https://doi.org/10.46219/rechiem.v17i1.184
Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448

LA ENSEÑANZA DE LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UNA EXPERIENCIA EN EL TERCER CURSO DE SECUNDARIA

TEACHING THE DISTANCE BETWEEN TWO POINTS THROUGH PROBLEM SOLVING: AN EXPERIENCE IN THE THIRD GRADE OF HIGH SCHOOL

Ana Beatriz de Oliveira
anaboliveirac@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4362-9111
Universidade Estadual de Maringá, Brasil

Amanda Cristina de Sousa
amanda.sa.pr@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7668-4996
Universidade Estadual de Maringá, Brasil

Marcelo Carlos de Proença
mcproenca@uem.br
https://orcid.org/0000-0002-6496-4912
Universidade Estadual de Maringá, Brasil

RESUMO

Este artigo apresenta uma experiência de ensino fundamentada nas cinco ações da abordagem de Ensino e Aprendizagem da Matemática por meio da Resolução de Problemas (EAMvRP), voltada para favorecer a compreensão do conceito de distância entre dois pontos. Para isso, foi elaborada e aplicada uma proposta didática em uma turma de 27 estudantes do terceiro ano do ensino médio. Os resultados indicam que os alunos mobilizaram diferentes conhecimentos matemáticos e participaram ativamente da resolução da tarefa. Foram identificadas três estratégias de resolução: duas levaram à resposta esperada e uma não. Além disso, constatou-se que a intervenção docente foi fundamental para articular os conhecimentos prévios dos alunos com os novos conteúdos. Conclui-se que a implementação das cinco ações do EAMvRP constituiu um recurso eficaz para promover a compreensão do conteúdo matemático relativo à distância entre dois pontos.

Palavras-chave:
Abordagem de ensino; Resolução de Problemas; Distância entre dois pontos

RESUMEN

Este artículo presenta una experiencia de enseñanza fundamentada en las cinco acciones del enfoque de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas a través de la Resolución de Problemas (EAMvRP), orientada a favorecer la comprensión del concepto de distancia entre dos puntos. Para ello, se diseñó y aplicó una propuesta didáctica a una clase de 27 estudiantes de tercer grado de secundaria. Los resultados muestran que los estudiantes movilizaron diversos conocimientos matemáticos y participaron activamente en la resolución de la tarea. Se identificaron tres estrategias de resolución: dos condujeron a la respuesta esperada y una no. Asimismo, se constató que la intervención docente desempeñó un papel clave al vincular los saberes previos de los estudiantes con los nuevos contenidos. En conclusión, la implementación de las cinco acciones del EAMvRP constituyó un recurso eficaz para favorecer la comprensión del contenido matemático relativo a la distancia entre dos puntos.

Palabras clave:
Enfoque didáctico; Resolución de problemas; Distancia entre dos puntos

Recibido 23 de febrero 2024, Aceptado 06 de junio 2025

ABSTRACT

This article reports on a teaching experience based on the five actions of the Mathematics Teaching and Learning through Problem Solving (MTLPS) approach, aimed at fostering students' understanding of the concept of distance between two points. A didactic proposal was designed and implemented in a class of 27 third-year secondary students. The findings show that students activated various mathematical knowledge and engaged actively in the problem-solving activity. Three solution strategies were identified: two led to the expected answer, while one did not. Furthermore, it was observed that teacher support played a crucial role in connecting students' prior knowledge with the new content. In conclusion, the implementation of the five actions of the MTLPS approach proved to be an effective means to foster students' comprehension of the mathematical content related to the distance between two points.

Keywords:
Teaching Approach; Problem Solving; Distance between two points

Recibido 23 de febrero 2024, Aceptado 06 de junio 2025
Revista Chilena de Educación Matemática, Volumen 17, N°2

1. INTRODUÇÃO

Na Educação Básica[1] do Brasil, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018)[2] indica que se deve realizar na etapa do Ensino Médio (1ª à 3ª séries) um trabalho com resolução de problemas. Nesse documento que norteia o currículo, aponta-se que os alunos devem consolidar os conteúdos aprendidos anteriormente e agregar novos, permitindo a resolução de problemas mais complexos que exigem maior reflexão e abstração, e ter uma visão da Matemática mais integrada às outras áreas de conhecimento, bem como à realidade.

Autores como Schroeder y Lester (1989), Lester y Cai (2016) e Liljedahl y Cai (2021) compreendem e defendem que a resolução de problemas deve fazer parte do currículo escolar. Para esses autores, tratar a resolução de problemas no ensino ajuda a direcionar os alunos a compreenderem matemática, a aprenderem a resolver problemas e a relacionarem, assim, suas ideias a outras ideias matemáticas. Na visão de Schoenfeld (2020), quando os alunos se envolvem na resolução de problemas, podem desenvolver a generalização e a abstração.

Uma possibilidade de relacionar conteúdos prévios a novos conteúdos e trabalhar com a matemática em diferentes contextos é a proposta da abordagem do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP), a qual foi desenvolvida por Proença (2018). Essa abordagem é constituída de cinco ações, cuja essência é partir de uma situação de Matemática para que os alunos desenvolvam suas estratégias de resolução com base no que o já conhecem de Matemática. Além desse potencial, busca-se levar os alunos a construírem ideias matemáticas presentes em suas estratégias para relacionar ao conteúdo a ser introduzido.

As cinco ações de Proença (2018) constituem-se em: escolha do problema, introdução do problema, auxílio aos alunos durante a resolução, discussão das estratégias dos alunos e articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo. Por meio de tais ações, os professores podem se orientar para conduzir seus alunos na resolução de problemas, em sala de aula, visando um ensino de matemática que valorize os conhecimentos prévios. Para Mendes, Proença e Moreira (2022), seguir as cinco ações do EAMvRP valoriza a aprendizagem significativa crítica e reflexiva, uma vez que foca justamente nos conhecimentos prévios dos alunos.

Estudos como os de Sousa y Proença (2019), Oliveira y Proença (2020), Akamine y Proença (2022), Rozario y Proença (2022; 2023), Pereira y Proença (2023) e Santos, Campelo y Proença (2023) utilizaram o EAMvRP para abordar os conteúdos de equação polinomial de primeiro grau, matemática financeira, frações, área de triângulo, equação do 2º grau e logaritmo, respectivamente, e mostraram que os alunos conseguem apresentar suas estratégias de resolução. De forma geral, esses estudos revelaram que realizar aulas no EAMvRP permitiu uma maior participação dos alunos, a discussão de ideias, o uso e revisão de conhecimentos matemáticos anteriores e a validação de suas estratégias e das respostas obtidas, favorecendo uma compreensão que permitiu articular as ideias a esses conteúdos.

Neste trabalho, temos como objetivo relatar uma experiência de ensino baseada nas cinco ações do EAMvRP para favorecer a compreensão de alunos sobre o conteúdo de distância entre dois pontos. O trabalho apresenta uma seção sobre a teoria da resolução de problemas e as cinco ações do EAMvRP, depois apresenta a seção referente à experiência de ensino em sala de aula e, por fim, apontamos as considerações finais.

[1] No Brasil, a Educação Básica compreende três etapas: Educação Infantil (0 a 5 anos), o Ensino Fundamental (9 anos) que se divide em Ensino Fundamental – Anos Iniciais (1º ao 5º anos) e Ensino Fundamental – Anos Finais (6º ao 9º anos), e o Ensino Médio (1ª a 3ª séries).

[2] A BNCC (Brasil, 2018) é um documento brasileiro que estabelece as habilidades, competências e conhecimentos nas diversas áreas de conteúdos que os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica.

2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E AS CINCO AÇÕES DO EAMvRP

Segundo Polya (1994), a resolução de problemas possibilita ao aluno descobrir um caminho para alcançar a resposta, entendê-la e desperta o interesse pelo significado dessa resposta. Nesse sentido, é importante entender o que é um problema. Echeverría (1998) aponta que uma tarefa se torna um problema quando aparecem obstáculos que dificultam e levam o indivíduo a raciocinar, diferentemente dos chamados exercícios. De forma análoga, Proença (2018) aponta que uma situação de Matemática passa a ser um problema "[...] quando a pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente para chegar a uma resposta" (Proença, 2018, p. 17).

Também devemos compreender o que é resolver um problema, que consiste em perpassar por etapas/fases de resolução. Polya (1994) apresentou quatro fases de resolução de problemas (compreensão, estratégia, execução e retrospecto). Proença (2018), baseado em autores da psicologia cognitiva, assume quatro etapas. A primeira etapa, a representação, consiste na interpretação e compreensão do problema a partir da leitura do enunciado, o que envolve uso de conhecimento linguístico (ações envolvidas, no contexto da língua materna) e conhecimento semântico (expressões/termos matemáticos). Em seguida, ocorre o planejamento, no qual elabora-se uma estratégia de resolução como tentativa e erro, diagrama, desenho, equação, montar uma tabela e obter um padrão, o que corresponde ao conhecimento estratégico de uma pessoa. Assim, essa estratégia passa pela etapa de execução, que consiste em colocá-la em prática, realizando os cálculos e desenhos e demais procedimentos necessários, constituindo o conhecimento procedimental. Por fim, na etapa de monitoramento a pessoa deve realizar a avaliação e validação da resposta encontrada, bem como buscar rever sua resolução.

A partir disso, compreende-se que a resolução de problemas desempenha papel importante, pois tratá-la em sala de aula favorece a mobilização de conhecimentos dos alunos. No ensino, a abordagem da resolução de problemas pode seguir pelo uso do problema como ponto de partida, antes de introduzir o conteúdo (Schroeder y Lester, 1989; Fi y Degner, 2012; Proença, 2018, 2021). Pode seguir em conjunto ou de forma isolada pela abordagem da proposição de problemas (problem posing), a qual busca ampliar a compreensão de matemática dos alunos ao resolverem e proporem seus problemas (English, 2020; Koichu, 2020; Liljedahl y Cai, 2021).

Neste estudo, utilizamos a abordagem do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP) de Proença (2018), que coloca um problema como ponto de partida para o ensino de um novo conteúdo. Essa abordagem é contrária à forma tradicional de ensino que preza por inicialmente realizar a definição do conteúdo em sua forma matemática, depois apresenta um exemplo de uso dessa definição, para depois trazer exercícios de mera aplicação. O EAMvRP apresenta as seguintes cinco ações:

A escolha do problema é a primeira ação e se refere ao planejamento do professor que deve elaborar ou reelaborar uma situação de matemática (possível problema) ou até mesmo retirá-la na íntegra de algum material didático. Nessa escolha, o professor precisa organizar/reorganizar o enunciado, de modo a ser possível articular uma estratégia ao novo conteúdo a ser ensinado aos alunos. Nesse sentido, é importante que o professor preveja possíveis estratégias de resolução para ter clareza daquelas que podem surgir em sala de aula e mesmo as que os alunos seguiriam. Com isso, prever estratégias também é uma forma de auxiliá-los posteriormente.

A introdução do problema é a ação que ocorre em sala de aula, onde o professor organiza a turma, preferencialmente em grupos, e apresenta a situação de Matemática aos alunos que irão ter o primeiro contato de interpretação e compreensão. O professor deve orientá-los a resolverem de acordo com seus conhecimentos matemáticos e da forma como quiserem. Neste momento, a situação pode se tornar um problema aos alunos caso se configure como um desafio.

No auxílio aos alunos durante a resolução, conforme os grupos vão desenvolvendo suas estratégias a partir de suas compreensões do problema, o professor deve acompanhá-los, atuando, segundo Proença (2018), como observador, incentivador e direcionador das ideias que surgirem. Como observador, esse momento permite avaliar as dificuldades e as potencialidades dos alunos em mobilizar conceitos, criar estratégias e realizar procedimentos, o que corresponde a avaliar os grupos na resolução de problemas, conforme as fases de Polya (1994) e as etapas de Proença (2018). Como incentivador, o professor pode fazer questionamentos que ajudem os grupos a pensarem, pedir para que expliquem o que pensaram, mas sem dar respostas prontas. Por fim, como direcionador, ao identificar que algum grupo não conseguiu propor uma estratégia, o professor pode se valer das estratégias previstas na primeira ação e, assim, sugerir ao grupo. Seria por exemplo sugerir que pensem em montar uma tabela ou mesmo buscar organizar algum desenho etc., o que corresponde a auxiliar com uma iniciativa e não apresentar a estratégia de forma pronta.

Na discussão das estratégias dos alunos, é feita a socialização, a qual consiste de cada grupo ir ao quadro para expor suas estratégias de resolução e explicá-las aos colegas. Caso haja algum equívoco na resolução, este é o momento de analisar, de modo coletivo, as estratégias utilizadas, bem como revisar e validar as respostas. Trata-se de um olhar do professor para o processo de resolução do problema seguido pelos grupos, com foco em levar os alunos a compreenderem os tipos de estratégias utilizadas e a essência matemática que compartilham.

Por fim, na articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo, o professor escolhe uma estratégia (ou mais estratégias) desenvolvidas pelos grupos e a articula ao novo conteúdo a ser ensinado. Isso implica em associar as representações dessa estratégia à fórmula ou ao conceito matemático. Neste caso, pontos centrais da estratégia devem ser tomados como foco para essa associação ao formato do novo conteúdo.

3. A EXPERIÊNCIA DE ENSINO NA ABORDAGEM DO EAMvRP

A nossa experiência de ensino derivou de uma atividade proposta na disciplina de "Tópicos Específicos em Ensino de Matemática e sua Didática", cursada no segundo semestre de 2022, de um Programa de Pós-Graduação na área de Ensino de Ciências e Matemática de uma universidade estadual pública do estado do Paraná, no Brasil. Nessa disciplina, solicitaram que fizéssemos uma implementação em sala de aula com a abordagem de um conteúdo matemático e pautados em uma tendência da Educação Matemática. Optamos pela tendência da resolução de problemas por ser nossa área de pesquisa e pelas contribuições para nossa formação.

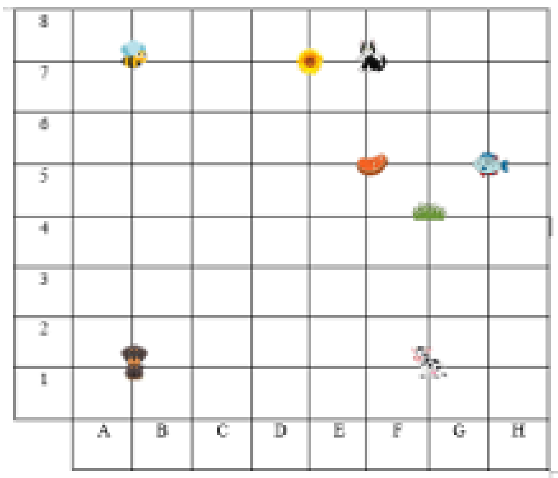
Assim, elaboramos uma proposta de EAMvRP para introduzir, na área da geometria analítica, o conteúdo de distância entre dois pontos. As aulas foram implementadas a 27 alunos de uma turma da terceira série do Ensino Médio de uma escola pública do noroeste do Estado do Paraná, no Brasil. Para obter esses participantes e definir o conteúdo, fizemos uma visita à escola e apresentamos nosso objetivo a uma professora de Matemática que cedeu sete horas-aulas. A professora disponibilizou essa turma porque era a turma mais participativa com atividades interativas. Já o conteúdo de distância entre dois pontos nos foi apresentado pela professora porque seria o próximo a ser tratado, segundo o documento de Registro de Classe Online (RCO) que contém os conteúdos a serem cumpridos.

Ao longo da experiência, buscamos coletar dados sobre o que os alunos fizeram, que se deu por meio de seus registros de resolução na folha que continha o problema e na lousa, de gravações de áudio e de anotações no diário de campo. Dessa forma, apresentamos nossa experiência de ensino para o contéudo de distância entre dois pontos na abordagem do EAMvRP e que foi implementada em sala de aula pelas duas autoras deste estudo.

1ª ação - Escolha do Problema: Nesta ação, reunimo-nos para dialogar sobre qual seria a situação de Matemática a ser utilizada para que os alunos utilizassem seus conhecimentos prévios de conceitos, princípios e procedimentos matemáticos, principalmente em geometria e chegassem a uma generalização, obtendo uma fórmula matemática, como propõe Proença (2018). Após várias tentativas de elaboração e várias discussões, formulamos a seguinte situação:

Pedro está brincando com um jogo que tem como objetivo calcular o caminho para que os animais possam chegar a sua respectiva comida, podendo andar em qualquer sentido, sem passar por outros animais em seu trajeto. Considere que cada quadrado possui a área de 1m²

Figura 1. Situação de matemática (Possível problema)

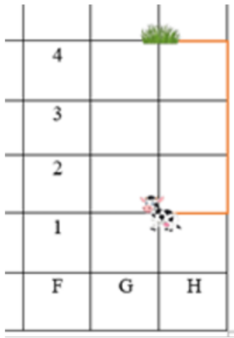
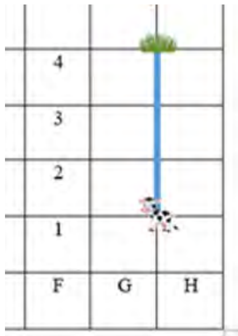


Fonte. Elaborado pelos autores

De acordo com a ilustração: a) Qual a menor distância (em metros) entre a vaca e o capim? b) Qual a menor distância (em metros) entre a abelha e a flor? c) Qual a menor distância (em metros) entre o cachorro e a carne? d) Qual a menor distância (em metros) entre o gato e o peixe?

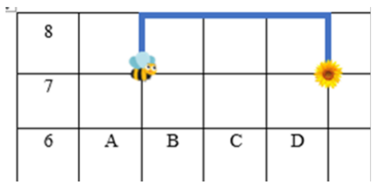
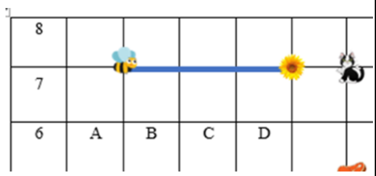
A escolha da situação de Matemática (possível problema) deve levar em consideração a atenção ao fato de que "a situação de Matemática escolhida deve permitir uma resolução pelos alunos baseada em mais de um caminho, mais de uma estratégia" (Proença, 2018, p. 46). Dessa forma, a situação escolhida admite alguns caminhos para se chegar a uma resposta. Nos quadros a seguir, apresentamos algumas das estratégias que previmos antes de apresentar a situação de Matemática em sala de aula.

Quadro 1. Estratégias da situação referentes ao item a

<table>
<tr><th colspan="2">Estratégias para resolução do item a)</th></tr>
<tr><th>Descrição</th><th>Ilustração</th></tr>
<tr><td>A vaca seguirá esta sequência para chegar ao capim: H1-H2-H3-H4-G4
O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 6x1= 6 metros ou somar 1+1+1+1+1+1=6 metros
Este não é o caminho mais curto</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A vaca seguirá está sequência para chegar ao capim: G2-G3-G4.
O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 3x1= 3 metros ou somar 1+1+1= 3 metros</td><td>
</td></tr>
</table>

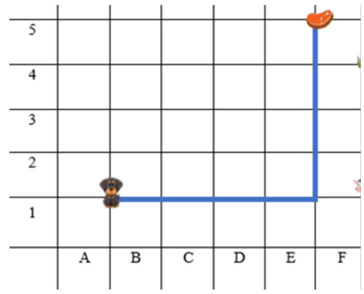
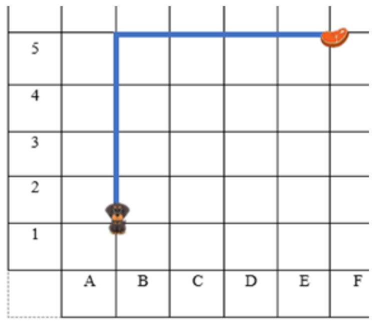
Fonte. Elaborado pelos autores

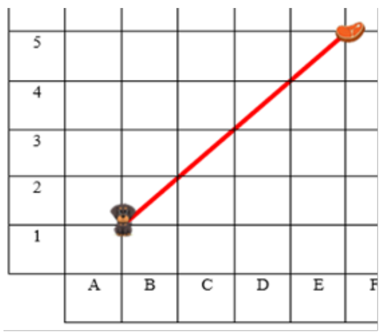
Quadro 2. Estratégias da situação referentes ao item b

<table>
<tr><th colspan="2">Estratégias para resolução do item b)</th></tr>
<tr><th>Descrição</th><th>Ilustração</th></tr>
<tr><td>A abelha seguirá está sequência para chegar a flor: A8-B8-C8-D8-D7
O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 5x1= 5 metros ou somar 1+1+1+1+1= 5 metros
Este não é o caminho mais curto.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A abelha seguirá esta sequência para chegar a flor: B7-C7-D7
O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 3x1= 3 metros ou somar 1+1+1= 3 metros</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte. Elaborado pelos autores

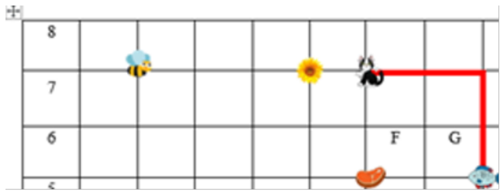
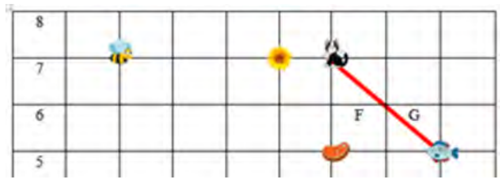
Quadro 3. Estratégias da situação referentes ao item c

<table>
<tr><th colspan="2">Estratégias para resolução do item c)</th></tr>
<tr><th>Descrição</th><th>Ilustração</th></tr>
<tr><td>O cachorro seguirá esta sequência para chegar a carne:
B1-C1-D1-E1-E2-E3-E4-E5
O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 8x1= 8 metros ou somar 1+1+1+1+1+1+1+1= 8 metros
Este não é o caminho mais curto.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>O cachorro seguirá esta sequência para chegar à carne:
A2-A3-A4-A5-B5-C5-D5-E5
O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 8x1= 8 metros ou somar 1+1+1+1+1+1+1+1= 8 metros
Este não é o caminho mais curto.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>O cachorro seguirá esta sequência para chegar à carne: B2-C3-D4-E5

Aqui o aluno poderá utilizar seus conhecimentos de geometria e aplicar Pitágoras de duas maneiras:
1- O aluno poderá encontrar a diagonal de cada triângulo e depois multiplicá-las pelo número que aparece:
$h^2=1^2+1^2 \rightarrow h = \sqrt{2}$
$\sqrt{2}x4=4\sqrt{2}$
2- O aluno poderá olhar a diagonal do triângulo dos vértices A1, E1 e E5.
$h^2=4^2+4^2 \rightarrow h = \sqrt{32}=4\sqrt{2}$</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte. Elaborado pelos autores

Quadro 4. Estratégias da situação referentes ao item d

Estratégias para resolução do item d)	
Descrição	**Ilustração**
O gato seguirá esta sequência para chegar ao peixe: F7-G7-G6-G5 Este não é o caminho mais curto. O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 4x1= 4 metros ou somar 1+1+1+1= 4 metros	
O gato seguirá esta sequência para chegar ao capim: F6-G5 Aqui o aluno poderá utilizar seus conhecimentos de geometria e aplicar Pitágoras de duas maneiras: 1- O aluno poderá encontrar a hipotenusa de cada triângulo retângulo e depois multiplicá-las pelo número que aparece: $h^2 = 1^2+1^2 \rightarrow h = \sqrt{2}$ $\sqrt{2}x2 = 2\sqrt{2}$ 2- O aluno poderá olhar a hipotenusa do triângulo dos vértices E7, G7 e G5. $h^2 = 2^2 + 2^2 \rightarrow h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	

Fonte. Elaborado pelos autores

Essas estratégias previstas ajudaram as professoras a observar se os alunos seguiriam alguma delas, quando da resolução do problema, em sala de aula. Além disso, utilizamos a estratégia que possibilitou realizar a articulação ao novo conteúdo: a expressão que envolve o conteúdo de distância entre dois pontos.

2ª ação - Introdução do Problema: Nesta ação, iniciamos o contato direto, em sala de aula, com os alunos, de modo que fizemos a divisão da turma em grupos (formaram-se sete grupos) e apresentamos-lhes a situação de Matemática para que começassem a resolver. Orientamos os alunos para resolverem como quisessem.

Figura 2. Apresentação da situação de matemática aos alunos em grupos

Fonte. Dados da pesquisa

3ª ação - Auxílio aos alunos durante a resolução: Nesta ação, auxiliamos os alunos nas dúvidas que foram surgindo no decorrer da resolução da situação. Conforme indica Proença (2018), atuamos no papel de observadoras de suas dificuldades e compreensões. Como incentivadoras, isso ocorreu por meio de questionamentos para ajudar nas ideias. Como direcionadoras, nossa postura ocorreu no sentido de possibilitar aos alunos estruturar suas estratégias. No quadro a seguir, trouxemos os principais auxílios aos alunos.

Quadro 5. Auxílio aos alunos durante a resolução

Dificuldades observadas	Incentivo aos alunos	Direcionamento
Traçaram o caminho, mas não sabiam calcular a distância.	Questionamos o que eles viam quando traçaram a linha entre o cachorro e a carne (hipotenusa do triângulo).	Permitir que pudessem perceber e utilizar como estratégia a relação entre o triângulo e o teorema de Pitágoras.
Confundiram área do quadrado com comprimento da distância.	Questionamos a eles o que era área e o que eles queriam calcular.	Fazer eles perceberem que a área é a região delimitada pelo quadrado que eles visualizaram e que o cachorro andaria apenas na diagonal.
Concluíram que a diagonal de cada quadradinho media 1 metro.	Questionamos se realmente a diagonal media o mesmo que as laterais e pedimos para observarem melhor a figura formada ao traçar a diagonal do quadrado.	Que os alunos associassem o triângulo com o teorema de Pitágoras e identificassem que o resultado do cálculo da hipotenusa é diferente de 1.
Os alunos ainda estavam confusos com alguns conceitos a serem usados na resolução.	Planejamos aumentar o tempo de auxílio aos alunos.	Possibilitar que as ideias dos alunos fossem esclarecidas.

Fonte. Elaborado pelos autores

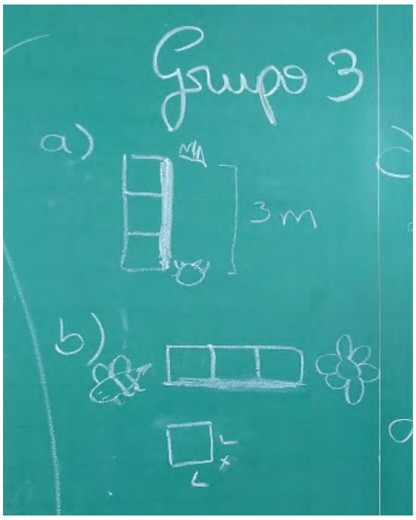
Proença (2018) explica que é a partir do contato dos alunos com a situação que vai revelar se se tornou difícil para eles. No caso da nossa situação de Matemática, verificamos que na terceira ação as dificuldades observadas (Quadro 5) evidenciam dificuldades de encontrar de imediato uma resposta, o que neste caso podemos apontar que se tornou um problema aos grupos, podendo utilizar o termo problema a partir de agora.

Dessas dificuldades mostradas no Quadro 5, percebemos que a maioria, três delas, foram sobre dificuldades na etapa de representação/compreensão do problema (Polya, 1994; Proença, 2018). Na visão de Proença (2018), são dificuldades de uso de conhecimento semântico devido confundirem ou não saberem conteúdos matemáticos como a diferença entre área e comprimento, e que a medida da diagonal do quadradrinho é maior que seus lados. Estudos como os de Kunene e Sepeng (2017), Proença et al. (2020) e Proença et al. (2022) corroboram que a maior dificuldade de alunos é justamente na etapa de compreensão de problemas. Além disso, o Quadro 5 mostra que outra dificuldade foi na etapa de execução, no uso de conhecimento procedimental, relativo à não conseguirem calcular a distância.

4ª ação - Discussão das estratégias dos alunos: Quando os alunos conseguiram elaborar suas estratégias na resolução do problema, encaminhamos a aula para a discussão delas. Convidamos cada um dos grupos para exporem suas ideias na lousa, a fim de fazer com que percebessem os conhecimentos utilizados e conseguissem estabelecer conexões entre as estratégias.

Em geral, todos os grupos realizaram a resolução dos itens a) e b) com a mesma estratégia, considerando o caminho do respectivo animal à sua comida como uma linha reta, conforme ilustramos a seguir:

Figura 3. Estratégia do Grupo 3

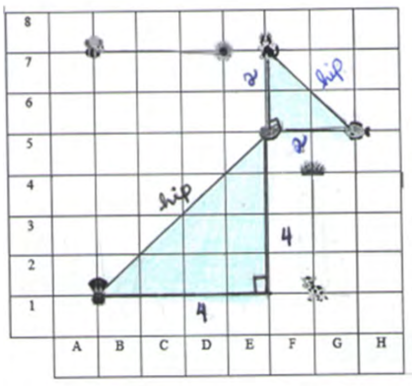


Fonte. Dados da pesquisa

Para os itens c) e d), a resolução dos grupos revelou três estratégias, que descrevemos a seguir:

Estratégia 1: Relacionar o caminho que leva o cachorro ao bife com a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos de 4 metros.

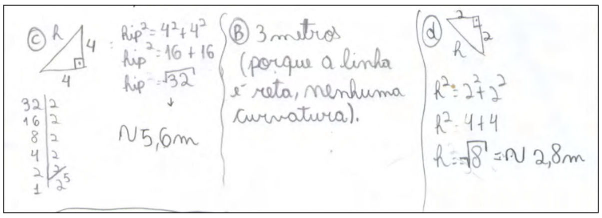
Figura 4. Estratégia 1



Fonte. Dados da pesquisa

Nesta estratégia, os alunos traçaram uma hipotenusa, o que correspondeu a um caminho mais curto, porém, estavam também considerando que essa hipotenusa valia 1metro, igual as laterais do quadrado, o que revelou a dificuldade mostrada no Quadro 5, referente ao uso de conhecimento semântico (Proença, 2018). Então, questionamos: Será que essa hipotenusa mede o mesmo que as laterais? Não sabendo justificar, procuraram outros meios de tentar calcular o seu comprimento, e visualizaram que ela poderia ser de um triângulo retângulo e, a partir disso, utilizaram o Teorema de Pitágoras para calcular o valor da hipotenusa (h), como mostra-se a seguir:

Figura 5. Execução da Estratégia 1

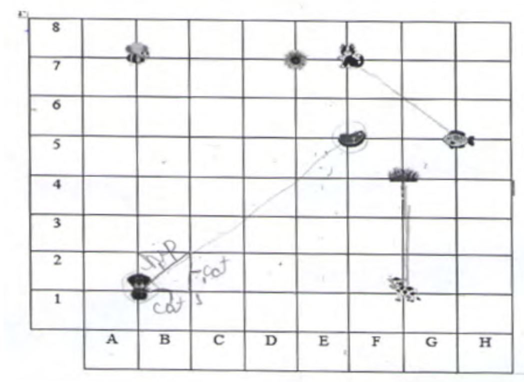


Fonte. Dados da pesquisa

Percebemos que a dificuldade em diferenciar o comprimento da hipotenusa com o lado do quadrinho esteve na direção do uso de conhecimento matemático, envolvendo o que Proença (2018) chama de conhecimento semântico. Possivelmente, os alunos que tiveram essa dificuldade pouco tiveram oportunidade de vivenciar uma comparação entre um lado de um triângulo retângulo (cateto) e a sua hipotenusa por meio de uma medição a partir de um dado segmento de reta, por exemplo. No entanto, identificamos que a execução dessa estratégia 1 mostra que sabiam operar com a resolução desse teorema, ou seja sabiam fazer uso do conhecimento procedimental (Proença, 2018). Isso foi possível pelo auxílio aos alunos dados pelas professoras, o que é da terceira ação do EAMvRP. Enfim, a dificuldade esteve já na primeira etapa de resolução de problemas, a de representação do problema, ou seja, da compreensão (Proença, 2018).

Estratégia 2: Calcular a diagonal de um quadrado e multiplicar pela quantidade de diagonais cortadas pelo caminho que leva o cachorro ao bife.

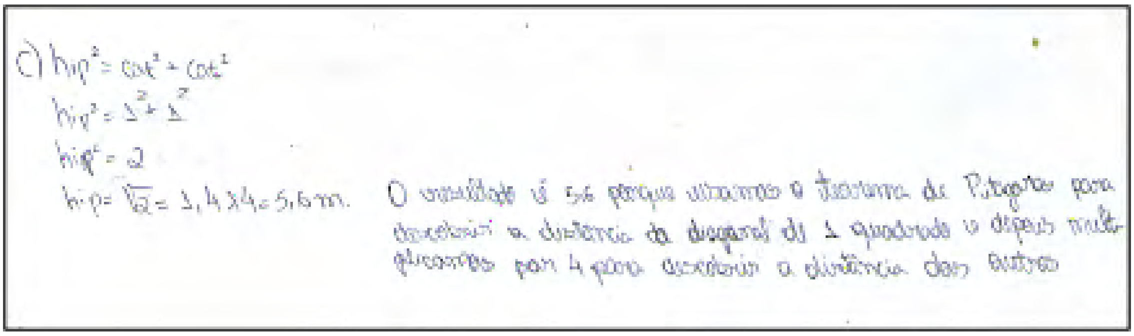
Figura 6. Estratégia 2



Fonte. Dados da pesquisa

Conforme a imagem acima, os grupos utilizaram o Teorema de Pitágoras para calcular o comprimento da diagonal de um quadradinho, o qual tomaram como referência na estratégia, chegando ao valor de raiz de 2, e, com o uso da calculadora, aproximaram para 1,4. Concluíram que se cada diagonal vale 1,4, e se têm 4 diagonais, bastava multiplicar 1,4 por 4 para obter a distância entre o cachorro e o bife, que era de 5,6m. A Figura 7 a seguir mostra a execução da estratégia feita pelo grupo e as explicações dadas.

Figura 7. Execução e explicação da Estratégia 2



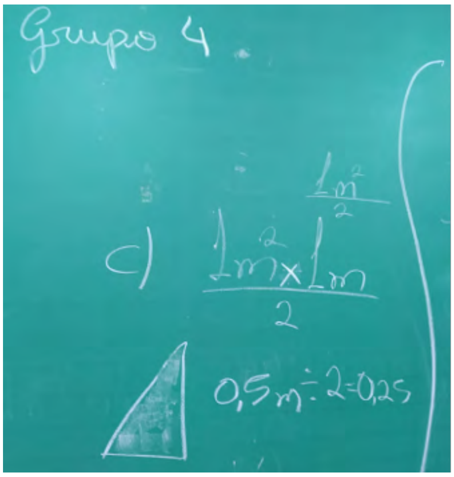
Fonte. Dados da pesquisa

Essa estratégia 2 e sua execução mostram que os grupos que a seguiram pensaram em um caminho de resolução baseado no uso do Teorema de Pitágoras, revelando uso de conhecimento estratégico ao multiplicar por 4 o comprimento da hipotenusa encontrado (Proença, 2018). Na visão de Polya (1994), isso mostra que envolver os alunos em um ambiente de resolução de problemas favorece desenvolver caminhos para atingir a resposta, pois também tivemos a estratégia 1 (Figura 5). Além disso, uma vez que pretendemos na quinta ação do EAMvRP articular a estratégia à fórmula da distância entre dois pontos (novo conteúdo a ser introduzido), o uso do Teorema de Pitágoras foi utilizado como conhecimento prévio bem compreendido pelos alunos, revelando saberem fazer uso do conhecimento semântico (Proença, 2018). No caso da resposta, não mantiveram o número raiz de 2 e sim obtiveram a sua forma decimal aproximada (1,4), o que mostra uma preocupação, possivelmente, para apresentar uma resposta mais clara, revelando a etapa de monitoramento (Proença, 2018). Dessa forma, em termos das etapas de resolução de problemas, os grupos que resolveram dessa forma mostraram que conseguiram resolver o problema, sucesso esse que, na visão de Proença (2018), mostraram que conseguiram mobilizar seus conhecimentos conceituais e procedimentais de forma condizentes.

Estratégia 3: Considerar a diagonal de um quadrado e calcular a área dos triângulos formados.

Apenas o grupo 4 utilizou essa estratégia. Durante a terceira ação do EAMvRP (de auxílio aos alunos durante a resolução), quando lhes oferecemos apoio, os alunos não quiseram expor suas compreensões. Ao insistirmos, observamos que não expressavam de forma clara como tinham resolvido. Assim, na quarta ação (de discussão das estratégias dos alunos), ao irem para a lousa socializar sua estratégia, apresentaram uma ideia equivocada, que foi calcular a área do triângulo formado por um quadradinho, conforme mostra a Figura 8.

Figura 8. Estratégia equivocada do Grupo 4



Fonte. Dados da pesquisa

Nesta quarta ação, tivemos um momento de muita troca de conhecimento com os alunos, os quais demonstraram que entenderam seus equívocos e semelhanças de ideias. Por exemplo, na exposição da estratégia 2 pelo grupo 1, um dos participantes do grupo durante a exposição relata:

> **G1:** Tivemos o mesmo pensamento delas ali (Grupo 6), a diferença é que a gente usou dois triângulos, aí a gente teve que descobrir as distâncias dos dois, (...) descobrimos a raiz e multiplicamos por dois.

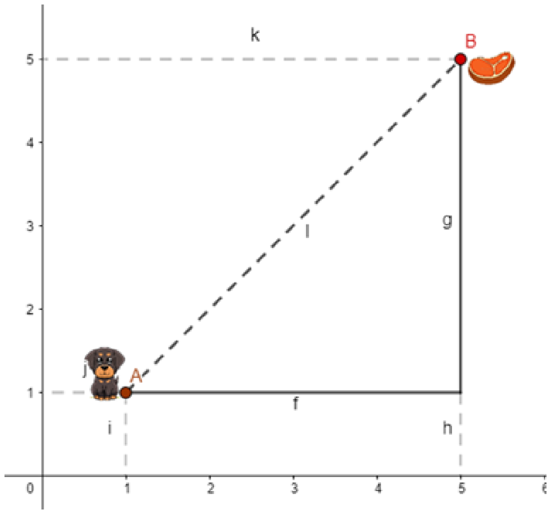
Em outro caso, o grupo 4 mostrou que compreendeu que a área total do triângulo era diferente de calcular a distância do cachorro ao bife, conforme mostra o diálogo seguinte:

> **P:** Qual fórmula vocês utilizaram?
>
> **G4:** Base vezes a altura dividido por 2.
>
> **P:** Vocês sabem para que ela serve?
>
> **G4:** (risos) (...). Calcula a área do triângulo.
>
> **P:** O que acontece pessoal é que quando a gente usa a fórmula da área, calculamos a região interna delimitada pelo triângulo. Sendo assim, pergunto: o cachorro vai andar a área, essa região interna do triângulo, para chegar ao bife ou ele andará apenas na diagonal?
>
> **G4:** Só na diagonal! Verdade!

Socializar as estratégias nessa quarta ação possibilitou levar os alunos do nosso estudo a compreenderem suas dificuldades no uso de conhecimentos matemáticos, tanto conceituais quanto procedimentais, conforme ocorreu nos estudos de Rozario y Proença (2023) de área de triângulo e Pereira y Proença (2023) de equação de 2º grau, os quais também se pautaram no EAMvRP. Puderam, assim, compreender que o comprimento da hipotenusa é sempre maior do que o lado do triângulo e que o cálculo de área é diferente de obter o comprimento da diagonal do quadradinho. Dessa forma, essa compreensão de matemática pode levar os alunos a terem maior domínio desses conteúdos, o que favorece o desenvolvimento de habilidades matemáticas na resolução de problemas, conforme explicaram Triana (2005) e Proença (2022).

5ª ação - Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo: Nesta ação, como proposto por Proença (2018), após a socialização das estratégias, a partir de uma estratégia que tomamos como referência, levamos os alunos a compreenderam a articulação que fizemos junto à forma matemática do conteúdo que foi a fórmula de distância entre dois pontos. Assim, perguntamos aos alunos se o tabuleiro do jogo lembrava algum conteúdo de matemática, e eles responderam "plano cartesiano". Enfatizamos que essa era a ideia inicial que queríamos debater com eles. Posteriormente, perguntamos aos alunos: se o cachorro e o bife estivessem em um plano cartesiano, o que eles seriam considerados na geometria? Um dos integrantes do grupo 3 respondeu "pontos", o que desencadeou a compreensão dos demais alunos dessa relação. Deste modo, expomos na lousa a estratégia 2, utilizada para resolver o item c), que era baseado em relacionar a distância entre o cachorro e o bife à hipotenusa (h) de um triângulo retângulo com catetos de 4m, o que se deu pelo uso do Teorema de Pitágoras por parte de um grupo como estratégia para encontrar a resposta. A Figura 9 a seguir mostra o desenho que retomamos dessa estratégia 2 como início para conduzir os alunos à articulação da estratégia do Teorema de Pitágoras à fórmula da distância entre dois pontos.

Figura 9. Retomada da estratégia 2 para articular ao conteúdo



Fonte. Elaborado pelos autores

Ao fazermos esse desenho na lousa, pedimos a manifestação dos alunos sobre como encontraram essa distância, de forma que um grupo comentou que utilizou o Teorema de Pitágoras. Dessa forma, os demais alunos compartilharam seus conhecimentos e puderam relembrar naquele momento esse teorema, evidenciando que envolve um triângulo retângulo (contendo um ângulo de 90 graus), conforme se identifica nas estratégias que os grupos utilizaram. Logo, os alunos mencionaram os dois catetos e a hipotenusa (h) e explicaram a execução do teorema, obtendo:

$$h^2 = 4^2 + 4^2$$
$$h^2 = 16 + 16$$
$$h^2 = 32$$
$$h = \sqrt{32}$$

Perguntamos a eles quais seriam as coordenadas se o cachorro e o bife fossem respectivamente os pontos A e B no Plano Cartesiano. Desta forma, um dos alunos do grupo 3 falou que "seria na forma x e y". Então, expomos na lousa esses dois pontos na forma A(x, y) e B(x, y). Em seguida, pedimos para eles localizarem onde estariam o cachorro e o bife no plano cartesiano que desenhamos.

Os alunos conseguiram perceber que o cachorro seria o par ordenado A(1,1) e o bife, B(5,5). Questionamo-los como haviam pensado, e um deles falou: "olhei para o eixo x e depois para o eixo y". Diante disso, os outros alunos concordaram com a mesma relação, revelando que pensaram igual. Feito isso, obtidos os valores dos catetos com a subtração dos valores de xb e xa, e de yb e ya, relacionamos o comprimento da hipotenusa (h) com a distância (d) entre os dois pontos, articulando o Teorema de Pitágoras à fórmula da distância entre dois pontos. Portanto, considerando os pontos A(1,1) e B(5,5), obtivemos:

Quadro 6. Auxílio aos alunos durante a resolução

Teorema de Pitágoras	**Distância entre dois pontos**
$h^2 = a^2+b^2$ $h^2 = (4)^2 + (4)^2$ $h^2 = 16 + 16$ $h^2 = 32$ $h = \sqrt{32}$	$d^2 = (X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2$ $d^2 = (5-1)^2 + (5-1)^2$ $d^2 = (4)^2 + (4)^2$ $d^2 = 16+16$ $d^2 = 32$ $d = \sqrt{32}$

Fonte. Elaborado pelos autores

Retomamos que o Teorema de Pitágoras implica que em um triângulo retângulo a hipotenusa (h) ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos catetos (a e b). Diante disso, explicamos que o $h^2 = d^2$, o $a^2 = (xb – xa)^2$ e o $b^2 = (yb – ya)^2$. Com isso, aproveitamos esses pontos centrais do referido teorema para articular ao novo conteúdo, conforme sugere Proença (2018). Deste modo, concluímos que a fórmula da distância entre esses dois pontos é a seguinte:

$$d^2 = (X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2$$

Após chegarmos à fórmula acima, alguns alunos relataram que gostaram do jeito que chegaram ao novo conteúdo, conforme um dos alunos do grupo 3 relatou: "Nossa, que legal, gostei, eu precisei pensar, mas foi divertido". Outro aluno do grupo 2 falou: "foi difícil, mas eu gostei desse jeito, fez a gente pensar". Posteriormente, escrevemos a definição matemática, na lousa, evidenciando o aspecto formal da fórmula: Dados dois pontos A(xa, ya) e B(xb, yb), a distância entre eles no plano cartesiano é a fórmula: $d2 = (xb – xa)^2 + (yb – ya)^2$.

Nesta quinta ação de articulação da estratégia à fórmula do conteúdo de distância entre dois pontos, podemos apontar que a compreensão dos alunos dos dois pontos no plano cartesiano e a identificação e uso do conhecimento prévio do Teorema de Pitágoras a partir do direcionamento dado em sala de aula revelaram a importância de o professor buscar fazer a articulação. Isso porque, segundo Proença (2018), se valorizou o que os alunos fizeram para depois relacionar à ideia e à simbologia matemáticas. Para Mendes, Proença e Moreira (2022), essa valorização na ação de articulação do EAMvRP se direciona a favorecer a aprendizagem significativa. Com isso, foi possível despertar o gosto dos alunos pela aprendizagem, o que possivelmente ocorreu pelas compreensões que tiveram. Isso também foi mostrado nos estudos de Akamine y Proença (2022) e Santos, Campelo y Proença (2023) na articulação, respectivamente, ao algoritmo da adição de frações e ao conceito de logaritmo, o que revela ser promissor no processo ensino-aprendizagem.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tivemos como objetivo relatar uma experiência de ensino baseada nas cinco ações do EAMvRP para favorecer a compreensão de alunos sobre o conteúdo de distância entre dois pontos. Para tal, seguimos as cinco ações de ensino de Proença (2018) e desenvolvemos a proposta em sala de aula para 27 alunos brasileiros da terceira série do Ensino Médio de uma escola pública, do estado do Paraná, no Brasil.

Durante o auxílio aos alunos, identificamos que as maiores dificuldades estão relacionadas a noções básicas de geometria, tais como saber que os catetos de um triângulo retângulo não possuem o mesmo tamanho da hipotenusa e diferenciar os conceitos de área e perímetro. Devido essas dificuldades, os alunos demoraram a desenvolver alguma estratégia que levasse a uma resposta correta, o que demonstra dificuldades de compreensão do problema, relacionadas ao uso de conhecimentos semânticos para conseguirem propor uma estratégia.

Ao longo das demais ações do EAMvRP, essas dificuldades foram abordadas de acordo com o papel que coube às duas professoras-pesquisadoras de observar, incentivar e direcionar o que os alunos fizeram para comporem estratégias que atingissem uma resposta. Esse auxílio prestado contribuiu para que as dificuldades dos alunos fossem superadas e não desistissem de tentar encontrar a resposta. Além disso, a socialização das estratégias ajudou a rever conhecimentos ligados ao plano cartesiano, de modo que na articulação da estratégia tomada como referência foi possível levar os alunos a perceberem a relação entre as estratégias e o novo conteúdo, relacionado à fórmula da distância entre dois pontos. Para realizar esse estudo, não nos deparamos com algum limite, tanto pedagógico quanto de pesquisa, uma vez que já realizamos abordagens de EAMvRP com outros conteúdos e com discussões no nosso grupo de pesquisa (Grupo de Estudos em Resolução de Problemas na Educação Matemática - ERPEM)[3] que trata da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da Matemática.

Contudo, podemos apontar que a abordagem de ensino via resolução de problemas que elaboramos e implementamos em sala de aula, estruturada conforme as cinco ações de Proença (2018), teve potencial para favorecer a compreensão do conteúdo de distância entre dois pontos pelos alunos participantes do estudo. Portanto, podemos apontar que nosso estudo sobre a experiência na abordagem das cinco ações o EAMvRP, em sala de aula, contribui para abrir espaço para novas pesquisas a serem feitas na escola.

[3] https://dma.uem.br/pesquisa/grupos-de-pesquisa/gerpem

6. REFERÊNCIAS

Akamine, C. S., y Proença, M. C. (2022). Ensino-aprendizagem de adição de frações via resolução de problemas. Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (52), 303-322. https://doi.org/10.17227/ted.num52-15590

Brasil (2018). Base Nacional Comum Curricular. Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Brasília: MEC. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

Echeverria, M, D. P. P. (1998). A solução de problemas em matemática. Em J. I. Pozo (Ed.). A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender (pp. 43-65). ArtMed.

English, L. D. (2020). Teaching and learning through mathematical problem posing: commentary. International Journal of Educational Research, 102, 1-5. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.06.014

Fi, C. D., y Degner, K. M. (2012). Teaching through problem solving. Mathematics Teacher, 105(6), 455-459. https://doi.org/10.5951/mathteacher.105.6.0455

Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. International Journal of Educational Research, 102, 1-13. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.05.001

Kunene, N., y Sepeng, P. (2017). Rural Learners' views and perceptions about their experiences in word problem solving. Journal of Social Sciences, 50(1-3), 133-140. https://doi.org/10.1080/09718923.2017.1311728

Lester, F. K., y Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen, y J. Kilpatrick (Eds.). Posing and solving mathematical problems (pp. 117-135). Springer: Cham.

Liljedahl, P., y Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 53(4), 723-735. : https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-021-01291-w

Mendes, L. O. R., Proença, M. C., y Moreira, M. A. (2022). Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas: reflexões sob o enfoque da aprendizagem significativa crítica. Ensino da Matemática em Debate, 9(2), 17–36. https://doi.org/10.23925/2358-4122.2022v9i255547

Pereira, F. F., y Proença, M. C. de (2023). Ensino-aprendizagem de equações de 2° grau via resolução de problemas: uma experiência a partir de uma trajetória hipotética de aprendizagem. Revista Paranaense de Educação Matemática, 12(28), 427-446. https://doi.org/10.33871/22385800.2023.12.28.427-446

Proença, M. C. de (2022). Habilidades Matemáticas na Resolução de Problemas: análise da compreensão de futuros professores. Bolema – Boletim de Educação Matemática, 36(74), 1135–1157. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a09

Proença, M. C. de; Maia-Afonso, É. J., Mendes, L. O. R., y Travassos, W. B. (2022). Dificuldades de Alunos na Resolução de Problemas: análise a partir de propostas de ensino em dissertações. Bolema – Boletim de Educação Matemática, 36(72), 262-285. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a12

Proença, M. C. (2021). Resolução de Problemas: uma proposta de organização do ensino para a aprendizagem de conceitos matemáticos. Revista de Educação Matemática, 18(1), 1-14. https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id359

Proença, M. C. de, Maia-Afonso, É. J., Travassos, W. B., y Castilho, G. R. (2020). Resolução de Problemas de Matemática: análise das dificuldades de alunos do 9° ano do ensino fundamental. Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, 16(36), 224-243. http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v16i36.8639

Proença, M. C. (2018). Resolução de Problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula. Maringá: Eduem. https://livraria.eduem.uem.br/loja/resolucao-de-problemas-encaminhamentos-para-o-ensino-e-a-aprendizagem-de-matematica-em-sala-de-aula/

Polya, G. (1994). A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático. Interciência.

Rozario, T. A., y Proença, M. C. (2023). Ensino de área de triângulo via resolução de problemas: uma experiência baseada nas cinco ações do EAMvRP. Educação Matemática em Revista, 28(80), 01-15. https://doi.org/10.37001/emr.v28i80.3311

Rozario, T. A., y Proença, M. C. (2022). Resolução de problemas e área de triângulo: análise dos conhecimentos de alunos do 6° ano o ensino fundamental. Revista Paranaense de Educação Matemática, 11(26), 492–517. https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.26.492-517

Santos, R. R. dos, Campelo, C. da S. A., y Proença, M. C. de (2023). O ensino de logaritmos via resolução de problemas no ensino médio. ACTIO – Docência em Ciências, 8(3), 1-22. http://dx.doi.org/10.3895/actio.v8n3.17577

Schroeder, T. L., y Lester, F. K. (1989). Developing understanding in Mathematics via problem solving. En P. R. Trafton, y A. P. Shulte (Eds.). New directions for elementary school mathematics (pp. 31-42), Reston: NCTM.

Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 52(4), 1163–1175. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01162-w

Sousa, A. C., y Proença, M. C. (2019). Uma proposta de ensino de equação de 1º grau com uma incógnita via resolução de problemas. Revista Prática Docente, 4(2), 431-451. https://periodicos.cfs.ifmt.edu.br/periodicos/index.php/rpd/article/view/512

Triana, I. M. (2005). La formación de la habilidad para resolver problemas de matemáticas: una experiencia investigativa sustentada en el enfoque histórico cultural. Tecné, Episteme y Didaxis - TED, (18), 17-33. https://doi.org/10.17227/ted.num18-457