https://doi.org/10.46219/rechiem.v16i3.151
Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448

OBSTÁCULOS DE APRENDIZAJE EN LOS NÚMEROS ENTEROS: ANÁLISIS DE LA EJERCITACIÓN DE ESTUDIANTES DE 7° Y 8° BÁSICO

LEARNING OBSTACLES IN INTEGERS: ANALYSIS OF THE EXERCISE OF 7TH AND 8TH GRADE STUDENTS

Matías Cornejo
matias.cornejo2019@umce.cl
https://orcid.org/0009-0003-6116-3655
Profesor de Matemáticas
Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación Chile, Santiago, Chile

RESUMEN

La enseñanza de la matemática es un proceso complejo, los conocimientos adquiridos por los estudiantes pueden variar dependiendo de las representaciones utilizadas o las decisiones didácticas, el aprendizaje puede ser favorecido, o no. El docente debe atender apropiadamente el proceso de enseñanza-aprendizaje que desarrolla en el aula y anticiparse a las dificultades que pueden surgir. Para esto, es necesario conocer las causas y características de los obstáculos que surgen en los estudiantes al aprender nuevos conocimientos. El objetivo del estudio es identificar y clasificar obstáculos epistemológicos y didácticos que se desarrollan en el aprendizaje de los números enteros durante la enseñanza básica. Para la recopilación de información, considerando el currículo vigente en Chile, se realizaron grupos focales a estudiantes de 7° y 8° básico. Los resultados obtenidos muestran obstáculos epistemológicos y didácticos en los conocimientos de los estudiantes, desarrollados en los algoritmos de la sustracción y multiplicación con números enteros.

Palabras clave:
Obstáculos epistemológicos; Obstáculos didácticos; Números enteros; Educación.

ABSTRACT

The teaching of mathematics is a complex process; the knowledge acquired by students can vary depending on the representations used or the didactic decisions. Just as learning can be facilitated, it can also be hindered. The teacher must appropriately address the teaching-learning process in the classroom and anticipate possible difficulties. For this, it is necessary to understand the causes and characteristics of the obstacles that arise in students when learning new knowledge. The study's objective is to identify and classify epistemological and didactic obstacles that arise in learning integers during basic education. For information collection, focus groups were conducted with 7th and 8th-grade students. The results reveal epistemological and didactic obstacles in the student's knowledge, particularly in the algorithms of subtraction and multiplication with integers.

Keywords:
Epistemological obstacles; Didactic obstacles; Integer numbers; Education.

Recibido 25 de Enero 2024 Aceptado 26 Noviembre 2024

1. INTRODUCCIÓN

El trabajo docente en el aula no se limita a entregar información sobre su área, sino que además debe promover que los estudiantes desarrollen conocimientos significativos y tratar los fenómenos que dificultan su aprendizaje. Orrantia (2006) identifica a la aritmética como el área matemática donde los estudiantes desarrollan más dificultades, y que además afectan a otras áreas matemáticas en el futuro, como lo puede ser la geometría, la estadística, etc. Zapatera (2021) evidencia la existencia de obstáculos epistemológicos en la enseñanza de números enteros, en donde los estudiantes los consideran como si fueran números naturales. Es pertinente conocer las instancias en que surgen estos obstáculos, enfocándose en el nivel donde se empieza a enseñar sobre los números enteros y su operatoria. A partir de ellos, nos preguntamos: ¿Qué problemáticas surgen en el proceso de aprendizaje de operaciones aritméticas de números enteros en la escuela? ¿Qué origen o causa tienen estos problemas? Para esto se busca identificar obstáculos epistemológicos y didácticos que se desarrollan en el aprendizaje de los números enteros durante la enseñanza básica, y se indagará una posible causa en los textos escolares. Por lo tanto, se examinarán problemáticas que se manifiestan en el aprendizaje de las operaciones aritméticas en estudiantes de 7° y 8° básico por medio de los errores que presentan los estudiantes al realizar operaciones de números enteros, y se analizarán las distintas formas de representación utilizadas en los documentos escolares en donde se enseñan.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Obstáculos epistemológicos, didácticos y ontogenéticos

El concepto de obstáculo es acuñado por Bachelard (1993) y es definido como aquellos problemas para el aprendizaje que son propios del acto de conocer, que dificultan la enseñanza, interfiriendo con el aprendizaje de los conocimientos reales. Estos obstáculos se pueden abordar tanto en el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro del aula como en el desarrollo histórico de las matemáticas.

Por otra parte, Brousseau (2007) concibe a los obstáculos como conocimientos, los cuales tuvieron validez en un contexto y tiempo específico, pero cuando el campo de implementación crece o cambia, su efectividad se pierde. Estos obstáculos interfieren en el aprendizaje de nuevos conocimientos, ante esto Brousseau expresa que “el obstáculo no desaparece con el aprendizaje de un nuevo conocimiento. Por el contrario, opone resistencia a su adquisición, a su comprensión, frena su aplicación, subsiste en estado latente y reaparece de forma imprevista” (2007, p. 46). El autor les da relevancia a los obstáculos pues, aunque sean dificultades a futuro, tienen una importancia temporal en el aprendizaje de los estudiantes, a diferencia de lo indicado por Bachelard, quien propone rechazarlos desde el principio porque no son verdaderos a posteriori (Cid, 2016).

En la interpretación de Glaeser (1983) sobre los obstáculos epistemológicos, también se consideran como obstáculos los errores, dificultades y desconocimiento de los conocimientos. Esto se distingue de las definiciones previas, ya que se puede considerar como obstáculo la ausencia de conocimientos.

Brousseau (1983) clasifica los obstáculos según el origen de estos, categorizándolos como obstáculos epistemológicos, didácticos y ontogenéticos. Aquellos obstáculos que se presentan en la enseñanza de las matemáticas, que son propios del trabajo matemático, se consideran obstáculos epistemológicos. Los obstáculos que se desarrollen única y exclusivamente a partir del trabajo docente en el aula serán los didácticos, en palabras Brousseau, “los obstáculos de origen didáctico son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo” (1983, p. 73). Los ontogenéticos son aquellos que derivan del desarrollo cognitivo del estudiante.

Glaeser (1983) desarrolla un listado sobre los obstáculos epistemológicos que han evidenciado dentro de las matemáticas en el desarrollo de los números enteros, los cuales son:

1. Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas. No se aceptan números negativos aislados de manera aislada, como en las soluciones a problemas.
2. Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas. Se aceptan los números negativos de forma aislada, pero no se le da un significado real.

3. Dificultad para unificar la recta real. Se les da un sentido a las cantidades negativas, pero se consideran completamente opuestas a lo positivo. Debido a esto se trabaja como dos semirrectas opuestas y no como solo un sistema unificado (Cid, 2016).
4. La ambigüedad de los dos ceros. Se concibe como la existencia de un cero absoluto y un cero arbitrario, los cuales no coexisten en un mismo espacio. No se puede pensar en una cantidad negativa como algo menor que nada, dado que el cero es absoluto.
5. El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas. Las operaciones realizadas con números negativos se centran únicamente a las cuales se pueda aplicar en un contexto real. No se operan de manera abstracta descontextualizada.
6. Deseo de un modelo unificador. La necesidad de encontrar un modelo concreto que justifique tanto la adición como la multiplicación, lo cual no existe.

2.2 Tipos de representaciones

La enseñanza de las matemáticas se puede emplear de distintas formas según las representaciones utilizadas. Jerome Bruner (1969) define tres tipos de representaciones en las cuales los estudiantes aprenden y reproducen sus conocimientos: representaciones concretas, pictóricas y simbólicas.

2.2.1 Representaciones concretas

Son la representación de conocimientos matemáticos mediante la manipulación de objetos u observaciones sobre algún elemento de la vida real. Esta se puede utilizar mediante movimientos y acciones sensoriales (Vidal y Barra, 2019).

Cid (2002, citado por Cid, 2022) propone dos modelos para las representaciones concretas de los números enteros, basados en la clasificación realizada por Janvier (1983). Estos modelos de representación están basados para la estructura aditiva, pero en determinadas situaciones se pueden trasladar a la estructura multiplicativa. Estos modelos son:

Modelos de neutralización: Modelos que utilizan las acciones que se pueden ejercer sobre las cantidades de una magnitud, que poseen dos sentidos, los que se neutralizan entre sí. En este modelo la adición y sustracción se relacionan con la acción de agregar y quitar, respectivamente. Los problemas que surgen en la multiplicación son debido a que los signos de los factores adquieren distinto significado, el primero se refiere al símbolo del número y el otro al sentido de la magnitud. Ejemplos de este modelo son: deudas y haberes, pérdidas y ganancias, etc.

Modelo de desplazamiento: Utiliza el desplazamiento a lo largo de un camino, cuya posición inicial arbitraria no corresponde al inicio o el final del trayecto. La adición corresponde a un desplazamiento en un sentido aplicado desde la posición inicial, mientras que la resta es el desplazamiento en el sentido contrario. En la multiplicación se trabaja a partir de la repetición de movimientos, donde el sentido del segundo factor define el sentido del movimiento. Ejemplos de este modelo son: temperatura, ascensores, altitud por encima o debajo del nivel del mar, etc.

2.2.2 Representaciones pictóricas

Corresponden a la representación de conocimientos utilizando imágenes o esquemas, donde las imágenes y su tratamiento son el contenido en sí. Hay que tener en cuenta que las imágenes de objetos reales, que se utilicen para justificar un contenido por las acciones que se observen en dicha imagen, se consideran de todos modos representaciones concretas (Vidal y Barra, 2019).

Las representaciones pictóricas son las más escasas para los números enteros. Muñoz Cornejo (2019), en su estudio sobre las representaciones en los recursos educativos entregados por el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc), evidencia como representaciones pictóricas el uso de fichas o tarjetas de diferentes colores para diferenciar entre números positivos o negativos, sin embargo, estas representaciones no son tan relevantes, dado que los ejercicios donde se utilizan requieren un trabajo más abstracto.

2.2.3 Representaciones simbólicas

Los conocimientos se representan utilizando símbolos y lenguaje, dotados de significados. Este tipo de representaciones requiere de un lenguaje más preciso del área en el que se utiliza, debido a que se aplican en un contexto más riguroso, con propiedades, significado y reglas. Se conocen también como representaciones abstractas (Vidal y Barra, 2019).

Cid (2022) realiza una recopilación de las diferentes propuestas para la enseñanza de los números enteros, a partir de las clasificaciones de Arcavi y Bruckheimer (1981) y de Crowley y Dunn (1985). Esta clasificación recopila las diversas opciones que utilizan los docentes a la hora de introducir los números enteros en el aprendizaje, abarcando la estructura aditiva y multiplicativa. La siguiente clasificación es una modificación de la recopilación realizada por Cid (2022), cambiando el enfoque y considerando modelos de enseñanza basados en representaciones simbólicas. Los modelos simbólicos son:

Modelo inductivo: A partir de las regularidades en las operaciones aritméticas, los estudiantes crean y completan el funcionamiento de las operaciones aritméticas, pasando desde las operaciones con números positivos a utilizar números negativos. Por ejemplo, en la multiplicación se puede plantear la siguiente secuencia:

$$\begin{aligned} 2\,x\,3 &= 6 \\ 2\,x\,2 &= 4 \\ 2\,x\,1 &= 2 \\ 2\,x\,0 &= 0 \end{aligned}$$

$$2\,x\,(-1) = ?$$

Al completarla, el estudiante puede analizar cómo el resultado se vuelve negativo si se multiplican dos números de distinto signo, pasando de una regularidad a establecer una regla en la multiplicación.

Modelo deductivo: Consiste en expandir el conjunto de los números naturales, el cual los estudiantes ya conocen, integrando el subconjunto de los números negativos. Al integrar los inversos aditivos para los números naturales, se redefinen las operaciones aritméticas y se mantiene la estructura algebraica previa para generar el conjunto final de los números enteros.

Modelo concreto: Se centra en el uso de situaciones cotidianas para que los estudiantes puedan otorgarles sentido y credibilidad a las reglas establecidas en el nuevo conjunto de números enteros. Lo que lo diferencia de ser una representación concreta es su nivel de abstracción pues, a pesar de utilizar situaciones concretas, como pueden ser ejercicios sobre el nivel del mar, sobre deudas o temperatura, su falta de manejo manual por parte del estudiante o el docente lo limita en ese aspecto.

2.3 Números enteros en el currículo escolar

Muñoz (2019) señala que el Mineduc promueve la enseñanza de las matemáticas a partir de modelos concretos, pictóricos y simbólicos (COPISI), que derivan de la clasificación propuesta por Bruner.

Según los Planes de Estudios presentados por el Mineduc (2016a, b, c), los números enteros se enseñan inicialmente en 7° y 8° básico. En 7° básico se enseña el concepto de número entero, además de cómo sumar y restar entre ellos, mientras que en 8° básico se enseña sobre la multiplicación y división de estos.

El conjunto de números enteros es un conocimiento base para la matemática que se enseña en enseñanza media, donde se extienden a otros conjuntos numéricos como los números racionales o reales.

3. MARCO METODOLÓGICO

Se usa un enfoque cualitativo, de carácter interpretativo, en la que mediante el estudio del caso de estudiantes de 7° y 8° básico en un colegio particular subvencionado de Maipú, Chile, se busca identificar obstáculos epistemológicos y didácticos en los conocimientos de números enteros que poseen los estudiantes. Se mandaron solicitudes de entrevistas a diversos establecimientos, y solo este colegio abrió las puertas para el trabajo investigativo.

Para recoger información, se realizaron grupos focales con los estudiantes en los niveles de 7° y 8° básico por separado, siendo dos grupos para cada nivel. En total participaron 34 estudiantes entre los diferentes grupos. Los grupos focales tienen la intención de identificar obstáculos didácticos o epistemológicos en las respuestas de los estudiantes, asociados a la operatoria en los cursos mencionados.

Las preguntas realizadas a 7° básico tratan sobre adición y sustracción de números enteros, mientras que las preguntas para 8° básico incluyen preguntas sobre multiplicación y división. Las preguntas se crearon considerando los posibles problemas de aritmética que puedan presentar los estudiantes, basados en lo publicado por Herrera y Zapatera (2019) y Cid (2016), y en la identificación de obstáculos epistemológicos de Glaeser (1983).

Se espera que los estudiantes tengan conocimientos adecuados sobre lo que ellos consideran un número entero, que reconozcan diferentes situaciones cotidianas en las que sea fundamental el uso de números enteros positivos y negativos, y diferencien entre números positivos, negativos y el 0. Por otra parte, es esperable que unos pocos estudiantes tengan problemas de aritmética según lo aprendido en su nivel, al no tener completamente internalizados dichos contenidos. Algunas de las preguntas realizadas fueron las siguientes (Tabla 1):

Tabla 1

Preguntas según objetivo específico para los grupos focales de 7° y 8° básico

Objetivo específico	**Pregunta**
Caracterizar los errores que presentan los estudiantes al realizar operaciones de números enteros.	• ¿Qué es un número negativo? • ¿Cuál es la relación entre un número positivo y uno negativo? • ¿El 0 es un número positivo, negativo o ninguno? • ¿Cómo se suman los números enteros? ¿Cómo se restan? • ¿Cómo se multiplica y divide con números enteros? ¿Hay algún método que utilicen para estas operaciones?
Establecer una correlación entre los obstáculos de aprendizaje de los estudiantes y las representaciones utilizadas por los textos escolares.	• ¿Conocen ejemplos de la vida cotidiana donde se utilicen los números enteros? • ¿Se puede sumar y restar en los ejemplos de la vida cotidiana? ¿Y qué sucede con la multiplicación y división? • ¿Su docente utiliza ejemplos de la vida cotidiana para trabajar los números enteros? • ¿El uso de situaciones cotidianas facilita o dificulta la resolución de problemas con números enteros?

Nota. Elaboración propia.

Para el análisis de la información recopilada en los grupos focales, se clasificaron las respuestas de los estudiantes según si eran obstáculos didácticos, epistemológicos o si pertenecían al listado creado por Glaeser (1983).

Adicionalmente, se realizó una clasificación y análisis de textos escolares de Matemáticas pertinentes a los niveles educativos. Para la clasificación se consideró a los ejercicios y ejemplos propuestos, según las representaciones y modelos utilizados. El análisis de los textos en cuestión se utilizó para justificar o argumentar en cuanto a los obstáculos observados en el grupo focal, comparando definiciones con los procedimientos y respuestas obtenidas por parte de los estudiantes.

4. RESULTADOS

4.1 Grupos focales

Los grupos focales se realizaron con estudiantes de los niveles 7° y 8° básico. Los grupos 1 y 2 corresponden al nivel 7° básico, mientras que los grupos 3 y 4 se conforman de estudiantes de 8° básico. A cada estudiante se le asignó un código “EX”, de tal modo que E1 es el estudiante 1 de ese grupo, y así sucesivamente.

Al preguntarles a los estudiantes de los diversos grupos sobre qué son los números negativos, las respuestas fueron: “un número a la izquierda del 0”; “un número bajo el 0”; “dibujar una recta numérica para ubicar el 0 y señalar que estos son los que se ubican a la izquierda de este” (respuestas de estudiantes de 7° básico) o “un número menor que 0” (respuesta de estudiantes de 8° básico y E5G2 de 7° básico). En las respuestas se puede apreciar que los estudiantes de 7° básico tienden a percibir los números negativos en función de su posición relativa con respecto al cero en lugar de su valor numérico.

Los modelos concretos, utilizados comúnmente para introducir los números enteros, son de la categoría de desplazamiento, ya sea mediante el uso de rectas numéricas o situaciones cotidianas, como el nivel del mar, temperatura, etc. (Cid, 2022). El usar la posición de los números basadas en una recta numérica, vertical u horizontal, con respecto al 0, quien define el centro de esta, es considerada parte de la etapa inicial del aprendizaje, donde los estudiantes no abstraen del todo el valor de los números y utilizan un modelo para tener una referencia posicional.

En una etapa inicial de aprendizaje, es habitual utilizar estos modelos de desplazamiento por parte de los docentes, debido a su facilidad de aprender dada su naturaleza concreta, pero a futuro es necesaria una transición a definiciones abstractas para los números. Considerando que este problema solo fue identificado en estudiantes de 7° básico, quienes aún están en proceso de enseñanza del contenido, no se considera un obstáculo epistemológico, dado que estas definiciones no se evidenciaron en estudiantes de 8° básico, por lo que se asumirá que no desarrolla permanencia y es una transición habitual en los conocimientos, pero que no interrumpe el aprendizaje. Es necesaria una observación del fenómeno por parte del docente responsable en caso de que esta definición no se transforme adecuadamente.

A continuación, en la tabla 2, se muestra las respuestas de los estudiantes que participaron de esta investigación.

Tabla 2

Respuestas de estudiantes de 7° y 8° básico sobre adición y sustracción de números enteros

Pregunta	**Grupo - Nivel**	**Respuestas**
¿Cómo se suman los números negativos?	Grupo 1 - 7° básico Grupo 2 - 7° básico Grupo 3 - 8° básico Grupo 4 - 8° básico	“Sumar negativo con negativo da más” * “Se mantiene el signo del mayor y después se resta” *
¿Cómo se restan los números negativos?	Grupo 1 - 7° básico	“No se pueden restar, se sumaría porque los dos son signos negativos, siempre que son del mismo signo se suman. Por ejemplo (-19) -(-1) = (-20)” (E3G1 y E4G1) “Si los signos son iguales, se suman” (E5G1)
	Grupo 2 - 7° básico	“Si el número es menos menos sale un puro menos. Si sale (-3) -(-2) sería (-3) – 2” (E2G2)
	Grupo 3 - 8° básico	“No se pueden restar, se suman” (E5G3) “Al ser de igual signo se suman” (E3G3) “Se suma y se conserva el signo” (E1G3)
	Grupo 4 - 8° básico	“Se suman y se acercan al 0, si lo pasa es positivo” (E1G4)

Nota. Elaboración propia en base a las respuestas de los estudiantes.
*Nota *.* Las respuestas presentadas son una síntesis de los diferentes comentarios de los entrevistados en todos los grupos.

En las respuestas recibidas, se observa cómo los sujetos informantes dominan el algoritmo para la adición con números enteros, pero enfrentan dificultades con la resta. Para la adición, los participantes de los distintos cursos coincidieron en sus respuestas. Aunque expresan verbalmente una idea errónea, al decir que da "más" se refieren a que el valor absoluto del resultado aumenta en vez de que sea mayor el número. No se presentan obstáculos de ningún tipo en la adición.

Las complicaciones encontradas en la sustracción ocurrieron en las entrevistas de ambos niveles. En las entrevistas de 7° básico, ambos grupos presentan un ejemplo de resta, pero operan como si fuera una adición, es decir, suman los valores absolutos y mantienen el signo negativo. En el grupo 1 el razonamiento utilizado fue que si ambos números eran del mismo signo (negativo en este caso), debía sumarse, mientras que en el grupo 2 el procedimiento utilizado es unir ambos símbolos "-" como si fueran uno solo y operar después. El algoritmo utilizado al resolver consiste en transformar los símbolos de resta y del sustraendo en un único símbolo, resultando entonces en una resta de números naturales. Entonces, se puede categorizar los conocimientos sobre resta de números negativos como obstáculos epistemológicos a priori.

En el nivel 8° básico, en las evidencias del grupo 3 también surgen respuestas con obstáculos similares a los observados en el nivel anterior. Esto confirma el hecho de que estos errores se conciben como obstáculos, dada su persistencia en el tiempo y resistencia al cambio. La solución presentada en el grupo 4 explica el procedimiento de la sustracción de un modo distinto al habitual, pero de manera correcta. Utilizando un modelo de desplazamiento, en este caso se aplica la adición tal como en el texto escolar, cambiando el sustraendo por su inverso aditivo y sumando ambos números, considerando que el resultado puede ser negativo o positivo dependiendo de los valores absolutos.

Para los estudiantes de 8° básico además se incluyeron preguntas relacionadas a cómo resolvían ejercicios de multiplicación y división con números enteros, puesto que curricularmente en este nivel se enseñan estas operaciones (Tabla 3).

Tabla 3

Respuestas de estudiantes de 8° básico sobre multiplicación y división de números enteros

Pregunta	**Grupo**	**Respuestas**
¿Cómo se multiplican y dividen los números enteros?	Grupo 3	"Se multiplican y si son de igual signo es positivo, si son de distinto signo son negativos" (E2G3) "Si son de igual signo se conserva el signo" (E4G3)
	Grupo 4	"Más y más, menos y menos da positivos, en caso de que no sean iguales es negativo" (E7G4)

Nota. Elaboración propia en base a las respuestas de los estudiantes.

Los estudiantes de ambos grupos mencionaron el uso de la "regla de los signos" como el método que utilizan para resolver ejercicios con estas operaciones. Además, se destaca el uso de mnemotecnias basadas en situaciones de la vida cotidiana para recordar el funcionamiento por parte de E6G3, quien menciona: "el enemigo de mi enemigo es mi amigo", donde enemigo corresponde a números negativos y amigos a positivos.

A pesar del conocimiento de esta regla, una participante responde con un procedimiento erróneo. La respuesta de E4G3 es correcta únicamente si ambos números son positivos, sin embargo, su respuesta es la misma utilizada para definir el algoritmo de la adición. En este escenario se presenta un obstáculo epistemológico, de acuerdo con las definiciones presentadas por Brousseau (1983), puesto que sus conocimientos sobre la suma interfieren con el aprendizaje de un nuevo conocimiento para otras operaciones.

Las entrevistas finalizaron preguntando sobre los tipos de representaciones utilizados en el aula sobre los números enteros. Los estudiantes de los cuatro grupos respondieron que están familiarizados con representaciones relacionadas con el nivel del mar (desplazamiento) y deudas (neutralización). Los estudiantes de 7° básico expresaron que emplear situaciones de la vida cotidiana los ayuda a visualizar de manera más efectiva el funcionamiento de las operaciones matemáticas, mientras que los estudiantes de 8° básico opinan lo contrario, que los ejercicios con modelos concretos dificultan su trabajo y prefieren trabajar con representaciones simbólicas no contextualizadas. Para Bruner, y en palabras de Vidal y Barra (2019), las representaciones simbólicas son un modo que “constituye la tercera forma de representación a la que se aspira llegar, una vez que se ha propiciado el camino desde lo concreto o enactivo hacia lo abstracto mediado por lo icónico” (pp. 34-35). Por lo tanto, se considera que las representaciones empleadas en la educación son transitorias, y en esta situación los estudiantes cambiaron su preferencia de lo concreto a lo simbólico, tal como se esperaba por parte del autor.

4.2 Textos escolares

4.2.1 Texto 7° básico Editorial SM (2020)

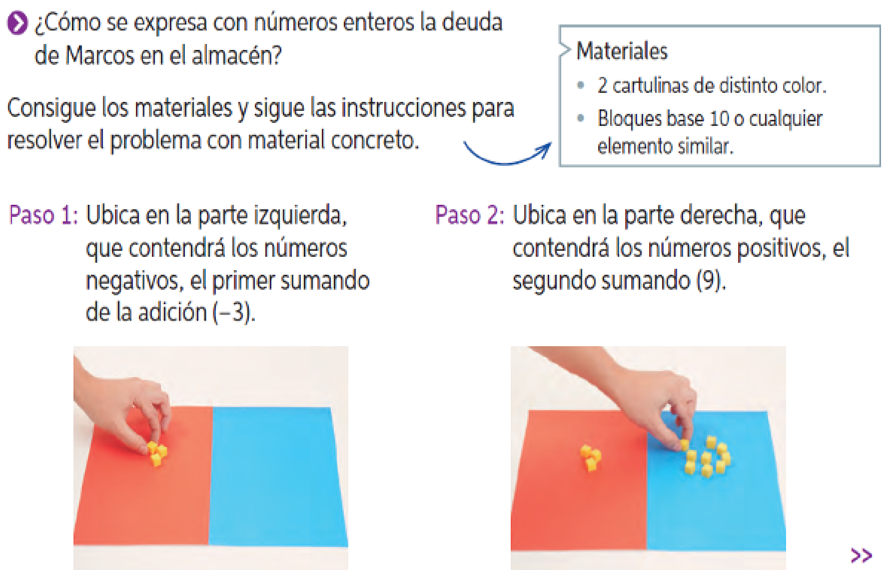
El texto escolar de Matemáticas de la Editorial SM es el documento entregado por parte del Mineduc a establecimientos educativos municipales y particulares subvencionados. Por ende, este libro es el que se encuentra mayoritariamente en las aulas escolares a lo largo del país, atribuyéndose así la relevancia necesaria para su análisis.

Las representaciones que prevalecen en este texto escolar consisten en un 76 % de representaciones simbólicas y un 24 % de representaciones concretas. Entre los modelos más utilizados destaca el uso de situaciones concretas, la operatoria simple y el uso de la recta numérica.

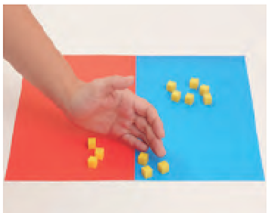
Las actividades de representaciones concretas utilizan fichas bicolor o fichas regulares sobre superficies bicolor. En la siguiente imagen del texto escolar (Figura 1), se muestra una actividad en donde se realizan adiciones de números enteros utilizando el modelo de neutralización. Las cartulinas asignan la positividad o negatividad de las fichas y la cantidad de estas corresponde al valor numérico.

Figura 1

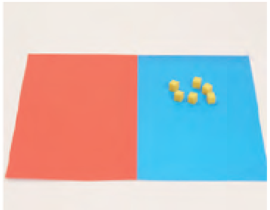
Actividad de adición entre números enteros con material concreto



>> **Paso 3:** Cancela los cubos que puedas asociando uno negativo con uno positivo y retirándolos del tablero, como se muestra en la imagen.



Paso 4: Cuenta los cubos que quedaron en el tablero y asócialos con el signo que corresponda según su ubicación. Así, obtendrás el resultado de la adición.



Por lo tanto, el pedido del almacén fue de 6 sacos, ya que $-3 + 9 = 6$.

2. Resuelve las siguientes adiciones utilizando la estrategia anterior.

a. $9 + (-5)$
b. $-2 + 5$
c. $6 + (-6)$
d. $7 + (-10)$
e. $5 + 4$
f. $-6 + (-3)$

Nota. Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 7° básico (Quijada et al., 2020, pp. 19-20).

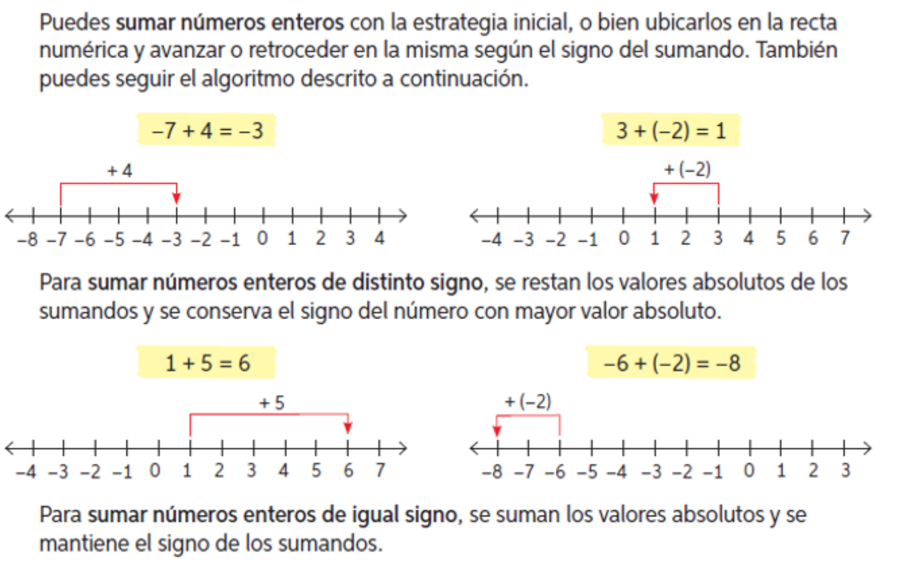
Esta actividad se lleva a cabo al inicio de la unidad y a partir de reglas simples es capaz de presentar los cuatro posibles casos de suma en enteros. Posteriormente se utiliza una actividad similar para explicar la sustracción de enteros, alterando un par de reglas. Considerando que los estudiantes no poseen conocimientos previos sobre los números negativos, el uso de material concreto es recomendable para enseñar algoritmos de adición. Sin embargo, dicha estrategia puede presentar ciertas dificultades.

Los estudiantes no conocen qué es un número negativo ni se les proporciona un contexto adecuado al que se pueda representar con esta actividad. En base a los conocimientos previos que poseen, estos deben realizar una resta (con la definición de "quitar algo" en representaciones concretas de números naturales) cuando lo que se está presentando es una adición. Esto puede generar contradicciones con respecto a lo que pueden interpretar de la actividad, por lo que depende de la implementación docente si es que se logra generar un conflicto cognitivo favorable o no. Esta situación permite el desarrollo de obstáculos didácticos, dado que se encuentra presente en un texto escolar ministerial como una propuesta didáctica y no es un problema nativo del aprendizaje del estudiantado.

Posterior a esta actividad, ya se emplean ejercicios y ejemplos contextualizados para el adecuado aprendizaje. Una vez que se les enseña que la adición no funciona de igual manera que con los números naturales, se generaliza el algoritmo para la suma y se presenta además una representación de cada caso, utilizando la recta numérica (Figura 2).

Figura 2

Explicación del algoritmo de la adición de números enteros mediante rectas numéricas



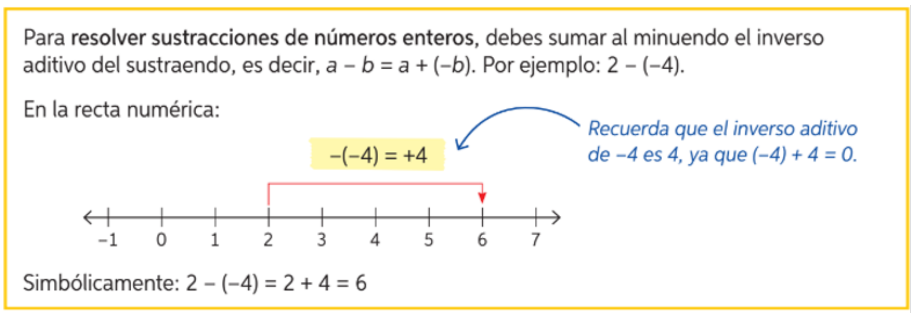
Nota. *Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 7° básico (Quijada et al., 2020, p. 20).*

Esta explicación del texto escolar concuerda con las respuestas obtenidas en los grupos focales. Analizando las respuestas presentadas en la Tabla 3, se observa cómo los participantes de los distintos cursos coinciden en sus respuestas, sumando los valores absolutos y conservando el signo cuando ambos números son negativos. En el caso de sumar números negativos y positivos, restaban los valores absolutos y mantienen el signo del número con mayor valor absoluto.

En la explicación de la sustracción de números enteros, el texto escolar propone cambiar el minuendo por su inverso aditivo y sustituir la operación por una suma. Además, incluye una representación en la recta numérica que evidencia el cambio de sentido al realizar la operación (Figura 3).

Figura 3

Explicación del algoritmo de la sustracción de números enteros



Nota. *Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 7° básico (Quijada et al., 2020, p. 23).*

Las respuestas obtenidas en la Tabla 2 muestra que los estudiantes utilizan un procedimiento contrario al propuesto en el texto escolar (Figura 3). Al contrario de sumar al minuendo el inverso aditivo del sustraendo, los estudiantes de 7° básico restaban el inverso aditivo, reemplazando los dos signos "-" por un único signo "-". Este obstáculo presentado no se puede asociar a los textos escolares. Los grupos del nivel 7° básico poseen al mismo docente de Matemáticas, y dado que los errores son de la misma naturaleza en ambos grupos, se puede atribuir la causa de este tipo de error al trabajo docente en el aula.

4.2.2 Textos 8° básico de editoriales Santillana (2021) y SM (2019)

Para 8° básico, el texto escolar de Matemáticas distribuido por el Mineduc pertenece a la Editorial Santillana, siendo este el texto prioritario para el análisis. Además, se incluye al estudio el libro escolar de SM, dado que se analizó la versión de 7° básico de dicha editorial.

En las representaciones del texto escolar de la Editorial Santillana (2021), de los ejemplos y ejercicios propuestos por el documento 87% son representaciones simbólicas, 13% utilizan representaciones pictóricas y no se evidencian representaciones concretas. Dentro de las representaciones simbólicas, se distribuye principalmente en la operatoria. Se destaca el uso de una introducción inductiva para el aprendizaje de la multiplicación en números enteros (Figura 4). Por otra parte, el texto escolar de la Editorial SM (2019) se destaca por el uso de los tres tipos de representaciones, sobresaliendo en cantidad los ejercicios con representaciones simbólicas de operatoria simple.

Figura 4

Ejemplo de multiplicación entre números enteros

Resuelve las multiplicaciones 3 • (–12) y (–5) • 6.

- Para calcular 3 • (–12), podemos considerar la multiplicación como una **adición de sumandos iguales**, por lo que 3 • (–12) puede interpretarse como 3 veces (–12), es decir:

$$3 \cdot (-12) = (-12) + (-12) + (-12)$$

Luego, 3 • (–12) = –36.

¿Puedes aplicar el mismo procedimiento para calcular (–12) • 3?

- Para resolver la multiplicación (–5) • 6, podemos utilizar la **propiedad conmutativa** de la multiplicación y escribirla como una adición de sumandos iguales.

$$(-5) \cdot 6 = 6 \cdot (-5) \;\blacktriangleright\; 6 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -30$$

Nota. Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 8° básico (Torres Jeldes y Caroca Toro, 2021, p. 12).

El ejemplo realiza la multiplicación considerando el primer factor como la cantidad de veces que se suma el segundo factor. En caso de que el segundo factor sea negativo, se aplica la conmutatividad de la multiplicación, lo cual se transfiere de las propiedades conocidas sobre los números enteros; esto, según Zapatera (2021), puede ser causante de algunos obstáculos epistemológicos.

El ejemplo de multiplicación, mostrado en el texto de la Editorial Santillana, considera al primer factor como aquel valor que define la cantidad de veces que se suma el segundo factor. Se observa en la Figura 4 que, en el ejemplo, el primer factor siempre es positivo, mientras que el segundo toma valores negativos; en caso de que sea al revés se aplica la propiedad conmutativa de la multiplicación. Al realizar esto, el texto transfiere directamente las propiedades conocidas de los números naturales a los enteros, sin una justificación previa. Según Zapatera (2021), esta asimilación de propiedades puede ser causante de obstáculos epistemológicos, puesto que a futuro los estudiantes asumen que todas las reglas, algoritmos o propiedades se pueden traspasar de un conjunto a otro. Sin embargo, como quien asimila dichas propiedades es el texto escolar, la clasificación pasa a ser didáctica en vez de epistemológica.

El segundo problema radica en la utilización exclusiva de dos números, uno positivo y el otro negativo, en un orden específico al momento de resolver el producto. Este ejemplo ignora el caso de que ambos números puedan ser negativos o que el primer factor pueda ser negativo efectivamente. Al enseñar un método que no considera un caso, puede crear el pensamiento en el estudiantado de que eso no es posible o no se puede explicar. Este ejemplo sería un causante de obstáculos didácticos si es que se tratara como un caso aislado, sin embargo, el texto posteriormente entrega los ejemplos y recursos adecuados para evitar dicho problema. Así, posterior a este ejemplo, el texto utiliza una introducción inductiva en donde el estudiante debe analizar y completar la secuencia de multiplicaciones. Al realizar bien la actividad, se puede llegar a la conclusión de que el producto entre dos factores negativos es posible de realizar y tiene un valor positivo (Figura 5).

Figura 5

Ejemplo de multiplicación utilizando el modelo inductivo

Analiza la siguiente secuencia de multiplicaciones y responde.

$$2 \cdot (-2) = -4$$
$$1 \cdot (-2) = -2$$
$$0 \cdot (-2) = 0$$
$$(-1) \cdot (-2) = \boxed{?}$$
$$(-2) \cdot (-2) = \boxed{?}$$

¿Cuáles son los números que podrían continuar los productos de cada multiplicación?

Nota. Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 8° básico (Torres Jeldes y Caroca Toro, 2021, p. 13).

La actividad pictórica para representar la multiplicación, y posteriormente la división, entre números enteros consiste en una actividad utilizando fichas bicolor para distinguir números positivos y negativos. Este ejemplo puede plantearse tanto de forma concreta como pictórica (Figura 6).

Figura 6

Ejemplo y actividad sobre multiplicación con fichas bicolor

1. En parejas, realicen una actividad utilizando fichas de color verde y rojo. Guíense por el siguiente ejemplo:

Consideren que cada ficha de color verde representa 1, y cada ficha roja representa –1.

3 • 2 ▶ $\underbrace{1\ 1}_{2}$ 1 1 1 1 ▶ 3 grupos de 2 ▶ 3 • 2 = 6

2 • (– 5) ▶ $\underbrace{-1\ -1\ -1\ -1\ -1}_{-5}$ -1 -1 -1 -1 -1 ▶ 2 grupos de (–5) ▶ 2 • (–5) = –10

Representen con las fichas los productos de las siguientes multiplicaciones.

a. 4 • 4 **b.** 6 • (–2) **c.** (–7) • 3 **d.** (–8) • 4

Nota. Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 8° básico (Torres Jeldes y Caroca Toro, 2021, p. 14).

Ambas actividades, en las que se utiliza la agrupación de fichas como representación, se ven limitadas debido a ser concretas y no poder mostrar una operación en la que ambos números operados tengan valor negativo. Esto muestra que las actividades concretas y pictóricas de este tipo se ven limitadas por su propia naturaleza, puesto que no se pueden formar "grupos negativos", no representando así todos los casos posibles de la multiplicación y división. Al igual que la Figura 4, este tipo de actividades pudiese desarrollar obstáculos didácticos en los estudiantes, de no ser por los complementos integrados en el texto escolar.

La propuesta destacada en el texto escolar de la Editorial SM (2019) corresponde a representaciones pictóricas utilizando tarjetas rectangulares, cuyo valor depende de su posición, pudiendo ser 1 y (-1). La actividad en cuestión consiste en hacer un arreglo bidimensional, donde los valores absolutos del primer factor hacen referencia a la altura, y del segundo al ancho (Figura 7).

Figura 7

Explicación de la multiplicación utilizando tarjetas rectangulares

¿Cuál es el resultado de la multiplicación $-6 \cdot (-3)$?

Para representar la multiplicación de números negativos usaremos tarjetas rectangulares, cada una con un 1 escrito en una cara y un -1 escrito en la otra. Además, para usar las tarjetas daremos una regla para la multiplicación por el factor 1 y por el factor -1:

- Si hay que multiplicar por 1 un ordenamiento dado de tarjetas, las tarjetas involucradas permanecen tal y como se encuentran sobre la mesa.
- Si hay que multiplicar por -1 un ordenamiento dado de tarjetas, las tarjetas involucradas se invierten dejando a la vista las caras que estaban ocultas.

Paso 1 Aplica la regla de multiplicación obtenida en la situación 1 para establecer que $-6 = -1 \cdot 6$. Por lo tanto, puedes escribir:

$$-6 \cdot (-3) = -1 \cdot 6 \cdot (-3)$$

Paso 2 Representa el producto $6 \cdot (-3)$ construyendo un ordenamiento rectangular de 6 tarjetas por 3 tarjetas, todas con el -1 en su cara superior.

$6 \cdot (-3) \quad \rightarrow$

−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1

Paso 3 Aplica la regla definida para multiplicar por el factor -1. En este caso, se invierten las tarjetas del ordenamiento.

Paso 4 Suma los valores de las caras visibles de las tarjetas.

1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 18$$

Por lo tanto:

R: **El resultado de la multiplicación $-6 \cdot (-3)$ es 18.**

Nota. Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 8° básico (Catalán et al., 2019, p. 13).

En esta ocasión, el texto escolar asume multiplicaciones como , mencionando que provienen de la actividad anterior, lo cual en ningún espacio de la actividad se afirma ni corrobora. Además, la regla de invertir las tarjetas al multiplicar por   no se sustenta adecuadamente para el estudiante.

Esta actividad puede ser causante de obstáculos didácticos, puesto que se asumen demasiados conocimientos previos, como la definición de inverso multiplicativo, contexto adecuado que se adapte a lo realizado en la actividad y la regla de signos para el algoritmo de la multiplicación. La actividad no ofrece una justificación de por qué es que funciona el voltear tarjetas como una multiplicación por el inverso multiplicativo de los números enteros, por lo que puede generar vacíos en los aprendizajes esperados del estudiante.

5. CONCLUSIONES

En el marco teórico presentado en el documento, se nombran los obstáculos epistemológicos descritos por Glaeser (1983) que surgieron en la formalización de los números enteros como conjuntos. De esta lista, no se apreció ninguno en los conocimientos de los estudiantes entrevistados; pero, de acuerdo con los resultados obtenidos, se observó que existen obstáculos epistemológicos y didácticos al operar con números enteros en la sustracción, en la multiplicación y en la división. En la resta emergen cuando hay dos signos, aparentemente iguales para los estudiantes, pero que tienen un significado diferente, dado que uno es posicional y el otro operacional, provocando que quieran adaptar esta incongruencia cognitiva a sus conocimientos previos sobre la operación, uniendo ambos como si fueran un único símbolo. Para la multiplicación y división, se observa que los estudiantes, al ver una similitud en el algoritmo de estas operaciones con el de la adición, generalizaron los procedimientos de esta última en todas las situaciones.

Los obstáculos observados consisten en procedimientos erróneos para la resolución de operaciones aritméticas, incluso llegando a contradecir los algoritmos utilizados por los textos. Las causas de los obstáculos presentados en los estudiantes no se relacionan con ningún tipo de representación utilizada en los textos escolares; sin embargo, esto no quiere decir que los textos escolares estén libres de problemas. En el análisis de las actividades presentadas para la enseñanza de números enteros, se logró evidenciar que en varias propuestas didácticas se utilizan como base conocimientos previos que los estudiantes aún no han desarrollado para el momento de la unidad en que se presenta el ejemplo; también se realizan actividades que tan solo logran representar una parte del total de algoritmos necesarios para la adecuada operación de números, ignorando los casos restantes. Estos casos pueden ser el origen de obstáculos didácticos en caso de que se implementen tal cual se propone en el documento ministerial.

En contraparte, los textos escolares también presentan diversos tipos de representaciones que facilitan la comprensión de los contenidos a los estudiantes, como puede ser la recta numérica, aportando una visualización del funcionamiento de las operaciones aritméticas. A mayor nivel educativo, los estudiantes prefieren el uso de representaciones y modelos simbólicos, por lo que se evita un estancamiento en el modelo concreto, tal como uno de los obstáculos definidos por Glaeser (1983).

El campo de estudio es amplio, los resultados presentados en esta ocasión son representativos de los cursos de 7° y 8° básico del establecimiento, pero existen dimensiones del tema que aún no se detallan y merecen atención en el futuro. Los obstáculos en el aprendizaje de los números enteros poseen una variedad y naturaleza diversa, aquellos que se identificaron en los datos recopilados son tan solo una parte. Al asignarles una posible causa a estos obstáculos, no se encontró relación alguna con las diferentes representaciones en las que se enseñan los números enteros. Este trabajo no pretende ser exhaustivo, sino más bien un punto de partida para investigaciones futuras que puedan expandir y enriquecer el conocimiento de los obstáculos en los números enteros, los cuales son necesarios considerar para ejercer adecuadamente la docencia en la asignatura.

6. REFERENCIAS

Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (1981). How Shall We Teach the Multiplication of Negative Numbers? Mathematics in School, 10(5), 31-33. http://www.jstor.org/stable/30214312

Bachelard, G. (1993). La formación del espíritu científico. Siglo XXI.

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2), 165-198.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Libros del Zorzal.

Bruner, J. S. (1969). Hacia una teoría de la instrucción. Unión Tipográfica Editorial HispanoAmericana.

Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C., & Rupin, P. (2019). Texto del estudiante. 8º Básico. Editorial SM. Obtenido de

https://www.colegiocolonos.cl/upload/textos/matematica-8o-basico-642ad51faa492de9795844a2d0c6142f.pdf

Cid, E. (2016). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos [Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza]. Repositorio de la Universidad de Zaragoza. https://zaguan.unizar.es/record/112529/files/TESIS-2022-085.pdf

Cid, E. (2022). La introducción escolar de los números enteros en un entorno algebraico: razones y principios que la sustentan. En R. Martinez, y M. Ruiz (Eds.), Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática. Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros (pp. 105-167). EDUCO. http://170.210.81.141:8080/handle/uncomaid/16638

Crowley y Dunn (1985). On multiplying negative numbers. Mathematics teacher, 78(4), 252-256.

Glaeser, G. (1983). Une science naissante: la didactique expérimentale des mathématiques. Séminaire de Philosophie et Mathématiques, (14), 1-12.

Janvier, C. (1983). The understanding of directed numbers. Proceedings of the 15th Annual Conference of PME-NA, 295-300, Montreal.

Muñoz Cornejo, P. (2019). Análisis de números enteros en textos escolares ministeriales de séptimo y octavo año básico: 2009-2018 [Tesis de magister, Universidad Alberto Hurtado]. Repositorio de la Universidad Alberto Hurtado. https://repositorio.uahurtado.cl/handle/11242/25951

Ministerio de Educación. (2016a). Bases Curriculares Séptimo Básico a Segundo Medio. Gobierno de Chile.

Ministerio de Educación. (2016b). Programa de Estudio Séptimo Básico. Gobierno de Chile.

Ministerio de Educación. (2016c). Programa de Estudio Octavo Básico. Gobierno de Chile.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. Revista Psicopedagogía, 23(71), 158-180. https://www.revistapsicopedagogia.com.br/detalhes/401/dificultades-en-el-aprendizaje-de-las-matematicas--una-perspectiva-evolutiva

Quijada, F., Manosalva, C., Ramírez, M., & Romero, D. (2020). Texto del Estudiante de 7º Básico. Editorial SM. Obtenido de https://www.curriculumnacional.cl/estudiante/621/articles-145593_recurso_pdf.pdf

Torres Jeldes, C. V., y Caroca Toro, M. V. (2021). Texto Escolar del Estudiante de 8° Básico. Editorial Santillana.

Vidal, R., y Barra, M. (2019). Un modelo para caracterizar la justificación de reglas y algoritmos del ámbito numérico–algebraico en libros de texto. Matemáticas, Educación y Sociedad, 2(2), 33-49.

Zapatera, A. (2021). Obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los números enteros. En A. M. Rosas Mendoza (Ed.), Avances en matemáticas educativas teorías diversas no. 8 (pp. 121-135). Editorial Lectorum.