https://doi.org/10.46219/rechiem.v17i2.176

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE INGENIERÍA: UN ESTUDIO EN LA UNIVERSIDAD DE ATACAMA, CHILE

DIFFICULTIES IN LEARNING TRIGONOMETRIC EQUATIONS AMONG FIRST-YEAR ENGINEERING STUDENTS: A STUDY AT THE UNIVERSITY OF ATACAMA, CHILE

Ricardo Guerra Iriarte
ricardo.guerra@uda.cl
https://orcid.org/0009-0001-2125-0602
Universidad de Atacama, Chile

Ismenia Guzmán Retamal
ismenia.guzman@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0002-2881-989X
Universidad de Los Lagos, Chile

Felipe Guevara Morales
felipe.guevara@uda.cl
https://orcid.org/0000-0002-9473-9548
Universidad de Atacama, Chile

RESUMEN

Esta investigación surge a partir de los conocimientos insuficientes evidenciados por estudiantes del curso inicial de Álgebra I de Ingeniería Civil en la Universidad de Atacama. Su propósito principal es indagar en las dificultades y errores que enfrentan al resolver ejercicios de trigonometría. Se adoptó una metodología cualitativa descriptiva, con validación interna, utilizando como instrumentos dos problemas extraídos de una evaluación. Mediante el análisis didáctico, se examinaron los objetivos de cada problema y las respuestas textuales de los estudiantes, lo que permitió determinar el conocimiento matemático requerido y las habilidades cognitivas necesarias para su resolución. Los resultados evidencian que las prácticas docentes presentan limitaciones en el refuerzo del cambio entre registros semióticos, aspecto que incide en la comprensión de los estudiantes. Asimismo, el análisis de las producciones escritas permitió identificar deficiencias en la operatoria con fracciones algebraicas y en la resolución de ecuaciones trigonométricas. Finalmente, se observó que los estudiantes presentan dificultades en la transición desde un álgebra escolar, centrada en procedimientos, hacia un enfoque universitario que integra múltiples registros semióticos.

Palabras clave:
Álgebra, Trigonometría, Dificultades, Duval

ABSTRACT

This study originates from the insufficient knowledge exhibited by first-year Civil Engineering students enrolled in Algebra I at the University of Atacama. Its main objective is to investigate the difficulties and errors encountered by students when solving trigonometry exercises. A qualitative descriptive methodology with internal validation was adopted, using two problems from an assessment as research instruments. Through didactical analysis, the goals of each problem and the students' written responses were examined, which made it possible to identify the required mathematical knowledge and the cognitive skills needed for their resolution. The findings reveal that teaching practices show shortcomings in reinforcing the transition between semiotic registers, which limits students' understanding. Moreover, the analysis of students' written productions identified deficiencies in operating with algebraic fractions and in solving trigonometric equations. Finally, it was observed that students face difficulties in the transition from a school-level algebra focused on procedures to a university-level approach that integrates multiple semiotic registers.

Keywords:
Algebra, Trigonometry, Difficulties, Duval

Recibido 10 de noviembre 2025, Aceptado 17 de julio 2025
Revista Chilena de Educación Matemática, Volumen 17, N°2

1. INTRODUCCIÓN

La problemática de esta investigación tiene que ver con las dificultades que encuentran los estudiantes del primer año del curso de Álgebra I, del plan común de las carreras de Ingeniería Civil, de la Universidad de Atacama de Chile. Las evaluaciones muestran una insuficiencia de conocimientos del Álgebra escolar en los diferentes temas que aborda el programa del curso, en particular en el dominio de la operatoria con expresiones algebraicas y en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

La Universidad de Atacama es una universidad pública del Estado de Chile, su sede central se encuentra ubicada en el norte del país, en la ciudad de Copiapó, región de Atacama. Además de las Facultades de Ingeniería, Humanidades y Educación, Ciencias Jurídicas y Sociales, Ciencias Naturales, Ciencias de la Salud y Facultad de Medicina, la universidad cuenta con un Instituto Tecnológico y un Centro de Formación Técnica.

La región de Atacama basa su economía en la actividad minera, y debido a ello, las carreras de pregrado que imparte la Universidad de Atacama tienen en su mayoría relación con el desarrollo de dicha actividad. En este sentido, la Facultad de Ingeniería dicta las carreras de pregrado en Ingeniería Civil en Minas, Ingeniería Civil en Metalurgia, Ingeniería Civil en Computación e Informática, Ingeniería Civil Industrial, Geología e Ingeniería Comercial.

Las carreras de Ingeniería Civil, mencionadas anteriormente, tienen en sus dos primeros años un programa común en ciencias básicas, donde el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Atacama es el encargado de dictar los cursos correspondientes a su área. Este estudio concentra su atención en el curso Álgebra I del plan común de Ingeniería Civil, se imparte en el primer semestre del primer año académico del estudiante. Los contenidos declarados en el programa del curso son concentrados en cuatro unidades, y que resumidamente son: sumatoria y progresiones, trigonometría, geometría analítica y sistemas de ecuaciones.

La Universidad de Atacama, aunque localizada en una región específica, enfrenta desafíos similares a los de otras universidades con programas de ingeniería en Latinoamérica. Estos desafíos incluyen la alta tasa de deserción en materias fundamentales y las dificultades en la transición desde la educación secundaria a la universitaria en áreas STEM. En concreto, la deserción universitaria se refiere al fenómeno en el cual los estudiantes abandonan sus estudios antes de completar su carrera universitaria, ya sea de manera voluntaria o forzosa. Según estudios, la deserción en la educación superior chilena fluctúa entre el 20% y el 30%, con algunas variaciones dependiendo del tipo de carrera y la institución (Barahona et al., 2016; González y Uribe, 2018). Indicando, además, que las tasas de deserción son más altas en áreas como matemáticas, ingeniería y ciencias. A esta realidad la Universidad de Atacama no es ajena, teniendo una tasa de deserción general del 24% y la facultad de ingeniería de la misma universidad con una tasa de deserción del 25%.

Un estudio realizado sobre la deserción en la Universidad de Atacama (Barahona, Veres y Aliaga, 2016) manifestó que "las variables explicativas del rendimiento académico están relacionadas con las notas de ingreso a la Universidad, la asistencia a clase y el tipo de tipología del establecimiento de procedencia". Esta realidad es coincidente con los factores que inciden en la retención de estudiantes de universidades chilenas y de Latinoamérica (Bedregal-Alpaca et al., 2020).

Ahora bien, centrado en la formación específica de un ingeniero, no cabe duda de que las matemáticas son una disciplina relevante (Sancho-Vinuesa et al., 2018) y aprenderlas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, algoritmos, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios (Santos, 2011). Este estudio se preocupa, concretamente, en el aprendizaje de la trigonometría que se desarrolla en el curso denominado Álgebra 1. En este caso nos centramos en la trigonometría debido a que es considerada una herramienta esencial en diversas ramas de la ingeniería (Colombo et al., 2017).

En relación con esta problemática, se han realizado investigaciones sobre las dificultades en álgebra, por ejemplo, Aray et al. (2020) afirman: "La enseñanza de la trigonometría requiere de una apropiación conceptual y el emprendimiento de nuevos procesos que tomen en cuenta la innovación por parte del docente para mejorar la enseñanza y el dominio de contenidos básicos. [...] Se trata de un propósito complejo que requiere de algunas cuestiones fundamentales como el hecho de la práctica constante de los recursos tecnológicos actuales que existen en esta rama". Por otro lado, debemos considerar lo que mencionan Castro y Cárcamo (2023) sobre errores en la resolución de ecuaciones trigonométricas, ellos citan a Riccominni (2005) quién señala que la enseñanza está enfocada en la aplicación de reglas y estrategias irrelevantes debido a la ausencia de información sobre patrones y errores que cometen los estudiantes, finalmente Guerra (2009) realizó un análisis sobre cómo los estudiantes entienden las expresiones algebraicas cuando comienzan a aprender álgebra relata que una de las principales dificultades radica en la comprensión y manipulación de expresiones algebraicas. Los estudiantes normalmente enfrentan obstáculos en la interpretación de las letras y símbolos utilizados en el álgebra.

Ya enfocado específicamente en la trigonometría, Scholz y Montiel (2017) dan cuenta de la escasez de investigaciones que aborden el pensamiento geométrico relacionado con el estudio de lo trigonométrico, mencionando que a lo más se resalta la visualización en su enseñanza y aprendizaje, pero en cuanto al pensamiento variacional, una de las pocas propuestas que abordan un poco el tema es la de Moore et al. (2012) la cual menciona el razonamiento covariacional.

Otro estudio, sobre el tema del pensamiento matemático, sostiene que ahora podemos hablar del desarrollo del pensamiento matemático y de la construcción del conocimiento a través de prácticas, y no solo basándonos en las secuencias lógicas y estructuradas que han sido tradicionales en la enseñanza de los conceptos. (Beltran y Montiel., 2016).

En general, el énfasis en la enseñanza de la trigonometría se encuentra en el aprendizaje de propiedades y operatoria algebraica, dejando de lado otras propiedades inherentes a los conceptos trigonométricos. Ahora, si consideramos las expresiones trigonométricas, que requieren un registro de representación diferente al registro de los números, Duval (2004) señala: "Veremos que la conversión de representaciones es para el aprendizaje, una actividad tan fundamental como las actividades de conversión o de tratamiento. Ya que, sólo la conversión puede favorecer la comprensión a través de la coordinación de los registros de representaciones en juego". En esta investigación sobre ecuaciones trigonométricas identificamos dos registros de representación en juego, el registro de las expresiones algebraicas y el registro de las funciones trigonométricas, en cada registro semiótico es necesario reconocer las notaciones utilizadas en cada uno de ellos para no confundirlas y poder coordinarlas.

En esta investigación sobre ecuaciones trigonométricas identificamos dos registros de representación en juego, el registro de las expresiones algebraicas y el registro de las funciones trigonométricas, en cada registro semiótico es necesario reconocer las notaciones utilizadas en cada uno de ellos para no confundirlas y poder coordinarlas.

También es importante distinguir entre el marco matemático del álgebra, que incluye sus objetos (expresiones algebraicas), propiedades y reglas operatorias, y el marco matemático de la trigonometría, que abarca sus objetos (funciones trigonométricas), notaciones, identidades trigonométricas y reglas operatorias.

Para el desarrollo del estudio nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

¿De qué naturaleza son los errores cometidos por los estudiantes del curso de álgebra I de Ingeniería del plan común de la UDA? ¿Estos estudiantes aplican a las actividades de la trigonometría las reglas matemáticas correctas?

2. MARCO TEÓRICO

El Marco teórico se inscribe por una parte, tanto en el marco del Álgebra como el de la Trigonometría, basados en la identificación de los objetos de cada marco, las definiciones y propiedades que permiten operar los objetos, considerando las diferentes representaciones semióticas involucradas.

La Teoría de Registros de Representación Semiótica sostiene que para entender las matemáticas es necesario ser capaz de diferenciar entre un objeto matemático y la manera en que lo representamos. Si no se puede hacer esta separación, no se alcanza una verdadera comprensión de los conceptos (Aguilar Terrones et al., 2022). Desde la perspectiva de esta teoría, se considera cómo los diferentes registros de representación (simbólico, gráfico, numérico, entre otros) intervienen en la comprensión de los conceptos matemáticos y en la resolución de ejercicios y/o problemas. Esta teoría permite analizar cómo los estudiantes interpretan, transforman y conectan las representaciones para construir significado y resolver tareas matemáticas.

Por otra parte, el análisis a priori de los ejercicios propuestos para dejar en evidencia el objetivo de cada uno, los conocimientos matemáticos requeridos y la actividad cognitiva necesaria para resolverlos con éxito. El análisis a priori permite dejar explícitas tanto la respuesta esperada y las posibles respuestas de los y las estudiantes además de los eventuales errores que se pudieran cometer.

Según lo anterior, es necesario detallar con mayor claridad algunos conceptos que serán utilizados en esta investigación para tener una interpretación común de los significados y aclaraciones.

2.1 Teoría de Registros de Representación Semiótica

Esta teoría destaca la importancia de las representaciones en los procesos de aprendizaje y en la construcción del conocimiento. Según Duval (1999), no se puede analizar el conocimiento sin considerar el concepto de representación. Además, Duval enfatiza que el papel crucial de la semiosis —entendida como el proceso mediante el cual se producen, interpretan y transforman significados a través de representaciones semióticas— radica no solo en el uso de un tipo específico de signos, sino en la diversidad de signos que pueden emplearse.

Un aspecto central señalado por Duval es la dificultad que implica cambiar de una representación semiótica a otra. Este cambio, que es fundamental en el aprendizaje matemático, representa un desafío significativo para muchos estudiantes en distintos niveles educativos. De hecho, las observaciones en el aprendizaje de las matemáticas han mostrado que para algunos estudiantes esta operación puede resultar extremadamente difícil, e incluso, en ciertos casos, imposible (Marchetti et al., 2019; Bejarano Segura, 2023).

Según esta teoría, el aprendizaje de matemáticas debe enfocarse en los cambios de representación, ya que esto puede ser difícil para los estudiantes. Lo anterior, es importante en esta investigación porque muestra cómo los alumnos, al no reconocer una función trigonométrica, responden con la aritmética que conocen. Esto se confirma, ya que Duval explica que el pensamiento matemático implica transformar y convertir representaciones.

Así, de esta manera los conceptos que utilizaremos son definidos por Duval (1999) como:

Tratamiento de las representaciones semióticas: Este concepto menciona las transformaciones que ocurren dentro de un mismo sistema de representación, sin cambiar el tipo de representación utilizada. Un tratamiento ocurre cuando utilizamos una expresión trigonométrica sin cambiar su naturaleza simbólica, por ejemplo: 2(sen(x)+1) se puede escribir 2sen(x)+2. Aquí, se realiza una transformación algebraica dentro del mismo sistema de representación (algebraico) por lo que es un tratamiento.

La conversión de representaciones: es la transformación de un objeto de un sistema de representación semiótica a otro, sin que cambie su significado matemático. A diferencia del tratamiento, que opera dentro del mismo sistema de representación, la conversión implica un cambio entre sistemas diferentes. Por ejemplo:

- Registro de lenguaje natural: "El seno de un ángulo de 30 grados es igual a 0.5."
- Registro numérico: sen (30°) = $\frac{1}{2}$
- Registro de escritura simbólica sen(β)=cateto opuesto/ cateto adyacente, donde para β=30° se tiene que sen (30°) = $\frac{1}{2}$

Guerra (2009), sobre el papel de la conversión en la enseñanza, Duval (1999) señala que: “La enseñanza privilegia el aprendizaje de las reglas que conciernen la formación de las representaciones semióticas y las que conciernen su tratamiento. Y esto principalmente para el registro de los discursos en lengua natural, para los registros numéricos y para el registro de la escritura simbólica”. Esta idea muestra que los estudiantes tienen dificultades porque no se les enseña con suficiente importancia a cambiar entre diferentes formas de representar un mismo concepto. En el caso de las funciones trigonométricas, esto es clave, ya que pueden expresarse de varias maneras.

Algunos de los motivos por los cuales no se trabaja la conversión de representaciones son:

- En muchos casos no existen reglas claras para realizar la conversión o su aplicación es muy limitada.
- Algunas veces se cambia de representación

solo para simplificar el trabajo, pero luego se sigue operando en un único registro

- Existe la creencia de que cambiar entre registros es algo inmediato y sencillo, por lo que dedicar tiempo a esta actividad podría verse como una pérdida de tiempo

Fenómenos del cambio de registro: son procesos cognitivos fundamentales que ocurren cuando se realiza una conversión de un objeto matemático representado en un registro semiótico a otro. Estos fenómenos son esenciales en el aprendizaje de las matemáticas, ya que el conocimiento matemático no se puede aprender sin la mediación de diferentes sistemas de representación. Estos fenómenos se clasifican en dos grandes tipos: "la congruencia" y la "no congruencia".

Congruencia: Un cambio de representación es congruente cuando "no altera el significado del objeto representado" Duval (1999), aunque modifique la forma de representación. En este caso, la información contenida en el registro inicial se mantiene intacta tras la conversión a otro registro. Por ejemplo, y=sen(x) representado como ecuación se puede realizar su conversión a su representación en el plano cartesiano. Las dos representaciones (algebraica y gráfica) expresan la misma función sin pérdida de información

La no congruencia: En estos casos, la conversión entre representaciones implica una pérdida o simplificación de la información. Por ejemplo, si el estudiante se enfrenta a una ecuación sen(x)=1/2 y lo transforma a un registro gráfico en el plano cartesiano como y=1/2. Aunque la ecuación tiene soluciones específicas para como x=30° o x= 150°, la gráfica sólo muestra una línea horizontal en y=1/2 y no proporciona directamente las soluciones exactas para la ecuación inicial. Esta conversión pierde la precisión de los valores, por lo que es un ejemplo de no congruencia.

En esta investigación, lo que nos aporta la teoría de Duval es el concepto de representación, esto es que los estudiantes usan lo que ya saben sobre números y expresiones algebraicas para aprender cosas nuevas. Esto es especialmente importante cuando se estudian las funciones trigonométricas, un tema relativamente nuevo para los alumnos, que trae consigo varias dificultades en su aprendizaje.

Por lo tanto, en nuestro estudio observamos las dificultades del aprendizaje de un nuevo objeto que es una función trigonométrica y sus propiedades, estas actividades son diferentes a los marcos matemáticos vistos por los estudiantes.

2.2 Consideraciones matemáticas de las funciones trigonométricas

Para este análisis, usaremos como texto guía de conceptos el libro de Pre-cálculo de James Stewart (2016), inicialmente el autor define a las funciones trigonométricas en la circunferencia de radio 1 (pg. 377) más adelante se enseña a evaluar una función trigonométrica, se define el dominio de una función trigonométrica (pg. 380) posteriormente se enseñan los signos de las funciones trigonométricas, propiedades de la gráfica de la función trigonométrica par e impar y posteriormente las identidades trigonométricas (pg. 382)

En relación con nuestro estudio, es posible considerar los siguientes puntos: Primero, en matemáticas, usualmente los objetos se definen primero, y posteriormente se desarrollan sus propiedades. Este enfoque puede observarse en sistemas axiomáticos y teorías formales donde las definiciones de los conceptos fundamentales preceden a la formulación de teoremas y propiedades derivadas (Giovannini, 2014; Contreras, 2017). Segundo, las propiedades de las identidades tienden a presentarse después de haber establecido otras definiciones básicas. Esto podría deberse a que las identidades requieren previamente una estructura o contexto definido para ser interpretadas y aplicadas correctamente.

2.3 Relación entre ejercicio y problema

Un ejercicio se entiende como una tarea que implica la aplicación de procedimientos o técnicas previamente aprendidas, con una solución directa y sin requerir una comprensión profunda del contexto. En contraste, un problema se considera una situación que presenta una dificultad o desafío, donde la solución no es evidente y requiere de una reflexión profunda, análisis y, a menudo, la aplicación de múltiples estrategias. (Zaldívar y Mayo, 2005).

En el contexto del curso de álgebra I utilizado en esta investigación, la utilización de ejercicios en lugar de problemas en las evaluaciones parciales se debe a que el curso tiene una finalidad de nivelar conocimientos para los cursos posteriores, siendo las competencias desarrolladas y esperadas declaradas en el programa de la asignatura (Facultad de Ingeniería, 2021), competencias de niveles básicos según la taxonomía de Bloom.

3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

El diseño metodológico se estructuró en dos etapas. La primera correspondió al análisis a priori de los ejercicios, mientras que la segunda se centró en el análisis de las respuestas escritas proporcionadas por los estudiantes.

3.1. Análisis a priori de los ejercicios

El presente análisis se enmarca en un enfoque cualitativo descriptivo, orientado a la validación interna según el modelo de Ingeniería Didáctica propuesto por Artigue (1995). Este modelo de investigación en educación matemática ofrece un esquema estructurado para abordar de manera sistemática tanto la indagación científica como la innovación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Consta de cuatro fases principales: la concepción de la ingeniería o propuesta didáctica, los análisis preliminares, el análisis a priori de la experiencia y el análisis a posteriori. La validez de la investigación se establece mediante la confrontación entre las respuestas esperadas, formuladas en el análisis a priori, y las respuestas efectivamente obtenidas en el análisis a posteriori. En nuestro caso, la propuesta corresponde al estudio de dos ejercicios seleccionados de una prueba del curso Álgebra I del plan común de Ingeniería Civil de la Universidad de Atacama, y la experiencia se concreta en la resolución de dichos problemas durante las clases.

3.1.1 Participantes

Los participantes de este estudio fueron 20 estudiantes de primer año del plan común de Ingeniería Civil de la Universidad de Atacama, Chile. Estos estudiantes se inscribieron en el curso de Álgebra 1, una asignatura fundamental dentro de su plan de estudios. El grupo incluyó una diversidad de perfiles académicos y antecedentes educativos, lo que permitió analizar las dificultades comunes y específicas que enfrentan al abordar los contenidos del curso.

3.1.2 Instrumento

El instrumento metodológico utilizado en este estudio estuvo compuesto por dos ejercicios seleccionados de la primera prueba del curso de Álgebra I, centrados específicamente en el tema de trigonometría.

El ejercicio 1 tuvo como objetivo evaluar la aplicación de técnicas para resolver ecuaciones trigonométricas, mientras que el ejercicio 2 buscó medir la capacidad de los estudiantes para demostrar una identidad trigonométrica. En explicitar objetivos del ejercicio, los conocimientos necesarios poner en juego, la respuesta esperada o experta y las posibles respuestas que se supone a priori darían los estudiantes.

Ejercicio 1: Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica, sabiendo que x [0,2π]:

$$cos^2(x) - 3sen(x) = 0$$

Objetivo: Conocer la técnica para resolver una ecuación trigonométrica de segundo grado con una incógnita y dos variables.

La solución esperada: Notar que la ecuación tiene dos funciones diferentes: el cos2(x) y sen(x) por lo tanto, es necesario dejar una sola función en la ecuación, para ello, en este caso conviene reemplazar cos2(x) en función de sen(x), para dejar la ecuación en sen(x), así obtenemos la ecuación trigonométrica:

1. Se aplicará la técnica de resolución de una ecuación de segundo grado.

   Se distribuye:
   $$2 - 2sen^2(x) - 3sen(x) = 0$$
   Se ordena la ecuación:
   $$-2sen^2(x) - 3sen(x) + 2 = 0$$

2. Se obtienen dos valores sen(x)= 1/2 y sen(x)= -2, pero se descarta sen(x) = -2, por recorrido de la función seno.
3. Si sen(x) es 1/2, la solución debe estar en el primer y segundo cuadrante según la gráfica de la función seno.
4. Entonces x es π/6 o también 5π/6
5. Finalmente, la solución de la ecuación trigonométrica dada es π/6 o 5π/6 .

Conocimientos necesarios para resolver el ejercicio 1

1. Reconocer una ecuación trigonométrica con dos variables, y se debe sólo dejar una.

2. Conocer la identidad trigonométrica de $\cos^2(x)$

3. Hacer cambio de variables pertinentes

4. Conocer reglas de operatorias (técnica) para la resolución de ecuaciones trigonométricas

5. Reconocer la forma de una ecuación de 2° grado

6. Resolver una ecuación de esta forma.

7. Reconocer que las funciones trigonométricas no son expresiones algebraicas

8. Resolver una ecuación trigonométrica necesita otro procedimiento distinto de la operatoria algebraica

9. Recurrir a las identidades trigonométricas que ponen en juego las funciones trigonométricas

10. Conocer las representaciones gráficas de las funciones trigonométricas.

Posibles errores en el ejercicio 1

En este ejercicio es posible que los alumnos no elijan la identidad trigonométrica pertinente o no la conozcan, otro posible error es que no recurren al cambio de variable que convierta la ecuación dada en una ecuación de segundo grado, o se equivoquen en el procedimiento de resolución de una ecuación de segundo grado.

Ejercicio 2: Demuestre la siguiente identidad:

$$\frac{sen(2x)}{sen(x)} - \frac{cos(2x)}{cos(x)} = sec(x)$$

Objetivo: Demostrar una identidad trigonométrica.

La solución esperada

1. Hacer los siguientes reemplazos:

$$sen(2x) = 2sen(x) \cdot cos(x) \,;$$
$$cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$$

2. Desarrollando, se tiene:

$$\frac{sen(2x)}{sen(x)} - \frac{cos(2x)}{cos(x)}$$
$$= \frac{2\,sen(x) \cdot cos(x)}{sen(x)} - \frac{cos^2(x) - sen^2(x)}{cos(x)}$$
$$= 2\,cos(x) - \frac{cos^2(x) - 1 + cos^2(x)}{cos(x)}$$

3. Reduciendo términos del paréntesis y simplificando por coseno, se obtiene:

$$2\,cos(x) - \frac{cos^2(x) - 1 + cos^2(x)}{cos(x)}$$
$$= 2\,cos(x) - \frac{2cos^2(x)}{cos(x)} + \frac{1}{cos(x)}$$
$$= 2\,cos(x) - 2\,cos(x) + \frac{1}{cos(x)}$$
$$= \frac{1}{cos(x)}$$
$$= sec(x)$$

Obteniéndose la igualdad con la ecuación inicial. Por lo tanto, queda demostrada la identidad.

Conocimientos necesarios poner en juego para demostrar la identidad

1. Identidades trigonométricas

2. Operatoria con las fracciones y funciones trigonométricas

3. Igualación de expresiones trigonométricas.

Posibles errores del ejercicio 2

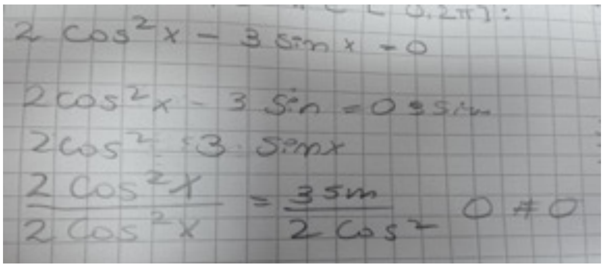
En este ejercicio puede que los estudiantes no recurran a las identidades trigonométricas adecuadas, no comprendan el significado de una demostración o evidencian una carencia del dominio de la operatoria algebraica.

4. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

Esta etapa consistió en el análisis de las respuestas de los estudiantes, considerando para ello sus producciones escritas. El propósito fue evidenciar los conocimientos efectivamente movilizados, identificar las falencias presentes, comprender la naturaleza de las dificultades manifestadas y establecer la distancia existente entre los saberes puestos en práctica por los estudiantes y los saberes matemáticos requeridos para la resolución de las tareas propuestas.

Hemos seleccionado las respuestas de los estudiantes que nos entregaron información sobre dificultades en la resolución de los problemas. No consideramos los estudiantes que resolvieron correctamente el problema ni aquellos cuyas resoluciones eran confusas. Los estudiantes los designamos por Ai, con i igual a 1, …, 20.

Figura 1. Tratamiento de una ecuación trigonométrica como una ecuación sencilla

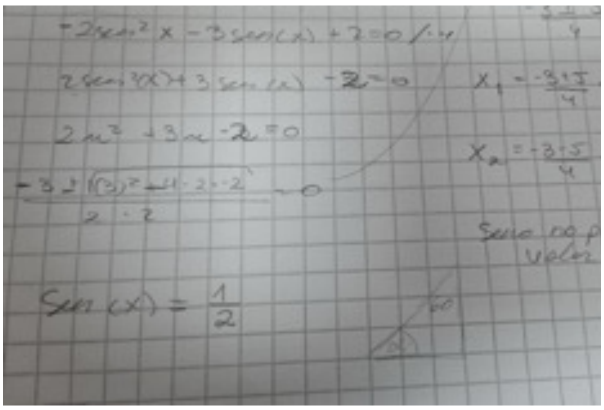


Nota. Respuesta del alumno A_1

A_1 abordó la ecuación como si se tratara de una sencilla ecuación algebraica, donde solo era necesario despejar. Sin embargo, A_1 resolvió una función trigonométrica en términos de otra como si fueran expresiones puramente algebraicas, para luego concluir que eran diferentes (escribió 0≠0). Además, trata las funciones trigonométricas como si fueran expresiones algebraicas y no se da cuenta que las funciones trigonométricas se operan con otros procedimientos, en este caso debe escribir una función trigonométrica en función de la otra mediante la aplicación de una identidad.

La respuesta de A_2 se puede observar en la Figura 2.

Figura 2. El alumno no recuerda la incógnita inicial al usar un cambio de variable

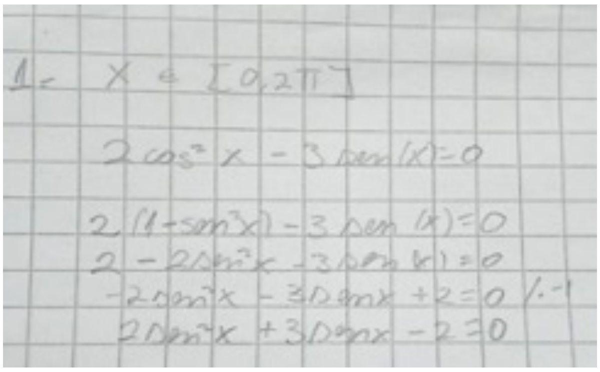


Nota. Respuesta del alumno A_2

A_2 utiliza la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, y aplica procedimiento necesario, es decir recurre a un cambio de variables para obtener la ecuación de segundo grado y resolverla. Sin embargo, A2 no determina el valor de "x", ya que olvidó el cambio de variables que realizó. El procedimiento de A_2 se repite con el alumno A_5.

La respuesta del estudiante A_3 se observa en la Figura 3.

Figura 3. Un caso en que no aplica el cambio de variable

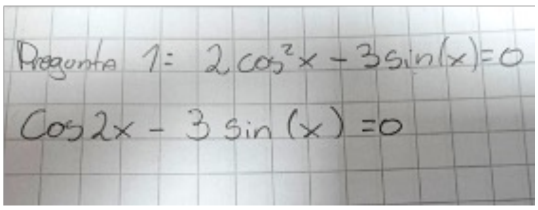


Nota. Respuesta del alumno A_3

A_3, identifica que el problema tiene dos variables que son funciones trigonométricas y aplica una identidad trigonométrica para reducir a una variable, pero el alumno no realiza el cambio de variable necesario para terminar de resolver este problema. Esto se observó también en el alumno A_4.

La respuesta de A_6 se puede observar en la Figura 4.

Figura 4. Caso en que confunde la potencia con la multiplicación



Nota. Respuesta del alumno A_6

A_6 confunde el exponente 2 con el coeficiente 2, lo que cambia totalmente el problema inicial. Este error no fue previsto, este error solamente A_6 lo cometió. No resuelve la ecuación trigonométrica dada.

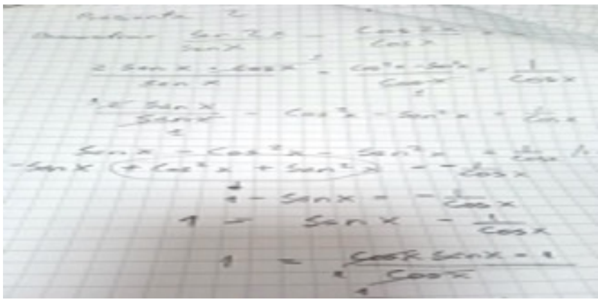
En síntesis, los errores identificados en el problema 1 están relacionados con el tratamiento de las funciones trigonométricas como si fueran expresiones algebraicas. En este análisis, se observa que las identidades trigonométricas no han sido consideradas. Desde la perspectiva de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval, esto indica que los estudiantes no logran distinguir entre los objetos propios del registro de las funciones trigonométricas y los del registro algebraico.

Además, A_2 no termina de resolver la ecuación realiza un cambio de variable, pero no vuelve a la variable inicial. Los errores de A_2 también lo repitió A_5. También se evidencia que el alumno A_2 utiliza correctamente la identidad cos2 x = 1 – sen2 x evidenciando un dominio en la operatoria algebraica pero no realiza el cambio de variable necesario para resolver el problema planteado, esto se observó en 2 casos.

Finalmente, se debe destacar que el alumno A_6 comete un error conceptual en álgebra, al confundir el exponente 2 como coeficientes, este error solo lo cometió A_6.

Con relación al ejercicio 2, la respuesta de A_7 se pude observar en la Figura 5.

Figura 5. Caso de tratamiento erróneo de una función trigonométrica

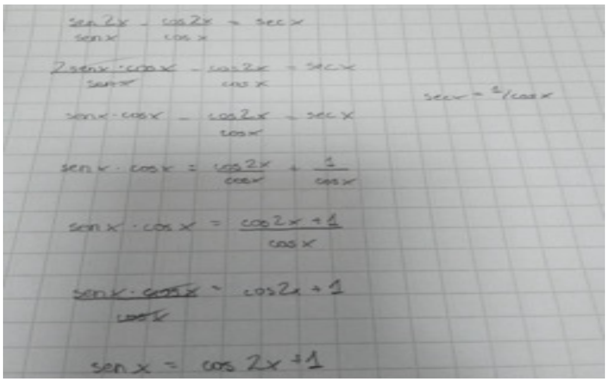


Nota. Respuesta del alumno A_7

El estudiante A_7 comete un error en la simplificación, esto es frecuente, los estudiantes simplifican funciones trigonométricas que aparecen en un numerador y denominador de otra fracción. Nuevamente se encuentra el tratamiento erróneo de las funciones trigonométricas, en este caso simplifican las funciones como números, esto es $\frac{2sen(x)}{sen(x)} = sen(x)$.

Este procedimiento lo evidencian los estudiantes A_7, A_8, A_9 y A_{10}. Nuevamente encontramos la no distinción de los objetos de cada registro. La respuesta de A_8 se puede observar en la Figura 6.

Figura 6. Trabajo en ámbito numérico con las funciones trigonométricas



Nota. Respuesta del alumno A_8

El problema 2 fue el de menor logro, solo un 4 de 20 respondieron correctamente. Esta actividad de demostración de identidades en Trigonometría no ha sido comprendida por los estudiantes.

En síntesis, los siguientes errores fueron detectados en el problema 2:

Se identifican errores al simplificar fracciones algebraicas, lo que evidencia una falta de dominio en la operatoria algebraica. Además, los estudiantes no comprenden el significado de demostrar una identidad, lo que afecta su capacidad para abordar este tipo de problemas con éxito.

Se ha constatado que, para los estudiantes participantes, el problema de demostración de una identidad resultó de un grado de dificultad superior al de resolver una ecuación trigonométrica.

5. CONCLUSIONES

Se han identificado dificultades fundamentales en la operatoria de las fracciones algebraicas, evidenciando que los estudiantes no distinguen que el operar con expresiones algebraicas requiere el uso de propiedades diferentes a las utilizadas en la operatoria numérica. Asimismo, no logran distinguir que la resolución de ecuaciones trigonométricas requiere procedimientos y propiedades diferentes en la resolución de ecuaciones algebraicas.

El ejercicio 2 (demostración de una identidad) presentó un grado de dificultad mayor en comparación con la resolución de una ecuación trigonométrica (ejercicio 1). Los estudiantes demuestran que no han comprendido que operar con expresiones algebraicas difiere significativamente de la operatoria con números, ya que tienden a aplicar propiedades de simplificación propias de fracciones numéricas al trabajar con fracciones algebraicas. Esto podría deberse a que, en la introducción de las expresiones algebraicas, no se enfatizó suficientemente el paso del marco numérico-aritmético al algebraico. Como resultado, no han entendido que las expresiones algebraicas, al incluir letras y números, constituyen objetos distintos a los números y que deben manipularse de acuerdo con propiedades específicas del álgebra, muy diferentes de las propiedades aritméticas.

Las representaciones semióticas tienen una importancia crucial en el proceso de enseñanza de la matemática, ya que permiten la comprensión, la comunicación y el desarrollo de las actividades matemáticas (Duval, 2006; D'Amore, 2006) sin embargo, existen estudios que señalan que, en la enseñanza de las matemáticas, en general, no se utiliza con importancia los cambios entre diferentes registros de representación semiótica. Por ejemplo, Chico y Montes (2023) afirman que "el uso limitado de las representaciones semióticas en los materiales educativos y en las prácticas pedagógicas afecta negativamente la comprensión y el aprendizaje de conceptos matemáticos fundamentales". Además, Bejarano Segura (2023) señala que "esto revela la necesidad de mejorar la aplicación de los procesos cognitivos de representación en la enseñanza de la trigonometría para lograr una comprensión más profunda de los conceptos".

Lo anterior sugiere que, en la enseñanza de las matemáticas, no se aborda adecuadamente el cambio de representación y, en particular, en esta investigación se refleja lo mencionado anteriormente en las respuestas entregadas por los estudiantes, siendo necesario que los docentes sean capaces de reconocer su importancia y fomentar dichas transiciones. Un ejemplo es el caso del ejercicio 1 estudiante A2 quién transforma la expresión trigonometría en una expresión algebraica, pero al entregar su resultado no vuelve a la expresión trigonometría asumiendo que el ejercicio estaba finalizado, siendo necesario que el docente refuerce el articular el registro de las expresiones algebraicas con el registro de las expresiones trigonométricas. Esta práctica permite profundizar en el significado de las expresiones algebraicas y trigonométricas, con el fin de que el estudiante pueda dar sentido y significado a estas expresiones.

Además, se observa que la transición entre expresiones algebraicas y trigonométricas también requiere respetar operatorias algebraicas elementales. Por ejemplo, podemos observar en el estudiante A7 que al resolver el ejercicio 2 simplifica una expresión en la que el numerador contiene una suma como operación principal. Lo anterior evidencia que hay estudiantes que no relacionan que las expresiones algebraicas y trigonométricas representan variables numéricas con un cierto dominio específico según la expresión dada. Esto también se refleja en el ejercicio 1 estudiante A6 quién pasa de una razón trigonométrica con una potencia de 2 a una razón trigonométrica con un ángulo doble.

Este fenómeno refleja la falta de distinción entre los objetos y las notaciones correspondientes a los registros de representación involucrados, lo que parece ser la causa principal de los errores observados, debido a un insuficiente conocimiento matemático y una comprensión limitada de las notaciones y sus propiedades.

El análisis de los enunciados de los ejercicios y sus resoluciones exigen, principalmente, la memorización de fórmulas (sin contar conceptos algebraicos previos). Este tipo de situaciones no permiten razonar, al estudiante, sobre los objetos en juego ni su manipulación lo que conlleva un costo significativo en su aprendizaje. Practicar este tipo de ejercicios no permite al estudiante comprender que las expresiones algebraicas y numéricas representan funciones o valores. Además, la valoración del conocimiento se reduce a recordar fórmulas, lo que implica que, si un estudiante no conoce una fórmula, no podrá resolver el problema.

Por lo tanto, es necesario que los docentes revisen el tipo de ejercicios que se utilizan, según los resultados de aprendizaje esperados. Es decir, es necesario plantear problemas, en lugar de ejercicios, que exijan al estudiante buscar caminos o estrategias de solución en base a sus conocimientos adquiridos. Cabe señalar que los estudiantes son alumnos de ingeniería y requieren problemas relacionados con contextos que presenten desafíos a sus capacidades y que vayan más allá de la aplicación de fórmulas.

A modo de conclusión, en relación con la primera pregunta de investigación, sobre la naturaleza de los errores cometidos por los estudiantes en el curso de álgebra 1 del plan común de ingeniería civil de la UDA, la investigación revela que los estudiantes no logran distinguir entre los procedimientos algebraicos y numéricos. Se identificó que, al operar con fracciones algebraicas y trigonométricas, los estudiantes aplican incorrectamente propiedades numéricas.

Respecto a la segunda pregunta, en relación con el uso de las reglas matemáticas en las actividades de trigonometría, el estudio revela que los estudiantes, en su mayoría, no aplican correctamente los procedimientos correspondientes. Aunque algunos conocen ciertas identidades trigonométricas, no las utilizan adecuadamente o no las reconocen como herramientas necesarias para resolver los problemas planteados. En los ejercicios de demostración, por ejemplo, los estudiantes tienden a simplificar incorrectamente las expresiones, como si fueran fracciones numéricas, lo que evidencia una falta de comprensión de los objetos y propiedades del álgebra y la trigonometría. Asimismo, se identificaron casos en que se inicia correctamente un cambio de variable, pero no se regresa a la variable original, dejando incompleto el procedimiento. Estas situaciones demuestran que las reglas matemáticas de la trigonometría no están siendo aplicadas con propiedad, probablemente porque no se ha logrado aún una apropiación significativa de sus conceptos ni de las representaciones que los sustentan.

Entendemos que la falta de énfasis, en un marco matemático determinado al no precisar que los objetos matemáticos que lo constituyen tienen sus notaciones y propiedades. Por ejemplo, el marco aritmético está constituido básicamente por los números y fracciones numéricas, con sus notaciones, propiedades y operaciones propias. Al pasar al marco algebraico los objetos ya no son números ni fracciones numéricas, sino que los objetos son las expresiones algebraicas compuestas que se anotan con números y letras, que se operan de acuerdo con sus operaciones propias y muy distintas a las del marco aritmético. Si el docente no pone énfasis en clases en estas distinciones los estudiantes no tomarán conciencia de ellas, y seguirán aplicando sus conocimientos aritméticos aprendidos en la escuela básica, lo que los lleva a utilizar el tratamiento aritmético que dan a la operatoria con expresiones algebraicas, puesto que, no han tomado conciencia que son objetos nuevos de otro dominio que tienen otras notaciones y reglas nuevas, siendo necesario aprender a operarlos en forma pertinente.

Se espera que con esta investigación se pueda continuar con estudios de casos que propongan transiciones de representaciones que permitan al estudiante asegurar un aprendizaje significativo de la trigonometría.

6. REFERENCIAS

Aguilar Terrones , D., Sánchez Ruiz, J. G., & Salgado Suárez, G. D. (2022). Aprendizaje de números racionales a partir de representaciones semióticas. Revista Chilena De Educación Matemática, 14(2), 69–99. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i2.102

Aray, C., Guerrero, Y., Montenegro, L., & Navarrete, S. (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. Rehuso, 5(2), 62-69.

Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 33–59). Grupo Editorial Iberoamérica.

Barahona Urbina, P., Veres Ferrer, E., & Aliaga Prieto, V. (2016). Deserción académica en la Universidad de Atacama, Chile. Comuni@cción: Revista de Investigación en Comunicación y Desarrollo, 7(2), 27-37.

Bedregal-Alpaca, N., Tupacyupanqui-Jaén, D., & Cornejo-Aparicio, V. (2020). Análisis del rendimiento académico de los estudiantes de Ingeniería de Sistemas, posibilidades de deserción y propuestas para su retención. Ingeniare. Revista chilena de ingeniería, 28(4), 668-683.

Bejarano Segura, D. (2023). Representaciones semióticas en el aprendizaje del objeto matemático resolución de triángulos con múltiples lenguajes (Tesis de licenciatura). Universidad de Caldas.

Beltrán Soria, M. del P., & Montiel Espinosa, G. (2016). La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional - trigonométrico en estudiantes mexicanas del nivel medio superior. Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa, 19(3), 255–286. https://doi.org/10.12802/relime.13.1931

Castro, T., & Cárcamo, A. (2023). Errores en la resolución de ecuaciones trigonométricas: Un estudio exploratorio con estudiantes de primer año de ingeniería. Revista de Investigación en Educación y Humanidades, 37(75), 1-12. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a16

Chico, J., & Montes, M. Á. (2023). Representaciones semióticas de la multiplicación y división en libros de texto de educación primaria. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 37(75), 296–316.

Colombo, K. F., Torres, I., & Meza, W. G. (2017). La trigonometría como factor de aprendizaje en los contenidos prácticos de la topografía. Opuntia Brava, 9(1), 1-10.

Contreras Oré, F. A. (2017). La axiomática. Horizonte de La Ciencia, 7(12), 111–121.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentidos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial, 177–195.

Duval, R. (1999). El concepto de semiosis: Perspectivas y enfoques en la educación. Peter Lang.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (2.ª ed.). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Facultad de Ingeniería. (2021). Programa de álgebra I [Programa de asignatura]. Departamento de Matemática, UDA.

Giovannini, E. N. (2014). Geometría, formalismo e intuición: David Hilbert y el método axiomático formal (1891–1905). Revista de Filosofía, 39(2), 121-146. https://doi.org/10.5209/rev_RESF.2014.v39.n2.47307

González, L., & Uribe, D. (2018). Estimaciones sobre la "repitencia" y deserción en la educación superior chilena. Revista Calidad en la Educación, 75-90.

Marchetti, D., Cabeza, M. C., & Olmedo, A. (2019). Dificultades en las conversiones entre registros de representación semiótica: Un análisis en estudiantes de matemática. Revista Iberoamericana de Educación en Ciencia y Tecnología, 18(1).

Moore, J., Smith, A., & Johnson, R. (2012). Educational challenges in higher learning: A global perspective. Journal of Higher Education Studies, 35(4), 125-142.

Riccomini, P. J. (2005). Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction. Learning Disability Quarterly, 28(3), 233-242.

Sancho-Vinuesa, T., Masià, R., Fuertes-Alpiste, M. & Molas-Castells, N. (2018). Exploring the effectiveness of continuous activity with automatic feedback in online calculus. Computer Applications in Engineering Education, 26(1), 62-74. https://doi.org/10.1002/cae.21861

Santos, M. (2011). La Educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8, 35-54.

Scholz, M., & Montiel, L. (2017). Innovación e investigación en matemática educativa. Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC, 2, 232-233. ISSN: 2594-1046.

Stewart, J. (2016). Precalculus (7a ed.). Cengage Learning

Zaldívar Carrillo, M. E., & Mayo Parra, I. (2005). Apuntes necesarios acerca de la relación entre ejercicios, problemas y tareas. Revista Iberoamericana de Educación, 37(5), 1-10.