profesores en el momento de inicio en los cursos inferiores, 1ero y 2do básico, al considera que los estudiantes no sabían leer, los profesores creaban un cuento enfatizando los acciones y palabras que supuestamente los niños y niñas no conocían. Por ejemplo en el siguiente problema: *Los helados: En un negocio de venta de helados se ofrecen 20 sabores distintos.*

Un cliente puede pedir un helado con una o con dos bolas. Si pide dos bolas pueden ser del mismo sabor o diferentes. ¿Cuántos helados de diferentes sabores ofrece el negocio?

Se enfatizó el concepto de helado con una o dos bolas y la relación entre el sabor que resultaba por bola separada y por bolas de helado mezclada. También los profesores ofrecían representaciones visuales y concretas como dar conos de helados y bolas de sabores a los niños y niñas representadas en papel lustre. Esto último se daba en la entrega como en la activación. En el segundo caso, los profesores lo implementaban en la etapa de activación, donde solo se entregaba el material y se dejaba a los niños y niñas solos realizar la acción de armar los helados.

En el caso de los estudiantes, estos al recibir o escuchar el cuento del problema, creaban una primera representación real del problema, significando las acciones a situaciones reales experimentadas, manifestando afirmaciones como:

A1: Si, yo tomé helado con tres bolas.

A2: Los sobares de los helados, se mezclaban y "sabían" a otra cosa.

Para luego pasar a representaciones de tipo visual como las de la Figura 1, sin dejar de significar cada una de los helados resultantes al mezclar los sabores, como por ejemplo asignando un color al sabor:

Figura 1: representaciones visuales para ordenar la acción de armar helados.

Las representaciones visuales permitieron a los estudiantes ordenar el armado de helados y obtener una primera estrategia de solución al problema.

CONCLUSIONES

Al observar las oportunidades que daban los profesores, estas dependían de la etapa de gestión de ARPA. La relación entre el tipo de oportunidad parte desde la selección del problema, el tipo de ajuste, énfasis y recursos para la entrega y activación para la comprensión del problema. En particular, los profesores se centraban en entregar representaciones o focalización en algún aspectos de las representaciones para generar una primera estrategia. Respecto de los estudiantes, cabe destacar el uso de representaciones tanto para comunicarse en el grupo de compañeros, llegando a interactuar en 4 tipos de representaciones en paralelo para tratar de ser comprendido por el compañero.

Referencias

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., & Shavelson, R. (2015). Beyond dichotomies—Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie, 223*(1), 3–13.

Common Core State Standards Initiative [CCSS] (2010). National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers. Retrieved December, 11, 2012.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 33-40.

MINEDUC (2012). Bases Curriculares para la Ed. Básica. Santiago: Ministerio de Educación.

NCTM. (2014). Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.

OECD (2015), The PISA 2015 draft mathematics framework, PISA, OECD Publishing.

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The journal of mathematical behavior*, *22*(4), 405-435.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the middle school*, *13*(8), 438-445.

Yee, L. P. (2006) Mathematics for Teaching or Mathematics for Teachers? *The Mathematics Educator, Singapur* , 16 (2), 2-3.

CONCEPCIONES SOBRE EL INFINITO DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE CUARTO MEDIO: EVIDENCIAS DEL OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO A TRAVÉS DE UN ANÁLISIS DIDÁCTICO

Francisca A. Álvarez Toledo, Astrid Morales Soto
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen: ¿Qué piensan los alumnos sobre el infinito en su última etapa de formación escolar? ¿Son capaces de resolver situaciones matemáticas que involucran este objeto? En este trabajo, se indaga en las concepciones sobre el infinito de un grupo de estudiantes de cuarto medio, usando el análisis didáctico como herramienta metodológica, con el objeto de evidenciar el obstáculo mismo, cuyas raíces se pueden pesquisar en la historia de la construcción de este objeto, con dificultades y errores similares a los documentados y evidenciados en las aulas actuales. Se presenta una actividad que enfrenta a los estudiantes a sus concepciones y limitaciones del objeto que han construido, con el fin de realizar un análisis y concluir sobre las evidencias del obstáculo epistemológico y proyecciones de esta investigación.

Infinito, infinito actual, obstáculo epistemológico, dificultades

INTRODUCCIÓN

El infinito está inmerso en la construcción de gran variedad de conceptos matemáticos, siendo objeto de estudio de matemáticos, didactas, filósofos y profesores. Entre las investigaciones se ha concluido que los obstáculos asociados a su estudio son tanto didácticos como epistemológicos. Entre los didácticos está la poca consideración en el currículum o la reducción banal de lo infinito como extensión de lo finito (Arrigo y D'Amore, 1996). Más aún, el currículum escolar chileno no ofrece ningún proceso de formalización del infinito, como concepto ni noción (Cáceres, 2012), menos aún el desarrollo de competencias fundamentales sobre conjuntos infinitos (Arrigo y D'Amore, 2004) y, por lo tanto, su comprensión se ve limitada por las capacidades y competencias desarrolladas por los estudiantes en torno a otros objetos matemáticos. Sin embargo, investigadores han señalado que el obstáculo epistemológico está por sobre los didácticos, pesquisándose en la historia misma del infinito, con dificultades y errores que se ven hoy mismo en las aulas (Mena et al., 2015), como la no distinción de diferentes tipos de infinito, razonar de manera finita en situaciones que involucran conjuntos infinitos o la comprensión del infinito solo en potencia.

En consecuencia, ¿cuáles son las concepciones que tienen los alumnos sobre el infinito y cómo este conocimiento es usado para resolver una situación que involucra el infinito actual?

A partir de esta problemática, surge como objetivo de investigación evidenciar el infinito como obstáculo epistemológico a través de las concepciones de un grupo de alumnos de cuarto medio.

MARCOS DE REFERENCIA

La teoría de situaciones didácticas (TSD), plantea que *"[el] alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios (…)"* (Brousseau, 2007, p.30). En este sentido, se espera que el profesor proponga situaciones matemáticas y problemáticas que permitan al alumno interactuar y desarrollar un nuevo saber, por tanto, la clase propuesta e implementada ha sido diseñada considerando las cuatro fases de esta teoría.

Brousseau señala que un obstáculo es un conocimiento que utiliza el alumno para dar respuesta a situaciones, el cual funciona de manera correcta en ciertos escenarios, pero en otros de manera limitada o errónea. A pesar de las contradicciones y errores evidentes, el alumno resiste en su uso.

Se reconocen tres tipos de obstáculos: ontogenéticos, didácticos y epistemológicos, siendo este último aquellas concepciones destacables en un número significativo de alumnos y que se pueden relacionar con concepciones históricas.

METODOLOGÍA

El Análisis Didáctico es una metodología de investigación, propia de la Didáctica de la Matemática, que busca fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de procesos de enseñanza y aprendizaje. Bajo esta metodología se estructura la investigación mediante la organización de las etapas de análisis. Rico (2013) señala cinco etapas: conceptual, contenidos, cognitivo, instrucción y actuación.

El contexto donde se lleva a cabo la investigación en su etapa de instrucción corresponde al plan matemático del cuarto medio del colegio Seminario San Rafael de Valparaíso; colegio católico, particular y de formación científico humanista. El grupo lo componen 20 alumnos (4 mujeres y 16 hombres), con edades entre los 17 y 18 años.

RESULTADOS Y DESARROLLO DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Análisis Conceptual

Primera etapa del análisis didáctico que corresponde a una herramienta metodológica, no empírica; que permite la reflexión de los conceptos y nociones básicas sobre el conocimiento, desde sus fundamentos e historia.

Para abordar esta investigación se ha desarrollado un análisis histórico y epistemológico, señalando la construcción del infinito como noción y concepto desde los Jainas hasta el siglo XIX, con el desarrollo de la teoría de números transfinitos de Cantor.

Análisis de Contenidos

A partir de los antecedentes expuestos, se identifican en primer lugar, la definición de infinito potencial y actual, desde la filosofía y, por otro lado, la matematización del infinito actual desde la teoría de Cantor, desde la cual deriva la definición moderna de conjunto infinito: *un conjunto es transfinito (o infinito) si es biyectivo a un subconjunto propio de sí mismo. De lo contrario es finito.*

Por otra parte, no se encontraron evidencias de la definición de infinito en los textos escolares. Sin embargo, es posible identificar usos de este objeto en diferentes registros de

representación. Existen diferencias entre el concepto de infinito que es tratado en textos escolares y el que es abordado en la matemática; tampoco existen en ellos evidencias de la definición moderna de conjunto infinito y éste suele abordarse desde ideas intuitivas, más cercanas al infinito potencial.

Análisis Cognitivo

En primer lugar, se señalan las expectativas de aprendizaje en torno al infinito presente en el currículum escolar chileno. En segundo lugar, se señalan las dificultades de aprendizaje y los errores documentados y/o evidenciados en la propia práctica. Finalmente se presentan tareas, mediante las cuales se busca retar al alumno a dar respuesta a situaciones, con el fin de lograr aprendizajes o enfrentarlo a sus concepciones buscando la superación de errores.

Las principales dificultades asociadas al infinito son: (D.1) Dificultad para concebir el infinito actual. (D.2) Dificultad para reconocer, distinguir y comprender distintos tipos de infinito. (D.3) Dificultad para movilizar y aplicar conocimientos de biyección.

Análisis de Instrucción

A partir de las etapas previas del análisis didáctico, se diseñan dos situaciones didácticas, en sus 4 fases. La actividad propuesta a los estudiantes se lleva a cabo con la presentación de un video, cuyo caso corresponde al Hotel Infinito de Hilbert, el cual consta de infinitas habitaciones, todas éstas ocupadas. En la primera situación, se plantea a los estudiantes la pregunta *¿cómo alojas al nuevo huésped?* En la segunda situación, *¿cómo lograrán esta vez alojar a infinitos turistas?* Finalizando con un cuestionario de 6 preguntas, con el objeto de levantar evidencias de acuerdo al objetivo de investigación.

Análisis de Actuación

En base a las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes en cada una de las situaciones planteadas y el cuestionario, se identifican errores, para posteriormente categorizarlos de acuerdo a las dificultades expuestas en el análisis cognitivo.

Se evidencia la dificultad para aceptar el infinito en acto. Más aún, 6 de los 20 alumnos muestran una concepción potencial del infinito.

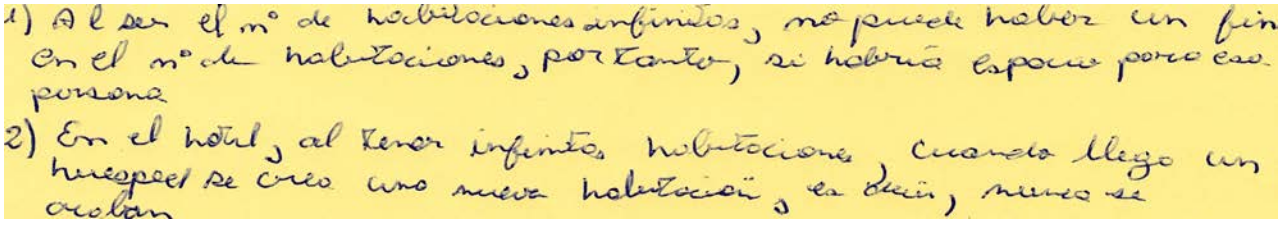


Figura 1: Respuesta del estudiante 1 para la primera situación del Hotel de Hilbert.

Al preguntar si existen más números naturales o enteros, 11 de 20 alumnos responden indicando que el conjunto de los enteros es más grande, argumentando que $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}$.

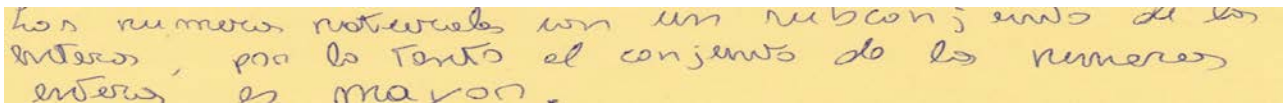


Figura 2: Respuesta del estudiante 2 a la pregunta "*¿Hay más números naturales o enteros?*".

Cabe destacar, que la mayor cantidad de errores están relacionados a (D.3), lo que motiva el diseño de una propuesta didáctica donde los alumnos apliquen el concepto de biyectividad para la comparación entre conjuntos infinitos. Además, en las respuestas de los estudiantes se evidenciaron similitudes con las concepciones sobre el infinito a lo largo de la historia. Aristóteles, por ejemplo, declaró de manera tajante que el *infinito es de una naturaleza tal que el acto pueda jamás realizarse*, es decir, afirmó que el infinito en acto no se puede concebir, situación que se repite en el aula.

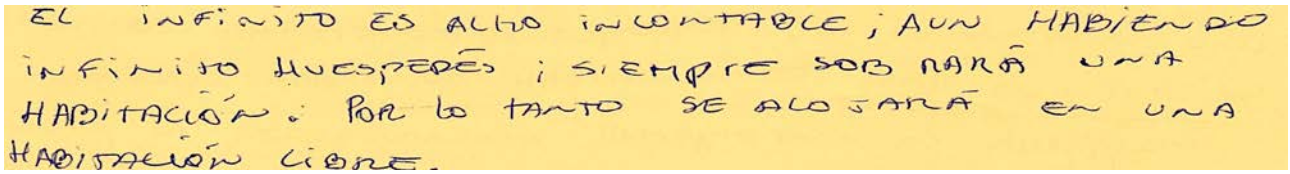


Figura 3: Respuesta del estudiante 3 para la primera situación del Hotel de Hilbert.

Finalmente, a partir del análisis realizado sobre la implementación y las evidencias encontradas, se propone una reformulación para el plan de clase, cuya fase de institucionalización esté centrada en la definición matemática de igualdad de cardinales entre dos conjuntos finitos o infinitos, trabajando el concepto de función biyectiva.

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

En coherencia con lo documentado en la literatura, las evidencias encontradas dan cuenta que el infinito es un obstáculo epistemológico, cumpliéndose así el objetivo general de esta investigación.

Por otro lado, durante la formación escolar, se prescinde de la noción de infinito actual, menos aún existen intenciones de formalizarlo. Por tanto, las ideas intuitivas de los estudiantes no generan mayores contradicciones en esta etapa. Investigadores agregan que el infinito no es abordado, puesto que los mismos profesores hacen uso de ideas intuitivas, enfrentándose a sus propias limitaciones y contradicciones.

Desde el punto de vista didáctico, el obstáculo debe ser tratado desde la matemática, por tanto, la identificación de la dificultad (D.3) como predominante motiva el trabajo en situaciones orientadas a la movilización y aplicación del concepto de biyección, fundamentado en el rol clave de esta noción en la construcción de la teoría de números transfinitos realizada por Cantor.

Finalmente, se proyecta la implementación de la reformulación, en la que se sugiere su aplicación en un contexto diferente, y el estudio de las concepciones que tienen profesores de matemáticas en formación y ejercicio, con el objeto de generar mayores evidencias en torno a la problemática de la investigación. Conjuntamente, se proyecta el diseño de una actividad orientada a la comparación de distintos tipos de infinitos.

Referencias

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1996) Lo veo pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión de un teorema de Cantor que involucre el infinito actual. México: *Educación Matemática. 11*(1), 5-24.

Arrigo, G. & D'Amore, B. (2004) Otros hallazgos sobre los obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. México: *Educación Matemática. 16*(2), 5-19.

Brousseau, G. (2007) Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Cáceres, P. (2012) El infinito: Fundamentos e ideas para su resignificación en a educación matemática según la socioepistemología (Tesis no publicada), PUCV, Chile.

Lestón, P. (2008) Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares (Tesis de maestría no publicada) Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F. México.

Lestón, P. (2011) El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología. (Tesis doctoral no publicada) Cinvestav, IPN, D.F. México.

Mena, A., Mena, J., Montoya, E., Morales, A. & Parraguez, M. (2015) El obstáculo epistemológico del infinito actual: Persistencia, resistencia y categorías de análisis. *RELIME. (18)*3, 329-358.

Rico, L. (2013) El método del análisis didáctico. *Revista Iberoamericana de educación matemática. (33)*11-27.

MODELACIÓN MATEMÁTICA, UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLOGICA EN ESTUDIANTES DE ADMINISTRACIÓN

Mónica Soto Márquez[1], Leonora Díaz Moreno[2]
Universidad Central de Chile[1], Universidad de Valparaíso[2]

Resumen: Este estudio reporta diseños de enseñanza basados en modelación, que promueven la emergencia y constitución de matemáticas presentes en prácticas profesionales, que ejercen administradores públicos. Se aborda el problema de estudio en el marco de la investigación-acción y según la metodología de diseño y experimentación en contextos naturales de enseñanza. Para confeccionar los diseños, se indaga a priori, con entrevistas a profesionales, sobre procedimientos, herramientas, argumentos e intenciones de sus prácticas, configurando dipolos modélicos en los que viven como herramientas, la razón matemática y la matriz de indicadores. La razón matemática concurre con el monitoreo y el control de eficiencia de programas y de proyectos; y, la matriz de indicadores concurre con el desplazamiento de intuición y experiencia hacia la dupla información y razonamiento para la toma de decisiones en escenarios complejos. Las competencias genéricas que se despliegan con base en los diseños, permiten a los estudiantes enfrentar problemas matemáticos en una variedad de situaciones a diferencia de aquellas favorecidas por clases regulares sin modelación.

Modelación matemática, diseños de enseñanza, razón, matriz de indicadores

ANTECEDENTES

Los cursos matemáticos en carreras de Administración son desarrollados en su mayoría considerando a la matemática erudita y dejando de lado a las matemáticas que viven en otros contextos (Galicia, Díaz y Arrieta, 2011). Son los estudiantes los que deberán articular los contenidos matemáticos con las materias de su profesión. Según Camarena (2011) sus conocimientos se encuentran desvinculados y depende del estudiante ligarlos y darle una estructura matemática al evento que quieran resolver en su vida laboral.

La CEPAL por su parte, hace más de 20 años viene planteando la necesidad de cambios en la formación profesional. Sus orientaciones plantean desafíos formativos específicos relacionados, entre otras, con la adaptación a la proyectización del trabajo y la toma de decisiones, con la intención que los estudiantes al final de su carrera sean profesionales capaces de atender las transformaciones de una sociedad científico-tecnológica caracterizada por el cambio autoacelerado (Díaz, 2003).

Una forma de intervenir en la realidad educativa del aula, es usando estrategias de enseñanza basadas en modelación, buscando lograr que la clase de matemáticas sirva como espacio natural para el ejercicio de prácticas sociales de matematización, Este tipo de modelación matemática (Arrieta, 2003 y Arrieta y Díaz, 2015) busca que estudiantes y profesor participen en actividades compartidas en las que las construcciones ligadas al saber matemático desempeñen un papel fundamental y permitan a su vez, acercar la actividad matemática de su formación a las matemáticas a que se recurre en las prácticas de la profesión. La determinación de los contenidos matemáticos que funcionen como puente

entre estas dos áreas, requiere una inmersión en el quehacer de los profesionales a estudiar, deconstruyendo sus prácticas, considerando los procedimientos que realizan, las herramientas que utilizan, los argumentos que esgrimen y las intencionalidades que llevan al profesional a hacer lo que hace

METODOLOGÍA

Se aborda el problema de estudio en el marco de la investigación-acción y según la metodología de diseño y experimentación en contextos naturales de enseñanza (Molina, 2006). Para estudios de diseño y experimentación, en lugar de validar con base en inferencias estadísticas, se recurre a validar de modo interno los diseños que se experimentan. A diferencia de una validación externa que procura mostrar la extensión de los sujetos o de las poblaciones en que se obtendrían resultados análogos a los del estudio, en este caso interesa validar el conocimiento del problema y la propuesta de diseño, para aportar a la mejora de una problemática por parte del equipo de investigadores. Para este efecto, se levantan conjeturas de desarrollos estudiantiles, previos a la implementación de los diseños. Estas conjeturas se contrastan con los desarrollos que se registran y se identifican con el mejor detalle, las distancias entre conjeturas y desarrollos. Estas distancias constituirán información sustantiva para un nuevo ciclo de estudios de diseño y experimentación. En este itinerario recursivo se irán disminuyendo esas distancias y resolviendo la problemática de inicio y problemáticas emergentes.

Orientaron el estudio las preguntas ¿Qué prácticas son recurrentes para profesionales de las ciencias políticas y de la administración pública, caracterizadas en términos de herramientas, procedimientos, argumentos e intenciones? ¿Qué matemáticas viven en prácticas que ejercen profesionales de las ciencias políticas y de la administración pública? ¿Cómo llevar al aula las matemáticas que viven en las prácticas de estos profesionales, de modo de establecer eslabones entre esas matemáticas y las del aula, en el marco de la modelación y el pensamiento variacional?

Y se planteó como objetivo general Seleccionar prácticas que ejercen profesionales de las ciencias políticas y de la administración pública, develando las matemáticas que viven en esas prácticas seleccionadas, para llevar al aula diseños de enseñanza matemática con modelación, que coadyuven a conformar a las matemáticas como herramientas de esas prácticas profesionales.

Las prácticas

Al indagar, con base en entrevistas, las prácticas claves de la actividad cotidiana de Administradores Públicos coincidieron en señalar que transformar datos en información caracteriza a estos profesionales. Asimismo son prácticas recurrentes definir, desde perspectivas técnicas y políticas, indicadores estratégicos que permitan medir el avance y/o el logro de un proyecto. La distribución de recursos es otra práctica recurrente para estos profesionales y requiere contar con el apoyo de técnicas que objetiven situaciones, respecto de las cuales se decide políticamente, estableciendo unos criterios de pesos relativos.

La deconstrucción

Las prácticas estudiadas se caracterizaron de acuerdo a los procedimientos, herramientas que usan, las intencionalidades que movilizan su actuar y los argumentos del profesional que dan sustento a su proceder. Estos ámbitos caracterizan dipolos modélicos a los que recurren los profesionales en sus prácticas

El administrador público actúa con dipolos modélicos del tipo *indicador de un ámbito de una política pública* que se articula con *ese ámbito de la política pública*, lo que le permite, a partir de una familia de indicadores, monitorearla en los ámbitos en que se la define. Esta práctica se caracteriza, en sus procedimientos de construcción de indicadores y comparación entre valores de indicadores esperados y reales, por recurrir a la razón matemática en calidad de herramienta para medir avance y eficiencia de un ámbito de una política pública, con intenciones de tomar decisiones respecto de acciones y cursos de acción que cautelen el logro de ese ámbito, corrigiendo, intensificando, cambiando o complementando acciones y cursos de acción.

Procedimiento	Herramienta	Argumento	Intención
Construcción de indicadores y comparación entre valores de indicadores esperados y reales	Razón matemática	Medir avance y eficiencia de un ámbito de una política pública	Tomar una decisión para cautelar el logro de ese ámbito de política pública: corregir, intensificar, cambiar, complementar,… acciones y cursos de acción.

Tabla 1. Deconstrucción del monitoreo de un ámbito de una política pública.

Otra de las prácticas se caracteriza por actuar con el dipolo modélico de *matriz de indicadores* que se articula con *la distribución de recursos.* El administrador público usa la matriz de indicadores, o una familia de ellas, para objetivar una decisión que responda a cómo distribuir unos recursos considerados en una política pública. Con la intención de priorizar recursos, el profesional acude a una matriz en la que registra diferentes indicadores asociados a un factor de priorización según el Proceso Analítico Jerárquico “AHP”, desplazando una toma de decisiones intuitiva a una regida por unos criterios cuantificados.

Procedimiento	Herramienta	Argumento	Intención
Se ingresan a una matriz diferentes indicadores asociados a un factor de priorización	Proceso Analítico Jerárquico “AHP”	Es un procedimiento que evita la toma de decisiones sólo de modo cualitativo	Objetivar la distribución de recursos según unos criterios

Tabla 2. Deconstrucción de la práctica distribución de recursos con el método AHP

Los Diseños

Para llevar al aula esas matemáticas que viven en las prácticas relevadas de estos profesionales, se realizaron tres diseños de enseñanza análogos a los diseño de modelación validado por Arrieta (2003), su construcción proviene de la discusión y el trabajo colaborativo de los investigadores. Los diseños fueron: Experiencia del dulzor, Configurando Indicadores y Priorización usando matrices.

Desde la actividad del dulzor se develaron distintos modos de expresar la proporcionalidad y la razón. La regularidad y estabilidad de las expresiones estudiantiles se manifestaron en cuatro elementos discursivos distintos. En el primero la razón y la proporción se presentan como un indicador numérico, resultado de una operación matemática específica. En el segundo se expresa a la razón como proporción; esta concepción es tributaria de prácticas humanas cotidianas y de textos elementales de matemáticas del siglo XV y XVI, donde estos términos se intercambiaban según intencionalidades propias de sus autores (Castro, 2015). El tercer discurso se refiere a un indicador cualitativo que se desarrolla desde la sensibilidad humana, en particular, la gustativa, expresando la intensidad de esta cualidad, que es el dulzor. En el último discurso la razón se constituye para responder a una necesidad práctica y facilitar la manipulación de dos cantidades de magnitudes hacia una acción efectiva**.**

En las actividades de modelación "Configurando Indicadores" y "Priorización usando matrices", la razón se constituye como una herramienta que apoya la toma de decisiones, en el marco de procedimientos, argumentos e intenciones, a la manera en que se la usa en las comunidades de prácticas especializadas en las que los estudiantes pretenden incorporarse.

REFLEXIONES

Las tres actividades de modelación desarrolladas se mostraron pertinentes para aportar con procesos de continuidad de prácticas en orden a superar el divorcio de las matemáticas de la formación con las matemáticas de la profesión. Asimismo colaboraron con las competencias genéricas de los perfiles de egreso de su carrera, toda vez que los estudiantes, por medio de los diseños, constituyen datos en información, argumentan, levantan conjeturas y toman decisiones. A diferencia de la enseñanza regular que desarrolla competencias matemáticas carentes de intenciones y argumentos.

Se recomienda enriquecer los diseños con instancias de evaluación para los aprendizajes, favoreciendo sus propósitos y haciendo visibles itinerarios de entendimientos estudiantiles. Es importante además que antes de poner en escena los diseños, estos sean vividos y analizados por los docentes en espacios de trabajo profesional.

Referencias

Arrieta, J. (2003). La modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). *Una Perspectiva de la Modelacion desde la Socioepistemología*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 18 (1) pp 19-48

Camarena, P. (2011) *La Matemática en el Contexto de las Ciencias y la modelación*. En Resúmenes de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. CIAEM.

Castro A., I. (2015) *La razón matemática y configuración de lo proporcional desde prácticas socioescolares de estudiantes de profesorado*. Tesis Doctoral. Universidad Metropolitana de Ciencia de la Educación.

Díaz, L. (2003). *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos Matemáticos*. Proyecto Fondecyt 2003-2005. Santiago de Chile.

Galicia A., Díaz L., Arrieta J. (2011a). *Práctica social de modelación del ingeniero bioquímico: Análisis microbiológico*. En resúmenes de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Molina, (2006) *Desarrollo del pensamiento racional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral (no publicada). Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. España: pp. 261-292.

LA VARIACIÓN, COMO RAZÓN DE CAMBIO, UNA ARTICULACIÓN ENTRE LA ESCUELA Y CÁLCULO DE PRIMER AÑO DE UNIVERSIDAD

Andrea Pinto Vergara, Daniela Soto Soto
Universidad de Santiago de Chile

Resumen: Existe un vacío entre la matemática de la escuela y la matemática presente en de primer año de ingeniería de universidad, generado por el discurso matemático escolar (dME) imperante; es por ello que urge realizar una articulación entre dicho paso, a partir del rediseño del dME. La razón de cambio resulta ser un concepto fundamental en cálculo de primer año de Ingeniería, plan común, pues es fundamental para dar mayor significación a conceptos complejos como lo son: el límite y la derivada. Es por ello que se diseñara una situación de aprendizaje con la ayuda de los dispositivos de recolección de datos con sensores de movimiento, aceleración, temperatura, luz, entre otros, y la calculadora TI-Nspire.

Razón de cambio, variación, modelación, graficación, sensores

MOTIVACIÓN PARA REALIZAR LA INVESTIGACIÓN

En los últimos 30 años, el sistema de educación superior experimentó un fuerte aumento en su matrícula de pregrado, de unos cuantos miles a más de un millón. Sin duda este es un gran logro para nuestra sociedad, pues nuestro sistema de educación superior pasó de ser de elite a uno masivo.

En Chile, más del 50% de quienes se matriculan en la educación superior no concluye el programa en el que se matricularon inicialmente (Centro de estudios Mineduc, 2012). Un antecedente importante es ver la asignatura de Cálculo I, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Santiago de Chile (USACH) el 94% de los estudiantes reprobaron la primera prueba del ramo (Informe Cálculo I, 2016). En el programa oficial de Cálculo I para Ingeniería de la podemos observar que en la unidad temática dos: La Deriva y sus Aplicaciones, en las capacidades a desarrollar, busca Interpretar geométricamente la Función Derivada como Razón de Cambio de la Función Original. Dentro de los contenidos de esta misma unidad podemos encontrar, la razón de cambio y diferenciales, dentro de Aplicaciones de la Deriva.

Por otro lado en la enseñanza media en Chile, en el currículum nacional, para la asignatura de matemáticas en primero y segundo medio, cuyo decreto/marco Nº 254/2009, Decreto Programa de Estudio Nº 1358/2011, Decreto Plan de estudio Nº 1358/2011; en tercero y cuarto medio, cuyo decreto/marco Nº 254/2009, Decreto Programa de Estudio Sin decreto/2015, Decreto Plan de estudio Nº 27/2001 y sus modificaciones: Nº 102/2002 y Nº 459/2002. Podemos encontrar en el Marco Curricular, en las Bases Curriculares y en los Programas de Estudio, que una de las habilidades a desarrollar es Modelar.

Se considera que modelar es construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de una realidad para poder estudiarla modificarla y/o evaluarla; así mismo, este modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades (objetos, fenómenos,

situaciones, etc.), estimar, comparar impactos y representar relaciones. En el eje temático: Álgebra y Funciones, podemos encontrar que se pretende que los alumnos puedan usar metáforas para interiorizar el concepto de función y para manipular, modelar y encontrar soluciones a situaciones de cambios en diferentes ámbitos, como el aumento de ventas en un tiempo determinado. Es este un primer acercamiento de manera indirecta al concepto de variación, como razón de cambio.

En los programas de estudios de primero a cuarto medio, podemos encontrar en distintas oportunidades los conceptos de variación, modelación y graficación. Específicamente en segundo medio (Programa de Estudio Segundo Año Medio, Ministerio de Educación, 2011) podemos encontrar que dentro de las habilidades del pensamiento que se quieren desarrollar está la de argumentar respecto a las variaciones que se producen en la representación gráfica de funciones; dentro de la unidad 3 Álgebra, en las habilidades podemos encontrar que se solicita argumentar respecto de las variaciones que se producen en la representación gráfica de las funciones exponenciales, logarítmicas y raíz cuadrada al modificar los parámetros. En el aprendizaje esperado AE04, uno de los indicadores de evaluación sugerido es: analizar fórmulas e interpretan las variaciones que se producen por cambios en las variables. Y la graficación está presente, en el análisis de las gráficas de diversas funciones. Sin embargo, aunque la variación como razón de cambio, es importante en la enseñanza de nivel superior y en particular en la formación del ingeniero, no se encuentra presente en el dME de nuestro sistema educativo.

El Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) se centra en aquello que los estudiantes necesitarán en el futuro, siendo las habilidades reflejo de las capacidades de los jóvenes para seguir aprendiendo en el futuro (PISA, 2013). En el Marco de Evaluación de Matemática para PISA 2012, dentro de los Contenidos, en particular en la categoría “Cambio y Relaciones” se hace referencia a la comprensión de los tipos fundamentales de cambio, con el fin de utilizar modelos matemáticos adecuados para describir y predecir fenómenos o situaciones de cambio. Desde un punto de vista matemático, esto implica modelar el cambio y las relaciones con las funciones y ecuaciones pertinentes, además de crear, interpretar y traducir las representaciones simbólicas y gráficas de las relaciones. Es importante utilizar diversos escenarios, como por ejemplo en la física con la Ley del Enfriamiento de Newton, en el cual los contenidos matemáticos tradicionales de las funciones y el álgebra, como las expresiones algebraicas, las ecuaciones literal y las desigualdades, las representaciones tabulares y gráficas, son fundamentales para describir, modelar e interpretar fenómenos de cambio. Por esta razón es imperante rediseñar el dME pues nuestra sociedad ha cambiado, y nuestra enseñanza se debe adaptar a los nuevos cambios.

Problemática. La variación es un concepto fundamental en la enseñanza superior, que debe ser comprendido y entendido por los estudiantes para alcanzar otros conocimientos como son: el límite, la derivada e integrales. En el nivel superior se asume que los estudiantes traen algunos núcleos de conocimientos matemáticos provenientes de los niveles medios, sin embargo, los mismos resultados de los cursos iniciales de matemáticas, como el cálculo, demuestran los escasos niveles de abstracción que alcanza los estudiantes en torno, por

ejemplo, al concepto de función o a los procesos de aproximación. Núcleos básicos para la enseñanza – aprendizaje del cálculo. Para poder articular los conocimientos matemáticos de la enseñanza de nivel medio con los conocimientos de la enseñanza del nivel superior se hace necesaria la creación de situaciones de aprendizaje, que permitan robustecer los núcleos básicos del cálculo. Los estudiantes al entrar a la universidad deben comprender y aprender el concepto de variación, pues es fundamental en toda asignatura que tenga relación con matemática básica y/o cálculo I, y en cuyos contenidos se encuentren el límite, derivadas o integrales.

De esta manera el objetivo general investigación es: Construir una situación modelación, que permita resignificar el discurso matemático escolar de la derivada como razón de cambio resaltando el pensamiento y lenguaje variacional, con el fin de articular conocimientos provenientes del nivel medio con los conocimientos necesarios para el nivel superior. Para lograr este objetivo general se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Fundamentar una epistemología para la derivada como razón de cambio a partir del pensamiento y lenguaje variacional y el uso de la gráfica.
- Diseñar una situación de modelación que tome como fenómeno el cambio de temperatura
- Utilizar recursos tecnológicos para modelar una situación de cambio de temperatura, entre ellos: calculadora graficadora, sensor de temperatura y applet en Geogebra
- Construir un instrumento de medición de la resignificación de la derivada como razón de cambio, a partir de la variación.

MARCO TEÓRICO: LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

El marco teórico que sustenta la presente investigación es la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. La Socioepistemología tiene por objetivo atender el explorar las formas de pensamiento matemático, fuera y dentro del aula, que pudieran difundirse socialmente y ser caracterizadas para su uso efectivo entre la población. Esta perspectiva reconoce la importancia de cuatro dimensiones para la investigación dentro de la Didáctica de la Matemática o Matemática Educativa: epistemológica, didáctica, cognitiva y sociocultural.

La TS concibe al conocimiento matemático como aquel que se genera a partir de las prácticas socialmente situadas (Soto y Cantoral, 2016). Propone la descentralización del objeto matemático, ya que ha reconocido en diferentes investigaciones que el discurso matemático escolar (dME) ha tenido una excesiva centración en los procesos algorítmicos y memorísticos relacionados con los objetos matemático. Llamamos dME al sistema de razón que produce una violencia simbólica (Soto y Cantoral, 2016) y que ha fundamentado la matemática escolar. Se ha evidenciado una serie de características del dME, que atomiza los conceptos, su carácter hegemónico, que el conocimiento matemático es acabado y continúo, posee un carácter utilitario y no funcional del conocimiento, y posee una falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar.

En particular se han reconocido tres fenómenos que provoca el dME

> Los modelos educativos olvidaron un sujeto, a saber: la gente. La construcción social del conocimiento matemático, consiste en ponernos en el lugar de la gente. La ausencia de la inclusión de la gente ha generado en el dME que se produzcan tres fenómenos enlazados: la adherencia, la exclusión y la opacidad; cuya base epistemológica en los usos del conocimiento matemático, para así lograr la construcción social del conocimiento matemático (Cordero, Gómez, Silva-Crocci, Soto, 2015).

Los conocimientos matemáticos del ingeniero, de biólogos, de la gente en su cotidiano, no son considerados por el dME. Para Cordero (2013) es necesario identificar la matemática que es utilizada en otros dominios, donde es utilizada en algunas explicaciones de su hacer, pero no es el objeto de estudio. Esto implica reconocer a la matemática como un conocimiento multidisciplinar, transversal y funcional.

Reconocer la matemática que vive en otros escenarios, implica reconocer elementos para formular MR que reconocen la pluralidad epistemológica de la matemática. Cordero (2001) señala que "hasta ahora se han logrado precisar tres de estos marcos y se ha convenido presentarlos en términos de situaciones: variación, transformación y aproximación. Cada situación compone un marco epistemológico del cálculo, respectivamente). La epistemología del Cálculo y del Análisis permiten reconocer tres posibles construcciones y que cada una de éstas genera argumentos que permiten construir nuevos conocimientos. Sin embargo, reconocer que estos argumentos son distintos y seleccionar uno dependiendo de la situación es la parte esencial de la construcción. Por ejemplo, el concepto de derivada por lo común se reconstruye a través de situaciones de aproximación (Cordero, 2001).

Situación de aprendizaje. Se pretende, con la utilización de los sensores de la calculadora Texas Instruments, lograr conectar la matemática con fenómenos del mundo real. En esta situación de aprendizaje los estudiantes son introducidos a la variación como razón de cambio. El proceso intenta ser explícito y visualmente dinámico, la actividad tiene un diseño centrado en el estudiante, donde se les presenta como ejemplo: el enfriamiento de una taza de café. Además, se utilizará el sensor de calor para encontrar la razón de cambio en la temperatura de un queque recién sacado del horno y el tiempo que demora en enfriarse.

El método de investigación de tipo cualitativo en el cual se apoyará nuestro estudio es la Ingeniería didáctica, que se caracteriza porque sus productos son construidos en un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clases. Seguiremos las cuatro fases del proceso: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y evaluación.

REFLEXIONES

La presente investigación se encuentra en pleno desarrollo. Donde el desafío siguiente es que las situaciones de aprendizaje planificadas se lleven a cabo en el aula, para su posterior análisis a posteriori y su evaluación.

Referencias

Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R. & Ímaz, C. (Eds.) (1990). *Memorias del Simposio Internacional de Educación Matemática en el tema de Cálculo* – Análisis. PNFAPM, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Universidad de Valencia, University of London. D.F., México: UAEM.

Centro de estudios Mineduc, (2012). *Serie Evidencias: Deserción en la educación superior en Chile*.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *RELIME*, 4, 2, 103-128.

Cordero, F. (2013). Matemática y el Cotidiano. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Modulo III. Documento interno. Cinvestav-IPN.

Cordero, F. ; Gómez, K.; Silva-Crocci, H. ; Soto, D.. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad.* Barcelona, España: Editorial Cediza, S.A.

MINEDUC, (2013). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*.

Soto, D., & Cantoral, R. (2014). *Academic Mathematical Discourse and Exclusion.* A Socio-epistemological Vision. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1525-1544. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Soto , D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica.* Tesis (Maestría en Ciencias) - Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, IPN, Ciudad de México.

Universidad de Santiago de Chile. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemática y C.C., (2016). *Informe cálculo I, módulo básico para ingeniería*.

FROMACIÓN CONTINUA EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: EL CASO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN TERCERO MEDIO

Cinthia Iglesias Mancini
Universidad Arturo Prat

Resumen: El propósito de este estudio fue evaluar las competencias que desarrollan los estudiantes de Tercer Año Medio, en el aprendizaje de los Números Complejos, impartidos por un profesor luego de haber sido capacitado en la integración geométrico-algebraica del contenido. Las etapas consideradas para el desarrollo de esta investigación fueron: capacitar a un profesor de matemáticas de tercero medio para poner en práctica la unidad Números Complejos; mientras se realizó la intervención del docente en el curso, aplicar pautas de observación y entrevistas al profesor a modo de retroalimentación; en relación con los estudiantes, aplicarles pruebas tanto al inicio como al final de la intervención del profesor. Los resultados obtenidos dan cuenta que el profesor mejoró significativamente su práctica docente en las categorías que se consideraron, los estudiantes desarrollaron las capacidades requeridas para la unidad y tanto el docente como los estudiantes finalizaron el proceso con una valoración positiva respecto de la nueva forma de enfrentarse a los contenidos matemáticos que plantea el Currículum Nacional.

Números complejos, competencias matemáticas, capacitación disciplinar, didáctica específica

DESARROLLO

La investigación que se reporta, se enmarca en el contexto de una Capacitación Disciplinar y Didáctica Específica en Matemáticas, con posterior seguimiento al aula, considerando para ella, el contenido matemático Números Complejos. La relevancia de ella radica en la reciente incorporación de su enseñanza, según la modificación al curriculum nacional según Decreto Supremo de Educación Nº 254/2009.

El marco teórico en el que se basó esta investigación son las Competencias Matemáticas, entendidas por Niss (2003), que hacen referencia a: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, saber construir modelos matemáticamente y razonar matemáticamente. Se consideró pertinente además, la realización de un Estudio Histórico Epistemológico de los Números Complejos. Se indagó en relación al estado del arte, respecto de investigaciones recientes basadas en los Números Complejos como objeto matemático de enseñanza. Además, se realizó una revisión respecto de los programas de estudio chilenos en relación a las orientaciones para la enseñanza de los Números Complejos.

En relación a los métodos de investigación, son de tipo mixto (Hernández Sampieri y Mendoza, 2010), específicamente cuantitativa-descriptiva y cualitativa-interpretativa, ya que el foco se centra tanto en el proceso como en el producto (Godino, 2003). Particularmente, el enfoque cuantitativo fue dado en la primera etapa, en la que se aplicó un pretest y postest, que fueron realizados a través de una prueba. Por otra parte, el elemento cualitativo estuvo enmarcado en la realización e implementación de un programa de capacitación a través de una unidad didáctica, para una posterior intervención en el aula. Durante este proceso, se

aplicaron cuestionarios a los participantes. Además de ello, se aplicaron pautas de observación respecto de su práctica docente al profesor involucrado en distintos momentos de la implementación de la unidad. De corte cuasi experimental (Santa Palella y Martins, 2010), con grupo único de pre y postest. Participaron estudiantes de tercer año medio de un colegio particular subvencionado con su respectiva profesora.

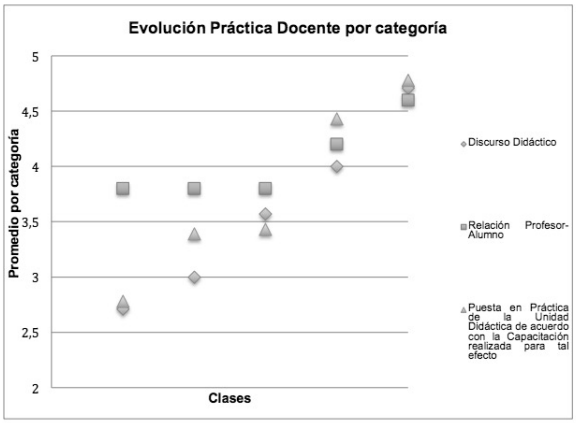
El programa de intervención consistió en inicialmente diseñar una capacitación para un docente de matemáticas de tercer año medio, de manera que pueda poner en práctica la unidad didáctica Números Complejos. Dicha capacitación consistió en un perfeccionamiento que tuvo una duración de nueve horas cronológicas, las que se distribuyeron de manera equitativa a lo largo de tres sesiones. La metodología utilizada fue de tipo activo participativa en donde se realizaron exposiciones teóricas, directamente relacionadas con los números complejos, análisis y reflexión sobre los temas tratados. En concreto, en la primera sesión se trabajó las competencias matemáticas y análisis de los números complejos en los programas de estudio y orientaciones. En la segunda sesión, el contenido disciplinario a trabajar con los estudiantes y de manera transversal las habilidades y actitudes asociadas a ellos, posibles errores de los estudiantes. En la última sesión se trabajó los números complejos en la historia de la matemática y la secuencia didáctica considerada para la enseñanza de ellos.

Respecto del estado inicial de la docente capacitada, no se tiene evidencia concreta (a través de una evaluación inicial, por ejemplo), sin embargo se considera relevante mencionar que es la primera vez que debe enfrentarse a la enseñanza de este tópico y que durante la capacitación manifestó no recordar algunos temas asociados a este sistema numérico. Respecto del estado final de la docente, es decir, del grado de significancia de la capacitación, se interpreta a través de los resultados que obtuvo en el transcurso y durante la implementación de la intervención; mediante una retroalimentación constante en cuanto las respuestas entregadas durante la capacitación y por medio de una entrevista una vez finalizada la intervención. Respecto de las competencias matemáticas, fueron medidas a través de pruebas que presentaron situaciones problemáticas, similares a las que se trabajaron en la implementación de la unidad, estas fueron básicamente relacionadas con modelización, por ejemplo al introducir el concepto de número imaginario, intentando resolver la ecuación $x^2+1=0$, a realizarse antes y después de la implementación de la unidad didáctica. Para la realización del análisis de las competencias matemáticas, en cada ítem de los instrumentos, se elaboró una pauta de evaluación, en la cual fueron consideradas distintas categorías (aspectos conceptuales, aspectos procedimentales y comunicación matemática) con sus respectivas subcategorías, relacionadas con capacidades matemáticas, entendiéndolas según Solar et. al (2011), esto es que el desarrollo de las capacidades en el estudiante contribuye a la adquisición de competencias, pues son las primeras desarrollables a corto plazo, en una unidad, en una clase; mientras que las competencias son desarrollables a largo plazo. Se utilizó la prueba T para muestras relacionadas, aplicándose éstas a los resultados obtenidos por los estudiantes tanto en el pre como en el pos test. Para el análisis de las capacidades desarrolladas, se evaluaron los 10 ítems que se consideraron y las categorías antes descritas, para ambas pruebas. Los resultados obtenidos dieron cuenta que, para los diez problemas considerados en ambas pruebas, en cuatro de ellos se obtuvo

diferencias altamente significativas a favor del postest, para todos los indicadores contemplados en ella, lo que significa que desarrollaron todas las capacidades consideradas para el ítem. En tres de las seis preguntas restantes (50%) se obtuvo diferencias altamente significativas en más del 70% de sus respectivos indicadores. Finalmente, en un único problema se obtuvo un 40% de los indicadores con diferencias significativas, mientras que en el 60% restante no se obtuvo diferencias significativas.

En relación a la percepción tanto de los estudiantes como de la profesora, sobre la implementación de la unidad, se definieron seis categorías: percepción de la unidad tras ser finalizada, percepción de las actividades desarrolladas a lo largo de la unidad, percepción del nuevo método de trabajo, descripción de las dificultades experimentadas en el transcurso de la unidad, percepción de la comprensión del nuevo contenido y percepción global de la experiencia. Para el análisis de estos datos se utilizó el procedimiento de análisis de contenido a través de la triangulación de personas, considerando cinco de los treinta cuestionarios más representativos, además de la tercera entrevista de la profesora, ya que dichos instrumentos se consideran equivalentes. Los resultados obtenidos llevan a concluir que, tanto la profesora como los estudiantes, finalizaron la experiencia con una valoración positiva respecto a la globalidad de la unidad, esto es, forma de trabajo, explicaciones de la profesora, manejo de recursos, entre otros.

Para analizar los datos, en relación a la puesta en práctica de la capacitación y dada la naturaleza de los datos obtenidos para este análisis, se utilizó como referencia el promedio de los indicadores por categoría cada una de las tres categorías consideradas:



En el gráfico antes descrito se evidencia una tendencia al alza para cada una de las tres categorías, a favor de la clase más pronta a finalizar el proceso de intervención.

Posteriormente se utilizó la prueba de Friedman. Los resultados obtenidos arrojaron que para las categorías Discurso didáctico y Puesta en Práctica de la Unidad Didáctica, de acuerdo con la Capacitación realizada, hubo diferencia significativa en al menos una de las observaciones realizadas ($p = 0{,}006$ y $p = 0{,}000$ respectivamente). Posteriormente, se determinó específicamente en cuáles de ellas se produjo esa diferencia, logrando establecer que en la categoría Discurso Didáctico empleado por el profesor, la docente efectivamente evolucionó de manera positiva, lo que se evidencia –en ocasiones- en el proceso de la observación (en la mitad de las diez comparaciones), pero que sí se concluye en la

comparación clase inicial vs clase terminal. Respecto de la categoría Puesta en Práctica de la Unidad Didáctica, de acuerdo con la Capacitación realizada en siete de las diez comparaciones realizadas, se obtuvo diferencia significativa a favor de la clase más pronta al fin de la implementación de la Unidad Didáctica. Dentro de esas comparaciones, se incluye la valoración de la docente frente a la categoría antes mencionada, al comparar la clase inicial con la terminal. La evolución no significativa para la categoría Relación profesor - alumno se atribuye a que los indicadores para esta categoría no fueron trabajados durante la capacitación.

Para evaluar la capacitación de la docente se utilizaron las entrevistas que otorgaba una vez finalizada cada sesión de la capacitación y una entrevista entrevista estructurada final, la que fue grabada en audio y luego transcrita a un texto. La información contenida en ella se introdujo en el programa Atlas-ti, donde se codificaron los párrafos más relevantes bajo las categorías de análisis "Nuevo aprendizaje" que se relaciona con toda la información que la docente plantea respecto de la capacitación, incluye valoración, evaluación y percepción, y "Manera de abordar la unidad números complejos sin la capacitación" que desprende toda la información que la docente brinda respecto de las acciones que hubiera implementado si no hubiera tenido la posibilidad de la capacitación. Los resultados obtenidos en este proceso dan cuenta que la docente finalizó el ciclo quedando muy satisfecha con respecto a la capacitación que recibió a través de esta investigación, debido a que fue específicamente sobre la unidad que debía trabajar con su curso y complementada con otros temas que subyacen a la disciplina, por ejemplo, el desarrollo de competencias, historia de los números complejos, errores frecuentes de aprendizaje, etc. Además de ello, el proceso de capacitación le permitió realizar un análisis profundo de elementos en la enseñanza de un contenido matemático que debía enseñar por primera vez y revisar elementos que no siempre habían sido considerados por ella, al momento de enseñar; por ejemplo, la orientación que se le debe entregar a un contenido matemático de manera que permita el desarrollo de una competencia, la comprensión de los errores frecuentes y el análisis de los programas de estudio, entre otros.

A partir de estos resultados, es posible concluir que, a través de una capacitación con asistencia en aula, un profesor de enseñanza media de educación particular subvencionada, es capaz de obtener logros significativos en el desarrollo de competencias de sus estudiantes, cuando estos se ven enfrentados a un nuevo contenido, en este caso, una integración geométrico-algebraica en la enseñanza de los números complejos; motivo que se condice con los planteamientos de Caamaño (2003), quien plantea que un profesor que se somete a un proceso de capacitación o perfeccionamiento realizado por especialistas va a conseguir mejorar sus competencias de desempeño docente en una determinada unidad didáctica (Caamaño, 2003).

Se sugiere que cada vez que se produzcan modificaciones al Currículum Nacional, se generen políticas gubernamentales relacionadas con Formación continua de docentes, de manera que se asegure que estos cuentan con herramientas disciplinares, didácticas y metodológicas para enfrentarse a la enseñanza de estos nuevos contenidos.

Referencias

Caamaño C. (2003). "*Informe final Proyecto de Capacitación y seguimiento a docentes de Matemática de primer año de enseñanza media de liceos municipalizados de las provincias de Curicó y Talca*". MINEDUC. División general de educación. Componente de fortalecimiento profesional docente enseñanza media, Chile.

Godino, J. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. (Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada).

Niss, M. (2003). *Quantitative Literacy and Mathematics Competencies*. En Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges, 215-220.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA: UN ENFOQUE PARA LA APROPIACIÓN DE APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS SOBRE FUNCIONES EN TERCER AÑO MEDIO

Alexis Pérez Roa, Nicole Vásquez Olave, Francisco Toledo Oñate Salvador Alarcón, Irma Lagos Herrera
Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles

Resumen: Se propone la aplicación del enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR) en la enseñanza de funciones a estudiantes de tercer año medio de un liceo municipal de la comuna de Los Ángeles, como una alternativa que les facilite, el desarrollo de habilidades de matematización y de resolución de problemas contextualizados, lo que podría contribuir a aumentar la actitud positiva y la motivación, junto con disminuir la ansiedad hacia las Matemáticas.

EMR, funciones, matematización, realista, contexto

INTRODUCCIÓN

A pesar de los esfuerzos institucionales por mejorar el rendimiento en Matemática, Chile tiende a mantener sus bajos resultados, junto con la brecha social y de género. Si nos situamos en los procesos de matematización, el panorama es aún peor, pues la mayoría no ha logrado construir las herramientas necesarias para asumir los desafíos de la vida en la sociedad moderna (Resultados de Chile en Pisa, 2012). Pareciera entonces que la enseñanza escolar de las Matemáticas va en distinta dirección que lo que se evalúa en Pisa. En la mayoría de los casos, por no decir todos, en las escuelas primero se formaliza el conocimiento a enseñar y luego se lo aplica en la resolución de ejercicios que, en general, están construidos exclusivamente para la aplicación directa del concepto aprendido, sin ningún tipo de transformación.

Una forma de superar la mecanización es el enfoque de la EMR, a modo de co-construir los procesos de matematización.

La educación matemática realista, principios teóricos

Este enfoque se basa en las ideas y postulados de Hans Freudenthal (1905-1990), matemático y educador alemán que desarrolló la mayor parte de su trabajo en Holanda. En la EMR, la matemática debe ser conectada con la realidad, permanecer cercana a los estudiantes y ser relevante para la sociedad, a fin de constituirse en un valor humano.

Ideas Centrales de la Educación Matemática Realista

Para Freudenthal, la matemática es una actividad humana, potencialmente al alcance de todas las personas; un proceso de organización y estructuración del mundo real denominado matematización.

Desde el punto de vista didáctico, la enseñanza debe ofrecer a los estudiantes la oportunidad de reinventar las ideas y herramientas matemáticas a partir de matematizar situaciones problemáticas contextualizadas, en interacción con sus pares y bajo la cuidadosa guía del docente. El foco de la educación matemática no se encuentra en la matemática como un

sistema cerrado, sino en la actividad de matematización, que necesita de la fenomenología didáctica, que es la búsqueda de fenómenos, situaciones, problemas, o manifestaciones de la vida real en las que un tema u objeto matemático aparece o se aplica naturalmente.

Principios de la EMR

Principio de Actividad: La matemática es una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola.

Principio de Realidad: Si la matemática surge como Matematización (organización) de la realidad, el aprendizaje matemático debe originarse también en esa realidad. No solo lo real existente, sino también lo imaginable.

Principio de Reinvención Guiada: La educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad mediada por el o la docente de reinventar la matemática (no la crean, ni descubren, sino que reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar al que usaron los matemáticos al inventarlas).

Principio de Niveles: Las estrategias informales y nociones intuitivas puestas en juego por los y las estudiantes en la resolución de situaciones realistas deben progresar hacia niveles de mayor formalización y esquematización en un proceso denominado matematización progresiva, proceso que se presenta en dos dimensiones:

- Matematización Horizontal: Organizar y resolver una situación en contexto utilizando las herramientas matemáticas disponibles (sentido común, intuición, experiencia previa, observación, etc.), convertir un problema textual en uno matemático.
- Matematización Vertical: Reorganizaciones y operaciones dentro de la matemática misma (usando estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, rigorización, etc.). Los estudiantes transitan por distintos niveles de comprensión, relacionados con el uso de estrategias, modelos, lenguaje y esquemas de distinta jerarquía cognitiva. Los niveles propuestos por la EMR son: situacional, referencial, general y formal.

Principio de Interacción: Las interacciones verticales (docente-alumno) y horizontales (entre alumnos) posibilitan la reflexión para alcanzar niveles mayores de comprensión matemática.

Principio de Interconexión: Surge la necesidad de integrar distintos ejes de la matemática y promoviendo el uso de un amplio y variado rango de comprensiones y herramientas matemáticas.

Por cierto, el enfoque EMR requiere de una formación inicial docente y continua coherente con dicho enfoque, como se viene haciendo en Europa hace un tiempo (Alsina, Á., 2007, 2009), en que los equipos de formadores pongan en práctica la pirámide de situaciones de enseñanza de Alsina (2010) desde las situaciones cotidianas, matematización del entorno. Generar cambio de enfoque implica dificultades (Doorman, M. et al., 2007).

PROPUESTA METODOLÓGICA

La población de estudio son estudiantes de tercer año medio de un liceo municipal científico-humanista de la comuna de Los Ángeles. La intervención didáctica se aplicará en septiembre y octubre de 2016, para presentar las conclusiones en diciembre del mismo año. La propuesta metodológica consiste en crear escenarios de aprendizaje en donde el estudiante tiene la libertad de formar sus propias estrategias para responder a las preguntas planteadas, los alumnos analizan de forma colaborativa una situación (como la propuesta en el cuadro 1), utilizan su sentido común y conocimientos matemáticos previos para organizarla (proceso de matematización vertical), se sigue una interacción global donde el profesor guía el desarrollo de los estudiantes, limitándose solo a entregar preguntas clave, comentar aportes de otros alumnos, guiar la interacción alumno-alumno y motivar el uso de diversas áreas matemáticas (geométrica, numérica, algebraica, etc.); de acuerdo a los principios de la EMR (Bressan, 2016) y a las experiencias disponibles (Van den Heuvel-Pauinzen, M., 2009; Doorman, M. et al., 2007;Cetina, Villa-Ochoa, J.;Cabañas-Sánchez,G., 2015; Rey, G.; Boubée, C.; Sastre, P. y Cañibano, A., 2009; Gallego, M . y Pérez, S., 2013).

En las cercanías del colegio "Pablo Neruda" se encuentran dos lugares de impresión y fotocopiado: el "Cibercafé Tío Pancho" y "Fotocopias Margávila". La descripción de precios se encuentra en los letreros:

CIBERCAFÉ "TIO PANCHO"
Computador (media hora) → $200
Impresiones → $10

FOTOCOPIAS "MARGÁVILA"
Fotocopias e impresiones → $15
Por ambos lados → $14

¿Cuánto cuesta imprimir 5, 10, 15 y 20 páginas en cada lugar?, ¿Cuál alternativa te parece más económica?, ¿En qué circunstancias imprimir en el "Cibercafé Tío Pancho" es la alternativa más económica?, ¿Puedes graficar las alternativas de impresión, y obtener desde allí la alternativa más económica?, ¿Existe algún modelo matemático o función que permita representar los costos de imprimir una cantidad ***x*** de páginas, para cada una de las opciones?, ¿Cómo son los conjuntos Dominio y Recorrido de estas funciones?, ¿En qué se diferencian estas funciones gráficamente?

Alberto canceló $800 por un trabajo, ¿Cuántas hojas y dónde las imprimió?, ¿Existe alguna función que permita determinar el número de páginas impresa, sabiendo el dinero que se pagó, en cada una de las tres alternativas de impresión?

Cuadro 1. Situación realista orientada al aprendizaje del concepto de función, función lineal y afín.

Frente a la situación del Cuadro 1, en un primer momento, los estudiantes pueden asumir que la impresión en el "Cibercafé Tio Pancho" es la más económica, pues se paga menos por cada hoja, pero el análisis numérico propuesto en un comienzo les permite descubrir que no hay una "opción siempre más económica", se hace necesario distinguir bajo qué condiciones cada una de las opciones es la más económica. Hasta este instante solo se ha trabajado con conceptos bien ligados a la situación: cantidad de hojas y dinero a pagar.

Pasando a un Nivel Referencial, graficar la cantidad de hojas en relación con el precio permite que el alumno reconozca el crecimiento proporcional de las variables involucradas, y así hacer corresponder una recta a cada función, analizando los puntos de intersección se pueden distinguir tres intervalos del dominio donde cada una de las opciones es la más barata. Se debe tener la precaución con los conjuntos Dominio y Recorrido. Aquí se nota el hecho de que en el Nivel General se desprende de la situación, y se trabaja con modelos para situaciones similares. Luego, situándose en el Nivel Formal, se les solicita a los estudiantes determinar el Dominio, Recorrido y la función inversa.

El trabajo en aula es colaborativo, tanto del grupo de trabajo, como del grupo curso, las interacciones entre los estudiantes de un grupo o aquellas que sean mediadas por el docente para hacer una discusión global son oportunidades para reflexionar acerca de las propias producciones de cada estudiante.

RESULTADOS ESPERADOS

Se espera que los y las participantes en la experiencia de EMR logren desarrollar sus habilidades de matematización. Se trata de promover el avance de los estudiantes en la comprensión de las matemáticas (Van der Van den Heuvel-Pauinzen, M., 2009), específicamente de las funciones; junto con aumentar su motivación hacia la asignatura y disminuyan su ansiedad.

Referencias

Alsina, Á.(2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 119- 127). Santander: SEIEM.

Alsina, Á.(2010). La «pirámide de la educación matemática» Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. Aula de Innovación Educativa • núm. 189 • febrero 2010:12-16

Dialnet-ElAprendizajeRealistaUnaContribucionDeLaInvestigac-3628654.pdf

Bressan, A. et Ali. (2016). *Educación Matemática Realista, Bases teóricas.* Extraído de http://gpdmatematica.org.ar/

Bressan, A. (2005). *Los principios de la educación matemática realista.* Extraído de http://gpdmatematica.org.ar/

Cetina; M.; Villa-Ochoa, J. y Cabañas-Sánchez, G. (2015) Análisis de una situación de Modelación de lo cuadrático desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista

Gallego, M. & Pérez, S. (2013). *Aportes realistas a la educación matemática*. Desde la Patagonia Vol. 10 N° 16 (pp. 12-19).

Doorman, M.; Drijvers, P.;Dekker, T.; Van den Heuvel-Panhuizen,M.; De Lange, J.&,Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. ZDM Mathematics Education (2007), 395), 405-418. doi:10.1007/s11858-007-0043-2

Rey, G.; Boubée, C.; Sastre, P. y Cañibano, A. (2009). *Ideas para enseñar.* Aportes didácticos para abordar el concepto de funciones. UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática

Van den Heuvel-Pauinzen, M. (2009). *El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje.* Correo del Maestro N° 160: Certidumbres e Incertidumbres (pp. 36-44).

LA ESTABILIDAD Y SUS USOS EN UNA COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE INGENIEROS

E. Johanna Mendoza Higuera, Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

Resumen: Esta investigación se trata de construir un marco de referencia que caracterice y estructure los usos de la estabilidad en situaciones específicas. Se estudiarán las resignificaciones de los usos en escenarios de la escuela, del trabajo y la ciudad. La problemática en cuestión, consiste en que suceden usos del conocimiento matemático propios de su cotidiano disciplinar (como la ingeniería) y diferentes de la Matemática Escolar. Buscamos identificar aspectos de funcionalidad que permitan construir un diálogo entre el aula y la realidad. En este avance de investigación se mostrará, grosso modo, la resignificación de la estabilidad desde el estudio de la obra de Lyapunov. Con ello, pretendemos ir conformando un marco socioepistemológico que oriente el diseño de situaciones para el aula en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales lineales.

Socioepistemología, ingeniería, estabilidad, usos

INTRODUCCIÓN

Uno de los propósitos de la educación, es proveer a los ciudadanos de conocimientos que les permita mejorar sus condiciones de vida. Múltiples ejemplos dan cuenta que este objetivo no ha sido alcanzado. En específico, con respecto a la matemática, Gómez-Osalde (2015) ha reportado que la matemática escolar no trasciende al cotidiano del estudiante. Lo que "aprende" en la escuela, se queda en la escuela. Por otro lado, solo se dibuja una dirección de acción, de la matemática escolar al cotidiano; pero desde nuestra perspectiva, consideramos que el ciudadano también construye conocimiento en su cotidiano y que éste debería redundar en la matemática escolar. Por ello, nos abocamos a estudiar los usos del conocimiento matemático en diferentes escenarios de la escuela, pero también del trabajo y la ciudad (Cordero, 2016).

La tarea de investigación, que reportamos aquí, consiste en caracterizar los usos de la estabilidad desde la transversalidad entre la obra matemática, la ingeniería y el cotidiano del ciudadano. Todo esto articulado conformará una epistemología de usos para el rediseño del dME. Identificar usos de la matemática desde la ingeniería, tanto en su saber como en el hacer, así como la intencionalidad para llevarlo al aula, contribuirá en la problemática de aprendizaje de la matemática en la ingeniería. El resultado del estudio brindará elementos para el diseño de situaciones de socialización para la formación de ingenieros desde y con la ingeniería.

MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DE LOS INGENIEROS

Se ha evidenciado un modelo tradicional en la formación de los ingenieros. Primero se da una formación básica en matemáticas, física, química; después se acerca a los estudiantes a las ciencias propias de su ingeniería; y finalmente los cursos profesionales que hacen referencia a problemas propios de la ingeniería donde usarán los conocimientos

"aprendidos" en los semestres anteriores (Cajas, 2009; Langereis, Hu y Feijs, 2013). En este sentido, la matemática es vista como herramientas para la solución de los problemas.

Desde nuestra mirada, en la formación y en la práctica laboral del ingeniero están involucrados conocimientos específicos de otras disciplinas, que denominamos secundarias, como la matemática, la física, la química, la tecnología, la programación, etc. Es decir, la ingeniería es multidisciplinar. Reconociendo esto se han formulado programas curriculares que forman un ingeniero integral, pero lo que ha imperado es la jerarquización de los conocimientos y su mirada desde la disciplina secundaria y no desde la ingeniería. Es así como la matemática se ha convertido en un núcleo fundamental para la formación del ingeniero.

En los últimos años, se ha estudiado la incorporación de la modelación matemática como estrategia de enseñanza de la matemática en los diferentes niveles educativos, así como de la formación de ingenieros (Romo-Vázquez, 2014, Rodríguez, 2016; Cardella, 2010; Camarena, 2009, entre otros). En algunos casos se diseñan situaciones para el aula donde se lleva a los estudiantes a transitar por los diferentes dominios y fases del proceso de modelación matemática; o, después de determinar ciertos métodos, propios de la ingeniería para resolver problemas de su práctica profesional, se plasman en una situación didáctica donde el modelo analítico juega un papel importante. Si bien, estas estrategias han sido un avance en la búsqueda de acercar al estudiante al conocimiento propio de su realidad profesional, no se han enfocado en analizar la matemática o la modelación propia de la ingeniería, ni tampoco han discutido ¿qué matemática debemos enseñar a los estudiante de ingeniería? ¿qué modelación matemática usa el ingeniero en su práctica profesional?

En nuestro caso, nos interesa entender la función social del conocimiento matemático desde la ingeniería y a partir de ahí generar situaciones de socialización de esta función que amplíen los episodios donde el estudiante construye conocimiento.

CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO. LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

La Teoría Socioepistemología (TSE) ha logrado formular que la matemática escolar tiene naturaleza dual. Es decir, que el conocimiento matemático tiene funciones diferentes según su uso dentro de las disciplinas. Para los matemáticos, es su objeto de estudio, y en otras disciplinas es tomada como una herramienta. Así, existen profesionales usuarios del conocimiento matemático, que no son matemáticos y que usan la matemática como un instrumento en su práctica profesional (Cordero, 2008). Al analizar estos usos, se observa que las justificaciones que conllevan la construcción de conocimiento matemático, también son diferentes. Por un lado, impera la justificación racional producto de la actividad matemática y por el otro, aparece la justificación funcional que surge de la actividad humana (Cordero, 2016) y que conllevan una intencionalidad definida por su cotidiano disciplinar (Tuyub, 2008).

Identificar elementos de la justificación funcional, amplía la problemática que conlleva la matemática escolar y ofrece formas de proponer otro marco de referencia para la enseñanza de la matemática en los diferentes niveles educativos (Cordero, 2016). Entonces ¿cómo

construir este marco? ¿cómo identificar estos elementos? ¿qué usos del conocimiento matemático suceden en otras disciplinas?

Nos interesa entonces entender cómo un sujeto construye conocimiento desde su condición de ciudadano, en los diferentes escenarios en los que participa. Caracterizar los elementos de función y forma del uso del conocimiento en el cotidiano permitirán construir el marco de referencia ya mencionado. Por ello, estudiamos los usos del conocimiento matemático para formular una epistemología que evidencie la transversalidad de resignificaciones de estos usos.

USOS DE LA ESTABILIDAD EN LA INGENIERÍA

Nuestra investigación, busca aportar al marco de referencia mencionado desde el estudio de usos de la estabilidad. Para evidenciar una transversalidad de estos usos proponemos identificar las resignificaciones de la estabilidad en diferentes escenarios como la obra matemática, el cotidiano, el discurso Matemático Escolar y la Ingeniería.

La hipótesis que planteamos en esta parte del trabajo, es que existe una categoría propia de la matemática funcional que articula estas resignificaciones de la estabilidad y que denominamos Comportamiento Tendencial de las Funciones (CTF).

Trabajos como el de Zaldívar (2014) y Ruiz-Esparza(2014) han evidenciado que el CTF emerge en situaciones movimiento y temperatura, cuando se trabaja con niños y jóvenes en un ambiente de divulgación. Por otro lado, Solís (2012), Mendoza (2013) trabajando en escenarios escolares de la ingeniería identifican a las ecuaciones diferenciales lineales como modelos de estabilidad. El primer autor, por medio de la simulación tecnológica, con estudiantes de ingeniería, evidencia un patrón de construcción de estas ecuaciones donde el comportamiento tendencial se convierte en el hilo conductor de esta situación. Y la segunda autora, formula un diseño de situación para ingenieros civiles en formación y caracteriza, en una situación de acumulación de fluidos, la forma como los estudiantes significan la estabilidad como un momento en el que el fenómeno busca alcanzar un equilibrio y la variación es cada vez más pequeña. En estos dos trabajos, también encontramos elementos de la categoría del CTF.

Es así, como hemos convenido estudiar la estabilidad en la obra matemática e identificar cuáles son las transversalidades de resignificaciones, desde los escenarios mencionados anteriormente y la estabilidad de Lyapunov, para después analizar los usos de la estabilidad en una comunidad de ingenieros electrónicos desde una situación de control automático.

Todo lo anterior conformará una epistemología de usos de la estabilidad que nos servirá de base para la construcción de un diseño de situación de socialización para poner en juego con estudiantes de ingeniería.

CONCLUSIONES

Hasta aquí, hemos mostrado la problemática que identificamos en la enseñanza de la matemática en la ingeniería y la forma como la estamos abordando con base en la TSE. También se ha señalado, la importancia de estudiar los usos del conocimiento matemático y

sus resignificaciones desde diferentes escenarios, de tal forma que nos permita hacer un enlace entre la matemática escolar y la realidad.

Nuestra investigación a podido evidenciar, por ahora, diferentes elementos en torno a la problemática. Por ejemplo, no podemos identificar el uso de la estabilidad en una comunidad de ingenieros sino caracterizamos sus formas de construcción desde ellos, es decir reconocer su conocimiento íntimo que exprese su jerga disciplinar; su conocimiento local que nos permita ver elementos propios de su práctica; reciprocidades de conocimiento que dibujen la forma en que se desarrollan sus usos de conocimiento. De esta manera, lo que logremos dibujar en torno a los significados, procedimiento y argumentaciones será desde ellos, y nos permitirá dar evidencias de la funcionalidad de su matemática.

Referencias

Gomez-Osalde, K. M. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la Ingeniería Agrónoma*. Tesis de doctorado no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

Cordero, F. (2016) Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Ar rieta y L. Díaz. *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa.* España: Gedisa.

Cajas, F. (2009). El conocimiento de ingeniería como conocimiento escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (22), pp. 77 – 84. México: CLAME A.C

Camarena, P. (2009a) Mathematical models in the context of sciencies. Reporte de investigación presentado en *Topic Study Group 21: Mathematical apllications and modelling in the teaching and learning of mathematics, at the 11th ICME*. M. pp. 117 –131. Monterrey, México

Cardella, M. (2010) Mathematical modeling in engineering design projects. In R. R., Lesh, P:L., Galbraith, C.R., Haines, A., Hurford (Eds.) Mo*deling students´mathematical modeling competencies*, pp 87 – 98. New York: Springer.

Langereis, G. Hu, J. & Feijs, L. (2013) How to introduce mathematical modelling in Industrial Design eduacation? In G.A. Stillman, W. Blum, G. Kaiser, & J. Brown, (Eds.) *Teaching mathematical modelling: connecting to research and practice*, pp. 551 – 561.

Mendoza, E.J. (2013). *Matemática funcional en una comunidad de conocimiento: el caso de las ecuaciones diferenciales lineales en la ingeniería*. Tesis de maestría no publicada. DME, CINVESTAV, México.

Rodríguez, R. (2016). Enseñanza y aprendizaje de matemáticas a través de la modelación desde y para la formación del ingeniero. En J. Arrieta y L. Díaz (Coords.) *Investigaciones Latinoamericanas en modelación. Matemática Educativa*, pp. 163 – 193.

Romo-Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática*. Edición especial, pp. 314-338.

Solís, M. (2012). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo. El caso de la predicción y la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden*. Tesis de doctorado no publicada. DME, CINVESTAV, México.

Tuyub, I. (2008). *Un estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento*. Tesis de Maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México

Zaldívar, D. (2014). Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar. Tesis de doctorado no publicada. DME, CINVESTAV, México.

ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO Y ESTUDIO DE CLASES: ANALIZANDO LAS CIRCULACIONES EN CINCO CICLOS DE CLASES EN ESTUDIO

Gonzalo Soto Cárdenas, Elisabeth Ramos-Rodríguez , Andrea Pizarro Canales
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen: El Estudio de Clases implica una constante reflexión en torno al quehacer pedagógico en relación al conocimiento del objeto matemático y también al conocimiento de los estudiantes con quiénes se trabaja. En los ciclos que implica, la reformulación de las actividades de enseñanza constituye la piedra angular del trabajo realizado por el docente. Por tal motivo este trabajo tiene como objetivo analizar la trayectoria de cinco sesiones reformuladas en ciclos de Estudio de Clases para el trabajo de ecuaciones en estudiantes de cuarto año básico, en función del Espacio de Trabajo Matemático Idóneo y su correspondiente circulación. Estas sesiones fueron implementadas en escuelas municipales y particulares de la Región de Santiago y de Valparaíso. Los resultados indican que se mantiene de manera similar la circulación durante las sesiones implementadas, lo que nos provoca nuevos desafíos en cuanto a un diseño efectivo para el logro de los aprendizajes propuesto en educación básica e inicial.

Estudio de Clases, ecuaciones de primer grado, Espacio de Trabajo Matemático

INTRODUCCIÓN

El Estudio de Clases implica una constante reflexión en torno al quehacer pedagógico en relación al conocimiento del objeto matemático y también al conocimiento de los estudiantes con quiénes se trabaja (Mena, 2007). Los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las ecuaciones (Kieran & Filloy, 1989) evidencian que los estudiantes siguen usando los métodos que les funcionaban. Además en aritmética los estudiantes pueden usar métodos intuitivos o informales para encontrar la respuesta y resolver problemas. Por lo tanto la confianza en éstos métodos promueve que los alumnos al formular ecuaciones no se den cuenta que el procedimiento a menudo es la respuesta.

La problemática del Estudio de Clases (Takahashi & Yoshida, 2004) corresponde a que los estudiantes pudiesen relacionar la estructura de las ecuaciones con el lenguaje natural en situaciones de la vida cotidiana, específicamente en lo referido a la resolución de problemas. Si bien como los estudiantes deberían estar familiarizados con este contenido finalizando tercero básico, en cuarto año básico siguen sin aplicar este conocimiento para algunas tareas específicas, resolviendo de forma aritmética tareas que pueden ser modeladas mediante una ecuación (Kieran & Filloy, 1989).

Las sesiones propuestas en el Estudio de Clases se enfocaron en generar una secuencia didáctica que potencie la modelación mediante una ecuación. Sin embargo, dadas las características de los distintos cursos en donde las clases fueron implementadas, se hizo necesario reformular cada sesión De esta manera fueron reformuladas las sesiones hasta llegar a una quinta y final. En relación a esta problemática, se hace necesario evidenciar el impacto de las reformulaciones realizadas a las clases por medio de la comparación del

espacio de trabajo matemático idóneo de las actividades propuestas en las cinco planificaciones.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico que sustenta este estudio, la teoría Espacio de Trabajo Matemático (Kuznikak, 2011), considera un proceso complejo y progresivo en que se articulan todos los elementos matemáticos para el desarrollo del pensamiento. Es decir, son todos los elementos que, desde el punto de vista didáctico, se movilizan con el fin de facilitar el trabajo del individuo en la resolución de situaciones problemáticas.

En el espacio de trabajo matemático se articulan los elementos movilizados por la tarea matemática, por tanto es necesario definir los niveles y componentes del ETM. Kuzniak y Richard (2014) presentan en un modelo (figura 1) con los elementos principales de esta teoría.

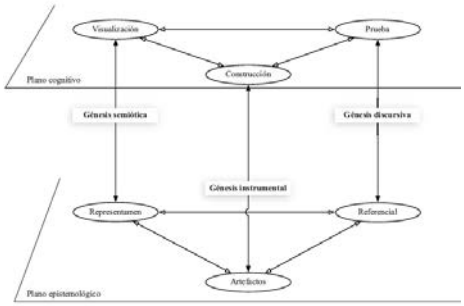


Figura 1: Espacio de Trabajo Matemácio

Esta figura permite comprender cómo circula el ETM a partir de los elementos que serán descritos a continuación:

Nivel epistemológico: Conjunto de componentes teóricos que se conjugan para desarrollar una tarea, en torno a un objeto de estudio. Dichos componentes son: el "Representamen", es el soporte material que está en representación de algo; los "artefactos" son objetos destinados a dar sustento a la actividad en la ejecución de un cierto tipo de tarea; y el sistema "referencial teórico" está constituido por definiciones, propiedades y relaciones.

Nivel cognitivo: Conjunto de procesos cognitivos que el individuo lleva a cabo al realizar una tarea. Estos son: el proceso de "visualización" que corresponde a la conexión entre lo que se percibe y la imagen mental construida internamente, b) la "construcción", es el proceso mediante el cual el estudiante utiliza herramientas materiales y/o conceptuales, para construir una representación, y c) la "prueba-argumentación" es el proceso mediante el cual el individuo genera pruebas y argumentaciones para la resolución de la tarea.

METODOLOGÍA

El diseño metodológico de este trabajo corresponde a un estudio de tipo cualitativo con estudio de caso múltiple (Grandon Gill's, 2011), ya que se han analizado las actividades reformuladas durante un Estudio de Clases.

El Estudio de Clases (Mena, 2007) es una metodología de cualificación docente que permite reflexionar sobre las prácticas de aula a partir de la planeación, la observación y el análisis

de las clases. Este estudio corresponde a un trabajo realizado durante el primer semestre del año 2016, en la asignatura Seminario de Taller de Investigación del programa de Magister en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Las clases fueron realizadas en una escuela particular y una municipal de la región de Valparaíso y tres escuelas municipales de la región Metropolitana. Estas sesiones fueron realizadas en 5 cursos de 4° año básico e implementadas por tres profesores de educación básica y dos profesores de educación diferencial. Se realizará un análisis cualitativo de contenido a partir de la circulación del ETM (ver figura 1) en las actividades propuestas en el Estudio de Clases. Las actividades seleccionadas corresponden a la primera y última del ciclo de clases. Las categorías de análisis corresponden al tipo de circulación que presente cada actividad, dependiendo de los componentes que estén involucrados para el desarrollo de la misma.

RESULTADOS

El Estudio de Clases contempló cinco clases (cada una es la reformulación de la anterior). Para este trabajo analizaremos la circulación de la clase uno y la clase cinco. La tarea central de la clase uno se ilustra a continuación.

> **“La carrera de atletismo”**
>
> 53 estudiantes participan de una carrera, 19 son niños y los demás niñas.
>
> ¿Cuál es la ecuación que se requiere para resolver el problema?

Esta tarea tiene su origen en el componente referencial, ya que para poder desarrollarla es necesario conocer las propiedades relacionadas con la estructura de la ecuación.

A continuación, también se ve involucrado el *representamen* ya que es necesario que se escriba la ecuación que modele el problema. A partir de este componente también se aporta a la visualización de la ecuación, y por lo tanto, se está en presencia de la génesis semiótica. Finalmente para que la ecuación esté adecuadamente planteada es necesario que el estudiante sea capaz de argumentar dicha selección, por ende, el componente de prueba/argumentación también se ve involucrado y por lo tanto, la génesis discursiva está presente en esta tarea. De esta manera se puede observar que la tarea no circula completamente por el ETM, ya que no se ven implicados instrumentos ni tampoco el proceso de construcción

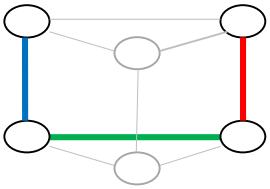


Figura 2: Circulación actividad 1

En el caso de la clase cinco, la tarea central de ésta se muestra en la figura 3

Análisis clase 5. **“El álbum completo”**
Víctor para completar su álbum necesita 30 láminas, y tiene 12.
¿cómo lo expresarían a través de una ecuación?

Esta última tarea tiene su origen en el componente referencial, ya que para que el estudiante pueda llevarla a cabo debe hacer uso de las propiedades de la ecuación. A continuación, también se ve involucrado el *representamen* ya que es necesario que se escriba la ecuación que modele el problema propuesto. A partir de este componente también se aporta a la visualización de la ecuación, y por lo tanto, se está en presencia de la génesis semiótica. Finalmente para que la ecuación esté adecuadamente planteada es necesario que el estudiante sea capaz de argumentar dicha selección, por ende, el componente de prueba/argumentación también se ve involucrado y por lo tanto, la génesis discursiva está presente en esta tarea.

De esta manera se puede observar que la tarea no circula completamente por el ETM, ya que no se ven implicados instrumentos ni tampoco el proceso de construcción

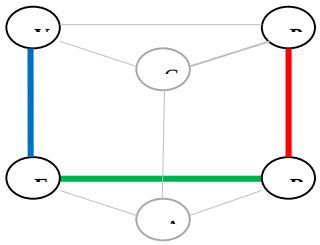


Figura 3: Circulación actividad 5

CONCLUSIONES

Los resultados de la investigación indican que tanto en la tarea de la primera y última sesión implementada, no se aprecian diferencias significativas en relación a las circulaciones de ambas actividades, ya que se encuentran involucrados los mismos componentes y en el mismo orden. Esto nos sugiere que a pesar de que las actividades fueron reformuladas y se diferencian una de otras, en relación a los componenten que ponen en juego, tanto del plano cognitivo como epistemológico, no varían, lo cual podría indicar que los estudiantes persisten en las mismas dificultades.

Por lo tanto, se espera a partir de esta información proponer una nueva planificación que considere la circulación completa por el ETM, lo cual permitiría contar con los elementos teóricos del ETM para la formulación de clases, en pos de la mejora de los aprendizaje de nuestros alumnos.

Referencias

Grandon Gill's, T. (2011). *Book Informing with the Case Method*. Informing Science Press: London.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.

Kuzniak, A. (2011). *L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9- 24. El espacio de trabajo matemático y sus génesis, traducción J. Lezama, Cicata.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17(4-I), 5-15.

Mena, A. (2007). *El estudio de clases japonés en perspectiva*, Informe de investigación presentado en la XIII Jornada de la Sociedad Chilena de Educación Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Takahashi, A. & Yoshida, M. (2004). *How Can We Start Lesson Study?:* Ideas for establishing Lesson Study communities. *Teaching Children Mathematics, 10*(9), 436- 443.

UNA PRÁCTICA DE MODELACIÓN: LA PARÁBOLA VÍA ARGUMENTACIÓN GRÁFICA

Jaime Huincahue, Neemias Lemus, Ricardo Ponce, Pamela Reyes
Universidad de Playa Ancha, Campus San Felipe

Resumen: La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en la actualidad, se ha vuelto cada vez más difícil de realizar, debido a que los estudiantes están sometidos a un sistema en el cual la forma de en que desarrollan los ejercicios es algorítmica y no da instancia al estudiante para entender, analizar y poder construir su propio conocimiento matemático. Sin embargo, por medio de la Modelación Matemática se pretende ir en contra del dME (discurso Matemático Escolar), realizando una propuesta basada en la argumentación graficación en modelación; entendiendose que mediante lo visual, los estudiantes construyan su conocimiento matemático y a su vez ir más allá de lo conocido, interpretando, argumentando y analizando gráficas para realizar una relación entre lo real y lo matemático. Por medio de Competencias en Modelación nos daremos cuenta de los efectos que tiene el dME sobre los estudiantes y cómo es posible realizar una tarea que pueda construir conocimiento matemático, dando lugar a poder comparar la realidad de aquellos que están bajo el dME y aquellos que han construido su conocimiento matemático.

Modelación matemática, modelación-graficación, competencias de modelación, gráficas, evaluación

INTRODUCCIÓN

La enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, ha sido motivo de estudio por diversos investigadores, los cuales han determinado que muchas de las prácticas realizadas por los docentes en las aulas están bajo una norma preestablecida. Estas prácticas realizadas por los docentes han afectado en la construcción del conocimiento matemático, llevando a los estudiantes a un campo de acción bajo una estructura algorítmica. Estas normas están establecidas según una estructura rígida e inflexible, llevando a los docentes a actuar de la forma ya mencionada y por consecuencia los efectos en los estudiantes, por ejemplo realizar la conexión entre lo real y lo matematico; no significa que el docente y el estudiante estén actuando de forma erronea, sino, que es el sistema quien los somete a una estructura rígida e inflexible, es decir que la enseñanza-aprendizaje está adherida al discurso Matemático Escolar y por consecuencia los actores de la enseñanza estan normados (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015). Los efectos que realiza el dME sobre los estudiantes es de separar la realidad con las matemáticas, muchos no se dan cuenta de que constantemente e inconscientemente desarrollan acciones matemáticas en su cotidianidad. Los efectos son transversales a todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, como en la construcción del conocimiento matemático y en su evaluación. Unos de los efectos más visibles en los estudiantes es la desmotivación y desinterés hacia las matemáticas, lo cual conlleva a que el docente deba recurrir a otros métodos para el desarrollo de sus clases, siendo poco efectivos al momento de la construcción de conocimiento matemático. Esta investigación se orienta a la modificación del dME, por su limitación al momento de desarrollar habilidades, tales como el razonamiento, y así crear conocimientos propios,es decir, desarrollar sus propias

ideas, es por esta razón que se dará una propuesta a la problemática de la enseñanza – aprendizaje, a través de modelación, graficación y competencias de modelación.

DESARROLLO

En la actualidad existe una complejidad en el proceso aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, es por esta razón que nuestra preocupación es entender el cómo aprenden. Entonces, hay que darle enfoque al cómo los estudiantes utilizan sus conocimientos, debido a que dicho conocimiento debe ser funcional y no utilitario.

Existen diversos programas innovadores con nuevas formas de enseñar, presumiblemente para mejorar los aprendizajes. Sin embargo, estos programas no concuerdan con la realidad educativa. En un escenario habitual en educación media, en donde el docente debe enseñar la parábola, un cuestionamiento sería ¿Qué quiere decir enseñar la parábola con la matemática de todos los días? Quien enseña no tiene un referente para responder cabalmente, sólo cuenta con información curricular, esto quiere decir que se vale de una lista explícita con una secuencia temporal de conceptos matemático para cubrir el programa del semestre o del año escolar (Cordero et al., 2015). El dME es responsable de lo anteriormente mencionado, y a su vez del hecho que el conocimiento sea utilitario en vez de funcional, para el conocimiento matemático. El dME consensua y valida actualmente la construcción del conocimiento por medio de repetición y memorización de los conceptos, es por ello, que los aspectos analíticos no generan marcos de referencia que permita su resignificación, no incorpora las experiencias del humano para la construcción de la matemática escolar sino que estudia las proporciones o definiciones de la estructura matemática (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015). Campos (2003) declara que el concepto matemático Parábola está normado por lo que se llama „El privilegio del contexto algebraico“, el cual tiene como objetivo desarrollar procedimientos algoritmicos y soslayar la funcionalidad de esta. Cordero (2013) indica que las matemáticas son objeto de estudio, sin embargo, en otros momentos no lo es, la obra matemática es un objeto de estudio desarrollado por especialistas, de ahí se desprende los programas de maestría y doctorado, siendo en estos casos un objeto de conocimiento para estos especialistas. La matemática, a su vez, en la cotidianidad de los ciudadanos no especialistas, no es un objeto de estudio, sino, más bien constructores de sus usos funcionales. La evaluación de los procesos de enseñanza-aprendizajes se desarrolla dentro del dME, dejando las competencias y valorando más la reproducción de un modelo que nace desde el docente. La evaluación de la mayoría de los establecimientos da un enfoque sobre evaluar los algoritmos realizados correctamente, reproducción de un modelo, desarrollo de la algebraización y no el proceso, en el cual las protagonistas son las competencias que desarrollan los estudiantes. Es importante indicar, que nuestra investigación busca que el estudiante adquiera conocimiento propio, que sus evaluaciones apuntes al analizar y verificar la construcción de conocimiento matemático.

Exiten tres ejes temáticos en nuestra investigación: Modelación Matemática, Modelación graficación, Competencias de Modelación, las cuales convergen en la construcción del conocimiento Matemático. La modelación desde hace años ha comenzado a tener una gran fuerza en la enseñanza-aprendizaje, lo cual está fuertemente ligado a las competencias, considerando que la modelación y la modelación-grafica están sumamente cohesionadas y

por consecuencia generan competencias. Según Arrieta y Díaz (2015), declaran que existen dos entidades que se articulan, lo modelado y el modelo. El primero es el fenómeno al cual el estudiante se enfrentará y el segundo son los medios (tabla de datos, gráficos, etc.) que se utilizaran, para que se articule con el fenómeno. El modelo que es el uso de la modelación-graficación, que lleva a las gráficas en un status más elevado. Al momento de hacer uso de las gráficas estas tienen una fuente de argumentación, datos organizados, patrón, regularidades, entre otras, que ayudan a la construcción del conocimiento matemático.

La investigación adquiere un corte metodológico cualitativo, donde el problema de investigación se centra en ir en contra del dME y su privilegio del contexto algebraico, para luego crear una herramienta que construya conocimiento matemático y en donde se evidencia este. Paralelamente, se busca disminuir los efectos del dME que afecta a los estudiantes y realizar una comparación entre aquellos que estan bajo el discurso y de aquellos que no.

Luego de lo metodológico, se procedió a realizar la elavoración de la tarea de modelación la que se desgloza en tres momentos: Conocimientos previos, Experimentación y Observación. Estos tres momentos fueron realizados con el obejetivo de que por medio de las graficas los estudiantes argumentaran y describieran elementos de la parábola. Además, dicha construcción fue basada en el Modelo de competencia matemática (MCM) descrita por Solar, Deulofeu y Azcárate (2015), que se desarrolla en un marco teórico de cuatro componentes de competencias de modelización:Tareas, Procesos, fases de modelización y niveles de complejidad. Pues en cada momento de la tarea los niveles de complejidad cognitiva se van desarrollando en forma piramidal desde los niveles más básicos hasta los más complejos.

La intervención se realizó en dos cursos diferentes (Tercero medio y cuarto medio) del Colegio San Alberto Hurtado, comuna de Pudahuel, Santiago. Los análisis del producto y la guía de la experimentación se realizó con elementos de la micro-ingeniería didáctica; Análisis preliminar, Concepción y análisis a-priori, y la experimentación, análisis a-posteriori y la validación.

Después de realizar todo el análisis y evaluación de la intervención, se obtubieron los siguientes resultados:

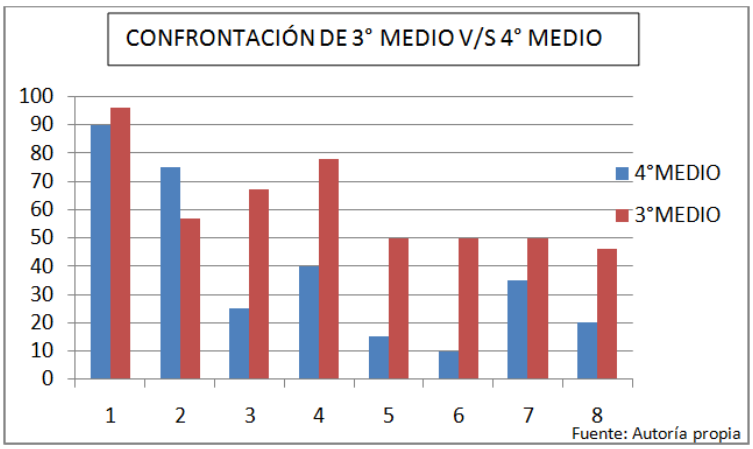


Figura 1. Confrontación de Niveles de Complejidad.

En los resultados se logra apreciar que los estudiantes de tercero medio desarrollaron niveles de complejidad cognitivas más elevados que en los estudiantes de cuarto medio, considerando que el concepto de Parábola aún no había sido enseñado en los estudiantes.

REFLEXIÓN

Ahora se hace necesario prestar atención y determinar los efectos que tiene el dME sobre nuestros estudiantes, pues aquellos que estan bajo el dME no pueden desarrollar niveles de complejidad cognitivos, sino que son normados bajo la algoritmia y no desarrollan sus competencias. También es deber del docente realizar esfuerzos que ayuden a que los estudiantes desarrollen construcción de conocimiento matemático y paralelamente competencias. De todos estos esfuerzos es posible aplicando dicha propuesta metodologica, bajar el nivel de deserción de los estudiantes a aprender matemáticas.

CONCLUSIÓN

Nuestra investigación muestra los efectos que produce el dME sobre aquellos que ya conocían el concepto matemático, el efecto crea una barrera entre la realidad y las matemáticas, ya que al momento de realizar la tarea de modelación sólo alcanzan niveles de complejidad cognitiva, como reproducción y conexión. Los efectos de este discurso, bloquea en momentos el hecho de que las graficas sean argumentativas. Sin embargo, el primer grupo tiene menos efectos creados por el dME, logrando que las gráficas sean argumentativas y desarrollen el razonamiento; pues estos desarrollaron niveles altos de complejidad cognitiva, como generalización y reflexión; siendo un método para contextualizar al estudiante con la realidad y así comprender su funcionalidad.

Referencias

Campos, C. (2003). La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica (Tesis de Maestría no publicada) Cinvestav-IPN, México.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. México: Editorial Gedisa.

Solar, H., Espinoza, L., Rojas, F., Ortiz, A., González, E., y Ulloa, R. (2011). Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM). Proyecto FONIDE 511091. *Santiago: Mineduc*.

Solar, H., Deulofeu, J. y Azcárate, C. (2015). Competencia de modelización en interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las ciencias*, *33*(2), 191-210.

EVALUACIÓN MATEMÁTICA BAJO UNA PERSPECTIVA SOCIOEPISTEMOLÓGICA A TRAVÉS DEL ESTUDIO DE LOS ESTILOS DE PENSAMIENTO EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Claudio Gaete Peralta[1], Jaime Mena Lorca[2]
Universidad Bernardo O´Higgins[1], Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[2]

Resumen: Esta investigación, tuvo como primer objetivo, determinar los estilos de pensamiento - acorde a la teoría del Autogobierno Mental de Sternberg - presentes en estudiantes que iniciaban la carrera de ingeniería en una determinada universidad chilena. Dichos estilos fueron medidos a través del instrumento denominado MSG Sternberg-Wagner Thinking Styles Inventory y permitió, como segundo objetivo, el diseño de una actividad matemática acorde a dicha medición. La evaluación de dicha actividad tuvo como objetivo final la resignificación, en el sentido socioepistemológico, del concepto de función cuadrática. La investigación, de carácter mixto, evidenció una resignificación de dicho concepto.

Evaluación matemática, estilos de pensamiento, función cuadrática, socioepistemología

INTRODUCCIÓN

En nuestra experiencia docente, hemos notado que los estudiantes hacen lo mejor que pueden a la hora de aprender un determinado tema; pero el docente, al estar tan enfocado en su propio estilo hace parecer, durante el proceso de evaluación de una determinada actividad, que todo lo realizado por ellos parezca incompleto o mal hecho. Para nosotros, esto representa un error garrafal, ya que por un lado, no se comprenden las limitaciones que tienen los alumnos para poder hacer las cosas de la misma manera que el profesor las realiza, y por otro lado, se coarta la posibilidad de que los estudiantes construyan conocimiento de otra manera. De esta manera, buscaremos hacer de proceso evaluativo de una actividad matemática, un hilo conductor para lograr dar cuenta que el conocimiento matemático tiene significados propios, contextos e intención, aprovechando a la vez, las formas en las que a los estudiantes les gusta hacer las cosas.

MARCO TEÓRICO

En esta investigación complementamos dos teorías: La socioepistemológica y la del Autogobierno Mental. La primera teoría establece que el discurso Matemático Escolar (dME), deja a la matemática en un nivel utilitario y no en un nivel funcional (Cordero, 2006), provocando que el estudiante no logre hacer suyos los conocimientos adquiridos. La resignificación de un concepto matemático, entendida como el "uso del conocimiento matemático en las situaciones en cuestión, para entender cómo debate, tal conocimiento matemático, entre su función y su forma de acorde con lo que organizan los participantes" (Cordero, 2006, p.5), propicia que el conocimiento matemático en cuestión se constituya en una herramienta que sirva para resolver preguntas en otros momentos de la vida, dentro o fuera de la escuela. Es importante señalar que la resignificación se evidencia por medio del estudio del uso del conocimiento, viendo éste como algo que se va organizando y cambiando, es decir, se va desarrollando en la situación o escenario que se enfrente.

La Teoría del Autogobierno Mental (TAM), creada por Sternberg (1997), define los estilos de pensamiento como una ruta. "No es una habilidad, más bien, es una ruta preferida para usar las habilidades que uno tiene. Un estilo se refiere a cómo a alguien le gusta hacer algo" (Sternberg, 1997, p. 8). Estos estilos de pensamiento tienen variables como el entorno, la cultura, la escolaridad, la crianza y el género; y todas ellas podrán definir un lineamiento en las rutas del pensamiento de un estudiante. Esta teoría nos ayuda a indicar por qué un estudiante hace o no hace alguna actividad a partir de sólo una forma de enseñanza mostrada en clases. Estos estilos permiten la caracterización de funciones y formas de pensamiento, así como niveles, alcances e inclinaciones. Según Sternberg (1997), las funciones son legislativas, ejecutivas y judiciales; las formas son monárquicas, jerárquicas, oligárquicas y anárquicas; los niveles son globales y locales; los alcances son internos y externos y finalmente, las inclinaciones son liberales y conservadoras.

METODOLOGÍA

Está investigación tuvo tres objetivos. En primer lugar, determinó los estilos de pensamiento que prefirieron 23 estudiantes de ingeniería de una determinada universidad chilena, los cuales formaron parte del curso "Cálculo I". Dichas preferencias fueron establecidas a través del instrumento llamado MSG Sternberg-Wagner Thinking Styles Inventory (Sternberg, 1997), el cual por medio de puntuaciones numéricas, mide psicométricamente cada función, forma, nivel, alcance e inclinación de los diferentes estilos señalados en su teoría. Este instrumento, es un cuestionario constituido por 104 preguntas, 8 por cada una de los 13 estilos: legislativo, judicial, ejecutivo, monárquico, jerárquico, oligárquico, anárquico, global, local, interno, externo, liberal y conservador. Cabe señalar, que dicho cuestionario fue realizado de manera individual, pero las preferencias por los estilos de pensamiento fueron establecidos a nivel de curso.

Como segundo objetivo, se diseñó una actividad de modelación matemática, que estuvo acorde a los estilos de pensamiento preferidos por dichos estudiantes y que buscó resignificar el concepto de función cuadrática. Los estudiantes realizaron dicha actividad de manera grupal, debido a que "los trabajos colectivos son el primer paso hacia la construcción social del conocimiento" (Cantoral, 2013, p.84).

El objetivo final de esta investigación, fue resignificar el concepto de función cuadrática, con ayuda del proceso evaluativo de dicha actividad.

RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO Y DISEÑO DE LA ACTIVIDAD

Como curso, existen altas o muy altas preferencias por los estilos Ejecutivo, Monárquico, Local y Conservador. Es decir, estos estudiantes no se caracterizan por crear fórmulas, sino más bien, por seguir reglas; sintiéndose cómodos en tareas en las que se les especifique lo que deben hacer y también el cómo hacer las cosas. En cuanto a la resolución de tareas, los estudiantes abordan los problemas desde una sola perspectiva, motivándose a llegar a una sola meta o necesidad, colocando atención solamente a actividades que le sean de su interés.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados arrojados tras la aplicación del instrumento, se diseñó una actividad que buscó poner en juego los elementos que forman parte de la función cuadrática, cuyo fin fue, entre otras cosas, hacer emerger el uso del vértice en una situación que guarda relación con su futuro quehacer profesional. En el transcurso de la actividad, los alumnos presentaron argumentos cuyas bases carecían, en muchos casos, de la formalidad matemática usual, lógica que forma parte del dME vigente en Chile. Contrario al proceso evaluativo tradicional, nuestra evaluación consideró válida toda forma de argumentación que permitiese aportar a la construcción de conocimiento y a la resignificación del concepto de función cuadrática. La mayoría de los estudiantes realizó la gráfica sin la necesidad de conocer la función, contrario a lo que nuestro dME establece: graficar la función, a partir de una función cuadrática conocida. Para los estudiantes, el uso del vértice emergió como una necesidad que les permitió no sólo responder a las preguntas planteadas, sino también, cambiar la apariencia perceptible de dicho concepto. La evidencia recolectada en esta investigación, nos permitió establecer que nuestro proceso de evaluación, junto con el diseño de la actividad, contribuyeron a resignificar el concepto de función cuadrática.

Referencias

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: gedisa.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20(1), 59-79. Recuperado de http://www.researchgate.net/publication/270905547

Sternberg, R. (1997). *Thinking Styles*. Ne w York: Cambridge University Press.

NOCIONES BÁSICAS SOBRE FRACCIONES MANIFESTADAS POR ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA BÁSICA

Macarena Valenzuela-Molina[1], Elisabeth Ramos-Rodríguez[2], Pamela Reyes-Santander[2]
Universidad Alberto Hurtado[1], Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[2]

Resumen: Nuestro trabajo da a conocer las nociones básicas del concepto fracción que fueron manifestadas por profesores de enseñanza básica en formación de una universidad chilena. El sustento teórico son las nociones básicas (Vom Hofe, 2014), las que son observadas en sus producciones escritas, y estudiadas cualitativamente. Los futuros profesores declaran el significado de la fracción como parte todo, sólo en su modelo continuo de área (círculos y rectángulos) y en un modelo continuo lineal (recta numérica), además de sus distintas representaciones: verbal, concreta, pictórica y simbólica. En cuanto a los fenómenos en que se plasma el uso de fracciones, sólo abarcan contextos matemáticos y personales. Nos proyectamos en una formación inicial docente con bases teóricas y matemáticas consistentes en el uso de significados, representaciones y fenómenos que dan sentido a las matemáticas en diversos contextos.

Formación de profesores, nociones básicas, fracción

INTRODUCCIÓN

El estudio comparativo "Teacher Education and Development Study: Learning to Teach Mathematics (TEDS-M)", el cual fue implementado en Chile con estudiantes de formación inicial docente (FID) de enseñanza básica el año 2008, señala la baja influencia de las instituciones chilenas sobre los conocimiento disciplinares y pedagógicos de los estudiantes en FID (Tatto, 2013). En Tatto (2013), se dan a conocer las dificultades que manifiestan los estudiantes FID en el conocimiento disciplinar matemático, tanto en el razonamiento con múltiples pasos y en relacionar varios conceptos matemáticos, comprender que existe un número infinito de números racionales entre dos números dados. Con lo que respecta al conocimiento pedagógico, los estudiantes FID que están bajo el promedio no son conscientes de concebir representaciones útiles y concretas para los conceptos numéricos. Evidenciadas las dificultades anteriores, debatimos si los estudiantes FID ostentan las nociones básicas (Vom Hofe, 2014) del concepto de número y qué sucede con su formación inicial, lo que nos lleva a la necesidad de profundizar en las nociones básicas que manifiestan los docentes en formación inicial.

La prueba INICIA, un estudio de medición y evaluación del futuro docente en Chile que enfrenta a los egresados FID, al conocimiento disciplinar y pedagógico en distintas áreas, muestra los bajos resultados en lo disciplinar (MINEDUC, 2015), estando fuera de las expectativas educativas en la comunidad educativa. Específicamente en el área de la matemática en Educación Básica en Chile, se observa escasos niveles de desarrollo de la actividad matemática (Espinoza, Barbé y Gálvez, 2011), además de, utilizar directamente el algoritmo convencional, sin hacer mención a otros procedimientos no convencionales. Esta evidencia, incrementa la necesidad de fortalecer la formación de los futuros docentes de educación básica, ya que su dominio disciplinario es requisito para enseñar en su quehacer

docente. Según los estudios anteriores, los estudiantes FID carecen de las nociones básicas de los conceptos que deben enseñar.

Desde esta problemática surge nuestro objetivo: conocer las nociones básicas del concepto fracción que fueron manifestadas por profesores de enseñanza básica en formación de una universidad chilena. Nuestro estudio pretende caracterizar las nociones básicas de los estudiantes FID, de qué manera las instituciones benefician o dificultan esta formación y proponer una metodología que integre las nociones básicas y el cambio de ellas en los estudiantes.

MARCO TEÓRICO

Los elementos teóricos de este estudio se basan principalmente en la idea de nociones básicas. Este concepto, describe la relación entre el contenido y el fenómeno de formación individual del concepto, se construye en base de ideas o representaciones internas, que permiten una acción operativa de la misma idea o representación mental, a nivel de representaciones matemáticas (vom Hofe, 2014). Vom Hofe, recoge las nociones básicas a través del tiempo y describe tres características principales de estas:

1. La constitución de un significado de un concepto matemático mediante la vinculación a experiencias, conocimiento familiar o por recurrir (mentalmente) a representaciones de las acciones realizadas.

En el caso específico de nuestro estudio, consideramos pertinente la interpretación propuesta por Kierem (1980), quien establece cinco significados del concepto fracción: a) La fracción como parte-todo considerándola como un todo (continuo o discreto) subdividido en partes iguales y señala la relación que existe entre el todo y un número designado de partes; b) la fracción como medida la reconoce como la asignación de un número a una región o a una magnitud (de una, dos o tres dimensiones), producto de la partición equitativa de una unidad, c) la fracción como cociente la refiere al resultado de la división de uno o varios objetos entre un número determinado de personas o partes, d) la fracción como operador es el de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente. Esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura asociada al uso de fracciones, e) la fracción como razón es la comparación numérica entre dos magnitudes.

2. La generación de una representación del concepto, la cual es mental y corresponde matemáticamente al concepto, esto se entiende como una internalización del concepto (siguiendo lo propuesto por Piaget), la cual permite la acción operativa a nivel del pensamiento.

Desde esta perspectiva, las representaciones respecto a las fracciones son las propuestas por Rojas (2014): Verbal (mitad, un medio, medio, uno de dos, media parte), , numérico (división indicada, par ordenado, razón, porcentaje, decimal), gráfico (recta numérica y el plano cartesiano), figural (una unidad dividida en partes iguales, cada parte representa una cantidad), material o concreta (regletas de Cuisenaire, cantidad como longitud, área o volumen, reglas de colores, tangram, etc.).

3. Capacidad de aplicación de la noción básica de un concepto al mundo real, en el sentido de modelar una situación real por medio de la noción básica, donde es posible reconocer la estructura real correspondiente con la estructura matemática. En el marco del proyecto PISA se plantean cuatro situaciones para clasificar las tareas matemáticas: personales, ocupacionales, sociales y científicas (OCDE, 2013), las que hemos considerado como aplicaciones de las fracciones. Además Rojas (2014) identifica dos contextos en los que surgen las diversas situaciones: medidas de magnitudes y relaciones concretas entre cantidades.

METODOLOGÍA

Desde el paradigma cualitativo, nuestro estudio es de tipo descriptivo interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), utilizando un análisis de contenido, donde las unidades referenciales son los conjunto de párrafos que tienen conexión o idea en común (Flick, 2004).

El contexto de este estudio se enmarca dentro de un acompañamiento didáctico en el Trabajo Final de Titulación de estudiantes de la carrera de Educación Básica, con mención en matemática de la Universidad Alberto Hurtado. Los sujetos en estudio son 16 estudiantes de último año, que preparan su Trabajo Final de Titulación, en la asignatura "Taller de Titulación" en la que se realiza el diseño, implementación y análisis de unidades didácticas que abarcan 8 a 10 horas pedagógicas, para ser realizada en un curso de enseñanza primaria en su práctica profesional. El Taller se realiza durante un semestre, una vez a la semana en un tiempo de 3 horas pedagógicas, en donde se reúnen los estudiantes con el profesor especialista en didáctica de la matemática.

Las categorías de análisis empleadas para el análisis de contenido de las producciones de los estudiantes, surgen de las nociones básicas: constitución del significado, generación de representaciones y capacidad de modelación que aparezcan en las planificaciones de los estudiantes. Tendremos en cuenta que con el análisis de datos pueden surgir categorías emergentes. El análisis de datos fue robustecido con la triangulación de expertos, tres investigadoras a cargo del proyecto.

RESULTADOS

Para esta comunicación analizaremos las producciones de un grupo de estudiantes que se enfocaron en las fracciones. El análisis evidencia elementos de las tres características de las nociones básicas: significado del concepto, uso de representaciones y aplicaciones.

1. Constitución del significado: Los futuros profesores se ciñen al significado de la fracción como parte todo, en donde aluden a la acción de división de un entero, sin embargo, no consideran cómo serán esas partes, si serán todas iguales o todas distintas. También indica que hay que considerar una de esas partes (tabla 1).

Unidad de análisis
En el caso de 1/3 dividimos el entero en tres partes y consideramos una de sus partes. El entero lo dividimos con rayitas verdes, en 3 partes y consideramos la parte que está marcada con rojo, es decir una de sus partes.

Tabla 1: Sobre el significado de fracción

En la siguiente expresión, sigue estando presente este significado de la fracción como parte de un todo, pero con un significado de la fracción más elaborada, respecto a las anteriores. En este caso la fracción contempla la acción de "dividir" en partes iguales. Sin embargo, no hay presencia de una significación más elaborada, entendiendo la fracción como el resultado de dos acciones "dividir" y "tomar", donde se dice cómo son esas partes y qué se hace con ellas. En general ninguno de los estudiantes fue capaz de decir ¿qué se hace con las partes?

2. Generación de representaciones: Los futuros profesores emplean cuatro tipos de representaciones verbal, concreta, simbólica y pictórica.

La tabla 2 muestra algunos ejemplos de las producciones de los futuros profesores sobre la generación de representaciones.

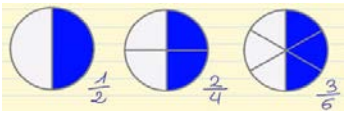
Contenido del texto	Tipo de representación
(alumno con hoja) Toma la hoja carta, dóblala por la mitad, ¿cuánto hay ahora?	Representación concreta con modelo continuo de área.
	Relación entre representación simbólica y pictórica, utilizando un modelo continuo lineal.
	Relación entre representación simbólica y pictórica, utilizando un modelo continuo de área.

Tabla 2: Generación de representaciones

Se observa que los futuros profesores consideran distintas representaciones, en las pictóricas reflejan un todo continuo, en un modelo de área, utilizando sólo círculos y rectángulos, todos relacionados con el significado de fracción como parte de un todo. Sin embargo, no se observan modelos discretos.

3. Capacidad de modelación: Los estudiantes de profesorado también debían proponer tareas para el tratamiento de fracción, donde de evidencia la tercera característica de las nociones básicas: la capacidad de aplicar el concepto de fracción. Los futuros profesores presentan tareas en contextos matemáticos y en contexto personales (tabla 3), pero no hay presencia de contextos laboral o educativo, social o público y científicos (OCDE, 2003).

Unidad de análisis

La mamá de pedro lo envía a la feria y le pide que compre 2/4kg de pera, 5/4kg de manzana y ¼ kg de plátano ¿Cuántos kilos de fruta compra Pedro?
Javiera repartió una torta en 10 pedazos, le regalo a María 3/10, a Juan 2/10 y a María José 4/10, pero María no se comió toda su parte y le devolvió 1/10 ¿Cuánta torta regalo? ¿Cuánta torta le quedo a Javiera?

Tabla 3: Ejemplo de tareas presentadas por los estudiantes

CONCLUSIÓN

A la luz de los resultados, observamos cómo los futuros profesores tienden a aludir a la acción de dividir el entero, sólo en uno de los casos, explicitan que esa división es en partes iguales que tiene que ver con una significación de acción, que da cuenta de la fracción como la acción de "dividir en partes iguales". Llama la atención la carencia de otros significados, ya que ningún estudiante logra una definición precisa, como indicar que la fracción es el resultado de dos acciones "dividir" y "tomar", no mostrando cómo son las partes y qué se hará con ellas.

La consideración de modelos continuos en desmedro de lo discreto, nos advierte una necesidad de replantearnos la formación de profesores de enseñanza básica, de manera de abarcar un abanico de herramientas en favor de los alumnos. De la misma manera nos cuestionamos el hecho de que los futuros docentes no hacen uso de contextos laboral o educativo, social o público y científico.

Este estudio contribuye a la formación de profesores, a través del diagnóstico sobre las nociones básicas de fracción que estos poseen, de forma de construir una formación basada en las nociones básicas, donde tenga sentido los conceptos, exista una variada gama de representaciones y se desarrolle la capacidad de modelar (Vom Hofe, 2014).

Referencias

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Hernández, R., Fernández C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw- Hill.

MINEDUC (2015). *Evaluación Inicia presentación de resultados 2014*. Santiago: MINEDUC. Consultado el 25 de enero 2016 en: http://www.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/19/2015/11/Presentaci%C3%B3n-Resultados-INICIA-2014.pdf

OCDE (2003). *The PISSA 2003 Assessment framework. Mathematics, Reading, science and problema, solving, knoweledge and skills*. Paris: OCDE.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos. Granada*, Universidad de Granada.

Vom Hofe, R. (2014). Primäre und sekundäre Grundvorstellungen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10.03. 2014 bis 14.03. 2014 in Koblenz.*

ESTUDIO DE CASO DE UN PROFESOR UNIVERSITARIO EN LA UNIDAD DE SUCESIONES

Paula Verdugo
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen: Se presenta un estudio de casos sobre el ETM idóneo de la enseñanza universitaria enfocados en la unidad de sucesiones. Dichos casos se han extraído de 13 grabaciones de clases. Los principales resultados evidencian la ausencia del teorema del enlace (caracterización del límite mediante sucesiones), y el constante uso de herramientas provenientes de las funciones de una variable real para trabajar problemas discretos.

ETM idóneo, sucesiones, discreto-continuo

INTRODUCCIÓN

En el marco de nuestra tesis doctoral sobre la transición enseñanza secundaria universitaria, en el ámbito del análisis, hemos decidido estudiar las sucesiones debido a que es un objeto de estudio tanto de enseñanza secundaria como de enseñanza universitaria, teniendo presencia en textos escolares, programas de estudios escolares y universitarios, lo cual nos permite realizar un estudio en ambos niveles educativos. En este trabajo nos enfocamos en mostrar los resultados que hemos obtenido de la enseñanza universitaria, nos centramos en analizar la enseñanza del profesor en la educación universitaria, con el propósito de identificar el uso de ciertos contenidos relacionados al ámbito de las sucesiones, los cuales detallamos más adelante.

METODOLOGÍA

El trabajo que se presenta es de carácter cualitativo, en donde se muestra y analiza el estudio del caso (Stake, 1999) de la enseñanza de un profesor universitario, bajo la mirada del ETM idóneo. Para ello, se ha extraído una muestra de 13 grabaciones de clases, y el material que documentamos aquí fue recogido de una de esas grabaciones de clases. El docente filmado posee Grado de Doctor en Matemática, con 11 años de experiencia en docencia. A dicho profesor lo denominaremos como profesor universitario 1 “PU1”. El curso grabado corresponde a un curso de cálculo II de tercer semestre de universidad para la carrera de ingeniería civil informática. Se ha escogido la clase de PU1 debido a la flexibilidad que hemos observado en este docente para realizar, sin mayores cuestionamientos, explicaciones de lo discreto por medio de lo continuo en la unidad de sucesiones. Para analizar el material escogido nos focalizamos en las explicaciones dadas por el docente, relativas a las herramientas provenientes del análisis de objetos continuos, y analizaremos cuáles son las posibles causas que llevan a PU1 a utilizar y/o cambiar hacia estas explicaciones para abordar problemas de sucesiones.

Espacio de Trabajo Matemático

El marco teórico considera la noción del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2011), el cual tiene por objetivo principal favorecer el funcionamiento del trabajo matemático en un contexto educativo (Kuzniak, 2014). Para definir el ETM se introducen dos planos. El plano epistemológico y el plano cognitivo estructuran el ETM apoyando la

comprensión tanto del modelo del trabajo matemático que se genera en éste, como también la articulación entre sus planos mediante distintas génesis (Kuzniak, & Richard, 2014). El plano epistemológico permite estructurar la organización matemática del ETM a través del dominio matemático en estudio. Consiste en tres componentes características de la actividad matemática, las cuales están en interacción en un contexto determinado. Estas componentes son: "representamen", "herramienta" (materiales o intelectuales) y un "referencial teórico" basado en definiciones y propiedades (Kuzniak, 2011). Mientras que el plano cognitivo estructura el ETM desde el punto de vista de la puesta en práctica del individuo. En este sentido, la visualización, la construcción y la prueba juegan un rol clave.

Además, el Espacio de Trabajo Matemático es profundizado en los siguientes tres ETM (Kuzniak, 2011), de las cuales consideraremos en este escrito: ETM de Referencia. La organización esperada de este espacio de trabajo es definido de manera ideal solamente sobre la base de criterios matemáticos. ETM Idóneo. El ETM de referencia debe ser acondicionado y organizado para volverse un espacio de trabajo efectivo e idóneo en una institución dada con una función definida". ETM Personal. El ETM idóneo debe ser utilizado por los estudiantes y también por sus profesores. Cada uno se apropia y lo ocupa con sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas. Este ETM es lo que llamamos un ETM personal.

ESTUDIO ETM IDÓNEO DE PU1

A continuación mostramos el estudio del ETM idóneo de PU1. Para ello, tal como se explicó en la metodología, el material fue extraído de la grabación de una clase que el profesor PU1 hizo sobre los criterios de convergencia de series. Escogimos esta clase debido a que PU1 analiza la convergencia de algunas sucesiones, y particularmente porque para ello, bifurca hacia un *referencial continuo*, tal como mencionado antes.

En este contexto, durante la clase, PU1 analizando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ por el criterio del cociente, luego de algunas operaciones, las cuales consisten en aplicar este criterio, llega a que $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$, y señala que sería bueno ver su gráfica. Para este efecto, PU1 dice que "se podría pensar $\frac{2}{\mathrm{n+1}}$ como una función continua, la cual podemos graficar". Dibuja entonces el gráfico y a partir de éste afirma que "claramente los valores de esta función van decreciendo", "se hacen cada vez más pequeños", de lo cual se desprende el valor del límite antes mencionado.

Se puede observar que PU1, estando en un *referencial de sucesiones* (discreto), bifurca su procedimiento hacia un *referencial de funciones* (continuo), verificando que esta sucesión es una "función decreciente". En términos del ETM se puede apreciar que se activa el polo del referencial discreto para bifurcar hacia uno continuo, y devolverse así hacia el primero.

En lo anterior, se puede observar que el docente trabaja dentro de dos paradigmas del análisis (Montoya Delgadillo & Vivier, 2016) que cohabitan: el AC (análisis calculatorio), dado que utiliza reglas del cálculo explícitas como el criterio del cociente, y en menor grado el paradigma AG (análisis geométrico), dado que explica gráficamente que la sucesión obtenida por este criterio es decreciente y convergente a cero.

Durante la misma clase, más adelante, PU1 analiza la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, utilizando el criterio de la raíz n-ésima, lo cual lleva a calcular el límite $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n!}}$. El docente destaca que este criterio no sería tan adecuado como el criterio del cociente para analizar la convergencia de esta serie, dado que el límite anterior es difícil de calcular. Sin embargo, igualmente PU1 pregunta a los estudiantes cuánto vale ese límite, y dice que para calcularlo es mejor calcular primero uno más fácil, a saber $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$. A continuación verifica que el límite anterior vale 1 evaluando numéricamente para n=1, 2, 3, 10, 100, 1000, viendo que la raíz n-ésima de *n* se acerca a 1. Más adelante, un estudiante pregunta cómo se demuestra que el límite vale 1. Observemos:

1. PU1: […] Lo que voy a hacer son bajo muchos supuestos ah, voy a hacer algunos cálculos, olvidándome momentáneamente de que es lo que yo necesito para hacer esos cálculos, y después me preocupo de eso […]

PU1 supone varias cosas, entre ellas, que el límite existe, que es un número real, que si el límite existe debiera ser no negativo, mayor o igual a cero.

2. PU1 : […] si este límite existe debiera ser no negativo, debiera ser un número mayor o igual que cero, porque esta función estoy suponiendo que x es, se va a más infinito, o sea x va a llegar un momento en que siempre es positivo, y por lo tanto esto no va a ser, no puede ser negativo el resultado, punto 1. Punto 2, […] como esto es positivo […] Entonces como este número es no negativo, positivo de hecho estrictamente, puedo tomar logaritmo natural. […] Si puedo sacarlo afuera, puedo hacerlo porque la función logaritmo natural es continua, ok?

Lo que en definitiva el profesor pretende asegurar es: primero, que el límite es estrictamente positivo para poder aplicar logaritmo natural; segundo, que el logaritmo y el límite se pueden intercambiar, debido a la continuidad de esta función (ver Figura 1).

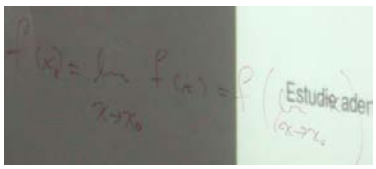
	Transcripción
	$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$

Figura 1: Propuesta de PU2

3. PU1: Entonces ese límite lo puedo tirar pa' fuera. […] Y ahora uso las propiedades del logaritmo natural. Y ahora fíjate que mágicamente, esto que está ahí tiene la forma de L'Hôpital, infinito sobre infinito, vale? Usando L'Hôpital aquí […], esto es el límite de las derivadas, uno sobre x y uno, […], y este límite es?, cero. O sea, conclusión, a qué has llegado? A que el logaritmo natural de L es cero, ¿cuánto vale L entonces? L vale uno, y ahora si puedo justificar todo lo que hice […]. O sea, el límite L es uno. Ahora date cuenta, esto lo hice para variables continuas, o sea x se mueve en todos los números reales. Pero si vale para x moviéndose en todos los números reales, va a valer también para la sucesión, o sea, cuando x sólo se mueve en los valores 1, 2, 3, 4, […]. Entonces ese límite es uno.

Además, como tercer punto, una vez dentro del límite, el logaritmo permite realizar una serie de operatorias, las cuales producen una forma indeterminada dentro del contexto de la Regla de L'hôpital; cuarto, por medio de la mencionada regla se calcula el límite; y quinto, del límite de una función de una variable real se devuelve al límite de la sucesión, para lo cual implícitamente el docente hace uso del teorema de la caracterización del límite mediante sucesiones.

CONCLUSIONES

PU1 en su discurso constantemente recurre a elementos continuos para trabajar con sucesiones (funciones de variable discreta), lo que hace notar la ausencia de varias herramientas (Kuzniak, Nechache y Drouhard, 2016), en este sentido nosotros nos preguntamos ¿ por qué a la hora de trabajar en un referencial de sucesiones se están obviando algunos axiomas y herramientas, tales como el axioma del supremo, la propiedad Arquimedeana, las desigualdades de Bernoulli, los cuales parecieran ser reemplazados por el uso de herramientas provenientes de funciones de una variable real, tal como la Regla de L'hôpital?

En esta misma línea, en relación al trabajo realizado en lo discreto, cabe cuestionarse ¿qué consecuencias tiene para el estudiante de este curso el hecho que PU1 recurra a herramientas de funciones de una variable real, sin ver explícitamente el teorema de la caracterización del límite mediante sucesiones? Ó quizá, efectivamente, sería más adecuado estudiar sucesiones, abarcando las herramientas utilizadas en ese referencial?

Además, se ha observado que PU1 realiza una propuesta (ETM idóneo) dentro de los paradigmas Análisis Geométrico apoyada en la visualización de un gráfico, y del Análisis Calculatorio, ya que sus procedimientos están basados estrictamente en la resolución de cálculos.

Es importante notar que PU1 no hace mención explícita del teorema de la caracterización del límite mediante sucesiones, pero implícitamente lo utiliza cuando dice, en el punto 3, que "si vale para x moviéndose en todos los números reales [el límite], va a valer también para la sucesión, o sea, cuando x sólo se mueve en los valores 1, 2, 3, 4,…".

A priori, no podemos señalar que este ETM idóneo sea inadecuado, pero sí podemos constatar que PU1 enfrenta el fenómeno discreto continuo, sin ser consciente ni cuestionarse de las consecuencias que posiblemente éste pueda traer a sus estudiantes.

Finalmente, cabe señalar que se ha observado que, a pesar de las diferencias entre los distintos ETM idóneos analizados, uno de los paradigmas predominantes es el análisis calculatorio y en mucho menor grado el análisis geométrico. Sería deseable comparar estos ETM idóneos con otros que incorporen el paradigma del análisis real.

Reconocimiento: Beca de Doctorado año 2015-2016 Conicyt (21151243), Beca Gastos Operacionales año 2015-2016 Conicyt (R.E.: 5359/2015)

Referencias

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*,**11**, 175–193.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, ZDM, Issue 2016 – 5. (à paraître)

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24. Recuperado el 12 de junio de 2014 de: Laboratoire de Didactique André Revuz (EA 1547), http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Annales_16.pdf

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J-P. (2016). *Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom***.** ZDM Mathematics Education. DOI 10.1007/s11858-016-0773-0.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, *17*(1), 1-16.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata.

INECUACIONES LINEALES IMPLÍCITAS, EN EL MEDIO EN QUE SE DESENVUELVEN LOS ESTUDIANTES DE 7º BÁSICO

Cinttia Escobar Meléndez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen: En el presente año, se implementaron ajustes curriculares para séptimo año básico, incorporando inecuaciones. El principal enfoque que tiene la subunidad de inecuaciones, es la caracterización de estas por medio de balanza, transitar de lenguaje natural al algebraico y viceversa, estando centrado en cómo resolver inecuaciones. Los datos de análisis corresponden a los recogidos mediante la implementación de un estudio de clases realizado en el curso Seminario Taller de Investigación (2016) y las tareas en del texto escolar. Continuando con el trabajo realizado en dicho curso, se propone un rediseño al estudio de clase, incorporando nuevas situaciones que complementen los recursos propuestos por el programa de estudio y textos escolares para la subunidad de inecuaciones, en el nivel ya mencionado. Para llevar a cabo dicho rediseño, en primer lugar se analizará las actividades que los textos escolares proponen y el programa de estudio, luego las tareas implementadas en el estudio, bajo el constructo Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Desigualdades, inecuaciones lineales, tarea, teoría antropológica de lo didáctico

INTRODUCCIÓN

El objeto desigualdad se presenta de manera explícita en primero y segundo de enseñanza básica, principalmente de carácter comparativo. En cuarto y quinto año básico se incorpora el objeto inecuación en paralelo con ecuación, donde el desarrollo de las inecuaciones es estos niveles enfatiza la representación concreta, pictórica y simbólica. Posteriormente y previo a trabajar inecuaciones en cuarto de enseñanza media, se hace una transición en séptimo y octavo de enseñanza básica, donde se retoman inecuaciones lineales y ecuaciones, pero el propósito en ambos cursos es la modelación, resolución y representación del conjunto solución en diferentes sistemas numéricos, donde se destaca la resolución algebraica de las inecuaciones.

La brecha entre el trabajo de ecuaciones e inecuaciones en dichos niveles, produce la comparación de la inecuación mirando el procedimiento que se trabaja en la ecuación. Teniendo presente que es tanto el tiempo dedicado al tránsito en los diferentes sistemas numéricos en tareas que involucran ecuaciones que la inecuación pierde protagonismo. Algunas de las investigaciones de Borello y Lezama (2011), apuntan a que no se hace referencia exclusivamente a la inecuación, dejando de lado el objeto matemático desigualdad y en consecuencia, la ausencia de la desigualdad no ha pasado desapercibida, ya que la inecuación se ha reducido a una técnica, la cual ha buscado ser encausada por la ecuación.

Lo anterior pone en evidencia que los estudiantes asimilan que la diferencia entre uno y otro, es el símbolo que escriben entre los dos términos que forman estos objetos, siendo ambos objetos comunes para los estudiantes en el medio en que se desenvuelven, que es necesario hacer la distinción entre ellos y la matemática tiene el rol de permitir a los estudiantes

adquirir competencias para aplicar diversas estrategias al resolver problemas que le permitan comprender el medio. Por ende, es indispensable que los estudiantes adquieran una sólida comprensión de los conceptos matemáticos que el discurso escolar manifiesta, en particular nos referiremos al objeto desigualdad, con el cual nos encontramos a diario pero quizás no la hemos distinguido como tal.

Cuando pensamos en límites de velocidad en carreteras, pagos mínimos de tarjetas de crédito, la temperatura mínima y máxima que se registra cierto día en un lugar específico, la restricción en algunos juegos en un parque de diversiones según estatura, entre otros, son algunos ejemplos donde se encuentra implícito este objeto.

En los cursos séptimo y octavo de enseñanza básica, se ha incorporado este año la resolución de inecuaciones y la interpretación de las soluciones de estas, aludiendo a la comparación con la ecuación.

Antiguamente en séptimo y octavo de enseñanza básica solo se trabajaba la ecuación, por ende el material que presenta actualmente la institución educativa es poca en cuanto a cantidad y que permita al estudiante generar su desarrollo en correspondencia a su experiencia implícita con los objetos desigualdad e inecuación. Por tal motivo el análisis de documentos ministeriales que se realiza es con el actual texto de estudio de séptimo año básico entregado por el ministerio de educación, el programa de estudio y las tareas diseñadas con el objetivo de conceptualizar las inecuación del tipo $x + b > c$, con b y c números enteros, en el estudio de clases implementado bajo el curso Seminario Taller de Investigación (2016), el cual fue rediseñado en cuatro oportunidades, según las aplicaciones realizadas.

Diseñando una secuencia de actividades que desarrollen competencias, para que los estudiante de 7mo básico resuelvan problemas de desigualdades e inecuaciones, que se encuentran implícitas en su entorno.

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo este estudio, surge la necesidad de crear un diseño de situaciones que atiendan a la articulación entre la inecuación y la desigualdad en el sistema de los números enteros.

Volviendo a los programas de estudio, en la subunidad de inecuaciones en séptimo año básico, el enfoque está en resolver inecuaciones y transitar entre el lenguaje natural y el algebraico. La propuesta de enseñanza de las inecuaciones en este nivel (MINEDUC, 2016), permite desarrollar técnicas para resolver inecuaciones de manera algebraica, dejando de lado la noción de desigualdad. La TAD pondrá en relieve la ruptura entre esta noción de desigualdad y la inecuación, mediante el diseño de tareas que cubran aquellos espacios que cumplan con mejorar este vínculo.

Contrastando de manera descriptiva las praxeología que los documentos institucionales y el plan de clases de inecuaciones lineales ya implementada proponen para la enseñanza-aprendizaje en la subunidad de inecuaciones lineales, con los recursos que surgirán de esta

rediseño para la adquisición de competencias y habilidades en la resolución de problemas que involucren la manipulación de desigualdades e inecuaciones.

Para el análisis de documentos, examinar el Programa de estudio de séptimo básico (MINEDUC, 2016) para verificar la pertinencia de las tareas expuestas con el texto de estudio de matemática de 7º básico (Merino, Muñoz, Pérez, y Rupin, 2016) y la organización matemática que se debe realizar en el aula. Y, en que ejes temáticos (Número, Álgebra, Geometría, Datos y Azar) se evidencia el uso de inecuaciones y desigualdades. La TAD pondrá en relieve la ruptura entre esta noción de desigualdad y la inecuación, mediante el diseño de tareas que cubran aquellos espacios que cumplan con mejorar este vínculo.

CONCLUSIONES

Del plan de clases implementado surge la dificultad que presentan estudiantes de séptimo año básico al modelar una situación que involucra una inecuación lineal de la forma $x + a > b$. Esto se hace presente al dar una ecuación lineal de la forma $x + a = c$, donde el número "c" es comparado con "b" mediante una desigualdad numérica incluyendo el símbolo "mayor que", incorporando en forma simultanea el símbolo "=" y el ">" en una sola expresión "$x + a = c > b$", la cual es evidencia empírica del estudio de clases. Y en cuanto al texto de estudio, este presenta tareas que hacen énfasis en primer lugar a la representación por medio de balanza y a la resolución algebraica, apuntando desde el primer momento (del encuentro con la tarea) mediante técnicas de resolución. Rediseñar las tareas del estudio de clases para llevar a cabo la conceptualización del objeto inecuación por medio del objeto desigualdad y a su vez que estas sean intermediarias con las tareas que propone el texto de estudio.

Referencias

Borello, M. & Lezama J. (2011). Hacia una resignificación de las desigualdades e inecuaciones a partir de la prácticas del profesor. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 24. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B., & Rupin, P. (2016). Texto del Estudiantes, Matemática 7° Básico. Santiago, Chile: Ediciones SM, Chile S.A.

Ministerio de Educación (2016). *Matemática Programa de Estudio Séptimo Básico.* Santiago de Chile: Ministerio de Educación.

METODOLOGÍA DE ESTUDIO DE LAS INTERACCIONES PROFESOR-ESTUDIANTES EN CLASES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN SUPERIOR

Quiroz, C.[1], Celis, S.[2]
CMM - CIAE, Universidad de Chile[1], Escuela de Ingeniería y Ciencias, Universidad de Chile[2]

Resumen: Este documento presenta una metodología para analizar videos de clases de resolución de problemas. El análisis está centrado en las interacciones que ocurren entre el profesor y sus estudiantes, relevando la importancia de la matemática discutida y expuesta por estos últimos. Se detalla la estructura de las clases, el objetivo de la metodología, su desarrollo, los elementos que la componen y el procedimiento para su aplicación.

Metodología de investigación, resolución de problemas, análisis de video, interacciones en sala

INTRODUCCIÓN

Este documento trata sobre la metodología de análisis de video que los autores en conjunto con otros investigadores[24] han desarrollado para estudiar las interacciones entre profesores y alumnos en sesiones de resolución de problemas en clases de matemática de una institución de educación superior. Este desarrollo se realizó en base a filmaciones de profesores de matemáticas obtenidas en el marco del desarrollo profesional ARPA (Activación de Resolución de Problemas en el Aula), perteneciente al Centro de Modelamiento Matemático (CMM) y el Centro Avanzado en Educación (CIAE), ambos de la Universidad de Chile. Estas filmaciones capturan la implementación de una actividad de resolución de problemas en el aula de profesores de matemáticas que imparten clases en primer año de educación superior (profesores en ejercicio), quienes participaron en ARPA.

Antes de describir la metodología en sí, se presenta un breve marco teórico relacionado con la resolución de problemas y discusiones matemáticas, luego se explica la estructura de las clases de resolución de problemas que realizaron los profesores participantes del desarrollo profesional. Finalmente, discutiremos la definición de objetivos, el proceso de desarrollo, y las principales dimensiones y componentes de la metodología para el análisis de videos. Esta metodología pertenece a una investigación en curso, en la Conferencia SOCHIEM, se espera presentar resultados preliminares obtenidos con ella.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA DISCUSIÓN MATEMÁTICA

La resolución de problemas es un elemento fundamental en el aprendizaje y enseñanza de la matemática (Kilpatrick et al., 2009; Niss, 2003), esta ofrece al estudiante la posibilidad de establecer conexiones entre distintos elementos matemáticos, y fomenta habilidades como representar, examinar y aplicar, además de la oportunidad de utilizar procesos avanzados de pensamiento matemático como analizar, abstraer, generalizar, conjeturar o sintetizar (NCTM, 2000). Los profesores e investigadores utilizan la resolución de problemas de

[24] Esta metodología fue desarrollada por Sergio Celis, Lisa Darragh, Carlos Quiroz, Camila Romero, y Valentina Toro, todos investigadores asociados a ARPA. Además, se contó con la asesoría de Vilma Mesa, University of Michigan.

formas diversas dependiendo de la concepción que se tenga acerca de qué es un problema y qué significa resolverlo. Se entenderá que el término "problema" no es una propiedad inherente a una actividad matemática sino que depende del tipo de interacción que se produzca entre la actividad y la persona que intenta resolverla. Luego, la manera en que dicha persona se enfrenta a la tarea de resolver un problema depende de su experiencia previa, esta entendida como el conjunto de conocimientos matemáticos, heurísticas, metacognición, su sistema de creencias y las prácticas educativas en las que haya participado (Schoenfeld, 1985).

Otro elemento que ha probado ser una de las prácticas centrales en educación matemática, y en la resolución de problemas en el aula en particular, son las discusiones plenarias (discusiones de curso completo). Estas demandan de los estudiantes otras habilidades que en general no son tratadas si un problema es resuelto de forma individual o en un grupo pequeño. Las principales demandas son: formalización de un lenguaje y notación para referirse a los elementos del problema y/o su solución, desarrollo de argumentación para defender o invalidar los procedimientos matemáticos implicados en el desarrollo de una solución, y entender las conexiones existentes entre diferentes estrategias que den respuesta al problema. Investigadores han estudiado la forma en que los profesores pueden guiar estas discusiones, por ejemplo cómo utilizar las respuestas de los estudiantes (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008), o cuáles son las instrucciones y acciones que pueden realizar con el objeto de generar o mantener riqueza en la discusión matemática (Kwon, Hoover, 2016).

CONTEXTO Y ESTRUCTURA DE LAS CLASES

En el programa ARPA los profesores participantes hacen y reflexionan sobre la implementación de la resolución de problemas en el aula. El desarrollo de esta metodología de análisis de video se realizó sobre datos obtenidos en un taller ARPA en el cual participaron 12 profesores de matemáticas de primer año de una institución de educación superior. Esta institución, interesada en la resolución de problemas dio todas las facilidades para que estas clases se desarrollen de forma normal dentro de los establecimientos y los planes de trabajo curriculares, asimismo para las filmaciones realizadas por el equipo. La estructura del taller consistió en un total de ocho sesiones presenciales mensuales. Entre las sesiones los profesores debieron implementar seis clases de resolución de problemas, de las cuales cuatro fueron filmadas. Estas filmaciones tuvieron el doble objetivo de entregar retroalimentación al profesor y usarse como datos de investigación. En total se obtuvieron 48 videos de clases de resolución de problemas, cuatro para cada profesor.

La estructura de la clase propuesta por ARPA consta de tres etapas fundamentales que son: Entrega, Activación-Consolidación y Discusión. En la fase de Entrega el profesor conforma a los alumnos en grupos de trabajo de forma aleatoria, les entrega el problema a resolver y explica cuáles son los criterios para considerarlo resuelto. En la fase de Activación-Consolidación los estudiantes trabajan en grupo e interactúan con el profesor cuando estos tienen dificultades o creen que ya resolvieron el problema, la idea de esta interacción es que el profesor no dé respuestas a los alumnos y solo los guie a través de preguntas. Finalmente en Discusión, alumnos representantes de los grupos exponen sus soluciones al resto del curso y se discute respecto de cómo se resolvió el problema.

OBJETIVO, DESARROLLO Y DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA

El objetivo de la metodología es abordar, identificar, diferenciar y relacionar distintas etapas y aspectos de la interacción profesor-estudiantes durante una sesión de resolución de problemas. En particular, se busca entender como las etapas y aspectos del inicio y transcurso de la clase impactan en la calidad y extensión de la matemática discutida por los estudiantes al finalizar la misma.

Aquí se presentan tres elementos fundamentales de la metodología: Principios de Análisis, Instrumento de Codificación, y Procedimiento de Codificación. Los Principios de Análisis sintetizan la mirada y el enfoque que los investigadores le dan a este. El primer principio es de baja *inferencia* y hace relación con que los aspectos a analizar en los videos requieran de poca interpretación por parte de los investigadores; el segundo es de *parsimonia* y consiste en consolidar y discriminar entre múltiples aspectos de interés para facilitar la codificación e interpretación de resultados. Por último el principio de *diferenciación de etapas* considera las distintas etapas de una clase de resolución de problemas como segmentos con una dinámica y análisis propios.

El segundo elemento de la metodología es el Instrumento de Codificación y contiene el trabajo que los investigadores han realizado identificando cuáles son los aspectos a analizar en cada una de las etapas de una clase de resolución de problemas[25]. Para diseñar el Instrumento se usó la literatura especializada (e.g., Tripp & Rich, 2012), la experiencia de los investigadores y una exhaustiva revisión previa de los videos. Se realizaron 12 reuniones de dos horas en donde se observaron videos, a la vez que se crearon versiones del Instrumento que se utilizaron para codificar nuevos videos y discutir su capacidad y dificultad de análisis. Lo anterior se volvió un proceso iterativo que dio origen a cinco versiones previas del Instrumento antes de consolidar la versión definitiva. Una de las primeras conclusiones obtenidas de la observación preliminar de los videos fue la convicción de que, a excepción de la etapa de Entrega, no se debe analizar las etapas de forma global, por el contrario, es necesario tener una unidad de análisis más pequeña en cuanto a su extensión temporal. Lo anterior llevó a que en la etapa de Activación-Consolidación se definiera a cada intervención que el profesor hace con cada grupo una unidad de análisis, y que en la etapa de Discusión se definieran dos unidades, la primera desde que el profesor cierra la fase anterior hasta que el primer estudiante comienza a presentar sus soluciones, y la segunda es cada una de las presentaciones que hacen los estudiantes frente al resto del curso. Los aspectos a analizar en cada una de las etapas son los siguientes:

- Entrega: formación de grupos, instrucción inicial y problema.
- Activación-Consolidación: general, de participación, de la solución, modificaciones al problema, de argumentación.
- Discusión: medio plenaria, inicio plenaria, control, participación plenaria, preguntas discusión, soluciones.

[25] Este puede ser solicitado a los autores y será presentado en detalle en la conferencia

En la fase de Entrega los aspectos están orientados a describir cómo el profesor realiza el inicio de la clase, cómo ordena los grupos aleatoriamente, qué tipo de instrucción inicial da y la manera en que les entrega el problema a los estudiantes. En la fase de Activación-Consolidación se describe cómo el profesor interactúa con el grupo, relevando aspectos como cuántos alumnos participan en cada intervención, el grado de interacción entre los estudiantes, las respuestas de los mismos, las nuevas tareas que el profesor otorga al grupo, y los argumentos de la solución. Además existe un aspecto "general" que engloba ciertas elementos, como por ejemplo, si la interacción fue solicitada o no. En la etapa de Discusión se describe cómo y quién presenta la matemática al finalizar la clase, cuánto cuestionamiento existe a esas exposiciones y cuántas estrategias son expuestas.

Cada uno de los aspectos antes señalados tiene una serie de variables y códigos. La escala más común es la binaria (0 ó 1) y dice si esa variable está presente o no, la segunda son escalas descriptivas que dan cuenta de la manera o cualidad en la cual dicha variable se llevó a cabo. Un ejemplo concreto de lo anterior es el siguiente, en la fase de Discusión uno de los aspectos es "Control" y dos variables pertenecientes a Control son "Los estudiantes utilizan el medio (pizarra)" y "Manejo de errores (por el profesor)", la primera tiene una escala binaria, en cambio el segundo tiene una escala descriptiva: (a) No Aplica, (b) Corrige inmediatamente, (c) Hace preguntas sobre el error, (d) Deja a los alumnos descubrirlos. El ejercicio de completar cada aspecto para cada una de las etapas es lo que los investigadores llaman "Codificación del Video."

Finalmente, el último elemento de la metodología es el "Proceso de Codificación" que consiste en cómo los investigadores realizarán la codificación. Se ha definido una iteración sucesiva de análisis. La primera observación solo centrará la atención en ubicar el momento en que ocurren y la duración de cada una de las unidades de análisis dentro del video, posteriormente los siguientes codificadores, de forma independiente realizarán la codificación por etapas, para luego discutir en pares y consensuar criterios.

CONCLUSIONES

En este punto de la investigación se ha logrado diseñar un instrumento con el cual analizar clases de resolución de problemas (con la estructura antes señalada), además de fijar las variables que parecen relevantes al momento de entender lo que ocurre en ellas. La siguiente etapa consiste en analizar las relaciones existentes entre estas variables gracias a la información de la codificación, y determinar cómo influyen estas en la riqueza de la matemática expuesta por los estudiantes.

Referencias

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2009). The strands of mathematical proficiency. In *Adding it up: Helping children learn mathematics* (7th ed., pp. 115-155). Washington, DC: National Academy Press.

Kwon, M., & Hoover, M. (2015). Studying the work of leading a mathematics discussion: Establishing mathematical richness. *Paper presented at the 2015 Annual Association of Mathematics Teacher Educators Conference, Orlando, Florida*.

NCTM. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática.* España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. *3rd Mediterranean conference on mathematical education*, 115-124.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press Inc.

Stein, Engle, Smith, & Hughes. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*(10), 313-340.

Tripp, T. R., & Rich, P. J. (2012). The influence of video analysis on the process of teacher change. *Teaching and Teacher Education, 28*(5), 728–739.

EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO COMO ARTICULADOR ENTRE LOS MODOS SGC Y AO DE LA DERIVADA EN LO LOCAL

Irma Pinto Rojas[1], Marcela Parraguez González[2]
Universidad Católica del Norte[1], Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[2]

Resumen: Desde un estudio histórico y epistemológico se sustentan los modos de pensar la derivada con base en un referente teórico análogo a los Modos de Pensamiento de Anna Sierpinska, de donde emerge un modelo sistémico para la comprensión de ella. Desde una perspectiva local de la derivada, las componentes de este modelo se han definido como: Los modos Sintético-Geométrico-Convergente (SGC), Analítico-Operacional (AO) y Analítico-Estructural (AE) de la derivada, cuya comprensión será entendida como la capacidad del aprendiz para articular los modos definidos. Se presenta en esta comunicación, el triángulo rectángulo como un elemento geométrico que permite articular los modos SGC y AO, validado con evidencia empírica a través de una entrevista en profundidad a un matemático docente e investigador.

Modos de pensamiento, modelo sistémico, articulador, comprensión, derivada

INTRODUCCIÓN

El aspecto local y global de la derivada se fue manifestando en un entorno científico de más de 200 años de evolución, (Bourbaki, 1972). Desde un análisis histórico y epistemológico, Grabiner (1981), muestra que el concepto de derivada primero fue usado, después fue descubierto, investigado y finalmente definido, un proceso complejo donde se evidencian las distintas etapas y perspectivas que han permitido el desarrollo del cálculo diferencial, en este sentido las etapas consideradas en la investigación de Grabiner (1981), se han dividido en: (1) la génesis de la derivada, (2) la derivada en la época medieval e inicios de la edad moderna, (3) la búsqueda del rigor y la formalización matemática de la derivada.

La formalización de lo infinitamente pequeño establece una crisis paradigmática en los matemáticos entre los siglo XVII-XIX, el rigor matemático pone en conflicto los argumentos defendidos en torno a la justificación matemática de la existencia de límite, el "nudo teórico" usado de manera intuitiva, el cociente de diferencias no tenía la consistencia matemática, se necesitaba la continuidad, la convergencia y la justificación consistente de este cociente que se aproxima a cero, la interpretación intuitiva de un número infinitamente pequeño como una variable que tiende a cero, es una concepción instrumental defendida por matemáticos del siglo XVII, cuya razón de ser consistió en el estudio de las funciones y sus derivadas para resolver problemas de fenómenos de la física, geometría y la mecánica. Estas aplicaciones de la derivada brindaban resultados que mostraban grandes logros en el avance científico, (Grabiner 1981), sin embargo no estaba resuelto el problema de "lo infinitamente pequeño". El Cálculo infinitesimal dio por primera vez un tratamiento claro y potente de la derivada en lo local en 1823, cuando Cauchy tomó el viejo concepto de cociente diferencial, y le dio un nuevo significado, desde donde emerge una visión local de la derivada, cuya consistencia está dada por la definición épsilon –delta del límite. En el área de la didáctica de la matemática, las investigaciones reportan la existencia de dificultades asociadas a la comprensión del límite, considerado como un obstáculo epistemológico, (Sierpinska 1985) y

son variadas las perspectivas teóricas que consideran la derivada como principal objeto de estudio, de acuerdo con Sanchez-Matamoros, García y Llinares (2008), se abren caminos para investigar la relación entre los aspectos tanto global (función derivada) como el aspecto local (derivada en un punto), tal relación podría ser determinante en la superación de las dificultades en relación a la comprensión de la derivada. Es de interés para esta investigación indagar en la comprensión de la derivada en lo local, con base en un modelo sistémico cuyas componentes están organizadas de tal forma que pueden interactuar y relacionarse, para explicar e interpretar la comprensión que un sujeto muestra para la comprensión de la derivada. Tomando como referente el marco teórico "*Los Modos de Pensamiento*" desarrollado por Sierpinska para el Álgebra Lineal, (Sierpinska 2000), se levantaron tres modos de pensar la derivada, en lo local, que son las componentes que definen al modelo y explican la comprensión del concepto en estudio. Esta comprensión se entenderá como la capacidad que tiene un sujeto para articular los tres modos de pensar que conforman el modelo. El propósito de este escrito es mostrar un elemento articulador entre dos de estos modos de pensar la derivada, junto con una técnica de recogida de datos, que permite la validación del articulador a través de una entrevista en profundidad.

MARCO DE REFERENCIA. LOS MODOS DE PENSAR LA DERIVADA EN LO LOCAL

Este marco de referencia corresponde a un modelo sistémico para la comprensión de la derivada, que relaciona el aspecto local y global de la derivada y sus modos de comprensión respectivamente, modelo que ha sido el resultado de la evolución de una investigación para los Modos de Pensar la derivada, iniciada como una variación del marco teórico Los Modos de Pensamiento de Anna Sierpinska, reportado en, Pinto y Parraguez (2015).

Modo Sintético-Gráfico-Convergente (SGC)

El contexto geométrico de la derivada como la pendiente de la recta tangente en el análisis histórico y epistemológico, (Bourbaki 1972), muestra la diversidad de puntos de vista sobre la noción de recta tangente, así también la recta tangente es la noción matemática que esta investigación considera como una componente fundamental para conseguir la imagen directa, observable del concepto de derivada, característica que Sierpinska, (2000) da al pensamiento practico del modo Sintético- Geométrico (SG). (Figura 1).

De acuerdo con Canul, E.; Dolores, C y Martínez-Sierra, G. (2011), una concepción geométrica global de la tangente, en la definición de Euclides, refiere a la tangente de una circunferencia, como*: Una línea recta es tangente a una curva cuando tenga un punto en común con la curva, no se puede pasar por este punto ninguna recta entre ella y la curva*. Sin embargo, para el propósito de construir rectas tangentes a la curva en esta investigación, esta definición presenta dificultad en la comprensión, dado que la curva con puntos de inflexión no tendría posibilidad de tangente, la concepción euclidiana se torna inadecuada, (Canul et al. 2011). Es necesario entonces considerar una definición de tangencia que suponga la tangencia desde lo local. En esta perspectiva, se considera entonces, para poder trazar tangentes a estas nuevas curvas, el punto de vista desarrollado por D´Alembert (1717-

1783), para el logro de la representación del concepto de derivada por medio de la tangente que concuerda con la definición propuesta por Leibniz.

Modo Analítico -Operacional (AO)

Para definir la derivada en términos de la definición de límite, Cauchy considera el límite de la relación de las diferencias $[f(x + i) – f(x)] / i$ en un intervalo de continuidad de f (x). Se necesita de la continuidad para $f(x + i) – f(x)$ e i puedan tanto "acercarse indefinidamente y al mismo tiempo el límite cero", o lo que es equivalente, "cantidades infinitamente pequeñas." Cauchy nunca indica explícitamente esto como un teorema, cada función diferenciable debe ser continua. Como lo habían hecho muchos de sus predecesores, que aunque el numerador y el denominador de la razón f (x + i) – f (x) / i es cero ", la relación en sí misma puede converger a otro límite, ya sea positiva o negativa", que cuando existe, tiene un valor definido para cada valor particular de x, para indicar esta dependencia, se da a la nueva función el nombre de la función derivada y se designa con la ayuda de un acento por la notación *y*' o *f' (x)*; la frase "este límite, cuando existe" ejemplifica la actitud rigurosa de Cauchy. Tal vez la calificación "cuando el límite existe" sólo estuvo motivada por el comportamiento de las funciones conocidas en puntos aislados, pero su lenguaje era lo suficientemente general para abrir toda la cuestión de la existencia o no existencia de derivadas, (ver Figura 1).

Modo Analítico - Estructural (AE)

Los modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos y dependen de los tipos de relaciones y de los objetos evocados por el sujeto en el momento de resolver una tarea, (Parraguez 2012), por tal razón este modo considera los indicadores y las propiedades que caracteriza a la pendiente en relación con la recta tangente y la curva (ver Figura 1).

Se presentan tres modos que permiten describir la comprensión de la derivada en lo local:

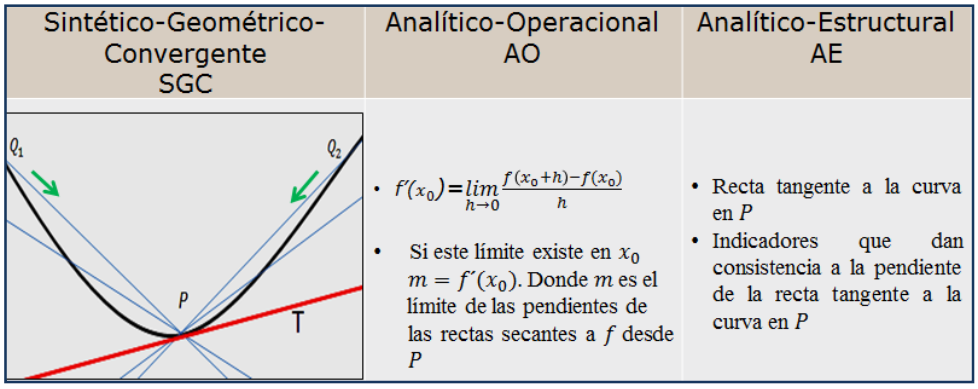


Fig. 1. Sintético-Geométrico -Convergente (SGC), el Modo Analítico-Operacional(AO) y el Modo Analítico-Estructural (AE) del concepto de derivada.

Para comprender la derivada en lo local, se deben articular los tres modos presentados en Figura 1, describir y validar dichos elementos es el propósito de esta investigación. En la Figura 2, se muestra el diagrama que guiara la búsqueda, para ello se plantea la siguiente pregunta ¿cuáles son los elementos articuladores entre los aspectos Sintético-Geométrico-

Convergente, Analítico-Operacional y Analítico-Estructural, que permiten la comprensión del concepto de derivada?

Diagrama que representa la búsqueda de articuladores

Fig. 2. La relación de los articuladores con los modos definidos

INSTRUMENTOS

Esta comunicación muestra un elemento articulador entre el modo SGC y AO, junto con la evidencia empírica, con un instrumento centrado en una entrevista en profundidad a un investigador y profesor de una universidad chilena. La transcripción de la entrevista por episodios, da cuenta del triángulo rectángulo declarado como un articulador entre el modo SGC y AO de la derivada. Se debe resaltar que los modos de la Figura 1, fueron mostrados en tarjetas sin rótulos y nombrados como aspecto 1, 2 y 3 de la derivada, para no influir en las respuestas del informante. En lo que sigue se muestra partes de dicha entrevista.

[1ENT]: ¿Qué elementos de la matemática, piensa usted que relacionan estos aspectos de la derivada?

[2PM1] Primero es que usted puede fijar el *f(x)* del punto *P* y puede decir que *f(x+h)* es el extremo del triángulo, en conexión con el punto *Q*, o puede ser mirando cualquier punto del otro lado, a la izquierda o derecha de *P*. Con relación al cociente, usted, tiene un triángulo, con eso estamos pensando en el límite, con relación al cociente, usted, tiene un triángulo y con eso relaciono, el valor de *h* que es lo que define el cateto del triángulo.

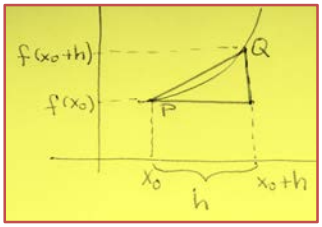


Fig. 3. Articulador del modo SGC y AO

El ángulo de tangencia da exactamente la pendiente de la recta tangente, cuando *h* tiende a cero. Para mí el concepto que hace la ligazón entre los dos es perfectamente el triángulo rectángulo, porque estoy usando implícitamente que el ángulo está formado entre dos catetos del triángulo.

REFLEXIONES

El triángulo rectángulo (Figura 3), es el elemento geométrico que articula el modo SGC y AO desde la perspectiva local de la derivada y se corresponde con el triángulo característico de la perspectiva leibiziana, la curva como una poligonal de lados infinitesimales.

Referencias

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de la historia de las matemáticas.* España: Alianza Editorial.

Canul, E.; Dolores, C. y Martínez-Sierra, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 14(2), 173-202.

Grabiner, J. (1981). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus.* Cambridge, Massachusetts and London. England: M.I.T. Press.

Parraguez, M. (2012). *Teoría los modos de pensamiento. Didáctica de la Matemática*. Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría Los Modos de Pensamiento, sustentado en la epistemología de Cauchy. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 28(1), 337-334.

Sánchez-Matamoros, G. ; García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 11(2), 267-296.

Sierpinska, A. (2000). On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra. En *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion ded límite. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. 6(1), 5-7.

OPORTUNIDADES PARA MEJORAR LA CALIDAD DE LAS CLASES EN MATEMÁTICAS

Carmen Gloria Espinoza, Lisa Darragh, Armando Peri
CMM - CIAE, Universidad de Chile

Resumen: Esta comunicación breve presenta el análisis de clases de matemáticas con actividades de resolución de problemas de seis profesores que han participado de un programa de desarrollo profesional centrado en el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas en las aulas. Esta breve exploración da indicios de una posible mejora en la calidad de las clases de matemáticas, invitándonos a pensar en un estudio mayor.

Análisis de clases, calidad, resolución de problemas, desarrollo profesional

INTRODUCCIÓN

En Chile una gran cantidad de profesores del sistema público son evaluados cada año por el Sistema de Evaluación del Desempeño Profesional Docente, Docentemás (DM), en donde una de las instancias de evaluación corresponde a la grabación de una clase de 45 minutos. Si bien esta clase es especial porque resulta ser parte de una evaluación y puede distar de las clases que comúnmente hacen los profesores cuando no son grabados, podemos tomar estas clases como un ejemplo de "buenas clases" por lo que serían una muestra de lo que los docentes consideran importante dentro del aula. En Chile se han desarrollado varios estudios sobre la base de estos videos: Araya & Dartnell, 2009; Preiss et al., en prensa; Radovic & Preiss, 2010; Preiss, 2010; entre otros. Dichos estudios han logrado caracterizar las clases de matemática en Chile. Por ejemplo Preiss (2010) reporta que el discurso docente predominante en las salas de clases está focalizado en procesos de ensayo y recuerdo mecánico: las clases tienden a estar organizadas alrededor de la práctica repetida de problemas matemáticos, donde los profesores realizan un ejemplo en la pizarra y luego los estudiantes repiten el proceso mostrado por el profesor en ejercicios similares. Por otra parte, los estudios antes mencionados han logrado identificar el tipo de interacciones que se producen con preguntas dentro del aula, en particular se constata que las preguntas con que los profesores interactúan con los estudiantes son generalmente cerradas, que los seguimientos son de bajo potencial meta-cognitivo y que las preguntas que promueven el habla acerca de los procedimientos matemáticos son escasas

Iniciativa ARPA

Es en este escenario donde surge la iniciativa "Activando la Resolución de Problemas en las Aulas" (ARPA) que busca capacitar a profesores en la Resolución de Problemas (RP) mediante talleres de Desarrollo Profesional (DP) efectivos, los cuales provean a los docentes las habilidades matemáticas del currículo, centradas en la RP, que signifiquen un cambio en su percepción de la matemática y de su aprendizaje, y que produzcan un cambio consecuente en su acción en el aula. ARPA propone una estrategia de DP centrada entre pares - Resolución de Problemas para el Aula (RPAula – 30 horas en 8 sesiones durante un año).

Junto con el programa de DP hay varias investigaciones sobre la efectividad del DP, cambios en la práctica, creencias y para buscar evidencias de más calidad en las clases de matemáticas de los profesores participantes en el DP.

Schoenfeld ha desarrollado un minucioso y extenso trabajo tanto en la resolución de problemas como en la identificación de las actividades importantes en las clases de matemáticas, esto último fue lo que le permitió capturar las dimensiones de la enseñanza, necesarias y suficientes, que permiten el análisis de clases de matemáticas, en un esquema o rubrica de observación de fácil aplicación (TRU Math). Las dimensiones consideradas por Schoenfeld (2013) en la rúbrica TRU Math son:

- Foco Matemático, coherencia y exactitud. ¿En qué medida se discuten las matemáticas clara, correcta y bien justificada (ligada a fundamentos conceptuales)?
- La demanda cognitiva. ¿En qué medida interacciones en el aula crear y mantener un ambiente de desafío intelectual?
- Acceso. ¿En qué medida las estructuras de actividad de aula invitan y apoyan la participación activa de la diversidad de los estudiantes en el aula?
- Agencia, Autoridad y Responsabilidad. ¿En qué medida los estudiantes tienen la oportunidad de hacer conjeturas matemáticas, explicaciones y argumentos, el desarrollo de la voz (la agencia y la autoridad) mientras que se adhiere a las normas matemáticas?
- Usos de la Evaluación. ¿En qué medida se suscitó el razonamiento del estudiante, desafió y refinados?

Estas 5 dimensiones cubren todos los puntos a mirar en las clases de matemáticas permitiendo evidenciar la calidad de las clases de los profesores participantes de los talleres RPAula.

METODOLOGIA

Los objetivos iniciales de la investigación eran (1) mirar los cambios en las clases regulares o cotidianas de matemáticas y (2) ver la calidad de clases de matemáticas en las que se realiza una actividad de resolución de problemas en el aula (aRPa). Para ello se observaron los videos de profesores en de una clase regular de matemáticas al comienzo del curso de DP, una clase regular entre la penúltima y última sesión del taller y la implementación de la sexta aRPa, utilizando una traducción de la rúbrica TRU Math. Para esta comunicación, el objetivo es el segundo (2)

Elegimos la rúbrica TRU Math porque creemos que el pensamiento o concepción de Schoenfeld, en base a su arduo y extenso trabajo y acorde a la literatura actual, es similar a la mirada ARPA y por ende se asemeja a lo que consideramos una clase de calidad.

Muestra

Durante el año 2015, el taller RPAula se dictó en paralelo para 13 grupos de profesores de varias ciudades del país, de los cuales 8 fueron investigados. Se seleccionó una muestra aleatoria de 3 profesores por taller, los que fueron grabados en distintas instancias durante el

año. Además, se grabaron 3 clases (a todos los participantes de los talleres) en las que se realizaba una actividad de Resolución de Problemas en el aula (aRPa) preparada en la sesión del taller. Para este estudio se observó solo a 6 de los 24 posibles profesores ya que no todos cumplieron con los requisitos de grabaciones por diversos motivos, entre los que destacan, el paro de profesores, licencias médicas, deserción de los talleres, entre otros.

Para medir la calidad de las clases de matemáticas, la rúbrica TRU Math fue traducida al español y adaptada en algunos aspectos para adecuarse al contexto de las clases chilenas. Los videos observados fueron segmentados en episodios de 1 a 5 minutos, dependiendo de la categoría de actividad (tiempo muerto, trabajo individual, grupos pequeños, toda la clase, presentación de estudiante). Los autores codificaron cada episodio de los videos independientemente y luego compararon y consensuaron. De acuerdo a la puntuación de Schoenfeld, de 1 (baja calidad) a 3 (alta calidad), se da en cada uno de las cinco dimensiones durante cada episodio.

RESULTADOS

La tabla de abajo muestra la cantidad de tiempo en cada tipo de actividad en las clases observadas.

	Tiempo muerto	Trabajo individual	Actividad clase completa	Trabajo grupo pequeño	Presenta-ción estudiante	Tiempo efectivo	Tiempo evaluado	Promedio tiempo total (minutos)
Pre	21%	33%	29%	6%	11%	79%	46%	84,26
Post	14%	31%	49%	2%	3%	86%	55%	73,59
ARPA	12%	4%	8%	54%	22%	88%	84%	59,65

Tabla 2: Resumen de Actividades

Al mirar el tipo de actividad de las clases (Tabla 2), los resultados muestran un gran aumento de trabajo en grupo en las clases con ARPA (aumenta de 6% a 54% del tiempo de la clase destinado a trabajo en grupos pequeños). Lo que muestra que en clases con ARPA se realizan actividades que no son habituales en las clases cotidianas o regulas como por ejemplo: trabajo en grupos pequeños y presentación de estudiantes disminuyendo el trabajo individual y/o actividades de la clase completa.

Dentro de los elementos que constituye un aRPa, se trabaja solo en grupos pequeños y se finalizan con presentaciones de estudiantes, por ende se justifican los altos porcentajes promediados en esas actividades.

En la tabla de abajo se muestran los promedios de las 5 dimensiones.

	Matemática	Demanda Cognitiva	Acceso	Agencia	Uso de Evaluación	Total
Pre	1,96	1,66	2,03	1,31	1,13	8,09
Post	1,74	1,39	2,12	1,29	1,16	7,69
ARPA	2,08	2,14	2,25	1,72	1,69	9,88

Tabla 1: Promedios en cada dimensión

Los resultados presentados en esta comunicación representan los promedios obtenidos de los 6 profesores de la muestra. Los resultados observados son que en todas las dimensiones de la rúbrica TRU Math, las clases con ARPA tienen una puntuación levemente mayor a las clases cotidianas o regulares de los profesores tanto en las observaciones Pre como en las observaciones Post (Tabla 1), destacando principalmente en la dimensión “demanda Cognitiva”.

En la observación de los videos hemos verificado que en las clases, los profesores tienden a ser muy protagonistas y entregar tareas bastante procedimentales, dando mucha ayuda y restringiendo a los estudiantes a producir respuesta cortas de confirmación o negación y/o de resultados directos. Sin embargo en las observaciones de clases con aRPa, los profesores entregan un problema a los estudiantes (no un ejercicio) y la interacción con ellos requiere una respuesta más elaborada. Por ejemplo, los profesores preguntan el por qué, y dan el tiempo a que los estudiantes elaboren o justifiquen sus respuestas.

CONCLUSIONES

Existen algunas limitaciones con este estudio, por ejemplo:

Dado que la muestra es pequeña, los resultados son inestable e implica que no se pueden confirmar los resultados, pero sí se puede dar una visión de lo que puede suceder. Esta breve exploración a las clases con ARPA nos permite pensar en un estudio mayor.

Una limitación que hemos observado en la rúbrica, en el caso de comparar clases normales o regulares de matemáticas versus una clase con ARPA, es que esta no permite codificar o evaluar mientras la actividad se realiza bajo trabajo individual, ya que esta categoría o tipo de actividad no implica que los estudiantes no estén realizando una tarea de alta demanda cognitiva, por ejemplo, sin embargo, la rúbrica expresa que en este tipo de actividades no se codifica.

Creemos que ARPA da oportunidades de realizar actividades que no son comunes o frecuentes en las clases chilenas, por ejemplo, el trabajo en grupos pequeños y la presentación de estudiantes. La RP permite dar libertad a los estudiantes sin restringuir la matemática a un hecho simplemente procedimental, lo que colabora tanto generar una mayor demanda cognitiva como la agencia del aprendizaje.

Producir cambios en la practica de los profesores es un gran desafío, si bien los profesores de observados han participado durante 8 meses en un programa de DP, solo han realizado 6

aRPas, por lo que creemos que aun falta mas practica en aRPas para considerar tener un mejor puntaje en la rubrica de Schoenfel. Esperamos que mientras mas implementaciones de aRPas realicen estos profesores mejor será la calidad de estas.

Referencias

Araya, R., & Dartnell, P. (2009). Saber pedagógico y conocimiento de la disciplina matemática en docentes de educación general básica y media. In *Selección de investigaciones primer concurso FONIDE: evidencias para políticas públicas en educación* (pp. 157–198).

Preiss, D. (2010). Folk pedagogy and cultural markers in teaching: Three illustrations from Chile. In D. Preiss & R. J. Sternberg (Eds.), *Innovations in educational psychology: Perspectives on learning, teaching, and human development* (pp. 325–356). New York, NY: Springer.

Radovic, D., & Preiss, D. (2010). Discourse Patterns Observed in Middle-School Level Mathematics Classes in Chile. *Psykhe*, *19*, 65–79.

Schoenfeld, A. (2013). Classroom observations in theoryand practice. *ZDM Mathematics Education, 45*, 607–621.

SISTEMA DE ECUACIONES CUADRÁTICAS: UNA RECTA Y UNA PARÁBOLA, COMO UN OBJETO MATEMÁTICO DESDE APOE

Rodrigo Lazcano , Patricia Vásquez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen: La propuesta consiste en realizar un análisis de como 3 estudiantes logran construir el concepto de sistema de ecuaciones cuadráticas (una recta (R) y una parábola (P)) y cuáles son los mecanismos mentales necesarios para lograrlo, a través del marco teórico APOE con el propósito generar una descomposición genética personal para cada informante. Todo esto por medio de los datos obtenidos en un estudio de clases y validados por medio de estudiantes que ya posean los conceptos previos para el objeto de estudio.

Sistema de ecuaciones cuadráticas, APOE, descomposición genética, estudio de clase

INTRODUCCIÓN

En la educación secundaria de Chile se aprecia que los contenidos de ecuación de la recta y ecuación de la parábola no se aúnan en un solo contenido, además el conocimiento actual en el aula se caracteriza por la resolución de ejercicios, donde el desarrollo de estos mantiene una preponderancia asociada al cálculo y al desarrollo de ciertos algoritmos que suponen una mecanización del conocimiento, dejando de lado habilidades como el análisis. De esta manera se generó una situación que aborda ambos contenidos generando así un sistema de ecuaciones, la que fue implementada por medio de estudios de clases. Estas implementaciones fueron realizadas por 4 profesores, en diferentes lugares y con distintos estudiantes de tercer y cuarto año de educación media.

De acuerdo a los resultados obtenidos surgió la inquietud: ¿Qué esquema mental realiza el estudiante para lograr comprender el concepto de sistema de ecuaciones cuadráticas (R y P)? ¿Cómo interiorizan el concepto de sistema de ecuaciones cuadráticas (R y P), como un objeto o como un proceso?, estas preguntas podrían ser posibles candidatas a preguntas de investigación, es decir, la investigación tendería hacia un enfoque mayormente de corte cognitivo, específicamente por medio del marco teórico APOE (*Acción, Proceso, Objeto y Esquema*) (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa., Trigueros y Weller, 2014)

Durante la implementación se logra identificar que los estudiantes presentan dificultades al resolver el sistema de ecuaciones cuadráticas, ya que este no se encuentra presente dentro de los contenidos mínimos obligatorios establecidos por el ministerio de educación, no obstante, luego de algunas devoluciones gran parte de los estudiantes lograron obtener e interpretar los resultados correspondiente al sistema de ecuación implícito. Algo interesante que destacar es que los estudiantes lograron resolver el sistema de ecuación en diferentes registros de representación semiótica (Duval,1988).

Para finalizar se debe tener en cuenta que este concepto (sistema de ecuación) es la base para poder avanzar hacia la comprensión del algebra lineal y los espacios vectoriales, por lo cual se hace indispensable que los estudiantes logren sobrepasar estas dificultades con el propósito de llegar a un aprendizaje que les permita desenvolverse de manera óptima frente a estos nuevos conocimientos.

MARCO TEÓRICO

APOE (*Acción, Proceso, Objeto y Esquema*) (Dubinsky, E. y D. McDonald, 2001) es una teoría constructivista basada en los estudios desarrollados por Piaget sobre el mecanismo de la abstracción reflexiva; este mecanismo permite describir la construcción de objetos mentales. En tanto la abstracción reflexiva visible a través de la teoría por medio de los mecanismos de: interiorización, generalización, coordinación, encapsulación y reversión. En la Figura 1 se muestran algunas construcciones y mecanismos mentales.

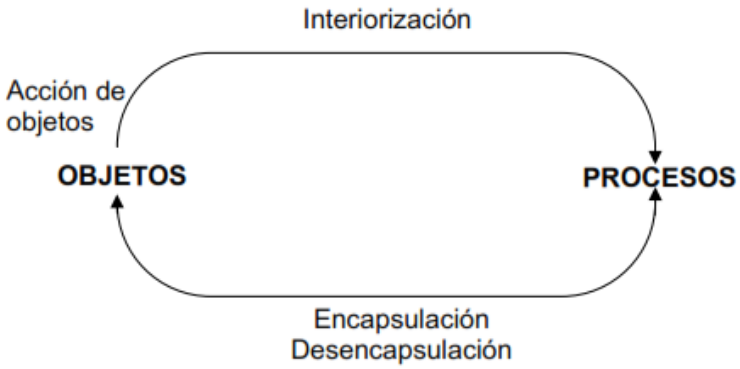


Figura 1: Esquema de teoría APOE (Asiala et al., 1996)

Una *acción* es una construcción que realiza un individuo, en la cual sigue una serie de indicaciones con el propósito de realizar transformaciones sobre objeto matemático, obedeciendo a estímulos que son y se perciben como externos.

Un *proceso* es una construcción en la cual se interioriza la *acción* que se realiza del objeto matemático, ahora bien, esta transformación se realiza enteramente en la mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos.

Un *objeto* es una construcción mental en donde se piensa en un *proceso* como un todo, en el cual se realizan y construyen transformaciones sobre su totalidad. A todo lo anterior se le llama encapsular el *proceso* en una concepción *objeto* del objeto matemático.

Un *esquema* de aquel trozo es una colección de *acciones, procesos, objetos* y otros *esquemas* que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente.

METODOLOGÍA

Ciclo de investigación en APOE

La teoría APOE nos brinda un ciclo de investigación, que se visualiza en la *Figura 2*, el cual consiste en tres componentes a considerar en el proceso de investigación: (i) análisis teórico, (ii) diseño e implementación de enseñanza, y (iii) observación, análisis y verificación de datos.

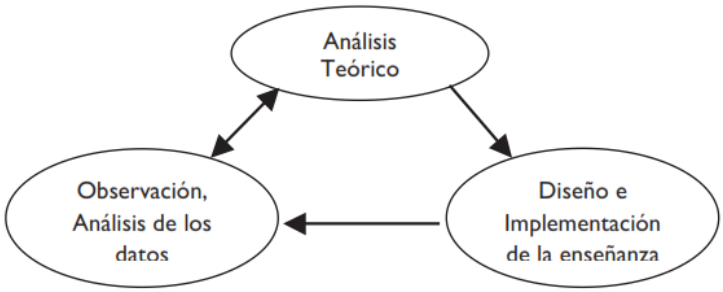


Figura 2: Ciclo de investigación (Asiala, et al., 1996)

El principal objetivo del Análisis teórico es diseñar una Descomposición Genética como hipótesis, la cual permitirá por medio de la descripción de las construcciones mentales del concepto de sistema de ecuaciones cuadráticas (R y P).

De acuerdo a los datos recopilados, aún está en proceso la generación de la Descomposición Genética del concepto de sistema de ecuaciones cuadráticas (R y P), ya que la investigación aún está en proceso y es justamente en esta parte donde se encuentra momentáneamente.

Se pretende realizar la DG y luego con ello un cuestionario que aborde cada uno de los componentes de esta con el propósito de ir validándolos uno a uno.

RESULTADOS

Los resultados que se esperan encontrar debiesen están en concordancia con la descomposición genética que se plantea como hipótesis con el propósito de validar dicha descomposición, o en su defecto generar una versión mejorada de esta. Aunque también podría existir el caso en que la descomposición genética no esté acorde con el concepto en su totalidad o bien en su orden, para lo cual será necesario generar una versión mejorada de la DG.

CONCLUSIONES

El concepto de sistema de ecuaciones cuadráticas (R y P) aún no ha sido abordado desde la teoría APOE, es por esto que se pretende llegar a una conclusión que permita a otros investigadores avanzar en su comprensión o bien aumentar el conocimiento que se tiene sobre este y otros objetos matemáticos asociados a él.

El propósito principal es detectar las dificultades que están asociadas a la comprensión del concepto de sistema de ecuación por medio de la descomposición genética, la cual será validada por medio de una investigación empírica la DG con el propósito de ofrecer sugerencias didácticas con respecto a la enseñanza del concepto de sistema de ecuación.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (Vol. 6, pp.1 - 32). Rhode Island, U.S.A.: American Mathematical Society.

Dubinsky E. y D. McDonald, (2001). “apos: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research”, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An icmi Study*, Dordrecht Kluwer Academic Publishers, pp. 273-280.

Duval, R. (1988). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigación en Matemática Educativa II* (pp. 173–201). Cd. de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

"CUÁNTOS TROZOS LE FALTAN" – USO DE ESTRATEGIAS DE RESTA PARA LA COMPARACIÓN DE FRACCIONES

David M. Gómez[1], Orielle Cisternas[2], Mario Reyes[2], Pablo Dartnell[1]
Centro de Investigación Avanzada en Educación[1] (CIAE), Universidad de Chile
Departamento de Psicología[2], Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de Chile

Resumen: La tarea matemática de comparación de fracciones engloba una multitud de procesos cognitivos y estrategias posibles de resolución. Estas estrategias no se limitan a aquéllas enseñadas en la escuela, sino que incluyen también varias desarrolladas espontáneamente por los estudiantes. Una de ellas es la de "razonamiento por gap", donde se evalúa indirectamente el tamaño de una fracción a partir del número de trozos que a ésta le falta para "completar el entero". Esta estrategia es matemáticamente incorrecta, pero permite obtener respuestas correctas en una gran cantidad de problemas de comparación de fracciones. En esta comunicación, presentamos datos preliminares de una muestra de adultos jóvenes (N=61) quienes contestaron un cuestionario de comparación mental de fracciones diseñado para evidenciar el uso de esta estrategia. Los resultados muestran que el desempeño es significativamente modulado por la utilidad del razonamiento por gap, sugiriendo que los participantes consideran esta dimensión al menos implícitamente. Discutimos implicancias de estos resultados para la enseñanza de las fracciones.

Fracciones, comparación, estrategias, cognición, aprendizaje

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje de las fracciones, y de los números racionales más en general, es una empresa llena de dificultades. El hecho que muchos adultos, incluyendo futuros profesores (Depaepe et al., 2015; Olfos & Guzmán, 2011), carecen de un conocimiento sólido sobre fracciones, convierte esta situación en un círculo vicioso que requiere de múltiples esfuerzos para ser roto.

Un aspecto relevante en esta discusión es el desconocimiento existente sobre cómo la mente de los estudiantes conceptualiza y trabaja con fracciones. Ésta es una parte importante del llamado conocimiento del contenido matemático para la enseñanza, específicamente del conocimiento acerca del contenido y los estudiantes (Ball, Thames, & Phelps, 2008). Diversos estudios cualitativos y cuantitativos en Educación y Psicología han identificado una variedad de estrategias usadas por estudiantes para comparar fracciones mentalmente (e.g. Clarke & Roche, 2009; Gómez, Jiménez, Bobadilla, Reyes, & Dartnell, 2014; Pearn & Stephens, 2004; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Las estrategias de cálculo mental y el conocimiento conceptual son una parte importante del conocimiento matemático, que debe ser considerado más allá del conocimiento y la fluidez que los estudiantes tengan sobre los algoritmos estándares para trabajo con fracciones (Forrester & Chinnappan, 2010).

Las estrategias de cálculo mental para las fracciones suelen estar íntimamente ligadas con la concepción de los estudiantes sobre estas últimas. En el nivel más bajo de conocimiento se encuentra la estrategia de identificar como la fracción más grande aquélla que tiene las componentes más grandes (e.g. Gómez et al., 2014; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Esta estrategia surge naturalmente en estudiantes para quienes las fracciones no son más que dos

números naturales puestos uno junto al otro, identificando la magnitud de la fracción con aquélla de sus componentes. Más adelante, tenemos la estrategia de *razonamiento vía gap*, donde el estudiante comprende que numerador y denominador se combinan para formar una nueva cantidad, pero trata esta relación como esencialmente aditiva en lugar de multiplicativa. Un ejemplo de esto es declarar que 2/3 es mayor que 3/5 porque a la primera "le falta sólo 1 trozo para completar el entero", mientras que a la segunda "le faltan 2 trozos" (Pearn & Stephens, 2004).

Es importante notar que esta estrategia, si bien es matemáticamente incorrecta, lleva a la respuesta correcta en una cantidad importante de casos (como en el ejemplo descrito de comparar 2/3 y 3/5). De los 4.628.403 posibles pares de fracciones propias, irreducibles y distintas que se pueden armar con denominadores hasta 100, el razonamiento vía gap es capaz de responder correctamente cuál es la mayor en el 83% de los casos. A pesar de este número y de la detección de esta estrategia en estudios cualitativos, no tenemos conocimiento de cuál es su prevalencia en general: ¿es un problema suficientemente frecuente como para preocuparnos? En este estudio presentamos una primera respuesta a esta pregunta, evaluando las diferencias en desempeño en comparación de fracciones de una muestra de adultos jóvenes, donde los ítemes han sido seleccionados para poner en evidencia el razonamiento vía gap. Este trabajo podría proveer luces también para generar mejores métodos de evaluación del aprendizaje de fracciones, que permitan detectar la utilización de esta estrategia y así tener la chance de corregirla oportunamente.

METODOLOGÍA

Este trabajo forma parte de un proyecto más extenso sobre los sesgos y estrategias que adultos jóvenes muestran al trabajar con fracciones (Fondecyt 1160188). Este trabajo reporta hallazgos preliminares, con énfasis en el uso de la estrategia de razonamiento vía gap.

Los resultados aquí reportados provienen de una muestra de 61 adultos jóvenes reclutados en Santiago, Chile. Estos participantes dieron consentimiento informado antes de responder un cuestionario de comparación de fracciones presentado por computador, en el Laboratorio de Neurociencia y Cognición del CIAE. Este cuestionario fue programado y presentado utilizando el software libre OpenSesame (http://osdoc.cogsci.nl/), e incluía pares de fracciones donde el razonamiento vía gap llevaba a la respuesta correcta, incorrecta, o no era informativo (ejemplos en la Figura 1). En este reporte consideramos solamente los ítemes donde las fracciones tenían numeradores y denominadores distintos. La mitad de los participantes tenía que escoger, dentro de cada par, cuál era la fracción mayor, mientras que la otra mitad tenía que escoger la fracción menor.

$\underline{23/59}$ *vs*. 11/53	$\underline{43/90}$ *vs*. 21/68	13/46 *vs*. $\underline{33/73}$
(gap 36) (gap 42)	(gap 47) (gap 47)	(gap 33) (gap 40)

Figura 1: Ejemplos de ítemes del cuestionario de comparación de fracciones aplicado. Se subraya en cada ejemplo la fracción mayor. Izquierda: Ítem con gap que favorece elegir la respuesta correcta, pues la fracción mayor tiene el menor gap. Centro: Ítem con gap no informativo, donde ambas fracciones tienen el mismo gap. Derecha: Ítem con gap que dificulta elegir la respuesta correcta, pues la fracción mayor tiene el mayor gap.

Para el análisis, contrastamos los porcentajes de respuestas correctas en los tres tipos de ítemes descritos mediante un ANOVA a medidas repetidas. Inspeccionamos además si el patrón de resultados varía de acuerdo al nivel de conocimiento general de comparación de fracciones, separando a los participantes en cuatro cuartiles de desempeño (Q1-Q4, con aprox. 15 participantes en cada uno).

RESULTADOS

El desempeño general en la prueba fue de 73% (desviación estándar DE = 20%). El desempeño en ítemes donde el razonamiento por gap llevaba a la respuesta correcta fue de 78% (DE = 24%), en ítemes donde llevaba a la respuesta incorrecta fue de 52% (DE = 29%), y en ítemes donde el gap no era informativo fue de 60% (DE = 29%).

La Figura 2 muestra el desempeño en la prueba separado no solamente por la utilidad del razonamiento vía gap, sino que también agrupa a los participantes según su nivel de desempeño en la prueba completa: Q1 representa al 25% de participantes con menores puntajes, Q2 al 25% de participantes siguientes, hasta Q4 al 25% de participantes con más altos puntajes. Se observa allí directamente que todos los grupos, excepto el de menores puntajes (Q1), presentan mejor desempeño en ítemes donde el razonamiento por gap lleva a la respuesta correcta y peor desempeño en ítemes donde éste lleva a la respuesta incorrecta. Esto sugiere que todos estos participantes, incluyendo los de mejores puntajes, consideran la relación de gaps en su razonamiento. Es importante notar que no es posible inferir de nuestros datos si esta consideración ocurre explícita o implícitamente.

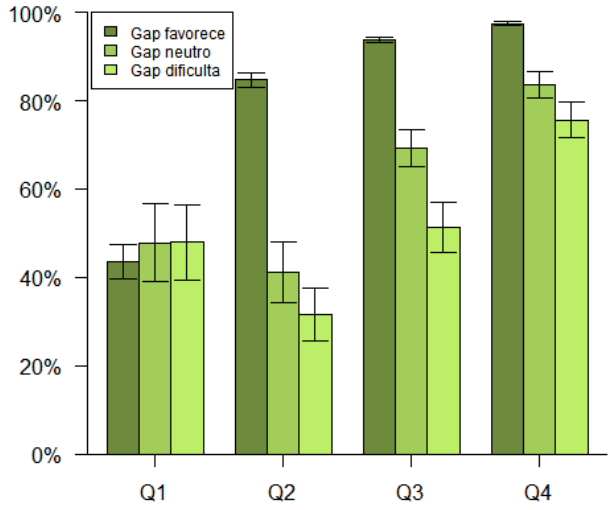


Figura 2: Desempeño en los tipos de ítemes de acuerdo a si la estrategia de razonamento vía gap favorece, dificulta, o no es informativo sobre la comparación del par de fracciones en cuestión.

DISCUSIÓN

El razonamiento por gap es una estrategia matemáticamente incorrecta para la comparación de fracciones, pero es intuitiva y simple de usar. Además, entrega la respuesta correcta en una alta proporción de los posibles ejercicios a los que los estudiantes se suelen ver enfrentados. En la medida que este razonamiento sea usado implícita o explícitamente por los estudiantes, esperamos observar mejor desempeño en ítemes donde el razonamiento por gap lleva a la respuesta correcta, y peor desempeño en aquéllos donde lleva a la respuesta

incorrecta. En este trabajo presentamos una primera estimación del efecto del razonamiento por gap, a través de la presentación de ítemes donde el gap favorece, es neutro, o dificulta, obtener la respuesta correcta. Nuestros resultados evidencian que los ítemes donde el razonamiento por gap acierta son de hecho respondidos por adultos jóvenes con mayor éxito que los otros en todos los niveles de desempeño excepto el más bajo. Esto sugiere que la comparación de numeradores y denominadores a través de su sustracción (el gap) juega un rol en los cálculos mentales involucrados en la comparación de fracciones, afectando el desempeño general.

¿Cómo puede un docente trabajar con sus estudiantes sobre el razonamiento por gap? Una posibilidad consiste en visibilizar esta forma de pensar, enfatizando que es incorrecta ya que trabaja sobre la base de la resta de numerador y denominador, en lugar de hacerlo sobre su razón. Otra opción es la incorporación de ejercicios donde el gap es neutro o dificulta elegir la fracción mayor, poniendo atención a las razones esgrimidas por los estudiantes para tomar una u otra decisión. Todo esto está en línea con un mayor énfasis en la relación multiplicativa que toda fracción representa.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por los proyectos Fondecyt 1160188, PAI/Academia 79130029 y Fondo Basal FB0003.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 127-138.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., et al. (2015). Teacher's content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, 47, 82-92.

Forrester, T., Chinnappan, M. (2010). The predominance of procedural knowledge in fractions. *Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 185-192). Fremantle, WA, Australia: MERGA.

Gómez, D. M., Jiménez, A., Bobadilla, R., Reyes, C., & Dartnell, P. (2014). Exploring fraction comparison in school children. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 3 (pp. 185-192). Vancouver, Canada: PME.

Olfos A., R., & Guzmán R., I. (2011). Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y el conocimiento del profesor. *XIII Conferéncia Interamericana de Educação Matemática CIAEM-IACME*. Recife, Brasil.

Pearn, C., & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what Year 8 students really think about fractions. *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 430-437). Sydney, Australia: MERGA.

Stafylidou, S., Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, 503-518.

PROBLEMAS ABIERTOS PARA EL TRASPASO DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA, A TRAVÉS DE UNA SECUENCIA NEURODIDÁCTICA

Priscilla Olivares Pérez
Universidad San Sebastián

Resumen: En este estudio se relaciona la resolución de problemas abiertos con el traspaso de la aritmética al álgebra, a través de una secuencia neurodidáctica. El propósito de esta investigación es propiciar la resolución de problemas para ayudar a disminuir las dificultades que presentan estudiantes de Educación Media en Adultos cuando resuelven problemas desde la aritmética al álgebra. Se construye una secuencia que contribuir en la comprensión de los procesos cognitivos que presentan los estudiantes cuando resuelven ciertos tipos de problemáticas, sobre todo de conocimientos numéricos y algebraicos. Para la generación del marco Teórico se establece una relación de elementos neurodidácticos, de la aritmética al álgebra y la resolución de problemas. Luego de la aplicación de la propuesta, los estudiantes argumentan sus respuestas, seleccionan información importante y determinan el uso de variables algebraicas. Este estudio hace notar la necesidad de cambiar a nuevas metodologías de enseñanza que permiten el desarrollo de pensamiento matemático en estudiantes con dificultades.

Resolución de problemas; pensamiento numérico-algebraico; secuencia neurodidáctica; enfoque cualitativo; educación de adultos

INTRODUCCIÓN

Las dificultades en la comprensión y resolución de problemas matemáticos que presentan estudiantes de Educación Media en Adultos, cuando realizan traspasos desde lo numérico al algebraico, incentivan la creación de nuevas propuestas de enseñanza. El presente estudio relaciona dos corrientes de la Educación Matemática, la resolución de problemas y el pensamiento numérico-algebraico, a través de una propuesta de tipo neurodidáctica. El traspaso de la aritmética al álgebra trae consigo dificultades, ya que los estudiantes deben realizar ajustes (Kieran, 2004). El método tradicional utilizado con el estudiantado no presenta efectividad, por lo que se crea y aplica una nueva propuesta utilizando elementos de neurociencia en la educación, para que mejorar los procesos de aprendizaje o generación de conocimientos. Considerando los trabajos de Meléndez (2009) se establece una propuesta neurodidáctica que relaciona la resolución de problemas de tipo abiertos y el pensamiento numérico algebraico. Es por esto, que se plantea como interrogante ¿Qué efectos produce la resolución de problemas abiertos en el desarrollo del pensamiento numérico-algebraico considerando una secuencia neurodidáctica? Para responder a esta pregunta de investigación se genera una secuencia neurodidáctica que refuerza las funciones ejecutivas planteadas por Meléndez (2009), considerando para tales efectos a los problemas abiertos como un medio para conectar elementos numéricos y algebraicos.

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

Para la construcción del marco Teórico que sustenta la creación de la secuencia neurodidáctica, se realiza una revisión de la literatura de conceptos numéricos-algebraicos

(Ortíz, 2009; Kilpatrick, 2001; Gascón, 2012), de la resolución de problemas (Poyla, 1962; Schoenfeld, 1992; Díaz & Poblete, 1994) y de elementos neurodidácticos (Meléndez, 2009; Fernández, 2010). Se define la neurodidáctica como una disciplina que conecta la didáctica con la psicología y la neurociencia, el propósito principal es mejorar las prácticas docentes y el aprendizaje de los estudiantes. Desde esta perspectiva, el aprendizaje es visto como una transformación en el proceso interno cerebral de las conexiones sinápticas que producen los cambios de pensamiento y comportamiento. Estos se generan a través de una intervención teórica, dadas ciertas prácticas o experiencias de vida (Váldez, 2008). Los cambios en los procesos cerebrales se producen por las funciones ejecutivas que influyen en la educación y que ordenan las acciones cognitivas y de comportamiento. Las funciones ejecutivas son necesarias para realizar acciones que dependen de los sistemas de atención y memoria, y se definen como un conjunto de capacidades que transforman el pensamiento en las diversas acciones requeridas para funcionar de forma organizada, flexible y eficaz, encargándose de adaptar al individuo a diferentes situaciones y de permitirle la solución de problemas de manera exitosa y aceptable (Punset, 2007 en Meléndez, 2009). Desde la perspectiva educacional Meléndez (2009) propone algunas funciones ejecutivas se debieran utilizar y que requieren de un alto nivel cognitivo tales como: *Observación; Anticipación-predicción-flexibilidad*; *Orden-organización-planificación*; *Resolución de problemas*; *Toma de decisiones; Comunicación asertiva.*Estas habilidades están directamente relacionadas con los procesos internos de la resolución de problema y pueden guiar a los profesores a entregar problemas que activen estas funciones para un desarrollo cognitivo.

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo de tipo diseño emergente, se establecen cuatro fases para llevar a cabo este estudio. En la primera fase se plantea un análisis preliminar que tiene relación con el contexto educativo en donde se aplica la propuesta, en la segunda fase se plantea la construcción de la propuesta, en la tercera fase se presenta la aplicación de la propuesta y en la fase final se presentan las respuestas y análisis de los resultados.

Propuesta

Para la generación de la propuesta se confeccionan quince problemas abiertos basados en elementos neurodidácticos utilizando una lista de cotejo confeccionada por Meléndez (2009). Estas situaciones problemáticas se enfocan en el traspaso del pensamiento numérico-algebraico y se relacionan con las experiencias de los estudiantes involucrados. Una vez confeccionadas las situaciones para la propuesta se realiza la validación de estas a juicio de expertos del área seleccionando aquellas situaciones que presentaron menores observaciones. Para la construcción de la secuencia neurodidáctica se crean tres cuestionarios de dos preguntas abiertas (ver figura 1).

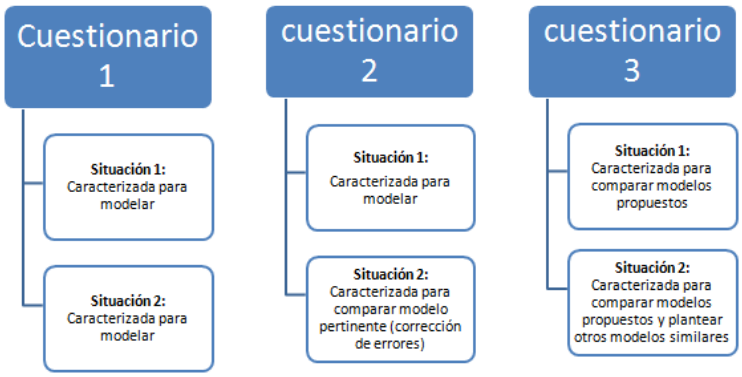


Figura 1. Esquema de Aplicación de cuestionarios de secuencia neurodidáctica.

Se contemplan cuatro semanas para la aplicación de la secuencia neurodidáctica. Los problemas seleccionados se dividen en dos tipos: problemas de tipo planteamiento y de comparación. Los problemas del tipo planteamiento se enfocan en la modelación algebraica, mientras que los problemas de tipo comparación se enfocan en decidir la pertinencia de modelos algebraicos. El primer cuestionario presenta dos problemas de tipo planteamiento, el segundo cuestionario presenta un problema de planteamiento y otro de comparación, y el tercer cuestionario presenta problemas de tipo comparación. Antes de la aplicación los primeros cuestionarios, se aplican juegos de lógica matemática para activar los conocimientos de los estudiantes, lo que permite despertar el interés de su participación y motivación para el aprendizaje.

A modo de ejemplo, se plantea en la figura 2 una situación caracterizada para modelar del primer cuestionario.

Shai tiene en su monedero la cantidad de 200 pesos pero distribuidos en monedas de $10 y $5, en total tiene 22 monedas. Sebastián le pregunta. ¿Cuántas son de $10 y cuántas de $5? A lo que Shai responde "¿Por qué me preguntas eso?". Sebastián le dice "pues porque quiero saber". Con tu compañero de puesto comenta lo sucedido y respondan individualmente:

a) ¿Cómo le podrías ayudar a Shai a responder la pregunta de Sebastián?

b) ¿Cómo podrías encontrar el número de monedas de $10 y $5?

c) Ahora observa lo que hizo tu compañero de banco al responder las preguntas anteriores. ¿Pensaron de la misma manera? ¿Por qué?

d) ¿Cómo podrías explicar tu procedimiento en el curso para que se entienda de la mejor forma este problema?

Figura 2. Ejemplo de Problema abierto, primer cuestionario secuencia neurodidáctica.

Esta situación se genera a partir de un dialogo efectuado en la clase de matemática, donde los estudiantes plantean este problema. Al familiarizar las problemáticas con situaciones cotidianas personales se puede lograr que los estudiantes puedan resolver lo planteado.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los estudiantes consideran como camino principal responder a los problemas matemáticos a través de la mecanización. Esta secuencia responde a la necesidad de mejorar los procesos

de aprendizaje en estudiantes que presentan dificultades en la resolución de problemáticas de índole algebraico. El uso de otras metodologías para la enseñanza de la matemática, como la utilización de problemas abiertos favorece el desarrollo de niveles de pensamiento más abstractos en el estudiantado, permitiendo establecer conexiones cerebrales más complejas.

El uso de situaciones cotidianas para la creación de problemas matemáticos, permite que los estudiantes puedan apropiarse de sus conocimientos. Al evaluar los efectos causados por la aplicación de esta secuencia, se concluye que los estudiantes son protagonistas en: el desarrollo de la argumentación y explicación de sus respuestas, la identificación de las variables algebraicas y como se relacionan con los enunciados de problemas, y la toma de decisiones cuando seleccionan las estrategias resolución.

Finalmente, las evidencias logradas en la aplicación de esta propuesta revelan la importancia de continuar con investigaciones asociadas a la neurodidáctica. Con la aplicación de nuevas estrategias de enseñanza es posible identificar como los estudiantes razonan en las distintas áreas de la matemática. Por lo que, es necesario que los docentes conozcan que elementos neurodidácticos pueden ayudar a que los estudiantes desarrollen sus ideas en la resolución de problemas y comenzar a cambiar la forma en que se aborda un problema matemático, situándolo como un desafío y no como un proceso mecanizado.

Referencias

Díaz, V. & Poblete, A. (1994). *Evaluación de los aprendizajes matemáticos en la enseñanza secundaria en el marco de la reforma educacional*. Investigación de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica CONICYT. Fondecyt 1990558.

Fernández, J. (2009). Neurociencias y Enseñanza de la Matemática.Revista Iberoamericana de Educación . *Revista Ibero-americana de Educação*. ISSN: 1681-5653.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. Recherches en didactique des Mathématiques, 13(3), 295-332.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kilpatrick, J. (2001). *Adding it up*. Center for Education Division of Behavioral and Social Sciences and Education National Research Counsil. Washington D.C, EU: Nacional Academy Press.

Meléndez, L. (2009). Neurodidáctica y el desarrollo de las funciones ejecutivas. VIII Congreso Educativo: El sentido de la Educación en un Mundo en Crisis. Universidad Interamericana de Costa Rica Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica.

Ortiz, A. (2009). Lógica y pensamiento aritmético. *PNA*, *3*(2), 51-72.

Pólya, G. (1962**).** *Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving*. EU: John Wiley and Sons, Inc.

Radford, L. (2009). Cerebro, Cognición y matemáticas. *Relime, 12*, 215-250. Disponible en http://www.clame.org.mx/relime.htm

Schonfield, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*.

Valdez, H. (2008). Introducción a la Neurodidáctica. Curso de Capacitación docente. *AE*.

HACIA UN MODELO COGNITIVO PARA EL APRENDIZAJE DE LOS FRACTALES GEOMÉTRICOS

Ximena Gutiérrez-Figueroa[1], Marcela Parraguez González[2]
Universidad de Chile[1], Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[2]

Resumen: El presente estudio, considera a los fractales como un concepto asimilador para el aprendizaje de otros objetos presentes en el currículum escolar de Matemática. La motivación de fondo es la reinterpretación de la geometría a través de los fractales geométricos, complementando la cosmovisión euclidiana que caracteriza a los procesos de enseñanza. Se aborda entonces un desafío mayor, y es que los fractales no son parte de los conocimientos que el Ministerio de Educación, la sociedad y la cultura han definido como obligatorios para la enseñanza. Algunos elementos metodológicos que sutentaron la investigación, se fundamentan en los resultados de un estudio experimental sobre los conocimientos que construyeron nueve estudiantes de educación media (16 a 18 años), al abordar uno de los fractales más divulgados, -el Triángulo de Sierpinski-. Estos resultados permitieron la proyección de un modelo cognitivo sobre un conjunto de fractales geométricos, que orientan caminos de construcción viables para este tipo de conocimiento en niveles escolares.

Fractal geométrico, teoría APOE, modelo cognitivo

EL ÉNFASIS DE LA GEOMETRÍA EN EL CURRÍCULUM

Chevallard (2015), realiza un cuestionamiento sustantivo a los paradigmas imperantes en el tratamiento de la enseñanza de la Matemática en la escuela secundaria, donde se sigue replicando una concepción epistemológica del conocimiento, cuya finalidad es que el estudiante haga suyo, en el mejor de los casos, un cuerpo de conocimientos solo por el hecho de que la institución escolar y la tradición señalan que son dignos de alcanzar. Una postura más realista del autor, alude a revivir una Matemática vinculada también a las aplicaciones para ser remiradas y concebidas como una herramienta que aporta soluciones a la sociedad.

La evolución de las temáticas en el eje de geometría del currículum nacional se desarrollan desde los cursos de educación básica, inicialmente en relación a la comprensión de las formas, la caracterización y relaciones simples entre estas y su representaciones cartesianas. Continúa con la medición de perímetros, áreas y volúmenes y con movimientos rígidos de figuras en el plano (Ministerio de Educación, 2010). En el plan común de estudios, la mayoría de dichos aprendizajes se desarrollan en torno a la axiomática de Euclides, dejando para los cursos del plan diferenciado, algunas actividades que aluden a fractales (Ministerio de Educación, 2005). Se observa así, un cuerpo de conocimientos centrado en elementos conceptuales y rígidos, que en algunos casos se transfiere a contextos cotidianos a partir de la medición. La primacía de la geometría euclidiana, se puede considerar como un tema de estudio en sí mismo y no es parte de este trabajo, sin embargo, se sostiene que el potencial formativo de las estructuras fractales se sustenta en la exhibición de una geometría más cercana a la naturaleza, a los fenómenos sociales, a los biológicos y los económicos, entre otros, así la incorporación de este tema se basa en sus cualidades formativas e integradoras.

La reinterpretación de la geometría a través de los fractales geométricos, motivó a que este estudio se focalizara en el diseño de un modelo cognitivo, que sustentara los conceptos que emergen en la construcción de un conjunto de fractales geométricos y que a su vez, le otorgasen una nueva categoría a este concepto, como asimilador de otros conocimientos que son tratados en la escuela. Al ser un tema no contemplado en el currículum, se decidió abordarlo considerando los elementos conceptuales que lo originan y le otorgan sus características intrínsecas -la iteración y la autosimilutud a diferentes escalas-.

DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

Con base en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) creada por Dubinsky (1991) y desarrollada por otros investigadores (Arnon et al., 2014), se diseña un modelo cognitivo o Descomposición Genética (DG) para el Triángulo de Sierpinski. Esta teoría nos proporciona una manera de describir el aprendizaje de este concepto matemático, a partir de estructuras que elabora el estudiante en su mente. Así, el concepto lo reconstruye a través de acciones, procesos, objetos y esquemas; y los mecanismos de interiorización, coordinación, reversión, encapsulación y desencapsulación como medio para lograr dichas estructuras. Arnon et al. (2014) presentan la posible construcción de un nuevo estado, la Totalidad, que es concebida como una construcción intermedia entre Proceso y Objeto y se relacionaría principalmente con procesos infinitos o aquellos que involucran un gran número de pasos por la dificultad de concebir un proceso como un todo estático (Dubinsky 1987). La DG diseñada propone al fractal geométrico como una Totalidad.

Para dar cuenta de la viavilidad del modelo propuesto se trabajó con dos casos de estudio, con la finalidad de compreder en profundidad los fenómenos a partir de los estudiantes que elaboran conocimiento a partir de sus propias habilidades, experiencia y aprendizajes previos (Maykut y Morehouse, 1999). Las producciones de los estudiantes son sus escritos, que fueron piezas claves para el análisis y las interpretaciones que ellos muestran del objeto matemático en estudio.

Los casos de estudio

Se definieron dos casos de estudio: el Caso 1 del Triángulo de Sierpinski, y el Caso 2 de la Curva de Koch. Para el primer caso se consideraron los resultados obtenidos en la aplicación de una secuencia de aprendizaje para el Triángulo de Sierpinski (Gutiérrez-Figueroa, 2014), en la cual participaron nueve estudiantes de 4to año medio (16 a 18 años). Para el caso de la Curva de Koch, se realizaron mediciones iniciales, donde participaron diez estudiantes del mismo nivel educativo. La base del diseño fue orientada por el Ciclo de Investigación propio de APOE (ver Tabla 1).

Etapa	**Descripción**
Análisis teórico	Se realizó un estudio histórico-epistemológico; revisaron textos y artículos científicos sobre fractales en la Matemática, otras ciencias y como objeto de enseñanza. Este estudio dio origen a una DG para el Triángulo de Sierpinski.

Diseño e implementación de la instrucción	Se diseñó una secuencia de aprendizaje para la Curva de Koch, análoga a la elaborada para el Triángulo de Sierpinski y se realizaron mediciones iniciales.
Recolección y análisis de datos	Los análisis se basaron en la comparación con la DG y las semejanzas y diferencias que se observan en la producción de los estudiantes para ambos fractales.

Tabla1: Síntesis del diseño de investigación

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS DOS FRATALES GEOMÉTRICOS

En la Tabla 2 se muestra el trabajo de estudiantes, que fue interpretado a partir de estructuras mentales: acciones o procesos referidos a algunos conceptos claves para los fractales geométricos.

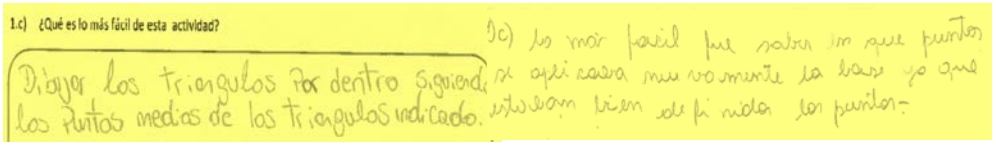
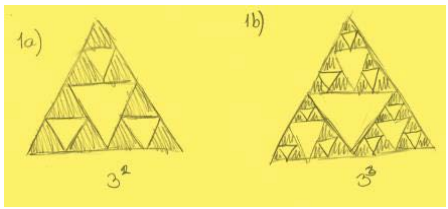
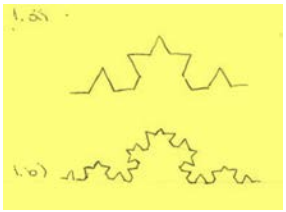
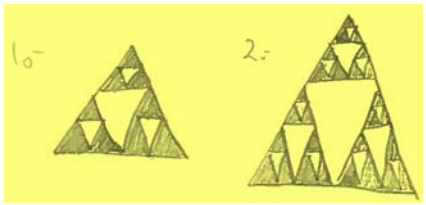
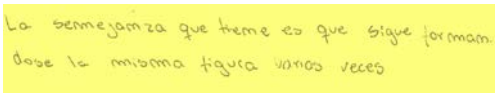
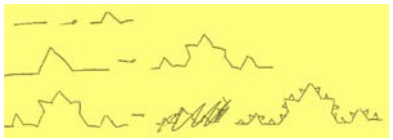
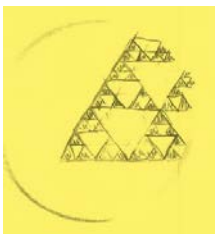
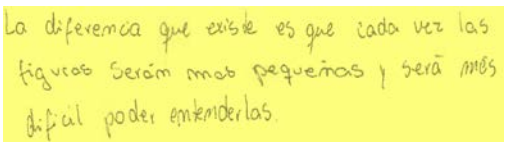
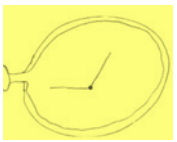
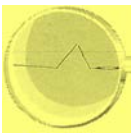
Construcción	**T. de Sierpinski**	**C. de Koch**
Acción sobre el Iniciador		
Proceso de Iteración	 	
		 
Proceso de Autosimilitud		  

Tabla 2. Construcciones mostradas por los estudiantes de ambos casos de estudio

Al contrastar las evidencias se observa que las estructuras mentales de la Curva de Koch, como Iteración y Autosimilitud, fueron de mayor dificultad para los estudiantes, lo que se debería a que el el Iniciador para el Triángulo de Sierpinski es una figura más habitual para ellos. Sin embargo, para el Caso 2, la poligonal cerrada es una estructura no tratada en la enseñanza, también puede estar inidiendo, el trazado de triángulos en distintas posiciones relativas, respecto de cada segmento de la curva.

ALGUNAS CONCLUSIONES

Se sostiene la conjetura de que el tratamiento de la geometría euclidiana está interfiriendo en la construcción de las estructuras fractales. Esto se presentó en forma más evidente en la Curva de Koch, cuyo Iniciador es una poligonal abierta sobre la cual se define el proceso iterativo del fractal. En la Figura 1, se presenta la respuesta de un estudiante, para el caso 2, cuando se le pregunta ¿qué es lo más difícil de esta actividad?, en referencia a dibujar las etapas 3 y 4 de la curva de Koch. Este estudiante manifiesta que no se le ha dado instrucciones sobre cómo cerrar la figura, lo que desde la investigación se asocia al énfasis en el trabajo con polígonos en la etapa escolar por sobre otro tipo de figuras.

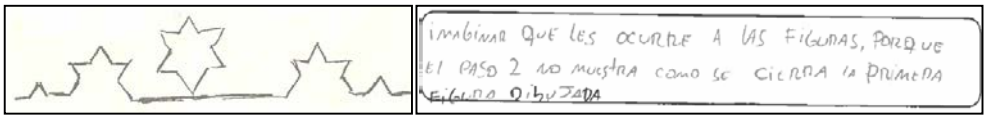


Figura 1. Construcción de la etapa 3 y su justificación por parte del estudiante.

Con base en las evidencias recopiladas de ambos casos, se sostiene que las componentes para un modelo cognitivo de los fractales geométricos serían: Acciones sobre objetos geométricos ya conocidos, como el tiángulo, las medianas, y las poligonales abiertas. Al interiorizar dichas acciones comprende a la figura como un estado inicial: el Iniciador, también interioriza la instrucción como una regla a modo de proceso, en este caso el Generador. Ambos se coordinan para construir la Iteración y la Autosimilitud como nuevos procesos para la construcción de las Imágenes fractales. La investigación continúa y la etapa que sigue es la implementación de la secuencia en base a los dos fractales señalados en estudiantes de educación básica y la definición de un tercer caso para ajustar aun más las componentes que describen el modelo de aprendizaje de los fractales geométricos.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory A framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer-Verlag.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. *In The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer International Publishing.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1987). Anatomy of a question. *The Journal of Mathematical Behavior*, *6*, 363– 365.

Gutiérrez-Figueroa, X. (2014). *Una descomposición genética del fractal triángulo de Sierpinski* Tesis de Magíster no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Maykut, P., & Morehouse, R. (1999). *Investigación cualitativa, una guía práctica y filosófica*. Barcelona: Editorial Nurtado.

Ministerio de Educación. (2010). *Mapa de progreso del aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Geometría*. Santiago: Autor.

Ministerio de Educación. (2005). Matemática. Formación Diferenciada Humanístico-Científica. En *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media*. Actualización 2005 (pp. 237-240). Santiago, Chile: Autor.

UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA INTRODUCIR LA NOCIÓN DE LA SUMA DE RIEMANN

Mihály André Martínez Miraval, Daysi Julissa García Cuéllar
Pontificia Universidad Católica del Perú

Resumen: La investigación presenta el estudio de una situación didáctica desarrollada por estudiantes universitarios, mediada por el GeoGebra, para introducir la noción de suma de Riemann a partir de la suma de áreas de rectángulos. La comparación entre los análisis a priori y a posteriori evidenció que se redujeron las dificultades para plantear la suma de áreas de rectángulos, cuando se introdujo notaciones simbólicas.

Situación didáctica, área, suma de Riemann, geogebra, deslizadores

INTRODUCCIÓN

La relación entre el concepto de área y de integral definida se presenta en cualquier curso o libro de Cálculo integral. En nuestra práctica docente, en una universidad de Lima, no se propone al estudiante actividades de inducción sobre la noción de área de una región que le permita emplear conceptos conocidos como funciones, intervalos, áreas de rectángulos, sumatorias, límites, etc., y se pierde con ello la oportunidad de que el estudiante adquiera un nuevo concepto, a partir de sus conocimientos previos.

Las investigaciones reportan diversas dificultades que resulta al construir el concepto de área, y muchas de ellas citan el trabajo de Freudenthal (1999), que presenta diferentes enfoques para su construcción, de ahí su complejidad. En nuestra investigación, hemos trabajado con el enfoque por medición mediante un proceso de acotación, que se caracteriza por el uso de unidades cada vez más pequeñas, inscritas y/o circunscritas a la región que generan una aproximación a la medida del área por defecto y por exceso respectivamente.

La situación didáctica que planteamos propone definir el área como el límite de una suma de Riemann, pero en este trabajo que presentamos nos hemos centrado en el análisis de las respuestas de los estudiantes de una de las actividades propuestas, en la cual se pretende introducir al estudiante en el planteamiento de una suma de términos, expresados simbólicamente, y reducidos utilizando la notación sigma.

Por lo mencionado anteriormente, hemos diseñado una propuesta didáctica tomando como marco teórico a la Teoría de las Situaciones Didácticas, porque busca, a partir de la interacción entre el estudiante, el saber y el medio, que el aprendizaje se logre (Brousseau, 2007).

Para diseñar la secuencia didáctica, que tiene como objetivo que los estudiantes adapten a su aprendizaje un procedimiento de aproximación con rectángulos que les permita aproximar el área de una región tanto como lo deseen y representen dicha aproximación simbólicamente utilizando sumatorias, hemos tomado en cuenta ciertos análisis preliminares referidos al objeto matemático área, y el análisis lo hemos hecho contrastando lo que nosotros esperábamos que los estudiantes contesten a las preguntas, presentes dificultades en algunos procesos, etc., y lo que ellos presentaron como producto al final de la experimentación. Por ese motivo, hemos elegido algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica como nuestro marco

metodológico, por ser, en palabras de Artigue (1995), un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Nosotros hemos diseñado *applets* en Geogebra basados en deslizadores, para que el estudiante centre su mirada en la interpretación de resultados y no en la complejidad de los cálculos, y sí buscamos que el estudiante realice un planteamiento con sumatorias. El uso de la tecnología al trabajar conceptos que involucran a la geometría dinámica, como derivadas, integrales, áreas, límites, etc., en particular el uso del Geogebra, es importante ya que, desde el punto de vista de Amorin et al. (2011), permite que el estudiante valide sus hipótesis, y argumente o cuestione sus ideas o de sus compañeros.

Problemática

El concepto de área se trabaja en todos los niveles educativos: primaria, secundaria y universitario. En la etapa escolar, para definir el concepto de área, se emplean métodos de subdivión finita, pero no se realiza un proceso de refinamiento infinito como los que se esperaría que se realicen en una etapa superior. Del mismo modo, la integral definida se presenta en los libros de texto de cálculo integral (Stewart, 2001) asociada al concepto de área, es decir, como el límite de una suma de Riemann, sin embargo, no se presentan actividades para que el estudiante construya la definición, y se presenta a la integral definida, tanto en los libros como en la clase teórica, como una técnica que permite solucionar el problema de calcular el área de una región no lineal.

Centrando la atención en el planteamiento de la suma de Riemann, se observan dificultades para representar las alturas de los rectángulos dadas gráficamente, en su forma algebraica, como imagen de la función en uno de los extremos de su base. En palabras de Artigue (1998), estas dificultades resultan de los procesos de traducción de un registro semiótico a otro, especialmente las dificultades de traducción del registro gráfico al registro algebraico.

Nosotros proponemos utilizar el enfoque por medición bajo un proceso de acotación, de modo que el estudiante exprese la suma de áreas de rectángulos de forma numérica, en un momento de la actividad, y luego, en otro momento, exprese dicha suma a partir de las imágenes de la función, de forma simbólica, y la reduzca usando la notación sigma.

MARCO TEÓRICO

Para el presente estudio, tomamos como referencial teórico a la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, por la manera cómo concibe el proceso de enseñanza - aprendizaje en la educación, en la que el aprendizaje del estudiante se debe dar a partir de las interacciones entre el medio y el saber en juego.

El investigador llama *medio* a un sistema diseñado por el profesor con el fin de hacer reflexionar al estudiante sobre su aprendizaje. La respuesta dada por el medio hace que el estudiante refuerce el conocimiento nuevo adquirido, o que modifique su procedimiento si el resultado dado no es coherente. Este medio es organizado a partir de la selección de *variables didácticas*, las cuales al cambiar de valor generan en los estudiantes cambios en sus estrategias consideradas como óptimas.

Las situaciones son construidas por el profesor para proporcionar al estudiante las condiciones propicias para la adquisición del saber, en las que la intención de enseñar no es revelada al estudiante son llamadas *situaciones a-didácticas* (Brousseau, 2007). En cada una de ellas, la relación entre el estudiante y el saber es distinta. La fase a-didácticas son tres: Fase de acción, Fase de formulación y la Fase de validación. En el desarrollo de las tareas de nuestra investigación, se aprecia la fase de acción al reconocer el funcionamiento de los deslizadores, al manipularlos de forma exploratoria, y junto con sus conocimientos previos actuar sobre el medio. La fase de formulación se aprecia en el intercambio de información sobre cómo hallar la medida de las bases, y cómo expresar las alturas de los rectángulos como la imagen de una función. Finalmente, la fase de validación se observa, luego de cambiar la variable didáctica e introducir la notación simbólica, al validar una expresión que represente a la aproximación del área realizada.

ANÁLISIS

La situación didáctica que se propuso fue la de delimitar la sala y el comedor de una casa con una curva diseñada por los deslizadores *a* y *b*. Con el deslizador *n* se colocaron losetas rectangulares de igual base, inscritas y circunscritas al comedor, y con el punto móvil *P* se hallaron las alturas. A continuación presentamos las respuestas de uno de los cinco estudiantes con los que se trabajó.

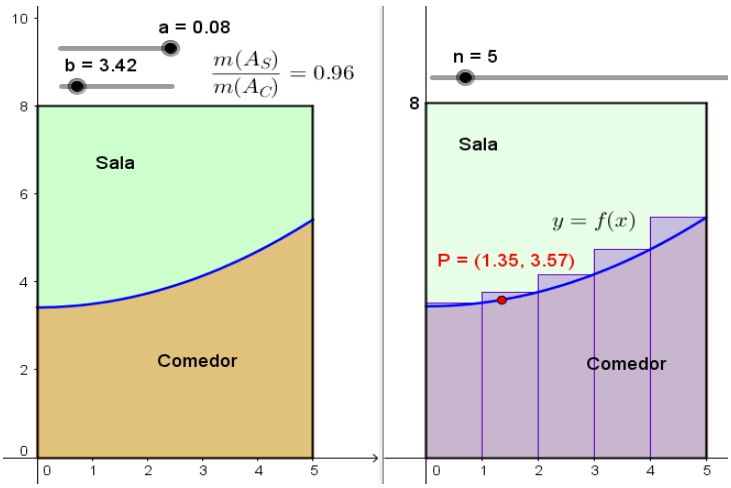


Figura 1: *Applet* en Geogebra

En una de las tareas de la actividad el estudiante debía hallar las alturas y las áreas de un número determinado de rectángulos. Cuando trabajó con 5 rectángulos no tuvo problemas; debido a que las bases medían 1u y las alturas eran iguales a la imagen de la función evaluada en un número natural. Al modificar la variable didáctica *número de rectángulos de aproximación* y colocarlo en 10, halló bien las alturas pero trabajó con base 1u en vez de 0,5u. Para 80 rectángulos, el estudiante señaló que no pudo hacerlo porque le parecía muy difícil.

En otra de las tareas, el estudiante ya no contaba con el valor numérico de las alturas; ahora contaba con la imagen, por ejemplo, *P* (2; *f*(2)). Se esperaba que no presente dificultades al determinar la altura de cada rectángulo, y por consiguiente al plantear la adición de términos. Sin embargo, no consideró el último término de la suma que era 0,06 *f*(5).

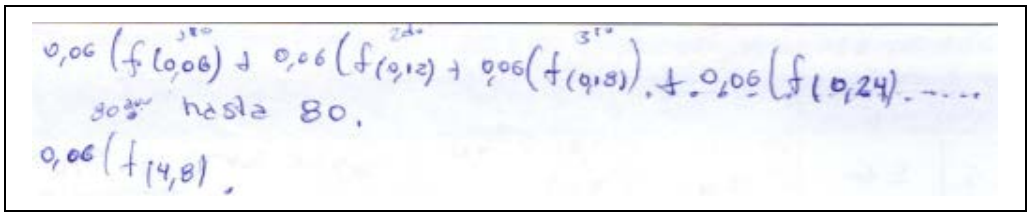


Figura 2: Planteamiento de la suma de áreas de 80 rectángulos

Finalmente, en una última tarea, se trató de ver la viabilidad de reemplazar los valores numéricos generados por la partición del intervalo por símbolos como x_0; x_1; x_2 y x_3, de modo que se facilite el planteo de la suma de términos y su reducción simbólica; con el objetivo de plantear, en otra situación, el límite a dicha suma cuando el número de rectángulos tiende al infinito. La respuesta del estudiante se muestra en la figura.

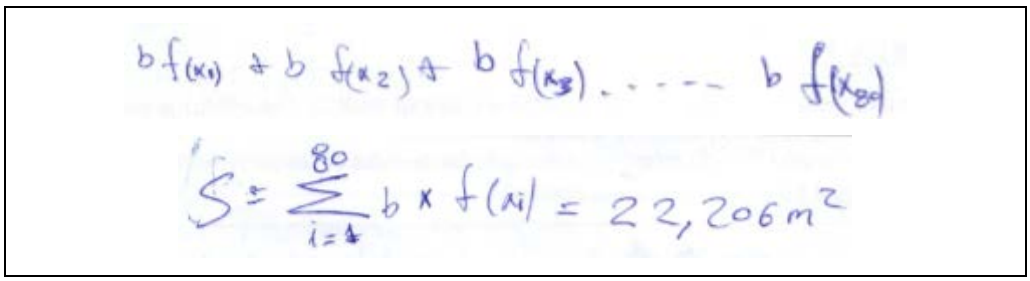


Figura 3: Representación reducida de la suma de términos

Apreciamos que luego de introducir la notación simbólica, el estudiante fue capaz de expresar correctamente la suma de los 80 términos de forma reducida. Por ello decimos que alcanzó las fases de acción, formulación y validación propias de la teoría de situaciones didácticas.

CONSIDERACIONES FINALES

Observamos que inicialmente el estudiante no fue capaz de hallar la suma de áreas de rectángulos cuando el número era grande, por más que contaba con las alturas de los rectángulos de forma numérica; estas dificultades fueron cambiando a medida que el estudiante ya no tenía que calcular la altura, sino expresarla como imagen. Al final, al trabajar exclusivamente con símbolos, el estudiante logró su objetivo. Esto nos hace pensar que para introducir valores genéricos en la partición del intervalo, el estudiante debe pasar por un proceso de cambio de representación, es decir, de número a una expresión símbolica. Esto facilitaría el planteamiento de la suma de Riemann, con miras a definir el área como el límite de dicha suma.

Referencias

Amorim, F. V., Costa de Sousa, G. y Salazar, J. V. (2011). Atividades com Geogebra para o ensino de Cálculo. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Recuperado de: http://www.lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/1649.pdf

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y cambios curriculares?* Vol. 1, pp. 40-55. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/335/33510104.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Freudenthal, H. (1999). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Stewart, J (2001). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas.* México, D. F.: Thomson Editores.

UNA ACTIVIDAD SOBRE ESTIMACIÓN DEL VOLUMEN: APRECIACIONES DE PROFESORES CHILENOS

Noemí Pizarro[1], Lluís Albarracín[2], Núria Gorgorió[2]
Universidad de Tarapacá[1], Universidad Autónoma de Barcelona[2]

Resumen: Escasa es la investigación sobre la enseñanza de la estimación de medida, contenido presente en seis Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares de Matemática de Educación Básica. Por medio de un estudio cualitativo descriptivo, sustentado por el Mathematics Teachers' Specialized Knowledge, nos hemos aproximado al conocimiento sobre la enseñanza de la estimación del volumen que poseen profesores de educación básica en ejercicio docente. Hemos observado que posiblemente las habilidades que desarrollan de la estimación de medida podrían no estar presentes en las aulas nacionales, dado que tanto en las directrices curriculares como en la apreciación docente, el concepto de estimación de medida presenta debilidades.

Conocimiento del profesor, estimación de medida, volumen

INTRODUCCIÓN

No está en discusión que la estimación de medida es un contenido que debe estar en los currículos escolares (Callís, Fiol, Luca y Callís, 2006). Sin embargo, no es un tema que haya recibido una atención adecuada de parte de la investigación (Sowder, 1992; Hogan y Brezinski, 2003)

Las pocas investigaciones existentes han considerado, en su mayoría, las magnitudes longitudinales (Hogan y Brezinski, 2003). En Chile, la estimación de medida ha ingresado como contenido en las Bases Curriculares. En ellas, podemos encontrar seis Objetivos de Aprendizaje y doce Indicadores de Evaluación vinculados a la estimación de medida, tanto en el eje de Medición, como en Números y en Geometría. En este escenario, quisimos indagar en la valoración didáctica que los docentes atribuyen a una actividad sobre la estimación del volumen propuesta en los Programas de Estudio propuestos por el MINEDUC.

REFERENTES TEÓRICOS

Por definición de estimación de medida entendemos que consiste en "asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad correspondiente a una cantidad de magnitud discreta o continua por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa a algún objeto auxiliar" (Pizarro, Gorgorió y Albarracín, 2014, p. 528). De este modo, el concepto se sustenta en tres componentes: valorización numérica (V), percepción (P) y referencia (R), los que se deben tener en cuenta al evaluar una actividad matemática referida a la estimación de medida.

Para poder indagar en el conocimiento del profesor, no posicionamos en el Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) propuesto por Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano y Montes (2014). Consideraremos dos subdimensiones del MTSK, el Knowledge of Topic (KoT) y el Knowledge of Mathematics Teaching (KMT).

El KoT se caracteriza por enfocarse en el conocimiento del contenido matemático y su significado de manera fundamentada, donde se integran tanto el conocimiento que se espera del estudiante como una profundización de este conocimiento. Por su parte, KMT se enfoca en el conocimiento de los materiales, las formas de presentar el contenido y el potencial que puede tener para la instrucción, así como el conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido, intención o contexto determinado.

Hay pocos estudios sobre la enseñanza de la estimación de medida. Forrester y Piké (1998) observaron que en las aulas se trataba como hipótesis predictiva, en forma vaga y superflua. Posiblemente, esta situación se relaciona con la falta de investigación en el tema, lo que se traduce en una debilidad en la práctica docente (Joram, Subrahmanyam, y Gelman, 1998), dado que no se dispone de orientaciones precisas para realizar estimaciones de medida (Frías, Gil y Moreno, 2001).

Por otro lado, Jones, Forrester, Gardner, Grant, Taylor y Andre (2012) al investigar sobre cómo estiman los estudiantes, consideran, a modo de discusión, que no se sabe si los maestros están enseñando habilidades para estimar medida de manera implícita o explícita, tampoco si esto afecta al desarrollo de las habilidades que involucran la estimación de medida.

Considerando los antecedentes anteriores, nuestro objetivo de investigación es: caracterizar el análisis de los docentes sobre una actividad de estimación de medida del volumen. Por el medio del desarrollo de este objetivo, podremos aproximarnos al conocimiento sobre la enseñanza de la medición de los profesores participantes.

EL ESTUDIO

La investigación corresponde a un estudio cualitativo descriptivo de corte investigativo, entrevistamos a 27 profesores en ejercicio. La recogida de datos se llevó a cabo durante su formación continua en educación matemática. Le preguntamos a los docentes si consideran idónea la única actividad de estimación del volumen presente en las directrices curriculares (MINEDUC, 2012, p.148), que corresponde a cuarto año básico y sugiere como indicadores de evaluación: Estiman y comprueban el volumen de objetos irregulares, sumergiéndolos en un vaso graduado:

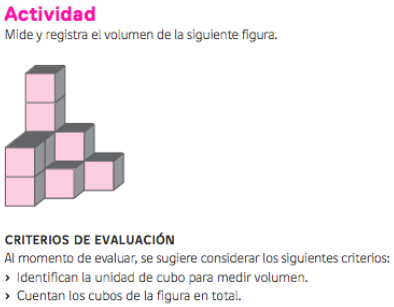


Tabla 1: Actividad sobre estimación de volumen

ANALISIS

Podemos observar que los indicadores de evaluación y los criterios de evaluación se contradicen entre sí, los primeros se refieren a estimación y comprobación y los segundos a

medición y conteo. Por otro lado, el objeto no es irregular, dado que si pensamos en la imagen en tres dimensiones, nos damos cuenta que el objeto tiene 12 unidades cúbicas, de esta forma nos preguntamos ¿es necesario estimar en esta situación? De igual forma, el vaso graduado corresponde a un instrumento de medida, por lo tanto, se realiza una medición.

También podemos apreciar que se solicita contar unidades cubos en un objeto formado por cubos, donde es necesario contar dichos cubos para comprobar el trabajo realizado. De esta forma, no se considera a la estimación de medida como una tarea por sí misma, sino como una tarea que depende de otra.

Considerando las reflexiones anteriormente mencionadas, les preguntamos a los profesores: *¿qué opina de esta propuesta para estimar la medida del volumen? ¿la usaría en su clase?*. Encontramos tres categorías para agrupar 20 respuestas. Hubo siete docentes que se disculparon por no responder, explicando que tenían un conocimiento muy débil sobre volumen; o que era un tema bastante complejo para ellos o que simplemente, nunca habían trabajado el volumen con los estudiantes y consideran que es bastante difícil tratarlo pos cuestiones de tiempo. Las categorías encontradas son las siguientes:

A. Uso de la actividad como conteo de cubos

Cinco de los 27 maestros indicaron que realizarían la actividad de estimación de medida por medio del conteo, considerando que una dificultad para los estudiantes es la orientación espacial, como por ejemplo en esta respuesta:

> María: “Haría la actividad sin problemas, pero los estudiantes tendrían problemas con la orientación espacial, hay ocho visibles, hay uno que está atrás. No sé, esas cosas les complicarían a los niños”.

B. Considera que la actividad es sobre conteo.

Seis docentes indicaron que la actividad sólo corresponde al conteo de los cubos involucrados, y por lo tanto no es estimación de medida, como en este ejemplos de respuesta:

> Germán: “Esta actividad puede ser de conteo sin necesidad de medir o estimar volumen, no me gusta ni la usaría con mis estudiantes”.

C. Considera que la actividad es una medición.

Hay nueve docentes que consideran que la actividad es una medición, dado que involucra un instrumento de medición. Esta respuesta es un ejemplo de esta categoría:

> Manuel: “No, porque lo está midiendo en un vaso graduado, no está estimando, hay una medida exacta y aquí dice que mide y registra el volumen de esa figura”

A los 15 docentes de las categorías B y C, se les solicitó alguna idea para crear una actividad que sí propicie oportunidades para aprender sobre estimación de medida del volumen. Ocho de ellos mencionaron alguna actividad, los demás dijeron que no podían idearla, porque nunca habían visto una actividad al respecto o simplemente porque no se les ocurría.

Las siguientes actividades son dos ejemplos comunes de las actividades propuestas.

> Alejandro: "Lo haría con un caja de zapatos y con cubos más chicos, para que los estudiantes completen el volumen de la caja con los cubos, entregando la medida de cada cosa"

En esta respuesta observamos que el docente busca una actividad de medición del volumen con primas rectos.

> Andrea: "Tengo el vaso graduado, yo lo he hecho con piedras, digo: ya mide tanto, tantos centímetros cúbicos".

Esta docente cambió el objeto de medición, considerando un objeto irregular, sin embargo, realiza una medición.

CONCLUSIONES

En este estudio hemos observado que las apreciaciones de los docentes se caracterizan por que tienen común un KOT sobre estimación de medida confundido con medición o conteo, lo que conlleva a un KMT carente de desarrollo de las habilidades asociadas a la estimación de medida.

De esta forma, el objetivo propuesto en el curriculum no desarrollaría las habilidades matemáticas propuestas, dado que los docentes no consideran ni la referencia ni la percepción al momento de valorar una actividad de estimación de medida. Además debemos mencionar que para los docentes el volumen en sí mismo es un tema complejo tanto el conocimiento matemático como en la enseñanza.

Consideramos que es indispensable entregarle al cuerpo docente directrices precisas y ejemplificadoras sobre el desarrollo de la estimación de medida, tanto en la formación inicial y continua, como en las directrices curriculares y en los libros de texto, para que ésta no sea una debilidad en la práctica docente (Joram et al., 1998; Frías, Gil y Moreno, 2001). En caso contrario, un frágil KoT siempre tendrá como consecuencia un KMT que no propicie oportunidades de aprendizaje.

Referencias

Callís, J., Fiol, M., Luca, C., y Callís, C. (2006). Estimación métrica longitudinal en la educación primaria. factores implícitos en la capacidad estimativa métrica. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, *43*, 91-110.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. A. (Eds.). (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Joram, E., Subrahmanyam, K., y Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research*, 68, 413–449

Forrester, M. y Pike, C. (1998). Learning to estimate in the mathematics classroom: A conversation-analytic approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 334-356.

Frías, Gil y Moreno. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida . Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Hogan, T. P., y Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(4), 259-280.

Jones, M., Forrester, J., Gardner, Grant. E., Taylor, A., y Andre, T. (2012). Students' Accuracy of Measurement Estimation: Context, Units, and Logical. *Thinking. School Science and Mathematics*, 112 (3), 171-178.

Pizarro, N., Gorgorió, N., Albarracín, L. (2014). Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 523-532). Salamanca: SEIEM

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan Publishing Company. 371-387.

LA JUSTIFICACIÓN DE LO INFINITO EN LA ENSEÑANZA ESCOLAR: UN ESTUDIO DESDE LAS VOCES DOCENTES Y LOS LIBROS DE TEXTO

Valentina Pavez Hlousek, Roberto Vidal Cortés
Universidad Alberto Hurtado

Resumen: Esta comunicación tiene por objeto exponer la tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática, la cual consiste en el estudio de las justificaciones que dan profesores y libros de textos acerca de lo infinito de algunos objetos matemáticos del currículo escolar, presentes entre los niveles de octavo básico y segundo de enseñanza media. Para tal efecto, este estudio se compone de tres etapas: la aplicación y análisis de un cuestionario para profesores en activo, la revisión de textos escolares, y al análisis comparativo entre ambas fuentes de enseñanza. El marco referencial que enmarca esta investigación, corresponde a una adaptación de los Esquemas de Prueba propuestos por Harel y Sowder (1998). Aquí se analizan y caracterizan las justificaciones de lo infinito de profesores y libros de texto, para posteriormente establecer relaciones entre ambos. Por último, se exponen las conclusiones de la investigación y las proyecciones e impacto esperado.

Infinito, justificación, profesor de matemática, libros de texto

INTRODUCCIÓN

En los programas de estudio oficiales, se evidencia la presencia de objetos matemáticos que tienen relación con lo infinito, entre los cuales podemos mencionar por ejemplo, los desarrollos decimales periódicos y semiperiódicos, las notaciones de números irracionales, como el del número π, la densidad y continuidad de los números reales, entre otros. Esto avala la necesidad de investigar qué tipo de justificaciones están presentes en la enseñanza, es decir tanto argumentos del profesor como lo provisto en libros de textos, pues la noción de infinito es transversal a diversos contenidos presentes en el currículo escolar chileno.

Investigaciones relacionadas con la noción de infinito en el aula escolar, constatan la importancia de una adecuada comprensión de este objeto (Crespo, 2006). Por un lado, revelan que los procesos infinitos suelen tratarse en el aula apelando a la intuición (Crespo, 2006), lo que conlleva a que en el alumno emerja un sentimiento de desesperación y de un horror al infinito (Ortiz, 1994), y por otro lado, reportan obstáculos didácticos y epistemológicos, resultando que la enseñanza de este concepto sea un desafío para los docentes. (Crespo, 2006)

El infinito en el aula de matemática. De los objetos matemáticos presentes en el currículo nacional, que se encuentran vinculados con la noción de infinito, existen varios investigadores que mencionan la importancia del discurso matemático escolar referidos a la enseñanza de éstos.

Por ejemplo, acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática, Crespo (2009) detecta una marcada tendencia a considerar un infinito potencial, ya que surge en el alumno la necesidad de mostrar los resultados mediante su

expresión decimal, lo que genera obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los números irracionales.

Por otro lado, al tratar los periodos de los números racionales, Pochulu (2007) declara una dificultad común en alumnos de nivel medio, cuando se ven enfrentados a la tarea de identificar un patrón en el desarrollo decimal de un número, ya que cuando no lo encuentran con facilidad, asumen que se trata de un número irracional. Por último, Salat (2011) analiza la igualdad 0,99999… = 1, señalando que aunque matemáticamente es posible probar que dicha equivalencia es válida, nuestra intuición se opone a aceptarla como verdadera.

El problema. A raíz de los antecedentes expuestos, se evidencia la presencia de dificultades en la comprensión de lo infinito que subyace a ciertas temáticas presentes en el aula de matemática. Actualmente se observa, que la noción de infinito en la enseñanza suele trabajarse desde una idea que se quedó en la antigua Grecia, donde predomina una perspectiva potencial e intuitiva. Desde este escenario, surge la necesidad de analizar las justificaciones referidas a lo infinito presentes en la enseñanza escolar.

De lo anterior, emergen entonces las preguntas de investigación que orientan a los objetivos del estudio: ¿Se dan y en tal caso hasta qué punto son comprensibles las justificaciones de profesores o de libros de texto? ¿Qué tipo de justificaciones dan los profesores acerca de lo infinito? ¿Son las mismas que entregan los libros de textos? ¿Existen diferencias en las justificaciones referidas a lo infinito entre algunos objetos matemáticos y otros? ¿Incide la experiencia docente en el tipo de justificaciones que se dan? A partir de estas sub-preguntas de investigación, surge una pregunta de investigación general: ¿Cuáles son las justificaciones de lo infinito presente en la matemática escolar? Así, como objetivo general del estudio se propone: Analizar y caracterizar las justificaciones de lo infinito en algunos objetos matemáticos presentes en la enseñanza escolar.

MARCO REFERENCIAL Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Para abordar este problema, se utiliza como marco de referencia una adaptación de Los Esquemas de Prueba propuestos por Harley y Sowder (1998), categorizando las justificaciones observadas tanto en profesores como en libros de texto, referidas a lo infinito.

Las justificaciones expresadas por profesores, fueron categorizadas según la siguiente tipificación: Justificación intuitiva, Justificación algorítmica, Justificación inductiva, Justificación analítica, Justificación algebraica, Justificación por aproximación, Justificación por definición, Confusión conceptual, Sin justificación, No sabe, o No responde. Cada uno de estos tipos de justificación, responden a la especificidad del objeto matemático en cuestión, donde para ciertas preguntas del cuestionario se observaron tipos de justificación, que en otras no fue posible observar debido a la particularidad de la temática estudiada.

Por otro lado, las justificaciones observadas en los libros de texto, se categorizaron utilizando la tipología de argumentación observada en profesores, con excepción de una categoría, que fue necesario agregar, la cual se denominó “Justificación Geométrica”. Cabe señalar, que las categorías “No sabe” o “No responde” no fue posible observar en los manuales escolares.

La investigación se llevó a cabo mediante un enfoque cualitativo exploratorio, conformado por dos estudios de caso: la voz de los profesores y lo propiciado por los libros de textos de matemáticas. La muestra de profesores que participa del estudio, se compone de veinte docentes en ejercicio, mientras que la muestra de los libros de texto analizados, se constituye de trece libros seleccionados de manera intencional y por conveniencia.

En el estudio de casos centrado en las justificaciones de profesores, se aplica y analiza un cuestionario, validado previamente por juicio de expertos, que consta de dos partes. La primera recopila datos relativos a su experiencia docente: año qué obtuvo el título de profesor de matemáticas, años de ejercicio, niveles escolares donde realiza clases y dependencia económica del establecimiento donde trabaja. La segunda parte recoge información acerca de su perspectiva en torno a situaciones de aula en matemática, para objetos matemáticos que aluden a lo infinito. Al respecto, se selecciona una lista de contenidos del currículo oficial para éstas últimas preguntas: desarrollo decimal periódico, medida irracional para un segmento, división en cero, cifras decimales del número π, amplitud de intervalos reales, y concepto de función representado en diagrama sagital.

El segundo estudio de casos corresponde al análisis de libros de textos. Cabe señalar, que las categorías de justificaciones observadas en las respuestas de profesores, generan una matriz de análisis que posteriormente se utiliza para tipificar y caracterizar las justificaciones referidas a lo infinito, de los mismos objetos matemáticos ya señalados, para los textos de estudio.

Ambos análisis de estudios de caso, permiten levantar conclusiones en cuanto a similitudes o diferencias, entre las justificaciones de los profesores y las que se encuentran presentes en los manuales escolares.

Justificaciones de profesores. De las categorías observadas en las respuestas de profesores, se puede señalar que, el tipo de justificación que predomina por sobre el resto, es la justificación intuitiva, siendo observada a lo menos en una oportunidad en alguna de las últimas seis preguntas del cuestionario. Además, en cuatro de las seis temáticas estudiadas, la justificación por intuición conduce a contradicciones entre los discursos de profesores. Para el desarrollo decimal periódico, la posibilidad de existencia de un segmento de medida irracional, en la infinitud de las cifras decimales del número π y en el cálculo de la amplitud de un intervalo real, este tipo de justificación conlleva a oponer las respuestas entregadas por los docentes.

Por otro lado, la justificación algorítmica, es observada sólo para dos de los temas estudiados: notación decimal infinita periódica y para el cálculo de la amplitud de un intervalo. Cabe señalar, que se justifique algorítmicamente un concepto o un proceso que guarda relación con lo infinito, es casi similar a decir que no hay justificación con respecto al objeto de estudio: lo infinito. No obstante, apoyarse en este tipo de justificación, si bien es mecánica y sigue “recetas” en matemáticas, no conlleva a contradicciones como sí ocurre cuando se justifica desde la intuición.

Se constata que la enseñanza de objetos matemáticos relacionados con el objeto de estudio, responde a creencias que el profesor se forma con respecto al infinito. Esto se sustenta en

que, en general el docente, ante posibles interrogantes de sus alumnos, por un lado, acude a recursos intuitivos para justificar ciertas temáticas, o simplemente opta por evadir los cuestionamientos.

Justificaciones en libros de texto. Para el análisis de justificaciones de los libros de texto, la categoría denominada "sin justificación" es la que predomina en esta fuente de enseñanza. Si bien, no se observa ausencia de justificación en los tres primeros temas (desarrollo decimal periódico, segmento de medida irracional y división en cero), para los tres últimos (desarrollo decimal del número π, amplitud de un intervalo real y representación sagital para una función), se tiene que es una tendencia no observar ningún tipo de justificaciones referida a la infinitud de éstos objetos. Lo infinito de: las cifras decimales de π, el cálculo de la amplitud de un intervalo de clase, y la representación sagital para la enseñanza de funciones; aparece como una imposición en los libros de texto de matemáticas. No obstante, cuando se hallan justificaciones, las que predominan son las denominadas: justificación por aproximación y justificación algorítmica, respondiendo cada una, a la especificidad de los temas tratados. Por otro lado, aparece una categoría de justificación que no se observa en el discurso de los profesores: justificación geométrica. Por último, no se aprecian confusiones conceptuales para ninguno de los temas tratados en los libros de texto.

CONCLUSIONES

Respecto al cuestionario aplicado a profesores, se concluye que no existe diferencia entre las justificaciones de profesores, en cuanto al nivel educativo donde realiza clases (enseñanza básica o media) ni en cuanto a la dependencia económica del establecimiento donde trabaja (colegio particular pagado, particular subvencionado o municipal). En relación a la observación de libros de texto, no se aprecian diferencias entre manuales escolares distribuidos por el Ministerio de Educación y los de carácter particular.

En cuanto al objeto de estudio, en las justificaciones de profesores ante eventuales interrogantes vinculadas con lo infinito, predominan argumentos de tipo intuitivos, lo que genera contradicciones en el discurso. Por otro lado, tanto en lo señalado por los docentes como lo observado en libros de texto, lo infinito de los conceptos matemáticos estudiados, tiende a no justificarse. Sin embargo, se aprecia un mejor dominio conceptual en los libros de texto que en lo expresado por profesores. Por lo menos en los libros de texto, no se aprecian contradicciones como sí ocurre con los enseñantes.

Proyecciones e impacto. Se esperaría por un lado, servir como antecedente para futuros estudios que presenten propuestas didácticas para trabajar con objetos matemáticos que aludan a lo infinito. Por otro lado, se esperaría impactar en el ámbito de la didáctica de tal forma de hacer emerger la necesidad de perfeccionamientos docentes en relación al tema, o tal vez remecer en la toma de consciencia en la elaboración de libros de textos y las justificaciones referidas a procesos infinitos presentes en los objetos matemáticos del currículo escolar.

Referencias

Crespo, C. (2006). Un paseo por el paraíso de cantor: problemas y reflexiones acerca del infinito. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 28-34). México: Gustavo Martínez.

Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. *Revista Premisa, 11(41)*, 21-30.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students` Proof Schemes: Results from exploratory studies. En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research in collegiate mathematics education,* vol. III., 234-283. American Mathematical Society, Providence, USA.

Ortíz, R. J. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana, 1(2),* 59-81.

Pochulu, M. (2007). Períodos de números racionales: Un abordaje desde la teoría de números y con nuevos recursos. *Revista Números, 68*, 4-9.

Salat, R. (2011). El infinito en matemáticas. *Revista Números, 77*, 75-83.

ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LAS ACTITUDES DE FUTUROS PROFESORES HACIA LAS MATEMÁTICAS COMO CONSTRUCCIÓN HUMANA

Víctor Parra González, Rodrigo Panes Chavarría
Universidad del Bío Bío

Resumen: El presente trabajo presenta algunos resultados preliminares de una investigación en curso que aborda las actitudes de un grupo de futuros profesores y profesoras de matemáticas de una universidad del sur de Chile hacia la formación de ciudadanía crítica a través del aprendizaje de las matemáticas. Se utiliza un enfoque metodológico cuantitativo a través de un cuestionario cerrado con escala tipo Likert. Finalmente se presentan algunas reflexiones preliminares sobre la categoría "Matemáticas como construcción humana," donde es posible apreciar una mayor inclinación hacia actitudes favorables de dicho constructo.

Actitudes, ciudadanía crítica, estudios socioculturales

INTRODUCCIÓN

En los últimos años a nivel nacional se ha venido desarrollando una intensa discusión en torno a la importancia de la formación ciudadana en el ámbito escolar. En esta línea varias investigaciones constatan la reconfiguración del rol de los estudiantes, transformándose desde un actor receptor a un sujeto activo en el espacio público (Carrasco, 2008; Cornejo, González, Sánchez y Sobarzo, 2009; *OPECH / Centro Alerta*, 2011).

Desde un enfoque sociopolítico de la Educación Matemática se nos brinda un marco de referencia donde la formación ciudadana se enfoca en desarrollar habilidades matemáticas, tecnológicas y reflexivas para "*analizar situaciones sociales de racismo, género, equidad y justicia socia*"l en general, permitiendo a los estudiantes proponer y actuar ante ellas (Blanco, 2012, p.16), al tiempo que permite afrontar lo que Skovsmose y Valero (2007) han caracterizado como dos paradojas de la sociedad de la información, refiriéndose la paradoja de la inclusión y de la ciudadanía que permiten nuclear la discusión entre educación matemática, justicia social, equidad y democracia.

En consideración de lo expuesto la formación de los estudiantes como ciudadanos críticos y reflexivos constituye más que nunca un desafío central para la escuela en la medida que tras la formación ciudadana se juega el tipo de democracia, de justicia y por tanto de sociedad que se espera construir. Desde esta mirada global y considerando que los profesores constituyen una pieza fundamental en la formación de estudiantes como ciudadanos, la investigación explora las actitudes de futuros profesores hacia el rol de la matemática escolar en la tarea de la formación ciudadana.

MARCO REFERENCIAL

Actitudes hacia la naturaleza de la matemática

Dentro del campo investigativo del dominio afectivo de las matemáticas se considera preponderante la relación entre emociones y aprendizaje. Así desde la década de los 80 se inician las primeras investigaciones en esta línea, siendo McLeod (1989) uno de los pioneros

al establecer la correlación entre los dominios afectivos y los procesos involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, presentando las creencias, las actitudes y las emociones como los primeros componentes de este ámbito. El estudio realizado por Panes (2012) nos reseña el desarrollo posterior de esta línea de investigación, considerando en los años noventa las investigaciones de Lafortune y St. Pierre (1994) y DeBellis y Goldin (1997), quienes amplían un cuarto elemento, los valores. Además agrega que estudios recientes como los de Gómez-Chacón (2000, 2006) dan cuenta que "los afectos ejercen una influencia decisiva en el aprendizaje y en cómo los alumnos perciben y consideran las matemáticas, así como en la propia visión de sí mismos como aprendices y en su conducta".

De los diversos ámbitos que abarca el dominio afectivo de las matemáticas, el presente trabajo se centra específicamente en el estudio de las actitudes, Gómez-Chacón (2000) interpreta la actitud como una predisposición evaluativa, de carácter positiva o negativa, que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento, incluyendo tres componentes; la dimensión cognitiva que se manifiesta en las creencias subyacentes a dicha actitud, una afectiva que se manifiesta en los sentimientos de aceptación o de rechazo de la tarea o de la materia, y una intencional o de tendencia a un cierto tipo de comportamiento. Por su parte Martínez Padrón (2014) considera las actitudes, en general, como predisposiciones a actuar acompañada de valoraciones o evaluaciones positivas, negativas o neutras, sobre alguna situación, sujeto u objeto. En el caso de las actitudes neutras, según Gallegos (2000) implican la falta de atención, interés o compromiso por la matemática.

Ciudadanía crítica y aprendizaje de la matemática

Para diversos autores (Skovsmose, 1997; Gimeno y Henriquez, 2001, Skovsmose y Valero 2007; Parra, 2013), la centralidad del estudio sobre ciudadanía y su relación con las matemáticas escolares gira en la potencialidad de expresar tanto la visión de sujeto como de sociedad que se espera formar a través de la enseñanza de los conocimientos matemáticos. En tal sentido para un formador de juventudes, requiere un posicionamiento desde el cual enfrente su proceso de enseñanza.

La referencia de Gimeno y Henríquez (2001) permite entender la formación en ciudadanía *como un proceso en construcción permanente de derechos y responsabilidades personales puestas en ejercicio en proyectos colectivos de bien común, construidos desde la diferencia y el conflicto, con el respeto a la diferencia, en nuestras sociedades desiguales e injustamente divididas* (2001:24,25). Tales caracterizaciones y el análisis crítico, nos lleva a considerar la *formación ciudadana a través del aprendizaje de la matemática* como un proceso complejo cuya centralidad es la comprensión de los fenómenos naturales y procesos sociales y donde la formación matemática está orientada a aplicar conocimientos y habilidades en contexto. Esta mirada exige por tanto, manejo no sólo del lenguaje matemático y hechos, conceptos y algoritmos, sino también procesos más complejos como el modelamiento y la resolución de problemas.

El avanzar en la formación ciudadanía a través de la matemática, conlleva el desarrollo de competencias críticas y hace posible la solución a muchas problemáticas sociales de los

estudiantes y de sus comunidades, posibilita la intervención, exploración y transformación con base disciplinaria. A su vez, atribuye a las matemáticas visiones más allá de conocimientos inertes y ajenamente situados, logrando percibirla como herramienta actual y eficaz para analizar, modelar, razonar, comunicar y plantear soluciones a problemas cotidianos, tal como señala nuestro marco curricular (MINEDUC, 2009) y otros investigadores(Álvarez, 2014; Panes et al, 2016).

ANTECEDENTES METODOLÓGICOS

La investigación se aborda desde un enfoque cuantitativo con un diseño no experimental y de tipo descriptivo. Se utilizó una muestra de tipo no probabilístico con sujetos seleccionados por disponibilidad correspondiente a estudiantes de la carrera de Pedagogía en Educación Matemática de una universidad pública de la 8va región, considerando en esta primera etapa un número de 46 estudiantes. Como instrumento de recolección de información se diseñó la Encuesta “Ciudadanía y aprendizaje de las matemáticas”, de tipo Likert conformada por 30 ítems distribuidos en tres categorías, a saber, “Matemáticas como construcción humana,” “Uso social del conocimiento matemático” y “Poder formativo de las matemáticas”. En lo relativo al presente trabajo se comunica resultados previos solo la primera categoría.

RESULTADOS PRELIMINARES Y DISCUSIÓN

A partir de la aplicación de la Encuesta a los participantes de la investigación es posible establecer en gráfico N°1 como en las mayor parte de los ítems asociadas a la categoría “Matemáticas como construcción humana” se observa una actitud mayormente favorable o muy favorable hacia ellas.

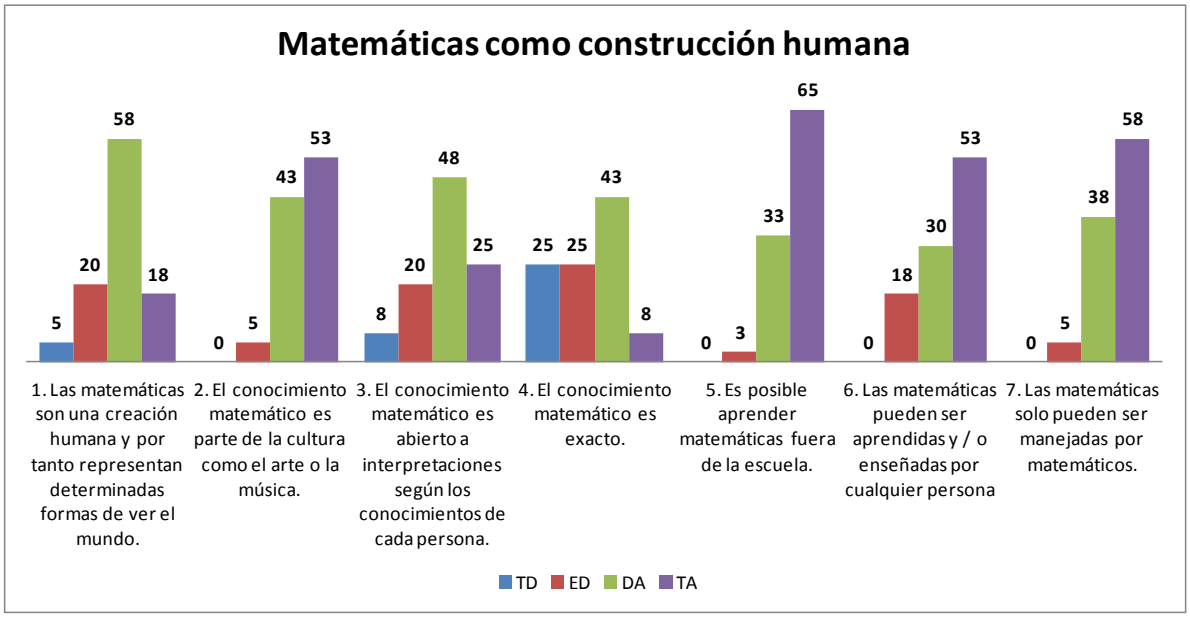


Grafico N°1. Comparativo de porcentajes categoría “Matemáticas como construcción humana”.

La excepción a la tendencia general se observa al analizar los resultados del ítem “Las matemáticas solo pueden ser manejadas por matemáticos” (ítem negativo) donde la mayoría de los participantes se manifestó de acuerdo (30%) o totalmente de acuerdo (58%).

En términos generales los resultados presentados si bien señalan una mayoría de respuestas hacia una mirada favorable de las matemáticas como construcción humana lo que representa una mirada más reflexiva sobre la naturaleza del conocimiento matemático en la línea de las perspectivas socio críticas que sustentan la investigación, también nos informan sobre algunas actitudes desfavorables en ámbitos específicos detallados anteriormente lo que se constituye una primera entrada al análisis de las actitudes de los futuros docentes hacia la formación de ciudadanía crítica en el ámbito escolar que al incorporar las dos categorías faltantes ("Uso social del conocimiento matemático" y "Poder formativo de las matemáticas") nos permitirán caracterizar más íntegramente dichas actitudes.

Referencias

Cornejo, R., González, J., Sánchez, R., y Sobarzo, M. (2009). Las luchas del movimiento por la educación… y la reacción neoliberal. *Observatorio Chileno de Políticas Educativas (OPECH), Universidad de Chile*.

Gimeno, C. y Henríquez, A. (2001). *Hacia una conceptualización de ciudadanía crítica y su formación.* Centro Cultural Poveda. República Dominicana.

Gómez-Chacón, I. Mª. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Ed. Narcea.

Gómez-Chacón, I. M., Op't Eynde, P., & De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *24*(3), 309-324.

Martínez, O. (2014). Sistema de Creencias Acerca de la Matemática. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación.* 14(3), 1-28.

McLeod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: New views of affect in mathematics education. In *Affect and mathematical problem solving* (pp. 245-258). New York: Springer.

Parra, V. (2013). Una propuesta didáctica para construcción de ciudadanía crítica a través del aprendizaje de la matemática. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. ISSN 2301-0797 (pp. 3918-3926). Montevideo.

Panes, R. (2012). *Concepciones de los estudiantes de pedagogía en educación matemática sobre el álgebra escolar: un estudio exploratorio situado en la dimensión afectiva de las matemáticas*. Tesis de Magister no publicada. Universidad Católica del Maule, Talca.

Valero, P. (2007). *Investigación socio-política en educación matemática: Raíces, tendencias y perspectivas*. Disponible en http://vbn.aau.dk/files/31107976/Granada_notas.pdf, consultado el 10 de julio de 2016.

Skovsmose, O. (1997). Competencia democrática y conocimiento reflexivo en matemáticas. *Revista EMA*, *2*(3), 191-216.

Skvsmose, O. y Valero, P. (2007). Educación matemática y justicia social: hacerle frente a las paradojas de la sociedad de la información. En Gimenez, J. Diez-Palomar, J. Civil, M. (Coords), *Educación matemática y exclusión,* (pp. 45-61), Madrid: Graó.

PROGRAMA SEMI-PRESENCIAL PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES Y CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS EN DOCENTES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Sofía Bustos, Flavio Guiñez, Salomé Martínez
Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile

Resumen: En este trabajo se describe un programa b-learning, desarrollado en asociación con el Ministerio de Educación, que busca que docentes de Educación Básica profundicen en los conocimientos fundamentales y las habilidades necesarias para la enseñanza de la matemática. Se describen las principales características del programa, los resultados de experiencias piloto con escuelas de seis comunas de la Región Metropolitana y las mejoras realizadas a partir de estas.

Formación continua, educación básica, b-learning, conocimiento matemático para enseñar

INTRODUCCIÓN

Mediciones internacionales y nacionales dan cuenta de una carencia de conocimientos disciplinares y pedagógicos en la formación docente. El estudio TEDS-M posiciona a los docentes chilenos en el penúltimo lugar de 17 países en conocimiento disciplinar y didáctico de la matemática, bajo países con un ingreso per cápita menor. Esto concuerda con los resultados de la evaluación INICIA e investigaciones nacionales que indican que los docentes tienen un manejo procedimental de la matemática, pero no comprenden de manera profunda los conceptos ni contenidos especializados para la enseñanza de la disciplina (Rodríguez et al., 2011). Esto se ve reflejado en una falta de razonamiento deductivo en la instrucción, en la que hay una priorización del uso de la ejercitación en desmedro de la compresión de los conceptos (Varas, Cubillos y Jiménez, 2008; Araya y Dartnell, 2006; Radovic y Preiss, 2010).

Según el estudio TALIS 2013, la relación contractual de los docentes chilenos es de 29 horas, de las cuales 27 son de trabajo en aula. Esto contrasta con el promedio de la OCDE, que es de 38 horas, con 19 horas en aula. Lo anterior da cuenta del poco tiempo con que disponen los docentes para actividades docentes fuera del aula, en particular, para desarrollo profesional.

Con respecto al equipamiento tecnológico y conectividad de los establecimientos educativos, se han realizado diversos programas para dar cobertura de internet, entre ellos el Programa ENLACES que ya en el 2004 había asegurado la conectividad a un 90% de las escuelas del país (UNESCO, 2005). Desde el 2011 existe un proyecto que busca entregar banda ancha de calidad al 70% de las escuelas públicas (SUBTEL 2013). Por otra parte, en el último Censo sobre uso de TIC reveló que prácticamente todos los docentes cuenta con un computador y más del 80% con acceso a Internet en su hogar (Mineduc 2013). Sin embargo, según directivos de escuelas, los docentes requieren formación en el uso de TIC, lo que es consistente con la baja frecuencia de su empleo en el aula.

Lo anterior da cuenta de docentes que tienen carencias de conocimientos especializados para la enseñanza de la matemática y que, si bien no disponen de mucho tiempo para

desarrollarse profesionalmente, tienen acceso a computadores e Internet que pueden ser usados para este fin.

Descripción del programa

El Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile, en colaboración con el Ministerio de Educación, ha desarrollado Suma y Sigue, un programa de formación continua para docentes de Educación Básica en modalidad b-learning, que integra estrategias pedagógicas propias de los modelos presenciales y a distancia, con el fin de facilitar el acceso a este por parte de los docentes de todas las regiones del país.

El objetivo del programa es profundizar en los aspectos del conocimiento matemático que son claves e indispensables para la enseñanza de la matemática en Educación Básica, pero que muchos autores reconocen como distinto al requerido en otras labores matemáticas (Ball, Hill y Bass, 2005; Ball et al, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Ma, 1999). Siguiendo el modelo de conocimiento matemático para enseñar (MKT) del equipo de Ball, el programa tiene como objetivo desarrollar el conocimiento común del contenido (CCK) y el conocimiento especializado del contenido (SCK), junto con la promoción de: (i) el aprendizaje de ideas y conceptos matemáticos a través de un enfoque fenomenológico, (ii) la comprensión conceptual más que la procedimental, y (iii) la reflexión sobre la matemática fundamental para la enseñanza.

Dadas las características del programa, se requirió el trabajo conjunto entre profesores con experiencia en aula y matemáticos con experiencia en educación. Para el desarrollo de la gráfica e interfaz del programa, se conformó un equipo de diseñadores gráficos y multimedia. El proceso de elaboración requirió una serie de revisiones para asegurar la calidad del resultado, junto con pruebas pre-piloto con profesores que evaluaban pertinencia, funcionalidad y usabilidad.

Suma y Sigue tiene un diseño modular que considera los ejes del currículo y los niveles escolares. Aunque el programa no busca ser exhaustivo, se abordan los temas fundamentales que se abordan en la Educación Básica priorizando los que proveen mayor dificultad en su enseñanza. Cada curso tiene una duración de entre 9 y 10 semanas, con 4 o 5 horas de dedicación semanal. Hay 3 sesiones presenciales y de 4 a 6 talleres virtuales, distribuidos en dos módulos. El trabajo virtual es asíncrono, es decir, los docentes trabajan a su propio ritmo; eso sí, en todo momento son monitoreados y apoyados por tutores virtuales. Las sesiones presenciales tienen el propósito de introducir el programa, la plataforma y los cursos; motivar a los docentes a completar el curso; responder preguntas; y sistematizar y discutir acerca de su proceso de aprendizaje.

Los talleres virtuales están diseñados para desarrollarse en promedio en 5 horas y constan de varias actividades con objetivos de aprendizaje precisos. Cada actividad trata aspectos fundamentales de la matemática utilizando un enfoque constructivista; se inicia con una situación contextualizada donde aparecen los contenidos matemáticos y se desarrollan paso a paso. Las actividades buscan promover: i) la indagación matemática, a través del uso de herramientas interactivas; ii) la reflexión y el razonamiento, por medio de situaciones problemáticas, preguntas y retroalimentaciones detalladas a preguntas claves; iii) la

búsqueda de diferentes estrategias para la resolución de problemas; y iv) el uso de diversas representaciones y modelos que se ilustran, por ejemplo, utilizando diagramas y animaciones. Muchas tareas se centran en el análisis de diferentes estrategias y procedimientos de resolución, de soluciones incompletas, así como posibles errores o dificultades asociadas con ellos. Se privilegió el uso de preguntas de respuesta corta, numéricas o textuales, por sobre preguntas abiertas, y de respuesta múltiple por sobre elección múltiple. Las actividades y talleres también poseen instancias de síntesis que permiten conectar los contenidos aprendidos hasta el momento.

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

Desde 2015, el programa Suma y sigue ya se ha implementado en las escuelas públicas de 13 comunas de las regiones Metropolitana y de O'Higgins, llegando a más de 600 docentes de Educación Básica. A continuación, se describen los resultados de la aplicación piloto en las comunas de la Región Metropolitana.

Se diseñaron y aplicaron instrumentos para evaluar los cursos y su implementación: un cuestionario en línea para caracterizar a los docentes y obtener su perfil TIC; dos encuestas para evaluar la satisfacción con los cursos y la percepción respecto a la usabilidad de la plataforma. También se llevaron a cabo dos grupos focales para obtener información acerca de sus experiencias de aprendizaje y para triangular los datos obtenidos a través de las encuestas.

Resultados principales

En cuanto al perfil de las TIC de los docentes, los resultados muestran que el 95,2% de ellos tienen Internet en casa, y el 45,2% había participado en un curso de aprendizaje a distancia. Sin embargo, el 25% de los maestros se sienten incompetentes o demasiado incompetentes con respecto al uso de recursos tecnológicos.

Los cursos tuvieron una alta tasa de retención: 90% entre quienes rindieron la primera evaluación. La satisfacción general fue muy alta, con un 92% de los profesores que declararon una experiencia satisfactoria con los cursos. La mayoría de los docentes expresaron que los cursos eran muy exigentes, apreciaron la originalidad y la variedad de contextos, y manifestaron que los contenidos abordados son relevantes para su trabajo y les ayudaron a desarrollar habilidades.

Por otro lado, los instrumentos permitieron identificar dificultades que tuvieron los docentes para llevar a cabo de manera óptima los cursos. La extensión de algunas explicaciones fue una de las que más llamó nuestra atención, después de que varios maestros reportaron tener problemas para entender los enunciados y explicaciones, lo que, según sus propias palabras, se debía la falta de comprensión lectora. Aunque los maestros reconocieron la diversidad de formatos de preguntas y el enfoque en la reflexión, expresaron su preocupación por la dificultad de algunas de ellas, en particular las preguntas de respuesta múltiple (alternativas con más de una respuesta correcta). Por último, varios docentes admitieron que no estaban leyendo con atención las secciones de síntesis porque querían seguir avanzando en las actividades.

Mejoras

Algunas de las mejoras realizadas a partir de la información recabada durante las experiencias piloto son las siguientes:

- Algunos textos se acortaron y simplificaron, por ejemplo a través de la incorporación de más imágenes y animaciones.
- Se agregaron preguntas de dificultad intermedia, para generar un andamiaje más progresivo.
- Las secciones de síntesis se hicieron interactivas para que los docentes se vean obligados a tomar una papel activo en la consolidación de su aprendizaje.
- Se incorporaron secciones con contenidos clave y otras con observaciones pedagógicas.
- El diseño se modificó para resaltar visualmente las ideas y características relevantes de la secciones.

CONCLUSIONES

La colaboración entre profesores de matemáticas y matemáticos fue crucial para el desarrollo del programa. El equipo a cargo de la elaboración de cada curso se involucró en muchas discusiones sobre cómo introducir los contenidos de manera intuitiva usando contextos significativos para profesores y estudiantes, y a su vez preservando el rigor que el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas requiere. Las reuniones de revisión fueron críticas para definir los objetivos de aprendizaje, y también demostraron ser muy útiles para mejorar la comprensión de cada equipo acerca de la matemática elemental. Todo esto dio lugar a mejores protocolos y procesos para el diseño de las actividades, lo que se tradujo en tareas matemáticas más variadas y pertinentes.

Aunque el programa está en desarrollo, los resultados de la experiencia piloto son prometedores y han permitido mejorar significativamente los cursos y la experiencia del usuario. Un desafío pendiente es el desarrollo de instrumentos para medir diferencias en el conocimiento matemático para la enseñanza de los docentes, y el impacto general del programa.

Referencias

Araya, R. y Dartnell, P. (2008). Informe Proyecto FONIDE Nº 212 2006. *Saber Pedagógico y Conocimiento de la Disciplina Matemática en Profesores de Educación General Básica.*

Ball, D. L., Hill, H., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(3), 14-46.

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowlage for Teaching. What Makes it Special? *Journal of Theachers Education*, 59(5), pp. 389-407

Ball, D.L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Radovic, D., y Preiss, D. (2010). Patrones de discurso observados en el aula de matemática de 2º ciclo básico. *Psykhe*, 19(2), 65-79.

Rodríguez, B., Carreno, X., Muñoz, V.,Ochsenius, A., Mahías, F., y Boch, C. (2013) Informe proyecto FONDIDE F611150. *¿Cuánto saben de matemática los docentes que la enseñan y cómo se relaciona ese saber con sus prácticas de enseñanza?*

Subsecretaría de Telecomunicaciones de Chile (2013). *Gobierno presenta Agenda Digital Imagina Chile 2013-2020.*

Unesco (2005) Formación *Docentes y las TIC: Logros, tensiones y desafios. Estudios realizados en Bolivia, Chile, Colombia, Ecuador, México, Panamá, Paraguay y Perú*. Publicación digital. OREALC/UNESCO, Santiago. Chile.

Varas, L., Cubillos, L., y Jiménez, D. (2008). Informe final Proyecto FONIDE N° 209-2006. *Análisis de la calidad de clases de matemática. Teorema de Pitágoras y razonamiento matemático*. Departamento de Estudios y Desarrollo. División de Planificación y Presupuesto. Ministerio de Educación.

UN INSTRUMENTO PARA LA EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA ELEMENTAL EN FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Nataly Pincheira Hauck, Claudia Vásquez Ortiz
Pontificia Universidad Católica de Chile

Resumen: En este trabajo se presenta el proceso de construcción y validación de un instrumento cuyo propósito es evaluar aspectos parciales del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de las matemáticas elementales en futuros profesores de Educación Básica. Con esta finalidad, nos hemos situado desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción Matemática, pues éste brinda herramientas de análisis que permiten aportar evidencias para la mejora de la formación inicial docente.

Conocimiento didáctico-matemático, matemáticas elementales, instrumento de evaluación, futuros profesores de educación básica

INTRODUCCIÓN

La destacada importancia de la formación inicial docente en la calidad de la educación, ha sido parte de la preocupación por mejorar la preparación de los futuros profesores, especialmente en el área de la matemática, sobre todo si consideramos los bajos resultados obtenidos por nuestro país tanto en evaluaciones internacionales como nacionales que refieren sobre la calidad de los egresados de las carreras de pedagogía en Educación Básica. Un ejemplo de esto es el estudio comparativo internacional *Teacher Education and Development Study in Mathematics* TEDS-M (Tatto, Schwille, Ingvarson, Rowley y Peck, 2012), que evalúa la formación inicial docente de los maestros de primaria y secundaria en matemáticas, ubicando a Chile entre los peores del mundo, en penúltimo lugar. De igual manera, la prueba INICIA (2014) evidencia grandes vacíos en el ámbito disciplinar y pedagógico que poseen los egresados de las carreras de pedagogía en Educación Básica. Es en este contexto, que surge la necesidad de contar con instrumentos que permitan analizar el conocimiento didáctico-matemático que poseen los futuros profesores de Educación Básica para enseñar matemáticas elementales.

De acuerdo con Liping Ma (1999), se entendera por matemática elemental como la comprensión profunda de las matemáticas que debería poseer un profesor para ejercer en plenitud su tarea de enseñar matemáticas a niños y niñas, en los primeros años de escolaridad.

Este trabajo da a conocer el proceso de construcción y validación de un instrumento que permite evaluar aspectos iniciales relevantes del conocimiento didáctico-matemático que poseen los futuros profesores de Educación Básica para la enseñanza de las matemáticas elementales y desde esta perpectiva poder diagnosticar y comprender las necesidades formativas tanto didácticas como disciplinares, con el propósito de mejorar la calidad de la formación inicial docente. Dicho instrumento se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico

del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino 2002, Godino, Batanero y Font, 2007).

MARCO TEÓRICO

En la actualidad son variados los modelos de conocimiento matemático que aportan en la formación de profesores, sin embargo, en algunos casos estos resultan ser de carácter general y no atienden a un análisis detallado de los tipos de conocimiento que debiese tener un profesor para lograr una enseñanza certera de las matemáticas. Bajo esta mirada, Godino (2014) propone un modelo integrador para el análisis y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático. Dicho modelo, se fundamenta en los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008), vinculado a las faceta del EOS: epistemológica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, implicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática (Figura 1).

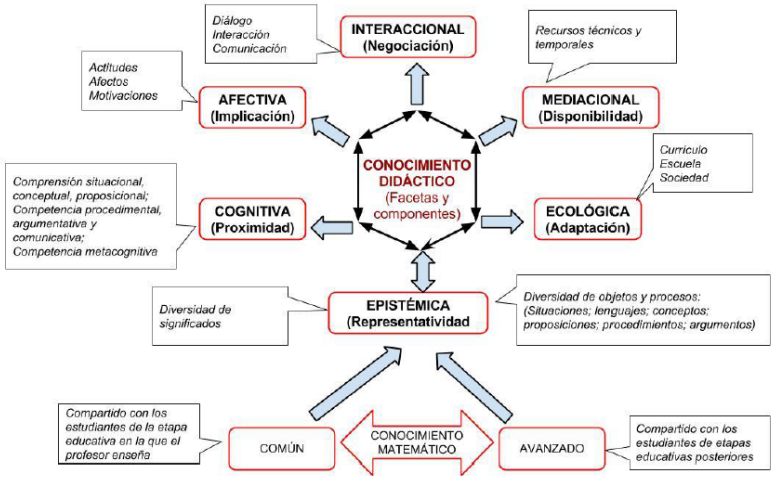


Figura 1: Conocimiento Didáctico-Matemático basado en el EOS (Godino, 2009, p. 21)

Así por medio de las seis facetas anteriores, este modelo considera las siguientes tres categorías globales sobre el conocimiento didáctico-matemático (CDM) que han sido consideradas para este estudio: a) *conocimiento común del contenido:* este conocimiento es analizado a través de la faceta epistémica, y hace referencia al conocimiento que el profesor deba poner en práctica para resolver situaciones problemáticas en relación a un tema específico matemático, no ligado necesariamente a la enseñanza; b) *conocimiento ampliado del contenido:* se analiza este conocimiento a partir de la faceta epistémica, teniendo relación con el conocimiento avanzado que posee el profesor al plantear una cierta situación problema a sus estudiantes, teniendo la capacidad de vincularlos con otros contenidos del currículum; y c) *conocimiento especializado*: al igual que en los casos anteriores, este conocimiento se analiza desde la faceta epistémica y hace mención a aquel conocimiento adicional que debe manejar un profesor, lo cual lo diferencia de otra persona que no es un profesor, pero que conoce de matemática. El conocimiento especializado a su vez, se subdivide en cuatro categorías: conocimiento del contenido especializado, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, conocimiento del contenido en relación con la enseñanza y conocimiento del contenido en relación con el currículum.

MÉTODO

Esta investigación es de tipo exploratorio, dados los escasos estudios existentes en nuestro país sobre el tema. Para alcanzar el propósito de construir un instrumento que permita evaluar el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de las matemáticas elementales que poseen los futuros profesores de Educación Básica, nos hemos basado en el modelo propuesto por Vásquez y Alsina (2015). Asímismo, para la contrastación de la validez de los ítems que componen el instrumento, que corresponde a un cuestionario de respuesta abierta, se ha considerado la revisión de dicho instrumento por medio del juicio de expertos y el análisis de los ítems a partir de una aplicación piloto.

RESULTADOS

Juicio de expertos

El instrumento diseñado para este estudio fue sometido a un proceso de validación por tres expertos en didáctica de la matemática chilenos. Esto permitió analizar la pertinencia de los ítems del cuestionario según las categorías del modelo de conocimiento didáctico-matemático. A partir de los comentarios y sugerencias recibidos por parte de los expertos, se reformularon y afinaron distintos aspectos de los ítems del cuestionario, tales como redacción, reformulación de preguntas, incorporación y sustitución de nuevos ítems. En su versión inicial el cuestionario se encontraba compuesto por 8 ítems de respuesta abierta, una vez sometido al juicio de expertos, este quedo constituido en su versión final por 6 ítems de respuesta abierta, los cuales permiten abordar las categorías globales y subcategorías del modelo de conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2014). A modo de ejemplo y por cuestiones de espacio a continuación se presenta un ejemplo de ítem (Figura 2), con su respectivo análisis.

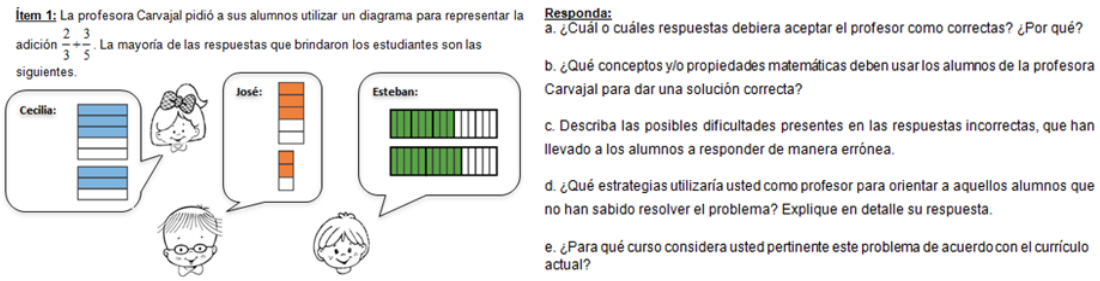


Figura 2: Ítem 1 del Cuestionario

La categoría y/o subcategoría del modelo de conocimiento didáctico matemático que se requiere medir a través de este ítem es el conocimiento común del contenido que poseen los futuros profesores de educación básica en relación al trabajo con fracciones mediante la pregunta a), el conocimiento especializado del contenido y las subcategorías que lo componen: conocimiento especializado a través de la pregunta b), el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes en la pregunta c), el conocimiento en relación con la enseñanza en la pregunta d) y el conocimiento en relación con el currículo en la pregunta e). Cabe señalar que esta situación problemática de enseñanza fue formulada a partir de la propuesta otorgada por los estándares orientadores para egresados de carreras de pedagogía en educación básica, disciplinarios de matemática con ejemplos (Mineduc, 2012).

Aplicación piloto del cuestionario

Luego de la reestructuración del cuestionario a partir del juicio de expertos, se llevó a cabo la aplicación piloto del instrumento de manera voluntaria a 12 estudiantes de Pedagogía en Educación General Básica que cursaban su cuarto año de carrera. El objetivo de esto fue analizar las posibles limitaciones que podría presentar en cuanto a su redacción, orden, comprensión de los ítems y subítems diseñados, como así también la pertinencia del tiempo para responder (90 minutos). La aplicación piloto del instrumento también se consideró el análisis de las respuestas del cuestionario, asignando 2 puntos a la respuesta correcta, 1 si es parcialmente correcta y 0 si responde manera incorrecta. Cabe señalar que no hubo ningún estudiante de Pedagogía en Educación General Básica alcanzó el puntaje máximo del instrumento (44 puntos). Por otra parte el 75% de ellos alcanzó un puntaje inferior a 24 puntos.

Mediante las dudas y consultas que plantearon los estudiantes de pedagogía se mejoró la redacción de los ítems 1) y 5), a su vez, se eliminó el subítem 2b), pues coincide su respuesta con la respuesta del subítem 2a). Por otra parte, se ha fusionado el subítem 4b) y 4b), pues la pregunta 4b) tiene relación con las actividades que se propondrían para la enseñanza del contenido, con lo cual se da respuesta a esta pregunta en la pregunta 4a) al mencionar las estrategias de enseñanza. El subítem 4b) es reemplazado por la pregunta "¿Para qué nivel escolar considera usted pertinente la situación problemática planteada?".

CONSIDERACIONES FINALES

El desarrollo de este estudio ha permitido observar la necesidad de contar con un instrumento de evaluación que describa el conocimiento didáctico-matemático que poseen los futuros profesores de Educación Básica para enseñar matemáticas elementales. Mediante este trabajo, se ha mostrado muy sucintamente el proceso de diseño, construcción y validación del instrumento, lo que ha llevado a refinar y elaborar la versión final del cuestionario CDM-Matemáticas Elementales. Por otra parte, a partir de la aplicación piloto del instrumento se ha observado, de manera parcial, el bajo nivel que poseen los futuros profesores en todas las categorías del conocimiento del contenido matemático.

Referencias

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemática. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Hill, H. C., Ball, D. L. y Shilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of student. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Ministerio de Educación (2012). *Estándares Orientadores para la Formación Inicial Docente*. Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago, Chile

Ministerio de Educación (2015). *Resultados INICIA 2014*.Santiago, Chile

Tatto, M.; J. Schwille; L. Ingvarson; G. Rowley y R. Peck, (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M).*

Vásquez, C.y Alsina, A. (2015). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: Diseño, Construcción y Validación de un Instrumento de Evaluación. *Bolema,* 29(52), 681-703. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13.

CAUCHY: ¿INFINITESIMALES VERSUS LÍMITE O INFINITESIMALES Y LÍMITE?

Iván Medrano, Luis R. Pino-Fan
Universidad de Los Lagos

Resumen: En esta comunicación presentamos un estudio histórico-documental sobre la concepción de Cauchy de dos objetos matemáticos: los infinitesimales y el límite de una cantidad variable. Nuestra fuente de referencia es Cours D'Analyse, obra de dicho autor. Nuestro análisis e interpretación de las ideas expresadas por Cauchy con referencia a estos conceptos, considera la amplia red conceptual establecida por objetos matemáticos tales como infinito, números reales, continuo numérico, aproximación, función y recta real, en la emergencia del concepto de límite. Así mismo, consideramos la visión disciplinar y metodológica expresada y trabajada por el autor. Este análisis está orientado a la reconstrucción epistemológica del concepto de límite, para su posterior uso en la construcción de secuencias de tareas que faciliten su comprensión por parte de los estudiantes.

Variable, límite, infinitesimal, infinito, continuo

ANTECEDENTES

Considerando como standard la formalización del cálculo diferencial e integral desarrollada por Weirstrass, con el concurso de Cantor y Dedekind (Boyer, 2013) que significó el rechazo de los infinitesimales, la visión de los historiadores contemporáneos de las matemáticas con respecto al aporte de Cauchy a las concepciones modernas del cálculo y del análisis, revela una sorprendente falta de consenso (Tall y Katz, 2014). Algunos historiadores de la matemática, consideran a Cauchy un precursor del análisis desarrollado por Weirstrass (Grabiner, 1983, citado por Tall y Katz, 2014, p. 2). Para otros, encabezados por Robinson, creador del análisis no standard, Cauchy es un antecesor de esta teoría (Lakatos, 1987, p. 67). También está una tercera posición que considera su trabajo anclado en las concepciones de Newton y Leibniz (Schubring, 2005, citado por Tall y Katz, 2014, p. 2). Nuestro estudio se centra en el texto Cours D'Analyse de Cauchy (1821) y en el contexto matemático en que se desarrolla.

MARCO TEÓRICO

En este trabajo se considera como referente teórico el enfoque onto-semiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). En el EOS la actividad matemática es modelada en términos de prácticas, configuraciones de objetos primarios y procesos que son activados por las prácticas (Godino & Batanero, 1994, p.334). Se consideran como objetos primarios: los problemas, los elementos lingüísticos, las definiciones, las proposiciones, los procedimientos y los argumentos. El término configuración se usa para designar un sistema de objetos primarios que están relacionados unos con otros. El objetivo de este trabajo es describir los objetos primarios con los cuales pueden construirse configuraciones, tanto del límite de una cantidad variable como de los infinitesimales.

EL "COURS D'ANALYSE" DE CAUCHY

En la introducción de su texto, Cauchy (1821) se refiere a las orientaciones generales de su obra, señalando entre ellas: "hablando de la continuidad de las funciones, yo no he podido dispensarme de hacer conocer las propiedades principales de las cantidades infinitesimales, propiedades que sirven de base al cálculo infinitesimal" (p. ii). Con esta primera precisión, el lector es advertido del rumbo y procedimientos que se usarán en el desarrollo de esta versión del cálculo infinitesimal. Continuando con el tratamiento que él hace de esta disciplina, el autor expresa: "...En cuanto a los métodos, yo he buscado dar todo el rigor que se exige en la geometría …" (Ibíd., p. iii). Se aprecia en esta declaración de principios, una búsqueda de rigor que sea similar a la lograda por la formalización axiomática deductiva de la geometría, pero ¿cuáles son los elementos básicos sobre los que se pretende construir este sistema formal? Más que dar una respuesta metodológica y teórica a esta interrogante, Cauchy muestra estos elementos en su propuesta de formalización del cálculo infinitesimal, ellos son: los conceptos de número y cantidad (considerados como conceptos diferentes).

Número y cantidad en Cauchy

Las definiciones de número y cantidad están dadas por:

> …Nosotros aplicamos siempre la denominación de números en el sentido empleado en aritmética, haciendo emerger los números de la medida absoluta de las magnitudes, y aplicaremos únicamente la denominación de cantidad a las cantidades reales positivas o negativas, es decir, a los números precedidos de signos + o -. De hecho, nosotros miramos las cantidades como destinadas a expresar los crecimientos o las disminuciones, de manera que una magnitud dada será simplemente representada por un número, si uno se limita a compararla con otra magnitud de la misma especie considerada como unidad; y por un número precedido de signo + o de signo -, si uno la considera como destinada principalmente a servir al crecimiento o la disminución de una cantidad fija de la misma especie… (Cauchy, 1821, p. 2)

Cauchy define el valor numérico de una cantidad, el valor absoluto de una cantidad, como:

> Nosotros llamaremos valor numérico de una cantidad al número que de hecho es la base, cantidades iguales aquellas que tienen el mismo signo con el mismo valor numérico y cantidades opuestas dos cantidades iguales en sus valores numéricos pero opuestas en sus signos. (Ibíd.)

De lo expuesto, se establece que el concepto de número tiene su raíz en la consideración de la medida de una magnitud, entendiéndose la medida como una relación de comparación entre la magnitud dada y otra de la misma especie, escogida como unidad o fuente de referencia, y una vez establecida esta comparación, permanece fija (i.e., tiene un carácter estático). Por lo que se puede inferir, hasta aquí, el concepto de *número* en Cauchy está relacionado con el continuo geométrico de la geometría euclidiana. En cambio, el concepto de *cantidad*, está relacionado con el continuo numérico. También se vislumbra el significado de una cantidad como instrumento para cambiar otra cantidad dada, al referirse a ella como destinada al crecimiento o decrecimiento de una cantidad fija de una misma especie, es decir el concepto de cantidad tiene un carácter dinámico. El concepto de cantidad variable es un importantísimo elemento operacional para la construcción del cálculo que desarrolla Cauchy: "Se denominará cantidad variable a aquella que uno considera que recibe sucesivamente numerosos valores diferentes unos de los otro". (Ibíd., p. 4)

Con base en la definición de cantidad variable, se introducen los conceptos de límite e infinitesimal:

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que se termina por diferir de él tan poco como uno lo quiera, este último valor es llamado el límite de todos los otros. (Ibíd., p. 4)

En esta definición de límite hay dos aspectos ligados entre sí, los cuales necesitan precisarse: a) valores sucesivos atribuidos a una misma variable; y b) aproximación indefinida a un valor fijo. La siguiente definición que introduce Cauchy es la de infinitesimal o cantidad infinitamente pequeña:

> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que sean menores que todo número dado, esta variable se denomina un infinitesimal o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene a cero por límite. (Ibíd.)

Una definición matemática actual usa la forma lógica de equivalencia "sí y sólo sí". La descripción anterior de Cauchy de una cantidad variable como infinitesimal, tiene la forma lógica de una implicación o condicional lógico: *si* el valor absoluto de una cantidad variable decrece de tal manera que es menor que cualquier número positivo dado *entonces* la cantidad variable es un infinitesimal. Posteriormente, para trabajar con los infinitesimales, Cauchy necesita considerarlos como existentes en sí, y por lo tanto, caracterizarlos adecuadamente. ¿Si designamos una cantidad variable como infinitesimal, entonces el conjunto de sus valores absolutos decrece de tal manera que es menor que cualquier número positivo dado? Cauchy (Ibíd.), responde la cuestión con la siguiente afirmación: "…Sea α una cantidad infinitesimal, es decir una variable cuyo valor numérico decrece indefinidamente…" (p. 27). Por lo tanto, una cantidad variable es un infinitesimal, sí y sólo sí su valor numérico decrece indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero. Cauchy (Ibíd.) precisa lo que debe entenderse por un decrecimiento constante y un decrecimiento indefinido:

> La superficie de un polígono regular circunscrito a un círculo dado decrece constantemente, a medida que el número de sus lados aumente, pero no indefinidamente, puesto que ello tiene por límite la superficie del círculo. De la misma manera, una variable, que admite por valores sucesivos solamente los diferentes términos de la sucesión: 2/1,3/2,4/3,5/4,6/5…, decrece constantemente, pero no indefinidamente, puesto que sus valores sucesivos convergen hacia el límite 1. …. una variable, que asume por valores sucesivos los diferentes términos de la sucesión: 1/4,1/3,1/6,1/5,1/8,1/7…, no decrece constantemente, porque la diferencia entre dos términos consecutivos de esta sucesión es alternadamente positiva y negativa; … ella decrece indefinidamente, porque su valor terminará por estar debajo de todo número dado. (p. 27)

En la concepción de límite de una variable se pueden distinguir dos niveles de significación: El primero geométrico y de carácter topológico, al ser representados geométricamente, la sucesión de valores que asume la variable, en una recta dirigida por los puntos que tienen por coordenadas los valores de dicha sucesión, se acumularán en torno de un punto fijo que tiene por coordenada el valor fijo 'límite de la variable'. El punto fijo es denominado en topología punto de acumulación (Rudin, 1966, p. 40). El segundo nivel, analítico, caracterizado por el conjunto de valores absolutos de las diferencias entre los valores que asume la variable y el valor fijo (límite de la variable), representa un proceso de decrecimiento indefinido. Interpretamos, coincidiendo con Tall y Katz (2014), que la

definición de límite de Cauchy describe un proceso, pero dicho proceso es un proceso de variación de cantidades dadas por una sucesión, y dirigido a un valor fijo finito o un valor infinito. El decrecimiento y crecimiento indefinido, son casos particulares de este proceso. Basándonos en la definición de estos procesos, interpretamos la definición de límite de Cauchy (para el caso finito): el valor L, finito, es un límite de la variable *x*, cuando esta asume el conjunto de valores dados por una sucesión, sí y sólo sí para todo real positivo μ: |L-*x*|< μ, para todos los valores que asume *x*, menos un número finito de ellos. Relacionando la definición de infinitesimal con esta formulación de la definición de límite, es fácil establecer la siguiente equivalencia: sea *x* una variable que asume los valores dados por una sucesión, L una cantidad fija. *u*=L-*x*, otra variable, *u* es un infinitesimal sí y sólo sí L es límite de la variable *x*. Esta equivalencia se usa particularmente en la exposición de la continuidad. La definición de límite de Cauchy tiene una diferencia con la definición de Weirstrass: Cauchy admite la existencia de varios (infinitos) valores límites de una función f(*x*), cuando la variable independiente *x* se aproxima a un valor fijo dado *p*; mientras que en la concepción de Weirstrass se contempla la unicidad del límite. La explicación de esta diferencia, a nuestro entender, se encuentra en la definición de número real utilizada por Cauchy. Para él, un número real es el límite de una sucesión de números racionales. Posteriormente, con el trabajo de Cantor, se concibe un número real como una clase de equivalencia formada por infinitas sucesiones de números racionales que tienen como límite el número real. Lo anterior, aplicado al siguiente teorema (Rudin, 1966, p. 85), constituye para nosotros la explicación de la diferencia conceptual entre la definición de Cauchy y la de Weirstrass: "Sea $f: E \subseteq R \to R$, p punto de acumulación de E. El $\lim_{x \to p} f(x) = q$ sí y sólo sí $\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q$ para toda sucesión $\{p_n\}$ en E, tal que $p_n \neq p$, $\lim_{n \to \infty} p_n = p$". Para Cauchy dos sucesiones cualesquiera (de números racionales) con términos diferentes convergiendo a un mismo límite, son consideradas como diferentes, y las sucesiones imágenes determinadas por la función pueden converger a valores diferentes. En cambio, con la definición de número real dada por Cantor, para que el conjunto de sucesiones imágenes tengan límite, es necesario la convergencia de todas ellas a un mismo número real.

CONCLUSIONES

En relación al análisis expuesto, estimamos que hay razones fundamentadas para establecer en la exposición de Cauchy, una integración consistente de dos concepciones frecuentemente presentadas como antagónicas: los infinitesimales y el límite de una variable. Así mismo, su presentación del cálculo infinitesimal está fuertemente condicionada por el contexto matemático imperante en su época, expresado por: las nociones de número real, función, infinito, continuo, las relaciones entre la geometría euclidiana y la cartesiana, y la visión disciplinar del álgebra. También es importante destacar, en los ejemplos de límite y en el uso de sucesiones, una intuición geométrica de carácter topológico (punto de acumulación) de la noción de límite. Aspectos relevantes que se deberían rescatar para su enseñanza son: la dimensión geométrica intuitiva, la concepción fuertemente intuitiva de los infinitesimales y el continuo numérico. Además, estos aspectos potencian la presentación de visiones alternativas, pre-formales, pero consistentes de la noción de límite, que al permitir

varias representaciones del concepto pueden facilitar su comprensión y dominio por parte del estudiante.

Agradecimientos: Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación FONDECYT N°11150014.

Referencias

Boyer, C. (2013). *Historia de la matemática*. (M. Martínez.Trad.). Madrid, España: Alianza Editorial.

Cauchy, A. (1821). *Cours D'Analyse de L'École Royale Polytechnique*. Chez Debure fréres, Libraries du Roi et de la Bibliothéque du Roi.

Godino J.D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,14(3), 325-355.

Lakatos, I. (1987). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid, España: Alianza Editorial.

Rudin,W. (1966). *Principios de análisis.* Madrid,España: Ediciones del Castillo.

Tall, D., & Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit, and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 97-124.

FOCOS DE REFLEXIÓN PARA FORTALECER PRÁCTICAS EN AULA DE DOCENTES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN

Carol Sepúlveda, Iván Pérez
Universidad de las Américas, Chile

Resumen: Este trabajo reporta reflexiones realizadas por docentes de matemáticas en formación sobre su propia práctica de aula con base en ciertos focos establecidos, los cuales corresponden a distintos temas que influirán es su futura labor. Contextualizado en una asignatura semestral de "Práctica Profesional", la cual se encuentra ubicada en el último año de carrera. Se espera que a través de la reflexión los docentes en formación, sean críticos de sus prácticas desde su formación inicial, con el fin de proyectar esta dinámica en su futura labor docente. La implementación exploratoria corresponde a un estudio de caso compuesto por ocho estudiantes.

Formación, profesores, focos, reflexión, práctica profesional

ANTECEDENTES

En Chile, la formación inicial de profesores de matemática contempla distintas aristas a desarrollar con los estudiantes (Felmer, 2009) , siendo una de éstas, las prácticas pedagógicas de aula, las que se encuentran distribuidas de forma gradual, cerrando el proceso con una práctica de aula final, que generalmente se encuentra ubicada curricularmente en el último año de la carrera.

Según señala Perrenoud(2004) "formar a un practicante reflexivo es ante todo formar a un profesional capaz de dominar su propia evolución, construyendo competencias y saberes nuevos o más precisos a partir de lo que ha adquirido y de la experiencia" (Perrenoud, 2004, p. 23).

Las reflexiones realizadas por los docentes en formación pueden ser desde aspectos disciplinarios, didácticos o pedagógicos en la práctica profesional. Talaferro (2006) señala que, la reflexión no debe ser un acto aislado por cada docente en formación, que si bien es una actividad personal, ya que la realiza sobre su propia práctica, es conveniente que la comparta con sus pares de manera que sobre la experiencia se posean varias miradas y se formulen varias preguntas ampliando las dimensiones de la reflexión.

En particular, se busca que los futuros docentes sean críticos de su labor desde su formación inicial, con el fin de proyectar esta dinámica en su futura labor docente y de ese modo poder caracterizar nuevos elementos a incorporar. Para esto, se entregarán diversos focos en los cuales deberán centrar su mirada, siendo algunos de ellos: la escuela y su entorno, modelo del profesor.

METODOLOGÍA

Apoyados en Sandín (2003) justificamos el estudio de casos principalmente porque el tipo de análisis apunta al conocimiento de formas de pensamiento, cuestión que tiene un carácter individual y comprensivo del que se espera generar teoría.

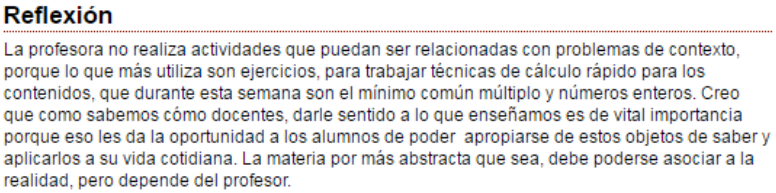
Muestra

La implementación exploratoria, aborda un caso de análisis, compuesto por ocho estudiantes de Pedagogía en Matemática y Estadística de la Universidad de las Américas que cursan la asignatura de "Práctica profesional" de duración semestral, de los cuáles presentaremos dos casos en esta ocasión.

Los estudiantes serán asignados a establecimientos educacionales de Santiago de Chile a los que deberán dedicar 23 horas semanales, las que implican labores de aula, las cuales corresponden a observación e intervención en el aula en conjunto con su profesor guía y tareas administrativas asociadas a su labor. Los cursos en los cuáles harán sus intervenciones serán desde 7º básico a 4º medio. Una vez por semana, los estudiantes se reúnen en conjunto con el académico supervisor quien será el encargado de generar espacios de reflexión, resolver inquietudes generando cuestionamientos de su futura labor docente en el aula. Las reflexiones por parte de los estudiantes se registrarán a través de un portafolio digital, el cual debe ser completado semanalmente.

Primer foco de reflexión: "la escuela y su entorno"

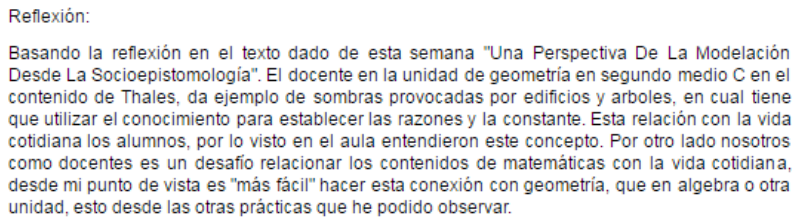
El primer foco a trabajar con los estudiantes corresponde a la separación entre la escuela y su entorno, para lo cual lee el artículo "Una perspectiva de la modelación desde una mirada Socioepistemológica", con el fin de desarrollar la discusión y reflexión en ese tema. En este artículo, los autores Arrieta y Díaz (2015) presentan a través de un ejemplo la separación que vivencia un estudiante entre lo que vive en su escuela y en su vida cotidiana, a lo cual los autores proponen a la modelación como puente a este problema En la sesión semanal se comparten algunas de las reflexiones realizadas por los estudiantes con respecto a este foco, como se muestran a continuación:


Reflexión

La profesora no realiza actividades que puedan ser relacionadas con problemas de contexto, porque lo que más utiliza son ejercicios, para trabajar técnicas de cálculo rápido para los contenidos, que durante esta semana son el mínimo común múltiplo y números enteros. Creo que como sabemos cómo docentes, darle sentido a lo que enseñamos es de vital importancia porque eso les da la oportunidad a los alumnos de poder apropiarse de estos objetos de saber y aplicarlos a su vida cotidiana. La materia por más abstracta que sea, debe poderse asociar a la realidad, pero depende del profesor.

Figura 1. Reflexión Estudiante uno

Una de las reflexiones presentadas corresponde a la del estudiante uno, donde declara que su profesora guía no realiza actividades relacionadas con algún contexto en el aula, es más, menciona que dentro de su labor lo que más realiza con los estudiantes, son ejercicios más bien algorítmicos. Así, desde su reflexión permite encontrar una característica que debiese desarrollar en su propia práctica en su futura labor docente, que es la de darle sentido a lo que se enseña.


Reflexión:

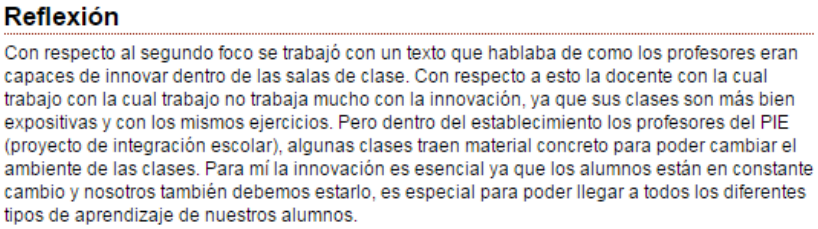
Basando la reflexión en el texto dado de esta semana "Una Perspectiva De La Modelación Desde La Socioepistomología". El docente en la unidad de geometría en segundo medio C en el contenido de Thales, da ejemplo de sombras provocadas por edificios y arboles, en cual tiene que utilizar el conocimiento para establecer las razones y la constante. Esta relación con la vida cotidiana los alumnos, por lo visto en el aula entendieron este concepto. Por otro lado nosotros como docentes es un desafío relacionar los contenidos de matemáticas con la vida cotidiana, desde mi punto de vista es "más fácil" hacer esta conexión con geometría, que en algebra o otra unidad, esto desde las otras prácticas que he podido observar.

Figura 2. Reflexión Estudiante dos

Por otro lado, el estudiante dos señala que su docente guía sí realiza dicha conexión entre la vida cotidiana y la escuela, donde considera según lo observado, que los estudiantes cuando vivenciaron esta unión en clases, la mayoría de ellos lograron aprendizaje frente a la actividad, fortaleciendo la idea de que la forma en la que se presentan los contenidos a los estudiantes implica aprendizaje. Para finalmente, realizar una reflexión sobre su futura labor, en la cual considera que como profesor debiese tener la capacidad de presentar esta relación al momento de trabajar con sus estudiantes.

Segundo foco de reflexión: "modelo del profesor"

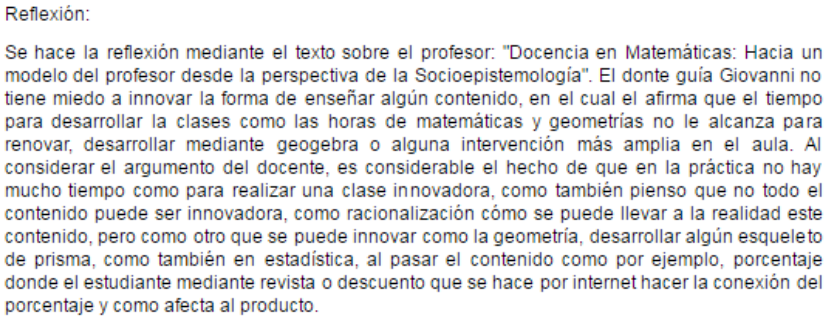
Para reflexionar con respecto a este segundo foco, se presenta a los estudiantes la lectura de: "Docencia en matemáticas: hacia un modelo del profesor desde la perspectiva de la Socioepistemología" (Lezama y Mariscal, 2008). En el cual, los autores interesados en conocer las experiencias o los problemas que enfrentan los docentes a nivel personal o bien como colectivo, desarrollan y aplican entrevistas libres a distintos docentes en el cual les permitirá interpretar y categorizar desde su marco teórico, los factores que dificultan su labor docente. Frente a estas dificultades declaradas por los autores, algunas reflexiones realizadas por los estudiantes, en su labor como practicante son las siguientes:


Reflexión

Con respecto al segundo foco se trabajó con un texto que hablaba de como los profesores eran capaces de innovar dentro de las salas de clase. Con respecto a esto la docente con la cual trabajo con la cual trabajo no trabaja mucho con la innovación, ya que sus clases son más bien expositivas y con los mismos ejercicios. Pero dentro del establecimiento los profesores del PIE (proyecto de integración escolar), algunas clases traen material concreto para poder cambiar el ambiente de las clases. Para mí la innovación es esencial ya que los alumnos están en constante cambio y nosotros también debemos estarlo, es especial para poder llegar a todos los diferentes tipos de aprendizaje de nuestros alumnos.

Figura 3. Reflexión Estudiante uno

La estudiante uno, es capaz de reconocer en su docente guía algunas dificultades para innovar en el aula, ya que, las clases que presenta son más bien expositivas y tradicionales. Al vivenciar esta realidad durante su práctica, esta estudiante considera que la innovación sí es un factor que debe estar presente en el aula, debido a que los estudiantes están en constantes cambios, por lo tanto, para los docentes este punto es un nuevo desafío. Asímismo, declara la innovación como relevante para cubrir todos los tipos de aprendizajes que tienen los estudiantes, pudiéndose entender que al vivenciar clases más bien expositivas y tradicionales por parte de su docente guía, puede percatarse de que esta metodología no permite el aprendizaje en la gran mayoría de los estudiantes.



Reflexión:

Se hace la reflexión mediante el texto sobre el profesor: "Docencia en Matemáticas: Hacia un modelo del profesor desde la perspectiva de la Socioepistemología". El donte guía Giovanni no tiene miedo a innovar la forma de enseñar algún contenido, en el cual el afirma que el tiempo para desarrollar la clases como las horas de matemáticas y geometrías no le alcanza para renovar, desarrollar mediante geogebra o alguna intervención más amplia en el aula. Al considerar el argumento del docente, es considerable el hecho de que en la práctica no hay mucho tiempo como para realizar una clase innovadora, como también pienso que no todo el contenido puede ser innovadora, como racionalización cómo se puede llevar a la realidad este contenido, pero como otro que se puede innovar como la geometría, desarrollar algún esqueleto de prisma, como también en estadística, al pasar el contenido como por ejemplo, porcentaje donde el estudiante mediante revista o descuento que se hace por internet hacer la conexión del porcentaje y como afecta al producto.

Figura 4. Reflexión Estudiante dos

El estudiante 2 logra reconocer en su profesor guía la capacidad de innovar y la dificultad que tiene relación con el tiempo que implica el innovar, además dentro de su observación surge una nueva reflexión con respecto a la innovación, la cual tiene relación con el siguiente cuestionamiento, ¿Cuáles son los contenidos en los cuáles se puede innovar?, dando a conocer un primer progreso con respecto a su nivel de reflexión, en primera instancia con el foco presentado para luego crear un nuevo cuestionamiento a su futura labor docente.

CONCLUSIONES

Sin dudarlo, el entregar distintos focos para reflexionar, permite en los estudiantes ir fijando su mirada en ciertos aspectos de lo vivido en su práctica, y de sobremanera, permite que la hora de reflexión junto a su profesor supervisor y sus demás compañeros se convierta en una instancia ya no de reflexión individual, si no en un momento de reflexión grupal, en el cual se puede verificar que existen distintas realidades frente a un mismo foco planteado, y así nos permitirá como comunidad en formación, compuesta por ocho estudiantes, ir reconociendo y adhiriendo ciertas características que permitirán en ellos una transformación en su futura labor docente.

En relación con las reflexiones presentadas, en ambos casos, se puede ver que en torno al foco planteado realizan la reflexión desde su docente guía, para luego llegar a caracterizar nuevos elementos que debiesen presentar en su futuro rol de docentes en aula, como lo son: realizar actividades contextuales para sus estudiantes y el aprendizaje de estos y así también, ser capaces de innovar en el aula, con las dificultades que esto conlleve.

Si bien, no nos es posible asegurar que las reflexiones adquiridas se convertirán en una práctica que desarrollará durante su labor como profesor, si podemos declarar que durante su práctica profesional logramos desarrollar un estudiante más reflexivo de su propia práctica.

Referencias

Arrieta Vera, J., & Díaz Moreno, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(1), 19-48.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa.Estudios sobre construcción social del conocimiento (1a ed.).* Barcelona: Editorial Gedisa SA.

Felmer, P. (2009). *Estándares para la formación de profesores de Matemática de enseñanza media.* Colección Digital Eudoxus, 1(5).

Lezama, J., & Mariscal, E. (2008). Docencia en Matemáticas: Hacia un modelo del profesor desde la perspectiva de la socioepistemología. Recuperado en http://funes.uniandes.edu.co/5043/1/LezamaDocenciaALME2008.pdf

Perrenoud, P. (2004). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar: profesionalización y razón pedagógica* (Vol. 1). Barcelona: Graó.

Tallaferro, D. (2006). La formación para la práctica reflexiva en las prácticas profesionales docentes. *Educere, 10*(33), 269-273.

Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación: fundamentos y tradiciones*. España: McGraw-Hill Interamericana de España.

OBSTÁCULOS Y OPORTUNIDADES DESPUÉS DEL DESARROLLO PROFESIONAL EN MATEMÁTICA PRIMARIA

Lisa Darragh
CIAE, Universidad de Chile

Resumen: Esta comunicación breve presenta los resultados preliminares de un estudio en curso que analiza los obstáculos y oportunidades reportados por un grupo de profesores de básica en el año siguiente de su participación en un programa de desarrollo profesional. Así, se pretende dar respuesta a la pregunta ¿Cuáles son los obstáculos y las oportunidades identificados por los profesores en la implementación de nuevas metodologías de enseñanza de las matemáticas después de su participación en un programa de desarrollo profesional? El programa duró ocho meses y se centró en el desarrollo de la habilidad de la resolución de problemas en aulas. Los resultados iniciales indican que, aspectos identificados por algunos profesores como obstáculos, para otros son oportunidades, poniendo en evidencia la complejidad de los procesos de cambio en la escuela.

Desarrollo profesional, obstáculos, oportunidades, resolución de problemas

INTRODUCCIÓN

Un objetivo central de la política educativa chilena apunta a contribuir a la profesionalización del trabajo docente (Felmer et al., 2014). Una forma de lograr lo anterior, es a través del diseño e implementación de Programas de Desarrollo Profesional (PDP) a gran escala. *Activando la Resolución de Problemas en las Aulas* (*ARPA*) es uno de estos programas dirigido por la Universidad de Chile y financiado por FONDEF (ID14I10338). En 2015, en el contexto de la iniciativa ARPA se implementaron 13 talleres para 220 profesores con una duración aproximada de 8 meses. Los resultados iniciales sugieren que *ARPA* ha contribuido a la transformación de las actitudes de los profesores, los cuales han logrado apropiarse e implementar nuevas pedagogías para la enseñanza de matemáticas en sus clases. Sin embargo, una vez que se hayan eliminado los mecanismos de apoyo del programa, no son claras las formas en las cuales los profesores sostendrán los cambios en sus prácticas en el largo plazo. En general, aunque se han hecho esfuerzos por analizar esta problemática (Avalos, 2011; Tirosh, Tsamir, y Levenson, 2015; Whitcomb, Borko, y Liston, 2009; Zehetmeier, 2015), existe una escasez de estudios que examinen la sostenibilidad de los PDP. La mayoría de los estudios relacionados con los cambios en las prácticas de enseñanza o en las creencias de los profesores no dan cuenta de la durabilidad de dicho cambio cuando éste se produce, ni los factores que contribuyen o dificultan su sostenibilidad a largo plazo (Borko, 2004; Whitcomb et al., 2009). En resumen, actualmente existe una comprensión limitada de los factores que inhiben o facilitan la sostenibilidad de las nuevas prácticas de enseñanza entre profesores que realizaron PDP (Battey y Franke, 2008).

El presente estudio pretende contribuir a los esfuerzos recientes a nivel internacional (e.g., Roesken-Winter et. all, 2015) por comprender esta problemática mediante la investigación de las percepciones y prácticas de los profesores en el año inmediatamente después de su participación en *ARPA*. Los resultados preliminares se discuten en esta ponencia, específicamente explora los obstáculos y las oportunidades que condicionan la

implementación del cambio en las prácticas de enseñanza de las matemáticas y en las identidades profesionales de los profesores participantes. El proyecto denominado "*Reflexiones y cambio en la enseñanza de matemática después del desarrollo profesional*" es financiada por una beca postdoctoral Fondecyt (ID # 3160469). La pregunta de investigación se plantea de la siguiente manera:

- ¿Cuáles son los obstáculos y las oportunidades identificados por los profesores en la implementación de nuevas metodologías de enseñanza de las matemáticas después de su participación en un programa de desarrollo profesional?

METODOLOGÍA

Este estudio, situado dentro de un marco teórico constructivista (Holstein & Gubrium, 2011; Kvale, 1995), es exploratorio y emplea métodos y técnicas de la investigación cualitativa. Un objetivo central del estudio es descubrir, en lugar de medir, percepciones de los profesores acerca de los aspectos que pueden afectar el cambio a largo plazo tras la finalización de su participación en el PDP.

Participantes

Todos los profesores que completaron el PDP *ARPA* en 2015 fueron invitados a participar y 15 profesores respondieron positivamente. Todos realizan clases de matemáticas en educación básica en escuelas municipales y particulares subvencionados en las regiones Metropolitana, de Valparaíso, Biobío y la Araucanía. La mayoría trabajan en escuelas con un índice de vulnerabilidad alta o media-alta.

Métodos de Recolección y Análisis de los Datos

La recogida de los datos se desarrolla en tres fases. La fase 1 comprendió la selección de los profesores participantes, a finales del año 2015 y comienzo del año escolar 2016. Esta fase incluyó la aplicación de un cuestionario abierto para establecer una línea de base en relación con el aprendizaje y creencias respeto a la resolución de problemas y la enseñanza de las matemáticas al final del PDP. La fase 2 se lleva a cabo actualmente. En esta fase se recogen las experiencias de los profesores en el primer año después de la finalización del PDP a través de una serie de comunicaciones por correos electrónicos para tratar de identificar el éxito o el fracaso en la implementación de las nuevas pedagogías en sus clases. Durante esta fase también se realizan observaciones de la enseñanza en el aula para proporcionar un contexto que permita triangular la información obtenida en los mensajes de correo electrónico. En la fase 3 se utilizará una entrevista semi-estructurada con cada maestro para identificar los cambios en la identidad profesional como resultado de su participación en el PDP. Estas entrevistas, y otras observaciones de las clases se llevarán a cabo en Mayo del 2017.

Los datos presentados en este artículo se derivan principalmente de las respuestas al cuestionario inicial en la fase 1 y también las respuestas a los mensajes de correo electrónico que figuran en los primeros seis meses de 2016. En particular, se presentan respuestas de los profesores a preguntas tales como: ¿Qué problemas cree que enfrentará al enseñar matemáticas este año?; Por favor describa sus condiciones para el desarrollo sus clases (por

ejemplo los obstáculos y las oportunidades); ¿Ha implementado la resolución de problemas con su clase este año? (¿Puede contarme cómo fue esto?); ¿Si pudiera cambiar una cosa sobre sus condiciones de enseñanza de las matemáticas ¿qué sería y por qué?

Los datos recogidos hasta la fecha han sido analizados temáticamente a la manera de Braun y Clarke (2006). Así, cuando surgieron temas a partir del análisis de una pregunta, todas las demás respuestas se analizaron con respecto a estos temas. El proceso de análisis fue fluido y continuo. Los temas identificados en el análisis de la Fase 1, contribuyeron a configurar las preguntas dadas a los profesores en la Fase 2 con el fin de profundizar en la comprensión de los resultados emergentes. A continuación se presentan los resultados preliminares.

RESULTADOS PRELIMINARES

Los resultados preliminares permiten distinguir cuatro temas con respecto a los obstáculos y las oportunidades identificadas por los profesores: los estudiantes, las condiciones curriculares, el tiempo, y los recursos. En este documento se presentan los resultados del tema de *los estudiantes*.

Aspectos relacionados con *los estudiantes* fueron frecuentemente mencionados por los profesores en sus correos tanto en términos de obstáculos como de oportunidades. En general, los estudiantes son vistos como *deficientes* en relación con la actitud o el conocimiento, lo que constituye un obstáculo para implementar nuevas pedagogías. Lo anterior se evidencia en los siguientes comentarios:

Profesora C: “El problema a enfrentar es la baja autoestima académica que tienen algunos estudiantes”

Profesora A: “la falta de comprensión de los niños”

Profesora J: “muchos niños no estan acostumbrados a razonar”

Sin embargo, también surgen entre los profesores puntos de vista opuestos sobre los estudiantes, como puede notarse en los siguientes comentarios:

Profesora M: “Es muy asombroso ver cómo aprenden entre ellos, y que estos aprendizajes son los más significativos”

Profesora J: “No sólo son buenos matemáticos los niños que tienen buenas notas”

Los estudiantes son vistos además como *problemáticos*. Es decir, los profesores se refieren a los estudiantes en términos ampliamente usados en el sistema escolar tales como *vulnerables* o con *necesidades especiales* señalando estas condiciones como obstáculos para la implementación de nuevas pedagogías, como se ejemplifica a continuación:

Profesor I : “Aproximadamente entre el quince al veinte por ciento de los alumnos de cada curso son vulnerables”

Profesora P: “Hay bastantes niños con Déficit Atencional, Hiperactividad. Déficit Atencional Hiperactivo, Déficit Atencional Hipoactivo, Trastornos de Ira”

Profesora A: “Hay 12 niños con déficit atencional no tratados”

CONCLUSIONES

Los resultados muestran que algunas veces los estudiantes son vistos como obstáculos y en otras ocasiones como oportunidades para la implementación de nuevas pedagogías para la

enseñanza de las matemáticas. Esta tendencia se mantiene para los otros tres temas. Mientras que algunas de los obstáculos identificados por los profesores se relacionan con las condiciones físicas (tiempo y los recursos), muchas se relacionaban con interpretaciones de la situación por parte del profesor como por ejemplo, sus percepciones acerca de los estudiantes. Lo anterior muestra el carácter altamente contextualizado de la experiencia en la enseñanza. Por cada descripción de un obstáculo, surgió una respuesta correspondiente, que vio en su lugar una oportunidad. Estos resultados tienen implicaciones importantes para el desarrollo continuo de los PDP. Las discusiones en torno a estos obstáculos deben ser abordadas en los PDP de manera que los profesores pueden discutir diversas formas de superarlos. De esta manera, algunas de los obstáculos potenciales pueden convertirse en oportunidades para todos.

Referencias

Avalos, B. (2011). Teacher professional development in Teaching and Teacher Education over ten years. *Teaching and Teacher Education*, *27*, 10–20.

Battey, D., & Franke, M. L. (2008). Transforming Identities: Understanding Teachers across Professional Development and Classroom Practice. *Teacher Education Quarterly*, *35*(3), 127–149.

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher2*, *33*(8), 3–15.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*, 77–101. http://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Felmer, P., Lewin, R., Martínez, S., Reyes, C., Varas, L., Chandía, E., … Zanocco, P. (2014). *Primary mathematics standards for pre-service teachers in Chile*. Singapore: World Scientific Publishing Co.

Holstein, J. A., & Gubrium, J. F. (2011). The constructionist analytics of interpretive practice. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research*. Los Angeles: Sage.

Kvale, S. (1995). The social construction of validity. *Qualitative Inquiry*, *1*(1), 19–40.

Roesken-Winter, B., Hoyles, C., & Blomke, S. (2015). Evidence-based CPD: Scaling up sustainable interventions. *ZDM Mathematics Education*, *47*, 1–12. http://doi.org/10.1007/s11858-015-0682-7

Tirosh, D., Tsamir, P., & Levenson, E. (2015). Fundamental issues concerning the sustainment and scaling up of professional develoment programs. *ZDM Mathematics Education*, *47*(153-159). http://doi.org/10.1007/s11858-015-0665-8

Whitcomb, J., Borko, H., & Liston, D. (2009). Growing talent: Promising professional development models and practices. *Journal of Teacher Education*, *60*(3), 207–212. http://doi.org/10.1177/0022487109337280

Zehetmeier, S. (2015). Sustaining and scaling up the impact of professional development programmes. *ZDM Mathematics Education*, *47*, 117–128. http://doi.org/10.1007/s11858-015-0671-x.

TALLERES

LA EXCLUSIÓN QUE PROVOCA EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR. EL CASO DE LA OPTIMIZACIÓN Y DE LA ESTABILIDAD

Tamara Del Valle[1], Daniela Soto[2], E. Johanna Mendoza[3]
Universidad Católica Silva Henriquez[1], Universidad de Santiago de Chile[2], CINVESTAV[3], México

Resumen: Cuando nos preguntamos por los bajos resultados en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, se desarrollan críticas al sistema educativo, por ejemplo, se culpa al docente, al alumno, o bien, al currículum nacional con que se rige nuestras instituciones educativas. Frente a estos cuestionamientos no es habitual reflexionar sobre el propio saber escolar, aquel que se expresa en un discurso materializado por los diferentes actores educativos. Este discurso Matemático Escolar es el que cuestionaremos en este taller, ya que es un sistema de razón que ha normado la acción y las representaciones sociales de los individuos, forma categorías, como de exitoso o fracasado dentro de las matemáticas y fabrica identidades que pueden llevar a nuestros estudiantes a una autoexclusión. La reflexión que proponemos, dirige la atención a caracterizar el discurso que norma nuestro currículum nacional. Particularmente caracterizaremos el fenómeno de exclusión que genera el dME con dos situaciones específicas: el uso de la optimización y de la estabilidad.

Socioepistemología, discurso matemático escolar, resignificación

ENFOQUE DE LA PROPUESTA

La problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática ha sido estudiada desde diferentes enfoques teóricos. La historia nos muestra el camino recorrido por nuestra disciplina y cómo la comunidad académica ha ampliado sus diferentes posturas. Por ejemplo, se ha pasado de lo cognitivo a lo didáctico y a lo epistemológico y hoy día, en nuestra comunidad, ha emergido la dimensión social asociada al fenómeno (Cantoral y Farfán, 2003).

La Socioepistemología señala la existencia de un discurso Matemático Escolar (dME) y plantea su rediseño a partir del estudio de la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM). Profundizar en las características del dME, permitió identificar fenómenos como: la exclusión, la opacidad y la adherencia (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015). Fenómenos que no solo afectan a los estudiantes, sino también a los profesores y a la comunidad educativa en general.

EN FENÓMENO DE EXCLUSIÓN Y EL DME

Cuando revisamos las investigaciones que abordan el dME, por una parte, encontramos estudios que se centran en caracterizarlo y dan cuenta de su carácter excluyente (ilustración 1), es decir, que impone un conjunto de significaciones, procedimientos y argumentaciones centradas en los objetos matemáticos, las cuales no permiten que los actores del sistema didáctico construyamos otros significados (Soto, 2010). Y por otra parte, hay estudios que favorecen el Rediseño del discurso Matemático Escolar (RdME) a partir de la CSCM.

Soto (2010) caracteriza al dME como un sistema de razón, es decir, un conocimiento que norma la acción y las representaciones sociales de los individuos, que forma categorías y que fabrica identidades. El cual tiene como característica principal ser legitimado socialmente, en otras palabras, tiene el poder de mostrarnos una "verdad", lo que es "normal" y lo "anormal" en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

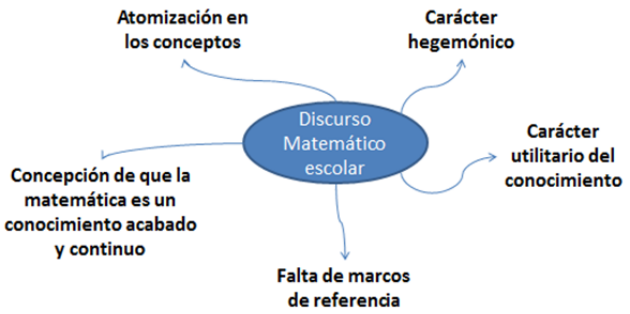


Ilustración 1. Mapa del dME (Soto, 2010)

Esta legitimación, de la cual goza el dME, se debe a la importancia histórica de la matemática, y a la necesidad social de su universalización. Esta última no sólo ha obligado al conocimiento matemático a vivir una atomización de sus conceptos, como lo explica la transposición didáctica, sino también a provocar una hegemonía de pensamientos (Soto, 2010).

Al respecto de esta hegemonía, Bourdieu (2008) explica que en el campo científico existe una constante lucha por la autoridad científica. En esta lucha siempre está presente el desafío de imponer la definición de ciencia más conveniente para los intereses específicos de los grupos dominantes. Soto (2010) al adentrarse en la enseñanza de las matemáticas y reconocer las características del dME, identifica una epistemología dominante donde los objetos matemáticos son preexistentes a la realidad del humano. Según Cordero (2001) la funcionalidad del conocimiento no es prioridad, no se concibe al ciudadano trastocando el conocimiento matemático o construyendo significaciones diferentes. Por ejemplo, el dME nos ha hecho creer que el estudio de la función necesita siempre de su expresión analítica. Desde la Socioepitemología consideramos a la gráfica de una función como argumentativa, no como una representación, y a la función como una instrucción que organiza comportamientos. Esto cambia la mirada del concepto de función hacia el estudio de comportamiento y no hacia la expresión analítica como fin último de la modelación.

El estudio de la CSCM nos ha permitido dilucidar la funcionalidad del conocimiento matemático y como éste se resignifica. Por tanto, la consideramos de suma importancia para el rediseño del dME. Conviene entonces preguntarnos qué situación debo evidenciar para gestionar aprendizajes, en qué contexto y cuáles son las prácticas que lo permiten.

Soto (2010) mostró, a partir de un ejemplo concreto –el teorema de L'Hôspital–, como el dME genera un tipo de exclusión muy sutil: la violencia simbólica. También planteó que es el propio conocimiento trastocado con fines didácticos, el que impone significaciones y valida sólo un tipo de argumentaciones, lo que genera una exclusión hacia los actores del sistema didáctico (estudiantes, profesores, directivos, padres, políticos, etc.). Estos actores son "cómplices involuntarios" de este proceso, debido a la legitimidad de la cual goza el sistema que lo produce.

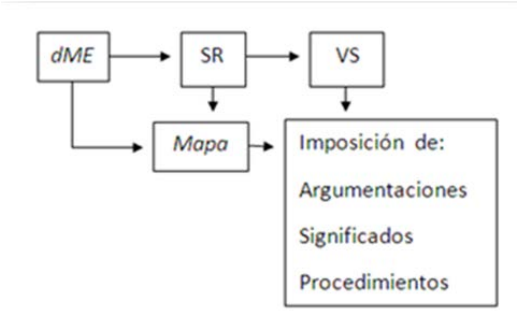


Ilustración 2. Modelo de exclusión (Soto, 2010)

El producto de dicha investigación está reflejado en la ilustración 2. El dME es un sistema de razón que produce violencia simbólica, a partir de la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos.

EL CASO DEL USO DE LA OPTIMIZACIÓN

En el dME, la optimización es un proceso mecánico, en cual se excluye al estudiante de usar la optimización (U(op)), ya que existe una mayor centración en la aplicación de métodos que en los usos de ésta, quedando desprovista de significaciones, procedimientos y argumentaciones. Del Valle (2015) en su investigación elabora un Marco de Referencia que resignifica los U(op), en el cual se busca valorar la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimiento, con el fin de estrechar la distancia existente entre la matemática y el cotidiano.

Para establecer la resignificación del U(op), Del Valle (2015) analiza los funcionamientos de la optimización en diferentes escenarios. De esta manera, el funcionamiento de la optimización podrá debatir con la forma que ha adquirido en aquellas comunidades que la usan, al enfrentar situaciones específicas propias de su cotidiano; para dicho estudio se analizó un escenario profesional de ingenieros mecatrónicos y la obra matemática de Lagrange. A grandes rasgos, los resultados encontrados en el análisis de ambos escenarios, permitió identificar las significaciones, los procedimientos y el instrumento que permiten reconocer otras argumentaciones de optimización, proporcionando un discurso más inclusivo.

EL CASO DEL USO DE LA ESTABILIDAD

La enseñanza del concepto matemático estabilidad, se ha enfocado en mostrarla como una propiedad exclusiva del comportamiento de las soluciones de sistemas dinámicos y en ofrecer los diferentes teoremas (que se convierten para el estudiante en recetas) para determinar cuándo el sistema es estable o no. Mendoza y Cordero (2015) han mostrado que esto opaca otros significados y argumentaciones que conllevan una exclusión de la construcción social del conocimiento matemático. Es decir, difícilmente el estudiante concibe la ecuación diferencial lineal (bajo ciertas circunstancias) como un modelo de

estabilidad o establece un patrón que relacione la solución con las funciones que hacen parte de la ecuación diferencial.

Para ampliar los episodios de enseñanza en el aula que favorezca una matemática funcional mas cercana al humano, Mendoza y Cordero (2015) estudian la transversalidad de usos de la estabilidad en escenarios de la obra matemática, de otras disciplinas (la ingeniería electrónica) y escuela. Esto le ha permitido ir consolidando una epistemología acorde con la argumentación del comportamiento tendencial que aunado con el binomio Modelación-Graficación, son una base para el diseño de situaciones de socialización del conocimiento matemático.

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller pretende caracterizar el discurso que norma nuestro currículum nacional. Para ello, en ambas secciones del taller se considerarán tres momentos como parte de la dinámica operativa:

Momento 1: La experimentación en equipos de trabajo. Se propondrán actividades desde un RdME; el caso del uso de la optimización y de la estabilidad.

Momento 2: Producciones y discusión de los participantes. Se proporcionará un espacio que permita, a través de las actividades realizadas, reflexionar sobre la exclusión del dME versus una propuesta de RdME.

Momento 3: Reflexiones de los constructos con base en los ejemplos analizados. Se caracterizará el discurso que norma nuestro currículum nacional, a partir de las discusiones sobre el dME, su rediseño, la exclusión e inclusión desde la perspectiva socioepistemológica y la fundamentación de las situaciones mostradas.

CONCLUSIONES

Con este taller pretendemos caracterizar y evidenciar un fenómeno típicamente social que es producido por el dME, a saber: la exclusión. Creemos importante reflexionar sobre las consecuencias de este fenómeno en el aula, sobre todo en una región como Latinoamérica, que como hemos señalado posee una historia del conocimiento llena de fenómenos sociales, la cual nos llama a la búsqueda de epistemologías diversas. Debemos entender cómo el dME, y los fenómenos que produce, se expresan en el currículum y en los textos de estudio, para lograr cambios significativos a nivel de país.

Estudiar cuáles son los usos del conocimiento en el cotidiano de diferentes comunidades, provoca un RdME, el cual promueva cambios en el currículum y dirige la atención al conocimiento funcional. La tarea del matemático educativo, o didacta de las matemáticas, es la búsqueda de nuevas argumentaciones para el conocimiento matemático que permitan la inclusión y, por ende, la resignificación de la matemática escolar.

Referencias

Bourdieu, P. (2008). *Los usos sociales de la ciencia*. (Trad. H. Pons y A. Busch). Buenos aires, Argentina: Nueva Visión. (Original en Francés, 1997)

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral y Farfán (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 6(1), pp. 27 – 40.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 4(2), pp. 103 – 128.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica*. Tesis de Doctorado no publicada, Instituto de Matemáticas, PUCV. Chile.

Mendoza, E.J. & Cordero, F. (2015). Matemática funcional en una comunidad de conocimiento. El caso de la estabilidad. Trabajo presentado en el *3er. Coloquio de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa*. CINVESTAV-IPN, México.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, D.F, México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema- Boletim de Educação matemática. 28 (50.), pp. 1525 – 1544.*

TRATAMIENTO DE LA INFERENCIA ESTADÍSTICA INFORMAL A TRAVÉS DE UN PROYECTO QUE INTEGRA IDEAS ESTOCÁSTICAS FUNDAMENTALES

Liliana Tauber, Yanina Redondo, Mariela Cravero
Universidad Nacional del Litoral, Argentina

El presente taller está centrado en la construcción de las ideas estocásticas fundamentales mediante de la enseñanza de Estadística a través de proyectos. El objetivo principal del mismo es desarrollar y analizar un proyecto de Estadística, centrado en la Inferencia Estadística Informal, que ha sido pensado para establecer conexiones entre diversas ideas fundamentales y los conceptos estadísticos asociados a ellas, tales como: datos, modelos, distribuciones, variabilidad, representatividad y resúmenes, teniendo como asistentes didácticos diversos materiales digitales y manipulables.

Cultura estadística, ideas estadísticas fundamentales, inferencia estadística informal, enseñanza con proyectos

FUNDAMENTACIÓN

En las tres últimas décadas, la enseñanza de la probabilidad y de la estadística ha sufrido diversas transformaciones a nivel mundial. Dichos cambios han sido más vertiginosos en los últimos 20 años, como consecuencia de la evolución de las nuevas tecnologías, las cuales aceleraron los procesos de análisis de datos a gran escala. Estas transformaciones se ponen de manifiesto, especialmente en los planes de estudio de las carreras de nivel superior, en las que en su gran mayoría, se brinda al menos un curso de Estadística. De una manera contradictoria, estos avances no han quedado plasmados de manera satisfactoria en las reformas educativas del nivel Secundario. Específicamente, en los Diseños Curriculares de diversas jurisdicciones de Argentina (Núcleos de Aprendizaje Prioritario, 2011; Diseño Curricular de Santa Fe, 2014), se plantean contenidos de estadística y probabilidad dentro de los programas de Matemática, pero el enfoque que se da a estos contenidos es incompleto, ya que no considera las ideas estocásticas fundamentales que son la base de la Estadística, a saber: la variabilidad y la aleatoriedad.

En este taller pretendemos desarrollar algunas construcciones teóricas, epistemológicas y metodológicas, que permitan resignificar en el aula las ideas citadas y los conceptos estadísticos asociados a ellas. Es así que, el taller se centrará en la reflexión, el análisis y la elaboración de prácticas que integren ideas estocásticas fundamentales (Burrill y Biehler, 2011) que propicien la construcción de una Cultura Estadística adecuada al nivel educativo de nuestros alumnos (Batanero, 2013), integrando además diversas herramientas de simulación.

Cuando hablamos de propiciar la Cultura Estadística, adherimos a las componentes enunciadas por Watson (2006), quien nos brinda una herramienta que permite evaluar la comprensión y a su vez, sirve para organizar propuestas de enseñanza. Así es que, a lo largo del taller desarrollaremos un proyecto que se irá construyendo a través de la relación entre las siguientes componentes:

- El desarrollo del conocimiento básico de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
- La comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos cuando se presentan dentro de un contexto más amplio de algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo.
- Una actitud crítica que se asume al cuestionar argumentos que estén basados en distintos tipo de evidencia estadística.

La enseñanza de la inferencia Estadística informal a través de proyectos

Es indiscutible el posicionamiento actual de la Estadística como disciplina soporte para la investigación y desarrollo de diversas ciencias. Es así que, todo curso introductorio a nivel universitario tiene como propósito desarrollar algunos métodos de inferencia estadística. Pero, siendo éste uno de los temas más enseñados es, a la vez, el peor comprendido y utilizado. Esto lo corroboran diferentes estudios que han observado y descripto lo que ocurre cuando los sujetos se enfrentan a tareas de inferencia (Olivo y Batanero, 2007; Tauber, 2014). Esta problemática y la de la escuela secundaria, la cual es más compleja aún, provoca que muchos investigadores (Pfannkuch, 2007; Konold y Kazak, 2008; Tauber, 2014) planteen propuestas centradas en la construcción de las ideas fundamentales relacionando distintos tipos de razonamientos inferenciales informales (RII), buscando introducir la Inferencia Estadística Informal (IEI).

Todo esto nos lleva a pensar en tareas de enseñanza y aprendizaje que permitan fomentar la IEI, las cuales hemos de agrupar en tres categorías siguiendo a Bakker, Derry y Konold (2006):

- Tareas centradas en la construcción de gráficos y en la estimación de datos de una población basados en información muestral;
- Tareas centradas en la comparación de dos o más muestras para inferir si puede haber una diferencia real entre las poblaciones de las que se extrajeron las muestras, y
- Tareas centradas en juzgar cuál de los modelos que se ponen en competencia es más probable que ocurra.

En consecuencia, en este taller contemplamos esta tipología de tareas y las componentes descriptas por Watson (2006) a las que hemos hecho alusión en la sección anterior.

UN PROYECTO QUE ENTRELAZA LAS IDEAS DE DATOS, MODELOS Y ALEATORIEDAD

Siguiendo a Pfannkuch (2007), quien plantea que la IEI debería centrarse en la construcción de la idea de distribución y, considerando lo enunciado por Batanero y Díaz (2005), quienes indican que: *"...el trabajo con proyectos permite contextualizar los contenidos en situaciones interesantes para el alumno e integrar la enseñanza de la estadística dentro del proceso más general de investigación"*, elaboramos un proyecto estadístico denominado:

"Raya, puntito, te quiero[26]*"*. El mismo permite introducir ideas fundamentales promoviendo a la vez, el sentido estadístico, el RII y el trabajo colaborativo entre pares.

Partiremos de una actividad propuesta por Konold y Kazak (2008), a la que hemos realizado diversas adaptaciones y agregado actividades que tienen objetivos específicos de acuerdo al nivel educativo de los alumnos con los que se puede desarrollar este proyecto, considerando que podría trabajarse con alumnos de nivel primario en adelante. Inclusive, proponemos actividades específicas para trabajar con profesores en ejercicio o estudiantes de profesorados de Matemática o de profesorados de nivel primario.

Propósitos

El propósito central de este taller es mostrar a los asistentes un proyecto estadístico que busca integrar distintas ideas estocásticas fundamentales, además de introducir la necesidad de fomentar razonamientos inferenciales informales. Es así que, como propósitos específicos, buscamos promover un ambiente de discusión e intercambio que permita:

- Identificar ideas previas en relación con la equiprobabilidad o no de eventos;
- Contrastar las ideas previas con modelos teóricos que representen el experimento planteado;
- Discutir sobre condiciones iniciales del experimento que deberían tenerse en cuenta para no cometer el "error de D'Alembert";
- Identificar distintos tipos de resúmenes que se adecuen a las situaciones que deberían representarse y que permitan poner en juego distintos tipos de razonamientos inferenciales.
- Poner en práctica simulaciones virtuales y concretas que permitan construir distintos tipos de distribuciones e integrar conceptos de la estadística descriptiva y la inferencial.

Alcances

Nuestra propuesta busca problematizar con los asistentes sobre la importancia del trabajo con proyectos estocásticos, buscando la reflexión en torno a las bondades de estas propuestas y también pretende promover la concientización de los docentes respecto de las consideraciones previas que se deben realizar antes de plantear una propuesta de este tipo en el aula.

Las actividades que desarrollaremos pueden servir de propuesta didáctica para distintos niveles educativos, inclusive podría adaptarse en cursos de formación de profesores.

Aportes

[26] La idea del nombre del proyecto ha sido tomada de una canción, que lleva ese título, escrita por Jairo y Daniel Salzano, grabada por Jairo en el año 1996. Disponible en: http://www.cmtv.com.ar/discos_letras/letra.php?bnid=1530&tmid=39828&tema=RAYA_PUNTITO_TE_QUIERO

Esta propuesta busca aportar nuevas metodologías para enseñar los conceptos estadísticos e integrar la estadística descriptiva con la inferencial, introduciendo razonamientos informales que, a lo largo de la educación secundaria pueden ir formalizándose poco a poco.

Metodología

La propuesta de este taller está dirigida a profesores de matemática en ejercicio y a estudiantes de profesorados de matemática. Se prevé el trabajo grupal a través de la metodología de proyectos secuenciado según las siguientes etapas:

- Breve presentación del marco teórico en el que se basa la propuesta.
- Puesta en práctica del proyecto estadístico propuesto.
- Discusión de los conceptos claves que propicia el proyecto desarrollado.
- Institucionalización de las ideas estocásticas fundamentales y los modos de razonamiento estadístico que se pueden desarrollar a través del proyecto.

Referencias

Bakker, A.; Derry, J. y Konold, C. (2006). Using technology to support diagrammatic reasoning about center and variation. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador*, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Disponible en: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase (Búsqueda realizada el 14/06/2016).

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. *En: Probabilidad Condicionada. Revista de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, N 1, Vol 1. Universidad de Granada.

Batanero, C. y Díaz, C. (2005). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística. En: *Atas do I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal y VII Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións.* Guimarães.

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.): *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study*, pp. 57-69. Dordrecht: Springer.

Konold, C. y Kazak, S. (2008) Reconnecting data and chance. In: *Technology Innovations in Statistics Education, 2 (1), Article 1.* Disponible en: https://www.srri.umass.edu/publications/Konold,Kazak%20-2008 (Búsqueda realizada el 29/03/2016)

Ministerio de Educación de la Nación (2011). Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Educación Secundaria. Disponible en: http://direcciondenivelsecundario.blogspot.com.ar/p/naps.html (Recuperado el 20/10/2014).

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2014). Diseño Curricular. Secundaria. Disponible en: https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf (Recuperado el 20/08/2016).

Olivo, E. y Batanero, C. (2007). Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza. *Unión,* 12, 37-51.

Pfannkuch, M. (2007). Year 11 students' informal inferential reasoning: A case study about the interpretation of box plots. In: *International Electronic Journal of Mathematics Education*, Vol. 2, N. 3.

Tauber, L. (2014). Argumentos utilizados por profesores de matemática para explicar conceptos asociados a la idea de aleatoriedad. En: *Memorias del IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos*. Costa Rica: Tecnológica de Costa Rica.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

REPENSANDO LA GEOMETRÍA ESCOLAR DESDE LA RELACIÓN GEOMETRÍA-MUNDO EN LA ANTIGUEDAD

Lianggi Espinoza, Andrea Vergara, David Valenzuela
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Euclides, además de sus famosos Elementos de Geometría, escribió otras obras entre las cuales se encuentra su Óptica. La geometría de sus Elementos se caracteriza por ser teórica, abstracta y separada de la realidad. En cambio, en su Óptica, vemos a un Euclides que usa la geometría para generar un sistema de explicación de un fenómeno de la vida real, la percepción visual del mundo. En este taller problematizaremos la relación geometría-mundo desde las proposiciones de la Óptica de Euclides. Analizaremos el gran potencial que tiene la geometría para explicar diversos fenómenos próximos a la vida de los estudiantes.

Geometría escolar, euclides, óptica geométrica, percepción visual, socioepistemología

DESCRIPCIÓN GENERAL DEL TALLER

El presente taller surge en el marco del proyecto Fondecyt N°82140031 y es resultado de un estudio profundo de la obra de Euclides. Se propone como una instancia práctica para poner al alcance de profesores de matemáticas, que se desempeñen en enseñanza media y/o segundo ciclo, algunas herramientas para replantear la enseñanza de ciertos teoremas geométricos a partir de la comprensión del contexto histórico y epistémico que les dieron origen. Para tales efectos, se han seleccionado algunos de los problemas propuestos en la obra más ancestral que se conoce sobre el fenómeno de la visión: la Óptica de Euclides, con el propósito de utilizarlos como dispositivos de análisis didáctico y epistemológico de varios de los teoremas clásicos de la geometría escolar, como aquellos asociados a ángulos en la circunferencia. El análisis se realiza siguiendo los principios de la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la cual estudia la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional a partir del estudio del saber, entendido este último como el conocimiento en uso (Cantoral, Reyes-Gasperini, Montiel, 2014, p.97).

De acuerdo a la actualización curricular vigente, tanto los objetivos fundamentales como los contenidos mínimos obligatorios están orientados a promover que los estudiantes logren aprendizajes que puedan ser transferidos a contextos reales, bajo la consigna de que una comprensión profunda de los saberes exige considerar que estos se encuentran integrados (MINEDUC, 2009). Dado lo anterior, resulta relevante considerar a la geometría en su relación con el mundo, pues su presencia en la representación y modelación de fenómenos no sólo ha sido permanente, sino que además ha resultado fundamental para el desarrollo de la civilización humana (Scriba y Schreiber, 2015). En este caso, nos situamos en el período conocido como helenístico o alejandrino (323 a.C – 30 a.C), en el cual la geometría euclidiana constituye el principal impulsor del desarrollo matemático y científico de la época. Uno de los problemas más significativos de la época de Euclides (325 a.C – 265 a.C) tenía relación con el fenómeno de la visión, ¿cómo percibimos las cosas que vemos? era una de las preguntas que trataba de responder la óptica geométrica de los griegos.

LA ÓPTICA DE EUCLIDES EN LA MATEMÁTICA GRIEGA

El fenómeno de la visión ha despertado gran interés desde la Antigüedad, entre otras razones debido a que se produce «a distancia». Los pensadores de esta época propusieron explicaciones de la visión que se podrían clasificar en dos grandes teorías: la intramisionista, que asume que el objeto visto emite alguna «efluencia» que alcanza al ojo, produciendo así la visión, y la extramisionista, que propone que es el ojo el que envía algún tipo de «fuerza visual» que captura las propiedades del objeto al entrar en contacto con este (Rodríguez y García, 2009). Euclides asume que existen rayos que llevan la dirección de la mirada del objeto y a través de muchos ejemplos geométricos, en su mayoría muy elementales, va demostrando la relación entre lo que podemos observar en lo inmediato del objeto y el objeto en sí (Scriba y Schreiber, 2015). Para sustentar sus explicaciones de porqué cambia el tamaño del objeto percibido según nos alejamos o acercamos a él, Euclides postula que los objetos que se ven bajo un ángulo de visión mayor parecerán mayores. Esta premisa es usada transversalmente a lo largo de toda la Óptica para justificar geométricamente por qué vemos como vemos. Y aunque hoy entendemos que el fenómeno de la visión obedece a otras causas fisiológicas, lo interesante es que lo descrito por Euclides sigue siendo verificable empíricamente y factible de ser interpretado geométricamente bajo su modelo.

La óptica de Euclides es un libro que está compuesto por 7 definiciones y 58 proposiciones, demostradas de manera axiomática al estilo de los elementos de Euclides. Las proposiciones de la Óptica tratan temas variados, como el efecto de la distancia en la percepción de los tamaños y las formas (Prop 1-17), las distorsiones ópticas que ocurren en la observación de superficies curvas como la esfera, el cilindro y el cono (Prop. 23-35), la percepción de objetos cuando estos o el ojo están en movimiento (Prop. 36-56) y la posibilidad de medir alturas y longitudes horizontales (Prop. 18-23), entre otros temas. Del estudio sistemático de esta obra es posible rescatar la semejanza que existe entre estas proposiciones y los teoremas de la geometría proporcional que prescribe el currículum, pero con una diferencia substancial: la Óptica de Euclides sitúa la explicación de las propiedades geométricas a un fenómeno real, de tal manera que las razones de porqué se cumple tal o cual teorema adquieren sentido y coherencia más allá de los constructos axiomáticos.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Remontarse a los momentos de constitución del saber, considerando de manera amplia las condiciones socioculturales, la visión de mundo y las actividades humanas asociadas, nos provee una fuente de significación renovada para la matemática tal como la conocemos hoy (Espinoza, 2014). La matemática ha pasado por sucesivos procesos de institucionalización que le brindan el actual estatus de disciplina formal. Esta condición nos hace pensar en una matemática abstracta, escindida del mundo real y cuyos alcances con problemas concretos sólo son posibles en el plano de la aplicación, pero lo cierto es que muchas de las ideas fundacionales de la matemática surgieron debido a la necesidad de entender y explicar el mundo.

Si bien las nuevas concepciones en torno a la enseñanza de la geometría coinciden en la importancia que posee el estrechar lazos entre los aprendizajes matemáticos y la resolución

de problemas reales, buena parte de las tareas geométricas convencionales apuntan a utilizar las propiedades para determinar alguna medida en un ejercicio que simula un contexto problemático (Blanco y Barrantes, 2004). Esto ocurre muy especialmente en las clases de geometría, donde se privilegia la aplicación de fórmulas y otros aspectos memorísticos, cuya consecuencia directa, de acuerdo a Ballestero y Gamboa (2010), es la pérdida de los procesos de argumentación y justificación. A través de la Óptica de Euclides es posible recuperar parte de las argumentaciones ausentes en el discurso matemático escolar en torno a las relaciones entre medidas angulares y longitudinales en figuras planas, pues el escenario contextual moviliza la resignificación, entendiendo esta última como la dinámica de enriquecer el conocimientos a partir del uso de este en situaciones nuevas (Cantoral, 2013).

METODOLOGÍA DE TRABAJO

El taller se estructura de acuerdo a tres niveles de análisis. Primero se presenta un problema desde la Óptica de Euclides, con el propósito de estudiar lo que declara la proposición y su explicación geométrica de forma individual. Este se acompaña de un material concreto para facilitar la visualización y la verificación experimental de la veracidad del enunciado. Los participantes son invitados a realizar un análisis de manera grupal, el cual permite construir relaciones y reflexiones ligadas a los saberes matemáticos escolares. Hecho esto, se espera que los profesores discutan la posibilidad de asociar la proposición con un teorema específico de la geometría escolar, el cual se describe tanto desde la propia experiencia docente como desde de lo que señalan los documentos oficiales (libros de texto, planes y programas). Con estas dos concepciones se discute la resignificación de las nociones geométricas a nivel escolar que están a la base del problema y cuáles son los aportes que trae consigo el contexto de la visión para la enseñanza de la geometría (ver Tabla 1).

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Proposición de la Óptica	Teorema geometría escolar	Diálogo entre saberes
Análisis del fenómeno	Análisis didáctico	Resignificación

Tabla 1: Descripción de los niveles de análisis para los problemas de la Óptica.

SESIONES DEL TALLER

El taller contempla dos sesiones de trabajo, En la primera sesión se presentan 2 actividades se presenta el problema de la percepción de los tamaños aparentes desde los objetos, utilizando la definición 4 de la Óptica de Euclides, que declara *"Y que los objetos que se ven bajo un ángulo mayor parecen mayores; los que bajo un ángulo menor, menores, y los que se ven bajo ángulos iguales, iguales"* (Euclides, 2000, pág.135). La actividad 1 cuenta con 5 preguntas, que promueven el análisis de la geometrización en el plano del fenómeno de la visualización de un objeto simple que ocurre en el espacio. La actividad 2 cuenta con 4 preguntas. A continuación se muestran algunas de las preguntas de la Actividad 1 y 2.

Actividad 1

1. Suponga que el segmento AB representa un objeto y E el ojo, como se muestra en los casos de la Figura 1. Se deja el objeto fijo y se mueve el ojo. Encuentre un punto en

el plano desde donde AB se vea más grande (marque con color azul) y otro desde dónde se vea más pequeño (marque con color rojo). Justifique su decisión.

Figura 1: Geometrización en el plano de la percepción visual de AB desde el ojo E.

2. ¿Puede encontrar más de un punto desde donde AB se vea más grande? Marque con color azul, ¿Puede encontrar más de un punto desde dónde AB se vea más pequeño? Marque con color rojo. Justifique su decisión.
3. Encuentra un punto del plano donde el segmento AB se vea del mismo tamaño que lo que se ve desde el punto E.

Actividad 2

1. Considerando los mismos casos de la Figura 1. Encuentren un punto del plano donde el segmento AB se vea la mitad del tamaño de lo se ve desde el punto E. Si pueden encontrar otro punto también dibújenlo.

- ¿Cuántos puntos pueden encontrar y dónde están?, dibújelos.
- ¿Cuáles son todos los puntos que cumplen la condición? Elaboren y consensuen una explicación y una justificación grupal para exponer al resto del taller.

2. Encuentren un punto del plano donde el segmento AB se vea el doble del tamaño de lo se ve desde el punto E. Si pueden encontrar otro punto también dibújenlo.

- ¿Cuántos puntos pueden encontrar y dónde están?, dibújelos.
- ¿Cuáles son todos los puntos que cumplen la condición? Elaboren y consensuen una explicación y una justificación grupal para exponer al resto del taller.

Además la segunda sesión posee una actividad que cuenta con varias instancias de análisis individual y discusión grupal a partir del uso de material concreto, organizadas en 8 preguntas. En esta actividad los profesores deben analizar la percepción de objetos esféricos considerando algunos de las características y propiedades específicas de la circunferencia y el círculo. A continuación se exponen algunas de las preguntas de la tercera actividad.

Actividad 3

1. Te has dado cuenta que la luna llena en la noche a veces parece más grande y otras más pequeña. ¿Cuándo se ve más grande que gana el observador y que pierde ¿Cuándo se ve más pequeña que gana y que pierde el observador?
2. A continuación, recibirá tres esferas (grande, mediana, chica). Tome la más grande acérquela y aléjela de sus ojos. Anote lo que puede percibir en relación a la superficie vista. Haga lo mismo con las otras dos.

3. ¿Qué parte de la esfera ve en cada caso? (la mitad, más de la mitad, menos de la mitad). Luego de discutir de manera grupal, justifique su respuesta y anótela.

REFLEXIONES FINALES

La geometría escolar ha heredado sólo una dimensión de la geometría euclidiana: su estructura axiomática. Sin embargo, la epistemología del saber asociado al fenómeno de la visión de la antigua Grecia y los mismos trabajos de Euclides sobre el tema, nos dejan entrever una matemática pensada para explicar fenómenos de la vida real, que nos ofrece la posibilidad de considerar la enseñanza de la geometría desde una perspectiva más amplia, que no se restringe al ámbito de lo calculatorio y que realzan el carácter pragmático del conocimiento geométrico relativo a los contextos de significación. Este enfoque en torno a los teoremas de la geometría escolar incorpora elementos argumentativos que no desplazan ni el método ni el rigor de las demostraciones usuales, por el contrario, convive en armonía con ellas y las vuelve más próximas a la comprensión del estudiante.

Agradecimientos

Agradecemos el financiamiento de esta investigación por parte de CONICYT + PAI / Concurso nacional apoyo al retorno de investigadores/as desde el extranjero, convocatoria 2014 + FOLIO 82140031, Gobierno de Chile.

Referencias

Ballestero, E., & Gamboa, R. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare* Vol. XIV, N° 2, [125-142].

Barrantes, M., & Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(2), 241-250.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. México: Editorial Gidesa.

Espinoza, L. (2014). *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses.* Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav.

Euclides, (2000). La Óptica. (*trad*. Ortiz, P). Madrid: Editorial Gredos SA.

Ministerio de Educación. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media*, actualización curricular. Chile: MINEDUC.

Muñoz, G., Rupin, P., & Jiménez, L. (2014). Matemática 2° medio, texto del estudiante. Chile: Edición espacial SM para el MINEDUC.

Rodríguez, M.P., & García, D. (2009). Las teorías de la percepción visual y el problema del movimiento ocular. Revista de Historia de la Psicología, 30(2), 11 -19.

Scriba, C. J., & Schreiber, P. (2015). Geometry in the 20 th century. In *5000 Years of Geometry* (pp. 489-564). Springer Basel.

DISEÑO DE PROBLEMAS EN CONTEXTO Y EN DIFERENTES REPRESENTACIONES

Pamela Valencia, Luis Ojeda, Aracely Jiménez, Ana Cisternas
Universidad de Los Lagos

Resumen: El objetivo de este taller es invitar a futuros profesores, y a los profesores en ejercicio, a diseñar situaciones problemas utilizando características de las Representaciones Semióticas y las Variedades Didácticas, los elementos de estas teorías, generan en su aplicación un marco teórico para concatenar una metodología consistente utilizando a la resolución de problemas para obtener aprendizajes significativos (entendidos estos como la adquisición aprehensiva).

Situación problema, contextos, registros de representación semiótica

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas representan un desafío constante a los educadores, y los resultados de las distintas pruebas estandarizadas que se aplican en Chile, revelan la necesidad de un cambio metodológico. Varios autores también han señalado en sus investigaciones que la adquisición aprehensiva de los objetos matemáticos cognoscitivamente instalados y arraigados como propio permitirá al estudiante alcanzar las habilidades que proponen tanto el Currículo Nacional como organismos internacionales.

Objetivos

Diseñar situaciones problemas utilizando Variedades Didácticas.

Objetivos específicos

Elaborar situaciones problemas en diferentes contextos y registros de representación.

Aplicar dichas situaciones problemas utilizando variedades didácticas.

MARCO TEORICO

El marco teórico está compuesto por elementos de dos teorías que se intersectan, Representaciones Semióticas de Raymond Duval y Variedades Didácticas Matemáticas de Poblete, Guzmán y Méndez.

Representaciones semióticas

En esta teoría Duval, deshace cada concepto en partes elementales y las denomina objeto matemático que debe ser estudiado desde sus diferentes registros de representación semiótica, y cada una de estas debe proporcionar al estudiante un acercamiento al objeto. Duval señala que para transitar entre representaciones el sujeto debe realizar actividades de tratamientos dentro de la misma representación y luego convertirlo a un registro diferente. Cuando desde cualquier registro se reconoce el objeto matemático, entonces existe congruencia entre los registros y se ha logrado la noesis, entendida como la adquisición aprehensiva de un objeto matemático.

Variedades didácticas matemáticas

Se definen como "una situación de aprendizaje asociada a la matemática, construida como variables didácticas las situaciones problema, los contextos y registros de expresión", es decir, acercar un concepto a través de problemas contextualizados y desde diversos registros.

Los contextos se pueden clasificar en rutinarios y no rutinarios, a su vez los rutinarios se descomponen en real, realista, fantasista y puramente matemático.

METODOLOGÍA

La metodología se dividirá en dos partes, al inicio se presentará el taller, el marco teórico, y algunos ejemplos, en la segunda parte los participantes deberán crear sus propias sitiaciones problemas, y compartirlas con los demás asistentes.

Algunas situaciones problema

Situaciones problemas que satisfacen el marco teórico propuesto:

1. Josefina midió su dormitorio para poder optimizar su espacio, y obtuvo la Figura 1 que representa la situación.

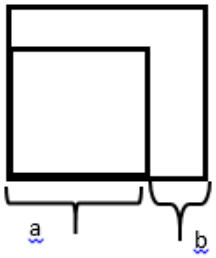


Figura 1: Representación del dormitorio de Josefina. (Fuente: Elaboración propia)

Su dormitorio es un cuadrado y su cama también, el lado de la habitación mide a cm y le sobra b cm ¿Cuál es el área total del dormitorio de Josefina. Justifica tu respuesta.

Este problema corresponde a la Unidad de Álgebra, la subunidad de Productos Notables. Es un problema rutinario, de contexto realista, y representación gráfica.

2. Una estudiante de un Liceo compra un barniz de uñas de marca "Print", si a la semana siguiente compra otros dos de la misma marca y al mismo precio, como lo muestra la Tabla 1:

Cantidad	1	2	3	4	
Precio	$ 830				$ 4150

Tabla 1: Precio y cantidad del barniz de uña. (Fuente: Elaboración propia)

Si la estudiante al cabo de un mes tiene el estuche lleno con 15 barniz de uñas, ¿cuánto gasto en la compra de los barniz de uñas? Modela la función que relacione la cantidad de barniz de uña y el precio. Realice una gráfica de la situación planteada.

Esta situación modela una situación problema que corresponde a una función lineal, es un problema rutinario, de contexto real, y registro tabular.

Los diferentes tipos de registros y contextos en los cuales se presenta un contenido creará en el estudiante representaciones que actúen como facilitadores y así disminuirán los obstaculizadores, que se desprenden cuando el sujeto no logra conectar el objeto matemático y sus distintos registros de representación, lo que ayudará al profesor a intervenir de forma adecuada y lograr los aprendizajes esperados.

APORTES

Este taller invita a trabajar con una metodología que respeta a cada estudiante y su forma de aprender, por lo tanto, colabora con la formación de aprendizajes a largo plazo y con sentido para los alumnos, además de aportar una forma de acercarse a la matemática a través de situaciones cercanas a la realidad de éstos mismos, por lo tanto, la contextualización es fundamental para lograr la atención del alumnado y la motivación para participar activamente de la clase de matemáticas.

Referencias

Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Universidad del Valle, Santiago de Calí.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Vega, Trad.) Santiago de Cali, Colombia: Editorial Universidad del Valle.

Poblete, A., & Díaz, M. (1998). Resolver tipos de problemas matemáticos ¿una habilidad inhabilitante? *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"(*N°42), pág. 409-424.

Poblete, Á., Guzmán, I., & Méndez, C. (Abril de 1996). Variedades didácticas matemáticas: una propuesta considerando la resolución de problemas. *Uno*, 91-97.

Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. Madrid, España: Mc Graw Hill.

EL ROL DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR EN LA FUNCIÓN SOCIAL DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS

Claudio Enrique Opazo Arellano, Irene Carolina Pérez Oxté, Diana María Medina Lara, Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

Resumen: Desde un programa de la Teoría Socioepistemológica, se reflexiona sobre los alcances que tiene el discurso Matemático Escolar (dME) en la función social del docente de matemáticas. Así, se aborda como problemática general, la adherencia, la exclusión y la opacidad, tres fenómenos provocados por el dME en su desarrollo profesional. Estos y otros fenómenos suelen provocar que el alumno, el docente de matemáticas y la gente no puedan ser parte de la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM). En consideración al impacto y efecto que provoca en el docente de matemáticas estos fenómenos, se busca discutir rutas que permitan una inclusión real del docente de matemáticas en la CSCM a través de una Matemática Funcional. Esto quiere decir, reconocer una pluralidad epistemológica y una transversalidad del conocimiento matemático. Específicamente, se abordarán tres modelos: identidad disciplinar, inclusión y socialización del conocimiento matemático, que son ejemplo de lo antes mencionado.

Función social, discurso matemático escolar, adherencia, opacidad

INTRODUCCIÓN

El taller que se propone, busca reflexionar el rol que tiene el discurso Matemático Escolar (dME) en la función social del docente de matemáticas, donde el núcleo es el desarrollo profesional docente; proceso dinámico, permanente y complejo por el que transita un docente de matemáticas.

La discusión tendrá como base el estudio de tres fenómenos relacionados con el conocimiento matemático, los que se han atendido desde la Teoría Socioepistemológica: adherencia, exclusión y opacidad (Cordero, Gómez, Silva-Crocci, y Soto, 2015). Para discurrir estos constructos a la comunidad de docentes en formación, docentes, investigadores en formación e investigadores, esperamos discutir y ejemplificar cada uno de estos fenómenos desde la realidad en la que está inmerso el docente de matemáticas.

Actualmente, muchos investigadores centran la atención en el estudio del docente de matemáticas, ejemplo de ellos es el basto número de artículos relacionados con este tema, los cuales tratan desde diferentes posturas algunos de los siguiente aspectos: la formación inicial, los procesos de profesionalización, el conocimiento matemático que requiere saber el docente de matemáticas, el papel de la práctica educativa, las concepciones sobre el conocimiento matemático, entre otros.

Estas investigaciones, sin duda han permitido avanzar en el entendimiento del docente de matemáticas, sin embargo, la discusión puede ampliarse bajo una visión socioepistemológica -la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM)- preguntándose por los usos del conocimiento matemático del docente de matemáticas en su desarrollo profesional, fuente de su función social.

Justo cuando se cuestiona, cómo usa el conocimiento el docente de matemáticas, se hace referencia a la manera en que los tres fenómenos: adherencia, exclusión y opacidad del conocimiento matemático están presentes en su función social (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015). De ahí que se han postulado constructos que permitan contrarrestarlos, de esta forma: la identidad disciplinar, la inclusión y la socialización se han presentado como una alternativa concreta desde este Programa Socioepistemológico.

DESARROLLO

El Programa Socioepistemológico que se sustenta, refiere la funcionalidad del conocimiento, cuyos ejes son la pluralidad epistemológica y la transversalidad del conocimiento matemático. Todo ello sustentado en las Categorías del Conocimiento Matemático propuestas por Cordero (2008) y ampliada por Del Valle (2015).

Con base en estos constructos y elementos teóricos, se ha preguntado por la naturaleza del conocimiento matemático que es parte de la actividad humana, de ahí que se busca conocer cómo usa el conocimiento matemático el estudiante, el docente de matemáticas y la gente en su Cotidiano; es decir, en uno que exprese cada una de estas realidades (Cordero, en prensa).

Actualmente, se busca identificar los usos del conocimiento matemático de los docentes de matemáticas en formación de tres países: Chile, Colombia y México. Cada una de éstas expresa una realidad, es decir, un *Cotidiano Disciplinar*. Para lograr dimensionar esas realidades, buscamos conocer cómo una determinada comunidad de conocimiento resiste, se legitima y tiene un proyecto. Esto nos permitirá atender los fenómenos de adherencia, exclusión y opacidad, desde una identidad disciplinar, una socialización e inclusión, desde el entendimiento de comunidades específicas; donde vive una reciprocidad, legitimidad y localidad del conocimiento matemático (Cordero, 2016).

En este sentido, se propone una variedad teórica de los modelos de identidad disciplinar, inclusión y socialización del conocimiento matemático, en función de favorecer una función social del docente basada en una matemática funcional. Donde las Categorías del Conocimiento Matemático permitan discutir la actividad humana desde una pluralidad epistemológica y una transversalidad del conocimiento matemático.

Durante el taller, junto con ejemplificar los tres fenómenos, se espera compartir y debatir las variedades teóricas, las que serán vitales para construir situaciones de aprendizaje que favorezca la resignificación de usos (Cordero, 2001) del conocimiento matemático escolar en el que está inmerso el docente de matemáticas.

Así, el reto está en el fundamento de las situaciones de aprendizaje, que son la expresión de conocimientos funcionales, caracterizados por funcionamientos y formas que se debaten, promoviendo el desarrollo de usos (Pérez- Oxté, 2015).

Para acercar a la audiencia a dichas reflexiones, se presentarán ejemplos de situaciones de aprendizaje con énfasis en los usos de la gráfica y en argumentaciones como el comportamiento tendencial y la optimización. Acentuaremos cómo se resignifica este conocimiento matemático en comunidades centradas en la función social del docente de

matemáticas. Destacamos que esta situación de aprendizaje, busca ser un ambiente para socializar una matemática funcional.

REFLEXIONES

Países como Chile, Colombia y México, se han sumado a la iniciativa de reformas educativas profundas, todas ellas en función de mejorar la calidad de la educación. Sin profundizar ahora en cómo se han desarrollado o si las políticas han resultado como se esperaban, se reconoce que en su mayoría, el docente es uno de los ejes fundamentales. En Chile, por ejemplo, se habla de una *carrera docente*, la cual parte desde que el joven comienza su formación inicial. Continúa con procesos permanentes, los cuales en su mayoría son evaluados y certificados.

Es importante destacar, cómo estas evaluaciones a la calidad de la enseñanza, son una referencia para desprestigiar y desmerecer la función social del docente, cuando los resultados no acompañan al gremio de profesionales de la Educación.

Esto personifica el problema, ya que se acentúa sobre la mala calidad de la formación del docente, los pocos esfuerzos o bien competencias pedagógicas que posee el docente para desarrollar su trabajo, entre otros ataques hacia su profesión y su desarrollo.

Dada estas críticas, aparecen por lo regular, opiniones divididas, pero en su mayoría todas unidas por hacer ver que al docente algo le falta. En este sentido, el medio educativo se pregunta ¿Cuál debe ser el conocimiento matemático que un docente debe tener para desarrollar una buena clase de matemáticas? o ¿cuánta más pedagogía o didáctica debe aprender el docente para constituir una buena enseñanza de las matemáticas? En todos estos casos, se mantiene la lógica de la carencia y del rol de las reformas educativas por cubrir esas necesidades profesionales (Opazo-Arellano y Cordero, 2016).

De ahí que surgen programas de desarrollo profesional docente *para el docente*, donde sólo se les impone adquirir las nociones básicas o superiores de las nuevas reformas educativas, transformándose en una actualización permanente desde: estrategias, metodologías y otros aspectos relacionados con lo pedagógico y didáctico de la enseñanza (Montecinos, 2003).

En contraparte a esta postura de personificación y distinguir las carencias hacia el docente y del docente, la postura teórica afín al programa socioepistemológico reconoce que el problema está situado en el conocimiento matemático, donde se reconoce la existencia de un dME con características nocivas, es decir: impone argumentaciones desde una hegemonía, homogeneidad, utilidad y carencia de marcos de referencia (Soto y Cantoral, 2014).

De esta manera, e desea situar la discusión desde el rol que tiene el discurso Matemático Escolar, y se despersonifica el problema que pone al docente como el único responsable de la enseñanza de las matemáticas. De ahí que interesa reflexionar sobre el papel de su función social, una que para el Programa Socioepistemológico, tiene un sentir especial, el cual se expresa desde la funcionalidad del conocimiento matemático; distinto de una utilidad del conocimiento matemático que se pone a disposición de los estudiantes, los docentes en formación de matemáticas y la gente.

Así pues, se ha de favorecer un programa permanente inclusivo hacia el docente de matemáticas, sustentado en una matemática funcional propia de las Categorías del Conocimiento Matemático, donde se cree necesario discutir su desarrollo profesional con base en estas ideas. Ya que se aprecia cómo los fenómenos que surgen a raíz del dME, no se pueden atender sólo desde un punto de vista o temática, sino que de un conjunto de factores que están involucrados. Entre ellos, la identidad disciplinar, la socialización del conocimiento matemático o la inclusión del docente a la CSCM.

Referencias

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinaridad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2008). *El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica.* En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Eds), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 103-128.

Cordero, F. (en prensa). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: Un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica*. Tesis de Doctorado no publicada. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaiso-Chile.

Montecinos, C. (2003). Desarrollo profesional docente y aprendizaje colectivo. *Psicoperspectivas*, 2, 105-128.

Opazo-Arellano, C. y Cordero, F. (2016). La fuente de sentido en la formación docente en Chile. En F. Rodríguez, R. Rodríguez, y L. Sosa (Eds), *Investigación e Innovación en Matemática Educativa* 1 (1), 346-354. Oaxaca, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Pérez-Oxté, I. (2015). *Los usos de la gráfica en una comunidad de Ingenieros Químicos Industriales en Formación. Una base para el diseño de una situación de aprendizaje*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema- Boletim de Educação matemática*, 28(50), 1525-1544.

TALLER DE OPTIMIZACIÓN: DISEÑO DE UN DIARIO

José Cifuentes Riquelme
Instituto Sistemas Complejos de Ingeniería

Resumen: Se presenta una experiencia educativa de tipo práctico-colaborativa basada en un problema de programación entera-mixta para diseñar un diario. El taller está orientado a estudiantes de enseñanza media (formación diferenciada) y se presenta en tres etapas de desarrollo: indagación, construcción del modelo matemático y extensión computacional. Este trabajo ha sido utilizado de forma recurrente para capacitar de profesores de matemática en enseñanza media y a estudiantes de pedagogía como una alternativa para acercar problemas aplicados en la escuela.

Optimización, modelo matemático, hoja de cálculo, solver

INTRODUCCIÓN

Las bases curriculares propuestas por el Ministerio de Educación para Educación Matemática (MINEDUC, 2014) plantean la necesidad de desarrollar actividades que permitan a los estudiantes: resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar y representar. Esta forma de abordar el aprendizaje de la matemática no es ajena a las tendencias que existen a nivel mundial, por ejemplo, la propuesta que hace la OCDE a través de PISA (OECD, 2013) enfatiza la importancia que tiene abordar las habilidades matemáticas desde los problemas aplicados. Es en este contexto, que la necesidad de disponer de actividades educativas basadas en problemas reales, de tipo colaborativas, orientadas a la construcción de modelos matemáticos y que usen las TICs, tiene gran relevancia. En tanto, presentar problemas abiertos y contextualizados permite a los docentes desarrollar actividades matemáticas basadas en la indagación y en el desarrollo de habilidades de orden superior.

El taller que se presenta a continuación tiene su inspiración inicial en el trabajo publicado en 1997 “Lego My Simplex” (Pendegraft, 1997). El artículo ha sido un marco de referencia para acercar problemas de optimización a través de la experimentación (Chelst & Edwards, 2004; Cochran, 2015).

Siguiendo la propuesta citada anteriormente, en Chile se publican unas notas de taller que presentan el problema de encontrar la disposición óptima de noticias y avisos de publicidad en un diario para obtener una mayor utilidad (Devia & Weber, 2012). El taller que se presenta a continuación es la aplicación de la actividad “Diseño de un diario”.

DESARROLLO DEL TALLER

El taller propuesto se presenta en tres etapas que son desarrolladas de forma secuencial, y que están conectadas entre sí, para dar sentido al problema de optimización que se resolverá.

ETAPA DE INDAGACIÓN

Corresponde a la primera etapa y es de tipo exploratoria. Se planteará un problema práctico donde a los participantes trabajarán en grupo. Para esto, se les entregarán unas hojas

impresas con publicidades y noticias valorizadas. Posteriormente, deberán recortar y elegir un conjunto de ellas, que pondrán en una cartulina que simula una página de diario.

El objetivo de la actividad es que los participantes encuentren una configuración que permita obtener una utilidad máxima. Un ejemplo del producto que se desarrollada en esta actividad se encuentra en la siguiente figura.

Figura 1: Configuración de resultados actividad grupal

Una vez que los grupos han desarrollado la actividad, deben exponer las estrategias que utilizaron para la resolución del problema. En la presentación deben resaltar los puntos conflictivos que tuvieron que considerar para determinar la configuración final.

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

En esta etapa se desarrollará un método matemático que permita aproximar una solución al problema presentando anteriormente. Para esto, el problema se modelará como un problema de optimización entera mixta basado en la construcciones de patrones.

Para simplificar el proceso de modelización, en la primera parte se considerará cada hoja como una representación de una matriz de 5x3 y se utilizará solamente tres tipos de artículos. Con esta información, se procederá a construir los patrones necesarios para resolver el problema.

En una primera instancia, se resolverá el problema para tres hojas considerando la construcción de cinco patrones. Un esquema de los patrones que son necesarios para modelar el problema es el siguiente:

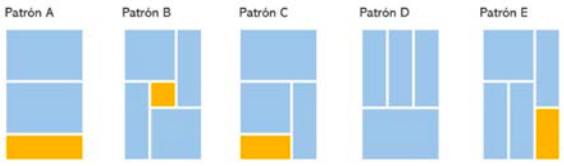


Figura 2: Tipos de patrones

Con los datos de la etapa de indagación y la construcción de patrones se plantea un nuevo problema, que consiste en determinar cuántos patrones de cada tipo incluir en las tres hojas para determinar la utilidad máxima considerando la cantidad de artículos disponibles.

Este problema se modela siguiendo la estructura de un modelo programación entera y se resuelve con la ayuda el complemento Solver de la hoja en la hoja de cálculo Excel.

ETAPA DE EXTENSIÓN COMPUTACIONAL

En la última parte del taller se extiende el problema inicial a uno con mayor tipo de artículos y hojas disponibles. Las extensiones de este problema se resuelven a través de la herramienta SOLVER de Excel y OpenSolver para la hoja de cálculo de Google[27].

El objetivo de la etapa de extensión computacional es hacer crecer el problema de forma significativa, principalmente, incrementando el número de páginas y artículos disponibles. A través de esta experimentación se espera que los estudiantes puedan identificar la solidez que tiene la construcción del modelo matemático y cómo este, una vez que se ha puesto en marcha, puede resolver problemas que en apariencia son muy complejos.

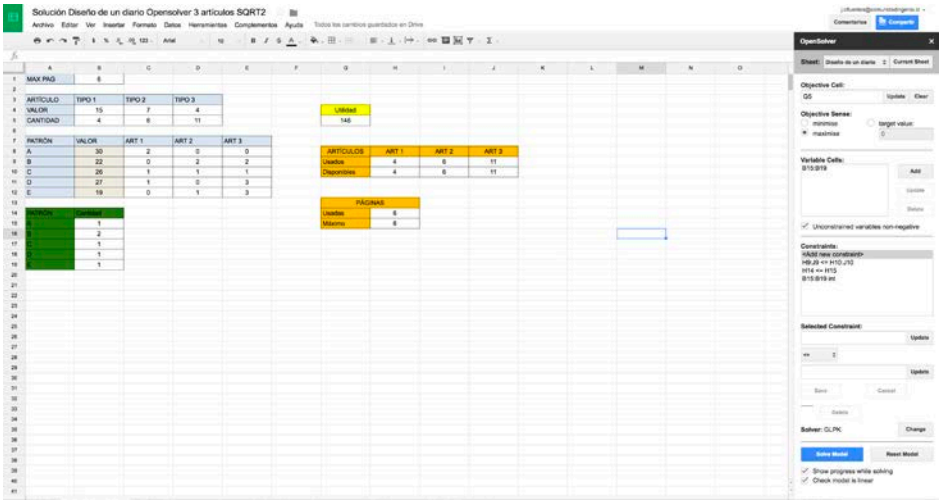


Figura 3: Solución en la hoja de cálculo con OpenSolver

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

El problema presentado tiene la particularidad de que no es un problema clásico de programación lineal en dos variables que puede ser resuelto de forma gráfica a través de los métodos de resolución revisados en la escuela. Además, debido a que la propuesta de resolución está basada en un modelo de programación entera permite aproximar el concepto de región factible como conjunto discreto.

Dado lo anterior, el uso de la hoja de cálculo o de sistemas de cómputo avanzados son fundamentales para resolver el problema. Además, incorporando este tipo de herramienta es posible extender y profundizar el modelo cambiando los valores de las variables.

Finalmente, el problema presentado describe la importancia de construir modelos matemáticos sólidos que permitan resolver problemas que, posteriormente, son enviados a una computadora para ejecutar los cálculos y procesos algorítmicos.

Referencias

Chelst, K. R., & Edwards, T. G. (2004). Does this Line Ever Move?

[27] La propuesta inicial el problema se resuelve utilizando la herramienta de SOLVER de MS EXCEL, pero también es posible resolver el mismo problema con otras herramientas gratuitas y de código abierto.

Cochran, J. J. (2015). Extending "Lego® My Simplex." *INFORMS Transactions on Education*, *15*(3), 224–231. http://doi.org/10.1287/ited.2015.0139

Devia, N., & Weber, R. (2012). Teaching Note—Active Learning Exercise: Newspaper Page Layout. *INFORMS Transactions on Education*, *12*(3), 153–156. http://doi.org/10.1287/ited.1110.0082

MINEDUC. (2014). Bases curriculares séptimo a segundo medio matemática.

OECD. (2013). PISA PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do (Volume I) Student Performance in Mathematics, Reading and Science. OECD Publishing.

Pendegraft, N. (1997). Lego of my simplex. OR/MS Today.

RESOLUCION DE PROBLEMAS: ABORDAJE METAFORICO ENACTIVO

Ximena González Grandon[1], Jorge Soto Andrade[2]
Instituto de Filosofía y Ciencias de la Complejidad[1], CIAE[2], Universidad de Chile

Resumen: El objetivo de este taller es proveer situaciones favorables para que sus participantes puedan explorar experiencialmente la resolución de problemas matemáticos, en forma situada, corporizada, enactiva y metafórica, aspectos a menudo descuidados en los abordajes tradicionales. Los contenidos matemáticos involucrados corresponden a aritmética, álgebra, geometría, probabilidades. Los niveles educativos implicados van desde el nivel básico hasta el nivel universitario.

Resolución de problemas, metaforización, enacción

PRESENTACIÓN DEL TALLER

Este taller apunta a explorar experiencialmente la resolución de problemas desde una perspectiva metafórica enactiva y corporizada (English, 1997; Gallagher-Lindgren, 2015; Díaz-Rojas y Soto-Andrade, 2015; Libedinsky y Soto-Andrade, 2015; Soto-Andrade, 2014, 2016). Este tipo de abordaje a la resolución de problemas ha sido bastante descuidado en la literatura hasta ahora y está frecuentemente ausente en las estrategias didácticas tradicionales. Ver por ejemplo Csíkos et al. (2016), Jaworski (2016), Mason et al. (2010). En estos últimos se tiende a ignorar la incidencia de la corporalidad y la enacción en la emergencia de ideas creativas durante la resolución de problemas, así como a permanecer constreñidos en un solo dominio, el algebraico por ejemplo, privando a los participantes de explorar tránsitos o transferencias a otros dominios, que les permitirían resignificar los problemas propuestos (cf. Jaworski, 2016; Mason et al., 2010). Publicaciones muy recientes en psicología cognitiva aportan agua a nuestro molino al respecto (Vallée-Tourangeau et al., 2016).

En este taller enfatizaremos el trabajo grupal de los participantes sobre situaciones y problemas matemáticos concretos, que dan la oportunidad de contrastar in situ el poder de distintas perspectivas teóricas (Soto-Andrade, Reyes-Santander & Parraguez, 2012). Estimularemos además la interacción “horizontal” entre los participantes y la discusión en común de sus distintos abordajes a un mismo problema.

Las situaciones y problemas propuestos son atingentes a distintos niveles educativos, desde el primario hasta el terciario. Corresponden a contenidos de aritmética, algebra, geometría, probabilidades.

PERSPECTIVA TEÓRICA

Nuestra perspectiva teórica esta basada en el rol clave de la metaforización y la enacción en nuestros procesos cognitivos y nuestro aprendizaje (English, 1997; Johnson y Lakoff, 2003; Lakoff y Núñez, 2000; Sfard, 2009; Soto-Andrade y Reyes-Santander, 2011; Proulx y Simmt, 2013; Soto-Andrade, 2006, 2007, 2013, 2014, 2015, 2016; Gallagher-Lindgren, 2015; Núñez y Marghetis, 2014; Díaz-Rojas y Soto-Andrade, 2015, 2016). Utilizamos el

término *enacción* en el sentido introducido por Varela (1987, 1999) y Varela et al. (1991) en ciencias cognitivas.

En este taller queremos explorar algunos aspectos de la diversidad cognitiva que recubre la Resolución de Problemas y en qué medida el llamado "Pensamiento Matemático" (término mas feliz que "Razonamiento Matemático") es reductible a la actividad de Resolución de Problemas.

Nuestras hipótesis básicas, a ser testeadas en este taller, son:

1. La resolución de problemas como es concebida habitualmente es demasiado estrecha y se ha transformado abusivamente la taxonomía *descriptiva* de Polya (1957, 1962, 1965), que por lo demás descuida justamente la metaforización y la enacción, en un abordaje *prescriptivo* a la resolución de problemas, que conlleva significativos "efectos secundarios" además de "glissements meta" en el sentido de Brousseau (1998).
2. La cognición matemática y particularmente la resolución de problemas, están corporeizadas y situadas, en los agentes cognitivos implicados, a través de metáforas enactivas, que emergen de la percepción y la acción de la experiencia inicial de lo concreto ("*ciclos sensoriomotores fenomenológicos*"), dependientes del contexto cultural ambiente (Fyfe at al., 2014; Pausigere y Graven, 2014; Hoong et al., 2015; Libedinsky y Soto-Andrade, 2015).

PARTICIPANTES

Este taller se dirige principalmente a docentes en ejercicio de la matemática, de todos niveles, pero también a profesores en formación de pregrado.

METODOLOGÍA

Planeamos trabajar con los participantes en forma interactiva y grupal. Los grupos de trabajo serán definidos ostensiblemente al azar y constarán de 4 participantes en promedio. Se contará con la colaboración de dos asistentes para supervisar el trabajo grupal de los participantes. Se alternará entre instancias de trabajo en grupos estancos, puesta en común y discusión colectiva del avance logrado e informes de cada grupo sobre su actividad. Como técnica didáctica, además de la promoción del pensamiento crítico y reflexivo de los participantes, comenzamos presentando situaciones, donde puedan *emerger* problemas; elegimos consensualmente algunos de ellos, que los participantes abordarán con sus propios recursos. Promovemos el trabajo colaborativo y el contraste entre distintas visiones (metaforizaciones), no solamente la reflexión individual. Pretendemos de esta manera, trabajando sobre problemas especificos, facilitar la apertura del espectro cognitivo de los participantes, estimulando sus capacidades de metaforización y enacción de objetos y situaciones matemáticas, así como su toma de conciencia de sus reacciones afectivas y su incidencia sobre la emergencia de nuevas ideas y visiones.

TEMARIO

Planeamos tratar situaciones y problemáticas como las siguientes, que pueden proveer retroalimentación para nuestra perspectiva teórica.

- Ángulos exteriores de un polígono. Su suma: ¿por qué y para qué?
- Sumas consecutivas de números naturales (cf. Mason et al., 2010; Jaworski, 2016).
- ¿Es ilusorio el rol del tiempo en ciertos procesos aleatorios? : Modelos de urnas y "probabilidades de las causas" (Borovcnik, 1992)
- Contraste crítico con algunos aspectos de la taxonomía de Polya (1957, 1962, 1965).

Referencias

Borovcnik, M. (1992). Stochastik im Wechselspiel von Intuition und Mathematik. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.) (2016). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 51-66). Szeged, Hungary: PME.

Díaz-Rojas, D., & Soto-Andrade, J. (2015). Enactive Metaphoric Approaches to randomness. In K. Krainer, N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 629-636). Prague: Charles University in Prague & ERME.

Diaz-Rojas, D., & Soto-Andrade, J. (2016). Metaphoring and Enacting in Math. Education. In Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (p. 146). Szeged, Hungary: PME.

English, L. (ed.) (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. London: Lawrence Erlbaum.

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness fading in mathematics and science instruction: A systematic review. *Educational Psychology Review*, *26*(1), 9-25.

Gallagher, S.; Lindgren, R. (2015). Enactive metaphors: learning through full body engagement. *Educ. Psychol. Rev*., 27, 391-404.

Hoong, L. Y., Kin, H. W., & Pien, C. L. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future. *The Mathematics Educator*, *16*(1), 1-19.

Jaworski, B. (2016). How to solve it: with a focus on problems in mathematics teaching. In Csíkos, C., Rausch, A. & Szitányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 51-66). Szeged, Hungary: PME.

Johnson, M., & Lakoff, G. (2003). *Metaphors we live by*. New York: The University of Chicago Press.

Lakoff, G., & Nuñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from?* New York: Basic Books.

Libedinsky, N., & Soto-Andrade, J. (2015). On the role of corporeality, affect and metaphoring in Problem solving. In P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pehkonen (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives* (pp. 53-67). Berlin: Springer-Verlag.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. London: Pearson

Núñez, R., & Marghetis, T. (2014). Cognitive linguistics and the concept (s) of number. In *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*.

Pausigere, P., & Graven, M. (2014). Learning metaphors and learning stories (stelos) of teachers participating in an in-service numeracy community of practice. *Education as Change*, *18*(1), 33-46.

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Garden City, N. Y.: Doubleday.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching, problem solving.* (Vol. 1). New York: Wiley.

Polya, G. (1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.* (Vol. 2). New York: Wiley.

Proulx, J. & Simmt, E. (2013). Enactivism in mathematics education: moving toward a re-conceptualization of learning and knowledge. *Education Sciences & Society, 4* (1), 59-79.

Sfard, A. (2009). Metaphors in education. In H. Daniels, H. Lauder & J. Porter (Eds.) *Educational theories, cultures and learning : a critical perspective* (pp. 39 – 50). London: Routledge.

Soto-Andrade, J. (2006). Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des maths. *Ann. Didactique Sciences Cogn*., *11*, 123-147.

Soto-Andrade, J. (2007). Metaphors and cognitive styles in the teaching-learning of mathematics. In D. Pitta-Pantazi, & J. Philippou (Eds.). *Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 191-200). Larnaka, Cyprus: University of Cyprus.

Soto-Andrade, J. (2013). Metaphoric Random Walks: A Royal Road to Stochastic Thinking. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 890-900). Antalya, Turkey. Retrieved from: http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG5/WG5_Soto_Andrade.pdf

Soto-Andrade, J. (2014). Metaphors in Mathematics Education. In Lerman, S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer Ref., Berlin: Springer-Verlag (pp. 447-453) DOI:10.1007/SpringerReference_313292

Soto-Andrade, J. (2015). Une voie royale vers la pensée stochastique: les marches aléatoires comme pousses d'apprentissage. *Statistique et Enseignement 6*(2), 3-24.

Soto-Andrade, J. (2016). Enactive Metaphoring in the learning of Mathematics, Invited Lecture at the *13th International Congress of Mathematics Education (ICME13),* Hamburg: ICMI.

Soto-Andrade, J., & Reyes-Santander, P. (2011). Conceptual metaphors and "Grundvorstellungen": a case of convergence? In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 735-744), Rzészow, Poland: Univ. of Rzészow.

Soto-Andrade, J., Reyes-Santander, P., & Parraguez, M. (2012). Trois théories en action: APOS, Métaphores et Grundvorstellungen dialoguent autour d'un polygone…, communication au *Colloque en honneur de Michèle Artigue*, LDAR, Univ. Paris 7, mai-juin 1012. Descargado de sites.google.com/site/colloqueartigue/ atelier 2 (pp 16 – 19). s

Vallée-Tourangeau, F., Steffensen, S. V., Vallée-Tourangeau, G., & Sirota, M. (2016). Insight with hands and things. *Acta Psychologica*, 170, 195-205). doi: 10.1016/j.actpsy.2016.08.006

Várela, F. J. (1987). Laying down a path in walking. In W. I. Thompson (Ed.), Gaia: A way of knowing. Political implications of the new biology (pp. 48-64). New York: Lindisfarnc Press.

Varela, F. J. (1999). *Ethical know-how: action, wisdom, and cognition*. Stanford: Stanford University Press.

Varela, F., Thompson, E., Rosch, E. (1991). *The embodied mind: cognitive science and human experience*. Cambridge: MIT Press.

POSTERS

CARACTERIZACIÓN DE PREGUNTAS QUE FAVORECEN EL APRENDIZAJE DEL CAMPO ADITIVO

Claudia Cornejo Morales, Marcos Barra Becerra
Universidad Alberto Hurtado

Preguntas, comunicación, discurso, profesorado, socioepistemología

La presente investigación tiene como objetivo caracterizar las preguntas realizadas por los docentes al trabajar el campo aditivo, ya que se ha evidenciado las dificultades que se tienen para plantear preguntas que favorezcan el aprendizaje. Se observarán clases para identificar la tipología de preguntas que realizan dentro del aula para verificar si éstas promueven, o no, la comunicación y argumentación en la sala de clase. El sustento teórico que permitirá realizar el análisis de la investigación corresponde a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, impulsada por Ricardo Cantoral.

PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN

Las preguntas realizadas por los profesores han sido parte fundamental del proceso de enseñanza aprendizaje, Elder (2002) indica que desde tiempos antiguos eso ha sido así pues son utilizadas por quien enseña para verificar, de algún modo, que el aprendiz haya entendido la idea o concepto sobre el cual está aprendiendo. Se considera el foco en el trabajo del profesor y las preguntas realizadas a los estudiantes al desarrollar ideas del campo de problemas aditivos. Se ha observado que los profesores realizan preguntas retóricas, que no desarrollan habilidades en los estudiantes, o se focalizan en el resultado numérico de algún cálculo. Para la caracterización de las preguntas, se observó clases para tipificarlas e identificar si éstas promueven la comunicación. Se ha seleccionado un enfoque cualitativo, exploratorio y descriptivo, centrándose en el estudio de casos. Se propone la observación y grabación de clases para analizar su práctica en relación a las preguntas que realiza en el aula y las interacciones que éstas promueven. El sustento teórico para la investigación será la Socioepistemología, considerando los componentes didácticos y sociales de la teoría, con foco en la noción de práctica social y el discurso matemático escolar. Entre los resultados investigativos destaca la importancia de las buenas preguntas, que favorecen el aprendizaje de los estudiantes. El profesor que maneja bien los aspectos matemáticos del contenido y hace preguntas relevantes sobre ellos, favorecen y hacen funcional el aprendizaje de un objeto.

Referencias

Elder, L. y Paul, R. (2002). *El arte de formular preguntas esenciales*. Foundation for Critical Thinking, Recuperado de http://www.criticalthinking.org/resources/PDF/SP-AskingQuestions.pdf

NARRATIVA DE LA DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES, UNA FORMA DISTINTA DE EVALUAR PROPIEDADES MATEMÁTICAS

Romina Barrios Orellana, Javiera López Reinoso, Marcelo Ozimica Pérez
Liceo Mauricio Hochschild del CEAT

Interdisciplina, narrativa, densidad de números racionales, evaluación

Con la intención de conseguir aprendizajes que se relacionen con otras áreas del saber, los docentes de los subsectores de matemática y lenguaje planificaron una actividad interdisciplinaria para tres primeros medios. Esta actividad tuvo como objetivo crear narraciones literarias y no literarias, cuyo argumento principal fuera el uso de la propiedad de densidad de los números racionales. Al evaluar cada proyecto se evidenció una mayor comprensión de la propiedad.

INTRODUCCIÓN

La evaluación de propiedades matemáticas se ha caracterizado principalmente por el uso de pruebas o informes que replican lo mismo que aparece en los libros (Gómez, 1996). Este antecedente motivó a profesores de matemática y de lenguaje a diseñar una actividad interdisciplinar puesto que así se construye conocimiento por todas las personas involucradas en el proceso, sobre la base de los contenidos que se trabajan (Baqueró y Majó, 2013).

DESARROLLO

El aprendizaje de contenidos conceptuales esta referido a la capacidad que tiene el estudiante para explicar o evidenciar cómo un concepto o proceso se emplea en una situación nueva (Ahumada, 2005). Por lo anterior es que se intervino a tres cursos de 1° año medio, y el objetivo principal fue aplicar la propiedad de densidad de los números racionales a situaciones narrativas.

Durante la intervención la clase de lenguaje trabajó las variadas técnicas comunicativas para la generación de un texto, mientras que en matemática se ubicaron fracciones propias en una recta numérica de manera sucesiva en donde se pudiese observar la densidad de los racionales.

La pauta de evaluación fue diseñada por los docentes de ambos subsectores, los que consideraron criterios relativos al uso del concepto de densidad, ubicación de fracciones propias en la recta, mientras que en lenguaje se consideró la coherencia, cohesión, correferencia y ortografía.

CONCLUSIÓN

Las narraciones creadas por los estudiantes provocaron una mayor comprensión de la propiedad, puesto que se asoció a la idea de paradoja, cuando se aplicaba a situaciones narrativas.

Referencias

Ahumada, P. (2005). Evaluación del conocimiento conceptual. En A. Pedro (Ed.), *Hacia una evalaución auténtica del aprendizaje* (págs. 80-100). México: Paidos.

Baqueró, M. y Majó, F. (2013). Cómo organizar un proyecto interdisciplinario. *Aula*, 77-81.

Gómez, P. (1996). Riesgos de la innovación curricular en matemáticas. *Ciencia y tecnología, 13*(4), 25-3

ACOMPAÑAMIENTO PARA EL DESARROLLO PROFESIONAL: LA EXPERIENCIA DE MEJOR MATEMÁTICA

Rubén Balboa, Roxana Di Genova, Claudia Olivares, María Paz Silva
CIAE, Universidad de Chile

Acompañamiento, observación, retroalimentación, desarrollo profesional

RESUMEN

Presentamos un modelo de acompañamiento en aula para profesores de matemática, el cual se está trabajado en cuatro escuelas de la región metropolitana. Dicho modelo es parte de la experiencia que se está viviendo, en el marco del programa Mejor Matemática, iniciativa desarrollada entre el Ministerio de Educación, CIAE y CMM de la Universidad de Chile, desde el año 2015 a la fecha.

El Programa Mejor Matemática (MM) tiene como objetivo la mejora continua de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática en escuelas públicas, a través del fortalecimiento de las capacidades de las propias comunidades escolares y del desarrollo profesional, a través del acompañamiento individual de cada docente.

El Programa MM identificó una serie de prácticas docentes, que se espera ocurran durante las clases de matemática, y en base a ello desarrolló un instrumento de observación de clases, que es uno de los insumos fundamentales en el modelo de acompañamiento.

El modelo de acompañamiento a los docentes se inicia con la elaboración de un diagnóstico que busca dar cuenta del nivel de instalación de dichas prácticas. A partir de ello se elabora y acuerda con cada profesor(a) un plan de trabajo en donde se propone la implementación de algunas acciones específicas para fortalecer o instalar ciertas prácticas esperadas. Así los Docentes de Apoyo Escuela (DAE) dan inicio a un proceso de acompañamiento que consiste en un ciclo de observación de clases, retroalimentación de la clase observada y monitoreo a cada docente que imparte matemática en la escuela.

CONCLUSIONES

Uno de los hallazgos relevantes en el monitoreo realizado a mediados del año 2016 a una parte de los docentes del programa, dan cuenta que, la mayoría de ellos, se han movilizado positivamente en usar y considerar las ideas, el desarrollo de procedimientos, representaciones matemáticas y argumentos que hacen los estudiantes, para el desarrollo de la clase y la consecución de los objetivos de aprendizaje que plantean.

Un desafío que presenta este modelo es lograr el apoyo y trabajo conjunto con los equipos directivos de las escuelas de manera que el trabajo que se realiza con los docentes generen capacidades de trabajo colaborativo y desarrollo profesional que queden instaladas en la escuela y no se reduzcan a un proceso de desarrollo individual.

Una desventaja en la implementación del programa ha sido la alta rotación de profesores en las escuelas participantes.

CONCEPCIONES DEL CONCEPTO VOLUMEN EN ESTUDIANTES DE PRIMERO MEDIO

Norma Serey Madariaga, Cecilia Rojas Pardo
Universidad Alberto Hurtado

Volumen, teoría de los campos conceptuales, esquemas, invariantes operatorios

Esta investigación, desde la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC), analiza y caracteriza las concepciones y organizaciones del concepto volumen en estudiantes de 1°medio. Es un estudio no experimental, cualitativo descriptivo. Para el levantamiento de información, se diseñará y aplicará un cuestionario, complementado con una entrevista semiestructurada.

ANTECEDENTES, PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Saucedo (2009), Sáiz (2007), Vergnaud (1985), entre otros, dan cuenta de lo compleja que es la comprensión del concepto volumen para los estudiantes. Surge así la problemática: indagar cuáles son los esquemas sobre el volumen que tiene el estudiante de 1° medio y que pone en juego al resolver situaciones relacionadas con dicho concepto. Para responder esta interrogante, se plantea el objetivo: Analizar y caracterizar las Concepciones y Organizaciones del volumen que han adquirido estudiantes de primero medio.

REFERENTE TEÓRICO Y METODOLOGÍA

El referente teórico es la TCC de Vergnaud y se realiza bajo un enfoque cualitativo y descriptivo según Hernández, Fernández y Baptista (2006), a través de un estudio de casos. La metodología considera el diseño, validación y aplicación de un cuestionario con situaciones que involucren al volumen, complementado con una entrevista semiestructurada.

ALGUNOS RESULTADOS PRELIMINARES Y CONCLUSIONES

Se identificaron seis categorías de respuestas en la tarea de definir qué es el volumen. El 40% de los Estudiantes hacen referencia al volumen sin especificar el concepto correctamente.

La estrategia de resolución de problemas más utilizada es la basada en la linealidad .Los estudiantes de 1° medio consideran como sinónimos los conceptos de volumen y capacidad.

Referencias

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. Ciudad, México: McGraw-Hill.

Sáiz, M. (2007). *El Volumen ¿Por dónde empezar?*. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf

Saucedo, G. (2009). Hacia la construcción del volumen. En I. Zapico, & S. Tajeyan (Ed.), *Acta de la VII Conferencia Argentina de Educación Matemática* (pp.1-8). Buenos Aires: Sociedad Argentina De Educación Matemática.

Vergnaud, G. (1985). Didáctica y adquisición del concepto de volumen. Ministerio de Educación y Ciencia (Ed), *La Enseñanza de la Matemática a Debate* (pp.161-173). Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

LAS CONCEPCIONES DE ÁREA DE ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA DE EDUCACIÓN BÁSICA

Paulina González Alvear, Cecilia Rojas Pardo
Universidad Alberto Hurtado

Concepto, área, polígonos, campos conceptuales

Este trabajo indagará sobre las concepciones que tienen algunos estudiantes de formación inicial sobre el concepto de área al resolver problemas de polígonos, desde la perspectiva de la Teoría de los Campos Conceptuales. En el estudio se aplicará una metodología con un enfoque cualitativo mediante un estudio de casos. Para la obtención de la información, se diseñará y aplicará un cuestionario que incluirá variadas situaciones que el alumno debe resolver, junto a una entrevista semiestructurada, para analizar los invariantes operatorios que los estudiantes darán a conocer.

PROBLEMA, ANTECEDENTES Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Según Marmolejo y González (2015):

> "el bajo rendimiento que tienen los estudiantes al resolver problemas de área; la investigación a través de reportes que señalan la dificultad en la resolución de problemas; y el reconocimiento por parte de colegios y universidades de la existencia de dificultades que persisten en torno a problemas de área, son evidencia suficiente de la existencia real de la problemática" (p.46).

La problemática en la resolución de problemas de medición de superficies a partir de área de polígonos regulares e irregulares, surgiría entonces desde la confusión, la falta de compresión y el olvido de definiciones y propiedades por parte del alumnado. De acuerdo a lo expuesto, surge el objetivo general de la investigación el cual es "analizar y caracterizar las concepciones de área que han adquirido los alumnos de pregrado de educación básica, desde la perspectiva de la Teoría de los Campos Conceptuales.

MARCO DE REFERENCIA Y METODOLOGÍA

Este estudio se apoya en la Teoría de los Campos Conceptuales, de Gerard Vergnaud citado en Sureda y Otero (2011), teoría cognitiva que define "concepto" como un triplete de tres conjuntos (situaciones, invariantes operatorias y significantes).

La metodología que se utilizará es cualitativa, la cual se traduce en la confección y aplicación de un cuestionario que incluirá una matriz con criterios preestablecidos para su análisis. Las preguntas incluirán concepciones de área de polígonos, donde los alumnos darán a conocer, los conceptos en acto y teoremas en acto en los cuales reposarán sus esquemas, utilizando el lenguaje natural y/o simbólico. Este proceso culminará con los procesos de análisis y conclusión.

Referencias

Marmolejo, G y González, M.T. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. *Estado de la cuestión. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 1*, 45-58.

Sureda, P y Otero, M.R. (2011). Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 22*, 124-138.

RESIGNIFICACION DEL CONCEPTO TESELACIONES SEMIREGULARES PARA ESTUDIANTES DE PRIMERO MEDIO TÉCNICO PROFESIONAL

Alejandra Fairlie, Marcos Barra
Universidad Alberto Hurtado

Socioepistemología, resignificación, discurso matemático escolar, teselaciones

La geometría como rama fundamental de la matemática permite al estudiante desarrollar habilidades de pensamiento espacial. En este sentido, las teselaciones aportan al desarrollo de la comprensión del espacio y su forma; a los procesos cognitivos como coordinación y discriminación visual, percepción y relación de posición en el espacio de una u otra figura (Uribe, Cárdenas y Becerra 2014).

ANTECEDENTES Y MARCO REFERENCIAL

Al respecto, el problema radica en que se ha dejado de lado tareas que permitan que la geometría se trabaje desde un estatus funcional más que utilitario. El discurso matemático actual propicia, para los estudiantes, actividades que promueven débilmente los análisis, las conjeturas y argumentos, cuando se enfoca en algoritmos y cálculos acabados (Uribe, et al., 2014).

Esta investigación pretende abordar la resignificación del objeto teselaciones semi regulares en el marco teórico de la socioepistemología (Cantoral, 2013). El enfoque será puesto en las prácticas sociales de los estudiantes. Se indagará en los fenómenos de producción y adquisición del conocimiento desde una perspectiva social en un escenario particular.

OBJETIVO GENERAL

Resignificar el concepto teselación semiregular identificando los conceptos o nociones que se requieren para otorgar funcionalidad a la regla que permite generar una tesela y por ende una teselación

METODOLOGÍA

La metodología será de corte cualitativo; descriptivo, interpretativo además de un análisis a priori y a posteriori de las producciones de los estudiantes. Los alumnos que participarán en esta investigación, son de primero medio técnico profesional de un liceo municipal de la comuna de las Condes.

Referencias

Uribe Garzón, S. M., Cárdenas Forero, Ó. L. y Becerra Martínez, J. F. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación matemática*, *26*(2), 135-160.

Cantoral, R. (2013). Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento (1a ed.). , Barcelona: Editorial Gedisa SA.

SIGNIFICADOS ESCOLARES DEL CONCEPTO DE PORCENTAJE

Mery Salinas Hernández, Luis Rico Romero, Elena Castro Rodríguez
Universidad de Granada

Significado, porcentaje, representación, sentido, estructura conceptual

En este estudio se realiza un análisis del significado que escolares chilenos de educación primaria le atribuyen al concepto de "porcentaje".

Trabajos como los de Parker y Leinhardt (1995), Zurbano (2002) y Mendoza (2007), afirman que, a pesar de que la noción de porcentaje es de conocimiento público y de cultura general, hay dificultades que subyacen a su significado, es decir, a su comprensión, interpretación y aplicación. Este hecho nos motivó a indagar y describir los significados del concepto "porcentaje" que manifiestan los estudiantes de primaria tras un primer acercamiento escolar a esta noción.

Abordamos el estudio en términos de tres componentes del significado de un concepto matemático escolar: la estructura conceptual en que se ubica, los sistemas de representación que lo expresan y los sentidos y modos de uso con que se emplean (Rico, Flores y Ruiz-Hidalgo, 2015). Para ello, encuestamos a 100 estudiantes chilenos de séptimo básico mediante un cuestionario semántico. En el análisis buscamos identificar variabilidad de respuestas e indicios de las tres componentes de significado en las ideas expresadas por el alumnado en torno a la noción de "porcentaje".

En las respuestas recogidas identificamos que destacan: las situaciones laborales, siendo el "descuento" un término asociado con frecuencia al porcentaje, la notación tradicional del numeral seguido del símbolo como sistema de representación más frecuente y como estructura conceptual la relación parte-todo. También identificamos respuestas que dan cuenta de relaciones de cambio, relaciones proporcionales, relaciones inversas y la consideración del porcentaje como un operador que se presentan con menor frecuencia.

Finalmente, consideramos que con este estudio contribuimos a identificar variables que pueden incidir en el tratamiento dado a la noción de porcentaje en las matemáticas escolares y aportamos evidencia empírica de la pertinencia de las componentes de significado como sistema de clasificación, análisis e interpretación de las respuestas proporcionadas por los estudiantes mediante el cuestionario semántico.

Referencias

Mendoza, T. (2007). *Estudio didáctico de la noción de porcentaje* (Tesis de maestría no publicada). CINVESTAV-IPN, México.

Parker, M. y Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research, 65*(4), 421-481.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *UNO, 70,* 48-54.

Zurbano, E. (2002). Los porcentajes y su interpretación. En C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 265-276). España: Universidad de Alicante.

MICROINGENIERÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS UTILIZANDO MODELOS CONCRETOS EN SÉPTIMO BÁSICO

M. Fernández, E. González, E. Llanquiman, Y. Swears
Universidad Católica de Temuco

Situación didáctica, adición y sustracción de números enteros, modelos concretos, micro-ingeniería didáctica

Se propone el diseño de situaciones didácticas para la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros utilizando modelos concretos, específicamente se utiliza el modelo de la recta numérica clasificado como un modelo de desplazamiento y también el modelo de las fichas de colores, clasificado como un modelo de neutralización, siguiendo la clasificación de Cid (2003). El objetivo de esta propuesta es que estudiantes construyan conocimientos por sí solos, asociados a la adición y sustracción de números enteros, siendo el profesor el que propicia el medio didáctico donde se realiza esta construcción de sus aprendizajes.

DESARROLLO

Este trabajo de investigación es llevado a cabo por un grupo de estudiantes de Pedagogía Media en Matemática, que busca implementar una micro-ingeniería didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau con el fin de reflexionar acerca del uso de modelos concretos en la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros.

Esta investigación posee un enfoque cualitativo, el cual se rige por una metodología denominada ingeniería didáctica desarrollada por Michelle Artigue. La experimentación se realizó en un séptimo año básico, trabajando en el eje de números en el contenido de adición y sustracción de números enteros. Para ello se empleó el uso de dos modelos concretos, desarrollando las actividades en cuatro módulos, además de la aplicación de un pre y post test con el fin de obtener los análisis que actualmente están siendo contrastados con las observaciones a priori realizadas, A través de estas situaciones se pretende franquear los obstáculos existentes en la adición y sustracción en el conjunto Z. Se obtienen conclusiones parciales al desarrollar el taller de las fichas de colores para la adición de números enteros donde los estudiantes presentaron dificultades para identificar las formas de operar los números enteros utilizando la neutralización como una forma de representar.

Referencias

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield). *Dordrecht, NL: Kluwer*.

Cid, E. (2003). *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. Zaragoza: Universidad de Zaragoza

EL SENTIDO DEL NÚMERO: TALLER PARA PADRES

Sandra Fuentes Mardones
Universidad San Sebastián, Colegio Cardenal Raúl Silva Henríquez de Paillaco

Sentido del número, primera infancia, didáctica de la matemática inicial

Este poster resume el trabajo realizado en las reuniones de apoderados, con el fin de mejorar los aprendizajes de los más pequeños, como factor fundamental se tiene el trabajo eficiente y acompañamiento de los padres en los primeros años de escolarización. Nuestra propuesta parte por estrechar aún más este vínculo entre colegio y familia, entregándoles a los padres algunos consejos para que los niños a través del juego complementen la instrucción dada en el colegio.

Esta investigación surge por la necesidad de desarrollar en los niños las competencias necesarias para el trabajo operacional concreto y abstracto de las matemáticas, no solo desde el colegio como institución educativa, sino desde la familia como primer formador.

El objetivo principal de esta investigación entonces, es fomentar en los padres la necesidad del juego como vínculo afectivo y de desarrollo de competencias y habilidades académicas, específicamente en el ámbito de las matemáticas.

En Castro (2008), podemos ver que el sentido del número es innato y que se puede definir como la capacidad de reconocer números, identificar su valor relativo y comprender cómo utilizarlos en una variedad de situaciones, como al contar, medir o hacer una estimación, bajo este contexto la autora hace un recorrido por el pensamiento numérico y el desarrollo de las habilidades que se obtienen con él. También, Piaget (1975), aporta desde su investigación con la definición de los estadios del conocimiento, corroborando la necesidad del juego como método de instrucción y aprendizaje.

Para lograr el objetivo, se realiza un taller para padres de pre kínder (12 alumnos) en el mes de septiembre del año 2015. Se aplica como pre-test y post-test la evaluación semestral de los objetivos de aprendizaje del curso, entregada por el Ministerio de Educación y aplicada semestralmente por las educadoras de párvulos en los niveles de pre-básica, encontrándose más de la mitad de los niños en nivel inferior a NT1 en la aplicación del pre-test, es decir, tenían un nivel de sala cuna. Los resultados del post-test fueron muy buenos, por sobre lo esperado, ya que todos los alumnos de este nivel lograron los aprendizajes propuestos para NT1 e inclusive algunos alumnos, cerca del 25%, lograron los objetivos propuestos para NT2.

Podemos concluir, que el taller para padres fomenta el vínculo familia-colegio y desarrolla en los niños el amor por las matemáticas a través del juego.

Referencias

Castro, E. (2008). Pensamiento Numérico y Educación Matemática. En J.M. Cardeñoso y M Peñas (Ed.), *XIV Jornadas de investigación en el aula de matemáticas* (pp. 23-32). Granada: Universidad de Granada.

Piaget J. (1975). *Introducción a la epistemología genética*. Buenos Aires: Paidos.

ANÁLISIS DE EVIDENCIAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN ESTUDIANTES DE 5º CURSO PRIMARIA

Karla Bastías Sepúlveda, Antonio Moreno Verdejo
Universidad de Granada

Early algebra, pensamiento funcional, relación funcional, variable, representación

Esta investigación tiene como objetivo identificar evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de quinto curso de primaria, en el marco de la propuesta de innovación curricular y línea de investigación conocida como *early algebra*. El pensamiento funcional incluye la relación entre cantidades variables que pueden expresar su relación en palabras, símbolos, tablas o gráficos, y el razonamiento con estas diversas representaciones para analizar el comportamiento de la función. Los antecedentes han sido utilizados para analizar la interpretación y construcción de relaciones funcionales empleadas por los estudiantes. Algunas de estas investigaciones establecieron la presencia de relaciones de covariación, correspondencia y el uso de patrones recurrentes (e.g., Blanton y Kaput, 2011; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016; Smith , 2008).

La investigación se ha realizado con una muestra intencional de 24 estudiantes de 5º curso de primaria de un colegio de Granada, España. La metodología de la investigación es de tipo cualitativa. Se ha elaborado un experimento de enseñanza sobre el que hemos realizado un estudio de naturaleza exploratoria y descriptiva. El experimento de enseñanza consiste en la investigación del pensamiento funcional de un grupo de estudiantes de 5º curso de primaria, realizado en cuatro sesiones, que implicaban el desarrollo de distintos problemas contextualizados. En este trabajo nos centramos en el análisis de la primera sesión. El instrumento que hemos utilizado para la recogida de datos es una tarea compuesta por ocho preguntas relacionadas con una situación modelizable por una función lineal. Los resultados ponen de manifiesto la presencia de relaciones de covariación y correspondencia, así como el uso de distintos sistemas de representación para explicar el patrón de la relación entre variables. A partir de los resultados se concluye que el uso de problemas contextualizados permite promover el pensamiento funcional en alumnos de 5º de primaria.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlin, Alemania: Springer.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En Kaput, J. J., Carraher, D. W., y Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.133-160) Nueva York, NY: Routledge.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA INTRODUCIR EL CONCEPTO DE SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES EN 2 VARIABLES

Teresa Carrasco, Rocío Fernández
Universidad de Concepción

Enseñanza, sistemas de inecuaciones lineales de dos variables, teoría de las representaciones semióticas, ingeniería didáctica

RESUMEN

En el sistema educativo chileno, los sistemas de inecuaciones lineales son tratados en cuarto año de enseñanza media. Luego de desarrollar un trabajo investigativo del tema (Tapia, 1998), se concluyó que los alumnos aprenden a resolver inecuaciones- en su mayoría- a través de algoritmos. Frente a esta situación, propusimos una actividad basada en la Teoría de las Representaciones Semióticas (Duval, 1994) con el objetivo de evitar la algoritmización que se produce al introducir el concepto sólo de forma algebraica. La actividad consiste en una serie de preguntas que permiten al alumno reconocer que las figuras geométricas son formadas mediante un sistema de inecuaciones. Se presenta una figura graficada en el plano cartesiano donde se espera que los estudiantes cumplan con 6 indicadores: identificar puntos en el plano cartesiano, determinar una recta, reemplazar valores en ecuaciones, establecer relación mayor que y menor que, plantear una inecuación con dos variables e identificar que estas inecuaciones son las que limitan la figura, para luego introducir el concepto de sistemas de inecuaciones lineales.

Bajo la metodología de la Ingeniería Didáctica, la actividad fue aplicada a 6 estudiantes de cuarto medio del colegio Aurora de Chile Chiguayante, donde las respuestas estuvieron en concordancia con el análisis a priori realizado, por lo que se concluye el logro del objetivo de la actividad: identificar el sistema de inecuaciones que determina una región en el plano. Con los resultados obtenidos ésta se rediseña, para evitar los errores que cometieron los estudiantes en la realización de la primera propuesta. Decidimos aumentar la imagen a dos figuras para que haya un contraste y se evidencie que sirve no tan solo para un caso particular, y dentro de las figuras graficadas se modifica la posición de éstas, sin considerar los ejes del plano como uno de los lados, evitando un error de determinar sólo una, dos o tres de las cuatro ecuaciones de la recta que limitan la región. Con todas estas adecuaciones consideramos pertinente aplicar esta actividad para introducir el concepto de sistemas de inecuaciones lineales con dos variables, y evitar así la algoritmización que se produce al utilizar sólo una forma de representación.

Referencias

Duval, R. (1994). Registres de reprësentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*,5, 37-65.

Tapia, X. (1998). *Pasaje de registros: Inecuaciones* (Tesis de magíster). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

ANÁLISIS CONCEPTUAL DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS CON ESTUDIANTES DE SEGUNDO MEDIO

Carolina Orellana Palma, Cecilia Rojas Pardo
Universidad Alberto Hurtado

Multiplicación y división de fracciones algebraicas, errores en la operatoria de FA, conceptualización, esquema

El presente trabajo da cuenta de una investigación que se realizará a un grupo de estudiantes de segundo medio, donde nos proponemos analizar el campo conceptual en torno al tópico de Fracciones Algebraicas (FA) desde la perspectiva de la Teoría de Campos Conceptuales (TCC). El objetivo del estudio, apunta al reconocimiento de las causas que llevan a los estudiantes a cometer errores en la operatoria de multiplicación y división de fracciones algebraicas, las cuales se pretenden identificar a través del analísis y caracterización de los esquemas y conceptualizaciones que están en juego, al enfrentar situaciones que involucren dichas operaciones.

ANTECEDENTES, PROBLEMA Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Diversos estudios como los de Socas (1997), Caballero y Juárez (2016), entre otros, muestran en sus investigaciones las dificultades que presentan los y las estudiantes al aprender el álgebra, como también los obstáculos y errores que se evidencian al trabajar con situaciones que involucren operatorias aritmético-algebraicas. De este modo, nuestro problema de investigación apunta a explicar las posibles causas que generan los constantes errores que cometen los estudiantes, al trabajar, específicamente, situaciones que involucren operaciones de multiplicación y división de FA, postulando - en relación al objetivo general - a que dichas causas serán identificadas a través de las conceptualizaciones y esquemas que estén presentes.

MARCO DE REFERENCIA Y METODOLOGÍA

Este estudio es de tipo exploratorio y se posiciona en un paradigma cualitativo descriptivo, cuyo marco teórico es la TCC de Vergnaud (1990). Este estudio contempla la creación de un cuestionario con situaciones que involucren actividades de multiplicación y división de FA, además de una entrevista semiestructurada con preguntas abiertas, identificando de este modo las conceptualizaciones y esquemas que estén presentes en dichas situaciones.

Referencias

Caballero, E. y Juárez, J. (2016). Análisis y clasificación de errores en la adición de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la universidad. *Revista Números, Didáctica de las Matemáticas*, *91*(2), 33-56.

Socas, M. (1997). Dificultades, Obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (coord), La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. (125-154) España: Universitat de Barcelona.

Vergnaud, G. (1990). Teoría de Campos Conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *10*(2)(3), 133-170.

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS PARA LA DIVISIÓN DE FRACCIONES EN LIBROS DE TEXTO

Carolina Chamorro Ramírez, Roberto Vidal Cortés
Universidad Alberto Hurtado

Análisis de textos escolares, división de fracciones, representaciones semióticas

Esta investigación reporta un análisis textos escolares del período 1996 - 2016, respecto de las representaciones semióticas utilizadas para la enseñanza de la división de fracciones, mediante la teoría de registros de Duval.

PROBLEMAS Y ANTECEDENTES

La problemática se sitúa en el ámbito de la enseñanza de la división de fracciones respecto del empleo de diversas representaciones semióticas para favorecer su comprensión y que no quede relegado al dominio y uso de técnicas carentes de justificación (Gómez y Contreras, 2009), ya que la comprensión de los objetos matemáticos y la forma de enseñarlos contribuyen al éxito de los estudiantes (Ma, 2010). El objetivo de este estudio es identificar y caracterizar las representaciones semióticas presentes en los libros de texto para la enseñanza de la división de fracciones.

MARCO DE REFERENCIA Y METODOLOGÍA

La Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), nos permite analizar las representaciones que se presentan en los textos escolares para la división de fracciones. La metodología, tiene un enfoque cualitativo con un diseño exploratorio, descriptivo e interpretativo, considera la selección de una muestra intencional de libros de textos del período 1996 - 2016 para un estudio de casos y a través de la aplicación de dos matrices de recolección y organización de los datos; la primera para caracterizar aspectos generales de los textos de estudio y la segunda para obtener información acerca de los registros de representación semiótica, las operaciones de tratamiento y conversión, y la congruencia entre registros, presentes en los textos de estudio, que luego serán analizadas en función de su utilidad y aparición para obtener las conclusiones.

CONCLUSIONES PRELIMINARES

En la enseñanza de la división de fracciones en los textos escolares se utilizan uno, dos o tres registros de representación a la vez, siendo el registro pictórico, el registro numérico y lengua natural, los más frecuentes. Se evidencian tratamientos en la mayoría de los registros usados, sin embargo las conversiones congruentes son escasas.

Referencias

Duval, R. (2004). *Semiósis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle Instituto de educación y pedagogía

Gómez, B., & Contreras, M. (2009). Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. *PNA*, *3*(4), 169-183.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales*. Santiago: Academia Chilena de Ciencias.

SABERES MATEMÁTICOS EN LA PRÁCTICA DEL VOLANTINISMO

Lianggi Espinoza, David Valenzuela, Andrea Vergara
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Volantinismo, práctica cotidiana, aprendizaje en la práctica, socioepistemología

En este poster mostraremos los avances de una investigación desarrollada desde la teoría socioepistemológica de la matemática educativa en la que estudiamos los saberes matemáticos presentes tras la práctica del volantinismo chileno.

Actualmente en la educación en matemáticas se busca que los aprendices puedan formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, usarla para describir, explicar y predecir fenómenos, y reconocer el papel que desempeñan en el mundo (OCDE, 2013). De aquí nuestro interés de estudiar el cómo el saber matemático vive en las prácticas cotidianas, en este caso, el volantinismo chileno. Siguiendo el modelo de indagación epistemológica-etnográfica propuesto en Espinoza (2014), nos acercamos a la práctica del volantinismo a través de la observación, el diálogo y la participación en la práctica del volantinismo de competencia. El volantinismo es un juego popular arraigado a las fiestas tradicionales chilenas. Pero para algunos es un deporte de competencia que se organiza a través de campeonatos regionales, nacionales e internaciones. En esta investigación, y desde la teoría socioepistemológica, entendemos saber matemático como sistemas de explicación.

Como resultados preliminares de nuestra indagación del saber tras la práctica encontramos la existencia de complejos sistemas explicativos de la práctica ligados a la finalidad del juego: cortar el hilo del oponente. La idea es entender las condiciones que se tienen que cumplir para que el hilo del oponente se resbale sobre el hilo del jugador. Este resbale depende de la posición espacial en donde se produce el cruce de los hilos, al cual los volantineros llaman ángulos. Combinando varias variables involucradas los volantineros producen jugadas y contra-jugadas que adquieren un lenguaje común y son de uso compartido por la comunidad. La lógica del juego es realizar una buena jugada, reaccionar con una contra-jugada, contra-restar la contra-jugada, etc. Así, en el análisis de estas jugadas y contra-jugadas estudiamos al saber tras la práctica. Los expertos no solo son jugadores con destreza física, sino que son los que poseen los sistemas de explicación de la práctica. Sus explicaciones pueden verse como un sistema doble referencial que opera bajo la estructura de una geometría esférica. Se expresa toda una concepción geométrica del espacio modelada por una idea dinámica de ángulo la cual juega un rol protagónico dentro de sus explicaciones. Desde esta noción dinámica del ángulo en una geometría esférica es desde donde, sostenemos, podemos establecer diálogos entre el saber de los volantineros y la matemática escolar. Agradecemos el financiamiento de CONICYT + PAI 82140031, Gobierno de Chile.

Referencias

Espinoza, L. (2014). *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses*. Tesis doctoral no publicada. DF., México: Cinvestav.

OCDE (2013). *Panorama de la educación 2013: indicadores de la OCDE*. Obtenido de http://www.oecd.org/edu/Mexico_EAG2013%20Country%20note%20%28ESP%29.pdf

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO DEL ESTUDIANTE DE INGENIERÍA

Saúl Ernesto Cosmes Aragón
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Modelación, Iingeniería, trabajo matemático, situación

Se presenta un avance de proyecto de investigación que consiste en abordar el estudio de las dificultades generadas al enfrentar a estudiantes de ingeniería ante situaciones problema relacionadas con su futura profesión. Ante ello se considera que la modelación matemática (MM) propicia espacios de trabajo que conducen al desarrollo de competencias profesionales y a la generación de conocimiento matemático, en la literatura hay evidencia de ello (Blum y Borromeo 2009; Mena, 2016; Rodríguez, 2016).

Se considera la construcción de conocimiento vía la MM en tanto que permite estudiar los objetos en un doble estatus, en tanto su uso en contextos afines a la ingeniería como en cuanto al objeto matemático en sí mismo. Al respecto Rodríguez (2016) menciona que el desarrollo de actividades de modelación da elementos para promover un aprendizaje significativo de las matemáticas en tanto objeto matemático así como herramienta para la modelación de diversos fenómenos.

Los cuestionamientos que nos hacemos es saber si esto se logra en la sala de clases, ¿qué poblemas son los que se modelan de tal manera que los estudiantes sean formados conforme a las competencias con las que se pretende egresen de la universidad?, ¿de qué manera lo normado por la institución produce la relación entre el trabajo con situaciones reales y lo institucional? ¿Qué implicancia tiene el uso de recursos tecnológicos (e.g. GeoGebra) en la solución de las tareas propuestas a nivel de la profesión?

En esta presentación se mostrarán la relación entre la teoría del ETM-personal (Kuzniak & Richard, 2014) y su relación con el proceso de MM presentado por Borromeo (2006). En el momento que el estudiante aborda la situación se tiene el supuesto de que ocurrirá un proceso de matematización horizontal que sirve de base para llevar la situación problema al campo de la matemática de manera que dentro de este campo ocurre un proceso de matematización vertical. Es ahí donde ocurre una interacción en un ciclo dinámico entre el proceso de MM y el ETM.

Referencias

Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling. Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Borromeo, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal for Mathematics Education at Teachers College, 4*, 18-24.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 17* (pp. 29-39). Cd. de México, México.

Mena, J. (2016). Modelación matemática y la construcción de conocimiento matemático. En Arrieta y Díaz (Ed.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp. 139–162). Cd. de México, México: Editorial Gedisa.

Rodríguez, R. (2016). Enseñanza y aprendizaje de la modelación desde y para la formación de ingenieros. En Arrieta y Díaz (Ed.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp. 163–193). Cd. de México, México: Editorial Gedisa.

LA ARGUMENTACIÓN COMO GESTIÓN EN EL AULA MATEMÁTICA A TRAVÉS DE ESTUDIOS DE CASO

Victoria Arriagada Jofré[1], Horacio Solar Bezmanilovic[2], Andrés Ortiz Jiménez[1]
Universidad Católica de la Santísima Concepción[1], Pontificia Universidad Católica de Chile[2]

Competencia matemática, argumentación matemática, modelo de Toulmin, estudios de casos

Introducción: Desde una visión curricular la argumentación es una competencia matemática: Las Bases Curriculares del marco curricular chileno (Mineduc, 2012) la describe como "la habilidad de argumentar se aplica al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos" (p.89*).* Este artículo muestra cómo a través de los estudios de caso se puede identificar con mayor facilidad procesos argumentativos, procesos explicativos y elementos del Modelo de Toulmin.

El año 2014 en la Universidad Católica de la Santísima Concepción fue desarrollado un proyecto de intervención pedagógica, que consistió en el diseño e implementación de estudios de casos enfocados en argumentación en el aula matemática en estudiantes de Pedagogía Básica con Mención en Matemática y Ciencias, a través de un optativo de profundización llamado Gestión del Aula matemática. El objetivo de este documento es caracterizar la gestión de la argumentación con base en el modelo de Toulmin a través de estudios de caso.

METODOLOGÍA

La ejecución del proyecto se basa en las etapas: análisis de casos clínicos ya diseñados e implementados previamente, diseño de tres casos y la implementación de los casos.

RESULTADOS

Gran porcentaje de estudiantes considera que el estudio de caso servirá para mejorar su desempeño en el aula. Contradictoriamente, un porcentaje muy bajo se siente más preparado para enfrentar la argumentación en el aula. Es necesario que se complemente el estudio de caso con implementación de clases que promuevan argumentación en el aula matemática durante la práctica progresiva.

CONCLUSIONES

Una manera de analizar la argumentación en el aula de matemáticas es mediante el modelo de argumentación de Toulmin (1958). Implementar casos en base a este modelo, ayuda a comprender un proceso argumentativo, identificar elementos y diferenciar argumentación de explicación. Sin embargo, se presentan dificultades cuando los estudiantes deben proponer una forma de gestionar la clase que busque completar un proceso argumentativo incompleto. La gestión del profesor que implementa los casos, su experiencia y el contenido matemático abordado son de vital importancia para lograr resultados, promover discusión, confrontación de ideas y procesos argumentativos.

Referencias

Mineduc (2012). *Bases curriculares 2012. Matemática Educación Básica*. Chile: autor.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

PROPUESTA DE FORMACIÓN VIRTUAL EN ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD PARA PROFESORES DE MATEMÁTICA EN EJERCICIO

Liliana Mabel Tauber, Yanina Teresita Redondo
Universidad Nacional del Litoral, Argentina

Educación estadística, formación continua de profesores, ideas estocásticas fundamentales, enseñanza con proyectos, educación en línea

MARCO DE REFERENCIA DE LA PROPUESTA DE FORMACIÓN

Presentamos una propuesta inserta en el plan de estudios de una Especialización Docente de Nivel Superior en la Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria, con duración de dos años, modalidad virtual y gratuita, a través de la plataforma del Programa Nacional de Formación Docente "Nuestra Escuela", del Instituto Nacional de Formación Docente (INFD) y el Ministerio de Educación y Deportes de la Nación (Argentina) (http://nuestraescuela.educacion.gov.ar/postitulos/). Los destinatarios son profesores de Matemática de Nivel Secundario o formadores de Profesorados. Consta de 10 módulos de duración bimestral. A continuación describimos las características del módulo de Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística.

El módulo de Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística

Particularmente, este módulo tiene una duración de 46 horas distribuidas en 8 semanas, en las que se proponen actividades grupales o individuales basadas en la profundización de las ideas estocásticas fundamentales a través de la lectura analítica de distintos artículos (Batanero, 2013; Cravero, Redondo y Tauber, 2012, entre otros) y de videos centrados en estas temáticas. Asimismo, las actividades enfatizan en la construcción de preguntas de investigación que permitan generar proyectos estadísticos para trabajar en el aula, utilizando diversos asistentes didácticos como applets, GeoGebra, y diversas aplicaciones. Los propósitos se centran en facilitar un recorrido de reflexión pedagógica y de producción crítica basado en conceptos teórico-prácticos de la Educación Estocástica.

Consideramos que esta experiencia ha permitido a más de 2000 docentes conocer contenidos estocásticos que no habían sido desarrollados en ciclos previos de formación, pero aun así pensamos que no es suficiente para lograr fomentar el pensamiento estadístico en profesores que deberían promover la cultura estadística de sus alumnos.

Referencias

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, 2*, 55-61.

Cravero, M., Redondo, Y. y Tauber, L. (2012). *Alfabetización Estadística en la Escuela Obligatoria argentina*. Santa Fe: Ediciones UNL.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS SOBRE LA ECUACIÓN LINEAL ADITIVA ENTORNO DE UN ESTUDIO DE CLASES

Valeria Riquelme-Ramos, Elisabeth Ramos-Rodríguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Estudio de clases, ecuaciones de primer grado, conocimiento del profesor, MTSK

La investigación se enmarca en un Estudio de Clases efectuado en el programa de Magister en Didáctica de la Matemática, PUCV. El objeto matemático en estudio fue la ecuación lineal aditiva con coeficiente natural de un paso, considerando la transformación de lenguaje natural al algebraico y el proceso inverso de transformación.

A medida que el plan de clases se fue aplicando se realizaron cinco modificaciones, puesto que se detectaron algunas dificultades o falencias que entorpecían el logro del objetivo. Es así que emerge la inquietud de analizar las estructuras y elementos del último plan de clase, identificando el conocimiento especializado del profesor de matemática que predominó en el plan: el conocimiento matemático y/o el didáctico de las matemáticas.

Para abordar y dar respuesta a esto, se ha seleccionado el marco teórico Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, MTSK (Carillo, Contreras, Climent, Escudero, Flores y Montes, 2013*).* Este marco teórico se centra en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, considerando e integrando dos ámbitos, su conocimiento matemático (MK) y el dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK). Cada uno de ellos está dividido en tres subdominios.

Para llevar a cabo la investigación, nos situamos en el paradigma cualitativo, realizando un análisis de contenido Stake, 1999) del plan de clases, cuyas unidades de análisis son párrafos o conjunto de ellos con una idea en común.

En el PCK predomina el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), se observa una fuerte presencia de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las ecuaciones. En cuanto al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) se observa presencia de las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de las ecuaciones. Sobre el MK se observa que el subdominio predominante es el conocimiento de los temas (KoT), en relación a procedimientos, aplicación y fenomenología asociados a la ecuación.

Al analizar por medio del marco teórico MTSK, se puede concluir que en el plan de clases predomina el PCK, específicamente en el subdominio del conocimiento de las características del aprendizaje de las ecuaciones: en las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las ecuaciones. Lo que deja entre ver que para los docentes analizados es relevante anticipar y conocer posibles errores que pudiesen manifestar los alumnos, así como también en distinguir la respuesta experta de las diversas tareas planificadas.

Referencias

Carillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. (2013). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Huelva*:* Universidad de Huelva, Publicaciones.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata S.L.

AVANCE PROGRESIVO DE LA NOCIÓN DE IGUALDAD Y ECUACIÓN LINEAL EN LOS NIVELES 3° Y 4° BÁSICO, SALTO DE LO PICTÓRICO A LO SIMBÓLICO

Viky Moya Silva y Mariel Silva Espinoza
Universidad Católica Silva Henríquez

Igualdad, ecuación, análisis progresivo, situaciones didácticas

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del Álgebra requiere que el y la docente en su práctica pedagógica, sean capaces de reconocer las dificultades, estrategias, obstáculos y errores que presentan las y los estudiantes durante las situaciones de aprendizaje, con el propósito de mejorar el proceso educativo; por esta razón el presente estudio intentará conocer cuáles son estas dificultades, obstáculos y estrategias que poseen los niños y niñas en las situaciones de aprendizaje diseñadas de acuerdo a los niveles 3° y 4° básico, con la intensión de analizar el avance progresivo de la noción de igualdad y ecuación~~,~~ mediante el paso de lo pictórico a lo simbólico.

DESARROLLO

Para alcanzar el objetivo del estudio se utilizó la metodología de Ingeniería Didáctica, compuesta por un análisis apriori, experimentación y un análisis aposteriori tal como lo señalan Artigue, Douady y Moreno (1995). Cada situación de aprendizaje se diseñó bajo la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, intencionando tres situaciones para el desarrollo del conocimiento: acción, formulación y finalmente validación e institucionalización**,** de acuerdo a lo indicado por Chavarría (2006). Para ello se seleccionó de 3 a 4 estudiantes por nivel. En tercero básico, se utilizaron cuatro cajas, una representa el valor desconocido y las otras un valor conocido. Los estudiantes desarrollan una estrategia para descubrir el valor desconocido, transitando por metodologías concretas, pictóricas y simbólicas, permitiendo evidenciar el avance progresivo de la noción de igualdad y ecuación. En cuarto básico, la situación de aprendizaje pretende que el estudiante prediga qué ocurriría con una balanza cuando se agregan o quitan elementos, posteriormente se busca que determinen el valor desconocido en una balanza equilibrada y compruebe si el valor obtenido de la incógnita cumple la igualdad, esto mediante estrategias inicialmente pictóricas y luego simbólicas.

CONCLUSIONES

Las situaciones de aprendizaje evidencian que ambos niveles presentan dificultad en la transición de lo concreto, a pictórico y a lo simbólico, lo que dificulta principalmente la capacidad de abstracción que requiere la representación simbólica, que les permita a los y las estudiantes sustituir los números por letras. Otro aspecto relevante es la dificultad que presentan los niños y niñas en visualizar que el signo igual representa equivalencia en ambos lados de la ecuación, interpretándolo de manera unidireccional, es decir, resolver una operatoria que busca un resultado.

Referencias

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá , Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chavarría, J. (2006). Teorías de las Situaciones Didácticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *2*, 1-10.

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA COMPRENSIÓN DE LA FUNCIÓN DERIVADA EN SECUNDARIA DESDE LA TAD

Daniela Bonilla Barraza[1], Jocelyn Díaz Pallauta[2]
Colegio Tamelcura (Chile)[1], Liceo Católico Atacama (Chile)[2]

La derivada, geometría dinámica, organización matemática

RESUMEN

La propuesta consiste en el diseño de una secuencia didáctica, donde se aproxima a los estudiantes de último año de enseñanza media al concepto de derivada, por medio del estudio de la función derivada de una función polinómica.

En el diseño se utiliza como marco teórico, elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1985) y como referente metodológico, el enfoque estudio de casos de Arnal, del Rincón y Latorre (1992).

Para alcanzar los propósitos de investigación, se propone construir una organización matemática local, que consiste en determinar la función derivada *g* de una función polinomial *f*, a través del tránsito de la gráfica de las rectas tangentes a la curva de la función *f* hacia la caracterización y gráfica de la función derivada asociada *g*, para su puesta en práctica se utiliza el software de geometría dinámica, geogebra.

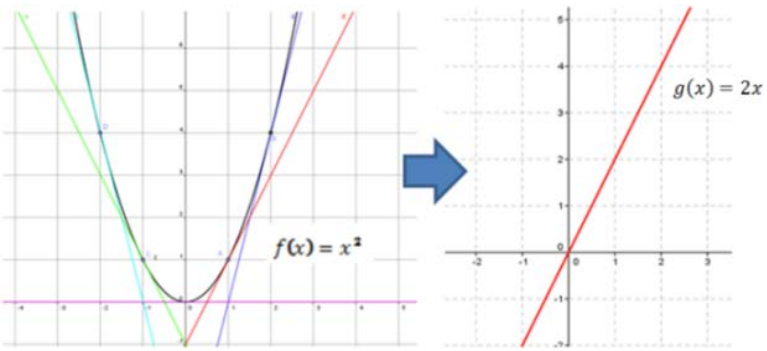


Figura 1 : la función $f(x) = x^2$, $x \in IR$ y su función derivada $g(x) = 2x$

REFLEXIONES FINALES

Se destaca como elemento esencial en el surgimiento de la organización matemática la caracterización de una función g, que tiene la misma abscisa de la funcion polinomica f y la ordenada corresponde a la pendiente de las rectas tangente a la curva en un punto.

El uso de software Geogebra constituye para el estudiante un facilitador en la comprensión y estudio de la función derivada, dado que con las herramientas que provee el software, puede construir gráficamente la función derivada, por medio de las rectas tangentes a la curva.

Además, permite analizar los valores obtenidos en la pendiente para cualquier punto perteneciente a la curva, estableciendo algebraicamente de esta forma la función derivada asociada.

Referencias

Arnal, J., del Rincón, D. y Latorre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

DOMINIO AFECTIVO Y TEORÍA DE GRAFOS

Victoria Núñez Henríquez, Claudia Vargas Díaz
Liceo Bicentenario Italia, Universidad de Santiago de Chile

Actitudes, creencias, emociones, problemas, teoría de grafos

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO

Este estudio está motivado por la relación cíclica que existe entre dominio afectivo (actitudes, creencias y emociones) y educación matemática (Gil, Blanco y Guerrero, 2005). En la búsqueda de herramientas para ayudar a dejar atrás el rechazo hacia la matemática por parte de estudiantes surge como opción el trabajo con la teoría de grafos, pues investigaciones revelan que es factible desarrollarlo en la sala de clases brindando beneficios en variados aspectos (Braicovich, 2013).

METODOLOGÍA

Se implementa en el LBI de la Región Metropolitana un taller de once sesiones donde participan trece estudiantes desarrollando problemas relacionados con la teoría de grafos. En la primera y última sesión se aplica una adaptación del cuestionario de Sarabia y Iriarte (2011), compuesto por 38 afirmaciones que buscan conocer las actitudes y las creencias hacia las matemáticas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Cada uno de los estudiantes tuvo en promedio una variación positiva en el cuestionario. Queda por profundizar si el motivo de este cambio: tipo de contenido trabajado o planteamiento del taller. En las cinco categorías del cuestionario se observan variaciones positivas sobresaliendo las creencias sobre la resolución de problemas y el papel del esfuerzo, asignándoles un rol fundamental al momento de aprender matemática. A continuación, los promedios obtenidos en cada categoría del cuestionario (desde 1 hasta 5 indicando una actitud positiva o creencia adecuada).

Categorías medidas en el cuestionario	promedio pre	promedio post
Actitudes hacia la matemática (13 afirmaciones)	3,69	4,01
Creencias sobre la naturaleza de las matemáticas (6 afirmaciones)	3,95	4,12
Creencias sobre la resolución de problemas (7 afirmaciones)	3,81	4,41
Creencias sobre el papel del esfuerzo (6 afirmaciones)	4,14	4,74
Creencias sobre la utilidad de las matemáticas (6 afirmaciones)	4,23	4,36

Tabla 1: Promedio de resultados por categoría previo y posterior a la aplicación del taller.

Referencias

Braicovich, T. (2013). Grafos: Una misma situación para la construcción de distintos modelos extra matemáticos. Actas del *VII CIBEM* (803-809). Montevideo: FISEM.

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Revista iberoamericana de educación matemática, 2,* 15-32.

Sarabia, A. y Iriarte, C. (2011). *El aprendizaje de las matemáticas ¿qué actitudes, creencias y emociones despierta esta materia en los alumnos?* Pamplona: Eunsa.

SIGNIFICANCIA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE 1° MEDIO

Tannia Becerra, Marcelo Ozimica, Mario Sáez, Fresia Sobino
Liceo Mauricio Hochschild del CEAT

Resolución de problemas, estadística, experiencia de aula, didáctica de la estadística

RESUMEN

Los estudiantes de 1° medio consideran que aprender matemática consiste principalmente en reproducir ejercicios rutinarios. Es por este motivo que el departamento de matemática decidió elaborar y ejecutar un proyecto en este nivel educativo que promoviera la reflexión por parte del educando hacia la importancia que tiene el aprender matemática resolviendo un problema, obteniendo un acercamiento hacia esta metodología de aprendizaje por la comunidad educativa.

INTRODUCCIÓN

Según un diagnóstico realizado se observa que estudiantes de 1° medio consideran que el docente de matemática debe explicar conceptos y procesos matemáticos para su reproducción (Gómez, 1996). Esto causa un problema puesto que si se desea cambiar de metodología de enseñanza los alumnos muestran cierto disgusto. Por este motivo se desarrolló un proyecto de intervención didáctica en el que se modifique la percepción que se tiene de la enseñanza de la matemática.

DESARROLLO

La resolución de problemas es una forma de pensar en el que el estudiante muestra una serie de estrategias cognitivas como metacognitivas, dichas estrategias están directamente relacionadas con ideas o concepciones que el individuo tenga de las matemáticas (Santos, 1997).

Así el objetivo general del proyecto consiste en **mejorar la apreciación de los estudiantes hacia una metodología de aprendizaje de las matemáticas basadas en la resolución de problemas**.

Para el diseño de estrategias de enseñanza del contenido propuesto se consideró la teoría didácticas de Brousseau (2007), y se adaptó el caso de estudio “Implementación de fotoradares en Chile” desarrollado por Comunidad Ingenio.

CONCLUSIÓN

Los objetivos de la intervención se alcanzan de manera parcial, puesto que el cambio de un sistema de creencias por parte de los estudiantes está influenciada hacia la idea de reproducir algoritmos. Sin embargo se logró discutir la necesidad de aprender matemática mediante un problema.

Referencias

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de teorías de situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Gómez, P. (1996). Riesgos de la innovación curricular en matemáticas. *Ciencia y tecnología*, *13*(4), 25-36.

Santos, M. (1997). *Principios y métodos en la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo editorial Iberoamericana.

MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS APLICADAS DE LA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TEMUCO: UNA CONTRIBUCIÓN AL CONTINUO EDUCATIVO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA

Emilio Cariaga, Stefan Berres, Teresa Sanhueza
Universidad Católica de Temuco

Magíster, matemática, profesional, profesor, modelación

INTRODUCCIÓN

El Magíster en Matemáticas Aplicadas (MMA) de la Universidad Católica de Temuco es un posgrado profesional, según lo define la Comisión Nacional de Acreditación (2013), que inició sus actividades en marzo del 2014. Su misión es formar graduados que posean las competencias para aplicar la matemática al análisis cuantitativo de sistemas complejos. El objetivo de este póster es informar a la comunidad los avances de su proceso de autoevaluación actualmente en curso.

DESARROLLO

El MMA ha optado por las ecuaciones diferenciales como modelo matemático en el contexto del ciclo de modelación matemática siendo sus áreas de especialización: Ecuaciones Diferenciales, Análisis Numérico, Fenómenos de Transporte, y Simulación Computacional.

REFLEXIONES

El MMA aporta al continuo educativo del profesor de matemática chileno al complementar su formación matemática al ámbito de las ciencias aplicadas, matemáticas aplicadas, y uso científico del ciclo de modelación matemática. Específicamente, al estudio analítico, numérico, físico y computacional de las ecuaciones diferenciales en contextos de modelación matemática.

AVANCES

El MMA cuenta con dos versiones y una matrícula de 17 estudiantes, de los cuales cinco ya se han graduado. La tercera versión inicia sus actividades en marzo del 2017. Este posgrado será sometido a acreditación el primer semestre del 2017. Nuestros graduados se desempeñan en establecimientos de educación secundaria y terciaria de la región de la Araucanía. Todos ellos han informado una mayor confianza disciplinaria en su desempeño docente fruto de la formación científica recibida en este posgrado.

CONCLUSIONES

El MMA amplia la oferta chilena de posgrado en matemática y educación matemática, hacia la matemática aplicada con carácter profesional.

Referencias

Comisión Nacional de Acreditación (2013). Aprueba criterios para la acreditación de programas de posgrados (Resolución exenta DJ N° 006-4). Recuperado desde

https://www.cnachile.cl/docs/transparencia/RES%20DJ%20006-4.pdf

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE SEGUNDO CICLO BÁSICO EN LA ENSEÑANZA DE INECUACIONES LINEALES

Montserrat Miranda-Vásquez, Elisabeth Ramos-Rodríguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Estudio de clases, conocimiento del profesor, inecuaciones lineales

La implementación del nuevo cambio curricular en Chile implementados desde el año 2016, puso en juego contenidos matemáticos que eran vistos anteriormente en niveles superiores, como es el caso de las inecuaciones lineales, en niveles inferiores. Por esta razón un grupo de investigadores se propone diseñar una secuencia didáctica para introducir este concepto mediante el uso de desigualdad, orden de conjuntos acotados y el uso de lenguaje algebraico. En este contexto se realiza un Estudio de Clases (Isoda, Arcavi y Mena, 2007) compuesto por cuatro ciclos, durante el primer semestre del año 2016.

Con el fin de analizar el conocimiento especializado manifestado por un profesor de matemáticas en los planes de clases elaborados durante ese proceso, se utiliza el marco teórico denominado Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (MTSK) (Carillo, Contreras, Climent, Escudero-Avila, Flores-Medrano y Montes, 2013), el cual servirá como herramienta teórica y analítica de la identificación y caracterización de este. Este conocimiento, lo podemos dividir en dos dominios: el conocimiento matemático (MK-Mathematic Knowledg) y el conocimiento didáctico del contenido matemático (PCK-Pedagogical Content Knowledge).

Para realizar el análisis se utilizó como diseño de investigación el Estudio de Casos (Stake, 1998), tomando como instrumento de análisis la última modificación que se hizo al plan de clases y como unidades de análisis los párrafos o segmentos del plan de clases con una idea en común. Para él se consideró como categorías los subdominios de MTSK.

Al realizar el análisis del plan de clases podemos observar que el dominio con mayor presencia fue el PCK. Destacando el subdominio “conocimientos de la enseñanza de las matemáticas”, el cual hace referencia al conocimiento que debe tener el profesor sobre la enseñanza de las matemáticas, permitiendo evidenciar que los docentes conocen estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de las inecuaciones lineales. Con respecto al MK se puede ver que el subdominio que predomina en el plan de clases es el de los “conocimientos de los temas”, referido a los fundamentos, procedimientos y representaciones de los objetos matemáticos.

Referencias

Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano y E., Montes, M. (2013). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemática*. Huelva, España: Universidad de Huelva, Publicaciones.

Isoda, I., Arcavi, A. y Mena, A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en matemáticas, su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Stake, R (1998). *Investigación con Estudio de Casos*. Madrid, España: Morata S.L.

EVALUACIÓN DE LA USABILIDAD EN CURSOS B-LEARNING PARA DOCENTES DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN BÁSICA

Paula Olguín Larraín, Gabriela Zúñiga Puyol
Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile

Educación a distancia, docentes de matemática, metodología

El problema de investigación surge por la necesidad de formación continua de los docentes, la que se ha intentado suplir con diversos perfeccionamientos. Entre los más recientes están los cursos *b-learning* que proporcionan masificación y flexibilidad horaria. En el programa Suma y Sigue, se elaboraron tres cursos *b–learning* para docentes de matemática de Educación Básica; cuyo fin es fortalecer conocimientos disciplinares y pedagógicos para gestionar procesos de aprendizaje matemático. Los cursos se implementaron a 114 profesores de Educación Básica que imparten matemática de 3º a 8º básico, en escuelas municipales de la Región Metropolitana.

En este proceso surge el interés por conocer la apreciación de los docentes respecto a la usabilidad de estos cursos, por lo que se les aplicó un conjunto de instrumentos para medir aspectos tanto cuantitativos como cualitativos. Para efectos de este trabajo se describirán los hallazgos relacionados con la metodología de los cursos.

Estos cursos promueven la comprensión del contenido matemático, a partir de actividades contextualizadas, la indagación mediante el uso de herramientas interactivas, el análisis de diferentes estrategias y procedimientos de resolución. Se entregan oportunidades para organizar el conocimiento mediante múltiples instancias de síntesis y el uso de recursos tecnológicos es fundamental para explorar, explicar y comprender los contenidos.

Las actividades de aprendizajes se proponen de manera integrada, constantemente se presentan herramientas para la indagación, la consolidación, la reflexión y la discusión en torno al conocimiento que los docentes requieren para enseñar. Dentro de las principales instancias de síntesis y retroalimentación se encuentran las siguientes: “Exploremos una posible respuesta” (Se presenta una retroalimentación al enfrentar preguntas que tienen cierto grado de complejidad), “Recapitulemos” (Es un cierre que permite formalizar los contenidos abordados, favoreciendo la reflexión acerca de lo aprendido), “Suma y Sigue” (Corresponde a un cierre global, en el cual se busca institucionalizar e internalizar los contenidos trabajados).

Los resultados obtenidos nos mostraron que la mayoría de los docentes manifestaron sentirse satisfechos con la organización general de los cursos. Esto involucraba la pertinencia de los contenidos abordados en cada uno de los cursos, el planteamiento de las instancias de síntesis y el uso de recursos interactivos, entre otros aspectos evaluados.

Referencias

Ball, D., Thames, M., Phelps, G. (2008). Content Knowlage for Teaching. What Makes it Special? *Journal of Theachers Education, 59*(5), 389-407.

OECD (2014). TALIS 2013: An International Perspective on Teaching and Learning. Ciudad: OECD Publishing.

ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE UN CUESTIONARIO PARA EVALUAR EL TRABAJO EN UN AULA VIRTUAL DEL TEMA INTEGRAL INDEFINIDA

Lisa Holgado, Susana Mercau, María Belén Camacho, Marta Marcilla, María José Pérez, Cecilia Venturini
Universidad Nacional de Tucumán, Argentina

Cuestionario, aula virtual, NTIC, integral indefinida

RESUMEN

El presente trabajo es un avance del Proyecto "Propuesta curricular, con soporte en las NTIC, para favorecer el estudio independiente del Cálculo" de la Universidad Nacional de Tucumán, Argentina. En el marco del mismo, en 2016 se realizó una experiencia en un aula virtual para el tema Integrales Indefinidas, diseñada en la plataforma educativa Moodle 3.0 que es una aplicación web de distribución libre para la creación, gestión y seguimiento de cursos.

DESARROLLO

En la experiencia se trabajó con la totalidad de los alumnos que cursaron Matemática I (245 alumnos), asignatura del primer año de una facultad de ciencias, como complemento al sistema presencial establecido por la currícula. En trabajos anteriores se describieron los fundamentos teóricos de la investigación basados en enfoques cognitivos sustentados por Piaget, Ausubel, Moreira, Vigotsky y seguidores, y en los lineamientos para la regulación y autorregulación del aprendizaje sostenidos por Jorba y Casellas (Jorba y Casellas, 1997; Villalonga de García, González de Galindo, Mercau de Sancho, 2011). Los instrumentos empleados para evaluar la experiencia fueron: el segundo parcial de la asignatura, para medir el *rendimiento académico* a través del *grado de corrección de la acción* y *grado de reflexión* y un cuestionario a alumnos para conocer sus apreciaciones sobre distintos aspectos del aula virtual y el grado de aceptación de esta nueva forma de estudio. En el presente póster se exponen los resultados obtenidos del análisis del cuestionario.

Al diseñar el cuestionario, se consideraron tres dimensiones de estudio: *Funcionalidad de la plataforma*, a través de sus subdimensiones: ejecución y modo de acceso; *Motivación*; y *Metodología de trabajo independiente*, con sus subdimensiones: afianzar y autorregular el aprendizaje y estudio independiente. Se utilizaron preguntas mixtas y quedó estructurado con siete (7) ítems. Se estudió la validez de contenido y para garantizar la confiabilidad de las mediciones, el cuestionario fue anónimo, sin un tiempo máximo establecido para responderlo.

CONCLUSIONES

Del análisis descriptivo de los resultados se concluye que la mayoría de los alumnos (80 %) valoraron positivamente el trabajo en el aula virtual, manifestando que les resultó muy atractivo en lo didáctico y cómodo por su carácter asincrónico. Resaltaron la ejercitación adicional ya que les favoreció la comprensión del tema y la integración de los contenidos y les permitió autorregular su aprendizaje.

Referencias

Jorba, J. y Casellas, E. (1997). *Estrategias y técnicas para la gestión social del aula. Volumen 1. La regulación y autorregulación de los aprendizajes*. Barcelona, España: Síntesis.

Villalonga, P., González, S. y Mercau, S. (2011). Coherencia entre criterios de evaluación y prácticas evaluativas de matemática de un curso masivo. *Revista Números*, 78, 95-112

ERRORES EN LA SUSTRACCIÓN DE ENTEROS POR ESTUDIANTES DE 12 Y 13 AÑOS

Ximena Videla-Cabello, Andrea Soto-Crisostomo, Verónica Fuentes-Cofré, Elisabeth Ramos-Rodríguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Sustracción de enteros, inverso aditivo, error matemático

INTRODUCCIÓN

Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991) señalan que una de las mayores dificultades que presentan los estudiantes al realizar sustracciones en $\mathbb{Z}$, tiene relación con las propiedades allí involucradas, por ejemplo, la utilización del inverso aditivo. Aunque esta es la justificación matemática que fundamenta la operatoria en $\mathbb{Z}$, muchos estudiantes utilizan la "regla de los signos", que según Rico (2001) sería algo fácil para los estudiantes, ya que solo habría que memorizarla y saber aplicarla. En este contexto, nos proponemos evidenciar los posibles errores que cometen estudiantes de 12 y 13 años al enfrentarse a ejercicios de sustracción de enteros.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de corte cualitativo, en tanto se intenta comprender un fenómeno (Flick, 2004), a partir del análisis de los argumentos dados por los alumnos. Y su enfoque es interpretativo y descriptivo. Las dimensiones del estudio se establecen a través de las producciones argumentativas de un estudiante, mediante el análisis del contenido (Flick, 2004), de las justificaciones escritas en la resolución de cada ejercicio planteado. Los sujetos informantes son 56 estudiantes de 12 a 13 años de establecimientos particulares subvencionados, de la región Metropolitana.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Uno de los resultados obtenidos a partir de las producciones de los estudiantes (figura 1) es que se logra constatar que 33 de los 56 estudiantes no responden correctamente y argumentan diciendo que llegan al resultado restando tres al dos y como el tres es mayor, entonces el resultado es negativo. Finalmente, se concluye que los estudiantes podrían estar aplicando normas que resultan eficientes para determinados contextos, en otras situaciones en donde dejan de serlo, en este caso, aplican normas de la adición en $\mathbb{Z}$ a la sustracción. Esto podría ocurrir, porque si bien reconocen los algoritmos, no comprenden el sentido que éstos tienen y porqué se llevan a cabo de determinada manera. Por lo anterior, pensamos que los estudiantes no estarían reconociendo a $\mathbb{Z}$ como un sistema numérico con propiedades exclusivas que rigen en su tratamiento.

Referencias

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Rico, L. (Ed.). (2001). *La Justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más?* Granada, España: Editorial Universidad de Granada

Iriarte, D. Jimeno, M. y Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma*, 7, 13-18. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/7/013-018.pdf

COMPARACIÓN DE TEXTOS ESCOLARES EN LA UNIDAD FUNCIÓN CUADRÁTICA Y ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

O. Del Pino, J. Galaz, M. Gutiérrez, J. Rodríguez, J. Villalobos
Universidad Central de Chile

Función cuadrática, ecuación de segundo grado, análisis de textos escolares, TAD

El MINEDUC entrega gratuitamente libros de distintas asignaturas, por otra parte, algunos colegios utilizan otros textos. La investigación analiza las tareas solicitadas a los estudiantes tanto en el texto gratuito como en el adquirido de forma particular, en las temáticas de ecuación de segundo grado y función cuadrática.

INTRODUCCIÓN

En la siguiente investigación se analiza una unidad común tanto para el texto gratuito como para el texto adquirido de forma particular, a fin de determinar las fortalezas y debilidades de cada uno de los textos.

DESARROLLO

Para llevar a cabo la investigación se consideran dos textos de matemática del nivel tercero medio, los cuales corresponden a los utilizados por los estudiantes el año 2015. El texto gratuito se denominará: “Texto MINEDUC”; el texto adquirido de forma particular se llamará: “Texto Alternativo”. Para llevar a cabo la investigación, se analiza en primer lugar los temas tratados en cada una las unidades de ambos textos, estableciendo una primera comparación. Del mismo modo, el segundo análisis se refiere a las tareas que se plantean a los estudiantes en cada uno de los textos, todas estas miradas desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999).

CONCLUSIONES

La explicación de las temáticas centrales de la unidad son bastante similares, las diferencias se aprecian en el tipo de tareas solicitadas, por ejemplo: solo uno de ellos fomenta que el estudiante investigue; la presentación de los textos es diferente, en uno de los textos, se sobrecargan de información las distintas páginas; también existe una diferencia sustancial en la ejercitación que propone uno de los textos, lo que favorece el trabajo de la técnica.

Referencias

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

PROPUESTA PARA EL TRABAJO CON ERRORES DE APROXIMACIÓN

Freddy Godoy
Universidad de las Américas

Errores, aproximación, representación semiótica

ANTECEDENTES

Las fracciones en su representación decimal, producen ciertos errores que afectan el cálculo de lo que se busca lograr, como por ejemplo aproximaciones erróneas. Visto desde la teoría de representaciones semióticas (Duval, 2004), se dice que es necesario que existan al menos tres registros para producir una comprensión apropiada de un tema, los cuales se presentan a continuación y que se observan en los establecimientos educacionales actuales, su representación fraccionaria (NCTM, 1968), decimal (NCTM, 1970), o gráfica (Ávila y García, 2008). Al aproximar un número, normalmente, se realiza con el criterio de si su último dígito es superior a 5 se aproxima al decimal siguiente, y si es inferior, al decimal anterior, pero ¿Está bien hacer eso?

PROPUESTA DE MATERIAL. DISEÑO Y DESCRIPCIÓN DE USO

Los materiales bases son cartón piedra, Cartulina de 3 colores, Regla (30 cm), Lápiz, Tijeras y pegamento. Con esto se forman diversas piezas de diferentes medidas y colores, además de una 1 regla de 1 metro, graduada por milímetro. Cada pieza tiene un color que representa la cantidad de daño generado al aproximar su valor original, estos colores representan a los decimales finitos, los decimales infinitos periódicos, y decimales infinitos cuyo periodo es extenso , la razón de ello es que después de realizar la aproximación, al intentar volver a su valor original, las fracciones con valores infinitos de periodo extenso, no es posible ver el valor que viene después, en cambio los decimales periódicos cuyo periodo es de un solo dígito. Para realizar los cálculos, es necesario tomar una pieza de la fracción y compararlo con la regla de 1 metro, tomando cada marca de esta como una milésima.

VALIDACIÓN DE LA PROPUESTA

Esta propuesta es parte del examen del curso de Didáctica de la Matemática I, el que se presentó mediante exposición a la académica responsable del curso, resultando con aprobación exitosa.

METODOLOGÍA

Se propone realizar el uso del material descrito con un curso de Primero medio del sistema escolar. Se centrara en un análisis cuantitativo mediante un estudio de casos.

PROYECCIÓN

Se espera que los estudiantes comprendan los errores que se producen al aproximar una fracción a cierta cantidad de decimales, mediante la comparación que realizaran entre las piezas y las reglas que ellos hicieron. Otra forma en la que se puede utilizar el material propuesto es para la comparación de fracciones, representación en la recta numérica, y operatoria con fracciones y decimales, e incluso para representar porcentajes.

Referencias

Ávila, A. y García, S. (2008). *Los decimales: más que una escritura*. Ciudad, México: INEE. R

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.(Segunda edición. Trad. Myriam Vega Restrepo). *Cali, Colombia: editorial:*

NCTM, N. C. of T. of M. (1968). *6 Números Racionales*. Ciudad: Trillas.

NCTM, N. C. of T. of M. (1970). *11 El Sistema de los Números Reales*. Ciudad: Trillas.

INNOVACION EN LAS PRÁCTICAS EDUCATIVAS LA IMPLEMENTACION DE APPS PARA DISPOSITIVOS MÓVILES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Amilcar Pedro Orazzi
Universidad Católica de La Plata, Argentina

Innovación, dispositivos móviles, Apps, enseñanza, matemática

RESUMEN

Hoy en día las tecnologías móviles digitales son una parte importante de la vida cotidiana de jóvenes y adultos, sus modalidades de uso se amplían cada vez más: son tanto para el entretenimiento y la comunicación, como para consultar datos, realizar registros fotográficos o de videos, hacer uso de diccionarios y traductores de idiomas, realizar operaciones de cálculos, leer libros, consultar blogs y páginas web, utilizar aplicaciones Apps. La presente experiencia se enmarca en la corriente educativa planteada respectivamente por Howard Rheingold (2002) y Marc Prensky (2012). Se sigue a Rheingold (2002) cuando se refiere a la evolución de las nuevas tecnologías en las últimas décadas y observa que entorno a éstas se han desarrollo organizaciones colectivas espontáneas, virtuales e inteligentes; y a partir de esa realidad han aparecido nuevos usos de la tecnología en el campo de la educación, con el diseño de estrategias pedagógicas para integrar a los nuevos medios -entre ellos, la telefonía móvil- en los procesos de enseñanza-aprendizaje. En tanto Prensky (2012) plantea propuestas especificas sobre la educación en la era digital, propugnando que los docentes cambien su pedagogía de manera que sean más eficaces para los estudiantes del siglo XXI. A partir de tal marco conceptual, se propone la utilización de Apps para celulares como herramienta en la realización de actividades áulicas en el grado, considerando que el *uso de ese dispositivo puede incentivar la creatividad y la imaginación, puede ampliar la conectividad y, potenciar la autonomía e iniciativa personal de los alumnos*. Todavía es resistido el uso de los teléfonos celulares en el aula por parte de algún sector docente, que lo ven sólo como un elemento que propicia la distracción. Pero como contrapartida otros docentes respaldan su uso considerando su potencial favorecedor en el aprendizaje, entre los que nos encontramos. Negar a los celulares como posible herramienta didáctica es perder la oportunidad de orientar su uso con fines educativos o incluso de autocontrol de la propia conectividad. Ante esta realidad se planteó en la Cátedra de Matemática diseñar una propuesta superadora y ponerla en práctica; es así que se planificaron estrategias metodológicas afines y se pusieron en aula. Tal experiencia se pone a consideración mediante un póster, que involucra trabajos en torno a la relación Matemática y el diseño arquitectónico con la aplicación App Mal Math, para la resolución de derivadas, integrales indefinido y definido.

Referencias

Prensky, M. (2012). *Brain gain: Technology and the quest for digital wisdom.* New York, NY: Palgrave McMillan.

Rheingold, H. (2002). *Smart mobs: the next social revolution*. New York: Hardcover.

UNA EXPERIENCIA DE INDUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Isabel Berna, Fernando Córdova-Lepe, Iván Correa
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Investigación como docencia, estudiante como investigador, álgebras no asociativas

INTRODUCCIÓN

¿Es posible, deseable y/o necesario que nuestros estudiantes de pregrado adquieran habilidades de creación de conocimiento matemático? Creemos que las respuestas a esta pregunta, por parte de los científicos que ejercemos docencia de pregrado, no son inmediatas ni de fácil acceso, tampoco ajenas a lo que es y ha sido nuestra formación y carrera académica, en general a lo subjetivo, nuestros personales paradigmas. Docencia e investigación definen que en gran medida la labor del académico universitario, una interesante discusión y análisis de las conexiones entre estos dos mundos (Sancho 2001).

LA EXPERIENCIA

En el contexto de un curso electivo para estudiantes de pedagogía en ciencias en algunas de las disciplinas básicas, una actividad curricular más dentro del programas de formación de profesores de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE). Elegimos centrarnos en el estudio de la asociatividad o no asociatividad que puede presentarse en estructuras que pueden llegar a modelar matemáticamente algunos fenómenos.

En álgebra, una operación Δ es asociativa si: $\forall x, y, z: (x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z)$

Existen estructuras algebraicas no asociativas provenientes de modelos matemáticos de situaciones en física y genética. El estudio formal no asociativo se inicia a mediados del siglo XX.

Los objetivos generales de la investigación apuntaban: <u>En lo disciplinar:</u> Generalización de propiedades conocidas en el contexto asociativo al caso no asociativo. Y <u>en lo docente:</u> articular la investigación disciplinar con la docencia de pregrado, incentivando y promoviendo el desarrollo de competencias investigativas en nuestros estudiantes.

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

El curso contempla como requisito el curso de matemática del primer año. El programa se estructura en etapas: 1. Introducción de conceptos básicos como: Estructura Algebraica, Espacio Vectorial, Estructura de Álgebra, Identidades Polinomiales, y el uso del software (de libre circulación) “Albert”. 2. Lectura y presentación de investigaciones publicadas en revistas científicas de alto nivel. Y 3. Encontrar una demostración algebraica de lo obtenido con el software Albert, y redactar los resultados y las demostraciones, en un formato de artículo en inglés y latex.

CONCLUSIONES

Es fundamental el enriquecimiento y generación de nuevos conocimientos por parte del docente universitario, lo que necesariamente redundara positivamente en la formación de sus

estudiantes. Relacionar la investigación con la docencia, logra un enriquecer, añadir, complementar, superponer, oponer, competir y tensar, un "poder ser" asumidas por los actores: académicos y estudiantes.

Referencias

Sancho, J.M. (2001). Docencia e investigación en la universidad: una profesión, dos mundos. *Educar, 28*, 41-60.

TEOREMAS DE LA GEOMETRÍA MODERNA: INCLUSIÓN EN EL AULA A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

Eduardo Orellana
Universidad Católica de la Santísima Concepción

Enseñanza, geometría dinámica, geometría clásica, geometría moderna, construcciones

RESUMEN

Se presentan algunos teoremas de la geometría moderna establecidos dentro de los siglos XVI al XIX. Se invita a reflexionar sobre el trabajo en aula de esta geometría incluyéndola a través de la geometría dinámica. Se sugiere la construcción de estos teoremas apoyando las clases, en el contexto de la geometría dinámica, con uso de regla y compás, así como también el software Geogebra.

INTRODUCCIÓN

Los teoremas que se sugieren como inclusión en el aula son, el de Feuerbach, de Simson, de la recta de Simson, Circunferencia de Malfatti y el punto de Malfatti.

De los siguientes teoremas se considerarán las representaciones de cada construcción en el poster:

Teorema (de Feuerbach) y las consecuencias del teorema de Feuerbach (Johnson, 1929), Teorema (de Simson) y las consecuencias del teorema de Simson (Honsberger, 1995), Teorema (del punto de Clawson) y las consecuencias del teorema del teorema de Clawson (Levy, 1983), Teorema (de las circunferencias de Malfatti) y las consecuencias del teorema del teorema de Malfatti. (Cancec y Campos, 2000).

REFLEXIONES

La invitación es a incluir algunos de los teoremas de la geometría moderna en el aula, también a que sea conocida y descubrir el mundo amplio y maravilloso que la geometría clásica nos puede presentar (Cancec y Campos, 2000).

Referencias

Cancec, G. y Campos, J. (2000). Puntos singulares del triángulo y su conexión con la geometría dinámica (Tesis de pregrado). Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Santiago. Recuperado de: www.umce.cl

Honsberger, R. H. (1995). *Episodes in ninteenth and twentieth century Euclidean geometry*. Washington: Editorial Committee.

Johnson, R. A. (1929). *Moder Geometry*. Boston: Editorial Mifflin company.

Levy, S. S. (1983). *Introducción a la geometría moderna*. Ciudad de México: Editorial Continental.

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Nezah Fuentes, Caroline Salazar, Marcela Agurto, Maribel Ñanco
Universidad de las Américas

Propuesta didáctica, probabilidad condicionada, TAD, praxeología

RESUMEN

Realizamos una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la Probabilidad Condicionada en el nivel de tercer año medio. Se realiza un análisis de antecedentes sobre la formación probabilística. Se analizan textos para identificar el tratamiento del concepto de probabilidad. Se trabaja con la concepción de obstáculo de Brousseau en base a la que se realiza una propuesta didáctica para el tratamiento del objeto matemático implicado, sustentado la base de la propuesta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Se proyecta metodológicamente un estudio de casos y Finalmente se realizan análisis y reflexiones.

Esta investigación pretende responder a la problemática que tienen los estudiantes al intentar comprender y aprender la probabilidad, en especial la probabilidad condicional en el nivel de tercero medio, ya que esta no se presenta como una tarea fácil, porque el alumno se enfrenta a un lenguaje formal dominado por un gran número de normas que le confieren gran rigidez.

Para abordar esta problemática se realizó una propuesta de enseñanza, donde se toma en cuenta que el problema viene desde la mala utilización del lenguaje natural. Para ello se realizó la revisión del contenido en un texto formal donde se puede identificar la transposición que ha sufrido el objeto matemático a lo largo del tiempo. En la enseñanza de este contenido se trabaja utilizando la TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico) de Chevallard, y para ello se distribuyen las actividades de tal forma que comiencen realizando lo que conocen de la probabilidad, como la regla de Laplace, luego trabajen la probabilidad conociendo un dato anteriormente y posteriormente lo trabajen con material concreto. Para complementar y superar el obstáculo de la mala utilización del lenguaje natural, se entregará en la guía algunos “tips” que entregan una pequeña definición, como por ejemplo ¿Qué es la Intersección?, y así de esa forma permite a los estudiantes la mejor y mayor comprensión de este concepto. Se da mayor énfasis en el cierre de la propuesta de enseñanza al trabajo contextualizado en sus realidades dentro del establecimiento educacional, ya que ahí es donde los estudiantes pueden realizar la asociación de la vida real, con el objeto matemático trabajado.

Referencias

Batanero, C., y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. Journal for *Research in Mathematics Education, 30*(5), 558-567.

Henry, M. (2001). Notion d’experiénce aleatoire. Vocabularie et modèle probabiliste. En M. Henry (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 173-186). Paris: Presses Universitarires de France.

Oliveira, C. (2010). Organizaciones matemáticas locales relativamente completas (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo.

Serradó, A., Cardeñoso, J. M., & Azcárate, P. I. L. A. R. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal*, *4*(2), 59-81. Revisar citas que no están en el documento.

ANÁLISIS DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN ESQUEMA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Patricia Rojas Salinas
Universidad del Bío-Bío

Descomposición genética, esquema, calculo diferencial e integral

La Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral se encierran en grandes problemáticas, entre ellas el entendimiento de algunos procesos y la forma en las que se llevan a cabo las construcciones mentales. Trigueros (2005), plantea que APOS (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) es un instrumento tanto de investigación como de enseñanza, puesto que, para trabajar con el modelo que nos plantea esta teoría es necesario pensar en los conceptos desde la propia matemática.

Se plantea el diseño de una Descomposición Genética y la construcción de un Esquema que incluye ambos conceptos (Derivadas e Integrales) y permite, analizar las construcciones de los estudiantes para tomar en consideración las condiciones necesarias para el estudio y enseñanza de cada uno de estos conceptos; al mismo tiempo velar por que se establezcan las relaciones entre ellos que permitan verlos como un todo (permitiendo su posterior enseñanza en simultáneo).

Se espera generar un cambio en el modelo de la organización didáctica actual, que permita renovar el estudio del Cálculo Diferencial e Integral de una Variable, dando sentido a estos conceptos mediante una teoría cognitiva, basados en la Epistemología Genética de Piaget, que establece que el desarrollo del sistema cognoscitivo no es ni un crecimiento continuo, ni un proceso lineal (García, 1987, pág. 120). Además, los mecanismos de construcción del conocimiento están basados en “La Abstracción Reflexiva” (Dubinsky, et al, 2005).

Según Dubinsky (1991) un esquema se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción, su coherencia queda determinada por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar para hacer frente a una situación matemática en particular; una vez que el esquema se construye como un conjunto coherente de estructuras (acciones, procesos, objetos y otros esquemas). Los esquemas son dinámicos, evolucionan, según las relaciones que se construyan entre los conceptos, la descripción de esta evolución se hace mediante la “Triada” (Piaget y García, 1982).

Referencias

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In L. P. Steffe (Ed.), Epistemological foundations of mathematical experience (pp. 160-202). New York: Springer.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics, 60*(2), 253-266.

García, R. (1987). Lógica y Epistemología Genética. En J. Piaget, & R. García (ed.), *Hacia una Lógica de Significaciones* (pp. 117-131). Barcelona, España: Gedisa.

Piaget, J. y R. García (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Trigueros, M. (2005). La noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Educación Matemática, 17*(001), 5-31.

CONCEPCIONES DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR, SU ROL E IMPORTANCIA EN LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

Daniela Bonilla Barraza[1], Jocelyn Díaz Pallauta[2], Gabriela Cisternas Araya[3]
Universidad de la Serena[1], Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[2], Universidad de Valparaíso[3]

Desviación estándar, didáctica de la estadística

RESUMEN

La presente comunicación corresponde a un primer reporte de investigación, que surge a partir del énfasis en la alfabetización estadística en los programas de estudio de nuestro país. Producto de esto, se indaga sobre el concepto y enseñanza de desviación estándar en diversos textos escolares. Además, se diseñó un cuestionario exploratorio para evidenciar la interpretación de esta medida de dispersión en diversos contextos, utilizando como marco teórico, la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1997), como referente metodológico análisis documental – estudio de casos de Arnal, del Rincón y Latorre (1992).

El objetivo general de investigación es: indagar en las concepciones que prevalecen en la enseñanza de la desviación estándar, se define los siguientes objetivos específicos:

- Analizar programas, textos escolares y estudio de didáctica de la estadística, sobre la concepción de desviación estándar.
- Indagar en las concepciones que presenta un grupo de estudiantes sobre la desviación estándar.

En relación al primer objetivo específico, se realiza un análisis documental, entendido como: "el proceso dinámico que consiste esencialmente en la recogida, clasificación, recuperación y distribución de la información" Arnal, del Rincón y Latorre (1992, pág. 58).

En las indagaciones realizadas se puede visualizar que la enseñanza del objeto en estudio está enfocada en una tarea específica, es decir, calcular la desviación estándar de un conjunto de datos. Así también, en lo que se refiere a la organización didáctica, se prioriza el momento didáctico trabajo de la técnica, es decir, el docente da a conocer el concepto de desviación, presentando la fórmula y los estudiantes sólo la aplican.

Respecto al segundo objetivo de investigación, y utilizando como marco metodológico estudio de casos considerado como "una estrategia encaminada en la toma de decisiones" (Arnal, Del Rincón, Latorre, 1992, p.206). Se concluye que los estudiantes no son capaces de argumentar acerca de la interpretación que ellos conciben del número que obtienen como desviación estándar.

Desde el referente teórico, el hecho de que el estudiante no elabore técnicas que conectan la definición de desviación con la fórmula que permite calcularla, provoca una pérdida de aspectos como, el rol de la unidad de medida del conjunto de datos sobre los cuales se calcula la desviación y la interpretación del valor obtenido en diferentes contextos. La propuesta de esta investigación es formular actividades que promuevan la comprensión de la desviación estándar, desde dos ámbitos, primero como un objeto estadístico dando un

sentido matemático a su fórmula, y segundo propiciando el enriquecimiento del concepto de dispersión sustentado en el análisis de situaciones de inferencia estadística.

Referencias

Arnal, J., del Rincón, D. y Latorre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaj*e. Barcelona: ICE/Horsori.

EPISODIOS DE VIOLENCIA SIMBÓLICA EN CLASES DE MATEMÁTICA EN COLEGIOS PARTICULARES SUBVENCIONADOS QUE HAN OBTENIDO RESULTADOS DESTACADOS EN SIMCE

Patricia Fuentes, Rodrigo Cayún, Erick Veas, Fabián Quiroga
Universidad de Concepción

Violencia simbólica, capital cultural, clases de matemática, razonamiento matemático

El presente estudio debe su origen a la investigación "Interacciones Alumno-Profesor en Contextos de Vulnerabilidad Respecto de la Ocurrencia de Episodios de Violencia Simbólica en Clases de Matemáticas" (Castro, Mardones, Ortiz y Quiroga, 2013), la que determina presencia de estos episodios en quinto año básico planteando que los docentes no consideran las producciones elaboradas por los estudiantes e imponen arbitrariamente una forma de pensar. En esta ocasión se considerarán terceros años medios de Colegios Particulares Subvencionados con resultados dentro del 35% superior de su nivel socioeconómico en la prueba de matemática 2014 del Sistema para la Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE). Se esperaría que con estudiantes con un capital cultural (Bourdieu y Passeron, 2001) cercano al capital validado por el Curriculum se den relaciones profesor–alumno complementarias y aunque podrían emerger episodios de violencia simbólica similares, también podría darse que los estudiantes reaccionen de forma distinta. Se plantea como objetivo caracterizar las interacciones profesor-alumnos respecto de la ocurrencia de episodios de violencia simbólica en estos estudiantes, intentando buscar similitudes y diferencias con el estudio previo.

De carácter cualitativo fenomenológico, los sujetos se obtuvieron con un muestreo intencionado de cursos y profesores y para cada uno se grabaron y analizaron seis horas pedagógicas. Para determinar si un episodio es manifestación de violencia simbólica dentro del aula se consideró la definición y aplicación que se hace en la investigación de Castro et al. (2013) quien operativiza lo expuesto por Bourdieu y Passeron (2001) para ser utilizada en clases de matemática.

Los resultados obtenidos complementan los de la investigación de Castro et al. (2013) y se estructuran en dos grandes ejes: episodios en que se determina presencia de violencia simbólica y episodios en que el docente no considera el capital cultural del estudiante. En conclusión, el docente ejecuta acciones que llevan a ignorar, invalidar, o no utilizar producciones que el estudiante entrega como resultado de una tarea matemática específica. En ocasiones no se da el espacio para que en el alumno se genere un razonamiento matemático pues se imponen formas de proceder o ideas arbitrarias y desvinculadas de lo que ya conoce, evidenciando la no consideración por parte del docente del capital cultural de estos alumnos. Si bien se consideran alumnos de otro nivel educativo y que no provienen de contextos vulnerables necesariamente, los resultados son muy similares a los presentados en el estudio anterior en cuanto a la neutralidad de las interacciones y la no consideración de las producciones de los estudiantes.

Referencias

Bourdieu, P.F. y Passeron, J.C. (2001). *La reproducción: elementos para una teoría del sistema de enseñanza*. Madrid: Editorial popular.

Castro, A.M., Mardones, E.E., Ortiz, A.I.. y Quiroga, F.E. (2013). Interacciones Alumnos-Profesor en Contextos de Vulnerabilidad Respecto de la Ocurrencia de Episodios de Violencia Simbólica en Clases de Matemáticas. *Formación universitaria, 6*(1), 29-40.

LA COMPETENCIA PROFESIONAL DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR

Ivette Fernández[1], Wilson Gordillo[2]
[1]Universidad de Los Lagos, [2]Universidad Distrital

Formación de profesores, competencia, profesor, conocimiento didáctico-matemático

El póster tiene por objetivo presentar los resultados obtenidos de un estudio de casos múltiple, el cual se realizó con la finalidad de evaluar y describir algunos aspectos relevantes del conocimiento didáctico y matemático de los profesores en servicio, cuando diseñan e implementan sus clases bajo un enfoque de resolución de problemas (Schoenfeld, 1985). Para lograr dicho objetivo, utilizamos el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del profesor (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015), el cual sugiere tres dimensiones que integran dicho conocimiento: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática. Para cada una de estas tres dimensiones, el CDM propone sub-categorías y, a su vez, para cada una de dichas sub-categorías se proponen, para su análisis, herramientas teórico-metodológicas específicas que se toman de los aportes del modelo teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007).

Los resultados del estudio evidenciaron que: 1) en lo que refiere a la dimensión matemática, los profesores que participaron en el estudio, poseen un conocimiento común parcial que les impide resolver ciertos problemas que son propensos de ser implementados en clase; y 2) con respecto a la dimensión didáctica, los profesores presentan carencias en sus conocimientos relativos a algunas de las sub-categorías que integran dicha dimensión, a saber: faceta epistémica (conocimiento especializado del contenido), faceta ecológica (conocimiento de los contextos y currículo); poseen un grado intermedio de conocimiento sobre las interacciones del aula, y los recursos y medios; y se observa un fuerte énfasis de su conocimiento sobre los estados afectivos y cognitivos de los estudiantes.

Referencias

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456. doi: 10.12973/eurasia.2015.1403a

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

EFECTIVIDAD DE LAS ACTIVIDADES LÚDICAS COMO ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Ana Aqueveque Cárdenas, Angélica Bustos Andrade, Daniela Díaz Burgos, Bárbara Pérez Muñoz, Sandra Fuentes Mardones
Universidad San Sebastián

Aprendizaje, efectividad, juego, lúdica

El presente trabajo, pretende demostrar la efectividad de la utilización de actividades lúdicas como estrategia de enseñanza aprendizaje, cuantificar el incremento de los aprendizajes de los alumnos y presentar los antecedentes teóricos y prácticos que respaldan la hipótesis. A pesar de ser un proyecto de tesis en proceso, se presentan resultados del taller realizado como piloto.

El juego es una actividad practicada de distintas formas por el ser humano desde que son pequeños hasta la adultez. Éste posibilita y facilita su crecimiento tanto en el ámbito particular como en lo social y contribuye al desarrollo de las capacidades y habilidades individuales de cada uno de ellos. En el contexto educativo, el juego se refiere a una acción intencionada que busca que el niño o niña aprenda de una forma placentera.

El presente estudio se centra en la utilización de actividades lúdicas en el aula y pretende comprobar la hipótesis que plantea que ésta metodología es más efectiva y motivadora para los alumnos que las utilizadas en clases tradicionales, transformando así al alumno en protagonista de su aprendizaje.

Uno de los principales autores en los que se basó el presente estudio fue Piaget (1987), debido a su aporte a la educación con la teoría del desarrollo cognitivo, donde ayuda a comprender cómo los niños ven el mundo. Basándonos en esto, los estudiantes seleccionados para el taller, se encuentran en el "estadio de operaciones concretas", es decir, aprenden haciendo. Es por esto que el juego cumple un rol importante para el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que es la actividad que más practican los niños y así comprenden de manera sencilla lo que se pretende enseñar.

Dentro de las actividades realizadas se registraron juegos que involucraran material didáctico como palos de helado con los cuales los alumnos pudieron comprender las cuatro operaciones básicas, la máquina de los números con la cual aprendieron a leer y escribir números de hasta 6 cifras; juegos kinestésicos como "cielo, mar y tierra matemático" en el cual se designaban números a cada sector y ellos debían resolver operaciones matemáticas para saber el sector donde debían ubicarse. Además se utilizaron otros artículos como balones y organización en grupos para reforzar el respeto de turnos y realizar competencias que motivaran la participación.

En la comparación de las evaluaciones de aprendizajes de los alumnos se ve una mejora considerable, llegando a tener en algunos casos una brecha del doble de preguntas correctas.

Referencias

Piaget, J. (1987). *La formación del símbolo en el niño: Imitación, juego, imagen y representación*. México: Editorial Fondo de Cultura Económica.

PASEOS AL AZAR COMO METAFORIZACIÓN ENACTIVA EN MATEMÁTICA: PROPUESTA DIDÁCTICA PARA ENSEÑANZA BÁSICA

Karina López Fuentealba
Colegio Esperanza Joven

RESUMEN

Esta es una investigación cualitativa, iniciada con intervención en aula a cuatro escuelas desde octubre 2013. Observa la forma en que los estudiantes desarrollan las habilidades matemáticas a través de una situación didáctica, con una visión teórica de metaforización y enactividad.

Metáforas, enacción, situación, modelización, ingeniería didáctica

INTRODUCCIÓN

"El paseo del sujeto A" es una propuesta didáctica para paseos al azar que ayuda a construir una noción inicial de probabilidad y como metáfora (Soto, 2012), busca que los estudiantes se involucren enactuando (Varela, 1991) la situación propuesta.

DESARROLLO

Desde el año 2013 al 2015, se intervinieron cinco colegios y ocho cursos en total, pertenecientes a dependencias municipales, particulares subvencionados y particulares pagados. En todos los se aplicó la misma situación didáctica *"El paseo del sujeto A"*. El diseño de la clase se realiza bajo la visión de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1997). Antes y posterior a la intervención en aulas, se realizó un análisis desde la perspectiva de la Ingeniería Didáctica de Artigue, Duady y Moreno (1995).

REFLEXIONES Y CONCLUSIÓN

Se observa que la propuesta didáctica es adecuada para trabajar no sólo conceptos relacionados con probabilidades, también Triángulo de Pascal, sistema binario, suma geométrica, entre otros, dependiendo del nivel. Se realizó una meta-análisis de todas las clases, tomando en cuenta variables como: motivación, vocabulario matemático utilizado por los estudiantes, conocimientos que emergen, desarrollo de habilidades. Poco más del 90% de los estudiantes logra enactuar, representar, argumentar, comunicar resultados, modelizar y resolver.

Referencias

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht. Países Bajos: Kluwer Academis Publishers.

Soto-Andrade J. (2012). Metaphors in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education. Berlín: Springer-Verlag.

Varela, F., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). The embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience. Cambridge, MA: MIT Press.

¿UTILIZAN LOS ESTUDIANTES CHILENOS DE 12 A 14 AÑOS LA REGULARIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN PARA HALLAR EL SIGNO DEL RESULTADO DE LA ADICIÓN DE ENTEROS?

Francisco Contreras, Alexis Fuentes, Nicolás León, Elisabeth Ramos
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Fenómeno didáctico, regularidad de la multiplicación, adición de enteros

Hemos observado que alumnos de 8° básico confunden el signo del resultado de la adición de dos enteros con el que obtendrían al multiplicarlos. Para estudiar la posibilidad de que este hecho sea expresión de un fenómeno didáctico, se realizó una investigación en dos establecimientos escolares.

DESARROLLO

Antecedentes

Abrate, Pochulu y Vargas (2006) afirman que en muchos casos la "regla de los signos" de la multiplicación de enteros se aplica sin distinguir las operaciones involucradas. Asimismo, Bell (1982) halla errores en el resultado de adiciones, debidos a la aplicación de la "regla de los signos".

METODOLOGÍA

La investigación realizada sigue el paradigma cualitativo, es de corte descriptivo e interpretativo, y empleó una prueba escrita como herramienta de levantamiento de datos. El instrumento incluyó tres ejercicios de adiciones de enteros: (i) $^{-}2 + 3$; (ii) $5+ {}^{-}3$; (iii) $^{-}4 + {}^{-}2$. La prueba fue aplicada a alumnos de 8° básico en dos establecimientos: uno municipal y uno particular subvencionado.

ANÁLISIS

Se hallaron diversas expresiones del error buscado. Por ejemplo, un alumno responde $^{-}2 + 3= {}^{-}1$ y justifica anotando "me dio −1 porque − · + es negativo, así que el número 1 quedaría negativo". Similarmente otro resuelve $-4+ -2= 6$, y argumenta "signos iguales son positivos", lo que se interpreta como una alusión a la regularidad de la multiplicación.

La revisión de los resultados generales indica que, en el colegio particular subvencionado, casi la mitad de los 17 errores cometidos se debe al uso de la regularidad de la multiplicación. En el colegio municipal, dicha tasa se reduce a un tercio.

CONCLUSIONES

El error que es objeto del estudio está presente en las respuestas en ambos colegios donde fue aplicada la prueba, concluyéndose que es un buen candidato para ser considerado como fenómeno.

Referencias

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Bell, A. (1982). Looking at children and directed numbers. *Mathematics Teaching*, *100*, 66-72.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA CONCEPTUALIZAR LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DESDE LA TEORÍA DE SITUACIONES

Nicolás Vergara Piña, Vivian Marambio Fuentes
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Universidad Católica Silva Henríquez

Modelación, teoría de situaciones didácticas, función cuadrática

INTRODUCCIÓN

Esta propuesta aborda el estudio de concepto de función de cuadrática como articulador para el desarrollo del pensamiento variacional. Para lograr esto, se trabaja desde la modelación de una situación de variación. La modelación se puede entender como un proceso que incluye la actividad cognitiva que permite convertir el lenguaje natural en un registro algebraico, transitando por registros tabulares y gráfico, entre otros. Es por esto, que las actividades están intencionadas de tal manera que los estudiantes transiten por distintos registros de representación.

En Posada y Villa (2006) mencionan que el concepto de función se ha abordado con estrategias que son insuficientes para lograr que los estudiantes reconozcan una herramienta fundamental para la modelación de fenómenos que implica variación y cambios de magnitudes. La enseñanza del algebra escolar, y en particular de las funciones, se han privilegiado técnicas mecánicas y algorítmicas, donde la modelación responde a una aplicación de las funciones y no como una herramienta para la construcción del concepto en cuestión.

MARCO METODOLÓGICO

La metodología se enmarca dentro de la teoría de situación didáctica de Brousseau (1986) (TSD, en adelante). La TSD posee cuatro fases; las tres primeras: Acción, formulación y validación corresponden a una situación a-didáctica, aquí no hay una intervención directa del docente en lo concerniente al saber que está en juego, se produce un “diálogo” entre los participantes y el medio didáctico. En la última etapa, la institucionalización, se establecen relaciones entre las producciones de los estudiantes y el saber científico con la finalidad de preservar el sentido de conocimiento construido, se formaliza el saber matemático.

CONCLUSIÓN

Si bien se evidenciaron dificultades para el tránsito del registro tabular al gráfico, pues los años anteriores solo se trabajó con situaciones que comprenden cambios lineales, la comunicación de estrategias y la intervención directa del docente favoreció el entendimiento de variaciones cuadráticas. Además, no hubo mayores dificultades en el tratamiento en el registro algebraico. En base a las producciones, se logró identificar que los estudiantes lograron alcanzar un buen desarrollo conceptual de la función cuadrática desde una perspectiva variacional.

Referencias

Posada, F. y Villa-Ochoa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional* (Tesis de maestría no publicada, Facultad de Educación-Universidad de Antioquia, Medellín).

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33-115.

CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES RESPECTO A LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN PROBABILIDAD

Valeria Bizet-Leyton, Jocelyn Díaz-Pallauta, Daniela Araya-Tapia, Elisabeth Ramos-Rodríguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Función probabilidad, gráfico estadístico, gráfico cartesiano, fenómeno didáctico, creencias

RESUMEN

El presente trabajo tiene por objetivo indagar si el hecho didáctico que el docente no logra diferenciar entre la representación gráfico estadístico y el gráfico cartesiano de la función probabilidad, es candidato a fenómeno didáctico. Arteaga (2011) evidencia que futuros docentes presentan dificultad en la construcción, lectura e interpretación de gráficos estadísticos elementales. La preparación de los docentes para enseñar gráficos estadísticos es un tema fundamental que ha sido olvidado desde la investigación y en la formación de maestros (Arteaga, Batanero y Cardeñoso, 2011). Por su parte, Friel, Curcio y Bright (2001) proponen que la comprensión gráfica está influenciada por cuatro factores: fines para los que se utilizan los gráficos, características de la tarea, disciplina y las características del lector.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Consideramos los elementos teóricos: conceptos de gráfico estadístico (Arteaga, 2011), función probabilidad y sus distintos registros de representaciones. El estudio es de corte cualitativo, descriptivo e interpretativo, los sujetos informantes fueron 12 docentes de matemática de enseñanza media, de diferentes regiones de Chile. Para la recogida de datos, se diseñó un cuestionario basado en un ejercicio del texto de matemática de tercero medio (15-16 años) (Saiz y Blumenthal, 2016). Para el análisis de datos, se consideraron categorías a priori que emergieron de elementos teóricos.

REFLEXIONES

Del análisis de las respuestas, se evidencia que 7 de 12 de docentes reconoce que la función probabilidad es posible de representar a través de distintos gráficos. Además 10 de los 12 docentes descartan que un gráfico de líneas verticales representa en el plano cartesiano una función.

CONCLUSIONES

Podemos concluir, que el hecho didáctico estudiado, es un buen candidato a fenómeno didáctico, es decir, trasciende del contexto, tiempo y espacio. Los resultados evidencian la necesidad de reforzar la representación y diferenciación entre gráfico estadístico y cartesiano de la función probabilidad en los docentes.

Referencias

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis de doctorado. Granada, España: Universidad de Granada.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, (2011). *Gráficos estadísticos en la formación de profesores. En J. Ortiz. (Ed), Investigación en Educación Estadística y Formación de Profesores* (pp. 73-87). Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática -Universidad de Granada.

Friel, S., Curcio, F., y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 32(2), 124-158.

Saiz. O., y Blumenthal. V. (2015). *Texto del Estudiante Matemática 3° Medio*. Santiago, Chile: Ediciones Cal y Canto.

XX JNEM
Valparaíso, 2016

XX JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

VALPARAÍSO

13 Y 14 DE DICIEMBRE, 2016

DIRECTIVA SOCHIEM

Presidente
Carlos Silva Córdova

Vicepresidente
María Elsa del Valle Leo

Secretario
Francisco Rojas Sateler

Tesorero
Miguel Díaz Flores

Directores
Pierina Zanocco Soto
Marcela Parraguez González
Irma Pinto Rojas
Roberto Vidal Cortés
Hernán Fibla Acevedo

COMISIÓN ORGANIZADORA

Presidente
Diana Zakaryan, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso — diana.zakaryan@pucv.cl

Vicepresidentes
Astrid Morales, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso — astrid.morales@pucv.cl
Marcela Parraguez, SOCHIEM — marcela.parraguez@pucv.cl

Secretario General
Jaime Mena, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso — jaime.mena@pucv.cl

COMISIÓN ACADÉMICA

Presidente
Elizabeth Montoya, PUCV — elizabeth.montoya@pucv.cl

Vicepresidentes
Carolina Guerrero, PUCV — carolina.guerrero@pucv.cl
Marcela Parraguez, SOCHIEM — marcela.parraguez@pucv.cl

Secretario
Manuel Goizueta, PUCV — manuel.goizueta@pucv.cl

COMITÉ ORGANIZADOR Y ACADÉMICO

Soledad Estrella, PUCV, soledad.estrella@pucv.cl
Arturo Mena, PUCV, arturo.mena@pucv.cl
Elisabeth Ramos, PUCV, elisabeth.ramos@pucv.cl
Patricia Vásquez, PUCV, patricia.vasquez@pucv.cl

Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

www.ima.ucv.cl/congreso/xxjnem