https://doi.org/ 10.46219/rechiem.v17i2.175

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática,
SSN 2452-5448

LA INTEGRAL DEFINIDA DESDE EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS

THE DEFINITE INTEGRAL FROM THE PERSPECTIVE OF MATHEMATICS TEACHER SPECIALISED KNOWLEDGE

Jorge Hernández-Tello
jhernandez@academicos.uta.cl
https://orcid.org/0000-0002-4564-100X
Universidad Nacional de Educación a Distancia, España

Álvaro Cortínez Pontoni
acortinezp@academicos.uta.cl
https://orcid.org/0000-0002-9377-9476
Universidad de Tarapacá, Chile

Blanca Arteaga-Martínez
blanca.arteaga@edu.uned.es
https://orcid.org/0000-0002-1079-1526
Universidad Nacional de Educación a Distancia, España

RESUMEN

Este artículo presenta el análisis de una tarea orientada a describir la integral definida como área bajo la curva, apoyada en el uso de GeoGebra. El marco teórico corresponde al modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). Se llevó a cabo un estudio de caso con enfoque cualitativo descriptivo, organizado en tres fases —planteamiento, análisis y reflexión—, en el contexto de una tarea desarrollada durante el año 2023 con estudiantes de Pedagogía en Matemática en la asignatura Didáctica del Cálculo de la Universidad de Tarapacá (Chile). Los resultados evidencian las producciones de los futuros docentes en cada fase: activación del conocimiento disciplinar, análisis e interpretación de procedimientos y reconstrucción del significado de la integral definida desde su fenomenología. Se concluye que el uso del modelo analítico MTSK facilitó el estudio de la tarea en la formación inicial docente, involucrando categorías del conocimiento de los temas (KoT) para describir la integral definida como área bajo la curva, y promoviendo la articulación entre registros de representación pictórica mediante el uso de tecnología.

Palabras clave:
conocimiento de los temas; integral definida; formación de profesores; MTSK; representación pictórica

ABSTRACT

This article presents the analysis of a task designed to describe the definite integral as the area under the curve, supported by the use of GeoGebra. The theoretical framework adopted is the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. A descriptive qualitative case study was conducted, organized into three phases—design, analysis, and reflection—in the context of a task carried out in 2023 with preservice mathematics teachers enrolled in the Didactics of Calculus course at the University of Tarapacá (Chile). The findings highlight the students' productions in each phase: activation of disciplinary knowledge, analysis and interpretation of procedures, and reconstruction of the meaning of the definite integral from its phenomenology. It is concluded that the use of the MTSK analytical model facilitated the study of the task within teacher education, involving categories of Knowledge of Topics (KoT) to describe the definite integral as the area under the curve, and fostering the articulation between pictorial representations supported by technology.

Keywords:
knowledge of topics; definite integral; teacher training; MTSK; concrete-pictorial representation

Recibido 13 de septiembre 2024, Aceptado 11 de agosto 2025
Revista Chilena de Educación Matemática, Volumen 17, N°2

1. INTRODUCCIÓN

La integral definida es un concepto importante para los estudiantes de las disciplinas científicas, dado que está presente en distintos contextos donde será necesario resolver problemas que requieren su conocimiento, comprensión y aplicación. Por lo tanto, "es necesario identificar las dificultades que los estudiantes encuentran al aprenderlo para diseñar actividades de enseñanza que logren en el estudiante un aprendizaje más sólido" (Camacho et al., 2008, p. 34).

La literatura especializada en Educación Matemática recoge investigaciones centradas en las dificultades en la comprensión de la integral definida por parte de estudiantes universitarios. Por ejemplo, se han identificado limitaciones por parte de los estudiantes para interpretar la integral definida como área bajo la curva (Bezuidenhout & Olivier, 2000), para representar la integral definida de diferentes formas (Dreyfus et al., 2021; Serhan, 2015), e incluso referidas a la comprensión de la definición de integral definida y la interpretación de problemas de cálculo de áreas en contextos más amplios (Rasslan & Tall, 2002).

Sari et al. (2019) señalan que algunos estudiantes tienen una comprensión no idónea de la definición de la integral definida, dado que se desvían del concepto formal y garantizan la existencia de la integral definida sin una razón lógica. En otros casos, los estudiantes comprenden algunos conceptos asociados a la integral definida, pero a pesar de ello, son incapaces de usarlos para definir dicha integral, probablemente porque el trabajo basado en "conceptos comunes de área bajo una curva y antiderivada son insuficientes para la comprensión integral" (Lehmann, 2024, p. 1).

Otras dificultades se ponen de manifiesto en el momento de interpretar la integral definida desde una perspectiva gráfica (Domínguez et al., 2019), o al mostrar falta de coordinación entre los procesos de partición, sumas y límites con sus respectivas representaciones tanto algebraica, gráfica y numérica (Tatar & Zengin, 2016), lo que ocasiona un obstáculo en el conocimiento de la integral definida.

Cuando cuestionamos a los estudiantes sobre las razones que les dificultan la resolución de problemas que involucren el cálculo integral, lo justifican desde el empleo de los libros de texto como material casi único por parte de los docentes (Quiroz et al., 2022). Y es que una de las claves es la interpretación gráfica de la integral definida, de la que se ha recogido su importancia y trascendencia en la representación en los libros de texto (Jones, 2018) y con ello, la necesidad de generar actividades que partan de problemas contextualizados donde se exprese el rol que juegan las sumas de Riemann en este proceso (Serhan, 2015) o se haga uso de la descomposición de las regiones irregulares en figuras regulares (rectángulos), con el fin de tener una aproximación lo bastante cercana al valor del área de la región delimitada (Peña et al., 2019). Sin embargo, estos libros de texto brindan oportunidades limitantes para que el estudiante pueda visualizar la integral definida desde la suma de pequeñas partes (Hong & Kwaka, 2024).

Otras investigaciones más recientes sobre el análisis del currículo del cálculo en educación media y superior señalan que los diseños curriculares están fuertemente arraigados en las experiencias, las creencias y los puntos de vista de los responsables del diseño curricular, más que en el desarrollo de nociones fundamentales del cálculo. Por ejemplo Bustos y Ramos (2022) afirman que tras el cambio curricular chileno, los profesores se ven enfrentados a la enseñanza de temas que habían tratado en su forma inicial, pero que no habían tenido oportunidad de impartirlos en la enseñanza media. Así, la actividad pedagógica actual no tiene muchas posibilidades para una aplicación con el apoyo de la tecnología informática en Chile como recurso de enseñanza, por lo que puede ser más complejo el hecho de adaptar el contenido de la educación a las necesidades de una sociedad en rápido desarrollo, sabiendo que la tecnología se ha convertido en infraestructural en relación al descubrimiento matemático y a las interacciones en el escenario de aprendizaje (Kaput et al., 2020), y que supone de manera específica rapidez en la resolución de diversos problemas que involucren la aplicación de la integral definida como el área bajo la curva (Duriš, 2020).

Las necesidades de la formación inicial para los profesores en matemática están descritas en los Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media en Chile (EOCP). Un documento oficial dirigido a las Facultades y Escuelas de Educación del país ofrece "una orientación acerca de los conocimientos y habilidades necesarias que debería manejar de pedagogía para enseñar estas disciplinas, sobre la base del criterio de expertos" (MINEDUC, 2021, p. 8). Los estándares disciplinarios correspondientes al área de Matemática se organizan en seis subáreas: a) Números y álgebra, b) Geometría, c) Probabilidades y estadística, d) Límites, derivadas e integrales, e) Pensamiento computacional y programación y f) Habilidades y actitudes matemáticas. En la subárea d) nos insta necesidad de que los futuros profesores de matemáticas chilenos se preparen para "modelar fenómenos que requieren conocimientos de límites, derivadas e integrales y de los otros estándares como, por ejemplo, fenómenos que requieran del uso de probabilidades, cálculo de integrales y tecnología" (MINEDUC, 2021, p. 23).

El presente estudio tiene como propósito analizar, a partir del modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK; Carrillo et al., 2018), los conocimientos que reflejan las producciones generadas por un grupo de estudiantes de pedagogía matemática, considerados como futuros docentes, al abordar una tarea centrada en los contenidos intra-conceptuales involucrados en la descripción de la integral definida como área bajo la curva. La pregunta de investigación que guiará nuestro trabajo para dar respuesta al objetivo es: ¿Cómo construyen y desarrollan su comprensión de la noción de integral definida los docentes en formación?.

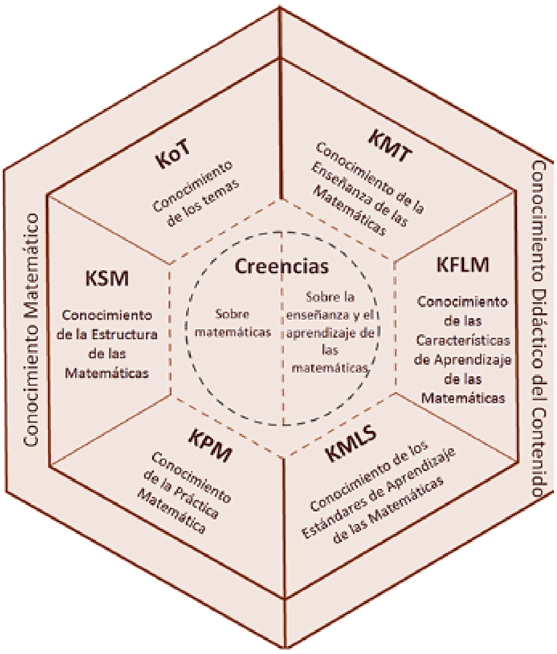
2. MARCO TEÓRICO

El MTSK es un modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de tipo descriptivo. El modelo permite analizar el conocimiento del profesor desde un punto de vista global, considerando tanto el dominio matemático como el dominio didáctico específico, donde se destacan las diferentes dimensiones en las que el profesor utiliza el contenido matemático. Se configura como una "como herramienta teórica y analítica con la cual ofrecer una serie de evidencias e indicios del conocimiento didáctico del contenido" (Escudero et al., 2021, p.192) del profesor durante su práctica pedagógica.

El MTSK está conformado por dos dominios relacionados con el Conocimiento Matemático MK (Mathematical Knowledge) y el Conocimiento Didáctico del Contenido PCK (Pedagogical Content Knowledge), y uno más de Creencias (Beliefs) vinculado con los dos anteriores. Los dos primeros se desglosan en tres subdominios cada uno de ellos. El MK contempla el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica, mientras que el análisis del conocimiento de aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje se realiza a través del PCK. Podemos ver en su representación sintética (Figura 1) como el MTSK considera las concepciones que tiene el profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, a las que se denomina creencias y se encuentran en el centro del modelo, delimitada con líneas punteadas para reflejar que ellas permean a cada uno de los subdominios de este, y que es pertinente el estudio de las relaciones entre dichas creencias y los conocimientos por formar parte, respectivamente, de la estructura afectiva y cognitiva del profesor (Sánchez et al., 2025).

El MTSK facilita un inventario de categorías de análisis de este conocimiento especializado, exclusivo del docente para el desarrollo de su labor. Este modelo, lejos de pretender realizar una evaluación, se enmarca de alguna manera en un modo constructivista de observación de la tarea del docente de matemáticas (Arteaga-Martínez & Arnal-Palacián, 2022), que se caracteriza como aquel que el profesor necesita y utiliza para explicar el contenido (Hitt, 2003).

Figura 1. Subdominios del modelo MTSK



Nota. Extraído de Sosa et al. (2016, p. 154)

Las conexiones intraconceptuales son el foco de este trabajo, así nos centraremos en el subdominio "conocimiento de los temas" (KoT), por lo que se siguen las pautas de uso del modelo focalizando la atención en "el tipo de problema a los que se puede aplicar el contenido, con sus contextos y significados asociados; las propiedades y sus principios subyacentes, las definiciones y procedimientos, incluyendo las conexiones dentro del mismo tema" (Carrillo et al, 2018, p. 7). La categoría "definiciones y propiedades" se concibe como una unidad integrada, debido a la dificultad de establecer con precisión la frontera entre las definiciones y las propiedades (Liñán et al., 2014). En el caso de las definiciones, se alude al conocimiento que posee el profesorado sobre definiciones parciales o alternativas, así como sobre las diversas formas en que estas pueden expresarse, ya sea de manera oral, escrita, mediante lenguaje natural o a través del lenguaje matemático. Por su parte, las propiedades y sus fundamentos remiten al saber docente acerca de las propiedades atribuidas a un tema, objeto matemático o procedimiento, las cuales aportan significado y sentido a dichos contenidos. Carrillo et al. (2014) hacen referencia a que el profesor le da sentido a este tipo de conocimientos, desde la necesidad de contar con un conocimiento disciplinar profundo (en nuestro caso del cálculo integral y sus aplicaciones), además de conocer el contenido matemático que se desea enseñar, junto con sus significados, propiedades y procedimientos de manera fundamentada (Carrillo et al., 2018). Se incluye así el conocimiento del docente de los fenómenos que puedan dar lugar a la creación del concepto y la aplicación en un contexto.

De acuerdo a la investigación previa con este modelo, podemos considerar dentro de este subdominio KoT "el conocimiento del profesor sobre distintas formas de representar el contenido matemático" (Vasco & Climent, 2018, p. 138), considerando el conocimiento de las diferentes formas (numérica, analítica gráfica, verbal, entre otras) en las que se puede representar un concepto matemático. En relación con la investigación que recoge la importancia de los registros de representación referidos a nuestro objeto de estudio, Delice y Sevimli (2010) analizan los beneficios del uso de diferentes representaciones para la resolución de problemas de la integral definida. Por otro lado, la utilización de herramientas digitales como GeoGebra en la enseñanza de la integral definida se ha reportado favorable, en particular para la comprensión del área bajo la curva y la relación entre integral definida y las sumas de Riemann (Bricio-Barrios et al., 2020).

De acuerdo con el enfoque de nuestra investigación, planteamos un análisis desde el KoT en relación con el contenido del concepto de "integral definida" en un espacio de formación de futuros docentes, en un entorno formativo donde "lo que significa enseñar, lo que significa aprender, e incluso lo que significa que algo sea matemático, comienzan a formar una identidad de quiénes son como profesor, y qué es lo que enseñan como asignatura" (Liljedahl et al., 2009, p. 29).

3. METODOLOGÍA

Para diseñar la investigación se utiliza el estudio de caso, ya que nos facilita dar respuesta de manera ordenada al qué, cómo y por qué analizar este escenario formativo en su contexto (Yin, 2018). El estudio de caso ayuda a analizar, apoyándonos en un modelo como el MTSK, una tarea guiada realizada en distintas fases.

Los participantes fueron siete estudiantes de cuarto año de Pedagogía en Matemática (E1, E2, …, E7) que integraban la totalidad del grupo de la asignatura Didáctica del Cálculo en la Universidad de Tarapacá (Chile), durante el año académico 2023/24. La participación fue voluntaria. Las actividades se prepararon específicamente para este trabajo de investigación, y todos los participantes habían cursado de manera previa una asignatura de contenido denominada "Cálculo integral".

El grupo de estudiantes realizó una tarea guiada en el tiempo formativo en la universidad cuyo objetivo era describir la integral definida como área bajo la curva, donde se les facilita información acerca del conocimiento matemático de este concepto, desde el proceso de cálculo de áreas. El proceso metodológico se organizó en tres fases: planteamiento, análisis y reflexión.

El diseño de la tarea se fundamenta en la propuesta de Liñán et al. (2014) donde establecen la observación e interpretación de los participantes en una realidad en su entorno, interactuando con el objeto matemático y conllevando a una reconstrucción del significado, en nuestro caso desde las categorías del KoT (Figura 2), de una manera similar a como hacen Pérez-Montilla y Cardeñoso (2020) con futuros profesores cuando realizan una tarea centrada en el concepto de límite.

Este estudio fue aprobado por el comité de ética de la Universidad de Tarapacá, bajo el código c25-2024.

Figura 2. Diseño del proceso metodológico a partir del planteamiento del KoT

Nota. Elaboración propia

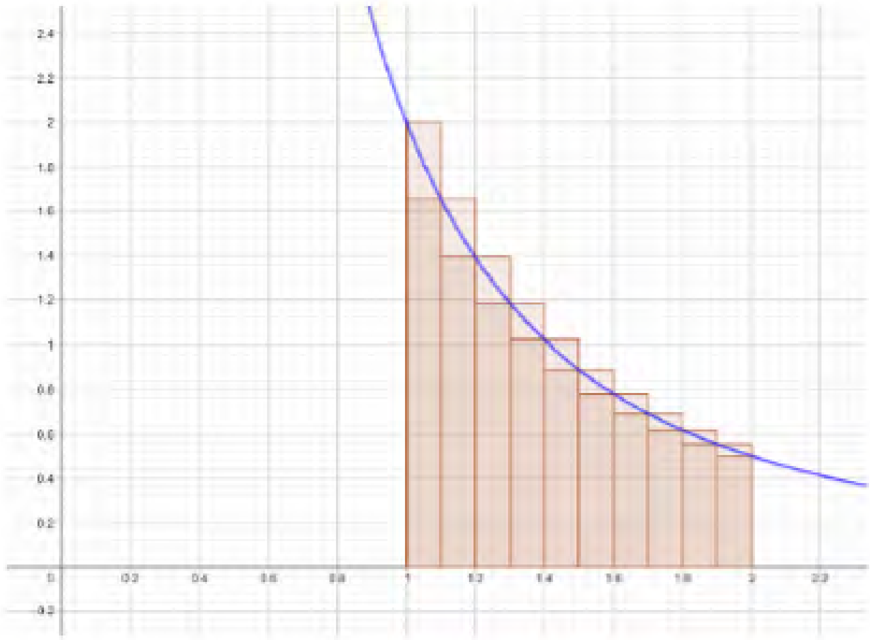
Cabe señalar que este trabajo no incluye una de las categorías KoT, la fenomenología desde la aplicación a problemas reales, dado que pese a que sí que se trabajó durante la experiencia y que se inicia en la fase de reflexión, el análisis de las tareas implicadas hubiese constituido por sí solo otra investigación.

La fase planteamiento buscó la activación de conocimientos que los estudiantes habían trabajado el curso anterior de cálculo integral. En consecuencia, se plantea que los estudiantes son reacios a utilizar su compresión sobre lo que es una suma de Riemann para interpretar lo que hace una integral (Wagner, 2017), con lo que se da inicio con la definición de conceptos tales como partición de un intervalo, sumas de Riemann, finalizando con integral definida, para posteriormente plantear los fundamentos y propiedades matemáticas involucradas.

Después los estudiantes trabajaron en grupo con un problema (Figura 3) que involucraba el descubrimiento a partir del límite de una serie de rectángulos inscritos y circunscritos el área debajo una curva. Se considerarán así algunos de los significados de la integral definida. La elección de este problema recae en el conocimiento que debe tener un profesor del curriculum, adoptando una postura crítica y reflexiva de los objetivos de aprendizaje al nivel de enseñanza y desarrollo conceptual (Carrillo et al., 2014).

Figura 3. Problema realizado por los futuros docentes como cierre de la fase de planteamiento

1. Se considera la función l con $l(x) = \frac{2}{x^2}$, cuyo gráfico se muestra, junto con una aproximación superior e inferior del área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[1;\ 2]$.



Función l

   a. Calculen una aproximación inferior y superior del área marcada, sumando las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
   b. Conjeturen acerca del límite de la serie de áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
   c. Apliquen la regularidad encontrada en 5 y determinen la ecuación funcional de la función L para la función l con $l(x) = \frac{2}{x^2}$.
   d. Verifiquen que el límite conjeturado se puede obtener mediante la función L (resultado de G en 5), determinando la diferencia $L(2) - L(1)$.

Nota. *UCE (2021, p. 151)*

Consideramos así dentro del MTSK, únicamente algunas categorías KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos), ya que la experiencia del futuro profesor de matemáticas debe partir del conocimiento de la materia que enseñará, en nuestro caso el objeto matemático es integral definida, a un nivel de profundidad, organización y estructura más allá de lo que los estudiantes aprenderán (Liñán et al., 2014).

Posteriormente, en la fase de análisis se presentaron los procedimientos necesarios para la utilización de la integral definida en el cálculo de áreas de regiones planas desde el problema realizado a partir de preguntas (Tabla 1), que orientan a la justificación al conocimiento matemático formuladas como subcategorías KoT (Carrillo et al., 2018).

Tabla 1. Preguntas orientadas al análisis de KoT (procedimientos)

Pregunta	**Respuesta**
¿Cómo se hace?	Sea f(x) una función continua en el intervalo [a,b], ubicado en el primer cuadrante. La región limitada por la función, el eje X con las rectas x=a y x=b. El intervalo [a,b] es particionado en n partes de igual longitud, posteriormente a cada extremo de estos subintervalos se le asocia la imagen a través de la función y=f(x), esto conlleva a que el área de región limitada pueda aproximarse por la suma de las áreas de los n rectángulos generados.
¿Cuándo puede hacerse?	Cuando la función es continua en un intervalo entonces es integrable. Esto es, si una función f es continua en un intervalo [a,b] su integral definida en [a,b] existe.
¿Por qué se hace así?	Para precisar la noción de área de una región con frontera curva, para aquello se define de forma rigurosamente el área que está debajo de la gráfica de una función y=f(x) continua como la integral definida.

Nota. Elaboración propia

Las preguntas recogidas en la Tabla 1 actúan como base para que los futuros profesores realicen una tarea que describe la integral definida como área bajo la curva, la tarea se desarrolló por medio de cinco procedimientos ejecutados a lo largo de tres etapas (Tabla 2). Las etapas 1 y 2 distribuidas en dos sesiones cada una se consideraron dentro de la fase de análisis. La etapa 3 fue considerada en la fase de reflexión. Cada etapa tuvo una duración de 90 minutos.

Tabla 2. Resumen de los procedimientos en cada una de las etapas para la realización de la tarea

	Fase de Análisis		Fase de Reflexión
Tarea	**Etapa 1**	**Etapa 2**	**Etapa 3**
Descripción de la integral definida como área bajo la curva.	P1: Elegir una función y=f(x), definida en un intervalo cerrado [a,b] perteneciente al primer cuadrante. Construir la gráfica de la función escogida debe estar limitada por el eje X y las rectas verticales x=a y x=b.	P2: Aproximar el valor del área de la superficie limitada para una partición de n=10. P3: Determinar el valor de la superficie limitada a través del uso del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). P4: Determinar el valor de la superficie limitada a través del uso del software Geogebra. Utilizar las particiones realizadas en P2.	P5: Representar de manera concreta-pictórica el gráfico realizado en P4 en una superficie de 40x40 cm (en cartón piedra).

Nota. Elaboración propia

Para la realización de la tarea se utilizaron los registros de representación algebraico, gráfico y concreto-pictórico en la elaboración de los procedimientos. En la etapa 1, los estudiantes comenzaron con el desarrollo del procedimiento P1, que consiste en proponer una función y=f(x) definida en un intervalo cerrado [a,b] localizada en el primer cuadrante; esto facilitó contar con una relación a escala con los reales positivos y la medición de la unidad de centímetro, necesaria para la representación concreto-pictórica de la tarea. En la etapa 2, en el procedimiento P2 se realiza 10 particiones de igual medida al intervalo [a,b], para aproximar el valor del área de la superficie limitada por medio de rectángulos inferiores y superiores. Con el valor estimado de la aproximación del área se procede con P3, con el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) para calcular el valor exacto del área debajo de la curva. Para la interpretación del problema realizado la consigna que se les dio fue cuestionarles sobre el interés que puede tener el uso del cambio de registro para la comprensión de la integral definida. En la fase de reflexión, los futuros profesores aplicaron lo aprendido en las fases anteriores haciendo uso de fenomenología y aplicaciones del concepto de integral definida para describir el área bajo la curva, esta categoría engloba los conceptos, procesos y procedimientos analizados desde dos perspectivas. Así, desde el planteamiento de análisis con el MTSK, la etapa 1 detectaría evidencias de los elementos del contenido movilizado, mientras que la etapa 2 incluye "un detonante para relacionar los conocimientos puestos en juego en clase (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), generando el caso de nuestra tarea" (Barrera et al., 2019, p. 114).

En la etapa 3 se realizó el procedimiento P5 consistente en representar de forma figural la gráfica realizada en P4, tomando como unidad de medida el centímetro. Para P5 el modelo de área bajo la curva se encuentra en relación con la representación concreto-pictórico de la misma. Así, la utilización de material fue necesaria para su ejecución. Los materiales facilitados para que los estudiantes utilizasen fueron: unidades de cartón piedra, regla de 30 cm, tijera, lápices de colores, lana, cartulinas de color y pegamento. El diseño de la representación quedó a libre elección de cada estudiante, siempre que se adapte a las medidas del cartón piedra con dimensión 40x40 cm.

Para finalizar la tarea, los futuros profesores respondieron a preguntas que involucraban el contenido en que estaban trabajando, el nivel educativo (enseñanza media) donde tiene cabida esta tarea, los conocimientos previos necesarios para la elaboración de la tarea y qué posibles cambios se podrían realizar a la tarea para facilitar la comprensión del concepto de integral definida (Tabla 3).

Estas cuestiones buscan la reflexión del grupo de futuros docentes ante la tarea realizada, como un paso previo a una fase posterior (no objeto de este trabajo) que trabajará la fenomenología y sus aplicaciones.

Tabla 3. Preguntas para la fase de reflexión

Pregunta
1. ¿Qué contenido matemático estamos trabajando?
2. ¿Por qué se estudia ese contenido?
3. ¿Qué cambios deberían introducirse en la tarea para incrementar la calidad del proceso de aprendizaje de la integral definida?

Nota. Elaboración propia

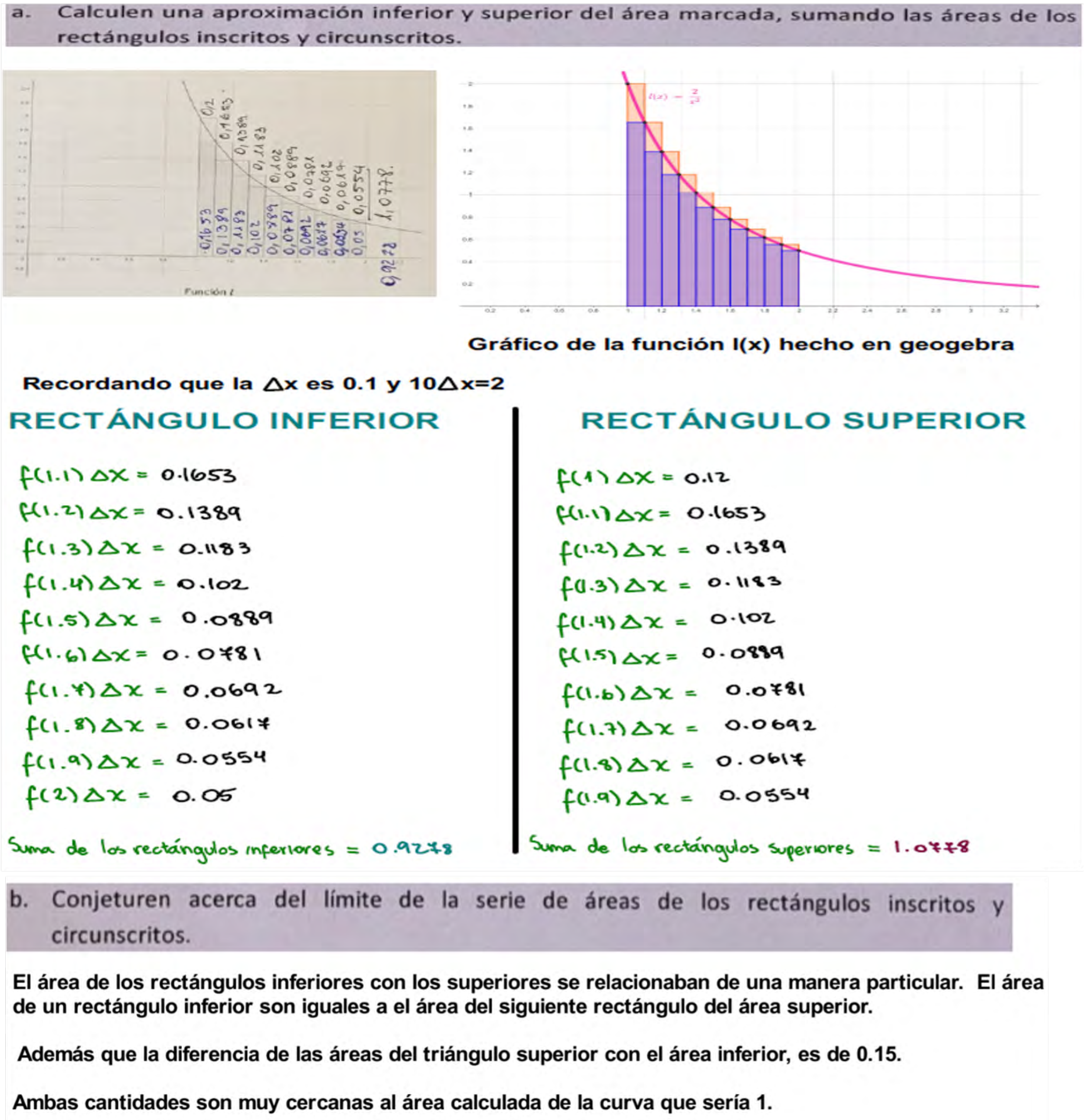
4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Para el análisis y aporte de resultados se recogen evidencias de las producciones de los futuros docentes en cada una de las fases de realización de la tarea, donde se espera que los resultados tengan un carácter reflexivo, que nos permita entrar en la discusión del conocimiento disciplinar que se tiene con respecto al objeto matemático integral definida y su relación con el concepto de área bajo la curva. Utilizaremos aquellas evidencias de las tareas que muestran aspectos concretos, para dar respuesta a la pregunta de investigación planteada. Se cuenta con el consentimiento informado de todos los participantes.

Para garantizar la fiabilidad en el análisis de las producciones, se empleó una metodología basada en la triangulación de investigadores. Tres especialistas realizaron un análisis inicial de manera individual e independiente, lo que permitió recoger diversas interpretaciones y minimizar sesgos personales. Posteriormente, se llevó a cabo una puesta en común de los resultados obtenidos por cada investigador, con el objetivo de discutir y consensuar los hallazgos, fortaleciendo así la validez del análisis mediante una reflexión crítica compartida. Este enfoque es coherente con los principios que avalan el análisis temático cualitativo (Nowell et al., 2017).

Dentro de la fase de planteamiento, los estudiantes E2 y E4 (Figura 4) desarrollan los apartados a) y b) del problema de UCE (2021, p. 151) donde se muestra la aproximación inferior y superior del área marcada, para posteriormente realizar una conjetura de lo realizado en el apartado b). En este caso, las fases a) y b) se relacionan con KoT definiciones, mientras que c) podríamos enmarcarlo en KoT propiedades, y d) KoT fundamentos.

Figura 4. Desarrollo de a) y b) por parte de E2 y E4

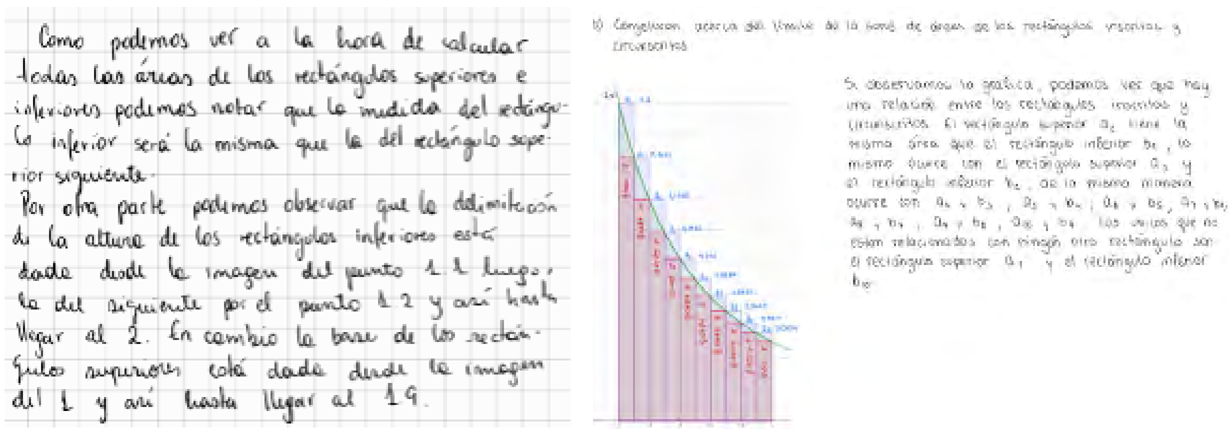


Nota. UCE (2021, p. 151)

En este caso, podemos ver la exactitud y pertinencia de relación entre las definiciones (como parte del KoT) de la integral bajo la curva en sentido geométrico o de manera analítica como suma de Riemann. En todos los casos, los estudiantes realizan los apartados a), c) y d) de manera similar, dado que se realiza un desarrollo algebraico teniendo la particularidad de que los procesos son estructurados, destacando la relación que existe entre la aproximación de un área a través de rectángulos y la aplicación de la integral definida en el Teorema Fundamental del Cálculo, considerando como parte del KoT las propiedades y teoremas relevantes, en este caso considerando las propiedades de la función. Para el caso de b) resulta conveniente analizar la argumentación de los estudiantes al conjeturar lo realizado, en la Figura 5 se muestra la argumentación de E3 y E5, que infieren que el valor de área del rectángulo A1 inferior es igual a la del área superior posterior A2, además de describir que la altura de cada rectángulo se encuentra asociado a la imagen del punto en la partición del intervalo. De manera análoga la estudiante E7 muestra la relación entre los valores de las áreas de los rectángulos inferiores y superiores a través del gráfico.

Figura 5. Argumentación de b), realizado por E3-E5 (i) y E7 (ii) respectivamente

(i) (ii)



Dentro de la fase de análisis, la elección de la función es un aspecto a destacar porque condicionará los procedimientos (KoT). Los estudiantes eligen funciones que involucran aspectos trigonométricos (57%), raíces (28.8%) y logaritmos (14.3%), casos que delimitan la elección del estudiante sin promover la interpretación más allá del cálculo, sin ahondar en contextos donde la integral tiene sentido (KoT fenómenos y aplicaciones). El desarrollo para todos los casos se realiza en un registro algebraico, donde se establece la descripción utilizada y su representación se pone en manifiesto la respuesta de E1 y E6, por el sentido al definir una función trigonométrica $f(x)=40\sin(x/12)$ en el intervalo $[0,12\pi]$ y una función raíz $f(x)=3\sqrt{(4x+8)}$ en intervalo $[0,40]$ respectivamente. En la Figura 6 (i) se muestra los procedimientos P1, P2 y P3 realizados por E1 en relación la etapa 1 y 2 respectivamente. De manera análoga la Figura 6 (ii) muestra los procedimientos de E6.

Figura 6. Procedimiento de P1, P2 y P3 en registro algebraico por parte de E1 (i) y E6 (ii)

(i)

Descripción	Representación
Definir una función de variable real $y = f(x)$ mostrando su dominio y recorrido	$F(x) = 40\sin\left(\frac{x}{12}\right)$ Dom $\mathbb{R}$
Establecer parámetros a y b dentro del dominio para limitar un subconjunto [a, b]	$[0, 12\pi]$
Determinar Δx entre cada elemento [a, b] para 10 particiones $\Delta x = \frac{b-a}{10}$	$\Delta x = \frac{12\pi - 0}{10}$ $\Delta x = 3.77$
Conjunto de particiones P	$P = \{0, 0+\Delta x, 0+2\Delta x, 0+3\Delta x, 0+\ldots 0 + 10\Delta x = 12\pi\}$ $P = \{0, 3.77, 7.54, 11.31, \ldots, 12\pi\}$
Determinar el área de los rectángulos inferiores	$= 797.92$
Determinar el área de los rectángulos superiores	$= 1105.72$
Por medio de la cantidad de particiones de [a, b], determinar la suma: $S_n = \sum_{i=1}^{10} f(c_i)\Delta x$ Donde c_i es punto medio en cada partición	$S_n = \sum_{i=1}^{10} f(c_i)\Delta x$ $S_{10} = f(1.89)3.77 + f(5.66)3.77 + f(9.43)3.77 + \cdots + f(35.82)3.77$ $= 963.91$
Expresar el área de la región, por medio de la definición de integral definida $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$	$\int_0^{12\pi} 40\sin\left(\frac{x}{12}\right) =$ $\lim \sum_{i=1}^{10} \left(40\sin\left(\frac{\frac{12\pi i}{n}}{12}\right)\right)3.77$
Por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), determina el valor de la superficie limitada por la función $y = f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. $A(S) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	$= \int_0^{12\pi} 40\sin\left(\frac{x}{12}\right)$ $= -480\cos\left(\frac{x}{12}\right) + c$ $= -480\cos\left(\frac{12\pi}{12}\right) - \left(-480\cos\left(\frac{0}{12}\right)\right)$ $= 480 + 480 = 960$

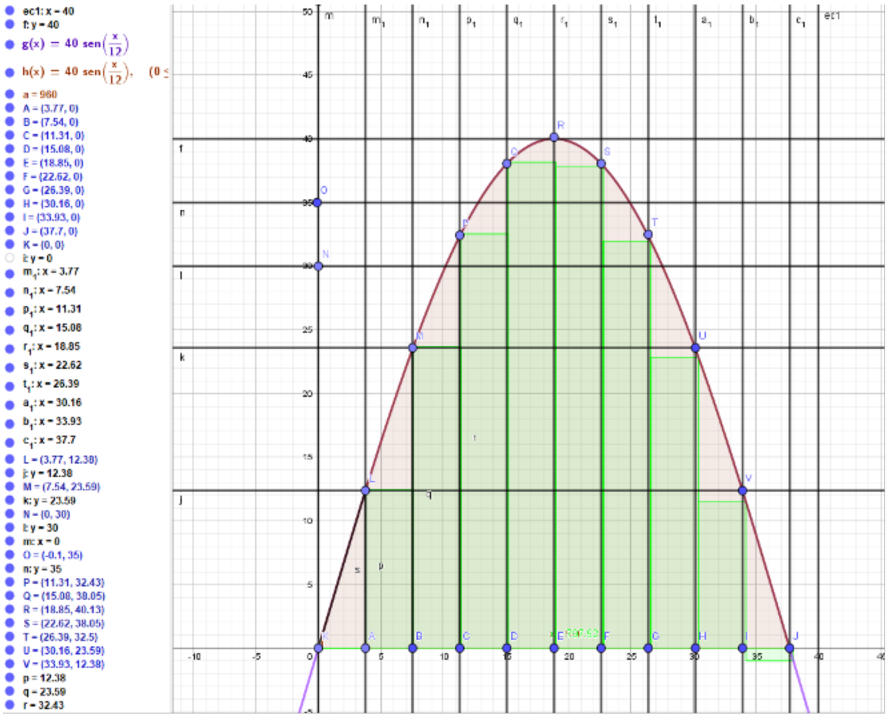
(ii)

Descripción	Representación
Definir una función de variable real $y = f(x)$, mostrando su dominio y recorrido.	$y = 3\sqrt{4x+8}$ Dom: $[-2, \infty+]$ Rec: $[0, \infty+]$
Establecer a y b dentro del dominio para limitar un subconjunto $[a, b]$	$[0,40]$
Determinar Δ entre cada elemento $[a, b]$ para 10 particiones $\Delta x = \frac{b-a}{n}$	$\Delta x = \frac{40-0}{10} = 4$
Conjunto de particiones P	$P = \{0, 0+\Delta x, 0+2\Delta x, 0+3\Delta x, 0+\cdots+10\Delta x, 0 = 40\}$ $P = \{0,4,8,12,16,20,24,28,32,36,40\}$
Determinar el área de los rectángulos inferiores	$980{,}59\ cm^2$
Determinar el área de los rectángulos superiores	$1136{,}13\ cm^2$
Por medio de la cantidad de particiones de $[a, b]$, determinar la suma $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$ Donde c_i es punto medio de cada partición	$S_{10} = \sum_{i=1}^{10} 3\sqrt{4c_i+8} \times 4$ $S_{10} = (f(2)\times 4 + f(6)\times 4 + f(10)\times 4 + \cdots + f(38)\times 4) =$ $4073{,}3598\ cm^2$
Expresar el área de la región, por medio de la definición de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$	$\int_0^{40} 3\sqrt{4x+8} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{10} 3\sqrt{4c_i+8}\times 4$
Por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), determina el valor de la superficie limitada por la función $y = f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x=a$, $x=b$ $A(S) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$	$\int_0^{40} 3\sqrt{4x+8} = \frac{\sqrt[2]{(4x+8)^3}}{2}\Big\vert_0^{40}$ $= \frac{\sqrt[2]{(168)^3}}{2} - \frac{\sqrt[2]{(8)^3}}{2} =$ $= 1088{,}7644 - 11{,}31370849$ $= 1077{,}450691501\ cm^2$

Nota. Elaboración de E1 y E6.

Profundizando en la elaboración de E1, se tiene que en P1 se define la función $f(x)=40\sin\left(\frac{x}{12}\right)$ en el intervalo $[0,12\pi]$, generando que la base de cada rectángulo sea de 3.77 unidades aproximadamente. Posteriormente en P2 se determina que la suma de las áreas de los rectángulos inferiores es de 797.92 unidades y para las áreas superiores de 1105.72 unidades, luego utilizando el TFC se obtiene que el valor del área bajo la curva es 960 unidades cuadradas. En el procedimiento P4 correspondiente a la etapa 2, como se muestra en la Figura 7, E1 elabora el gráfico en GeoGebra del área bajo la curva $y=40\sin\left(\frac{x}{12}\right)$ utilizando la información de los procedimientos P1, P2 y P3. Este uso de la tecnología para representar el concepto puede considerarse una subcategoría dentro del KoT.

Figura 7. Desarrollo de P4 en GeoGebra por parte de E1



Nota. Elaboración de E1 y E6.

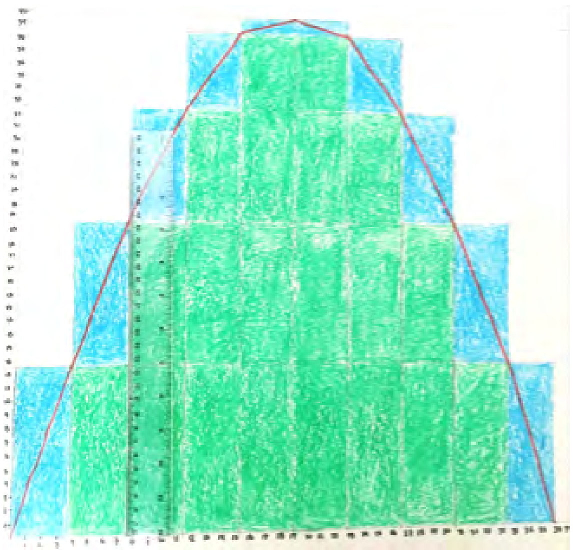
En la fase de análisis, se pretendía que interpretasen lo realizado en la fase de planteamiento, para tal caso se facilitó una consigna para guiar el trabajo de los estudiantes en forma de pregunta que involucraba la importancia de hacer uso de registros de representación (KoT registros): ¿Qué interés tiene el uso del cambio de registro para la comprensión de la integral definida?, en respuesta a lo anterior, destacamos las respuestas de los futuros profesores E4, E5 y E7.

> E4: "Lograr determinar en un caso como la integral es utilizada para determinar el valor de las áreas delimitadas por una gráfica dentro de un intervalo [a, b] y el eje horizontal, por medio de rectángulos superiores e inferiores''.
>
> E5: "Realizar una comparación de áreas, entre la obtenida mediante la aplicación de integral definida y mediante la suma de Riemann''.
>
> E7: "En mostrar cómo vamos aproximándonos mejor al área exacta bajo los conocimientos básicos que ya traemos de matemáticas y así ir modelando la definición de integral definida''.

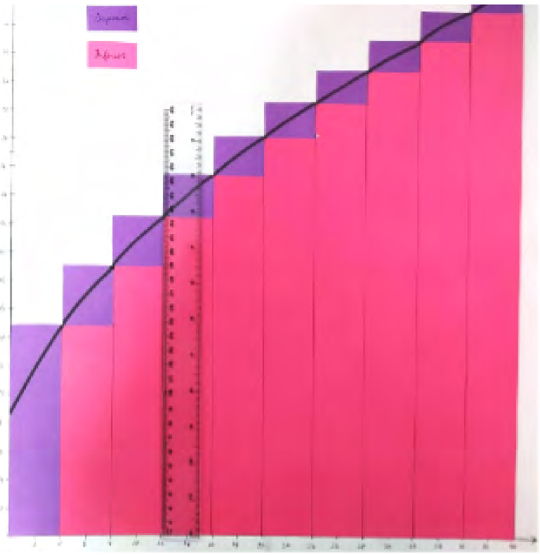
En la fase de reflexión, los futuros profesores reconstruyen el significado de integral definida desde lo aprendido en la tarea durante la etapa 3. Nuestro objetivo desde el análisis KoT se refiere a los registros de representación utilizados y las conversiones dentro de los mismos. E1 representa de manera concreta-pictórica el gráfico realizado en Geogebra utilizando un cartón piedra de dimensiones 40x40 cm, marcando cada unidad (1 cm) en los ejes con marcador negro, la conversión que cada unidad en el gráfico es una unidad de centímetro en el modelo (Figura 8i), con esto se acota la posibilidad de que el gráfico quede en el primer cuadrante, no excediendo en 40 unidades de eje horizontal y 40 unidades de eje vertical. Posteriormente haciendo medidas con una regla establece los rectángulos superiores e inferiores, coloreándolos con pinturas de color azul (superior) y verde (inferior). La altura de cada rectángulo tiene que estar en concordancia con el gráfico en Geogebra, es por ello la necesidad de medir con la regla para posterior marcar esos puntos y con una lana de color rojo marcar la curva estimada de la función $f(x)=40\sin(x/12)$ definida en el intervalo [0, 37.7] cm. Para el caso de E6 (Figura 8 ii) utiliza cartulina de color rosa para establecer los rectángulos inferiores y color púrpura para los rectángulos superiores, se forman diez rectángulos inscritos, cada uno con base de 4 cm. Se coloca de manera aleatoria la regla sobre la altura de los rectángulos inscritos, comprobando por ejemplo en el cuarto rectángulo una aproximación de 22.4 centímetros, verificando el valor de f(12)=22.44 unidades.

Figura 8. Representación concreta-pictórica del área bajo la curva realizada por E1 i) y E6 ii)

(i)



(ii)



En la fase de reflexión, se realizaron una serie de preguntas que respondían a la reconstrucción del significado de la teoría aprendida, para tener una visión del estado del conocimiento disciplinar del contenido y para que así los futuros profesores se apropien de estas actividades y puedan ser replicadas en enseñanza media, además de considerar que en esta fase los participantes desarrollan conocimiento de modelación de situaciones reales (Fuentes, 2020).

- ¿Qué contenido matemático estamos trabajando?

Seis de los siete participantes identificaron la integral definida como el contenido matemático principal implicado en la actividad. De forma complementaria, las expresiones "área bajo la curva" y "sumatorias de Riemann" fueron mencionadas por tres y cuatro participantes, respectivamente. Todos estos elementos corresponden a contenidos intra-conceptuales asociados a la integral definida, enmarcados en la categoría Definiciones y propiedades del KoT.

- ¿Por qué se estudia ese contenido?

La mayoría de las respuestas señalan que este contenido debe ser estudiado debido a que el Ministerio de Educación lo incluye en el programa de estudio de 3.º y 4.º medio, diferenciando entre "límite, derivadas e integrales". Otros argumentos apuntan a que dichos contenidos resultan necesarios para los estudiantes que deseen ingresar a carreras de educación superior que impliquen el uso de las matemáticas. Solo un participante mencionó que este contenido se estudia con el propósito de comprender la aplicación y definición de la integral definida, lo cual se vincula directamente con el conocimiento del contenido en la categoría Fenómenos y aplicaciones del KoT.

- ¿Qué cambios deberían introducirse en la tarea para incrementar la calidad del proceso de aprendizaje de la integral definida?

Se debe dar relevancia necesaria la definición de la integral definida (KoT definiciones y propiedades). En este sentido, se subraya la importancia de abordar qué sucede cuando un límite tiende a infinito y cómo se vincula el cálculo del área bajo la curva con las sumas de Riemann (KoT relaciones intra-matemáticas). Otras intervenciones hacen mención que el principal obstáculo que se origina al enseñar este contenido es el enfoque algebraico y algorítmico, donde no se incorpora el uso de ningún aspecto geométrico (KoT representaciones).

Estas reflexiones permean con otras categorías del MTSK vinculadas al conocimiento didáctico del contenido. Hemos considerado importante hacerlas de esta manera, y recoger aquellos aspectos que están vinculados con procedimientos (KoT).

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En esta sección discutimos sobre la producción de los estudiantes para posteriormente concluir con la respuesta a la pregunta de investigación. A través del conocimiento de los temas se propone una tarea que desarrolle las categorías asociadas a este conocimiento, es así que en el todo proceso de ejecución se alinea con los procedimientos para describir la integral definida como área bajo la curva con preguntas como ¿cuándo se hace?, ¿cuándo puede hacerse?, ¿por qué se hace así? y características de los resultados obtenidos elaborados por futuros profesores escogidos de forma intencionada.

La fase de planteamiento actúa como la instancia en donde las categorías del KoT se ponen en juego, en particular al mostrar las definiciones y propiedades, donde se caracteriza el concepto de integral definida, así como el conocimiento de las propiedades necesarias para llevar a cabo el proceso de aproximación de área (Vasco et al., 2017), para posteriormente utilizar los fundamentos necesarios en la obtención del área bajo la curva utilizando rectángulos, y su relación con la integral definida de un problema propuesto del programa de estudio del Ministerio de Educación chileno, en concordancia con la actualización en enseñanza de temas del cálculo para secundaria (Bustos & Ramos, 2022).

En la fase de análisis, E1 y E6 describen los procedimientos P1, P2 y P3 en relación con lo planteado en la tabla 1, destacando las condiciones necesarias y suficientes para asociar los algoritmos desarrollados (Vasco et al., 2017) permitiendo establecer comparaciones entre las formas para aproximar el valor del área bajo la curva, los cálculos fueron realizados con calculadoras científicas, dando el protagonismo a los valores y el sentido que implican estos y no al procedimiento algebraico, en consistencia con las pautas de Mateus-Nieves y Montañez (2020) que muestran la persistencia de enseñar la integral para estudiantes universitarios con una excesiva orientación algebraica, impidiendo la articulación global del significado.

Las aproximaciones realizadas por los estudiantes en las diferentes áreas tienen fundamento en las funciones escogidas, pues ello conduce a que el signo del valor del área sea positivo descartando posibilidades de un valor negativo (Kontorovich, 2023), una situación que podría provocar obstáculos porque ninguna de las funciones cambia de signo en el intervalo asignado. Por otro lado, se puede apreciar que, al momento de expresar el área de la región, por medio de la definición de integral definida, en su representación algebraica hace que el sumatorio solo llegue hasta n=10, descartando la noción de partición infinita. Para la realización de P4 se utiliza GeoGebra para realizar el gráfico de la función y limitar el área de esta en el intervalo [a,b], su uso actúa como mediador desde un desarrollo algebraico al gráfico y posteriormente al concreto-pictórico. Estos resultados han sido reportados de manera previa (Martínez-Miraval & García-Cuéllar, 2020; López-Leyton et al., 2019), donde el uso de GeoGebra favorece que los estudiantes generen nociones intuitivas sobre la integral definida y la intervención mediada por la aplicación móvil de GeoGebra en las aulas (Ballesteros et al., 2020).

En la fase de reflexión, en la etapa 3, se elabora el procedimiento P5, donde E1 y E6 hacen representación concreta-pictórica del área bajo la curva, haciendo la conversión de unidad en GeoGebra por centímetro en el cartón piedra, esto permite situar la regla de forma aleatoria, generando la acción de “medir”, estableciendo valores que estén en relación con la altura de cada rectángulo y la imagen del punto por medio de la función, considerando en esta etapa el conocimiento de una situación asociada a los significados del tema matemático estudiado (Freudenthal, 1983).

La percepción visual es importante para los estudiantes en la comprensión del concepto, desde la relación entre los pensamientos matemáticos y las preferencias de representación en un problema de la integral (Sevimli & Delice, 2012). Se evidencia la movilización de elementos y conceptos del registro algebraico y gráfico, y viceversa. Es importante señalar el rol que juegan las representaciones y el uso de los registros para el aprendizaje de un concepto, en particular el cálculo del área de una región limitada por una curva y=f(x). Domínguez et al. (2019) y McGee y Martínez-Planell (2014) recomiendan fomentar la perspectiva gráfica de estos conceptos de cálculo. En la misma línea estas representaciones del área nos permiten identificar el intervalo donde se define la función y con ello establecer la integral definida involucrada (Kontorovich & Li, 2022).

En la fase de reflexión, donde se realiza un conjunto de preguntas guiadas sobre la tarea, podemos ver que los futuros profesores coinciden en que el tema matemático estudiado es el área bajo la curva, integral definida y las sumas de Riemann, resulta pertinente este uso de las sumas de Riemann, al brindar la oportunidad de articular esquemas preexistentes, tales como medidas de áreas, intervalos, funciones, sumatorias y límites (Martínez-Miraval & García-Cuéllar, 2020).

En respuesta a la pregunta de investigación, el desarrollo de las distintas fases del estudio evidencia cómo el futuro profesor debe construir progresivamente el conocimiento del tema matemático que pretende enseñar, enmarcado en el subdominio KoT del MTSK. El proceso seguido en la resolución de las tareas ha implicado una profundización en las categorías clave del conocimiento matemático (procedimientos, definiciones, propiedades y registros de representación) que resultan fundamentales para comprender el contenido desde una perspectiva didáctica. La exploración y aplicación de estas categorías no solo fortalece el conocimiento disciplinar del docente en formación, sino que puede orientar el diseño de tareas para una enseñanza más articulada con los demás subdominios del MTSK, favoreciendo una práctica reflexiva y fundamentada.

La tarea propuesta permite al estudiante visualizar y comprender la relación que existe entre el área de una figura plana irregular con el concepto de integral definida, y cómo esta puede estar conectada a un ámbito concreto. Por otro lado, las preguntas realizadas nos permiten que los futuros profesores puedan argumentar de manera matemática, una actividad fundamental y compleja, considerada una de las principales razones de dificultades en su formación (Nagel et al., 2018), con ello inferimos que los futuros profesores requieren del dominio conceptual de las definiciones de los contenidos que enseña, para así poder aplicar propiedades y saber desarrollar procedimientos relacionados (Padilla-Escorcia & Acevedo-Rincón, 2022).

Podemos concluir, por tanto, que el uso del modelo analítico MTSK nos facilita analizar tareas que involucren las categorías del conocimiento de los temas (KoT) para describir la integral definida como área bajo la curva, lo cual amplía el espectro de la aplicación de la integral definida en diferentes contextos, así aportando a la discusión entre diferentes tipos de conexiones para caracterizar el MTSK (Vasco et al., 2017). Por otro lado, destacamos el uso de GeoGebra para el desarrollo de la tarea, dado que permitió la movilidad de la representación gráfica y algebraica del concepto integral definida, esto reafirma que el uso de la tecnología en la educación matemática puede desarrollar resultados positivos junto a procesos manipulativos (Belbase, 2015). Como prospectiva se plantea la inclusión de la categoría KoT fenomenología, que puede promover problemas donde los estudiantes puedan aplicar estos conceptos a situaciones de la vida real, y no sólo a un desarrollo en el ámbito matemático puro (Nedaei et al., 2021).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es parte del proyecto de investigación en Educación Superior–UTA 2023, código 4775-23, financiado por la Dirección de Investigación, Postgrado y Transferencia Tecnológica de la Universidad de Tarapacá (Arica, Chile).

6. REFERENCIAS

Arteaga-Martínez, B., & Arnal-Palacián, M. (2022). Análisis del conocimiento especializado en matemáticas con maestros en formación: una experiencia con la representación de fracciones. Educatio Siglo XXI, 40(1), 107-130. https://doi.org/10.6018/educatio.436461

Ballesteros, V. A., Lozano, S., & Rodríguez, Ó. I. (2020). Noción de aproximación del área bajo la curva utilizando la aplicación Calculadora Gráfica de GeoGebra. Praxis & Saber, 11(26). https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.9989

Barrera, V. J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., & Contreras, L. C. (2019). El uso de MTSK en el diseño de tareas formativas para estudiantes para profesor de educación primaria. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (pp. 110-118). Universidad de Huelva.

Belbase, S. (2015). A preservice mathematics teacher's beliefs about teaching mathematics with technology. Online Submission, 1(1), 31-44. https://doi.org/10.21890/ijres.36926

Bezuidenhout, J., & Olivier, A. (2000). Students' conceptions of the integral. Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), 2, 73-81.

Bricio-Barrios, E. E., Arceo-Díaz, S., & Maravillas, J. A. (2020). Proposal of an algorithmic methodology in Geogebra for the teaching of the Riemann sum a tool for approximating definite integrals. Journal of Physics: Conference Series, 1702, 012021. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1702/1/012021

Bustos, C., & Ramos, E. (2022). Una mirada sobre conceptos del cálculo desde el conocimiento de los temas del profesorado de matemática de secundaria. Innovaciones educativas, 24(36), 86-100. https://doi.org/10.22458/ie.v24i36.3893

Camacho, M., Depool, R., & Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos: Un estudio de casos. Educación Matemática, 20(3), 33-57.

Carrillo, J., Escudero, D. I., & Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores, 1, 16-26.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education, 20(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Delice, A., & Sevimli, E. (2010). An investigation of the pre-services teachers' ability of using multiple representations in problem-solving success: the case of definite integral. Educational Sciences: Theory and Practice, 10(1), 137-149.

Dominguez, A., Barniol, P., & Zavala, G. (2019). Evaluación del entendimiento gráfico de derivada e integral definida mediante un examen en castellano de Opción Múltiple. Formación Universitaria, 12(6), 41-56. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062019000600041

Dreyfus, T., Kouropatov, A., & Ron, G. (2021). Research as a resource in a high-school calculus curriculum. ZDM-Mathematics Education, 53, 679-693. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01236-3

Ďuriš, V. (2020). Geometric applications of measure as a definite integral in mathematics education. Journal of Interdisciplinary Mathematics, 23(3), 739-753. https://doi.org/10.1080/09720502.2020.1743507

Escudero, A. M., Muñoz-Catalán, C., & Montes, M. A. (2021). Conocimiento didáctico del contenido de un professor de infantile para la enseñanza de cuerpos geométricos. En J. G. Moriel-Junior (Ed.), Actas de CIMTSK, V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (pp. 192-199). Instituto Federal de Mato Grosso, Brasil.

Fuentes, C. (2020). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas asociado al concepto de proporcionalidad: un estudio de caso a través del modelo MTSK. Épsilon, 104, 25-43.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematics Structures. Reidel.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. Boletín de La Asociación Matemática Venezolana, X(2), 213–223.

Hong, D. S., & Kwaka, D. (2024). How do widely-used calculus textbooks introduce the concepts of definite integrals? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 55, 1–21. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2348145

Jones, S. R. (2018). Prototype images in mathematics education: The case of the graphical representation of the definite integral. Educational Studies in Mathematics, 97(3), 215-234. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9794-z

Kaput, J., Hegedus, S., & Lesh, R. (2020). Technology becoming infrastructural in mathematics education. En R.A. Lesh, E. Hamilton, & J.J. Kaput (Eds.), Foundations for the future in mathematics education (pp. 173-191). Routledge.

Kontorovich, I. (2023). "Find the area enclosed by..." Parceling an especially robust model of reasoning among first-year students. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 9, 149-172. https://doi.org/10.1007/s40753-023-00213-3

Kontorovich, I., & Li, T. (2022). Not as straightforward as it appears: undergraduates leverage areas to find definite integrals. International Journal of Science and Mathematics Education, 21, 2027-2044. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10339-6

Lehmann, T. H. (2024). Sustaining quantitatively-grounded meanings for definite integrals in high school calculus. Mathematical Thinking and Learning, 256, 1-30. https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2384689

Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winsløw, C., Bloch, I., Huckstep, P., Rowland, T., Thwaites, A., Grevholm, B., Bergsten, C., Adler, J., Davis, Z., Garcia, M., Sánchez, V., Proulx, J., Flowers, J., Rubenstein, R., Grant, T., Kline, K., … Chapman, O. (2009). Components of Mathematics Teacher Training. In R. Even & D. Ball (Eds.), The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. New ICMI Study Series, 11 (pp. 25-33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8_4

Liñán, M. M., Barrera, V., & Infante, J. M. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones. Escuela Abierta, 17, 41-63. https://doi.org/10.29257/ea17.2014.04

López-Leyton, C., Aldana, E., & Erazo, J. D. (2019). El papel de la resolución de problemas para la enseñanza del Cálculo Integral: un estudio de caso. Espacios, 40(17), 12-19.

Martínez-Miraval, M. A., & García-Cuéllar, D. J. (2020). Estudio de las aprehensiones en el registro gráfico y génesis instrumental de la integral definida. Formación universitaria, 13(5), 177-190. https://doi.org/10.4067/s0718-50062020000500177

Mateus-Nieves, E., & Montañez, W. H. (2020). Significado global de la integral articulando su complejidad epistémica. UNIÓN-Revista iberoamericana de educación matemática, 16(60), 196-211.

McGee, D. L., & Martinez-Planell, R. (2014). A study of semiotic registers in the development of the definite integral of functions of two and three variables. International Journal of Science and Mathematics Education, 12, 883-916. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9437-5

MINEDUC (2021). Estándares de la profesión docente carreras de pedagogía en matemática educación media. Ministerio de Educación Chile.

Nagel, K., Schyma, S., Cardona, A., & Reiss, K. (2018). Análisis de la argumentación matemática de estudiantes de primer año. Pensamiento Educativo (PEL), 55(1), 1-12. https://doi.org/10.7764/PEL.55.1.2018.10

Nedaei, M., Radmehr, F., & Drake, M. (2021). Exploring undergraduate engineering students' mathematical problem-posing: the case of integral-area relationships in integral calculus. Mathematical Thinking and Learning, 24(2), 149-175. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1858516

Nowell, L. S., Norris, J. M., White, D. E., & Moules, N. J. (2017). Thematic analysis: striving to meet the trustworthiness criteria. International Journal of Qualitative Methods, 16(1). https://doi.org/10.1177/1609406917733847

Padilla-Escorcia, I. A., & Acevedo-Rincón, J. P. (2022). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de la modelación de la elipse a través de recursos tecnológicos. Revista Lasallista de Investigación, 19(1), 67-83. https://doi.org/10.22507/rli.v19n1a4

Peña, C. A., Ramírez-Sánchez, M., & Rivas-Trujillo, E. (2019). La integración numérica en la integral definida: caso de estudio. Espacios, 40(19), 23-30.

Pérez-Montilla, A., & Cardeñoso, J. M. (2020). Explorando el conocimiento de los temas (KoT) sobre el límite desde la perspectiva del MTSK. En AA.VV., Avances en Matemática Educativa. Teorías Diversas (pp. 99-120). Editorial Lectorum.

Quiroz, C., Vásquez, C. R., González, F., Torres, J., & González, I. (2022). Estudio socioeducativo de los principales errores que realizan los alumnos en el tema de la integral definida como factor que impide la competencia requerida. RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 13(25), e421. https://doi.org/10.23913/ride.v13i25.1347

Rasslan, S., & Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. En A.D. Cokburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4 (pp. 89-96). Norwich, England.

Sánchez, N., Espinoza, G., Segura, C., Contreras, L. C., & Sosa, L. (2025). Conocimiento especializado de una profesora de matemática en la ejemplificación de la ecuación cuadrática. El caso de la descomposición de radicales. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 18(1), 201-215.

Sari, C., Machromah, I., Utami, N., & Zakiyyah, Z. (2019). The existence of the definite integral: students' understanding. En N. Ishartono, N. Adhantoro, Y. Sidiq, & Y. Sulistyono (Eds.), Proceedings of the 4th Progressive and Fun Education International Conference. Makassar, Indonesia. http://dx.doi.org/10.4108/eai.7-8-2019.2289033

Serhan, D. (2015). Students' understanding of the definite integral concept. International Journal of Research in Education and Science, 1(1), 84-88. https://doi.org/10.21890/ijres.00515

Sevimli, E., & Delice, A. (2012). The relationship between students' mathematical thinking types and representation preferences in definite integral problems. Research in Mathematics Education, 14(3), 295-296. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.734988

Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. Educación Matemática, 28(2), 151-174. https://doi.org/10.24844/EM2802.06

Tatar, E., & Zengin, Y. (2016). Conceptual understanding of definite integral with geogebra. Computers in the Schools, 33, 120-132. https://doi.org/10.1080/07380569.2016.1177480

UCE, Unidad de Curriculum y Evaluación (2021). Programa de estudio Limites, Derivadas e Integrales para formación diferenciada 3° y 4° medio. Ministerio de Educación de Chile. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140143_programa.pdf

Vasco, D., & Climent, N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 12(3), 129-146. https://doi.org/10.30827/pna.v12i3.6454

Vasco, D., Moriel, J. G., & Contreras, L. C. (2017). Subdominios del Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). KoT y KSM: definición, categorías y ejemplos. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (pp. 29-37). CGSE

Yin, R. K. (2018). Case Study Research and Applications Design and Methods (6th ed.). CA Sage.

Wagner, J. F. (2017). Students' obstacles to using Riemann sum interpretations of the definite integral. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4(3), 327-356.