https://doi.org/10.46219/rechiem.v15i2.117
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

PROPUESTAS DIDÁCTICAS

# MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA RAPIDEZ DE PROPAGACIÓN DE ONDAS SUPERFICIALES

## MATHEMATICS IN THE TEACHING OF THE SPEED OF PROPAGATION OF SURFACE WAVES

Alberto Sánchez Moreno
asanchez@ciidet.edu.mx

*Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica, Santiago de Querétaro, México*

Aranza Gutiérrez Ramírez
agutierrez14@ucol.mx

*Instituto de Ciencias del Mar y Limnología, Ciudad de México, México*

Omar Jaimes Gómez
omarjaimesg@yahoo.com.mx

*Escuela Nacional de Ciencias Biológicas, Ciudad de México, México*

**RESUMEN**

En México, una de las quejas más comunes sobre por qué los estudiantes no estudian física es que no conocen suficientes matemáticas para comprender los conceptos físicos. También existe la creencia entre los profesores de que se deben presentar ejemplos de la vida real en los cursos para motivar el aprendizaje de la ciencia y demostrar su utilidad. Pero, ¿qué tan fácil es llevar a cabo un proceso tan didáctico? En este trabajo, a través de una propuesta didáctica, demostramos la importancia de las matemáticas para comprender los conceptos físicos relacionados con las ondas. En particular, explica la enseñanza de la rapidez de las ondas superficiales en líquidos y cómo este concepto permite entender el comportamiento de los tsunamis. Esta propuesta contribuye a la enseñanza de la física básica en las diferentes carreras de ingeniería que se imparten en las instituciones de educación superior, y en particular puede ser de gran ayuda en las carreras relacionadas con las ciencias del mar.

**PALABRAS CLAVE:**
*Métodos y estrategias de enseñanza, Teoría del aprendizaje y la enseñanza de las ciencias, Tsunamis, Ondas en el océano y oscilaciones, Propagación de ondas.*

**ABSTRACT**

In Mexico, one of the most common complaints about why students do not study physics is that they do not know enough mathematics to understand physics concepts. There is also a belief among teachers that real-life examples should be presented in courses to motivate science learning and demonstrate its usefulness. But how easy is it to carry out such a didactic process? In this paper, through a didactic proposal, we demonstrate the importance of mathematics in understanding physical concepts related to waves. In particular, it explains the concept of the speed of surface waves in liquids and how this concept allows us to understand the behavior of tsunamis. This proposal contributes to the teaching of basic physics in the different engineering careers taught in higher education institutions and, in particular, can be of great help in careers related to marine sciences.

**KEYWORDS:**
*Teaching methods and strategies, Learning theory and science teaching, Tsunamis, Ocean waves and oscillations, Wave propagation.*

*Recibido: 22 de junio de 2022 , Aceptado: 25 de abril de 2023*

## 1. Introducción

Los numerosos trabajos que se pueden encontrar relacionados con la enseñanza de la física (Campanario y Moya, 1999; Corral y Castro, 2020 ; Crespo et al., 2014; García, 2005 ;Perales y Cañal de León, 2000;Pino y Ferreira, 2022) ponen de manifiesto la importancia y la dificultad que siempre ha existido, con respecto a su enseñanza y aprendizaje en todos los niveles educativos (Chasteen y Scherr, 2020; Elizondo, 2013; Ferreyra y González, 2000; Geelan, 2020; Larsson y Airey, 2021; Larsson et al., 2021; Tobón y Perea, 1985; Treviño y Socorro, 2013). Entre los factores reportados que más influyen en la dificultad de comprensión de los conceptos físicos es aquel que se refiere a las matemáticas, considerando que éstas inhiben el aprendizaje de los alumnos (Kriek y Koontse, 2017; Monk, 1994; Pospiech et al., 2015).

Dicha dificultad radica en el carácter abstracto de las matemáticas (Ruiz, 2015) y en su estructura jerárquica (Carrillo, 2009; Rivière, 2012). Debido a que la abstracción es una capacidad que requiere prestar mucha atención por parte de los estudiantes, ya que es un acto de desmaterialización difícil de asimilar (Cuccia, 2017), aunado a que un conocimiento matemático se construye sobre otro y depende de él, que requiere también una jerarquización para su aprendizaje, lo cual no siempre sucede.

La mala preparación en matemáticas de los estudiantes que asisten a un curso de Física, aunada a una pobre o inexistente didáctica del profesor que imparte dicha asignatura, ha dado como resultado el bajo rendimiento académico que se reporta en dicha área del conocimiento. Sin embargo, es innegable que son las matemáticas, a través de sus distintas representaciones y modelos, las que permiten comprender y entender la física. Es en este sentido, que consideramos que ellas deberían ser, más que un obstáculo, el recurso didáctico para enseñar esta área del conocimiento (Piñeros, 2018; Rodríguez, 2011).
Nótese que la contradicción que pudiera existir al considerar las matemáticas como un problema y al mismo tiempo verlas como un recurso didáctico en realidad no lo es, dado que toda propuesta tiene condiciones iniciales de funcionamiento. En el caso de la nuestra se requiere que el alumno tenga un buen conocimiento de las matemáticas.

Por otra parte, se ha argumentado que los estudiantes muestran poco o nulo interés en aprender física porque encuentran una desconexión total entre los conceptos que aprenden y su vida cotidiana. Esto es especialmente preocupante en el caso de las ondas o el movimiento ondulatorio, porque están presentes en nuestro quehacer diario, en la comunicación verbal, en la radio, la televisión o la telefonía celular. Sin embargo, los estudiantes -y en general la sociedad- desconocen los fundamentos y principios de dicho fenómeno. Por tal razón, consideramos que el estudio del movimiento ondulatorio es uno de los temas que requiere mayor atención para su enseñanza y aprendizaje. Además, la enseñanza de los fenómenos ondulatorios ofrece la posibilidad de demostrar la necesidad de un conocimiento matemático adecuado para su comprensión, así como, la oportunidad de presentar diversos ejemplos que muestran su aplicación práctica.

En este trabajo se presenta una secuencia para la enseñanza de la rapidez de propagación de una onda superficial, considerando que su didáctica está fundamentada en explicar paso a paso, y de manera obvia, la formulación matemática de los conceptos físicos, para que, de esa manera, se entienda porqué una expresión matemática representa y explica las propiedades del fenómeno ondulatorio. Cómo ejemplo de aplicación práctica se discute la rapidez de una ola en un Tsunami.

El trabajo se organiza de la siguiente manera: en la sección 2 hacemos una breve revisión del movimiento ondulatorio y de las matemáticas como recurso didáctico para la enseñanza de la física; en la sección 3 presentamos nuestra propuesta de secuencia didáctica para la enseñanza de la rapidez de una onda superficial en un fluido, la cual incluye como recurso didáctico a las matemáticas, y su aplicación para entender el fenómeno del Tsunami. Por último, la sección 4 la dedicamos a las conclusiones y comentarios finales.

## 2. Marco teórico

Tal vez una de las propiedades más difíciles de entender en el movimiento ondulatorio es el hecho de que tiene una energía asociada a él, que se pone de manifiesto cuando provoca que cualquier punto en la trayectoria de propagación oscile alrededor de una posición de equilibrio. Por ejemplo, se puede provocar una oscilación de moléculas de aire, como en el caso del sonido que viaja por la atmósfera, de moléculas de agua (como en las olas que se forman en la superficie del mar) o de porciones de una cuerda o un resorte. En todos estos casos, las partículas oscilan en torno a su posición de equilibrio y solo la energía avanza de forma continua.

Otra de las dificultades existentes en la comprensión del movimiento ondulatorio es que, a pesar de que podemos hablar de ondas mecánicas, en el sentido de que son perturbaciones de las propiedades mecánicas (densidad y presión) que generan oscilaciones locales de los átomos de un medio material, propagándose a otros átomos del medio (Hecht, 2017), el movimiento ondulatorio no es un fenómeno mecánico porque una onda no es un objeto material, sino un estado. Por lo mismo, no se le puede atribuir una masa, el concepto de aceleración no tiene sentido y, como ya mencionamos, el movimiento de una onda es diferente del medio en el que viaja; inclusive hay ondas, como las electromagnéticas, que no necesitan medio alguno para propagarse (Amineh, 2020; Reitz et al., 1996).

Los fenómenos ondulatorios se encuentran presentes en muchos sucesos de la naturaleza, por ejemplo, a nivel macroscópico, en la luz (De la Peña, 2018), el sonido (López, 2010; Merino y Muñoz, 2013), la radio (Bará, 2000; Barreto, 1996) o las olas en la superficie del agua; y a nivel microscópico, en las partículas elementales, a través de la dualidad onda-partícula (Acosta et al., 1999; Knight, 2017; Krane, 2020; Serway y Jewett, 2014;). Esto indica la importancia del estudio de las ondas y su propagación a través de distintos medios. Una onda es uno más de los conceptos abstractos de la física que es fundamental en el entendimiento de la naturaleza y que, como muchos otros conceptos de la física, no ha estado exento de las dificultades que presenta su aprendizaje y enseñanza (Andrés et al., 2006; Barniol y Zavala, 2019; Bravo et al., 2009; Orozco, et al. 2022, Rico et al.,2021).

Una propuesta didáctica que intenta resolver dicha situación es aquella que recomienda dar prioridad a la observación experimental y a partir de ella, a través de la discusión y reflexión acerca de los conceptos involucrados, introducir las representaciones matemáticas (Briceño et al., 2019; Ferreyra y González, 2000; Riveros, 2020). Sin embargo, consideramos que una propuesta de tal índole podría llevar a pensar que las matemáticas no son fundamentales para entender física.

Por otra parte, también existen numerosas críticas a la enseñanza tradicional de la física, ya que se considera como una actividad donde se presentan los conocimientos solamente a través de fórmulas o relaciones matemáticas que deberán ser aprendidas y aplicadas a ejemplos particulares, sin reflexionar o entender la razón de dichas expresiones, en aras de la utilidad práctica de la física. Este tipo de enseñanza irremediablemente induce a un aprendizaje por memorización que no es el adecuado en el caso de la física (Moreira, 2014; Posada, 2002).

Su pertinencia es altamente cuestionable en el estado actual. Esto, porque en la enseñanza tradicional al explicar un concepto físico normalmente se hace la deducción de la relación matemática que lo describe, recordando que cada paso, que la constituye, puede tener también una justificación física.

Cuando se entiende la deducción de la fórmula final, o ecuación, que modela un fenómeno físico, se puede afirmar que también se aprende física, y es que la relación indisoluble entre física y matemáticas, como ya lo hemos mencionado, no se puede negar. De hecho, uno de los grandes problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la física es la confusión de algunos docentes y alumnos al considerar que las matemáticas son física, y no que se debe aprender matemáticas para aprender física.

De esta manera, puesto que un recurso didáctico se define como el medio o estrategia que el maestro utiliza para facilitar su tarea docente, y donde se considera tanto aspectos organizativos de las clases como la manera de transmitir los conocimientos o contenidos (Vargas, 2017), podemos considerar a las matemáticas como un recurso didáctico para la enseñanza de la física (Rodríguez, 2011). Las matemáticas en general cumplen con esta definición, ya que son el medio por el cual comprendemos y describimos los conceptos físicos, a través de sus diferentes representaciones semióticas (Castro et al., 2017). Por ejemplo, la representación simbólica $\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ nos permite representar la densidad de corriente eléctrica $(\vec{J})$, la densidad volumétrica de carga $(\rho)$, describir y entender la ley de conservación de la carga eléctrica y una gráfica (representación gráfica) de velocidad contra tiempo nos permite entender un movimiento rectilíneo uniforme. En este trabajo las matemáticas que se describen en la tabla 3 son utilizadas como recurso didáctico para enseñar la velocidad de las ondas superficiales en un fluido.

Ahora bien, si consideramos que una secuencia didáctica está definida cómo una serie de actividades de aprendizaje que se suceden unas a otras siguiendo un orden podemos pensar que en ellas se utilicen estrategias didácticas preinstruccionales, coinstruccionales y postinstruccionales (Acosta y García, 2012; Díaz y Hernández, 2002), las cuales se explican con mayor detalle en la siguiente sección. La propuesta presentada en este trabajo considera todas ellas, poniendo especial atención a la coinstruccional, cuyo objetivo es que el estudiante organice, relacione e interrelacione los contenidos e ideas más relevantes para el logro del aprendizaje, cualidades propias de las matemáticas, y donde, al deducir paso a paso las relaciones matemáticas que representan un concepto físico, el estudiante se haga consciente del porqué de la relación final que empleará o utilizará para poder resolver un problema particular que se le presente.

## 3. Desarrollo de la propuesta didáctica

Una propuesta didáctica consiste en plantear o sugerir una serie de acciones que coadyuven al proceso de enseñanza-aprendizaje de un tema en particular. En este trabajo consideramos una propuesta didáctica para la enseñanza de la rapidez de propagación de ondas superficiales que se fundamenta en las estrategias docentes para un aprendizaje significativo (Díaz y Hernández, 2002), las matemáticas como recurso didáctico (Rodríguez, 2011) y las representaciones semióticas (Duval, 1998; Oviedo y Kanashiro, 2012). Esta propuesta contribuye a la enseñanza de la física básica en las diferentes carreras de ingeniería que se imparten en las instituciones de educación superior, y en particular puede ser de gran ayuda en las carreras relacionas con las ciencias del mar.

Una secuencia didáctica se deriva de una serie de actividades organizadas que constituyen la configuración denominada estructura didáctica, la cual está basada en generar procesos centrados en el aprendizaje (D'Hainaut, 1985). Para elaborar una secuencia didáctica se debe conocer el curso, asignatura o el tema que se pretende enseñar (Díaz, 2013).

De acuerdo con la estructura didáctica, una secuencia didáctica debe poseer tres componentes prediferenciadas: actividades de apertura, desarrollo y cierre, como se esquematiza en la Figura 1.


*Figura 1. Estructura didáctica*
*Nota. Elaboración propia.*

Para cada una de las componentes de la estructura didáctica se tiene una estrategia didáctica definida como los procedimientos (métodos, técnicas y actividades) por medio de las cuales se pretende construir y lograr metas previstas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En las actividades de apertura existen las estrategias preinstruccionales que tienen como objetivo preparar y alertar al estudiante sobre qué y cómo aprender, incidiendo en la activación o generación de conocimientos previos. En el caso del estudio del movimiento ondulatorio, sería conveniente utilizar una estrategia didáctica que permita al estudiante recordar conceptos físicos como la velocidad o la rapidez, y conceptos matemáticos como el gradiente o el rotacional.

Para las actividades de desarrollo, las estrategias coinstruccionales son las indicadas. La característica principal de estas estrategias es que el estudiante va relacionando e interrelacionando las ideas y conceptos para lograr el aprendizaje propuesto. Es por eso que, consideramos que la deducción matemática, paso a paso, de las relaciones que describirán un concepto físico se encuentra en el marco de este tipo de estrategia. En el presente trabajo la ejemplificaremos deduciendo la expresión matemática que define el concepto de rapidez de ondas superficiales en el agua.

Finalmente, para las actividades de cierre se cuenta con las estrategias postinstruccionales, que permiten llevar a cabo una revisión final de la clase, resumiendo las ideas principales de lo que se enseñó e incluso estimulando a los estudiantes para discutir y reflexionar acerca del tema tratado. Nosotros proponemos considerar como estrategia postinstruccional la aplicación del concepto estudiado, es decir, cómo este se utiliza para entender un fenómeno de la naturaleza particular. Como ejemplo, consideramos la rapidez de las ondas superficiales en un Tsunami.

Nuestra propuesta didáctica para la rapidez de ondas superficiales se muestra en la Figura 2.

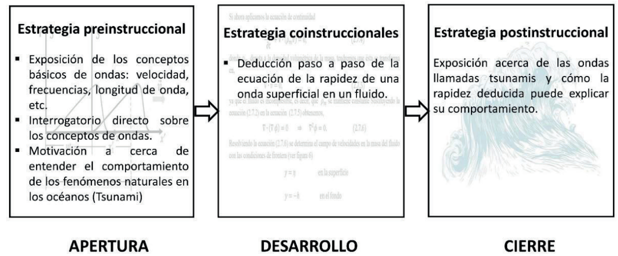


*Figura 2. Secuencia didáctica*
*Nota. Elaboración propia.*

En la apertura de la secuencia didáctica se consideran tres estrategias preinstruccionales: la motivación, el interrogatorio directo y la exposición de conceptos.

Con respecto al interrogatorio directo podemos destacar su importancia, ya que, mediante esta actividad, el maestro puede:

a) asegurar, mediante el interrogatorio adecuado, si los alumnos poseen los antecedentes mínimos indispensables, físicos y matemáticos, para atender el tema que se enseñará.
b) dirigir el razonamiento del alumno para que recuerde o aprenda algún concepto necesario para atender el tema que se enseñará.

Esta actividad llevará al estudiante a un estado de desequilibrio que surgirá cuando una concepción que tiene entra en conflicto con alguna otra concepción que él mismo tiene, o bien con alguna del maestro o de sus compañeros. En el conflicto cognitivo el estudiante se puede dar cuenta de las razones por las que los conceptos o métodos que maneja no son los adecuados para comprender un tema o para resolver algún problema. Con respecto a la labor docente, el maestro es el encargado de crear las situaciones necesarias para que los estudiantes experimenten un conflicto cognitivo durante esta etapa de la secuencia didáctica. El maestro mediante la dinámica de preguntas y respuestas crea en el salón de clase un ambiente que favorece el surgimiento de conflictos cognitivos con fines didácticos.

En esta actividad, si bien el maestro es el encargado de preguntar y guiar el interrogatorio, el estudiante no solo responde, sino que también piensa y considera su respuesta (reflexiona), y relaciona ideas y conceptos distintos para obtener conclusiones o formar un juicio (razona) que se encontrará en sus respuestas. En esta dinámica grupal el estudiante tiene la libertad de preguntar al maestro o a sus compañeros estableciendo una discusión y diálogo. También, el estudiante podría estar frente al grupo respondiendo a las preguntas con apoyo de la tiza y el pizarrón, expresando conceptos y desarrollos matemáticos, si así se requiere. De esta manera se espera que los estudiantes participen en esta estrategia preinstruccional.

Cada una de estas estrategias generará un aprendizaje (Marzano y Pickering, 2005), como se menciona en la Tabla 1. Una sugerencia de cómo proceder en la estrategia de exposición de conceptos básicos se muestra en la Tabla 2.

*Tabla 1. Estrategias preinstruccionales*

| **Estrategia** | **Sugerencia** | **Aprendizaje** |
|---|---|---|
| Motivación | Informar, dando cuenta al estudiante acerca de los fenómenos físicos que se pueden estudiar y entender a través del concepto de onda y el movimiento ondulatorio, por ejemplo, la luz, el sonido, la radio, las olas en el agua o la dualidad onda-partícula.<br><br>Reflexionar, preguntando a los estudiantes acerca de lo que piensan con respecto a la posibilidad de explicar a partir de los fenómenos naturales, el concepto de onda y sus propiedades. | Percibirá el valor del tema que se estudiará.<br><br>Desarrollará una actitud positiva hacia el tema que estudiará. |
| Interrogatorio directo | Dinámica de preguntas y respuestas. Se pretende con esta estrategia llevar al estudiante al conflicto cognitivo. Esto hará al estudiante profundizar y reflexionar acerca de los temas que queremos que comprenda. Ejemplos de preguntas serían:<br><br>¿Las ondas se mueven (propagan)?<br>¿Cuál es la diferencia entre una onda en el agua y una onda en una cuerda?<br>¿Sin el agua se puede hablar de una onda en ese medio?<br>¿Las ondas tienen energía?<br>¿Las ondas se pueden propagar sin un medio que las sustente?<br>etc. | Desarrollará el hábito mental de la autorregulación, pues será consciente de lo que está pensando y de la meta que se busca.<br><br>Desarrollará el hábito del pensamiento creativo, pues se esforzará al máximo y exigirá hasta el límite de su conocimiento y habilidad para responder las preguntas.<br><br>Desarrolla el pensamiento crítico. |
| Exposición de conceptos básicos | Exposición oral que incluya:<br>Definición del concepto de onda y sus propiedades.<br><br>Movimiento ondulatorio y sus propiedades. | Conocimiento declarativo.<br><br>El estudiante conocerá hechos, conceptos y principios:<br><br>Entenderá el significado de los nuevos conceptos a partir de su conocimiento previo, que ha recordado o aprendido en esta etapa de la estrategia.<br><br>Organizará la información nueva en esquemas, mapas, organizadores gráficos, representaciones simbólicas.<br><br>Relacionará de manera sustancial la nueva información con sus conocimientos y experiencias previas. |

*Nota. Elaboración propia.*

*Tabla 2. Propuesta para la exposición de conceptos básicos*

| **Ondas y movimiento ondulatorio** |
|---|
| Se define a una onda como el movimiento de una perturbación en un medio. Cuando una onda se transporta por medios deformables o elásticos se le denomina onda mecánica (Hecht, 1999).<br><br>En un movimiento ondulatorio, las partículas que constituyen el medio no se propagan con la perturbación, sino que se limitan a transmitir la perturbación, para lo cual vibran alrededor de su posición de equilibrio. Por lo tanto, existe un transporte de energía, pero no de materia (Serway, 1999).<br><br>En general, el movimiento ondulatorio es un fenómeno que consiste en la transmisión de un estado. Si colocamos fichas de dominó alineadas y derribamos la primera, se iniciará un tren de sucesos que acabará en que todas las fichas estén tiradas. A lo largo de la fila de fichas no ha habido ningún transporte total de masa, sino que lo que ha viajado ha sido el "estado" de caída. La rapidez con que se ha movido el estado de caída recibe el nombre de rapidez de propagación de la onda (Ingard y Kraushaar, 1966).<br><br>La rapidez de propagación de una onda se determina por la naturaleza de la perturbación y por las propiedades físicas del medio (Ingard y Kraushaar, 1966). Depende de la elasticidad y de la densidad del medio: mientras este sea más elástico y menos denso, la rapidez de propagación será mayor.<br><br>La rapidez junto con la longitud y la frecuencia son los tres conceptos físicos que caracterizan a una onda. Una longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos de una onda, por ejemplo, en el caso de la onda en una cuerda, la longitud de onda es la distancia entre dos crestas o valles adyacentes. A la longitud de onda regularmente se le denota con la letra griega $\lambda$. La mayoría de las ondas son periódicas y en tal caso la frecuencia es la rapidez con que se repite la perturbación, a la frecuencia se le denota con la letra f (Serway, 1999) o la letra griega $\nu$ (Resnick et al., 1998).<br><br>La rapidez o magnitud de la velocidad de propagación de una onda cualesquiera v, se determina mediante el producto de su frecuencia por su longitud de onda (Serway, 1999) y se conoce también como rapidez de fase. |

*Nota. Elaboración propia.*

La segunda etapa de la propuesta didáctica corresponde a la estrategia coinstruccional. Es en esta etapa donde se utiliza a las matemáticas como recurso didáctico indispensable, puesto que es un lenguaje que permite al estudiante la construcción, la interpretación, la abstracción y la consolidación de significados de los fenómenos Físicos. En el caso particular que estamos considerando, son las matemáticas que se describen en la Tabla 3 las más adecuadas para la enseñanza de la rapidez de propagación de ondas superficiales en el sentido de que sin ellas no sería posible deducir y entender la expresión matemática de la ecuación (8), que modela dicho fenómeno físico.

*Tabla 3. Matemáticas necesarias para la enseñanza de la rapidez de una onda superficial*

| **Conceptos matemáticos** | |
|---|---|
| Álgebra | • Factorización.<br>• Ecuación de Euler<br>$e^{+i\theta} = \cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$ |
| Álgebra vectorial | Vector $\vec{v}$ |
| Función | • Suma de funciones.<br>• Funciones pares e impares.<br>• Funciones. hiperbólicas<br>$\cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$,<br>$\sinh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$ |

| | |
|---|---|
| Cálculo Vectorial | • Diferenciación.<br>• Operador nabla.<br>• Rotacional<br>• Gradiente<br>• Divergencia<br>• Laplaciano.<br>• Identidad vectorial. |
| Diferencial de una función escalar | Si $f = f(x, y, z)$,<br>Entonces $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ |
| Derivadas parciales | Si $f = f(x, y, z)$,<br>Entonces $\frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_j + h, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_n)}{h}$ |
| Ecuaciones Diferenciales Parciales | • Solución método de separación de variables |
| Ecuaciones diferenciales ordinarias | • Solución ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. |

Esta estrategia consiste en la deducción, paso a paso, de la expresión matemática que determina la rapidez de propagación de una onda superficial en un fluido cualquiera. Considerar todos los pasos de una deducción, donde se explican todas y cada una de las consideraciones, deducciones, operaciones y simplificaciones necesarias para llegar a obtener la expresión o modelo matemático deseado, proporciona al estudiante aprendizajes relacionados con la adquisición e integración, refinamiento y profundización y aplicación significativa del conocimiento.

Esta afirmación se encuentra en el contexto de la teoría epistemológica y didáctica conocida como constructivismo (Osborne y Wittrock, 1983; Posner et al., 1982) y del aprendizaje significativo (Ausubel,1968), ya que tal propuesta de enseñanza permite que el estudiante establezca relaciones entre sus conocimientos previos y los nuevos, reflexione acerca de ellos, confronte lo conocido con lo nuevo por conocer, promueva la solución del conflicto cognitivo y desarrolle la autonomía y capacidad crítica. Es decir, que sea un ente activo (Londoño, 2009; Luria, 1979) en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En esta etapa el estudiante no es un ente pasivo, como se podría pensar, ya que al escuchar al maestro y poner atención a las deducciones detallada (paso a paso) su cerebro responde, de manera natural, para tener la capacidad de recibir, entender e interpretar información, así como, de responder a los mensajes verbales y no verbales del maestro. En este sentido, el estudiante es activo y este proceso impacta favorablemente en su aprendizaje (Cova, 2012), ya que, esta capacidad cerebral se encuentra relacionada con la abstracción, capacidad intelectual indispensable en la enseñanza de la física (Campusano, 2017; Gaitám et al., 2022).

Pongamos como ejemplo el inicio de la deducción mencionada. En la deducción de la rapidez de propagación de las ondas superficiales es necesario conocer las matemáticas que se muestran en la Tabla 3. Como en todo problema de física el primer paso es la abstracción, es decir, la idealización del fenómeno físico que se quiere estudiar, esto se hace mediante la ayuda de la representación gráfica. En este caso se considera la situación bidimensional que se ilustra en la Figura 3, que representa un fluido con una profundidad h, el cual sufrirá una perturbación que genera ondas superficiales de altura $\xi$ , como lo muestra la Figura 4. En este sentido, las consideraciones que definen a una onda superficial son las siguientes:

- Solo se perturba la superficie.
- El movimiento del fluido es irrotacional.
- El fluido es incompresible.

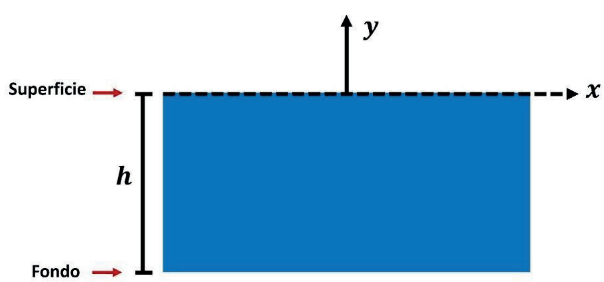


*Figura 3. Fluido sin perturbar*
*Nota. Elaboración propia.*

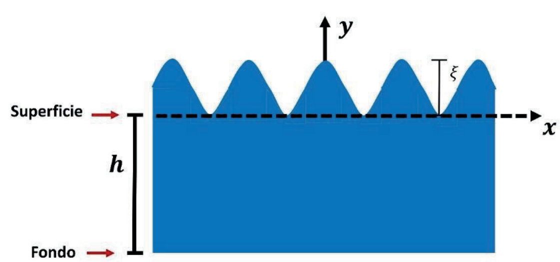


*Figura 4. Ondas superficiales en el fluido*
*Nota. Elaboración propia.*

Ahora bien, para proceder a la deducción de la velocidad de las ondas en este sistema e interpretar estas condiciones es necesario utilizar matemáticas. El primer lugar se representa a la velocidad de las ondas como un campo vectorial denotado como $\vec{v}$ y se le denomina campo vectorial de velocidades.

Entonces, la condición de no rotación, de acuerdo con el cálculo vectorial (Marsden y Tromba, 1981), se representa como

$$\nabla \times \vec{v} = 0, \tag{1}$$

donde $\nabla \times \vec{v}$ representa el rotacional de la velocidad y $\nabla$ es el operador nabla en coordenadas cartesianas: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ . La ecuación (1) implica la existencia de una función escalar $\phi$ tal que

$$\vec{v} = \nabla \phi, \tag{2}$$

aquí $\nabla \phi$ es el gradiente de la función $\phi$, debido a que el rotacional del gradiente de cualquier función escalar cumple con la relación

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0. \tag{3}$$

Para considerar la condición de incompresibilidad es necesario recordar la expresión matemática que representa la continuidad (conservación) de un fluido, la cual tiene la forma (Arregui de la Cruz et al., 2017)

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0. \tag{4}$$

donde $\rho_m$ representa la densidad volumétrica de masa. Ahora, si el fluido es incompresible, la cantidad $\rho_m$ se mantiene constante, por tanto, la ecuación (4) nos dice que

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \tag{5}$$

Hasta aquí el estudiante habrá entendido que la representación verbal irrotacional e incompresible se traduce a la representación funcional vectorial como lo indican las ecuaciones (1) y (5) (Duval, 1998; Oviedo y Kanashiro, 2012)

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (5) obtenemos

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2 \phi = 0. \tag{6}$$

La ecuación (6) es una ecuación diferencial en derivadas parciales conocida con el nombre de Laplaciano o ecuación de Laplace de la función $\phi$ .

En este momento el estudiante entiende que para determinar el campo vectorial de velocidades en la masa del fluido es necesario resolver la ecuación (6) con las condiciones de frontera (7), que entenderá a través de la representación gráfica que se muestra en la Figura 4 (Duval, 1998; Oviedo y Kanashiro, 2012)

$$\begin{aligned} y &= \xi \qquad \text{en la superficie} \\ y &= -h \qquad \text{en el fondo} \end{aligned} \tag{7}$$

El resto de la deducción se puede llevar a cabo de la misma manera, desafortunadamente es demasiado extensa para reportarla explícitamente en este artículo. La figura 5 esquematiza y resume la secuencia didáctica matemática para este fin.

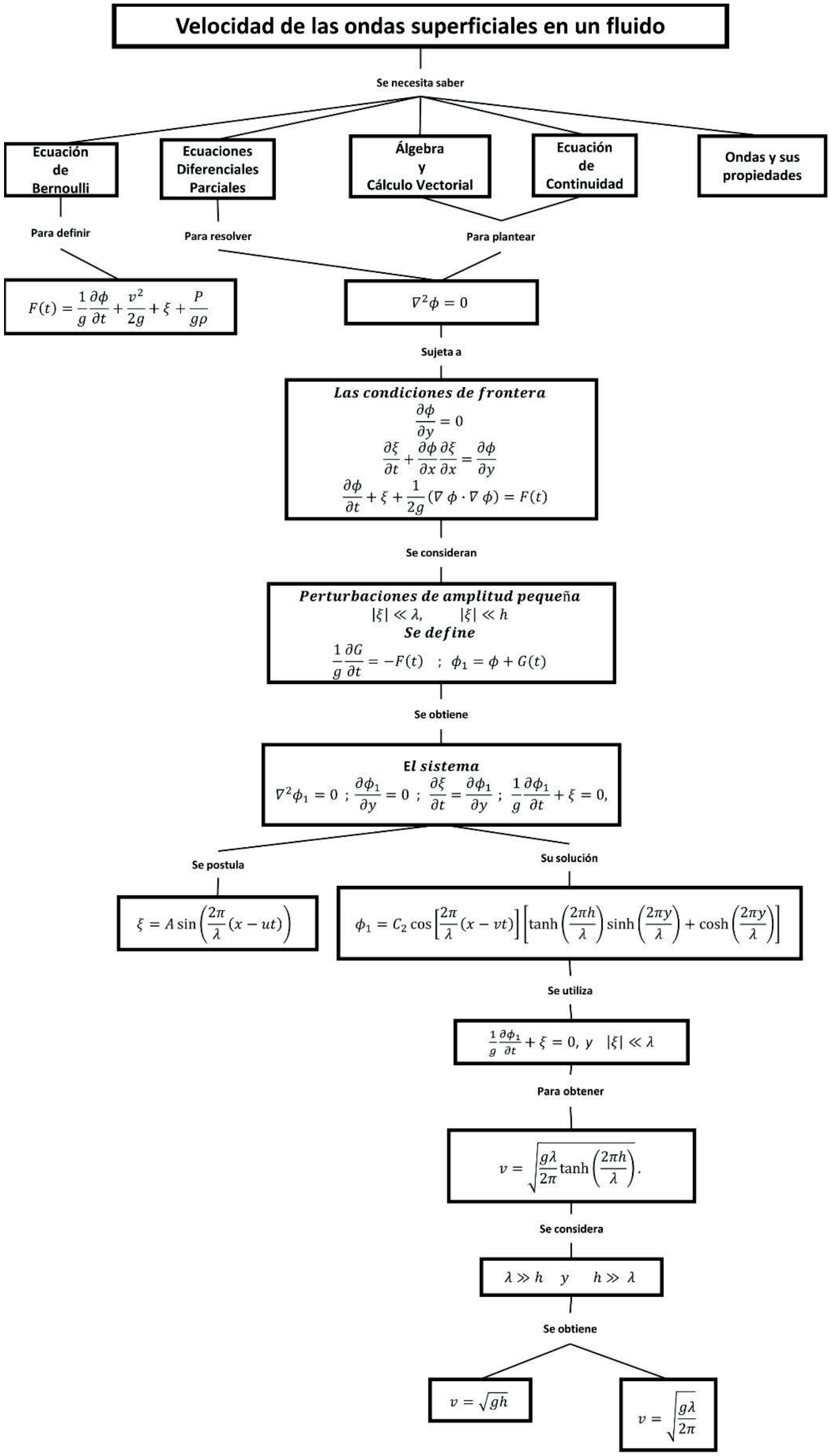


*Figura 5*
*Secuencia de ecuaciones utilizada para obtener la rapidez de una onda superficial en un fluido*
*Nota. Elaboración propia.*

Una vez terminado este proceso de enseñanza-aprendizaje, el estudiante entenderá por qué la expresión buscada tiene la forma

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}, \tag{8}$$

con $\lambda, h$ y $g$ representando la longitud de onda, la profundidad y el campo gravitacional cerca de la tierra, pero, sobre todo, porque involucra la función tangente hiperbólica, que es una de las situaciones que más desconcierta a los estudiantes cuando esta velocidad se les presenta sin deducción alguna.

Además, utilizando matemáticas nuevamente, el estudiante aprenderá cómo, a partir de esta misma ecuación, la rapidez de una onda infinitamente pequeña $(\lambda >> h)$ en una masa de fluido de profundidad $h$, se obtiene mediante la ecuación,

$$v = \sqrt{gh}\,, \tag{9}$$

y para el caso de una gran profundidad $(h \gg \lambda)$ esta solo depende de la longitud de onda,

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{10}$$

También las matemáticas le dirán que la energía $\mathcal{E}$ que transporta la onda está representada por la relación

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4}\,\rho\lambda A(v^2 + gA). \tag{11}$$

donde $A$ y $\rho$ representan la amplitud de la onda y la densidad de masa del fluido respectivamente.

La estrategia posinstruccional corresponde al cierre de la secuencia didáctica. Aquí, proponemos que se discuta alguna aplicación de lo aprendido, como el uso de las relaciones para la rapidez de la onda superficial. Vamos a ejemplificarla con el agua de los océanos y el fenómeno del Tsunami.

Si consideramos que el fluido donde se producen las ondas es el agua, la expresión (8) representa la rapidez general de una onda superficial en el agua y las ecuaciones (9) y (10) nos dan la rapidez de una onda superficial en aguas poco profundas y profundas respectivamente.

Se tendrán ondas superficiales en el agua cuando algún punto de su superficie se aparta de su equilibrio debido a alguna perturbación provocada, por ejemplo, por el viento u otra interacción con ella. Esto provocará un movimiento en el agua que se propagará por toda la superficie en forma de ondas. Dichas ondas no son ni longitudinales ni transversales, como se podría pensar, porque tienen un movimiento más complicado, pues es en dos dimensiones, por eso cuando estamos en el mar y nos encontramos con una ola, esta nos mueve de un lado a otro y de adelante hacia atrás (Thurman y Trujillo, 2019).

Si las ondas superficiales se propagan en una región donde la profundidad es mayor que media longitud de onda, el movimiento de las partículas es circular (Thurman y Trujillo, 2019), como se muestra en la Figura 6. Por eso, las olas no se sienten en el fondo.

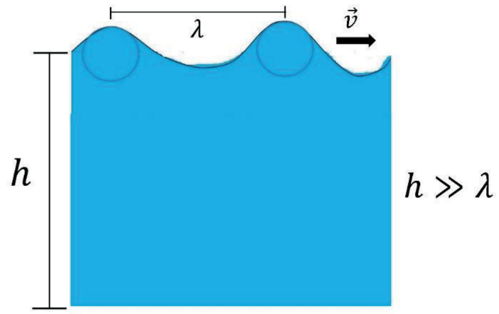


*Figura 6. Ondas superficiales en aguas profundas*
*Nota. Elaboración propia.*

Como muestra la ecuación (10), la rapidez de este tipo de ondas solo depende de su longitud de onda, que nos indica que las ondas con una longitud de onda mayor viajan más rápido que las de menor longitud. A tal dependencia de la rapidez se le llama dispersión (You, 2008).

Sin embargo, si las ondas que se propagan en una región donde la profundidad es pequeña comparada con la longitud de onda, por ejemplo $h < \frac{\lambda}{20}$, toda la capa de agua desde la superficie hasta el fondo estará en movimiento. En dicho caso, las trayectorias de las partículas se encuentran en órbitas elípticas muy planas que se acercan a la oscilación horizontal (de ida y vuelta). El componente vertical del movimiento de las partículas disminuye con el aumento de la profundidad, haciendo que las órbitas se vuelvan aún más aplanadas (Thurman y Trujillo, 2019). Como se esquematiza en la Figura 7.

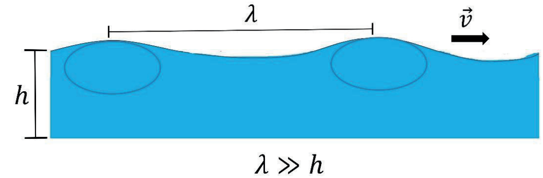


*Figura 7. Ondas superficiales en aguas poco profundas*
*Nota. Elaboración propia.*

Este tipo de ondas viaja a la misma rapidez y, por tanto, no son dispersivas.

El conocimiento de las ondas superficiales permite entender el comportamiento del fenómeno natural conocido como Tsunami. Se les llama así a las ondas sísmicas producidas por terremotos en el fondo del océano. Tsunami es una palabra de origen japonés formada por dos términos: *tsu*, que significa "puerto" o "bahía", y *nami* "ola"; por tanto, Tsunami significaría maremoto en un puerto o bahía.

La longitud de las ondas que se producen en un Tsunami está en un intervalo de entre decenas y centenas de kilómetros (Cartwrigh y Nakamura 2008). Dado que la profundidad media del océano es de 3682 metros (Charette y Smith, 2010), las olas se consideran como ondas de agua poco profundas. Entonces, de acuerdo con la ecuación (9), la rapidez de las ondas superficiales para la profundidad media es de aproximadamente 684 kilómetros por hora. Si consideramos para un Tsunami una longitud de onda de 350 km, entonces, de acuerdo con la relación entre la rapidez $v$, la longitud $\lambda$ y el período temporal $T$,

$$v = \frac{\lambda}{T}, \tag{12}$$

se tiene una frecuencia aproximada de dos olas por hora o una ola cada 30 minutos. La energía de este tipo de olas, de acuerdo con las ecuaciones (9) y (11), será,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,\rho g \lambda A^2. \tag{13}$$

Por conservación de la energía, la cantidad $\mathcal{E}$ es constante. Entonces, la relación (13) implica que

$$\lambda A^2 = \kappa_1\,, \tag{14}$$

con $\kappa_1 = \frac{2\mathcal{E}}{\rho g}$, una cantidad constante. La ecuación (14) nos indica que la amplitud de la onda es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de onda, por tanto, en altamar el Tsunami es incapaz de causar mayor daño pues generará olas de amplitud muy pequeña. Ahora, si sustituimos la ecuación (9) en la ecuación (12) tendremos

$$\lambda = T\sqrt{gh}\,. \tag{15}$$

Como el periodo se mantiene constante durante la propagación de la ola, entonces podemos decir que

$$\lambda = \kappa_2\sqrt{h}\,, \tag{16}$$

con $\kappa_2 = T\sqrt{g}$ ,una cantidad constante. Sustituyendo la ecuación (16) en la ecuación (15) se tiene que

$$\sqrt{h}\,A^2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \;\Rightarrow\; hA^4 = \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2 \;\Rightarrow\; A = \frac{\kappa_3}{h^{\frac{1}{4}}}, \tag{17}$$

con $\kappa_3 = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}$, una cantidad constante. Dicha expresión se utiliza para comparar la amplitud de las olas del Tsunami en el océano $A_O$ con las del litoral $A_L$ . Aplicando la ecuación (17) tenemos,

$$A_O = \frac{\kappa_3}{h_O^{\frac{1}{4}}} \;\;;\;\; A_L = \frac{\kappa_3}{h_L^{\frac{1}{4}}} \quad\Rightarrow\quad \frac{A_L}{A_O} = \left(\frac{h_O}{h_L}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{18}$$

La ecuación (18) nos dice que la amplitud de una onda en el litoral es $\left(\frac{h_O}{h_L}\right)^{\frac{1}{4}}$ veces la amplitud de la onda en el océano. Por ejemplo, si se considera una profundidad en el océano de 4000 metros y en el litoral una de 2 metros, la cantidad $\left(\frac{h_O}{h_L}\right)^{\frac{1}{4}}$ tendrá un valor de aproximadamente 6.7, por tanto, la amplitud de la ola en el litoral será 6.7 veces la amplitud de la ola en el océano. Si en el océano el Tsunami tiene una ola de 3 metros de amplitud, en el litoral su amplitud será de casi 20 metros. Dado que la energía de la ola es proporcional al cuadrado de la amplitud, ecuación (13), la energía de tales olas en el litoral es enorme y la cantidad de agua que ponen en movimiento es la causa de su poder destructor. Un Tsunami pone en movimiento una capa de agua que se extiende desde el fondo del océano hasta su superficie.

En esta etapa de la propuesta didáctica se pretende que el estudiante relacione los conceptos y expresiones matemáticas, aprendidos durante la etapa de desarrollo de la secuencia didáctica, junto con su utilidad para entender y explicar los fenómenos naturales; además, se espera motivarlo a pensar y considerar las posibles aplicaciones prácticas de dichos conceptos.

## 4. Conclusiones

En este trabajo se propone a las matemáticas como recurso didáctico indispensable para la enseñanza de la física, y se presentó una propuesta didáctica para la enseñanza de las ondas superficiales en un fluido.

La secuencia didáctica presentada y sugerida consta de tres etapas, cada una con estrategias instruccionales denominadas, respectivamente, preinstruccional, coinstruccional y posinstruccional. En la etapa preinstruccional se propone tres estrategias didácticas: la motivación, preguntas que detonan el conflicto cognitivo, una introducción al concepto de onda y a sus propiedades básicas, como son: la rapidez de propagación, longitud de onda, periodo y amplitud, y el repaso de los conceptos matemáticos básicos necesarios para comprender la deducción de la rapidez de una onda superficial.

Considerando que en la mayoría de los cursos que presentan el tema de la rapidez de ondas superficiales en un fluido se remiten a dar la fórmula para aplicarla y no se discute su procedencia (aunque en algunos sí sus consecuencias), lo que a nuestro parecer fomenta un aprendizaje conductista y memorista del que la mayoría de los docentes se ha quejado, presentamos en la etapa coinstruccional la propuesta de utilizar a las matemáticas con recurso didáctico para la comprensión y deducción de la rapidez de las ondas superficiales en un fluido, así como de su energía. Esta etapa de la secuencia didáctica permite reflexionar acerca de los antecedentes matemáticos que un estudiante debe tener para comprender este tema. En este sentido, es importante mencionar la necesidad de que los estudiantes cuenten con un aprendizaje significativo en álgebra, geometría, álgebra vectorial, cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales.

Si definimos un recurso didáctico como el instrumento o estrategia que el maestro utiliza para enseñar un determinado tema, entonces, las matemáticas cumplen con tal característica. Desafortunadamente, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas representan un problema en sí mismo. De allí la necesidad de asegurarse de que los estudiantes han aprendido correctamente matemáticas antes de emprender la tarea de enseñarles física.

Por otra parte, consideramos que un factor relevante para aprender física es la motivación, entendiéndola como los factores internos y externos que estimulan el deseo en los estudiantes para estar continuamente interesados y comprometidos en aprender algo. Además, estimula una actitud positiva hacia la física y juega un rol invaluable en el aprendizaje de dicha área del conocimiento. La estrategia posintruccional propuesta, donde se explica el comportamiento de un Tsunami a partir de la rapidez y energía de las ondas superficiales obtenidas en la etapa de desarrollo de la secuencia didáctica, coadyuva en tal sentido. Sin embargo, consideramos importante señalar que para implementarla es necesario tener un conocimiento multidisciplinar que no siempre el profesor y/o el estudiante poseen. Por ejemplo, si en la clase de Electrostática se enseña el concepto de momento dipolar eléctrico, se podría pensar en el horno de microondas como un ejemplo de aplicación interesante. Sin embargo, hay que considerar que la explicación de su funcionamiento puede requerir de otros conceptos que posiblemente sean desconocidos o incomprensibles para los estudiantes, como puede ser el momento (o torca) de una fuerza o las ondas electromagnéticas de longitud del orden de 10^(-2) metros. Por lo tanto, hay que ser cuidadosos para escoger adecuadamente el ejemplo, asegurándonos de que se conocen todos los conceptos involucrados en la explicación.

La historia de la ciencia nos muestra que hay una relación directa entre el conocimiento eficaz de las matemáticas y el aprendizaje de la física. Si el estudiante sabe matemáticas, comprenderá cómo y por qué los conceptos físicos se expresan en ese lenguaje y podrá extraer conclusiones y predicciones de los mismos. En un curso de Física no se debe privar a los estudiantes de la deducción de las expresiones matemáticas que describen los fenómenos físicos, como en el caso de las ondas superficiales en los fluidos, que hemos presentado aquí. De otro modo, se propiciará un aprendizaje memorístico o conductista, que puede ser útil, pero no contribuirá al tan ansiado aprendizaje significativo.

Para lograr un adecuado aprendizaje en física es necesario que el estudiante haya desarrollado su pensamiento matemático, el cual le permite tener la habilidad de comparar, describir, analizar, sintetizar, modelar y sobre todo de abstraer. De esta manera, las matemáticas tienen una función invaluable en el aprendizaje de la física.

Nuestra propuesta pretende impactar positivamente en el aprendizaje significativo de los estudiantes. Esperamos que trabajos futuros puedan reportar los resultados de la implementación de esta propuesta didáctica.

Finalmente, concluimos que, solo mediante la deducción explícita (y paso a paso), de las expresiones matemáticas que representan los fenómenos físicos, el estudiante les da sentido y se apropia significativamente de ellos.

## Agradecimientos

Dedicamos este trabajo a la memoria del profesor Gonzalo Zubieta Russi, que falleció inesperadamente el 9 de abril del 2021.

## Referencias


Acosta, S. F., y García, M. CH. (2012). Estrategias de enseñanza utilizadas por los docentes de biología en las universidades públicas. *Omnia, 18*(2), 67-82.

Acosta, V., Cowan, C., y Graham, B. (1999). *Curso de física moderna.* Oxford University Press.

Amineh, R. K. (2020). Applications of Electromagnetic Waves: Present and Future. *Electronics, 9*(5), 1-4. https://doi.org/10.3390/electronics9050808

Andrés, M. M., Danón, M. A., y Meneses, J. A. (2006). Desarrollo conceptual acerca de ondas mecánicas en un laboratorio guiado por el modelo MATLaF. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 5*(2), 260-288.

Arregui de la Cruz, F. J., Cabrera, E., Cobacho, R., Gómez, E., y Soriano, J. (2017). *Apuntes de mecánica de fluidos.* Universitat Politècnica de València.

Ausubel, D.P. (1968). *Educational psychology: a cognitive view.* Holt, Rinehart and Winston. (Trad. cast. Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. Trillas, 1976).

Bará, J. (2000). *Ondas electromagnéticas en comunicación* (2.a ed.). Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Barniol, P., y Zavala, G. (2019). Evaluación del entendimiento de ondas mecánicas utilizando un test de opción múltiple en español. *Rev. Bras. Ensino Fís., 41*(4), Artículo e20190119. https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2019-0119

Barreto, J. A. G. (1996). Radioastronomía: Detección de ondas de radio provenientes del universo. *CIENCIA ergo-sum, 3*(3), 295-307.

Bravo, S., Pesa, M., y Caballero Sahelices, C. (2009). Representaciones de alumnos universitarios sobre propagación de ondas mecánicas. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(3), 405-420. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3651

Briceño, J., Rivas, Y., y Lobo, H. (2019). La Experimentación y su Integración en el proceso Enseñanza Aprendizaje de la Física en la Educación Media. *Revista Latinoamericana de Estudios en Cultura y Sociedad, 5*(2), 2-17. https://doi.org/10.23899/relacult.v5i2.1512

Campanario, J. M., y Moya, A. (1999). ¿Cómo enseñar Ciencias? Principales tendencias y propuestas. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(2), 179-192. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4085

Campusano, R. A. (2017). Conceptos abstractos, notaciones y convenciones en la enseñanza de ciencias físicas universitarias. *Axioma,* (17), 108-117.

Carrillo, B. (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. Innovación y Experiencias

Cartwrigh, J. H., y Nakamura, H. (2008). Tsunami: a history of the term and scientific understanding of the phenomenon in japanese and western culture. *Notes and Records of the Royal society, 62*(2), 151-166. https://doi.org/10.1098/rsnr.2007.0038

Castro, M. G., González, M. D., Flores, S., Ramírez, O., Cruz, M. D., y Fuentes, M. C. (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I Entreciencias: *Diálogos en la Sociedad del Conocimiento, 5*(13), 1-22. http://dx.doi.org/10.21933/ J.EDSC.2017.13.218

Charette, M. A., y Smith, W. H. F. (2010). The Volume of Earth's Ocean. *Oceanography, 23*, 112-114. https://doi.org/10.5670/oceanog.2010.51

Chasteen, S. V., y Scherr, R. E. (2020). Developing the Physics Teacher Education Program Analysis rubric: Measuring features of thriving programs. *Physical Review Physics Education Research, 16*(1). https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010115

Corral, Y. J., y Castro, R. C. (2020). Actitud hacia la física de los estudiantes de quinto año de Educación Media General durante el confinamiento por COVID-19. *Revista Ciencias de la Educación, 30,* 941-964.

Cova, Y. (2012). La comprensión de la escucha. *Letras, 54*(87), 125-140.

Crespo, M., Cortázar, A., Julián, M., y Díaz, M. (2014). Ordenadores en el aula: ¿estamos preparados los profesores? *Enseñanza de las Ciencias, 2*(32), 239-250. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.939

Cuccia, E. J. (2017). Abstracción y matemática en el Comentario a la Física de Tomás de Aquino: más allá de las operaciones intelectuales. *Eidos, 27,* 154-173.

D'Hainaut, L. (1985). *Objetivos didácticos y programación. Análisis y construcción de currículums, programas de educación objetivos operativos y situaciones didácticas.* Oikos Tau.

De la Peña, L. (2018). La naturaleza de la luz. *Revista Digital Universitaria, 19*(3), 1-11. https://doi.org/10.22201/codeic.16076079e.2018.v19n3.a1

Díaz, A. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 17*(3), 11-33.

Díaz, F., y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo* (2.a ed.). McGraw-Hill Interamericana.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento* (Vol. II). Grupo Editorial Iberoamérica.

Elizondo, M. S. (2013). Dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de la Física. *Presencia Universitaria, 3*(5), 71-77.

Ferreyra, A., y González, E. E. (2000). Reflexiones sobre la enseñanza de la física universitaria. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(2), 189-199. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4038

Gaitám, J., Porras, M., Zúñiga, A., Picado, E., y Fracaro, A. (2022). I*mplicaciones del lenguaje simbólico en el aprendizaje de la Física un estudio desde la semiótica de la imagen.* Editorial Grupo Compás.

García, A. (2005). Situaciones sofísticas en el aprendizaje de la física. Estrategias para su puesta en práctica en el aula. *Revista Iberoamericana de Educación, 36*, 1-11. https://doi.org/10.35362/rie3692766

Geelan, D. (2020). Physical Science Teacher Skills in a Conceptual Explanation. *Educ. Sci., 10*(23), 1-11. https://doi.org/10.3390/educsci10010023

Hecht, E. (1999). *Física 1* (2.a ed.). International Thomson Editores.

Hecht, E. (2000). *Óptica.* (3a ed.). Pearson Educación, S.A.

Ingard, U., y Kraushaar, W. L. (1966). *Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas.* Reverte.

Knight, R. D. (2017). *Physics for Scientists and Engineers: A Strategic Approach with Modern Physics* (4.a ed.). Pearson Press.

Krane, K. S. (2020). *Modern Physics* (3.a ed.). John Wiley & Sons.

Kriek, J., y Koontse, R. D. (2017). First Year Physics Students' Expectations of the Role of Mathematics in Physics. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education, 25*(2), 1-16.

Larsson, J., y Airey, J. (2021). On the periphery of university physics: trainee physics teachers' experiences of learning undergraduate physics. *Eur. J. Phys., 42*(5). https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac0e1e

Larsson, J., Airey, J., y Lundqvist, E. (2021). Swimming against the Tide: Five Assumptions about Physics Teacher Education Sustained by the Culture of Physics Departments. *Journal of Science Teacher Education, 32*(8), 934-951. https://doi.org/10.1080/1046560X.2021.1905934

Londoño, L. P. (2009). La atención: un proceso psicológico básico. *Revista de la facultad de psicología de la Universidad cooperativa de Colombia, 5*(8), 91–100.

López, V. (2010). Ondas, Sonido y Música. *Pasaj. Cienc., 13*, 49-54.

Luria, A. (1979). *Atención y Memoria.* Fontanella.

Marsden, J. E., y Tromba, A. J. (1981). *Cálculo vectorial* (3.a ed.). Fondo Educativo Interamericano.

Marzano, R. J., y Pickering, D. J. (2005). *Dimensiones del aprendizaje* (2.a ed.). ITESO.

Merino, J. M., y Muñoz, L. (2013). La percepción acústica: Física de la audición. *Revista de Ciencias, 2*, 19-26.

Monk, M. (1994). Mathematics in physics education: a case of more haste less speed. *Phys. Educ., 29*(4), 209-211. https://doi.org/10.1088/0031-9120/29/4/005

Moreira, M. A. (2014). Enseñanza de la física: aprendizaje significativo, aprendizaje mecánico y criticidad. *Revista de Enseñanza de la Física, 26*(1), 45-52.

Orozco, C. C., Velásquez, S., y Flórez, C. M. (2022). *La experimentación cualitativa exploratoria y su contribución al desarrollo del pensamiento crítico. El caso de los fenómenos ondulatorios en la clase de física* (Tesis de licenciatura, Universidad de Antioquia). Repositorio Institucional Universidad de Antioquia. https://hdl.handle.net/10495/29366

Osborne, R.J. & Wittrock, M.C. (1983). Learning science: A generative process. Science Education, 67 (4), 489-508.

Oviedo, L., y Kanashiro, A. (2012). Los registros semióticos de representación en matemáticas. *Revista aula universitaria, 13*, 29-36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Perales, F., y Cañal de León, P. (2000). *Didáctica de las Ciencias Experimentales: teoría y práctica de las ciencias.* Marfil Alcoy.

Pino, M. G., y Ferreira, M. R. (2022). La enseñanza de los problemas físico-docentes experimentales. *Lat. Am. J. Phys. Educ., 14*(2), Artículo 2302.

Piñeros, B. (2018). *Didáctica de la física y las matemáticas: enseñanza del movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática* (Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional). Repositorio Institucional UPN. http://hdl.handle.net/20.500.12209/11115

Posada, J. M. (2002). Memoria, cambio conceptual y aprendizaje de las ciencias. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 1*(2), 92-113.

Posner, G.J., Strike, K.A., Hewson, P.W. & Gertzog, W.A. (1982). Acconunodation to a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education, 66*(2), 211-227.

Pospiech, G., Eylon, B., Bagno, E., y Geyer, M. A. (2015). The role of mathematics for physics teaching and understanding. *IL NUOVO CIMENTO, 38*, 1-10.

Reitz, J. R., Milford, F. J., y Christy, R. W. (1996). *Fundamentos de la teoría electromagnética* (4.a ed.). Addison Wesley Iberoamericana.

Resnick, R., Halliday, D., y Krane, K. (1998). *Física 1* (4.a ed.). Compañía Editorial Continental.

Rico, A., Ruiz-González, A., Azula, O., y Guisasola, J. (2021). Dificultades de aprendizaje del modelo de sonido: una revisión de la literatura. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(2), 5-23. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3217

Riveros, H. (2020). Enseñanza de la física experimental. *Lat. Am. J. Phys. Educ, 14*(4), Artículo 3415.

Rivière. A. (2012). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En Á. Marchesi., C. Coll y J. Palacios (Comp.), *Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar* (cap.9, pp. 155-182). Alianza.

Rodríguez, M. E. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números, Revista de didáctica de las matemáticas, 77*, 35-49.

Ruiz, A. (2015). Asuntos de método en la educación matemática. Revista Digital: Matemática, Educación E Internet, 2(1). https://doi.org/10.18845/rdmei.v2i1.2157

Serway, R. A. (1999). *Física 1* (4.a ed.). McGraw Hill.

Serway, R. A., y Jewett, J. W. (2014). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (9.a ed.). Cengage Learning.

Thurman, H. V., y Trujillo, A. P. (2019). *Essential of Oceanography* (13.a ed.). Pearson.

Tobón, R., y Perea, A. (1985). Problemas actuales en la enseñanza de la física. *Enseñanza de la Física, 1*(1), 7-15.

Treviño, E., y Socorro, M. (2013). Dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de la Física. *Presencia Universitaria, 3*(5), 70-77.

Vargas, G. (2017). Recursos educativos didácticos en el proceso enseñanza aprendizaje. *Cuadernos, 58*(1), 68-74.

You, Z. J. (2008). A close approximation of wave dispersion relation for direct calculation of wavelength in any coastal water depth. *Applied Ocean Research, 30*, 113-119.