SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.105

DISCORDANCIAS DEL CURRÍCULO ESCOLAR: HOMOTECIA MÁS ALLÁ DE LA PROPORCIONALIDAD

SCHOOL CURRICULUM DISCORDANCES: HOMOTHETY BEYOND PROPORTIONALITY

Juana Gómez Calalán
jgomez.rcv@gmail.com
Colegio Rubén Casto, Valparaíso, Chile
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Melissa Andrade-Molina
melissa.andrade@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

RESUMEN

El objetivo de este artículo es explorar las discordancias que emergen al contrastar los lineamientos curriculares, respecto al desarrollo de las habilidades para la conformación de un ciudadano productivo y las actividades propuestas en documentos oficiales distribuidos por el Ministerio de Educación de Chile. Para ello, se analizan textos escolares –con el fin de localizar estas discordancias– y una propuesta de situación didáctica, enmarcada en el Estudio de Clases y en la Teoría de Situaciones Didácticas, para examinar posibles caminos para que los estudiantes identifiquen elementos constitutivos de homotecia y desarrollen las habilidades declaradas en las Bases Curriculares. La implementación revela que la propuesta ayuda a atender las discordancias identificadas.

PALABRAS CLAVE:
Homotecia, Propuesta de aprendizaje, Discordancias, Geometría escolar.

ABSTRACT

This paper aims at exploring the discordances that emerge when contrasting curricular guidelines, in relation to the development of skills and competencies needed to shape productive citizens, and the set of activities proposed in pedagogical materials from the Ministry of Education in Chile. School mathematics textbooks—to unveil the discordances—and to a didactic proposal—framed within the Lesson Study and Theory of Didactical Situations—were analyzed to examine possibilities for students to identify constitutive elements for homothety and develop the abilities enounced in the Chilean official curricular guidelines. The implementation section of this study reveals that this proposal helps in addressing the identified discordances.

KEYWORDS:
Homothety, teaching proposal, discordances, school geometry.

Recibido: 18 de febrero de 2022 , Aceptado: 21 de marzo de 2022

1. Introducción

En un contexto escolar se asume que la geometría, como disciplina científica, destaca por procesos de formalización que aportan a la comprensión del entorno, además de potenciar la formación del individuo, dado el trabajo sistemático, riguroso, de abstracción y generalidad que conlleva su estudio (ver Castiblanco et al., 2004). Actualmente, en lugar de enfrentar al estudiante a este tipo de procesos, la enseñanza de la geometría escolar se centra, más bien, en la memorización y aplicación de fórmulas, con estrategias pedagógicas como la algebrización de la geometría en la escuela –que ha sido reconocido como un "error pedagógico" cuando el desplazamiento entre aritmética y álgebra se salta la geometría (Guevara-Casanova y Burgués-Flamarich, 2018)–. Este fenómeno ha sido explorado, por ejemplo, como una falta de propuestas metodológicas que imposibilitan dar sentido y significado al aprendizaje de la geometría (Barrantes y Blanco, 2005). La geometría escolar busca desarrollar capacidades espaciales que permitan a los estudiantes comprender matemáticamente el espacio y sus formas. Y, así, transitar desde lo bidimensional a lo tridimensional –por ejemplo, mediante el uso de herramientas tecnológicas para facilitar la visualización y manipulación de figuras y formas (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2015)–. Sin embargo, la geometría escolar se enfoca en la enseñanza de un espacio Euclidiano en el que las figuras y cuerpos solo pueden ser concebidos bajo una aprehensión humana específica del mundo y accedidos a través de herramientas tecnológicas o filtros perceptuales (Brown y Heywood, 2011).

En Chile, el MINEDUC presenta las estructuras curriculares y la distribución de los contenidos matemáticos para los niveles de escolarización obligatoria a través de diversos materiales (e. g. Bases Curriculares). Pero, a pesar de que esa distribución sea expresada en cantidad de horas sugeridas para cada unidad, desde hace algunos años se priorizan ciertos contenidos por sobre otros en el aula de matemáticas (ver Abrate et al., 2006). Esta priorización, en la mayoría de los casos, va en detrimento de contenidos geométricos. Tal afirmación se sustenta en resultados obtenidos mediante evaluaciones estandarizadas que revelan aprendizajes no logrados y competencias no desarrolladas en el eje de geometría (i. e. TIMSS 2019 (ACE, 2020)). Los resultados que presenta la Agencia de la Calidad de Educación en Chile (ACE) revelan que el rendimiento en geometría es significativamente menor que el rendimiento en otras áreas de la matemática. De igual manera, el Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE), prueba que se encarga de medir los niveles de aprendizaje a nivel nacional, ha arrojado que, a pesar de observar un incremento en los niveles de logro durante los últimos 10 años, más del 50% de los estudiantes no alcanza los niveles de desempeño esperado (ver ACE, 2015).

La geometría se posiciona como un área de la matemática escolar en necesidad de propuestas metodológicas que potencien las habilidades esperadas para un ciudadano productivo (de modo de alcanzar los niveles de logro). La investigación en el campo de la educación matemática ha advertido las ventajas del uso de herramientas tecnológicas para la enseñanza de la geometría. Por ejemplo, Gamboa (2007) argumenta que la incorporación de tecnología ha modificado significativamente la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas, debido a las diferentes posibilidades para explorar y comunicar ideas matemáticas. El uso de herramientas tecnológicas permite, además, potenciar el desarrollo de habilidades propias de la geometría, tales como la exploración, visualización, argumentación y justificación, concediendo a los estudiantes la posibilidad de descubrir, aplicar y obtener sus propias conclusiones (Gamboa y Ballestero, 2010). No obstante, al explorar el currículo escolar, el tratamiento de la geometría no permite, necesariamente, desarrollar estas habilidades en los estudiantes. Particularmente, al centrar la atención en ciertos objetos matemáticos como el de homotecia es posible observar que el énfasis está puesto en aplicar técnicas y fórmulas más que en concebir a la homotecia como una relación entre perspectiva e infinidad de transformaciones geométricas que puede tener un cuerpo o figura.

Una revisión de los materiales entregados por el MINEDUC muestra que, para el contenido de homotecia, se enfatiza el uso de proporcionalidad, particularmente de razón, para obtener figuras homotéticas como resultado de una transformación en el plano –lo que conlleva a una concepción estática de la homotecia de figuras homotéticas fijas (Lemonidis, 1990)–. Esto lleva a cuestionar si la utilización de razón y proporción propicia en el estudiante la comprensión de la homotecia para resolver problemas de la vida cotidiana. Por el contrario, una exploración epistemológica de la homotecia muestra cómo sus aplicaciones se relacionan con la necesidad de dibujar objetos distantes y la fabricación de máquinas que facilitaban esta tarea (Bartolini Bussi y Maschietto, 2007). En estos escenarios, la homotecia se convierte en un medio para replicar o calcular segmentos de objetos medibles solamente a través de una proyección. La homotecia surge bajo una idea de movimiento y transformación de figuras en el plano y en el espacio que hicieron posible el estudio del dibujo en perspectiva y la geometría proyectiva.

Esta revisión también expresa la importancia de desarrollar habilidades matemáticas (MINEDUC, 2015) y habilidades del siglo XXI (ver MINEDUC, 2019). Ambas habilidades son reconocidas como necesarias para la alfabetización matemática del ciudadano productivo al jugar "un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos" (MINEDUC, 2015, p. 97). Por ejemplo, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares debe escapar de la aplicación de técnicas y memorización de fórmulas para moverse hacia resolver problemas de la vida diaria. Aquí, la resolución de problemas es considerada como un eje vertebral para adquirir una "buena educación matemática" (MINEDUC, 2015), que implica usar estrategias, comprobar, comunicar, experimentar, inventar, tomar decisiones, representar, modelar, simular, evaluar, etc. Para el MINEDUC (2015), la resolución de problemas también fomenta el pensamiento autónomo, reflexivo, crítico y creativo dado que "muchas veces lo que más aporta en el aprendizaje… [es] el proceso de búsqueda creativa de soluciones" (p. 97). Ambas habilidades se nutren entre sí para conformar el ciudadano. De esta forma, el objetivo de este artículo es explorar cómo una aproximación alineada a la teoría de situaciones didácticas sobre la homotecia, utilizando las herramientas digitales actuales, podría servir como puente para acercar al estudiante a la homotecia y darle sentido a su estudio junto con desarrollar habilidades matemáticas y habilidades del siglo XXI.

2. Exploración curricular

Una exploración de los textos escolares distribuidos por el MINEDUC a establecimientos públicos y subvencionados de Chile permite observar una visión acotada sobre la geometría escolar. Esta visión conlleva al surgimiento de ciertas discordancias en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar. Esta exploración se centra en la homotecia como eje vertebral para ejemplificar las discordancias que emergen al contrastar el tipo de habilidades que los estudiantes deben desarrollar (según las guías curriculares) y los ejercicios propuestos para la enseñanza de la homotecia en los textos escolares.

Según la estructuración curricular, la homotecia corresponde a los contenidos de Primer Año de Enseñanza Media (14-15 años), la exploración de los textos escolares –Guía Didáctica Docente (GDD) (Arancibia, 2021) y Texto del Estudiante (TdE) (Fresno et al., 2021)– corresponde a ese nivel escolar. La GDD es un texto dirigido a los docentes como complemento al TdE (los estudiantes no tienen acceso a la GDD). En la GDD se sugiere abordar la homotecia como una "transformación geométrica" que permite obtener "una figura proporcional a la original que es igual respecto a su forma" (Arancibia, 2021, p. 247). Se propone un tiempo estimado de 30 horas pedagógicas para abarcar la homotecia en conjunto con el teorema de Tales (Lección 8 de la Unidad 3) y desarrollar las habilidades matemáticas de *identificar, explicar, representar, comparar, calcular, resolver, construir, analizar, evaluar y crear.* Dado el interés por vincular el conocimiento matemático con las preocupaciones actuales a nivel nacional e internacional, el estudio de la homotecia se vincula al tema central de la Unidad 3: el medio ambiente. Con esto se espera que la enseñanza de la homotecia se articule bajo una reflexión sobre la importancia del cuidado y preservación de la naturaleza. En el TdE, la homotecia se aborda al vincular elementos claves como el quinto postulado de Euclides y puntos de fuga: "el quinto postulado de Euclides indica que por un punto exterior a una recta paralela pasa una única paralela […] el punto de fuga se relaciona con la geometría no euclidiana, ya que las paralelas convergen por la perspectiva utilizada" (Fresno et al., 2021, p. 104). Esta descripción se acompaña con una imagen en perspectiva de las vías de ferrocarril en San Pedro de Atacama, en la que las vías paralelas parecen converger en el horizonte.

2.1 Primer acercamiento a Homotecia

La GDD sugiere que, para resolver problemas de homotecia, los estudiantes requieren repasar operatoria con números racionales, razones y proporciones y ecuaciones lineales. De esta manera, el TdE inicia con una serie de ejercicios para *motivar y activar ideas previas*. Los estudiantes deben operar con números racionales, determinar valores desconocidos mediante proporcionalidad y resolver problemas de proporciones en contextos diversos (ver Arancibia, 2021). Además, en la GDD se sugiere explicar "la importancia del uso de las proporciones en la elaboración de planos en arquitectura y mapas de geografía" (Arancibia, 2021, p. 245). Posteriormente, en el TdE aparece una actividad con la que se espera profundizar la noción de proporcionalidad al examinar similitudes en una fotografía del Parque Nacional Conguillío en la Araucanía. En esta imagen se observa un conjunto de araucarias (árboles nativos de la Región de Arauco) a diferentes distancias del observador, los estudiantes deben responder si es posible generar imágenes conservando la forma al aumentar o disminuir proporcionalmente su tamaño para introducir la noción de homotecia. La siguiente figura (Figura 1) presenta una actividad que espera acercar a los estudiantes a identificar ciertos elementos claves en la imagen de los pinos, algo que resulta más explícito al dibujar las líneas punteadas (ello indica que la respuesta espera una transformación geométrica específica).


Un pino corresponde a un tipo de árbol con tronco fuerte y rugoso, cuyas hojas son estrechas y parecen agujas. Existen más de 100 especies de pinos y están repartidas por todo el mundo en diferentes continentes. Algunos pinos se encuentran casi extintos y requieren que sean protegidos en parques nacionales para asegurar su bienestar.

Observa la siguiente imagen, y luego responde.

- ¿En qué se parecen los dos pinos?
- ¿Cómo podrías obtener el pino de la derecha a partir del de la izquierda?
- Investiga junto con tus compañeros acerca de si los pinos producen algún efecto negativo o positivo en el medioambiente chileno. Argumenta tu respuesta.

Figura 1. Introducción de Homotecia.

Nota. Texto del Estudiante, Primer Año Medio (Fresno et al., 2021, p. 107).

Esta actividad es seguida por la definición escrita de homotecia. La definición expone términos con los que los estudiantes deben familiarizarse para resolver los problemas propuestos durante el desarrollo de la unidad, tales como transformación geométrica, ampliar, reducir, razón de homotecia y centro de homotecia:

> Una homotecia es una **transformación geométrica** en la que se obtiene una figura a partir de **ampliar** o **reducir** otra, multiplicando cada trazo por un mismo valor distinto de 0, llamado **razón de homotecia**, con lo que la imagen obtenida conserva la forma de la original en el mismo sentido o invertida, por tanto, sus trazos son proporcionales y la unión de los puntos homólogos convergen en un punto llamado **centro de homotecia**. (Fresno et al., 2021, p. 107)

A continuación (Figura 2), el TdE presenta un ejemplo para conectar proporcionalidad y homotecia, ubicando algunos elementos mencionados en la definición, como centro de homotecia.

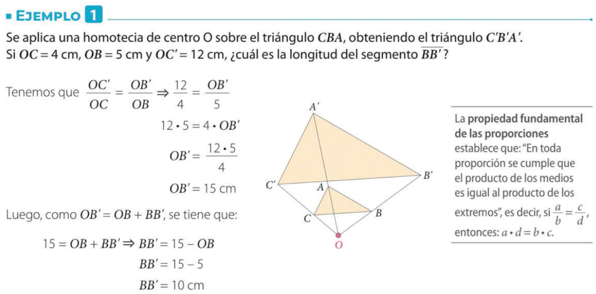


Figura 2. Ejemplo de Homotecia.

Nota. Texto del Estudiante, Primer Año Medio (Fresno et al., 2021, p. 107).

Finalmente, la proporcionalidad se utiliza para establecer la razón de homotecia (k), que se define en el TdE como el cociente entre las distancias de la figura original y la imagen respecto del origen:

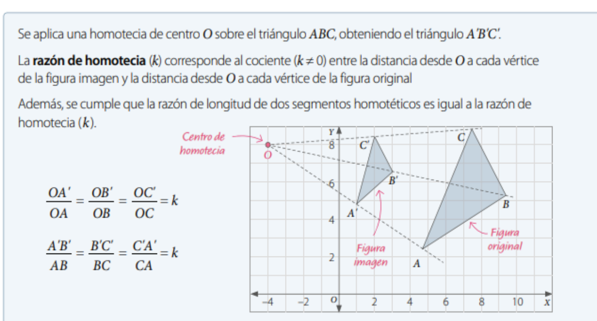


Figura 3. Razón de Homotecia

Nota. Texto del Estudiante, Primer Año Medio (Fresno et al., 2021, p. 108).

Y se mencionan las condiciones para que la razón de homotecia (k) sea inversa o directa:

> Dependiendo de la razón de homotecia con k 0, si k > 0, entonces la homotecia es **directa** y las figuras imagen y original quedan en el mismo lado respecto del centro O, mientras que si k < 0 es **inversa** y las figuras imagen y original quedan a distintos lados respecto del centro O. (Fresno et al., 2021, p. 110)

3. Discordancias en la enseñanza de la homotecia

Si bien el primer acercamiento a la homotecia propuesto en TdE y GDD guía al estudiante a identificar elementos constitutivos, el resto de esta sección (Fresno et al., 2021, pp. 107-113) reduce la homotecia a: (i) cálculos de cambio de longitud utilizando proporcionalidad (2 problemas), (ii) cálculos de razón de homotecia (4 problemas), (iii) construcción de la figura resultante dada la razón de homotecia (6 problemas), (iv) aplicación del teorema de Tales (1), (v) vínculo con otras materias, artes visuales: puntos de fuga; ciencias naturales: cálculo de longitud (3 problemas). El resto de los ejercicios circulan dentro del mismo espectro de determinar longitudes, razones, etc. En la siguiente figura (Figura 4) se hace una síntesis, en TdE, sobre los elementos claves abordados en la unidad.

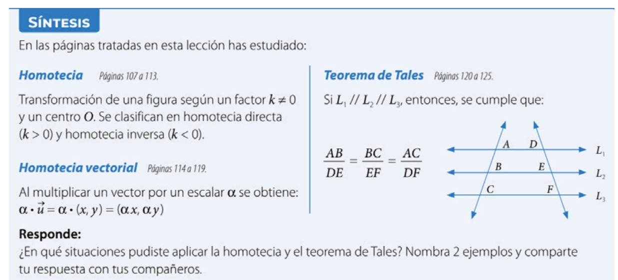


Figura 4. Síntesis de la Lección 8

Nota. Texto del Estudiante, Primer Año Medio (Fresno et al., 2021, p. 108).

Aquí, la homotecia deja de concebirse con la profundidad epistemológica que dio inicio a su formalización como una transformación geométrica y es reducida a un método para calcular razones de proporcionalidad de figuras planas (ver Figura 5). Curricularmente se decide vincular la homotecia con el teorema de Tales, estructurando ambos contenidos en la Lección 8. La Figura 5 muestra un ejemplo de la relación entre razón, proporcionalidad y homotecia mediante el teorema de Tales.

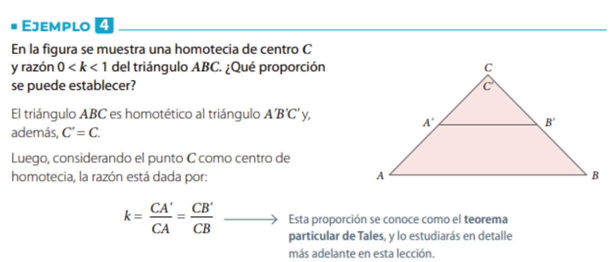


Figura 5. Cálculo de proporciones y teorema particular de Tales.

Nota. Texto del Estudiante, Primer Año Medio (Fresno et al., 2021, p. 109).

Si bien las actividades sugeridas referentes a la homotecia pueden ser resueltas, por ejemplo, utilizando la función lineal de homotecia al reconocer el factor de homotecia, o la distancia entre puntos, estas no son instrucciones declaradas ni en la GDD ni en el TdE. Tal como se observa en el siguiente ejercicio, propuesto en la sección de evaluación (Figura 6), los estudiantes deben operar con conocimientos sobre razón. Este tipo de problemas no están enmarcados dentro del Objetivo de Aprendizaje (OA) propuesto para esta Unidad: OA8. En OA8 se declara que los estudiantes demuestran comprensión del concepto de homotecia cuando (1) la relacionan con perspectiva, el funcionamiento de instrumentos ópticos y el ojo humano, (2) miden segmentos adecuados para determinar las propiedades de la homotecia, (3) aplican propiedades de la homotecia en la construcción de objetos, de manera manual y/o software educativo y (4) resuelven problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas (ver Arancibia, 2021). Esto deja en manifiesto una discordancia sobre lo que curricularmente se declara como aprendizaje esperado y la forma en la que se enuncian los problemas que los estudiantes deben resolver. Una posible explicación se basa en la profundidad con la que un conocimiento matemático es presentado en los materiales curriculares y la importancia para la formación de un ciudadano productivo que se desprende de la comprensión de un contenido matemático específico. En el caso de la homotecia, la importancia se enuncia respecto a aplicaciones relacionadas a la perspectiva, replicar y construir objetos, etc., que podrían tomar relevancia, por ejemplo, para arquitectura y dibujo técnico o entender el funcionamiento de cámaras fotográficas y maquinaría de optometría. Sin embargo, en un contexto escolar, se decide abordar la homotecia como un medio para calcular longitudes y razones en las que una figura varía respecto de su imagen.

A un triángulo de vértices $A(-2, 4)$, $B(-4, 6)$ y $C(-4, 2)$ se le aplica una homotecia de centro O y valor de razón k, obteniéndose como imagen otro triángulo de vértices $A'(4, 4)$, $B'(8, 0)$ y $C'(8, 8)$.

a. ¿Cuáles son las coordenadas del centro O?

b. ¿Cuál es el valor de razón de homotecia?

Figura 6. Ejercicio Propuesto en la Parte de Evaluación

Nota. Texto del Estudiante, Primer Año Medio (Fresno, 2021, p. 109).

El trabajo con la homotecia en el TdE no menciona conceptos como función de proporcionalidad o la propiedad de colinealidad entre los puntos. La propuesta curricular se construye desde la utilización de la proporcionalidad entre trazos a través de las razones en detrimento de la relación OA''=kOA o la función de homotecia. Más aún, en los ejercicios propuestos en el TdE, se deja entrever que la homotecia es una transformación geométrica estática (dado que k es fijo o se calcula a partir de la razón entre segmentos dados). Ello obstaculiza la concepción de la homotecia como infinitas imágenes (derivada de la función de homotecia). Esto constituye otra discordancia en la que el conocimiento matemático se ve reducido al punto de volverse una herramienta para el cálculo de elementos más que un conocimiento con aplicabilidad en la vida cotidiana con potencial de activar el pensamiento espacial, métrico, variacional y numérico, dado que se incluye el concepto de medida, formas geométricas, patrones, escalas, razones y proporciones, entre otros (Castro Cortes y Jaramillo Riascos, 2019).

Finalmente, no es explícito cómo la propuesta curricular en TdE y GDD permite desarrollar las habilidades matemáticas declaradas para esta unidad. Hay indicios de acuerdo con el verbo que se utiliza para cada enunciado, pero no es evidente para todas las habilidades comprometidas en la Unidad 3.

4. Propuesta didáctica

De la exploración anterior, se logra reconocer la necesidad de proponer problemas que permitan a los estudiantes identificar, autónomamente, los elementos constitutivos de la homotecia en situaciones que involucren un contexto cercano. A su vez, se reconoce la necesidad de proponer actividades enfocadas en el desarrollo de habilidades matemáticas y habilidades del siglo XXI más que en el cálculo repetitivo de, por ejemplo, la razón de homotecia. Estas necesidades se identifican al contrastar los aprendizajes esperados que se declaran en documentos oficiales del MINEDUC con las actividades sugeridas en los textos escolares (GDD y TdE). Por ejemplo, la reducción del concepto de homotecia en el currículo escolar, al convertirse en un saber a enseñar, genera que ciertos elementos no sean el foco de las actividades propuestas en los materiales curriculares.

La exploración curricular lleva a diseñar una propuesta sustentada en dos referentes conceptuales fundamentales: Estudio de Clases (EdC) (Isoda y Olfos, 2009) y Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1998). Se comenzó por el supuesto de que los ciclos del EdC y las fases de la TSD contribuyen a generar las condiciones para el desarrollo de las habilidades matemáticas y del siglo XXI. Por un lado, el EdC es un recurso de investigación en acción que favorece las capacidades de docentes de reflexionar sobre su propia práctica docente (Isoda y Olfos, 2009), impactando positivamente en los aprendizajes de los estudiantes al robustecer y afinar la mirada del profesorado durante el proceso de enseñanza. En esta propuesta, el EdC contribuye a generar un espacio en donde el estudiante deba posicionarse en el rol del observador (centro de homotecia) para resolver problemas de homotecia y, de esta manera, lograr construir su propio conocimiento matemático a partir de conocimientos y experiencias previas. La situación fue diseñada por dos profesoras de Matemáticas siguiendo los ciclos del Estudio de Clases (ver Isoda y Olfos, 2009): *i) Identificación del problema:* se consideró la profundidad con la que se aborda la homotecia en la escuela y el escaso material didáctico y propuestas de aprendizaje planteados por expertos, vale decir, educadores matemáticos. *ii) Planificación* *de la clase:* se propuso una clase enfocada a introducir el concepto de homotecia en concordancia con OA8 presentado en los lineamientos curriculares del MINEDUC. *iii) Implementación*: la clase diseñada fue implementada con un grupo de estudiantes. Esta implementación permitió validar la propuesta de aprendizaje y robustecer ciertos puntos para fortalecer la construcción del concepto de homotecia y el desarrollo de las habilidades matemáticas y del siglo XXI. *iv) Evaluación de la clase y satisfacción con los resultados:* la implementación de la clase fue analizada en conjunto con un grupo de siete profesores de Matemáticas en ejercicio y un académico experto en Estudios de Clases, ello permitió reestructurar la propuesta y redefinirla según los criterios conversados en conjunto. *v) Reconsideración de la clase:* esta reconsideración permitió abrir un segundo ciclo de EdC, que consistió en reajustar la planificación de la clase e implementarla a un grupo diferente de estudiantes, generando la propuesta didáctica presentada y respuestas exploradas en este artículo.

Por otro lado, la TSD (Brousseau, 1998) constituye el fundamento teórico de la propuesta. La propuesta se planteó con el fin de propiciar un *medio* que genere un *conflicto cognitivo* en los estudiantes, dado que el saber se genera, por un lado, mediante procesos de modificación, ruptura y adaptación y, por otro, mediante procesos de interacción con pares (Brousseau, 1998). Las preguntas planteadas fueron diseñadas siguiendo las fases de una situación didáctica: acción, formulación y validación, de manera tal que los estudiantes logren construir una noción inicial de homotecia a partir de la interacción entre pares y no mediante la intervención e instrucción docente. Así, la intervención del docente pierde protagonismo para escapar del fenómeno reconocido como "la obligación social de enseñar" de la profesión docente, rompiendo el contrato didáctico (Brousseau, 1998, p. 73). La TSD, además de propiciar el aprendizaje autónomo de los estudiantes, permite el desarrollo de habilidades matemáticas tales como resolver problemas y argumentar y comunicar. Desde los OA en su dimensión cognitivo-intelectual, se espera que los estudiantes expongan ideas, opiniones, experiencias de manera coherente y fundamentada y así formar estudiantes más autónomos, participativos, reflexivos de su propio proceso de aprendizaje (Castillo y Popayán, 2018).

Etapa 1: Actividad inicial

La primera actividad de la propuesta didáctica consiste en que los estudiantes identifiquen mediante tres fotografías la réplica de la imagen original del Arco Británico. Se entregan tres figuras impresas a los estudiantes y se les comenta que solo una de ellas es la réplica de la figura original. La pregunta enunciada es: ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde a la réplica? Justifique su elección. Con esta actividad se espera activar conocimientos previos de proporcionalidad e impulsar una idea intuitiva de semejanza, además de propiciar las habilidades de argumentar y comunicar, resolver problemas y las habilidades del siglo XXI de maneras de pensar (creatividad y pensamiento crítico) y maneras de trabajar (colaboración y comunicación).

Etapa 2: Actividad central

Se enfrenta a los estudiantes a una situación específica en la que un arquitecto debe tomar las medidas del Arco Británico para diseñar un nuevo arco. En el enunciado se presentan las medidas tomadas por el arquitecto y la distancia a la que se encuentra del arco. Posteriormente, se enuncian tres preguntas que los estudiantes deben resolver, con el apoyo de un Applet en Geogebra.

Pregunta 1. Encontrar medidas para la réplica: ¿Cuáles serían las dimensiones del nuevo arco, si este debe situarse en las mismas líneas de proyección desde el lugar donde se encuentra observando? Escriba todas las opciones posibles.

Pregunta 2. Establecer una relación entre las distancias: ¿Qué relación puedes observar entre las distancias desde el punto de observación hacia los puntos extremos del arco original y la distancias desde el punto de observación hacia los nuevos arcos?

Pregunta 3. Encuentre una expresión que permita representar la situación.

Con estas preguntas se espera impulsar las habilidades matemáticas de resolver problemas y representar y las habilidades del siglo XXI de herramientas para trabajar (alfabetización en tecnologías digitales de la información), maneras de pensar (pensamiento crítico y metacognición) y de maneras de trabajar (colaboración y comunicación).

Etapa 3: Plenario

Esta sección corresponde a la fase de validación de la TSD. Aquí, los estudiantes deben compartir, explicar y demostrar sus argumentos y estrategias al resto de los grupos. Los estudiantes deben llegar a acuerdos que no son solamente un intercambio de información, sino que un proceso de cooperación en la construcción de conocimiento matemático. Con ello se espera impulsar el desarrollo de habilidades de resolver problemas y argumentar y comunicar y las habilidades del siglo XXI de maneras de pensar (pensamiento crítico y metacognición) y de maneras de trabajar (colaboración y comunicación).

5. Experiencia de aula

La propuesta de aprendizaje fue aplicada a un grupo de 17 estudiantes de Segundo Año Medio de un establecimiento educacional particular subvencionado de la ciudad de Viña del Mar. Los 17 estudiantes se dividieron en 6 grupos: G_1 (E_1, E_2, E_3), G_2 (E_4, E_5, E_6), G_3 (E_7, E_8, E_9), G_4 (E_{10}, E_{11}, E_{12}), G_5 (E13, E_{14}) y G_6 (E_{15}, E_{16}, E_{17}). La experiencia de aula evidenció la necesidad de enfrentar a los estudiantes a actividades que permitan desarrollar no solo las habilidades matemáticas declaradas por el MINEDUC, sino que también las habilidades del siglo XXI. En esta sección se presentan las categorías bajo las cuales se examinaron las respuestas de los estudiantes, además de profundizar en episodios vivenciados en esta implementación de la propuesta de aprendizaje.

4.1 Categorías de análisis

Una vez implementada la propuesta de aprendizaje, se levantaron categorías de análisis para examinar la producción de los estudiantes durante las fases de acción, formulación y validación. Ello permite explorar con mayor detenimiento el acercamiento de los estudiantes hacia el concepto de homotecia y, a su vez, cómo construyen la noción de homotecia a partir de sus conocimientos previos.

Tabla 1. Categorías de Análisis

Fase de la TSD	Criterio	Descripción del criterio de análisis
Fase de acción	*C1*: Idea intuitiva de semejanza y proporción.	Identifican características referidas a su forma de la réplica.
	C2: Elementos relacionados con la proporción.	Hacen referencia al crecimiento de la figura, mencionan características asociadas al crecimiento proporcional como proporcionalidad, escala, factor de crecimiento.
	C3: Crecimiento de la réplica.	Dibujan réplicas más grandes, escriben medidas mayores de la réplica.
Fase de formulación	*C4*: Representar desde diferentes registros, medidas o argumentos para la réplica, desde lo proporcional o desde la semejanza.	Representan medidas o en su escrito se observa de manera explícita o implícita la utilización de un factor de proporcionalidad o palabras como amplificación y escala, para referirse al crecimiento de la figura.
		Dan ejemplos del incremento proporcional.
	C5: Representar medidas para la réplica correspondientes a sumar una cantidad constante.	Suman una misma cantidad a las medidas iniciales de la réplica.
	C6: Identificar infinitas posibilidades para las medidas de la réplica.	Dan respuesta de infinitas medidas para la réplica.
		Representan en una expresión algebraica de manera explícita o implícita las infinitas posibilidades.
Fase de validación	*C7*: Manifestación de forma verbal o escrita el factor de homotecia.	Expresan medidas de la réplica utilizando un factor, como el doble, triple, etc., o utilizando otro factor de multiplicación.
		Manifiestan que las medidas del arco se encuentran multiplicando por un mismo factor todas las medidas originales de la réplica.
	C8: Interpretación de la linealidad.	Explican que hay infinitas posibilidades para la réplica mencionando rectas, dando varios ejemplos, mostrando el Applet.
		Identifican la línea de proyección, rectas, por dos puntos una única recta.
		Mencionan que el foco (el observador), un punto de la réplica original y un punto de la nueva réplica están en una misma línea de proyección.
	C9: Manifestación de la relación de homotecia.	Muestran cálculos utilizando el teorema de Pitágoras, semejanza para calcular las distancias.
		Representan una expresión numérica, algebraica o verbal para mostrar la relación de homotecia, donde se manifiesta el factor de homotecia.

Nota. Elaboración propia.

La evidencia recopilada en las etapas 1 y 2 (producciones escritas de los estudiantes) y en la etapa 3 (registro audiovisual) fue clasificada según las categorías planteadas en la Tabla 1. La clasificación de las evidencias de cada grupo está presentada en la siguiente tabla.

Tabla 2

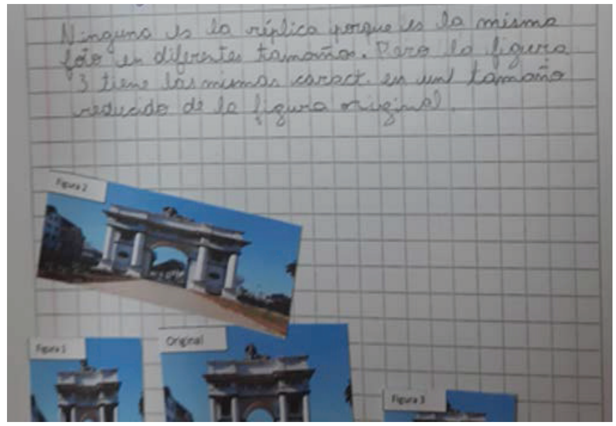
Categorización de Grupos

Grupo	Etapa 1	Etapa 2			Etapa 3
		P1	P2	P3	
G_1	C1	C4, C6	C4	C9	C7, C9
G_2	C1	C5	C8	C9	C7
G_3	C1	C4	-	C9	C7
G_4	C2	C1	-	-	C7
G_5	C2	C5	C7	-	C7, C8
G_6	C1, C2	C5	C7	C9	C7

4.2 Producciones de los estudiantes

A continuación, se presenta un análisis sobre las respuestas de G_6, de manera de seguir con mayor detenimiento la forma en la que los estudiantes construyen el concepto de homotecia. Se seleccionó a G_6, ya que el progreso de este grupo conlleva a elaborar conclusiones y argumentos que permiten identificar las habilidades implicadas en la construcción del concepto de homotecia. Las etapas 1 y 2 serán presentadas con la evidencia escrita de G_6 y la etapa 3 será presentada con transcripciones de las interacciones entre los estudiantes y la profesora a cargo de la implementación.

En la etapa 1, las producciones escritas de los seis grupos permiten un acercamiento a la toma de decisiones sobre tres imágenes. La Tabla 2 muestra que las respuestas de los estudiantes aluden a una idea intuitiva relacionada a semejanza y proporcionalidad (C1 y C2). Es decir, los estudiantes se centran en ciertas características de la figura (por ejemplo, crecimiento o disminución), lo que les permite activar conocimientos previos sobre proporcionalidad. Aquí, los estudiantes, al expresar cuál de esas imágenes es una réplica del Arco Británico, exhiben indicios de habilidades de colaboración, comunicación, argumentación y creatividad. La respuesta de G_6 lleva a una discusión sobre qué condiciones debe tener la réplica de una figura, ello les permite concluir que una réplica es aquella que tiene el mismo tamaño que la original, por lo que ninguna de las tres figuras es la réplica. Posteriormente, deciden que la figura 3 conserva "las mismas características" (C1) y proporciones (C2), pero en distinto tamaño.

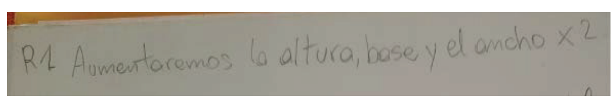


Ninguna es la réplica porque es la misma foto en diferente tamaño. Pero la figura 3 tiene las mismas características en un tamaño reducido de la figura original.

Figura 7. Respuesta Primera Etapa

Nota. Evidencia de G_6.

En la etapa 2, los estudiantes deben tomar decisiones relativas al cálculo de las medidas para una o más réplicas de mayor tamaño. La noción de semejanza y proporcionalidad se materializa en formulaciones que permiten proponer una expresión algebraica además de identificar las líneas de proyección desplegadas. Tal proceso se logra mediante el trabajo colaborativo de los grupos, resultado de la manipulación de un Applet de Geogebra. Por ejemplo, en la pregunta 1 (ver Tabla 2), los estudiantes se ubican en categorías sobre la utilización del factor de proporcionalidad (C4), encontrando las medidas de la réplica mediante la adición de una cantidad fija a cada medida (C5). La estrategia de G6 consiste en aumentar las dimensiones del arco utilizando factor 2. Aquí, a pesar de no obtener una medida específica, G_6 consigue mostrar algunos elementos de la homotecia, tales como aumentar utilizando el factor de homotecia (C4).

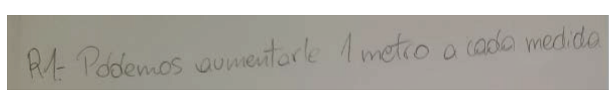


R1 Aumentaremos la altura, base y el ancho x 2.

Figura 8.Respuesta Etapa 2 (P1)

Nota. Evidencia de G_6.

Sin embargo, cuando se les plantea dar una medida diferente para la réplica, los estudiantes proponen aumentar en un metro cada medida del arco (ver Figura 9).

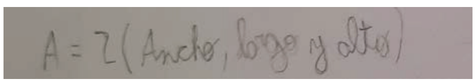


R1. Podemos aumentarle 1 metro a cada medida.

Figura 9. Respuesta Etapa 2 (P1)

Nota. Evidencia de G_6.

Esta respuesta permite observar que, aún cuando G6 utiliza argumentos que permiten suponer el reconocimiento de ciertos elementos (como aumento), otros elementos (como el factor) se diluyen y parecen no tan claros. Más concretamente, el aumento propuesto por G6 hace que las nuevas dimensiones del arco no aumenten de manera proporcional. De esta forma, se logran establecer momentos en los que ocurren quiebres cognitivos (en este caso con respecto a la proporcionalidad). La búsqueda de las dimensiones de la nueva réplica, que, además, cumplan con las condiciones planteadas en el problema, permite que los estudiantes analicen sus formulaciones y replanteen su respuesta, dando indicios de habilidad de resolver problemas, representar, pensamiento crítico, metacognición, colaboración y comunicación. Es así como G6 vuelve a la idea anterior de utilizar un factor de aumento (ver Figura 10), afinando sus estrategias.

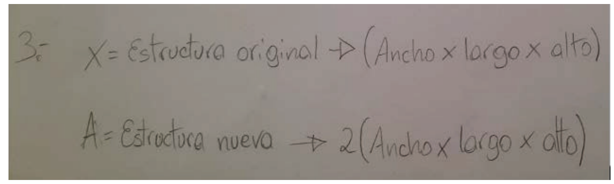


A = 2 (Ancho, largo y alto)

Figura 10. Respuesta Segunda Etapa (P2)
Nota. Respuesta de G_6.

G_6, por consiguiente, manifiesta de manera más explícita el factor de homotecia (C7) al proponer una medida específica para la nueva réplica, logrando aproximarse a la relación de homotecia. Esta propuesta de G6 se comprueba mediante la manipulación del Applet de Geogebra, donde los estudiantes pueden contrastar sus formulaciones en sus teléfonos móviles, desplegando habilidades de resolver problemas, alfabetización en tecnologías digitales de la información, pensamiento crítico, colaboración y comunicación.

A continuación, los estudiantes deben proponer una relación que logre expresar (matemáticamente) las dimensiones originales del arco y las de la réplica. La propuesta de G_6 manifiesta un acercamiento considerable a la relación de homotecia (C9). A pesar de que no está representada explícitamente, se interpreta que A (la "estructura nueva") se refiere a réplicas del arco mediante la multiplicación de factor 2 a todas las dimensiones del arco original. En esta evidencia, G_6 formaliza su respuesta al relacionar la figura inicial con la nueva figura. Por otra parte, es posible observar que los estudiantes manifiestan una relación lineal. Es decir, contrario a proponer la razón de homotecia como un cálculo de proporcionalidad directa (como aparece en los textos escolares), los estudiantes proponen una relación lineal: un factor multiplicado a las tres dimensiones.



3.- X = Escritural original -> (Ancho x largo x alto)
A = Estructura nueva -> 2 (Ancho x largo x alto)

Figura 11 . Respuesta Etapa 2 (P3)
Nota. Evidencia Grupo G_6.

En la etapa 3, los estudiantes expresan verbalmente sus respuestas y las contraponen con los demás grupos. A pesar de que la mayoría de los grupos logra expresar verbalmente el factor de homotecia (C7), algunos estudiantes presentaron dificultades al expresar relaciones o conjeturas de manera escrita (en términos matemáticos). En esta etapa se observa cómo el justificar argumentos y escuchar a otros permite la reestructuración y robustecimiento de respuestas escritas y ampliación de vocabulario. G6 verbaliza y justifica las respuestas propuestas, expresando la decisión de retomar la idea inicial de utilizar el factor para aumentar las dimensiones del arco y representar la relación como una multiplicación y no como una adición. Por ejemplo, en el siguiente extracto del plenario:

> **E16**: *Nosotros primero fuimos agregando de 2 en 2, pero vamos viendo el largo, el ancho y la altura, pero a cada medida el largo, el ancho y la altura algunas veces le sumábamos 2 a las 3 medidas y otras veces le sumábamos 2 al largo, 1 al ancho y dejábamos la altura igual entonces llegamos a la misma conclusión que el grupo de Vicente, ya si es que el nuevo arco las medidas llegaran a ser diferentes, tenían que ser intercaladas las medidas si el nuevo arco fuera diferente.*
> **P:** *¿A qué te refieres con intercaladas las medidas?*
> **E17:** *No deberíamos sumar las mismas de siempre porque al final no va a quedar como una réplica.*
> **P:** *Y, ¿cuándo quedaría como una réplica?*
> **E17:** *Una réplica, así réplica completa, debería ser las mismas medidas. 10, 5, 12 metros, así recién sería una réplica verdadera.*

En primer lugar, es posible observar que los estudiantes verbalizan sus estrategias en una interacción que los lleva a comprender y respaldar las opiniones de otros estudiantes y a defender sus propios posicionamientos utilizando argumentos que no son necesariamente matemáticos. Tal interacción de G6, producto de ensayo y error en el Applet de Geogebra, genera una discusión que hace posible identificar elementos que constituyen la homotecia.

El extracto anterior muestra cómo los estudiantes, a través de compartir sus estrategias, descartan ciertas maneras de abordar el problema que no satisfacen las condiciones declaradas en la actividad: la figura resultante debe ser una réplica. Por ejemplo, al preguntarse ¿cuándo la figura resultante corresponde a una réplica exacta? (considerada, por G6, como la figura que conserva las medidas originales), los estudiantes de G_6 comienzan a utilizar estrategias para amplificar las medidas del arco original sin que cambie la forma. El compartir las opiniones de otros grupos en un plenario (fase de validación), lleva a que G_6 reconozca, en otras estrategias, que el factor homotecia sucede en la multiplicación (algo que ellos expresaron en escrito como suma, pero que enunciaron verbalmente como que el "agregar" implicaba multiplicar una constante a todas las dimensiones del arco). Ello revela que, en algunos casos, los estudiantes expresan más claramente sus razonamientos de manera verbal que escrita en lenguaje matemático. Es decir que, probablemente, lo que los estudiantes expresan de forma escrita (matemáticamente) no es necesariamente lo que entienden o piensan al resolver un problema. En este sentido, es necesario explorar cómo las actividades sugeridas para el eje de geometría potencian el desarrollo de habilidades de modelación matemática.

En segundo lugar, el uso de herramientas tecnológicas, como complemento de la propuesta de aprendizaje elaborada, generó un escenario en el que los estudiantes comenzaron a validar sus formulaciones en conjunto. La manipulación del Applet de Geogebra, que los estudiantes tenían en sus teléfonos móviles, les proporcionó la posibilidad de explorar y observar las transformaciones geométricas de la figura original a la figura imagen, además de observar la relación entre el plano 2D y 3D y el crecimiento de la réplica.

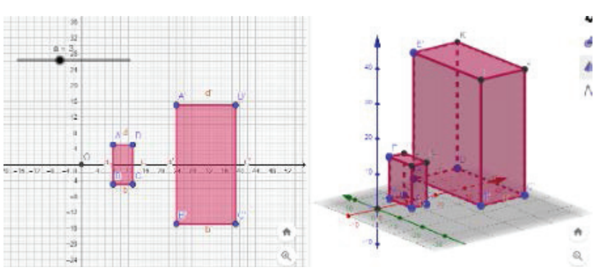


Figura 12. Imagen de Applet que Muestra la Situación en una Vista 2D y 3D. Nota. Una de las posibles vistas que observan los estudiantes.

El proceso llevado a cabo por los estudiantes en el desarrollo de la situación planteada, que en este caso es una situación contextualizada cercana a ellos, permite que resuelvan el problema de manera autónoma y colaborativa. Ellos buscan estrategias y comprueban sus formulaciones mediante la utilización del Applet de GeoGebra que simula la situación (Figura 12). El rol del profesor, en este caso, no es el de intervenir en la toma de decisiones y exploración de los estudiantes, sino que en guiarlos mediante preguntas planteadas (proceso de devolución) cuando ellos requieran asistencia, de modo de entregar la responsabilidad al estudiante de dar solución al problema. Por ejemplo, cuando los estudiantes consultan qué es una réplica al inicio de la implementación, la docente, en lugar de dar una respuesta directa invita a los estudiantes a reflexionar sobre el caso de Antman (superhéroe de Marvel). Los aportes de cada integrante del grupo resultan fundamentales para establecer estrategias al exponer sus hallazgos, por lo cual es vital que las intervenciones del docente no intercedan en la autonomía de los estudiantes.

La TSD aporta en el desarrollo de habilidades como argumentar y comunicar, ya que en la fase de validación los estudiantes deben probar, explicar y comunicar los hallazgos y estrategias utilizadas (Panizza, 2003). Cuando los estudiantes intentan explicar cómo encuentran una regularidad en sus conclusiones, dejan de manifiesto el proceso que los llevó a interactuar y tomar decisiones en conjunto. Este proceso no se trata solo de comunicar algo, sino de cooperar con los demás grupos en la búsqueda de una solución que represente la situación y en la cual puedan estar de acuerdo y se sientan partícipes (Kuzniak, 2005).

5. Conclusiones

Al enmarcar la propuesta de aprendizaje en la TSD se esperaba que los estudiantes se acercaran al concepto de homotecia al identificar los elementos que la constituyen y, además, impulsar el desarrollo de habilidades declaradas en el currículo nacional. Para potenciar el desarrollo de habilidades matemáticas y del siglo XXI se propone una actividad introductoria al concepto de homotecia que no presente las definiciones ni conduzca las estrategias de los estudiantes, a diferencia de los textos escolares explorados. De esta manera, se espera que los estudiantes sean capaces de poner en juego un conjunto de habilidades y conocimientos previos. Los estudiantes logran tomar decisiones colaborativamente que los llevan a mostrar respuestas en torno a las preguntas planteadas en el problema. La utilización de la herramienta tecnológica, en este contexto, permitió la exploración y comprobación de conjeturas en relación con las medidas de las posibles réplicas. Por ejemplo, en la segunda etapa, los estudiantes se enfrentan a un escenario nuevo (distinto a lo que están habituados producto del contrato didáctico) en el que deben proponer estrategias, aquí surge orgánicamente el uso del Applet como simulación para explorar posibles respuestas o comprobar estrategias planteadas.

Con respecto a la construcción de homotecia, los estudiantes sí lograron identificar elementos expresados en la definición de homotecia propuesta en el TdE, tales como ampliar y reducir conservando la forma, centro de homotecia, razón de homotecia y líneas de proyección. Además, pusieron en juego conocimientos previos declarados en la GDD: razón y proporción, ecuación lineal. Sin embargo, esta propuesta evitó las discordancias respecto a la reducción de la homotecia y al logro de los aprendizajes esperados. Los estudiantes no solo concluyeron que la homotecia correspondía a una función lineal, sino que plantearon las infinitas posibilidades que ello conlleva. En el plenario se discutió sobre las infinitas réplicas que puede tener el Arco Británico dependiendo de la razón de homotecia que se aplique (variación de k en la expresión lineal de la homotecia). Este elemento no es abordado en los materiales curriculares propuestos por el MINEDUC, pero brinda un entendimiento más profundo (respecto a la aplicabilidad de la homotecia en la vida diaria) y alineado con la epistemología de la homotecia.

La discordancia respecto a las habilidades desarrolladas se evitó producto del énfasis dado a potenciar habilidades matemáticas y del siglo XXI. Se puso especial atención al desarrollo de habilidades matemáticas como resolver problemas, representar y argumentar y comunicar que resultan esenciales en la TSD para el éxito de la construcción de un conocimiento matemático y el rompimiento del contrato didáctico. La habilidad de argumentar y comunicar se puede relacionar con la habilidad del siglo XXI de maneras de trabajar. Ambas habilidades permiten, mediante la colaboración y comunicación, argumentar ideas matemáticas que se complementan para llegar a acuerdos y tomar decisiones. Por ejemplo, durante el desarrollo de la actividad se observa que cada integrante de G6 tiene acceso a la información necesaria para responder las preguntas. Vale decir, cualquiera de ellos está en condiciones de proponer una solución, pero lo hacen en conjunto. En el plenario los estudiantes comparten un mensaje consistente respecto a la homotecia, exponiendo el coeficiente de similaridad o factor de homotecia y representando una relación escrita que se acerca a la relación formal de homotecia (algo que no se hubiese logrado sin la interacción entre pares). Por otro lado, el uso del Applet permitió no solo la comprobación de estrategias, sino que, además, encontrar regularidades para la formulación de nuevas estrategias. Ello posibilita el desarrollo de la habilidad de alfabetización en tecnologías digitales de información, en la que los estudiantes deben hacer uso de la tecnología como un medio para construir mensajes. De igual modo, las maneras de pensar, que consideran el pensamiento crítico y la creatividad, implican un proceso mental respecto a razonar y evaluar la evidencia dispuesta y proponer soluciones novedosas a un problema en el que se adapten ideas anteriores, habilidades que se potenciaron durante todo el desarrollo de la propuesta, por ejemplo, al promover estrategias e ideas intuitivas en relación con la proporcionalidad y semejanza en la etapa 1.

También es posible encontrar indicios de la habilidad para vivir, particularmente sobre la responsabilidad personal y social, convivir en armonía con los demás, comprender los valores de convivencia con los otros (MINEDUC, 2019). En el desarrollo de la propuesta se observa que, para que ocurra una comunicación óptima de modo que los estudiantes puedan colaborar para resolver el problema planteado en la actividad, se debe generar un clima de convivencia y respeto. La TSD incentiva que sea el propio estudiante quien se haga responsable de dar la solución al problema, aquí se desarrolla la responsabilidad personal y social, ya que cada opinión importa en la búsqueda de estrategias, en este proceso todas las opiniones son respetadas, escuchadas y discutidas por el grupo. Estos trabajos grupales no solamente permiten al estudiante resolver un problema matemático, sino que también lo acercan o lo posicionan en el rol de un ciudadano inserto dentro de una organización social que vela por una convivencia de respeto entre ciudadanos.

Finalmente, la propuesta didáctica presentada en este artículo pretende aportar en una construcción significativa del concepto de homotecia en miras hacia los nuevos programas de educación diferenciada para los grados de Tercero y Cuarto Medio propuestos recientemente por el MINEDUC (2020), específicamente en lo que respecta a la geometría 3D en cuanto a lo específico del conocimiento matemático. A su vez, pretende aportar en plantear actividades que permitan el desarrollo de habilidades reconocidas por el MINEDUC como fundamentales en el proceso de aprendizaje de la matemática escolar. Sin duda alguna, la TSD permite al profesor proponer actividades que puedan abarcar no solamente el conocimiento específico de matemáticas, sino que, también, potencia el desarrollo integral del estudiante.

Agradecimientos

Beca mentor de la Unidad de Práctica de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y beca otorgada por el proyecto FONDECYT N 11190152.

Referencias

Abrate, R., Delgado, G., y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 39*(1), 1-9.

Agencia de Calidad de la Educación. (2015). *Reporte de calidad. Evolución de los indicadores de calidad de la educación en Chile.* Gobierno de Chile.

Arancibia, R. (2021). *Guía Didáctica del Docente. Tomo 2. 1º medio.* Santillana.

Barrantes, M., y Blanco, L. J. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números, 62,* 33-44.

Bartolini Bussi, M., y Maschietto, M. (2007). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola.* Springer.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* La pensée sauvage, éditions.

Brown, T., y Heywood, D. (2011). Geometry, subjectivity and the seduction of language: the regulation of spatial perception. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 351-367. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9281-2

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., y Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.* Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Castillo, V., y Popayán, Y. (2018). Aplicación de la teoría de las situaciones didácticas a las Ciencias Sociales. *Educere, 21*(70), 539-555.

Castro Cortes, A., y Jaramillo Riascos, J. (2019). *Una aproximación al concepto de homotecia a partir de la noción de proporcionalidad geométrica en séptimo grado.* [Tesis Pregrado, Universidad del Valle]. Repositorio digital Univalle. http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/14292

Fresno, C., Torres, C., y Avila, J. (2021). *Texto del Estudiante. 1° Medio.* Santillana.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 2*(3), 11-44.

Gamboa, A., y Ballestero, A., (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare, 14*(2), 125-142. https://doi.org/10.15359/ree.14-2.9

Guevara-Casanova, I., y Burgués-Flamarich, C. (2018). Geometry and Visual Reasoning. Introducing algebraic language in the manner of Liu Hui and Al-Khwãrizmî. En K. Clark, T. Hoff Kjeldsen, S. Schorcht, y C. Tzanakis (Eds.), *Mathematics, Education and History. Towards a harmonious partnership* (pp. 165-192). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3_9

Isoda, M., y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases.* Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Kuzniak, A. (2005). La Theorie des Situations Didactiques de Brousseau. *RERERES-IREM, 61*, 19-35.

Lemonidis, C. (1990). *Conception, realisation et resultats d'une experience d'enseignement de l'homothetie.* [Tesis doctoral, Universidad Luis Pasteur]. National Archive of PhD Theses. http://hdl.handle.net/10442/hedi/3786

Ministerio de Educación de Chile. (2015). *Bases curriculares. 7° a 2° medio.* Gobierno de Chile. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación de Chile. (2019). *Un recorrido por las habilidades para el siglo XXI Gobierno de Chile.* https://www.curriculumnacional.cl/portal/Innovacion/Desarrollo-docente/86740:Un-recorrido-por-las-habilidades-para-el-siglo-XXI

Ministerio de Educación de Chile. (2020). *Programa de estudio. Geometría en 3D. 3º y 4º medio.* Gobierno de Chile.