ISSN 2452-5448 | SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
https://doi.org/10.46219/rechiem.v16i1.160

Artículos de investigación

UNA MIRADA SOBRE EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA EN NIÑOS EN NIVELES PARVULARIO Y BÁSICO DESDE LOS SISTEMAS NOTACIONALES

LOOKING AT THE LEARNING OF ALGEBRA AMONG KINDERGARTEN AND EARLY ELEMENTARY SCHOOL CHILDREN THROUGH THE LENS OF NOTATIONAL SYSTEMS

Bárbara M. Brizuela
Barbara.Brizuela@tufts.edu

https://orcid.org/0000-0002-1571-8977

Doctora,Tufts University
Medford, MA 02155, Estados Unidos.

RESUMEN

Desde la perspectiva de las investigaciones en *early algebra*, el objetivo de este trabajo es compartir evidencia sobre las capacidades que tienen los niños en los niveles parvulario y básico para trabajar con notación algebraica y para representar cantidades indeterminadas. Esta evidencia se presenta en contraste con las dificultades documentadas entre los adolescentes en estudios anteriores. La habilidad de niños más pequeños para interactuar con conceptos y representaciones que se consideraban difíciles para los adolescentes pone énfasis en la importancia del tipo y la calidad de las secuencias didácticas que se diseñan en las escuelas.

Palabras clave:
Álgebra, Aritmética, Representaciones, Nivel parvulario, Nivel básico.

ABSTRACT

From the perspective of research in early algebra, the goal of this paper is to share evidence about Kindergarten and early elementary school children's capacity to work with algebraic notation and to represent indeterminate quantities. This evidence is presented in contrast to the difficulties documented among adolescents in previous studies. Younger children's capacities to interact with concepts and representations that were considered to be difficult for adolescents emphasizes the importance of the type and quality of teaching that are designed in schools.

Keywords:
Algebra, Arithmetic, Representations, Kindergarten, Early elementary.

Recibido : 26 de febrero de 2024, Aceptado: 12 de marzo de 2024

1. El aprendizaje del álgebra en niños de 5 a 8 años

Desde la perspectiva de las investigaciones en *early algebra*, el objetivo de este trabajo es compartir evidencia de las capacidades que tienen los niños en los niveles parvulario (5 años) y básico (6 y 8 años, no se incluyeron niños de 7 años) para trabajar con notación algebraica y para representar cantidades indeterminadas. Para ello, atiendo a la conceptualización de Radford (2011) sobre cantidades indeterminadas:

> Lo que caracteriza el pensamiento como algebraico es que lidia con cantidades indeterminadas concebidas de modo analítico. En otras palabras, uno considera las cantidades indeterminadas (e. g., incógnitas y variables) como si fueran conocidas y uno lleva a cabo cálculos sobre ellas como si fueran números conocidos. (p. 310)

Por lo general, estudios anteriores explicaban las dificultades de los adolescentes con el álgebra refiriéndose a sus limitaciones y a su falta de "pensamiento formal" (*e. g*., Bednarz, 2001; Bednarz y Janvier, 1996; Booth, 1984; Filloy y Rojano, 1989; Küchemann, 1981; Steinberg et al., 1990). Muchos de estos estudios se basaban en una interpretación limitada y estrecha de la teoría piagetiana e, irónicamente, una interpretación muy concreta y literal de sus investigaciones sobre el pensamiento concreto y formal o abstracto (ver Schliemann et al., 2011). Estas investigaciones buscaban determinar qué tipos de contenidos eran los "apropiados" para el nivel de desarrollo de los niños (*i. e., developmentally appropriate* en inglés), estableciendo que había que postergar la enseñanza de contenidos complejos y "difíciles" como el álgebra lo más posible, hasta que los niños estuvieran "listos" para aprenderlos. De este modo, estas investigaciones buscaban describir las dificultades de los niños con el álgebra desde la postura de que los niños no estaban listos para aprender álgebra.

En contraste con estas perspectivas, recientemente los estudios con niños en los últimos grados del nivel básico nos han brindado evidencia de su capacidad para aprender conceptos que se consideraban difíciles para los adolescentes, enfatizando que las dificultades probablemente no residían en los niños sino en el tipo de experiencias didácticas que se diseñaban para ellos (*e. g.*, Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2008; Kaput et al., 2008; Schliemann et al., 2011). Además, estos estudios recientes enfatizan que el enfoque en la "falta de pensamiento formal" en los niños, o su "pensamiento concreto", no nos ayuda a explicar la facilidad que ellos tienen a la hora de su acercamiento al aprendizaje de los contenidos algebraicos. De todos modos, estos estudios recientes buscan enfatizar que *early algebra* no es lo mismo que simplemente enseñar el contenido algebraico típico más temprano (*early algebra is not the same as algebra early*, ver Carraher et al., 2008). Al contrario, *early algebra* posiciona el contenido y las prácticas algebraicas de un modo accesible para los niños.

1.1 *Early algebra*

Distintas investigaciones en las últimas décadas han tratado la importancia de integrar los contenidos aritméticos y algebraicos desde los primeros cursos de la escolaridad (*e. g.*, Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2008; Kaput et al., 2008; Schliemann et al., 2011). Asimismo, estas investigaciones han resaltado los efectos a corto y largo plazo de integrar el contenido y las prácticas algebraicas con los contenidos aritméticos (*e. g*., Blanton et al., 2019; Brizuela et al., 2013; Schliemann et al., 2012). Siguiendo el marco de Kaput (2008) y detallado por Blanton et al. (2011), entendemos que el contenido algebraico en *early algebra* incluye: (1) la aritmética generalizada; (2) la equivalencia, las expresiones, las ecuaciones y las desigualdades (o simplemente las ecuaciones); (3) el razonamiento cuantitativo, y (4) el pensamiento funcional. De acuerdo a Carraher y Schliemann (2007), el álgebra involucra trabajar con variables y realizar aritmética con ellas; además, incluye representar o hacer "modelos" de situaciones concretas con expresiones, construir ecuaciones, manipular expresiones y ecuaciones, simplificarlas, resolverlas e interpretarlas. Estos mismos autores resaltan que la estructura algebraica está plasmada en las reglas de la aritmética. La idea general que adoptan es que el álgebra es inherente a la aritmética, que la aritmética tiene un carácter algebraico, y que la aritmética y el álgebra elemental realmente no se pueden distinguir (Schliemann et al., 2011). Estos autores proponen que el razonamiento algebraico incluye los procesos psicológicos involucrados en la resolución de problemas que los matemáticos típicamente resolverían a través de la notación algebraica, y llaman *early algebra* al razonamiento algebraico y a la enseñanza relacionada con el álgebra a alumnos de 6 a 12 años aproximadamente.

En la propuesta algebraica tradicional se espera hasta la adolescencia para introducir la notación algebraica como representación de cantidades. En la propuesta del *early algebra* que adoptamos en nuestros estudios se introduce la notación algebraica desde el comienzo de la escolaridad como parte del lenguaje matemático.

Esta introducción temprana se justifica tomando la postura de que la fluidez con un lenguaje se empieza a desarrollar desde temprana edad y que cualquier aprendizaje complejo toma considerable tiempo.

> En lo que sigue comparto datos de tres salones de clase diferentes. Estos datos se recogieron en una serie de estudios que llevamos a cabo desde 1998. En los tres casos presentados aquí, los niños trabajaron sobre variaciones del siguiente problema, que comúnmente llamamos *el problema de los caramelos*:
>
> *Mary y John tienen una caja con caramelos cada uno. Mary tiene tres [o dos, en el caso de los niños en 1er grado y en parvulario] caramelos adicionales afuera de su caja.*

En todos los casos implementamos secuencias didácticas utilizando la metodología de la investigación de diseño (e. g., Cobb et al., 2003; Kelly, 2003). Como ha sugerido la *Design-Based Research Collaborative* (Colaboración en Investigación de Diseño, en castellano; Cobb et al., 2003), "la investigación basada en el diseño puede ayudar a crear y ampliar el conocimiento sobre el desarrollo, la implementación y el mantenimiento de ambientes de aprendizaje innovadores" (p. 5).

2. Caso 1: Niños de tercer grado del nivel básico

En este primer caso, tomamos los datos de un salón de clase de 3er grado del nivel básico, con niños de 8 años aproximadamente (ver Brizuela, 2016; Carraher et al., 2006; Carraher et al., 2008). Estos niños ––al igual que los niños en otros tres salones de clases en la misma escuela–– participaron de la investigación desde mediados de 2do grado. Específicamente, en 2do grado nos reunimos con la clase una vez por semana durante seis semanas y cada sesión duró, aproximadamente, 90 minutos. El problema de los caramelos se presentó en la sesión 7 de las 44 que se llevaron a cabo en 3er grado.

En primer lugar, el docente/investigador presentó el problema de las cajas de caramelos que describí arriba y, una vez que el grupo de niños había discutido el problema de tal modo que el docente/investigador se había cerciorado de que los niños lo comprendían, comenzó a pedir a los niños que, uno a uno, fueran proponiendo qué cantidad de caramelos podía tener cada una de las dos cajas. Ante esta petición, y una vez que varios de sus compañeros habían propuesto varias cantidades diferentes, tuvo lugar el siguiente diálogo entre el docente/investigador y uno de los niños, Matthew:

> Matthew: En realidad no quiero hacer una predicción.
>
> Docente/investigador: Está bien, pero déjame ofrecerte una alternativa y ver si estás dispuesto a hacer esto. ¿Qué pasa si te digo, Matthew, que John tiene n caramelos? Y n puede significar cualquier cantidad. Podría no significar nada. Podría significar noventa. Podría significar siete. ¿Qué te parece?
>
> Matthew: Bien.
>
> [...]
>
> Docente/investigador: Bueno, ahora aquí está el problema, y este es un problema difícil. Matthew, ¿cuántos deberíamos decir que tiene Mary si John tiene n caramelos y n puede representar cualquier cosa?
>
> [...]
>
> Joseph: n más tres.
>
> Docente/investigador: ¿ n más tres?
>
> Joseph: n más tres.
>
> Docente/investigador: Wow. Explícanos eso.
>
> [...]
>
> Joseph: Pensé porque ella podría tener tres más que John. Escribí n más tres porque podría tener cualquier cantidad más tres.

Ante la resistencia de Matthew para proponer una cantidad específica de caramelos que podrían estar contenidos en la caja, el docente/investigador introdujo la posibilidad de usar n para representar la cantidad de caramelos en la caja. Joseph tomó esta idea y con ella propuso una expresión para representar la cantidad de caramelos que tiene Mary: $n+3$. Los niños habían tenido una docena de oportunidades (seis en 2do grado y seis en 3er grado) de interactuar con y escuchar sobre el uso de notación algebraica para representar cantidades indeterminadas. Con estas experiencias previas, que habían sido sus primeras oportunidades de usar notación algebraica, Matthew, Joseph y sus compañeros rápida y fácilmente aceptaron el uso de la notación algebraica para representar cantidades indeterminadas en el contexto de este problema y hasta fueron capaces de representar una operación sobre la cantidad indeterminada $(i.\ e., n+3)$.

Dada esta evidencia de que niños de 3er grado del nivel básico son capaces de representar una cantidad indeterminada con notación algebraica y son capaces de crear una expresión en la cual se opera sobre una cantidad indeterminada representada con notación algebraica $(i.\ e., n+3)$, nos preguntamos de qué serían capaces niños aún más pequeños, de 1er grado de nivel básico (niños de 6 años aproximadamente) y niños del nivel parvulario (niños de 5 años aproximadamente).

3. Caso 2: Niños de primer grado del nivel básico

En 1er grado del ciclo básico adaptamos el problema de las cajas de caramelos para que fuera más acorde a la edad de los niños (ver Blanton et al., 2017; Brizuela, Blanton, Gardener et al., 2015; Brizuela, Blanton, Sawrey et al., 2015):

> *Jack tiene una caja de caramelos. No está seguro de cuántos caramelos hay en su caja. Su madre le da dos caramelos más.*

Este problema se presentó en la sesión 11 de las 14 que implementamos en 1er grado. Cada sesión duró entre 30 y 40 minutos aproximadamente. Es decir, cuando tuvo lugar esta sesión los niños ya habían trabajado con nosotros entre 5 y 7 horas en total. Desde el comienzo del experimento de enseñanza utilizamos la notación algebraica como un símbolo para representar cantidades indeterminadas. Antes de la sesión 11 habíamos trabajado ocho sesiones con la función $y = mx$ y dos sesiones con la función $y = x + b$. Cabe destacar que previo a nuestro experimento de enseñanza estos niños no habían utilizado notación algebraica en sus clases de Matemáticas. En cuanto la docente/investigadora leyó este problema, los niños del salón comenzaron a proponer cantidades de caramelos que podía haber en la caja, sin haber realizado ella ninguna pregunta. Un niño propuso que había siete caramelos en la caja mientras que otro propuso que había cinco. Luego la docente/investigadora dijo: “Entonces la primera pregunta es: ¿Qué sabemos sobre la cantidad de caramelos que tiene Jack? ¿Qué sabemos? ¿Elsie?” mientras muchos niños levantaban la mano.

> Elsie: Entonces sabemos que tiene una caja llena de caramelos, pero no sabe cuántos. Entonces, ¿podría ser u porque podría ser cualquier cantidad? [La docente/investigadora escribe u en una lámina.]
>
> Docente/investigadora: Mmmm. Entonces, ¿estás diciendo que, si queremos representar el número de caramelos en la caja, podríamos usar u?
>
> Elsie: u más dos porque su madre le dio dos. [La docente/investigadora escribe $u+2$ en la lámina.]
>
> Luego, la docente/investigadora le preguntó a Lincoln si la propuesta de Elsie tenía sentido:
>
> Lincoln: Sí, pero iba a decir a más 2. [La docente/investigadora escribe $a + 2$ en la lámina.]
>
> Docente/investigadora: Bueno, ¿importa?
>
> Lincoln: No.
>
> Docente/investigadora: No. Podría ser, entonces esto podría ser de Elsie [señalando $u+2$], y podríamos decir que u más 2 es igual a e y luego podríamos decir que a más ¿qué?
>
> Lincoln: Dos.
>
> Luego, Rahan intervino de la siguiente manera:
>
> Rahan: ¿Creo que podría ser f más 2?
>
> Docente/investigadora: Podrías escribir f más 2, ¡así es! Podrías usar cualquier variable. f más 2 es igual a r. OK. [Escribiendo $f+2$ en la lámina.] Um, escuché a alguien decir, escuché a alguien decir que tiene que ser siete. ¿Qué piensas sobre eso? Lina, ¿qué opinas sobre eso?
>
> Lina: No es necesario, porque puede ser cualquier número.
>
> Docente/investigadora: ¿Cómo lo sabes? ¿Cómo sabes eso? Espera, Chase, te llamaré en un segundo. Lina, ¿cómo sabes que puede ser cualquier número?
>
> Lina: Porque no sabemos qué número es.
>
> Docente/investigadora: Está bien. Podría ser cinco, pero podría ser otra cosa, ¿no?
>
> Estudiante: Podría ser sesenta y dos.
>
> Docente/investigadora: Sí, podría serlo.
>
> Estudiante: Podría ser ciento cincuenta.

En el caso de los niños de 1er grado, fueron ellos mismos quienes propusieron el uso de notación algebraica para representar la cantidad indeterminada de caramelos en la caja. Pudieron proponer distintas letras, entendiendo que la letra que se usa es aleatoria, y también sugerir una expresión para la cantidad total de caramelos que tiene Jack, representando el +2 en sus expresiones. Mientras que los niños de 3er grado habían interactuado con notación algebraica durante 12 sesiones de clase con nosotros en un experimento de enseñanza, los niños de 1er grado habían interactuado con nosotros durante 10 sesiones de clase. En ambos casos es evidente que los niños no necesitaron de experiencias extensas para comenzar a apropiarse de esta forma diferente y novedosa de representar las cantidades indeterminadas. Del mismo modo que exploramos la tarea con niños de aproximadamente 6 años, hicimos lo mismo con niños aún menores, en nivel parvulario.

4. Caso 3: Niños de parvulario

En parvulario, con niños de 5 años aproximadamente, se introdujo la misma variante del problema que se había introducido en 1er grado, también en la sesión 11 de 14, habiendo trabajado previamente la misma cantidad de horas que con los niños de 1er grado. Cuando la docente/investigadora leyó el problema, Mía pidió levantarse y presentar frente a sus compañeros:

> Mía: Estaba pensando, porque no sabemos cuántos tiene, escribí “$m + 2 = 2$”. Porque tiene dos cajas. No, tiene dos y su caja.
>
> Docente/investigadora: Está bien. Entonces, ¿qué significa m aquí? ¿Qué representa m? ¿Qué intentas mostrar con esa m?
>
> Mía: ¿Cualquier número?
>
> Docente/investigadora: Cualquier número. ¿Y cuál es el 2?
>
> Mía: El dos es más dos.
>
> Docente/investigadora: Más dos.
>
> Mía: Porque, porque y su mamá le dio…
>
> Docente/investigadora: Su mamá le dio dos caramelos más, ¿no? OK. Esto, los m caramelos, los que son cualquier número, ¿dónde están? ¿Quién recuerda dónde están? Kara.
>
> Kara: En la caja.

Luego, la docente/investigadora preguntó a Mía qué números podría ser m y ella contestó de la siguiente manera:

> Mía: Como uno, dos o tres. Un número así.
>
> Docente/investigadora: Está bien. ¿Podrían ser cien?
>
> Mía: Sí.
>
> Docente/investigadora: ¿Un millón?
>
> Mía: Sí.

A pesar de que la expresión que propuso Mía no era generalizable (*i. e.*, la expresión $m + 2 = 2$ solo es verdadera si $m = 0$), ella no dudó en utilizar notación algebraica para representar la cantidad indeterminada y pudo asimismo proponer una expresión que contenía notación algebraica y que incluía una operación (+ 2).

Las secuencias didácticas que diseñamos parecen haber facilitado en los niños de 1er grado y parvulario el uso de la notación algebraica para representar cantidades indeterminadas, su comprensión de que no es necesario especificar las cantidades indeterminadas y su habilidad para representar operaciones sobre cantidades indeterminadas.

5. ¿Qué nos enseñan estos niños sobre el aprendizaje del álgebra y su uso de notaciones algebraicas?

Quisiera contrastar lo que hemos visto en los ejemplos anteriores sobre de lo que son capaces de hacer los niños en 3er grado, 1er grado y parvulario con lo que se ha documentado entre estudiantes adolescentes en Küchemann (1981), Knuth et al. (2011) y MacGregor y Stacey (1997) (ver Tabla 1). La Tabla 1 detalla los tipos de comprensión que evidencian niños mayores que los que participaron en nuestros estudios. Entre los datos que aportan estos autores quisiera resaltar que Küchemann (1981) encontró que únicamente el 11% de los adolescentes de 14 años usó la letra como una cantidad generalizada y tan solo el 6% la usó como una variable. Como hemos visto en nuestros datos, niños de 5, 6 y 8 años son capaces de operar sobre las letras, además de utilizarlas para representar una cantidad indeterminada. Por su parte, MacGregor y Stacey (1997) encontraron que solo el 2% de los niños de 11-12 años con los que trabajaron podían usar una letra para representar una cantidad desconocida antes de recibir clases de Álgebra, mientras que el 37% podía hacerlo después de haber recibido clases de Álgebra.

Tabla 1. Comprensiones sobre la notación algebraica expresada por estudiantes adolescentes en orden de menor a mayor complejidad

Küchemann (1981) niños de 14 años	Knuth et al. (2011) niños de 11 años	MacGregor y Stacey (1997) niños de 11-12 años
la letra se evalúa		valor numérico
la letra no se usa	ninguna respuesta/no sé	la letra se ignora
la letra se usa como objeto	objeto	palabra abreviada
		valor alfabético
la letra como cantidad desconocida específica	número específico	cantidad desconocida
la letra como número generalizado	valores múltiples	cantidad desconocida
la letra como variable		
		uso de una letra diferente para cada cantidad desconocida

Nota. Obtenido de Brizuela (2023).

De acuerdo con lo que hemos visto en los tres casos presentados para el nivel parvulario y básico, y de acuerdo con lo presentado en la Tabla 1, notamos que algunos de los tipos de comprensión menos complejos observados entre los adolescentes no fueron observados en los niños más pequeños. Por ejemplo, los primeros cinco tipos de comprensión (*i. e.*, 1. la letra se evalúa/valor numérico; 2. la letra no se usa/ninguna respuesta-no sé/la letra se ignora; 3. la letra se usa como objeto/objeto/palabra abreviada; 4. valor alfabético, y 5. la letra como cantidad desconocida específica/número específico/cantidad desconocida) no se observaron entre los niños más pequeños que he incluido en los tres casos presentados en este trabajo. Esto indica que es posible que el introducir las notaciones algebraicas lo más temprano posible puede llegar a ayudar a los niños a evitar algunas confusiones que pueden desarrollar si se introducen más tardíamente.

Lo mismo nos pasaría con cualquier aprendizaje, desde aprender un segundo idioma hasta aprender a manejar una motocicleta en nuestra vejez. Es decir, mientras más esperamos para introducir un contenido nuevo o una habilidad nueva, más probable es que su aprendizaje nos resulte difícil y que cometamos errores de distinto tipo. Seguramente hemos tenido experiencia tratando de enseñar a personas cuya lengua materna no es el castellano a pronunciar palabras con una r, sobre todo palabras como “perro” o “rápido”. Por más que lo intentemos, a muchas personas que no hayan aprendido a pronunciar la r en castellano desde temprana edad les será prácticamente imposible hacerlo. Mientras que el enfoque tradicionalmente ha sido el de esperar a introducir la notación algebraica y el contenido algebraico hasta que los estudiantes “estén listos” o hasta que hayan desarrollado el supuesto pensamiento “formal y abstracto”, lo que vemos en estos estudios con niños muy pequeños y mucho más pequeños que los que típicamente se incluyen en la enseñanza del álgebra es que el esperar y demorar la enseñanza ¡no parece ayudar de ninguna manera!

Lo que sí observamos entre los niños más pequeños es que pueden utilizar la letra para representar un número generalizado, valores múltiples y cantidades variables. Este contraste entre lo que pueden hacer los adolescentes y lo que pueden hacer los niños más pequeños nos indica que demorar la enseñanza del álgebra no ayuda necesariamente a mitigar las dificultades de los niños. De hecho, es posible que demorar la enseñanza del álgebra esté contribuyendo a las dificultades entre los adolescentes.

6. ¿Por qué es importante el aprendizaje del álgebra en los niños?

Pero ¿por qué nos importa o nos debería importar el aprendizaje del álgebra en los niños? Moses y Cobb (2001) describen el álgebra como un derecho civil y como un filtro que determina qué niños acceden a estudios superiores en las áreas de ciencias, matemáticas y tecnología. Es decir, describen el álgebra como un filtro que contribuye a determinar el acceso y la participación educativa de la población.

Además de ser un derecho civil y servir como un filtro que determina el acceso a otros contenidos, investigaciones en el área han mostrado el impacto a largo plazo que tiene en los niños el brindarles acceso al álgebra desde los primeros momentos de su escolaridad. En Schliemann et al. (2012) encontramos que el rendimiento en álgebra en la escuela secundaria es significativamente mejor entre niños que han tenido acceso al álgebra desde los primeros grados. En base a los datos del mismo estudio, en Brizuela et al. (2013) comparamos las puntuaciones de los estudiantes en pruebas de Álgebra. Nuestros resultados resaltan el impacto positivo de un acceso temprano al álgebra: al comparar el grupo experimental con el de control, encontramos mejores puntuaciones en ítems que involucraban variables, relaciones funcionales, contextos intramatemáticos, tablas y expresiones algebraicas.

Por su parte, Blanton et al. (2019) implementaron un experimento de enseñanza de *early algebra* en 23 escuelas, de 3er a 5to grado, durante tres años. En el primer año de la intervención, manteniendo constante el contexto socioeconómico, los estudiantes del grupo experimental mejoraron a un ritmo significativamente más rápido que los estudiantes del grupo control. En los últimos dos años de la intervención, encontraron un crecimiento similar en el uso de estrategias estructurales. Estos resultados, sumados a los de Schliemann et al. (2012) y Brizuela et al. (2013), contribuyen a la evidencia de los efectos positivos a corto, mediano y largo plazo de un acceso temprano al álgebra. Es decir, podemos replantearnos la pregunta, ¿por qué deberíamos enseñar álgebra a los niños? y preguntarnos en vez ¿por qué ***no*** enseñamos álgebra ***a todos los niños*** desde los primeros años de su escolaridad?

7. Conclusiones

Desde edades tempranas damos o tratamos de dar acceso a los niños al habla, a la alfabetización y al aprendizaje de una segunda lengua. Tratamos de rodearlos de experiencias y de herramientas que apoyen sus aprendizajes y amplíen sus horizontes. Les leemos libros, los anotamos en clases donde aprenden otros idiomas, o música u otros contenidos. De hecho, entendemos que las demoras tanto en ese acceso como en esos aprendizajes tempranos pueden ser perjudiciales para los aprendizajes posteriores. Como mencioné arriba, cómo pronunciamos o entendemos una lengua extranjera, nuestra comodidad en la expresión en esa lengua y nuestra habilidad para comunicarnos y leer en esa lengua resultan mucho más difíciles a medida que postergamos su aprendizaje. Del mismo modo, argumentamos en nuestros trabajos que es tanto *posible* como *importante* introducir el álgebra y el uso de la notación algebraica para representar cantidades indeterminadas a los niños desde una edad más temprana, dándoles así acceso al lenguaje matemático. Nuestros estudios enfatizan la facilidad con la que niños muy pequeños pudieron adoptar el uso de la notación algebraica en expresiones matemáticas y en la representación de cantidades indeterminadas. Como plantearon Moses y Cobb (2001), entendemos el acceso a la notación algebraica, la cual forma parte del lenguaje matemático, como un derecho civil que puede abrir puertas a los niños a la hora de construir sus comprensiones algebraicas y su acceso a contenidos más y más complejos en las áreas de ciencias, matemáticas y tecnología. Dada su facilidad con estos aprendizajes, es el derecho civil de los niños y nuestra obligación moral como adultos brindarles el mayor acceso posible, con todos los apoyos y las herramientas posibles.

Agradecimientos

Las investigaciones fueron llevadas a cabo con el apoyo de DRL-1415509 de la National Science Foundation de Estados Unidos. Agradezco a Mathías López, María del Carmen Pérez Martos, Eder Pinto Marín y Juan Luis Piñeiro Garrido sus sugerencias a una versión borrador de este trabajo.

Referencias

Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra: Accounting for the reasonings and notations developed by students. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, 1* (pp. 69-78). University of Melbourne.

Bednarz, N., y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_8

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., y Newman-Owens, A. (2017). A Progression in First-Grade Children's Thinking About Variable and Variable Notation in Functional Relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*, 181-202. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5.* National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.

Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A. M., Stylianou, D. A., Knuth, E., Isler-Baykal, I., y Strachota, S. (2019). Does early algebra matter? The effectiveness of an early algebra intervention in Grades 3 to 5. *American Educational Research Journal, 56*(5), 1930-1972. https://doi.org/10.3102/0002831219832301

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. NFER-Nelson.

Brizuela, B. M. (2016). Variables in Elementary Mathematics Education. *Elementary School Journal, 117*(1), 46-71. https://doi.org/10.1086/687810

Brizuela, B. M. (2023). ¿Qué nos enseñan los niños en niveles parvulario y básico sobre el aprendizaje del álgebra? Una mirada desde los sistemas notacionales. En J. L. Piñeiro, N. Pizarro y E. Carrasco (Eds.), *Actas de las XXVII Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 16-23). Fondo Editorial UMCE.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A., y Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation / Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología: Studies in Psychology, 36*(1), 138-165. https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000027

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., y Gardiner, A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*, 1-30. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939

Brizuela, B. M., Martinez, M. V., y Cayton-Hodges, G. A. (2013). The impact of early algebra: Results from a longitudinal intervention. *Journal of Research in Mathematics Education/Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (REDIMAT), 2*(2), 209-241. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.28

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Handbook of research in mathematics education* (pp. 669-705). Information Age.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., y Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781315097435-12

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Filloy, E., y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kaput, J., Carraher, D., y Blanton, M. (Eds). (2008). *Algebra in the early grades.* Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Kelly, A. (Ed.). (2003). The role of design in educational research (Special Issue). *Educational Researcher 32*(1), 3-37. https://doi.org/10.3102/0013189X032001003

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., y Stephens, A. C. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence and variable. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in Mathematics Education Monograph Series* (pp. 259-276). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_15

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 102-119). Murray.

MacGregor, M., y Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1-19. https://doi.org/10.1023/A:1002970913563

Moses, R., y Cobb, C. (2001). *Radical equations: Math literacy and civil rights.* Beacon Press.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). Advances in Mathematics Education Monograph Series. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17

Schliemann, A. D., Carraher, D., y Brizuela, B. M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: de las ideas de los niños a las actividades en el aula.* Editorial Paidós.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., y Brizuela, B. M. (2012). Algebra in elementary school. En L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier y A. Robert (Eds.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp. 103-118). La Pensée Sauvage.

Steinberg, R., Sleeman, D., y Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. J*ournal for Research in Mathematics Education, 22*(2), 112-121. https://doi.org/10.2307/749588