http://dx.doi.org/10.46219/rechiem.v15i1.120

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

# ANÁLISIS DE APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES EN TEXTOS DE ÁLGEBRA LINEAL Y RESOLUCIONES CON GEOGEBRA

## ANALYSIS OF APPLICATIONS OF SYSTEMS OF EQUATIONS IN LINEAR ALGEBRA TEXTS AND RESOLUTIONS WITH GEOGEBRA

Diana Cecilia Pozas
dpozas179@gmail.com

*Centro Regional Universitario Bariloche, Río Negro, Argentina*
*Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina*

Octavio Emanuel Araya
octavioearaya@outlook.es

*Universidad Nacional del Comahue. Neuquén, Argentina.*

María Laura Santori
mlausantori@yahoo.com.ar

*Universidad Nacional del Comahue. Neuquén, Argentina.*

### RESUMEN

Este trabajo se encuadra en un proyecto de investigación que se desarrolla en la Universidad Nacional del Comahue, Argentina. Está centrado en la enseñanza de la matemática para la formación de futuros ingenieros y tiene por objetivos analizar problemas que vinculan conceptos de diversas disciplinas con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en materias de primer año de carreras de Ingeniería, y evaluar el papel de las TIC en la resolución de los mismos. El referencial teórico utilizado es la Teoría Antropológica de lo Didáctico. A partir de una muestra de libros de Álgebra Lineal, seleccionamos problemas relativos a circuitos eléctricos, flujo de red y mínimos cuadrados. Para la organización y análisis de la información utilizamos una categorización deductiva. Los resultados indican que las aplicaciones mencionadas promueven el estudio de determinadas técnicas en sí mismas siendo estas, además, explicitadas por los autores a través de ejemplos. El uso del software se complementa con las resoluciones en lápiz y papel, favoreciendo la coordinación de los registros algebraico y matricial. Las reflexiones presentadas en este artículo podrían contribuir a repensar las propuestas que los autores plasman en sus obras y cómo trabajarlas con estudiantes ingresantes a carreras de Ingeniería.

**PALABRAS CLAVE:**
*TAD, Ingeniería, Aplicaciones, Libros de texto, GeoGebra.*

### ABSTRACT

This work is part of a research project that is being developed at the National University of Comahue, Argentina. It is focused on the teaching of mathematics for the training of future engineers and its objectives are to analyze problems that link concepts from various disciplines with the study of linear equation systems in first-year courses in the engineering program, and also to evaluate the role of ICT in solving them. The theoretical reference used is the Anthropological Theory of the Didactic. From a sample of Linear Algebra books, we selected problems related to electrical circuits, network flow, and least squares. For the organization and analysis of the information, we used a deductive categorization. The results indicate that the aforementioned applications promote the study of certain techniques in themselves, and these are explained by the authors through examples. The use of the software is complemented with the resolutions in pencil and paper, favoring the coordination of the algebraic and matrix registers. The reflections presented in this article could contribute to rethinking the proposals that the authors express in their works and how to work with students entering engineering careers.

**KEYWORDS:**
*TAD, Engineering, Applications, Textbooks, GeoGebra.*

*Recibido: 20 de agosto de 2022 , Aceptado: 14 de marzo de 2023*

## 1. Introducción

Es usual encontrar en las introducciones de los libros de texto expresiones que indican que un curso introductorio de Álgebra Lineal es fundamental para estudiantes de muchas disciplinas. Esto es debido en gran parte al uso masivo de las computadoras y al aumento en las aplicaciones de las matemáticas en áreas que, por tradición, no son técnicas. En particular, para los estudiantes de Ingeniería podría ser el primer curso de matemáticas donde no solo deben efectuar cálculos numéricos sino también otros gestos característicos del quehacer matemático, como por ejemplo realizar una demostración matemática. También es usual encontrar en los libros de Álgebra Lineal una amplia selección de aplicaciones en forma de problemas o de ejercicios, que muestran el poder del álgebra lineal para resolver problemas de ingeniería, física, biología, economía, estadística, entre otras ciencias. Pero dichas aplicaciones se presentan, en general, en secciones separadas, dejando a criterio del docente la integración o articulación con el material teórico del curso.

La ingeniería se concibe como una disciplina que exige habilidades especiales para su ejercicio profesional. Por ejemplo, habilidad para analizar e interpretar datos técnicos y representaciones gráficas; habilidad para el uso de software; sentido del error, entre otras (Consejo Federal de Decanas y Decanos de Ingeniería, República Argentina [CONFEDI], 2014; Van der Wal et al., 2017). Tal como lo plantean los diseños curriculares que organizan y definen las competencias para los egresados de la escuela secundaria, las capacidades creativas y de resolución de problemas, así como el pensamiento complejo, son competencias que deben ser desarrolladas en la escuela secundaria y durante la instancia universitaria continuar con su desarrollo y consolidación. Sin embargo, numerosas investigaciones reportan que, en el ingreso a la universidad, una de las áreas en las que se detecta la carencia de habilidades en los estudiantes es en la interpretación y planteo de problemas (Del Valle et al., 2020; Echevarría et al., 2017; Mesa Cornejo et al., 2018).

En este trabajo consideramos el problema de investigación que consiste en analizar las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales (en adelante SEL) que se proponen en los libros de texto para primer año de carreras de Ingeniería. Para ello, seleccionamos una muestra de textos universitarios de Álgebra Lineal. La aplicación de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas posibilita que los estudiantes adquieran habilidades y destrezas para analizar, simular, modelar y resolver problemas en su campo profesional en mejores condiciones que las que obtiene sólo utilizando lápiz y papel (Atencio, 2017), por lo que mediante este trabajo pretendemos también evaluar el papel de las TIC en las resoluciones de los problemas propuestos por los libros de texto. Particularmente elegimos el software GeoGebra para realizar las resoluciones ya que es de código abierto, tiene una interfaz fácil de usar y además permite una visualización simultánea en varios registros.

Específicamente, nuestro análisis pretende brindar aportes para el estudio de las siguientes cuestiones: ¿Cómo caracterizar los tipos de tarea que proponen diferentes autores de libros de texto para Ingeniería acerca de las aplicaciones de los SEL en términos de constructos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico? y ¿Qué características tiene el uso de GeoGebra en la resolución de los problemas propuestos?

## 2. Antecedentes

La utilización del libro de texto en las aulas universitarias es una práctica generalizada que ejerce diferentes roles: como eje vertebrador de la materia, como material de consulta, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver, entre otros. El libro se puede considerar un elemento proveniente de la noosfera (Chevallard, 1991), reflejo de la manipulación social que selecciona unos contenidos frente a otros, que impone una determinada forma de estructurarlos y que propone cierto tipo de problemas con unas herramientas semióticas (de comunicación) y no otras. Presentan un contenido científico y cultural mediante un discurso propio que implica una serie de adaptaciones o transposiciones didácticas para facilitar el acceso de los estudiantes al conocimiento curricular, de manera que siempre participan de una u otra forma en el proceso de enseñanza y de aprendizaje. Es por ello que han sido objetos de múltiples investigaciones bajo variados paradigmas teóricos.

Diversas investigaciones han abordado el estudio didáctico del objeto matemático SEL enfocándose tanto en la escuela secundaria como en los primeros cursos universitarios. Las mismas reportan que los estudiantes no comprenden el significado de la solución de un SEL y, por esta razón, presentan inconvenientes para resolver correctamente un SEL presentado en forma gráfica o analítica. Usualmente, los estudiantes prescinden del empleo de la geometría para realizar justificaciones en la resolución de problemas y presentan dificultades para articular los aspectos geométricos con los algebraicos (Campos y Parraguez, 2019; Cárcamo et al., 2021; Medina Sandoval, 2019; Peña Lizano, 2019; Rodríguez et al., 2019). Asimismo, manifiestan una escasa manipulación de la estructura global de los problemas que involucran SEL, evidenciando dificultades en la interpretación y control de parámetros e incógnitas (Pozas, 2020).

En relación a la enseñanza de los SEL utilizando algún software específico encontramos varios trabajos que, en su mayoría, reportan investigaciones y/o relatos de experiencias de cátedra fundamentadas en diversos marcos teóricos y metodológicos (Atencio, 2017; Gallo y Herrera, 2017; Pérez y Vargas, 2019; Pusdá López et al., 2022; Trípoli et al., 2021). Estos estudios persiguen un objetivo común: el diseño de propuestas didácticas que brinden al estudiante una herramienta interactiva para verificar, corregir, explorar, plantear y descartar hipótesis, visualizar, etc. En definitiva, una herramienta que posibilite tanto un trabajo de carácter exploratorio como de validación.

Hemos mencionado en forma sucinta algunas investigaciones relativas a la enseñanza de los SEL tanto a nivel universitario como secundario, siendo conscientes de la amplia literatura existente al respecto.

## 3. Referencial teórico

En el presente trabajo hemos adoptado como referencial teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en adelante, TAD (Chevallard, 1999, 2007; Chevallard et al., 1997). La TAD propone que toda actividad humana realizada regularmente puede ser representada mediante organizaciones matemáticas o praxeologías (praxis + logos). Esta noción constituye la unidad mínima de análisis propuesta desde la TAD para modelizar la actividad matemática, entendida como una actividad humana más.

De manera simplificada, podemos decir que los elementos constitutivos de una praxeología se pueden representar como $[T,\tau,\theta,\Theta]$. El bloque de la práctica o "praxis" consta de tipos de tareas y técnicas $[T,\tau]$ que se identifican generalmente con el saber–hacer. De forma vinculada e inseparable se encuentra el discurso razonado sobre la práctica o "logos" formados por las tecnologías y las teorías $[\theta,\Theta]$. Por ejemplo, "resolver un sistema de ecuaciones lineales" es un tipo de tarea $T$ ,para lo cual se cuenta con el método de Gauss (o método de eliminación gaussiana) como una de las técnicas $\tau$ que permite ejecutar la tarea. La tecnología $\theta$ que explica dicha técnica se fundamenta en la noción de sistemas de ecuaciones equivalentes. Finalmente, la teoría $\Theta$ que articula y unifica los elementos mencionados es la teoría de espacios vectoriales.

En el enfoque antropológico se concibe la noción de estudio en un sentido muy general, abarcando desde la actividad matemática de los investigadores hasta la que realizan los estudiantes. La consideración de diversos procesos de estudio permite detectar aspectos invariantes presentes en todos ellos. La herramienta teórica que estructura dichos aspectos se resume en la denominada teoría de los momentos didácticos (Chevallard, 1999; Chevallard et al., 1997). Los momentos son fases o dimensiones que deben darse en los procesos de estudio para que este tenga la posibilidad de evolucionar. Chevallard postula que cualquier proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis momentos didácticos: del primer encuentro, exploratorio, de construcción de un entorno tecnológico-teórico, del trabajo de la técnica, de institucionalización y de evaluación. El discurso tecnológico-teórico relativo a una técnica hace referencia a un discurso matemático que permite describir, interpretar y justificar la actividad matemática que se está realizando.

Las praxeologías más elementales se llaman puntuales y están constituidas alrededor de lo que en determinada institución es considerado como un único tipo de tareas. Cuando una praxeología se obtiene por integración de cierto conjunto de praxeologías puntuales, tales que todas ellas aceptan un mismo discurso tecnológico $\theta$, se dice que se tiene una praxeología local caracterizada por dicha tecnología $\theta$. Una praxeología local permite plantear y resolver problemas (o, al menos, responder ante ellos) que en las praxeologías puntuales iniciales no podían formularse con toda propiedad. Resulta, por tanto, que estas nuevas cuestiones problemáticas deberían constituir la "razón de ser" que dan sentido a la praxeología local. Aunque en la TAD se habla también de praxeologías "regionales" y "globales", en este trabajo no iremos más allá del análisis de una praxeología local que vive en la enseñanza universitaria, en torno a los sistemas de ecuaciones lineales.

Desde la TAD se han caracterizado algunos indicadores que permiten medir el grado de completitud relativa de una praxeología local. En este trabajo consideramos algunos de los indicadores establecidos por Fonseca Bon (2011) para elaborar nuestro instrumento de análisis:

1. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.
2. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas.
3. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.
4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas".
5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas.
6. Existencia de tareas matemáticas abiertas.
7. Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas.

Destacamos que la noción de "completitud" es relativa, es decir, no existen praxeologías completas ni incompletas. Se trata de una cuestión de grado de completitud, el cual depende del cumplimiento de los indicadores antes mencionados.

## 4. Metodología

Este trabajo se enmarcó en una metodología de carácter cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (Hernández Sampieri et al., 2014). Para responder a las preguntas de investigación consultamos los programas de cátedra de todas las universidades públicas argentinas que dictan carreras de Ingeniería y tomamos registro de la bibliografía utilizada en los cursos de Álgebra y Geometría. Escogimos una muestra intencional (Izcara Palacios, 2014) que consta de 12 libros, los cuales se detallan en la Tabla 1.

*Tabla 1*
*Muestra de textos universitarios de Álgebra Lineal*

| | **Título del libro** | **Autor/es** | **Número y año de edición en español** |
|---|---|---|---|
| 1. | Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal | Kozak, A., Pastorelli, S. y Vardanega, P. | 1.a edición 2007 |
| 2. | Álgebra Lineal | Grossman, S. y Godoy, J. | 7.a edición 2012 |
| 3. | Álgebra Lineal. Una introducción moderna | Poole, D. | 3.a edición 2011 |
| 4. | Álgebra Lineal y sus aplicaciones | Lay, D. | 4.a edición 2012 |
| 5. | Álgebra Lineal con aplicaciones | Williams, G. | 4.a edición 2002 |
| 6. | Fundamentos de Álgebra Lineal | Larson, R. | 7.a edición 2013 |
| 7. | Álgebra Lineal Aplicada | Noble, B. y Daniel, J. | 3.a edición 1989 |
| 8. | Álgebra Lineal y sus aplicaciones | Strang, G. | 4.a edición 2007 |
| 9. | Álgebra Lineal. Fundamentos y aplicaciones | Kolman, B. y Hill, D. | 8.a edición 2006 |
| 10. | Álgebra Lineal con aplicaciones –Parte I | Costa, V., Rossignoli, R., Sorichetti, C. y Vampa, V. | 1.a edición 2018 |
| 11. | Álgebra Lineal con Aplicaciones | Perry, W. | 1.a edición 1990 |
| 12. | Álgebra Lineal con Aplicaciones | Nakos, G. y Joyner, D. | 1.a edición 1999 |

*Nota. Elaboración propia.*

Hemos relevado todos los problemas que los autores proponen como aplicación de los SEL. En la Tabla 2, en la columna izquierda, agrupamos los mismos según los conceptos matemáticos o de otras ciencias que intervienen en el planteo de los SEL y en la interpretación de los resultados. En la columna derecha, mencionamos algunos ejemplos de los tipos de tarea encontrados.

*Tabla 2*
*Tipos de tarea que involucran resolución de SEL*

| **Tipos de tarea que involucran conceptos de:** | **Ejemplos de tipos de tarea** |
|---|---|
| Álgebra Lineal, Cálculo, Geometría y Cálculo Numérico | Calcular el polinomio de interpolación, dada una cierta cantidad de puntos.<br>Calcular una solución aproximada de un SEL por el método de mínimos cuadrados.<br>Resolver SEL sobre algún Z_p.<br>Representar una función racional como una suma de fracciones parciales.<br>Resolver SEL por los métodos de Gauss-Seidel y Jacobi.<br>Resolver SEL utilizando la descomposición LU. |
| Física | Calcular intensidades de corriente, resistencias y voltajes de circuitos eléctricos.<br>Balancear un sistema de pesos y palancas. |
| Química | Balancear reacciones químicas.<br>Calcular la distribución de temperatura en estado estacionario de una placa. |
| Economía | Calcular precios de equilibrio (Modelo de Leontief).<br>Calcular la cantidad de anuncios publicitarios de una marca de refrescos cotizados por TV, radio y revista. |
| Ingeniería | Calcular el patrón de flujo de tránsito en una red de calles.<br>Calcular el patrón de flujo de agua que circula por un acueducto. |

*Nota. Elaboración propia.*

### 4.1 Instrumento de análisis

En consonancia con el referencial teórico adoptado y en base al relevamiento realizado en los libros de texto, desarrollamos una categorización deductiva (Romero, 2005). Para el diseño de un instrumento de análisis establecimos las siguientes categorías:

- Momento en que es ubicada la tarea: nos referimos a los seis momentos didácticos de cualquier proceso de estudio, los cuales no presuponen una estructura jerárquica o cronológica.

- Campo numérico involucrado: refiere al contexto real en que se encuentran los problemas. Por ejemplo, una intensidad de corriente puede ser un número racional negativo. Nos interesa indagar si este aspecto es tenido en cuenta en los enunciados y/o resultados de los problemas propuestos.

- Técnicas: refiere al procedimiento que se propone en el libro (generalmente a través de ejemplos) para resolver una determinada tarea. Es importante destacar que para la TAD la palabra técnica se utiliza como una "manera de hacer" una tarea, no necesariamente como un procedimiento estructurado, metódico o algorítmico. Asimismo, nos interesa indagar si el problema permite formular otras preguntas (preguntas derivadas) y si permite la manipulación de variables y parámetros.

- Tecnologías: refiere a las propiedades que justifican las técnicas utilizadas. Nos interesa analizar si dichas propiedades están suficientemente explicitadas en el discurso tecnológico-teórico de los autores.

- Uso de software: con esta categoría de análisis pretendemos evaluar si la información dada y las técnicas que resuelven la tarea promueven el uso de software ya sea para graficar, establecer conjeturas o realizar cálculos.

Dada la variedad de tipos de tarea encontrada, de los cuales solo hemos mencionado algunos ejemplos en la Tabla 2, decidimos seleccionar problemas según el tipo de conjunto solución del SEL que los modela. Los problemas de análisis de redes, análisis de circuitos eléctricos y de mínimos cuadrados son adecuados, ya que los tipos de tarea que se desprenden de estos problemas amplían el estudio de SEL compatibles determinados e indeterminados, y SEL incompatibles, vía aplicaciones a diversas ingenierías.

Los problemas que hemos analizado se relacionan con los siguientes tipos de tarea:

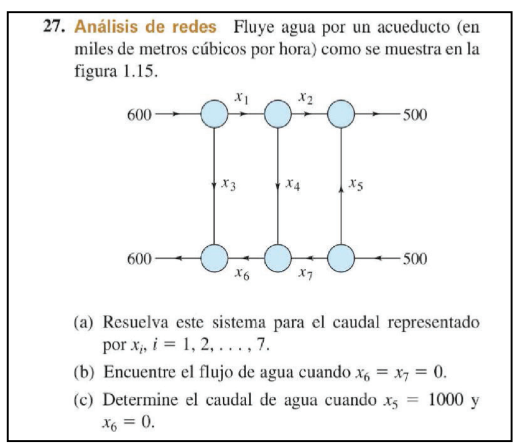
- Flujos de red: calcular flujos de tráfico de vehículos o de caudales de agua.
- Circuitos eléctricos: calcular intensidades de corriente, voltajes y resistencias.
- Método de Mínimos Cuadrados: calcular la "mejor" solución para sistemas incompatibles.

Destacamos que no todos los libros de la muestra desarrollan aplicaciones como las que mencionamos. Por ello, en lo posible, seleccionamos algunos problemas de cada tipo en cada libro de la muestra, procedimos a la resolución de los mismos, y luego aplicamos el instrumento de análisis presentado anteriormente. Durante la investigación, a veces, fue necesario volver atrás, añadir cuestiones o modificar el instrumento de análisis. Asimismo, dicho instrumento se ha sometido a la triangulación entre los autores de este trabajo, sin pretender garantizar en este tipo de estudio la generalización de sus resultados.

## 5. Resultados

### 5.1 Análisis de flujo de red

En la muestra de textos, las praxeologías relativas al análisis de redes aparecen con otras denominaciones tales como: análisis de redes de transporte, flujo de tráfico o flujo de redes. Si bien el término "redes" tiene un significado preciso en matemáticas, no todos los textos hacen una introducción en relación a la terminología. Por otro lado, todos los autores de alguna manera hacen referencia a la noción de conservación del flujo en una red. En Kozak et al. (2007), por ejemplo, dicen: "La regla fundamental que rige el flujo a través de una red se denomina conservación del flujo, y establece que, en cada nodo, el flujo que entra es igual al flujo que sale" (p. 275). En términos de la TAD, este es el principal saber que los autores incorporan al discurso tecnológico-teórico y que permite modelizar los problemas a través de SEL. A continuación, seleccionamos una tarea relativa al análisis de redes extraída del libro de Ron Larson (2013), proponemos una posible resolución y aplicamos el instrumento de análisis. Finalmente, consideramos todos los libros de la muestra que desarrollan el tema en cuestión para hacer observaciones sobre lo que hemos encontrado en general.


**27. Análisis de redes** Fluye agua por un acueducto (en miles de metros cúbicos por hora) como se muestra en la figura 1.15.



(a) Resuelva este sistema para el caudal representado por $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, 7$.

(b) Encuentre el flujo de agua cuando $x_6 = x_7 = 0$.

(c) Determine el caudal de agua cuando $x_5 = 1000$ y $x_6 = 0$.

*Figura 1. Tarea sobre flujo de redes*
*Nota. Tomado de Larson (2013, p. 33).*

Luego de plantear el SEL según la ley de conservación de flujo, ingresamos la matriz ampliada en la hoja de cálculo de GeoGebra y resolvemos el sistema correspondiente utilizando la matriz escalonada reducida:

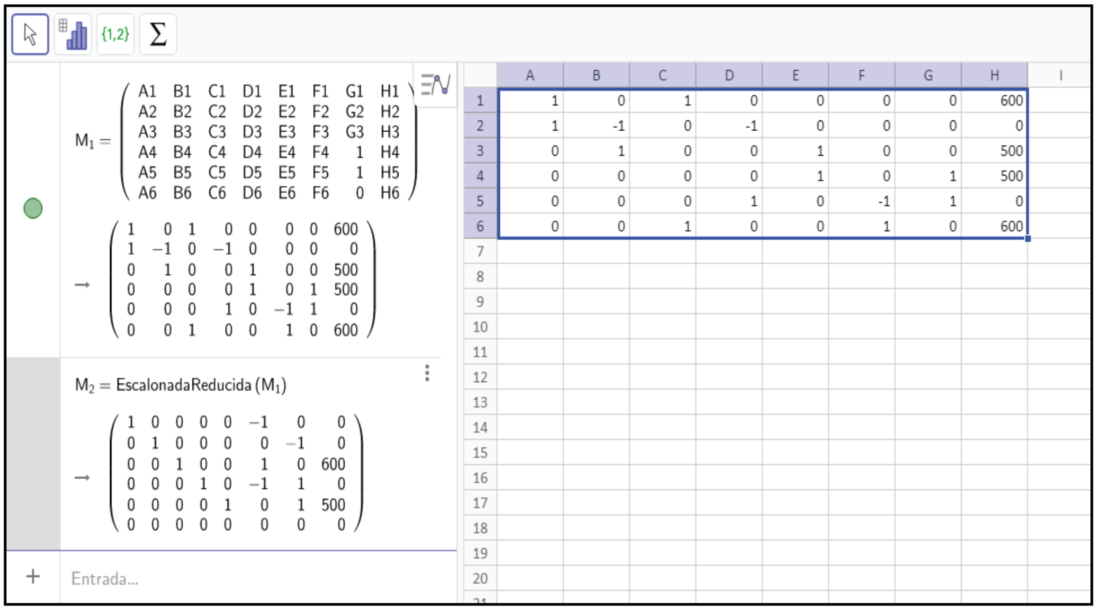



*Figura 2. Resolución del SEL relativo a Figura 1 con GeoGebra*
*Nota. Elaboración propia.*

De la matriz escalonada reducida obtenemos:

$$x_1 = x_6\,;\;\; x_2 = x_7\,;\;\; x_3 = 600 - x_6\,;$$

$$x_4 = x_6 - x_7\,;\;\; x_5 = 500 - x_7$$

Cuando $x_6 = x_7 = 0$ el agua solo fluye por las ramas $x_3$ y $x_5$, siendo los flujos de de 600 y 500 (miles de metros cúbicos/hora), respectivamente.

El caudal de agua cuando $x_5 = 1000$ y $x_6 = 0$ es:

$$x_1 = 0;\; x_2 = -500;\; x_3 = 600;$$

$$x_4 = 500\,;\;\; x_7 = -500$$

Finalizada la resolución de esta tarea, procedimos a su análisis aplicando el instrumento.

» Momento en que es ubicada la tarea: dadas las características del enunciado, donde la gráfica representa una red (acueducto) similar a los ejemplos que el autor ya ha desarrollado, esta tarea se ubica en el momento del trabajo de la técnica.

» Campo numérico involucrado: los datos son números naturales y las incógnitas pertenecen al conjunto de los números enteros.

» Técnica: el autor hace una breve introducción al tema explicitando el procedimiento con un ejemplo general, es decir, sin colocar unidades a los flujos. Luego, dado que en este caso hay seis nodos, se espera que el estudiante construya un SEL de seis ecuaciones con siete incógnitas. Se obtienen resultados interesantes cuando varían algunos flujos, pero estos no responden a una pregunta (derivada), más bien se le indica al estudiante qué es lo que tiene que hacer. Destacamos que el sistema dado admite flujos negativos o nulos sin que el mismo colapse. Incluso sería beneficioso para el estudiante que realice un nuevo gráfico para dichos flujos.

» Tecnología: la resolución de este tipo de tarea solo requiere de elementos teórico-tecnológicos tales como el concepto de conservación de flujo y la lectura de un gráfico. Dichos elementos alcanzan para construir el SEL correspondiente.

» Uso de software: A partir de la información que brinda el problema, es posible utilizar GeoGebra para resolver el SEL, mediante el comando EscalonadaReducida. Observamos la conveniencia de usar el software para resolver un SEL de 6x7, permitiendo una economía en el tiempo de resolución.

*5.1.1 Observaciones generales sobre tareas de flujo de red*

Las observaciones que presentamos a continuación se basan en las categorías del instrumento de análisis, considerando todos los libros de la muestra que proponen tareas relativas al análisis de redes.

Los tipos de tarea relativos al análisis de redes se pueden modelizar a través de un SEL de n ecuaciones con $m$ incógnitas. Como mencionamos anteriormente, las tareas propuestas en los textos de la muestra se resuelven con una única técnica sustentada en los siguientes elementos tecnológicos:

- Principio o ley de conservación del flujo.
- Un SEL que modeliza una situación de flujo de red es siempre compatible indeterminado.

El momento didáctico predominante en donde podríamos ubicar este tipo de tarea es dentro del trabajo de la técnica. Los autores explicitan cómo hallar el modelo que corresponde a la situación planteada, y luego, en la sección ejercicios y/o problemas, presentan situaciones similares para resolver con la misma técnica. Todas las tareas involucran datos (e incógnitas) que pertenecen al conjunto de los números enteros. En algunos casos, esto se justifica por la naturaleza de los datos. Por ejemplo: número de vehículos en una red de tráfico. Pero en otros casos, solo se presenta la gráfica de flujos sin un contexto explícito, y los datos siguen siendo números enteros positivos. Posiblemente esto se deba a que se espera que el estudiante resuelva el SEL "a mano", dado que ya conoce el método de Gauss. Vemos una vez más que el objetivo es el trabajo de la técnica. En este sentido, cobra relevancia el uso de un software que permita trabajar con redes más grandes, agilizar los cálculos y focalizar la atención en otras cuestiones, como por ejemplo, utilizar diferentes parametrizaciones para caracterizar, e incluso graficar, el conjunto solución (Possani et al., 2010). Notamos que los problemas más interesantes son aquellos donde las redes tienen más de cuatro nodos y donde, además, la solución general esté expresada en función de dos o más variables. En este sentido, las preguntas derivadas no solo se pueden relacionar con el propio contexto de la tarea, sino que también pueden promover un estudio de cuestiones intramatemáticas.

### 5.2 Análisis de circuitos eléctricos

De manera similar a lo que sucede con los problemas de flujo, las praxeologías relativas a los circuitos eléctricos también involucran una breve introducción, la descripción de los ostensivos (nodo, resistencia, fuente) y un diagrama. Dicha introducción podría considerarse el entorno tecnológico-teórico, donde se enuncian la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff que explican las técnicas utilizadas. El modelo matemático que engloba este tipo de praxeologías corresponde a un SEL compatible determinado.

En Kolman y Hill (2006), los problemas de circuitos eléctricos se presentan en una sección específica, dentro del capítulo en el que se abordan aplicaciones de SEL y matrices. Los autores presentan las definiciones de ciclo de voltaje y nodo de corriente, enuncian la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff, y luego afirman que "ahora podemos aplicar estas ideas, y los métodos para resolver sistemas lineales, a la resolución de problemas relacionados con los circuitos eléctricos" y que dichos problemas tienen el siguiente formato general: "en un circuito con baterías, resistencias y cables, determinar todos los valores desconocidos de la diferencia de potencial eléctrico en las baterías, de las resistencias y de las corrientes, dados algunos valores, suficientes para calcular los valores desconocidos" (Kolman y Hill, 2006, p. 146).

A continuación, presentamos una tarea que precisamente consiste en determinar los valores desconocidos en el circuito dado:

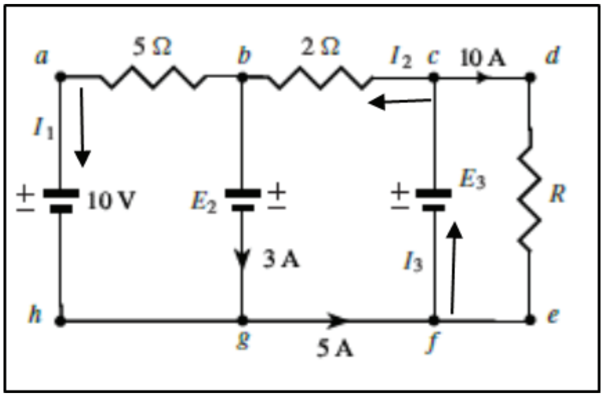



*Figura 3. Tarea sobre circuitos eléctricos*
*Nota. Elaboración propia.*

Resolveremos esta tarea aplicando la técnica propuesta por los autores para la resolución de circuitos. Las incógnitas son $I_1, I_2, I_3$ . Dado que en el enunciado original estas corrientes no tienen dirección asignada, les asignamos mediante flechas una dirección arbitraria, tal como aparece en la Figura 3. Además, en el segmento $b \to g$ la corriente vale 3A, en el segmento $g \to f$ vale 5A y en el segmento $c \to d \to e \to f$ vale 10A.

Además de las corrientes, tenemos como incógnitas dos fuentes de alimentación $E_2$ y $E_3$., y la resistencia $R$. El siguiente paso es construir el SEL teniendo en cuenta la ley de corriente de Kirchhoff. Al haber cuatro nodos $(b, c, g, f)$ tendremos cuatro ecuaciones:

$$b: \; I_2 = I_1 + 3A \qquad c: \; I_3 = I_2 + 10A$$
$$g: \; I_1 + 3A = 5A \qquad f: \; I_3 = 5A + 10A$$

Ahora, teniendo en cuenta la ley de voltaje de Kirchhoff, agregamos tres ecuaciones más al sistema:

$$\begin{aligned} h \to a \to b \to g \to h: &\quad 10 + 5I_1 - E_2 = 0 \\ g \to f \to c \to b \to g: &\quad E_3 - 2I_2 - E_2 = 0 \\ f \to c \to d \to e \to f: &\quad E_3 - 10R = 0 \end{aligned}$$

El SEL expresado en forma matricial será:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ E_2 \\ E_3 \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \\ 15 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

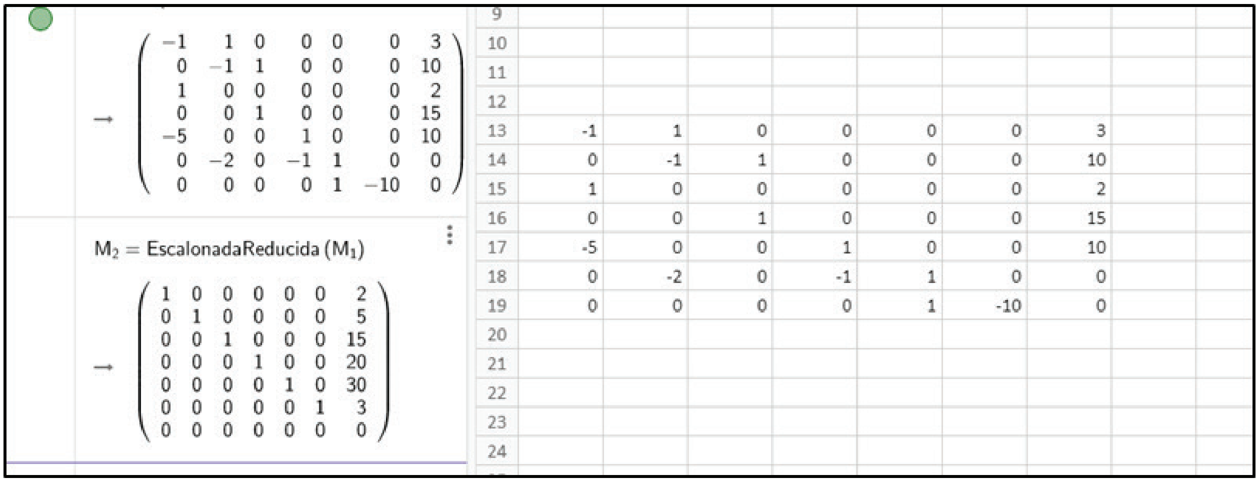



*Figura 4. Resolución del SEL relativo a Figura 3 con GeoGebra*
*Nota. Elaboración propia.*

La matriz escalonada reducida muestra, como esperábamos, que el SEL tiene solución única. Añadiendo las unidades de medida correspondientes, dicha solución es:

$$I_1 = 2A, \;\; I_2 = 5A, \;\; I_3 = 15A$$
$$E_2 = 20V, \;\; E_3 = 30V, \;\; R = 3\Omega$$

» Momento en que es ubicada la tarea: los autores desarrollan detalladamente un ejemplo y luego proponen ejercicios con algunas variantes que no producen cambios sustanciales en la técnica de resolución. Por lo tanto, ubicamos esta tarea en el momento del trabajo de la técnica.

» Campo numérico involucrado: los datos e incógnitas pertenecen al conjunto de los números enteros positivos.

» Técnica: la técnica requiere suposiciones en torno a los sentidos de las corrientes al momento de construir el SEL. Las ecuaciones se construyen en función de la cantidad de nodos y de mallas existentes en el circuito. Las variables son de diferente índole: corriente, batería y resistencia. Esto posiblemente permita el trabajo con parámetros. Asimismo, permite formular preguntas derivadas: ¿cómo se comporta el circuito si suponemos los sentidos de las corrientes de manera distinta? ¿Qué sentido tiene obtener un valor negativo o nulo para las diferentes incógnitas?

» Tecnología: la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff justifican la técnica para construir, en este caso, un SEL de 7x6. No se explicita por qué sobra una ecuación, hecho que se observa en la matriz escalonada reducida.

» Uso de software: utilizamos GeoGebra para resolver el SEL mediante el comando **EscalonadaReducida.**

En David Lay (2012), se suponen conocidos los ostensivos utilizados en los gráficos de circuitos y, luego de enunciar la ley de Ohm, se mencionan las unidades con las cuales se miden el voltaje, la resistencia y el flujo de corriente. Para construir el SEL asociado a un circuito eléctrico, se enuncia la ley de Kirchhoff sobre el voltaje: "La suma algebraica de las caídas de voltaje R.I en una dirección alrededor de un circuito es igual a la suma algebraica de las fuentes de voltaje en la misma dirección alrededor del circuito" (Lay, 2012, p. 82). A continuación, considera a modo de ejemplo una red que contiene tres circuitos cerrados y calcula el valor de la corriente que fluye por cada circuito. La técnica que el autor propone consiste en:

- Plantear un SEL donde el número de ecuaciones (una ecuación por circuito o malla) coincide con el número de intensidades desconocidas (una intensidad por cada circuito o malla). Es decir, plantear un SEL de nxn. En principio, asumir que todas las corrientes en todos los circuitos o mallas fluyen en sentido antihorario.

- Analizar cada circuito por separado efectuando la suma algebraica de las caídas de voltaje, pero teniendo en cuenta las ramas en común en donde hay que evaluar si las intensidades de corriente tienen o no el mismo sentido. Luego, aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff para obtener una ecuación.

A continuación, presentamos un tipo de tarea donde se pide determinar las corrientes del circuito. Para construir el SEL empleamos la técnica propuesta por el autor:

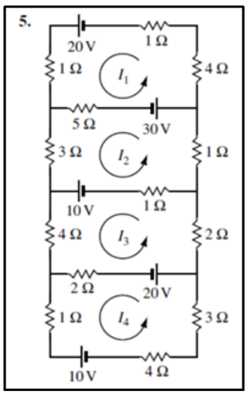



*Figura 5. Tarea sobre circuitos eléctricos*
*Nota. Tomado de Lay (2012, p. 86).*

Para el circuito 1 la suma algebraica de las caídas de voltaje es:

$$1.I_1 + 5.I_1 + 4.I_1 + 1.I_1 = 11.I_1$$

Pero en la rama común también hay una caída de voltaje asociada a $I_2$ , la cual tiene dirección opuesta a $I_1$ . Entonces, para el circuito 1 tenemos que: la suma total de caídas de voltaje es 11I_1-5I_2 y la suma de los voltajes es 50 volts. Finalmente, aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff obtenemos la ecuación: $11I_1 - 5I_2 = 50$.

En el circuito 2 tenemos que considerar que hay dos ramas en común donde las corrientes fluyen en sentido opuesto a $I_2$ , es decir, a la suma algebraica hay que restarle $5\,I_1$ y $1.I_3$ . En este circuito consideramos las baterías negativas por la misma razón. Entonces, la ecuación resultante es: $10I_2 - 5I_1 - I_3 = -40$.

Para el circuito 3 tenemos la ecuación: $9I_3 - I_2 - 2I_4 = 30$.

Para el circuito 4 tenemos la ecuación: $10I_4 - 2I_3 = -30$.

Finalmente, resolvemos este SEL de 4x4 con GeoGebra, usando el comando Inversa.

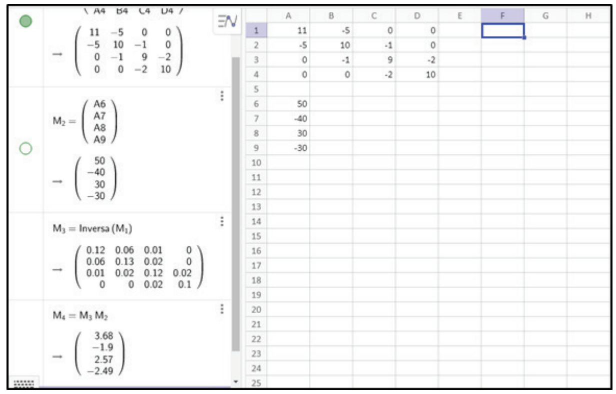


*Figura 6. Resolución del SEL relativo a Figura 5 con GeoGebra*
*Nota. Elaboración propia.*

» Momento en que es ubicada la tarea: ubicamos esta tarea en el momento del trabajo de la técnica, ya que el enunciado solo consiste en calcular el flujo de corriente a partir de la información que se encuentran en un gráfico.

» Campo numérico involucrado: los datos pertenecen al conjunto de los números enteros positivos. Algunas incógnitas resultaron ser números enteros negativos.

» Técnica: la técnica que propone este autor es más económica que la propuesta por la mayoría de los textos consultados, ya que no considera los nodos del circuito y permite plantear un SEL con las ecuaciones necesarias y suficientes. Las incógnitas son intensidades de corriente. No se trabaja con parámetros. Respecto a las preguntas derivadas, es inmediato preguntarnos sobre el significado de los dos valores negativos que se encuentran en el conjunto solución del sistema.

» Tecnología: el autor toma como punto de partida la ley de Ohm, luego enuncia la ley de Kirchhoff sobre el voltaje. No explicita por qué se puede suponer que todas las corrientes fluyen en sentido antihorario.

» Uso de software: utilizamos GeoGebra para resolver el SEL mediante el comando **Inversa**, aunque señalamos que el autor propone la técnica de eliminación gaussiana. Destacamos también que el autor recomienda el uso de MATLAB o de algún otro programa de matrices para resolver el sistema.

*5.2.1 Observaciones generales sobre tareas de circuitos eléctricos*

Las praxeologías relativas a los circuitos eléctricos se encuentran en los diseños curriculares para el ciclo superior de escuelas técnicas argentinas, según la orientación de estas. Por lo tanto, el equipamiento praxeológico que traen los estudiantes egresados de una escuela secundaria u otra, difieren significativamente. Sin embargo, el discurso tecnológico-teórico desplegado por los autores (la mayoría de ellos extranjeros) asume que varios conceptos son conocidos por los estudiantes, como así también la simbología que suele usarse, por ejemplo, para diagramar un circuito.

Es así que las tareas que hemos analizado fueron ubicadas en el momento del trabajo de la técnica donde los SEL obtenidos tienen, en general, más ecuaciones que incógnitas, pero son siempre compatibles determinados. Solo en el texto de Lay (2012) encontramos una técnica mediante la cual obtenemos ecuaciones linealmente independientes. En este sentido, la notación matricial del SEL está un tanto desaprovechada ya que no se promueven otras formas de resolución como el cálculo de la inversa o la regla de Cramer. Asimismo, observamos que en general las preguntas derivadas son escasas, y es difícil formular otras que tengan sentido "físico" y que puedan ser respondidas desde el modelo.

### 5.3 El método de mínimos cuadrados en el estudio de los SEL

Los modelos lineales que hemos analizado hasta ahora implican el estudio de SEL compatibles, ya sean determinados (circuitos eléctricos) o indeterminados (flujos de red). En esta ocasión se estudiarán situaciones donde los sistemas $Ax = b$ de orden $mxn$ resultan incompatibles.

El Método de Mínimos Cuadrados, en adelante MMC, es un método del cálculo numérico, rama de la matemática encargada de diseñar algoritmos para, a través de números y reglas matemáticas simples, simular procesos matemáticos más complejos aplicados a procesos del mundo real. Los fundamentos del MMC se basan en conceptos del álgebra lineal, tales como: sistemas de ecuaciones lineales, espacio vectorial, normas de vectores, proyección ortogonal, entre otros (Lay, 2012; Strang, 2007). Estos elementos tecnológicos exceden a los contenidos que se observaron en los programas para cursos de Álgebra y Geometría para el primer año de Ingeniería en Argentina. No obstante, en 8 de los 12 textos de la muestra se estudia este tema. Los autores, en la búsqueda de un modelo matemático que represente lo mejor posible un conjunto de datos experimentales, proponen dos métodos de solución: interpolación y obtención de una curva que se aproxime a los datos sin que necesariamente pase por ellos.

En Kozak et al. (2007), así como hicieron con otras aplicaciones de los SEL, observamos que los autores presentan una situación problemática para resolver mediante el MMC. A medida que avanzan en la resolución, presentan los elementos teóricos y tecnológicos que permiten hallar una solución aproximada. Utilizan un teorema necesario[1] para avanzar en la búsqueda de la respuesta a la situación problemática, advirtiendo que la justificación se hará más adelante. Seguidamente, destacan que existen otros problemas de diversas ciencias en donde resulta útil describir la relación entre las variables del problema por medio de una expresión (función) matemática. La técnica que permite hallar un tipo apropiado de función según la configuración de los datos experimentales se denomina "ajuste por mínimos cuadrados". Los tipos de tareas a resolver por MMC que se proponen en este libro consisten en hallar los "parámetros" de la función que mejor ajusta una determinada cantidad de datos.

A continuación, presentamos el enunciado de una tarea:

**Ejercicio 6-37**

El sindicato de trabajadores de la industria A está realizando un relevamiento de datos que pretende relacionar el sueldo promedio de los empleados de la industria A con el monto de exportación de la misma. Revisando datos en los archivos de aduana y del propio sindicato, se han determinado los siguientes datos:

| Año | 1993 | 1996 | 1999 | 2001 | 2003 |
|---|---|---|---|---|---|
| Exportación de la industria A (en millones de dólares) | 1 | 5 | 13 | 8 | 11 |
| Sueldo promedio de un obrero de la industria A (en dólares) | 400 | 450 | 1000 | 550 | 750 |

*a)* Graficar los datos. (Sueldo promedio de un obrero en función del monto de exportación de esta industria.)
*b)* Suponga que el sueldo promedio de un obrero es función del monto de exportación de la industria A, determine entonces una ley lineal y otra cuadrática que ajusten dichos datos y grafíquelas junto a los datos.
*c)* Si para el año 2007 se proyecta exportar 15 millones de pesos, ¿cuánto sería el sueldo promedio de un obrero, estimativamente para cada función determinada?

*Figura 7. Tarea a resolver por MMC*
*Nota. Tomado de Kozak et al. (2007, p. 378).*

En esta ocasión solo presentaremos la resolución de una parte del ítem b), es decir, planteamos un SEL de 5x2, para encontrar las incógnitas $a$ y $b$ de un modelo lineal $a.x + b = y$ . El SEL se construye con los datos del enunciado, donde $x_i$ es la exportación según cada año e $y_i$ es el sueldo promedio correspondiente. Se pretende hallar una solución del sistema $Ax = B$ y dicho sistema es:

[1] "Si A es una matriz de mxn tal que rango$\mathrm{A} = \mathrm{n}$, entonces $\mathrm{A^T A}$ es no singular y el sistema normal asociado $\mathrm{A^T A}\,\bar{\mathrm{x}} = \mathrm{A^T B}$ tiene solución única, denominada solución por mínimos cuadrados de $\mathrm{Ax = B}$. Con conceptos de espacios vectoriales, se podrá demostrar que el sistema normal asociado siempre es compatible" (Kozak et al., 2007, p. 365).

$$\begin{cases} a+b=400 \\ 5a+b=450 \\ 13a+b=1000 \\ 8a+b=550 \\ 11a+b=750 \end{cases}$$

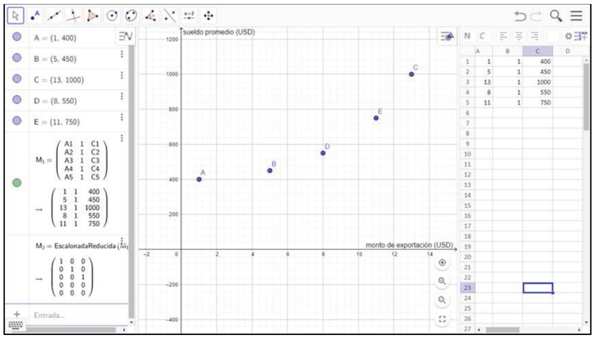
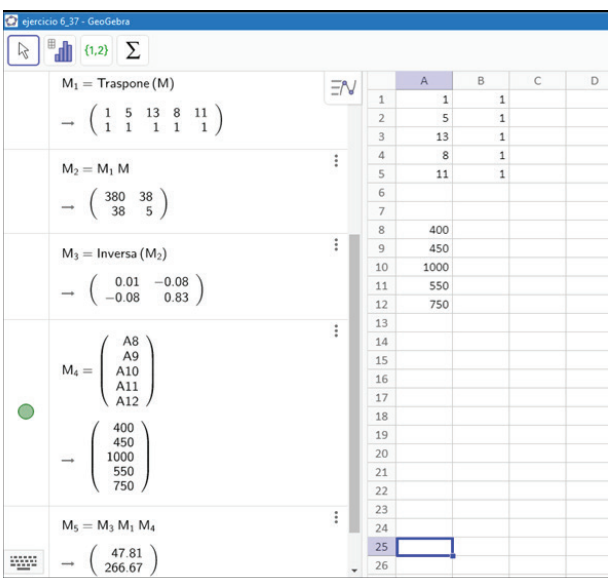


*Figura 8. Resolución del SEL - interfaz de GeoGebra*
*Nota. Elaboración propia.*

La matriz escalonada reducida nos muestra que el SEL es incompatible. Entonces, adoptaremos como solución aproximada del sistema $Ax = B$ a la solución del sistema normal consistente asociado:
$A^T A\,\bar{x} = A^T B$.




La última matriz en la vista algebraica indica los valores de las incógnitas $a$ y $b$ necesarios para determinar la "ley lineal" $a.x+b=y$ que ajusta los datos.

» Momento en que es ubicada la tarea: dado que los autores desarrollan algunos ejemplos que sirven como guía, podríamos ubicar esta tarea en el momento del trabajo de la técnica. Esto es, se espera que el estudiante aplique el MMC utilizando un conjunto de datos que ya viene dado.

» Campo numérico involucrado: los datos e incógnitas pertenecen al conjunto de los números racionales positivos.

» Técnica: consiste en plantear un SEL, donde las incógnitas son los coeficientes de una función polinomial y cada ecuación se construye según los datos del problema. Luego, se procede a resolver el sistema normal asociado. En dicho SEL no hay parámetros.

» Respecto a las preguntas que podrían derivarse de este problema observamos que se pide "hallar estimativamente" el valor de un sueldo promedio en un período adecuado. Cualquiera sea el modelo (lineal o cuadrático) elegido hay que tener cuidado con las estimaciones fuera del rango de las variables. Por otro lado, no se pide estimar entre valores intermedios a partir de los datos tabulados. Además, la tecnología para resolver el problema por el MMC no admite la manipulación de parámetros en el sentido algebraico. Es decir, el sistema normal asociado siempre tiene solución única.

» Tecnología: dado que en el problema resuelto las columnas de la matriz A son linealmente independientes, el sistema normal asociado es compatible determinado. Por lo tanto, es posible obtener una única solución por MMC.

» Uso de software: con GeoGebra podemos graficar los datos, como solicita el inciso a), y también realizar los cálculos matriciales necesarios para determinar un modelo lineal. Destacamos que la ley cuadrática que ajusta estos datos puede hallarse de manera análoga, planteando un SEL de 3x5.

En el libro de Grossman y Godoy (2012) el MMC se encuentra desarrollado en el capítulo de espacios vectoriales. Los tipos de tarea propuestos son muy similares a los que ya hemos analizado en otros textos de la muestra, tratan en general de hallar los parámetros de la recta de regresión que ajusta los datos que se presentan en el enunciado. No obstante, en este libro se encuentra una praxeología relativa a la física, la cual consiste en utilizar el método de ajuste de curvas para medir una constante física. Se desarrolla un ejemplo donde se muestra que el mejor ajuste cuadrático para cinco puntos experimentales puede proporcionar una estimación para g (aceleración de la gravedad). Nos interesa este tipo de tarea porque es adecuada para estudiantes de primer año, ya que en los planes de estudio la asignatura Física pertenece al ciclo básico de todas las carreras de Ingeniería. Nos referimos al ejemplo de la Figura 10.

El método de ajuste de curvas se puede utilizar para medir las constantes físicas. Suponga, por ejemplo, que se deja caer un objeto desde una altura de 200 metros. Se toman las siguientes mediciones:

| Tiempo transcurrido | Altura (en metros) |
|---|---|
| 0 | 200 |
| 1 | 195 |
| 2 | 180 |
| 4 | 120 |
| 6 | 25 |

*Figura 10. Datos experimentales para medir una constante física*
*Nota. Tomado de Grossman y Godoy (2012, p. 448).*

Previamente, los autores mencionan que se puede representar la relación entre la aceleración de la gravedad, el tiempo que un objeto tarda en caer y la altura donde estaba inicialmente, mediante la ley física:

$$s = s_0 - v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

donde $s_0$ es la altura inicial del objeto y $v_o$ es la velocidad inicial. Esta fórmula proveniente de la física también es parte de lo que llamamos discurso tecnológico-teórico de la praxeología que desarrollan los autores. La técnica para resolver la tarea consiste entonces en hallar una función cuadrática:

$$y = a + bt + ct^2 \qquad (2)$$

por el MMC para luego comparar los coeficientes de (1) y (2), y de esta manera obtener una estimación de $g$. Es decir, el coeficiente de $t^2$ en (2) será, si las mediciones son buenas, una aproximación razonable al número $-\frac{1}{2} g$.

Dicho esto, continuamos la resolución de la tarea con el planteo del SEL correspondiente a los valores dados en la Figura 10.

$$\begin{aligned} a + b.0 + c.0 &= 200 \\ a + b.1 + c.1 &= 195 \\ a + b.2 + c.4 &= 180 \\ a + b.4 + c.16 &= 120 \\ a + b.6 + c.36 &= 25 \end{aligned}$$

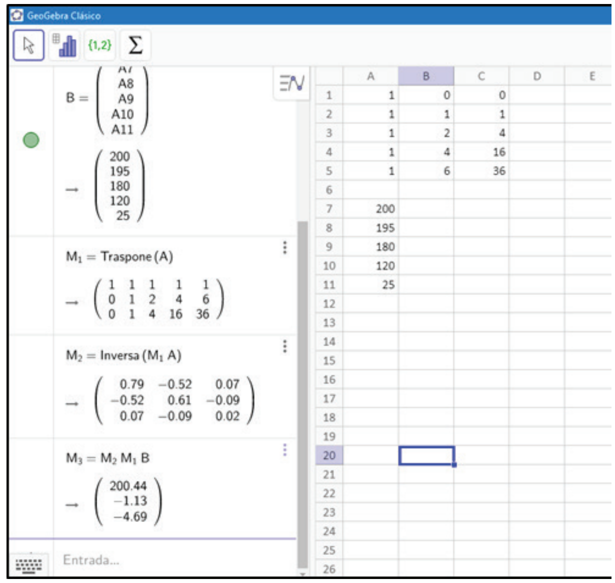



*Figura 11. Resolución del sistema normal asociado con GeoGebra*
*Nota. Elaboración propia.*

La matriz columna $\begin{pmatrix} 200.44 \\ -1.13 \\ -4.69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

indica que $c = -4.69$ y, comparando las ecuaciones (1) y (2), obtenemos que $-4.69 \cong -\frac{1}{2} g$. Es decir, $g \cong 9{,}38 \ {}^{m}/_{seg^2}$

» Momento en que es ubicada la tarea: momento del trabajo de la técnica. Destacamos que en el texto no se plantea el SEL correspondiente sino que, según el tipo de ajuste que se quiere hacer, directamente se presenta la matriz del sistema.

» Campo numérico involucrado: los datos e incógnitas pertenecen al conjunto de los números racionales positivos.

» Técnica: consiste en diseñar la matriz del sistema según un ajuste cuadrático, es decir, que la matriz tendrá 3 columnas. El número de filas dependerá de la cantidad de datos que proporciona el problema. Luego, se procede a resolver el sistema normal asociado. Las variables son magnitudes físicas. Esta tarea permite formular preguntas derivadas tales como ¿qué significa el coeficiente -1.13?, ¿cómo se podría obtener una aproximación más exacta de $g$ ?

» Tecnología: los autores demuestran un teorema[2] para el caso de ajuste lineal, y afirman que un

[2] Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$ $n$ puntos de $\mathbb{R}^2$, y suponga que no todas las $x_i$ son iguales. Si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$ entonces la matriz $A^T.A$ es una matriz invertible de 2x2.

razonamiento similar se puede aplicar para el ajuste cuadrático.

» Uso de software: utilizamos GeoGebra para los cálculos matriciales y para calcular la función cuadrática. Si bien los autores no piden explícitamente que se utilice algún software, cabe destacar que con GeoGebra podemos hallar la curva que ajusta un número finito de datos. Para ello hay que crear una lista de puntos (se puede hacer desde la hoja de cálculo) y luego utilizar el comando AjustePolinómico (<Lista de puntos>,<Grado del polinomio>). Dichos cálculos comprueban que el resultado coincide con el obtenido por métodos matriciales.

*5.3.1 Observaciones generales sobre tareas de mínimos cuadrados*

Desde el punto de vista de los procesos de estudio de los SEL, los ejemplos de tipos de tarea que hemos analizado podrían promover en los estudiantes un cambio en las prácticas que se proponen habitualmente en los cursos introductorios de Álgebra Lineal donde solo se abordan, usando lápiz y papel, SEL de orden pequeño. Además, en el caso de ser el sistema incompatible, no se hace más nada con el problema. Por otro lado, estos tipos de tareas son adecuados para descubrir toda la potencialidad del software ya sea utilizando técnicas matriciales o realizando el ajuste con comandos propios de GeoGebra.

En relación a lo que hemos observado en todos los libros de la muestra, destacamos que solo en Kozak et al. (2007) utilizan un procedimiento inductivo, ejemplificado a través de varias rectas, para mostrar que la recta de regresión es la que minimiza la suma de los cuadrados de los errores. Para explicar mejor a qué refiere el término "error" se utiliza una representación visual o geométrica (p. 371). Esta forma de abordar el método de mínimos cuadrados y su relación con los SEL es adecuada para un estudiante de primer año, pero solo la hemos encontrado en este texto de la muestra. En general, otros autores desarrollan el tema luego de introducir nociones de espacios vectoriales. Más aun, en Kolman y Hill (p. 378) encontramos una técnica general para el caso en que la matriz $A_{mxn}$ tenga rango distinto de $n$ . Pero, el discurso tecnológico-teórico no es adecuado para un curso introductorio dado que no se dispone aún de conceptos del álgebra lineal tales como: espacio columna de una matriz, complementos ortogonales, bases ortonormales, entre otros. Algo similar ocurre en problemas donde se pide encontrar una solución por mínimos cuadrados de $A.x = b$ empleando factorización $A = QR$ . Esta técnica la podemos encontrar, por ejemplo, en el texto de Lay (p. 365). En síntesis, los autores citados anteriormente abordan la resolución de ciertos SEL y el MMC mediante un discurso tecnológico-teórico más elaborado y técnicas para ejecutar vía lenguajes de programación.

## 6. Conclusiones

Durante el transcurso de este trabajo hemos analizado algunos ejemplos de las aplicaciones de los SEL que proponen los autores de una muestra de textos de Álgebra Lineal. Para ello utilizamos un instrumento basado en constructos de la TAD, el cual nos permitió caracterizar dichas aplicaciones. Hemos presentado observaciones generales acerca de los problemas de flujo, de circuitos eléctricos y de mínimos cuadrados, donde un aspecto en común es que las tareas podrían ubicarse casi todas en el momento del trabajo de la técnica, sin que esto signifique que los problemas sean de baja complejidad.

En términos de los momentos didácticos, decimos que las aplicaciones analizadas se ubican en el momento del trabajo de la técnica porque se proponen tareas similares que promueven el estudio de una determinada técnica que ya ha sido explicitada por los autores con el objetivo de practicar y adquirir habilidad hasta llegar a usarla de manera fluida. Destacamos que esta finalidad no es buena ni mala en sí misma, solo que parece ser más adecuada para cursos donde el álgebra es trabajada como herramienta explícita para el desarrollo de conceptos y nociones de otras ciencias. En este sentido, estos tipos de tareas favorecen la ejercitación permanente de competencias que se requieren en la formación del ingeniero tales como: lectura e interpretación de gráficos, uso de software, desarrollo de técnicas y notaciones matriciales, entre otras.

Respecto de la categoría "campo numérico involucrado", esperábamos que los datos y/o resultados de los problemas fueran números racionales. Si atendemos a los problemas de aplicación que se asocian a contextos de la vida real, podríamos pensar que en los textos analizados se transmite una visión de una matemática realista ya que permite que el estudiante perciba y resuelva situaciones aceptadas como posibles en el mundo real. Pero este realismo solo es parcial debido a la índole de los datos proporcionados en los enunciados de las tareas. Asimismo, las pocas preguntas derivadas que se formulan explícitamente es otra característica en común que tienen las tareas analizadas. En este sentido, y siguiendo a Gascón et al. (2006), destacamos que en el marco de la TAD lo que es relevante no es la situación concreta propuesta para ser resuelta, sino lo que se podrá hacer luego con la solución obtenida. Así, los problemas más interesantes serían aquellos que pueden desarrollarse en problemas más amplios y complejos.

Respecto a la pregunta que formulamos en la introducción: ¿qué características tiene el uso de GeoGebra en la resolución de los problemas propuestos?, podemos decir que se complementó perfectamente con el trabajo de lápiz y papel, permitiendo una economía importante de tiempo en la resolución, tiempo que no solo dedicamos al control e interpretación de los resultados, sino también a la resolución de varias tareas similares en tiempo real. Asimismo, la coordinación de los registros algebraico y matricial es otra competencia que se podría fortalecer con el uso de herramientas informáticas, tales como GeoGebra.

El análisis que hemos desarrollado plantea como posible trabajo a futuro el diseño de una secuencia didáctica mediada por GeoGebra que incluya tareas matemáticas que presenten mayores oportunidades de diversificar las técnicas y orientada a estudiantes de primer año de carreras de Ingeniería. En términos de la TAD, esta investigación podría ser un aporte para diseñar una praxeología local en torno a la enseñanza de los SEL.

Para finalizar, consideramos que la reflexión en los términos que presentamos en este estudio ayuda a comprender mejor las propuestas que los autores plasman en sus obras y, por ende, repensar cómo trabajarlas con estudiantes ingresantes a carreras de Ingeniería.

## Reconocimiento

Este trabajo fue realizado con el apoyo de la beca Estímulo a las Vocaciones Científicas (EVC), otorgada por el Consejo Interuniversitario Nacional (CIN, Argentina). Código de proyecto EVC11-UNCOMA16719.

## Referencias


Atencio, D. (2017). GeoGebra en la representación gráfica de los sistemas de ecuaciones lineales. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Eds.), *Libro de Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 729-737). FESMP. http://funes.uniandes.edu.co/20406/1/Atencio2017Geogebra.pdf

Campos, S., y Parraguez, M. (2019). Comprensión de sistemas de ecuaciones lineales: un estudio de caso en el contexto escolar en Chile. *Educação Matemática Pesquisa, 21*(3), 347-368. https://doi.org/10.23925/1983-3156

Cárcamo, A., Fuentealba, C., y Tauler, F. (2021). Concepciones sobre sistemas de ecuaciones lineales de 3x2 con solución vacía: un estudio exploratorio con estudiantes universitarios. *Formación Universitaria, 14*(1), 217-224. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062021000100217

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Aique.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas: Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Universidad de Jaén.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Horsori.

Consejo Federal de Decanas y Decanos de Ingeniería, República Argentina. (2014). *Documentos de CONFEDI. Competencias en Ingeniería.* Universidad FASTA. https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/Cuadernillo-de-Competencias-del-CONFEDI.pdf

Del Valle, C., Aguilar, N., y Montenegro, A. (2020). Resultados de la implementación del Aprendizaje Basado en Problemas en una cátedra de ciencias básicas en ingeniería. *Revista del Instituto de Investigaciones en Educación, 11*(14), 82-93. http://dx.doi.org/10.30972/riie.11144639

Echevarría, G., Felizzia, D., y Cagnina, M. (2017). Un Estudio sobre los saberes y competencias de los alumnos ingresantes a la universidad. En M. I. Morales (Comp.), *Libro de Actas del XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería* (pp. 318-326). http://emci.edu.ar/Descargas/Libro-de-Actas-EMCI-2017.pdf

Fonseca Bon, C. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática, 23*(1), 97-121.

Gallo, H., y Herrera, C. (2017). Coordinación de registros de representación semiótica en el tema Sistemas de Ecuaciones Lineales utilizando software GeoGebra. En M. I. Morales (Comp.), *Libro de Actas del XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería* (pp. 573-579). http://emci.edu.ar/Descargas/Libro-de-Actas-EMCI-2017.pdf

Gascón, J., Bosch, M., García, F., y Ruiz Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-74.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6.a ed.). McGraw-Hill.

Izcara Palacios, S. (2014). *Manual de investigación cualitativa.* Fontamara, S. A.

Medina Sandoval, E. (2019). Reconstruyendo el camino del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Solución de los sistemas de ecuaciones lineales. *Eco Matemático, 10*(2), 79-88. https://doi.org/10.22463/17948231.2595

Mesa Cornejo, V., Aparicio Fernandez, M., y Mejia Sanchez, J. (2018). Diagnóstico de los conocimientos en matemáticas que poseen los estudiantes de nuevo ingreso de Ingeniería Bioquímica de la U de G. *Revista Teoría Educativa, 2*(3), 14-19. https://www.ecorfan.org/republicofperu/research_journals/Revista_de_Teoria_Educativa/vol2num3/Revista_de_Teor%C3%ADa_Educativa_V2_N3_3.pdf

Peña Lizano, A. (2019). *Análisis de los errores y dificultades en la solución de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes de ingeniería* [Tesis de magíster, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Digital de Tesis y Trabajos de Investigación PUCP. http://hdl.handle.net/20.500.12404/15638

Pérez, E. G., y Vargas, V. (2019). Secuencia didáctica para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con GeoGebra. *Revista Electrónica Amiutem, 7*(2), 88-97. https://revista.amiutem.edu.mx/relecamiutem/article/view/188

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., y Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications, 432*(8), 2125-2140. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.004

Pozas, D. (2020). *Estudio de las praxeologías en torno a las matrices, función determinante y sistemas de ecuaciones lineales propuestas para el Ciclo Básico de las carreras de Ingeniería* [Tesis doctoral, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires]. Repositorio Institucional de Acceso Abierto, RIDAA. https://doi.org/10.52278/3073

Pusdá López, M., Rosero Medina, R., y Benavides Ortiz, G. (2022). Evaluación del software GeoGebra como recurso de enseñanza en sistemas de ecuaciones. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 6*(4) 3406-3419. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i4.2843

Rodríguez, M., Mena, A., Mena, J., Vásquez, P., y Del Valle, M. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 71-92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194

Romero, C. (2005). La categorización en la investigación cualitativa. *Revista de Investigaciones Cesmag, 11*(11), 113-118.

Trípoli, M., García, M., y Smidt, J. (2021). Sistemas de ecuaciones: dificultades que presentan alumnos de ingeniería. En L. Fernández Lucco et al., *Memorias del Encuentro Argentino y Latinoamericano de Ingeniería – 2021* (pp. 872-878). https://confedi.org.ar/publicaciones/cadi/Libro_CADI_TOMO3_22-11-18.pdf

Van der Wal, N. J., Bakker, A., y Drijvers, P. (2017). Which techno-mathematical literacies are essential for future engineers? *Int J of Sci and Math Educ, 15*(Suppl 1), 87-104. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9810-x