ISSN 2452-5448 | **SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**
https://doi.org/10.46219/rechiem.v18i1.205

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LA HOMOTECIA

DESIGN AND A PRIORI ANALYSIS OF A STUDY AND RESEARCH PATH FOR TEACHING HOMOTHETY

Paula Rabanedo
prabanedo@alumnos.exa.unicen.edu.ar
https://orcid.org/0009-0001-1531-5959
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Viviana Llanos
vcllanos@niecyt.exa.unicen.edu.ar
https://orcid.org/0000-0003-0433-2654
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

RESUMEN

Diseñamos y analizamos un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI), inspirado en el funcionamiento de una fotocopiadora, para ser utilizado como recurso didáctico para enseñar geometría dentro de lo que en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard se conoce como Paradigma de la Investigación y del cuestionamiento del Mundo. Presentamos el análisis a priori del REI y un conjunto de tareas vinculadas al funcionamiento de la fotocopiadora, enfocadas en el estudio de la homotecia y otras nociones de geometría. Ponemos a disposición un recurso que promueve una enseñanza basada en el cuestionamiento y el tránsito hacia un nuevo paradigma en la formación de los futuros profesores de matemática.

Palabras Clave:
Geometría; Homotecia; Recorridos de Estudio y de Investigación; Formación de profesores

ABSTRACT

We designed and analyzed a Study and Research Path (SRP), inspired by the functioning of a photocopier, to be used as a learning resource for teaching geometry within what Chevallard's Anthropological Theory of the Didactic (ATD) refers to as the Paradigm of Research and Questioning of the World. We present the a priori analysis of the SRP and a set of tasks related to the functioning of the photocopier, focused on the study of homothety and other geometry concepts. We make available a resource that promotes inquiry-based teaching and the transition toward a new paradigm in the training of future mathematics teachers.

Keywords:
Geometry; Homothetic; Study and Research Path; Teacher training

Recibido 19 de agosto 2025, Aceptado 08 de abril 2026
Revista Chilena de Educación Matemática, Volumen 18, N°1

1. INTRODUCCIÓN

La geometría es un área de la matemática que, si bien se contempla en la propuesta de los diseños curriculares, podríamos decir que se encuentra en extinción dado que ha sido progresivamente desplazada del aula del nivel secundario. En ocasiones los profesores deciden posicionarla al final del programa y no logran abordarla en la clase, o si lo hacen, la reducen al estudio de figuras planas, específicamente triángulos y trigonometría (Bravo y Riofrío, 2024). Otras investigaciones, como por ejemplo Pérez y Guillén (2007), sostienen que se prioriza la medida y el cálculo de áreas antes que la descripción y clasificación de figuras. La investigación de Eugui (2023) confirma que la desaparición de la geometría en la escuela secundaria, no se identifica en la propuesta de diseños curriculares de referencia, dado que desde la creación de la primera escuela secundaria en Argentina, esta disciplina ocupa un lugar importante, como otros contenidos matemáticos (números, funciones y álgebra). Sin embargo, es un hecho que la desaparición a la que se hace referencia ocurre en el aula. En particular la homotecia es un tema que corresponde estudiar en el tercer año del nivel secundario de la provincia de Buenos Aires en Argentina, y que consideramos que se encuentra abandonada en este nivel (Rabanedo y Llanos, 2024). ¿Por qué será que los profesores no priorizan la enseñanza de la geometría y directamente eliminan la homotecia como un tema importante dentro de ésta? ¿por qué priorizarán otros temas? Frente a esto pensamos que el fenómeno de la eliminación escolar de lo geométrico podría deberse a que tal vez los profesores en su formación no tuvieron oportunidad de estudiarla lo suficiente, o si lo hicieron, no le encontraron utilidad (Chevallard, 2017) y tampoco pudieron otorgarle sentido.

Hay ciertos conocimientos que no son enseñados y que los profesores suelen reconocer que es por falta de tiempo o porque no le encuentran sentido. En este contexto, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2013), identifica un paradigma vigente denominado paradigma monumental, que lleva ese nombre porque el autor compara metafóricamente la actividad del profesor en el aula con la de un guía de un museo que invita a visitar un monumento. Esta analogía de los estudiantes como visitantes del museo, y del profesor, en este caso de matemática, que muestra las obras, hace notar que en el paradigma monumental vigente no hay posibilidad de reconstruir el saber ni cuestionarlo. Como alternativa, la TAD introduce el paradigma de la investigación y cuestionamiento del mundo (Chevallard y Strømskag, 2022, 2025) que implica un cambio sustancial en la enseñanza habitual. En este marco, los Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) se presentan como dispositivos teóricos y didácticos que permiten repensar el rol del profesor y los estudiantes.

Un REI comienza con una pregunta generatriz Q_0, que no admite respuesta inmediata, lo que moviliza un proceso de estudio que requiere reconstruir los saberes para generar dicha respuesta. En esta investigación diseñamos, analizamos e implementamos un REI que lo denominamos de la fotocopiadora y que inicia con la pregunta generatriz Q_0: ¿Por qué una fotocopiadora puede realizar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma? Como parte del análisis a priori del REI antes de llevarlo al aula, se realiza el Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) (Chevallard, 2013), que incluye las posibilidades del estudio y, específicamente, nos interesa desarrollar aquí las que permitirían abordar saberes de geometría, y la fase de adaptación del REI para ser utilizado como recurso e implementarlo en la formación de profesores de Matemática. Nos proponemos responder las preguntas ¿en qué medida el REI propuesto contribuye a la formación inicial de los profesores en Matemática? ¿cómo podríamos adaptar el REI para utilizarlo como un recurso para la enseñanza de la geometría en la formación de profesores?

Se reconocen varias investigaciones que han desarrollado REI para la enseñanza de la geometría. Algunas se han centrado en el diseño y análisis a priori de un REI que integra nociones de geometría sintética y analítica (Gaud y Minet, 2019; Nicasso y Bosch, 2021), mientras que otras han documentado experiencias de implementación de REI en contextos de formación docente (García, 2021; Lobo y Almouloud, 2023; Rojas y Sierra, 2020). Otros han avanzado en el desarrollo de REI para otras áreas de la matemática como el álgebra o el análisis (Cid et al., 2020; Laplace et al., 2024). Dada la complejidad de los REI y la inminente necesidad de un cambio en la enseñanza habitual que contemple la geometría, en el marco de la enseñanza basada en el cuestionamiento se desarrollan las Actividades de Estudio e Investigación (AEI) (Barachet et al., 2007; Ferreyra, 2021; Reymonet, 2004), que en el marco de la TAD es una alternativa más viable para reencontrar obligatoriamente determinados saberes. Un REI permite una diversidad de recorridos, que entre estos logran una cobertura de un programa completo y más allá de este. Por tal motivo, esta propuesta se diferencia de los antecedentes mencionados en varios aspectos. Por un lado, porque el REI diseñado permite cubrir los contenidos de una cátedra completa, que es geometría métrica del profesorado, incluyendo vínculos con los saberes de otras cátedras. Por otro lado, la elección de un dispositivo real, como es la fotocopiadora, permitiendo la generación del cuestionamiento.

Nos proponemos entonces como objetivo de este trabajo presentar las características del diseño y análisis a priori de un REI, centrado en el estudio de la homotecia, con el fin de utilizarlo como recurso para la enseñanza de la geometría en la formación inicial de profesores de Matemática.

2. TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO Y RECORRIDOS DE ESTUDIO Y DE INVESTIGACIÓN

El referencial teórico adoptado es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (2013). En la TAD se identifican dos paradigmas antagónicos: el monumental que concibe a la enseñanza de saberes que se presentan, admiran y no se deconstruyen como si fueran monumentos, y en oposición un Paradigma emergente el de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM), que pone como punto de partida el cuestionamiento y el estudio profundo de dichas preguntas (Chevallard y Strømskag, 2022). El correlato de este último paradigma en el aula son los Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) (Chevallard, 2013) que son un dispositivo didáctico que permite generar procesos de estudio y de investigación a partir de una pregunta que se denomina generatriz Q_0. Se dice que Q_0 es una pregunta en sentido fuerte porque como su nombre lo indica genera nuevos cuestionamientos y la investigación de los mismos, es decir el estudio en profundidad de las preguntas que derivan de ella. Según Chevallard (2009, 2013) un REI se define sintéticamente a partir del esquema herbartiano $[S(X;Y;Q_0) \rightarrow M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$; donde S representa al sistema didáctico formado por: los estudiantes X, los profesores Y y la Q_0. S construye y organiza ($\rightarrow$) el medio $M = \{R_n^{\diamond}, Q_j, O_k, D_q\}$; donde $R_n^{\diamond}$ son las respuestas hechas, disponibles en un libro, en internet, por ejemplo; Q_j son las preguntas que se derivan de Q_0, O_k son las obras matemáticas o de otra disciplina que dan sentido a las respuestas $R_n^{\diamond}$ y D_q algún conjunto de datos o trabajos empíricos útiles al medio M. Como resultado del estudio se espera generar ($\hookrightarrow$) una respuesta $R^{\heartsuit}$ que será la más acertada para el sistema, y que no se encuentra elaborada antes del estudio, es el resultado del mismo.

Como instrumento teórico el REI requiere de un diseño y un análisis a *priori* exhaustivo para que pueda ser implementado en un aula. El análisis a priori del REI se realiza mediante la construcción de lo que Chevallard (2013) denomina un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR), a partir del estudio de la pregunta generatriz Q_0 que es propuesta por los investigadores y analizada primero por éstos, a fin de considerar la pertinencia y los alcances del mismo. El MPR además permite a los investigadores anticipar las Organizaciones Matemáticas (OM) que podrían reconstruirse a partir de la identificación de posibles preguntas derivadas que llevarían al estudio y la reconstrucción de los saberes matemáticos que interesa reencontrar y reconstruir. En este trabajo, el MPR orienta tanto la identificación de las preguntas Q_i relevantes como el diseño de tareas potenciales, concebidas como dispositivos para hacer emerger determinadas técnicas y conocimientos vinculados al estudio de la homotecia. De este modo, la TAD no sólo fundamenta el marco teórico del estudio, sino que estructura el análisis a priori y justifica las decisiones de diseño del REI y de las tareas propuestas.

3. METODOLOGÍA

Se trata de una investigación cualitativa (Moreira y Rosa, 2009) desarrollada desde el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El objetivo de la investigación es presentar el diseño y el análisis a priori del REI que se origina con Q_0: *¿Por qué una fotocopiadora puede realizar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma?*, centrado en el estudio de la homotecia, con el fin de adaptarlo como recurso para la enseñanza de la geometría en la formación inicial de profesores de Matemática. El interés de esta investigación radica en el análisis de las condiciones que hacen posible la reconstrucción de determinadas OMs a partir del REI. Por tal motivo el foco está puesto en el análisis a priori del mismo, mediante la reconstrucción del MPR y en la elaboración de un conjunto de tareas que permitan hacerlo funcionar en el aula, cuando se realicen las implementaciones del mismo. La investigación se centra en lo que se denomina la ingeniería didáctica del REI, que es propia de los estudios desarrollados en la TAD, motivo por el cual sintetizamos las fases que siguen:

1. Diseño de la pregunta generatriz Q_0, considerando que deberá ser una pregunta en sentido fuerte que genere diferentes recorridos de estudio e investigación, y permita reconstruir

diferentes OMs del programa del profesorado, en particular la homotecia; una pregunta que no admita una respuesta inmediata, es decir que dé lugar a un estudio prolongado y que se vincule con un dispositivo real y no escolar, susceptible de ser problematizado matemáticamente (Rabanedo et. al, 2024). Con base en estos criterios, se seleccionó el funcionamiento de una fotocopiadora como contexto problematizador, por su potencial para articular nociones de proporcionalidad, semejanza y profundizar en la homotecia, lo que dio lugar a la pregunta generatriz Q_0 para dar inicio al REI, para ser utilizado como desarrollo de producto didáctico (ingeniería del REI) y posteriormente implantarlo con profesores de formación inicial en la enseñanza de la geometría.

2. Elaboración del MPR y análisis didáctico a *priori* de las preguntas y saberes matemáticos, principalmente geométricos, que podrían reconstruirse con el REI. Diseño de tareas que podrían derivarse de las preguntas antes mencionadas para reencontrar dichos saberes. Este análisis permite anticipar las OMs que podrían emerger durante el desarrollo del REI, con especial énfasis en la homotecia como objeto matemático central. En esta fase se realiza, además, el diseño de un conjunto de tareas potenciales, entendidas como dispositivos didácticos que podrían introducirse en el estudio para favorecer la reconstrucción de las OMs identificadas en el MPR, en función de las necesidades que surjan del desarrollo del recorrido.

3. Corresponde en esta fase realizar la implementación del REI en el contexto de la formación de profesores de Matemática, específicamente en un Instituto Superior de Formación Docente (ISFD) de la provincia de Buenos Aires, donde la investigadora es la profesora.

4. Esta fase contempla el análisis a *posteriori* del REI. Sin embargo, este análisis, no forma parte del presente trabajo, ya que el artículo se centra exclusivamente en el diseño, el análisis a priori y la elaboración de las tareas que permitirían adaptar el REI al contexto.

Las fases 3 y 4 son las que motorizan este estudio porque el fin es llevar un REI al aula para estudiar homotecia y otros saberes de geometría en la formación de profesores. Los investigadores, como parte de la ingeniería, analizan el MPR para la cátedra de geometría métrica que es el contexto en el que se piensa implementar. La selección del contexto de implementación del REI (fase 3) y el análisis a posteriori (fase 4) se realizan con base en la fase 2, conforme avanza el estudio. En este artículo desarrollamos el análisis a priori del REI y el diseño y la justificación de las tareas para utilizarlo como recurso para enseñar geometría y, específicamente, homotecia en la formación de profesores en el contexto mencionado.

4. ANÁLISIS A PRIORI Y MPR DEL REI

El REI de la fotocopiadora inicia con la pregunta generatriz Q_0 y se acompaña del panel frontal de una fotocopiadora, como se muestra en la Figura 1.

> Q_0: *¿Por qué una fotocopiadora puede realizar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma?*

Figura 1. Panel frontal de la fotocopiadora y funciones para ampliar o reducir una copia

Nota: Elaboración propia. Adaptado de información para el usuario de una fotocopiadora.

Inicialmente consideramos cuatro preguntas que pensamos determinan algunos cuestionamientos posibles a la fotocopiadora a partir de Q_0:

- Q_1: *¿Cuáles son las condiciones para que pueda ampliarse o reducirse una imagen sobre una hoja cualquiera?*, teniendo en cuenta que según el tamaño de las hojas sobre las que la fotocopiadora realiza la copia, serán las posibilidades para ampliar o reducir una imagen, conservando sus características, identificando que:

    » Si las hojas poseen igual tamaño, el porcentaje de ampliación que se selecciona en la fotocopiadora no debe superar la razón entre el lado menor de la hoja y el lado correspondiente de la imagen, mientras que para reducirla el porcentaje debe estar entre 0 y 100 %.

    » Si las hojas poseen diferente tamaño y las imágenes conservan la misma superficie en ambas hojas, el porcentaje de ampliación o reducción será igual a la razón entre el lado menor de la hoja y el lado correspondiente de la imagen.

    » Si las hojas tienen distinto tamaño y las imágenes no ocupan la misma superficie en las hojas, el porcentaje de ampliación o reducción cumple las mismas características que las mencionadas para ampliar y reducir una imagen sobre un papel de igual tamaño.

Con Q_1 es posible reencontrar algunas cuestiones numéricas tales como porcentaje y proporcionalidad.

- Q_2: *¿Cuáles son las condiciones de la hoja que debe considerarse para poder ampliar o reducir sobre ella una imagen, ocupando la mis-*

ma superficie que en la hoja original? En este caso, cambia el tamaño de la hoja sobre la que se amplía o reduce la imagen. Cada lado de la hoja puede expresarse mediante una función de variable real que puede ser afín o racional, y representa la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales. Considerar los distintos parámetros permitiría estudiar diferentes funciones.

- Q_3: *¿Cómo justificar geométricamente las condiciones de la hoja que debe considerarse para poder ampliar o reducir sobre ella una imagen, ocupando la misma superficie que en la hoja original?* Los cambios en el tamaño de papel pueden explicarse y generalizarse considerando una homotecia de razón $k > 0$, donde k es la razón entre los lados de la hoja "de partida". Las hojas homotéticas no sólo tendrán los lados correspondientes proporcionales, sino que el lado mayor de la nueva hoja se obtiene multiplicando el lado menor de la hoja original por la razón de homotecia al cuadrado, esto es: $|\overline{A'C'}| = k^2 \cdot |\overline{AB}|$; y el lado menor de la nueva hoja equivale al lado mayor de la hoja original, esto es: $|\overline{A'B'}| = |\overline{AC}|$. Este estudio reconstruiría la OM homotecia y otras, como teorema de Thales, proporcionalidad, segmentos, semirrectas y polígonos.

Las relaciones entre las hojas con las características antes mencionadas se verifican para cualquier sucesión de hojas, en particular para las hojas que son utilizadas por la fotocopiadora: las hojas de las normas A, B y C de la serie DIN. Esta serie, denominada formalmente DIN 476, responde al sistema estandarizado ISO 216 que domina actualmente el rubro del papel en casi todo el mundo (Fraustro, 2014). Las hojas DIN se caracterizan por ser un rectángulo de proporción $\sqrt{2}$, donde cada una de las normas, comienza con la hoja A_0, B_0 y C_0, respectivamente y tienen la particularidad de que cada nueva hoja A_1, A_2, A_3, … por ejemplo para la serie A, se obtiene de la anterior al dividirla a la mitad o duplicarla, y tendrá la misma proporción.

También hay que considerar la relación entre dos hojas cualesquiera dentro de las series DIN, mediante una homotecia o composición de homotecias, según los casos:

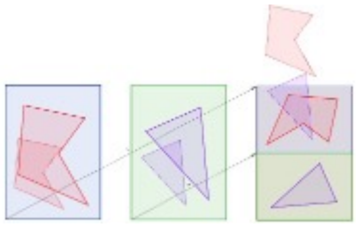
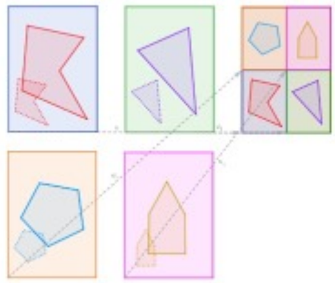
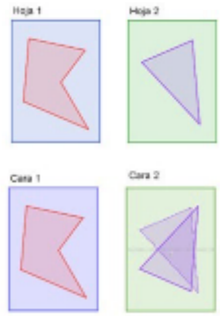
» Entre dos hojas dentro de una misma serie se tiene que: si son consecutivas resultan ser homotéticas de razón $k = \sqrt{2}$ (para referir a la anterior en la serie) o $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (para referir a la posterior). Sin por ejemplo dos hojas equidistan dos posiciones (de A3 a A5) resultan ser homotéticas de razón $k^2 = \frac{1}{2}$, y también sería el caso de la A4 a A2 la razón es $k^2 = 2$. Entonces, dos hojas que equidistan i lugares resultan ser homotéticas de razón k^i.

» Entre dos hojas de distinta serie se obtiene: la hoja Bn de la serie DIN-B calculando la media geométrica entre las medidas de las hojas An y An+1, con n la posición dentro de la serie. De manera análoga la hoja Cn se obtienen de calcular la media geométrica entre las medidas de las hojas An y Bn. De este modo, dos hojas An y Bn resultan ser homotéticas de razón $\sqrt[4]{2}$ y dos hojas An y Cn resultan ser homotéticas de razón $\sqrt[8]{2}$.

Esto da lugar al estudio de la composición de homotecias, media geométrica y diferentes construcciones a realizar con regla y compás. En todos los casos, los rectángulos que representan las hojas poseen proporción $\sqrt{2}$ y son un caso particular de la OM rectángulo dinámico. Si nos preguntamos ¿qué características tienen los rectángulos dinámicos?, estudiaríamos propiedades de números racionales e irracionales y la representación de $\sqrt{n}$ en la recta numérica, por ejemplo.

El análisis geométrico de Q_0 que hemos realizado hasta aquí prioriza la función de la fotocopiadora que permite ampliar o reducir una imagen, conservando las características de la misma. Sin embargo, existen otras funciones en la fotocopiadora, que permiten realizar otros tipos de copia (Tabla 1) que incluyen reducir dos o más originales a una hoja, y la impresión a doble cara.

Tabla 1. Otras funciones de la fotocopiadora

Reduce y orienta los originales y los imprime en una hoja	**Reduce los originales y los ajusta para copiar 4 en una hoja**	**Impresión a dos caras**
		
Imágenes de dos hojas de igual tamaño se imprimen en una hoja del mismo tamaño (reducción de razón $\frac{1}{\sqrt{2}}$, seguida de una traslación y rotación de 90° en sentido horario).	Imágenes dadas en cuatro hojas de igual tamaño se imprimen en una hoja del mismo tamaño. Hay una reducción de razón $\frac{1}{(\sqrt{2})^2}$ seguida de una traslación.	Imágenes en dos hojas de igual tamaño, se imprimen a doble cara. La cara uno no cambiará, y la cara 2 tendrá una imagen simétrica respecto a la mediatriz al lado mayor.

Nota. Elaboración propia

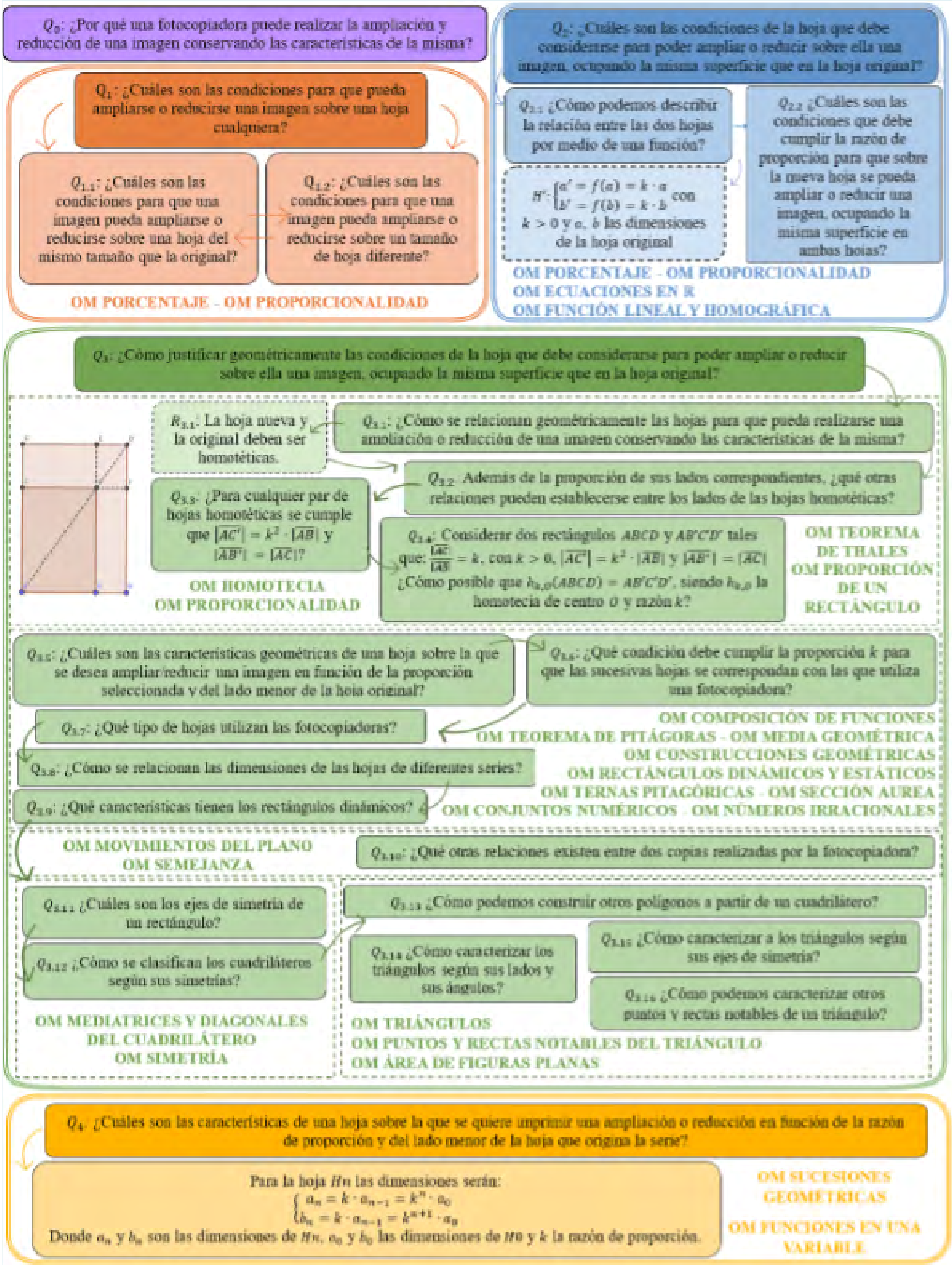
Las transformaciones geométricas que se combinan para cada una de las opciones de impresión permiten estudiar composición de isometrías y homotecia, lo que equivale a estudiar la semejanza entre las imágenes correspondientes.

De Q_3, podrían derivarse otras preguntas como, por ejemplo, *¿cuáles son los ejes de simetría de un rectángulo? ¿cómo se clasifican los cuadriláteros según sus simetrías? ¿cómo caracterizar a los triángulos según sus ejes de simetría?*, entre otras, que permitirían reconstruir otras OMs (diagonales de un cuadrilátero, simetría, triángulos y rectas notables) que por una cuestión de espacio no desarrollamos aquí, pero se incluye el análisis en el MPR. Considerando las hojas sucesivas de las series estudiadas, con Q_2 y Q_3 también es posible ingresar en el estudio de las sucesiones geométricas, que pensamos se origina con Q_4.

- Q_4: *¿Cuáles son las características de una hoja sobre la que se quiere imprimir una ampliación o reducción en función de la razón de proporción y del lado menor de la hoja que origina la serie?* Si la razón k entre los lados resulta ser $k>1$, podrá imprimirse la ampliación de la imagen sobre las hojas sucesivas, y si $k<1$ podrá reducirse la imagen. Es necesario para este análisis ingresar en el estudio de sucesiones geométricas y funciones de variable real, tales como las polinómicas, exponenciales y logarítmicas.

Una síntesis de las cuatro preguntas que mencionamos que derivan de Q_0 (Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4) y otras que se pueden desprender de éstas junto con las OMs que podrían reconstruirse, se muestran en la Figura 2. Esto correspondería a una síntesis del MPR que contiene algunas OMs que podrían reconstruirse con el REI, pero que de ninguna forma es definitivo, pues el alcance está determinado por las cuestiones que se puedan reencontrar.

Figura 2. Esquema que orienta el estudio de Q_0



Nota: Elaboración propia.

5. ADAPTACIÓN DEL REI COMO RECURSO PARA ENSEÑAR

El REI propuesto, que denominamos de la fotocopiadora se origina y estructura a partir de la pregunta generatriz Q_0: *¿Por qué una fotocopiadora puede realizar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma?* En el marco del PICM esta pregunta no se concibe como un problema a resolver de inmediato, sino como el punto de partida de un estudio prolongado. El estudio se inicia con la problematización del dispositivo real que es la fotocopiadora y las funciones de ampliación y reducción. A partir de la exploración del panel digital y de los porcentajes disponibles, emergen preguntas relativas a la proporcionalidad entre los lados de las hojas, la relación entre los diferentes formatos y también la conservación de la forma de la imagen, etc. Estas primeras indagaciones dan lugar a lo que denominamos las preguntas derivadas, que amplían el campo de estudio hacia las OMs de interés: homotecia, semejanza, composición de transformaciones y las construcciones sintéticas con regla y compás, entre otras que puedan aparecer en el contexto. Aquí la homotecia constituye la OM central del REI, sin embargo, el REI no se reduce al estudio aislado de este objeto, sino que articula otras OMs como hemos mencionado antes.

El funcionamiento del REI no es lineal ni predeterminado: las preguntas derivadas pueden aparecer en distinto orden según el desarrollo del estudio. En este proceso, el profesor asume el rol del director del estudio, orientando la formalización de los saberes cuando las condiciones lo requieren, y promoviendo la reconstrucción progresiva de las OMs identificadas en el MPR. En este sentido, el REI se concibe como un dispositivo abierto, cuya trayectoria efectiva dependerá de las preguntas que se formulen y de las decisiones didácticas que se adopten en el aula. El conjunto de tareas diseñadas no define el recorrido, sino que constituye un repertorio potencial para sostener el estudio cuando ciertas organizaciones matemáticas deban ser reconstruidas o institucionalizadas.

Adaptamos el REI para implementarlo en un curso de Didáctica de la Matemática con Profesores de Matemática en Formación, donde el investigador es el profesor. Se selecciona este contexto con el objetivo de dar a los futuros profesores la oportunidad de vivir una enseñanza en el nuevo paradigma, que incluya los conocimientos matemáticos de la carrera, a la vez que otorga sentido a la geometría de la formación y específicamente al estudio de la homotecia, que ha sido un problema identificado en la enseñanza en el nivel para el que se están formando estos estudiantes del profesorado.

Agregamos que las tareas diseñadas no constituyen el REI en sí mismo, sino que éstas se derivan de las preguntas contextualizadas identificadas en el MPR. Éstas se conciben como dispositivos didácticos potenciales que podrían incorporarse al estudio cuando la reconstrucción de determinadas OMs lo requiera. De este modo, su función es sostener el medio del REI, sin determinar de manera lineal su desarrollo. Cada tarea elaborada entonces, es una primera aproximación al estudio de las preguntas del REI, y la inserción de las mismas en la clase dependerá de la forma que adopte el estudio por los diferentes recorridos que se desprendan de Q0. Diseñamos 11 tareas, que potencialmente serán útiles a la ecología del REI en el contexto de la formación de profesores.

Tarea 1

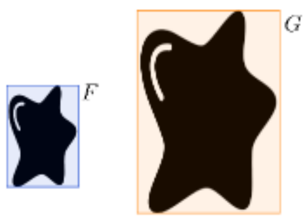
Tenemos una imagen que ocupa toda la superficie de una hoja y se desea ampliarla o reducirla sobre otra hoja, de manera tal que también ocupe el total de la superficie de ésta. Para ello, disponemos de una fotocopiadora que sólo trabaja con las hojas A3, A4 y A5 de la serie DIN-A y con las hojas B3 y B4 de la serie DIN-B. Como se observa en la imagen, en el panel frontal la fotocopiadora muestra diferentes porcentajes para pasar de una hoja a otra. ¿Cómo podemos justificar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma?

Nota: Elaboración propia

Es posible y deseable que aparezcan otras preguntas que son relevantes para el estudio como, por ejemplo: ¿qué significa que la imagen conserve sus características? ¿cómo es posible justificar la ampliación o la reducción de una figura? ¿qué características tienen las hojas DIN-A y DIN-B? ¿cuál es la relación entre A3, A4, A5, B3 y B4? Con la tarea 2 se espera que los futuros profesores identifiquen los porcentajes que permiten ampliar o reducir una imagen y consideren valores de proporción que no estén expresados en porcentaje.

Tarea 2

Dadas dos hojas F y G, tales que la imagen de G se corresponde con una ampliación realizada de la imagen en F, en otro tamaño de hoja por la fotocopiadora ¿Cuáles de los porcentajes que se muestran en la fotocopiadora permiten realizar la ampliación de esta imagen? ¿Y los que permitirían realizar ahora la reducción de la imagen de G nuevamente a la imagen de F? ¿Qué otras funciones de la fotocopiadora permiten ampliar una imagen de manera tal que se imprima sobre una hoja cuyas dimensiones se obtienen al multiplicar cada lado de la hoja original por $\sqrt{2}$? ¿Cuáles de las hojas utilizadas por la fotocopiadora permiten realizar una ampliación empleando dicha función?



Nota: Elaboración propia

Con la Tarea 2 se establece la relación entre los lados de las hojas y el porcentaje utilizado por la fotocopiadora: para ampliar una imagen sobre una hoja cuyas dimensiones se obtienen al multiplicar cada lado de la hoja original por $\sqrt{2} \cong 1{,}41 \ldots$ el botón a utilizar es el de 141%. Al preguntar por las hojas necesarias para realizar una ampliación con dicho botón aparece explícitamente en el panel que las hojas deben ser A4 → A3 o A5 → A4. Sin embargo, también sería posible realizar una ampliación de B4 a B3, lo cual no aparece en el panel frontal de la fotocopiadora, pero podría surgir este cuestionamiento. Esta tarea, involucra algunas OMs que se estudian en el tramo de formación, como por ejemplo porcentaje y proporcionalidad.

El objetivo de las tareas 3 y 4 es investigar las características de las hojas DIN, estableciendo las relaciones entre dos de ellas.

Tarea 3

Si consideramos que la fotocopiadora sólo trabaja con las hojas A3, A4 y A5 de la serie DIN-A y con las B3 y B4 de la serie DIN-B. ¿Cómo podemos relacionar las dimensiones de dos hojas consecutivas cualesquiera de las series DIN-A y DIN-B respectivamente?

Nota: Elaboración propia

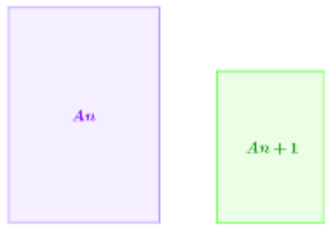
En el panel frontal de la fotocopiadora aparecen funciones que relacionan dos hojas DIN-A consecutivas: los porcentajes 71% (A3 → A4 o A4 → A5) y 141% (A4 → A3 o A5 → A4). Sin embargo, para generalizar esta relación, es necesario considerar las dimensiones de dos hojas cualesquiera y la forma en que cada hoja se relaciona con la anterior. Así, las dimensiones de las hojas A*n*+1 serán:

$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{b_n}{2} \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$, con $\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \sqrt{2}$ y a_n y b_n son las dimensiones de A*n*.

Este análisis requiere ser recuperado en la tarea 4, que aparece a continuación, con la cual sería posible reconstruir y vincular cuestiones numéricas y de geometría, como proporcionalidad, semejanza y punto medio de un segmento.

Tarea 4

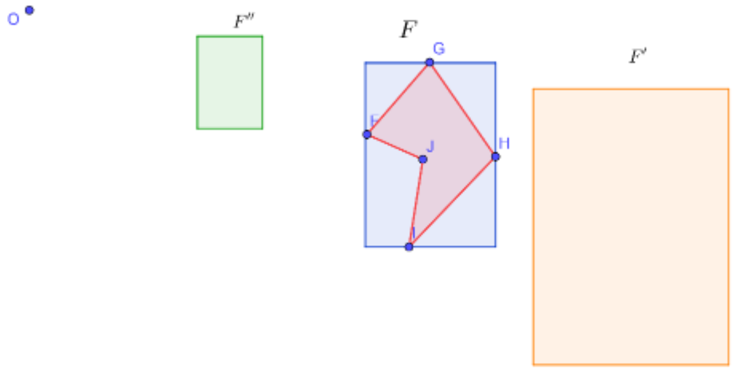
Dadas dos hojas An y An+1, y una imagen que ocupa la totalidad de la An+1 ¿por qué y cómo la fotocopiadora permite realizar una ampliación de una imagen dada en la hoja An+1 a otra en la hoja An? ¿y una reducción entre An y An+1? ¿qué ocurre con dos hojas consecutivas de la serie DIN-B? ¿Qué función de la fotocopiadora permitiría realizar una ampliación o reducción de una imagen entre dos hojas An y Bn?



Nota: Elaboración propia

En esta tarea hay que tener en cuenta que los lados correspondientes de dos hojas consecutivas de la misma serie son proporcionales, y lo mismo ocurre con los lados correspondientes de dos hojas An y Bn que ocupan la posición n en ambas series. Como las hojas además de tener los lados proporcionales poseen los ángulos congruentes, entonces geométricamente se corresponderían con figuras que son homotéticas. Se espera entonces un primer estudio en profundidad de la OM homotecia, lo que seguramente requiera de una salida del tema de la fotocopiadora para estudiar homotecia y luego continuar con las preguntas vinculadas a Q_0. Esta acción es un gesto reconocido en el PICM y en el contexto para el que se piensa el REI implicaría reencontrar también diferentes OMs de otra cátedra, Geometría métrica que en el programa incluye el trazado de rectas y semirrectas, circunferencias, rectas paralelas, dirección de una semirrecta, entre otras vinculadas al estudio de los aspectos centrales de la homotecia. Además, este estudio de la homotecia requerirá ingresar en construcciones geométricas sintéticas en lápiz y papel, que justifiquen lo antes analizado con el teclado visible de la fotocopiadora y que serán esenciales para estudiar con la tarea que sigue.

Tarea 5

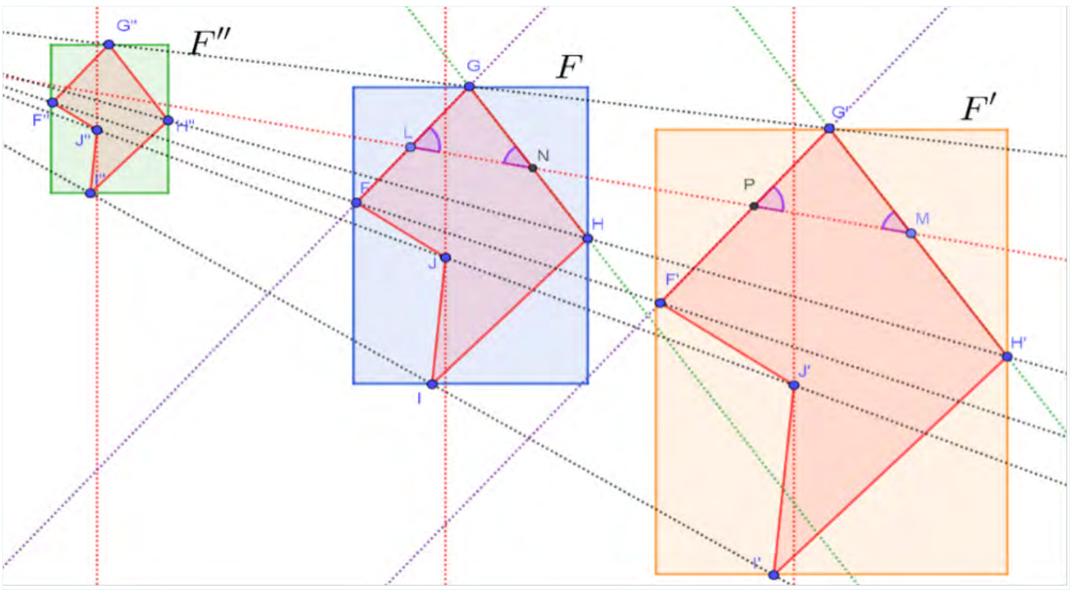


Dado un polígono sobre la hoja F, el centro de homotecia O y la hoja F'. ¿Cuáles son las construcciones geométricas que justifican la figura ampliada de la hoja F por la fotocopiadora sobre la hoja F'? ¿Y si la Fotocopiadora realiza una reducción del polígono de la hoja F a la otra hoja F''?

Nota: Elaboración propia

En la Figura 3 hay un esbozo de las propiedades geométricas para construir el polígono ampliado y el reducido. Con relación a los lados, sería posible demostrar que sus lados correspondientes son proporcionales utilizando el teorema de Thales y el paralelismo de las rectas; y con relación a los ángulos también podría demostrarse que todos los pares de ángulos homólogos son congruentes; por ejemplo, si se considera la recta que pasa por los puntos L y M que es transversal a las rectas $\overleftrightarrow{LG}$ y $\overleftrightarrow{PG'}$ (figura 3), las cuales son paralelas, y entonces los ángulos $\widehat{GLN}$ y $\widehat{G'PM}$ son congruentes. También la recta $\overleftrightarrow{LM}$ es transversal a las rectas $\overleftrightarrow{GN}$ y $\overleftrightarrow{G'M}$, que son paralelas, y entonces los ángulos $\widehat{LNG}$ y $\widehat{PMG'}$ son congruentes. Los puntos L,G y N y P,G' y M forman dos triángulos con dos pares de lados congruentes, entonces también son congruentes los ángulos del polígono $\widehat{LNG}$ y $\widehat{PMG'}$. De esta manera, es posible reconstruir además las OMs congruencia entre ángulos, paralelismo y transversalidad entre rectas, y con ello sectores angulares determinados por dos paralelas y una transversal, e incluso otros polígonos que no son rectángulos.

Figura 3. Representación de hojas y figuras homotéticas.

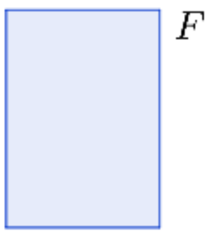


Nota: Elaboración propia.

Con la tarea 6 sería posible ingresar en el estudio de la razón de homotecia, homotecias directas e inversas. A la vez se relaciona la razón de homotecia con las funciones de la fotocopiadora.

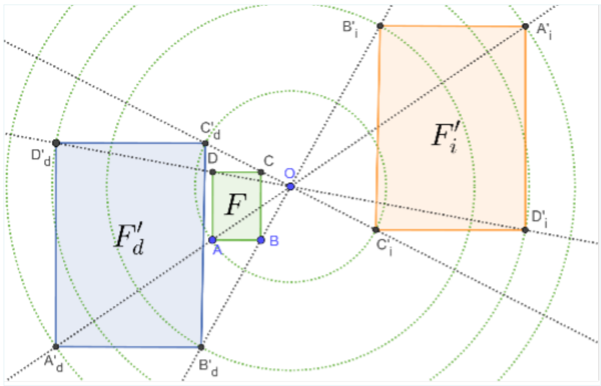
Tarea 6

Teniendo en cuenta que la razón de homotecia se relaciona con los porcentajes del panel de la fotocopiadora y dada una hoja cualquiera F, ¿cómo podemos construir con regla y compás una hoja homotética $F' = h_{k,O}(F)$? ¿Cómo es posible realizar con la fotocopiadora una ampliación de una imagen que ocupa la hoja completa, de razón $k = \sqrt[4]{2}$ a partir de una hoja A4? ¿Y una reducción de razón $k = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$ sobre una hoja A4?



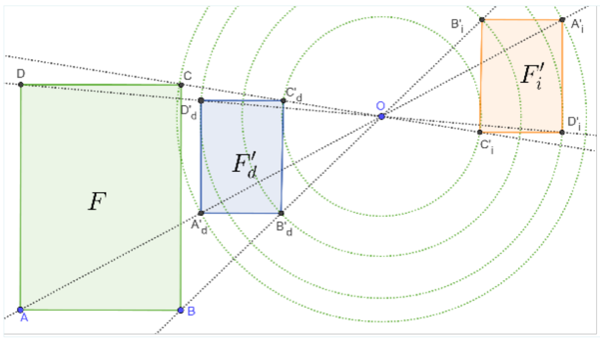
Nota: Elaboración propia

Figura 4. Ampliación



Nota: Elaboración propia

Figura 5. Reducción



Nota: Elaboración propia

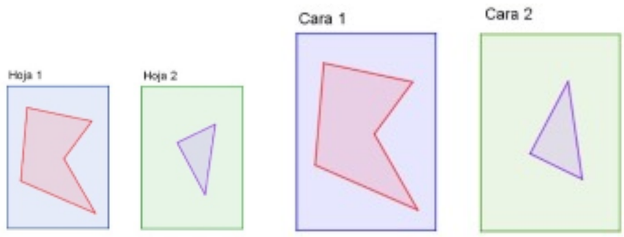
La construcción con regla y compás de la figura F' requiere considerar diferentes posibilidades para el centro O y para k, de manera que la homotecia resulte inversa o directa. En la Figura 4 se muestra la figura original F y dos imágenes homotéticas F' directa (F'_d) e inversa (F'_i) para $|k|>1$. La construcción de los vértices del rectángulo de F' (que nombramos X en general) se obtienen de reproducir k veces el segmento $\overline{OX}$ sobre la semirrecta $\overrightarrow{OX'}$ con origen en O y sentido positivo o sentido negativo. Sin embargo, cuando $|k|<1$ debemos considerar un segmento $\overrightarrow{OX'}$ que puede obtenerse al dividir en k partes iguales el segmento $\overline{OX}$ y para ello será necesario utilizar el teorema de Thales. Una representación de la reducción se muestra en la Figura 5.

Si se considera una razón $k = \sqrt[4]{2}\ k \cong 1{,}189\ldots)$, se tiene una homotecia directa que permite ampliar la hoja, pues el porcentaje que debe seleccionarse en la fotocopiadora es 119% y la hoja que debe utilizarse para imprimir dicha imagen ampliada es una B4. Además, si $k = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} k \cong 0{,}594\ldots)$ y la hoja sobre la que se imprime es A4, entonces la hoja original será B3, y se aplicará una reducción al 59% de la imagen original en el panel de la fotocopiadora.

La tarea 7 también requiere considerar casos de razones positivas y negativas, más allá de los porcentajes de la fotocopiadora, pues en el concepto de homotecia se involucran ambas posibilidades y la fotocopiadora no queda exenta.

Tarea 7

Dadas dos hojas de tamaño A5, se desea ampliar cada una de ellas y colocarlas en una única hoja doble faz tamaño A4 ¿Cómo es posible que en la fotocopiadora se pueda obtener la Cara 1 y la Cara 2 como se muestra a continuación, a partir de la Hoja 1 y la Hoja 2, respectivamente?

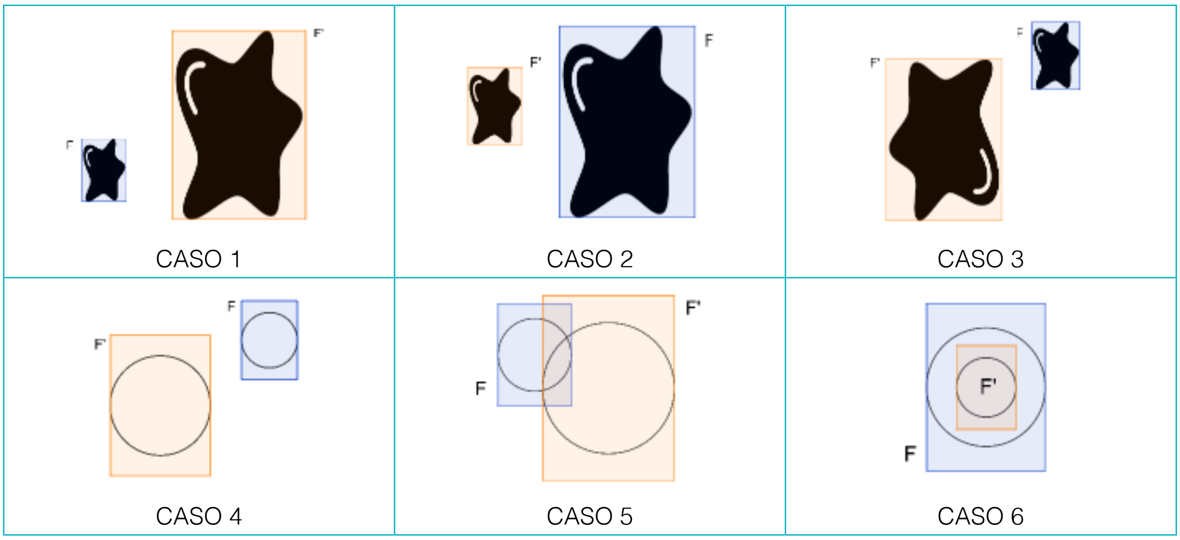


Nota: Elaboración propia

En esta tarea es necesario considerar el signo de la razón de homotecia y también la composición entre una homotecia y una simetría, lo que permitiría estudiar la homotecia vinculada a los movimientos del plano, y a la semejanza. Con la tarea 8 agregamos el caso del estudio del centro de una homotecia, y se pide obtener la razón; describiendo las funciones de la fotocopiadora que permitirían realizar cada tipo de impresión.

Tarea 8

Suponga que F y F' representan dos hojas tales que F' posee la imagen ampliada o reducida de la imagen original F. ¿Cómo podemos hallar el centro O y cuál sería la expresión para la razón k de homotecia tal que $F' = h_{k,O}(F)$? ¿Cómo podemos justificar cada una de estas impresiones utilizando las funciones de la fotocopiadora?



Nota: Elaboración propia

La orientación de la imagen impresa sobre la hoja determina si las homotecias son directas o inversas. Trazando las rectas que pasan por los vértices homólogos, podrá hallarse el punto de intersección entre ellas O que corresponde al centro de la homotecia y la razón $|k| = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{C'B'}|}{|\overline{CB}|} = \frac{|\overline{D'C'}|}{|\overline{DC}|} = \frac{|\overline{A'D'}|}{|\overline{AD}|}$

En el caso 1 (Figura 6) se tiene una homotecia directa que amplía (k>1) y que, en la fotocopiadora, corresponde a porcentajes mayores al 100%. En el caso 3, hay homotecia inversa que amplía el tamaño de la imagen (k<-1) (Figura 7). En la fotocopiadora, esta ampliación sólo es posible si consideramos porcentajes mayores al 100% y alguna de las hojas se coloca "al revés". Entonces, se tendría una homotecia compuesta con una simetría.

Figura 6. Homotecia directa con ampliación

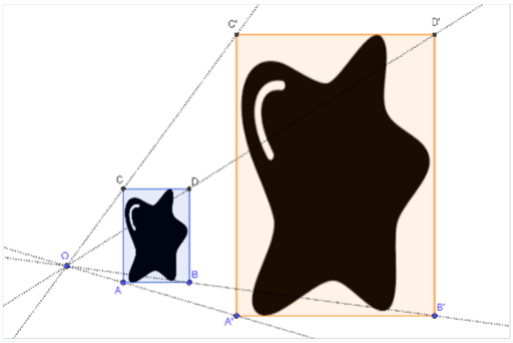
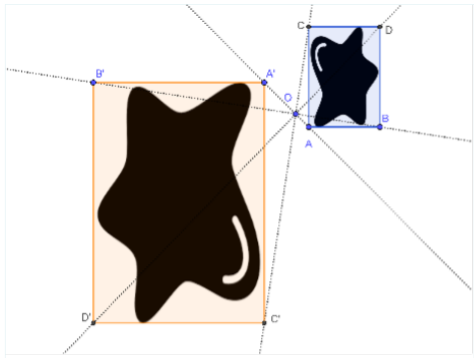


Figura 7. Homotecia inversa con ampliación



Nota: Elaboración propia

En el caso 4 la imagen en F' es la ampliación ($|k|$>1) de la imagen en F, y puede ser directa o inversa, pues la circunferencia será la misma sin importar cómo se tomen los vértices. En la Figura 8 vemos que para la homotecia directa geométricamente los puntos homotéticos se encuentran al mismo lado respecto al centro de homotecia y en la inversa dichos puntos están situados en los lados opuestos al centro de homotecia; sin embargo, en la fotocopiadora dependerá de la orientación que se dé a las hojas. A diferencia del caso 4, en el caso 6 como las figuras son concéntricas el centro de homotecia coincide y la homotecia es única.

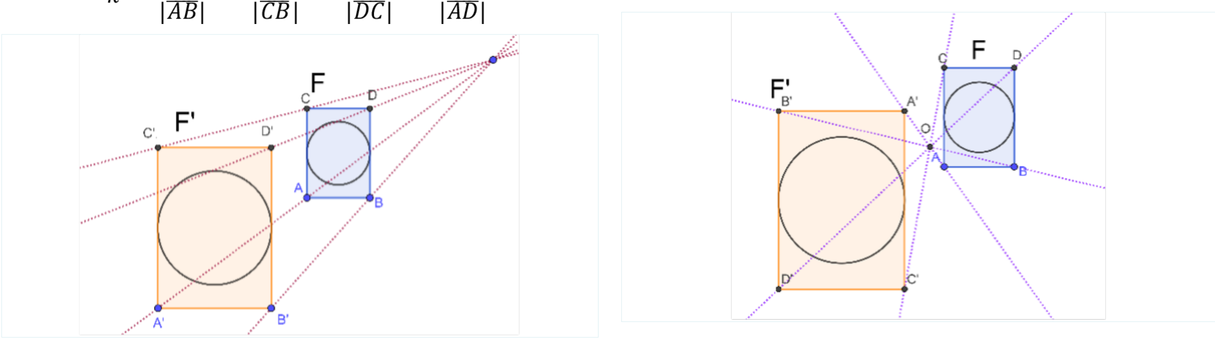
Figura 8. Homotecias directa e inversa

Homotecia directa

$$k = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{C'B'}|}{|\overline{CB}|} = \frac{|\overline{D'C'}|}{|\overline{DC}|} = \frac{|\overline{A'D'}|}{|\overline{AD}|}$$

Homotecia inversa

$$k = -\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = -\frac{|\overline{C'B'}|}{|\overline{CB}|} = -\frac{|\overline{D'C'}|}{|\overline{DC}|} = -\frac{|\overline{A'D'}|}{|\overline{AD}|}$$



Nota: Elaboración propia

Con las tareas que siguen, introducimos el problema de analizar las acciones de la fotocopiadora desde el punto de vista geométrico, para determinar cómo se pasaría a la selección de cualquier hoja de la seria DIN cuando se solicita una ampliación o reducción de una imagen. La composición de homotecias y el valor de la razón de dicha composición son conceptos centrales para este estudio.

Tarea 9

¿Cómo podemos obtener el porcentaje que utiliza la fotocopiadora para realizar las siguientes ampliaciones o reducciones: A4 → A5, B4 → A4, A5 → A3, B4 → A3, B4 → A5, A2 → B3? ¿Cuáles son las hojas de las series DIN-A y DIN-B que podrían utilizarse con cada uno de los siguientes porcentajes 25%, 59%, 119%, 141%, 400%?

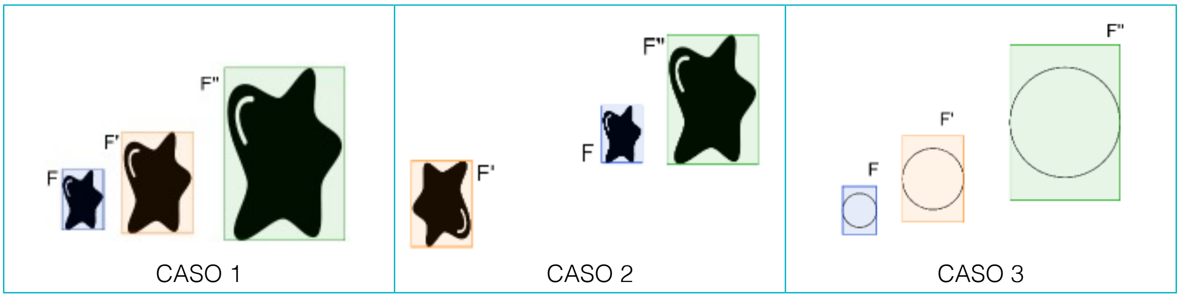
Nota: Elaboración propia

Esta tarea permite estudiar los porcentajes del panel frontal de la fotocopiadora en términos de potencias de $\sqrt{2}$ y calcularlos considerando la razón de una composición de homotecias. Por ejemplo, para pasar de A2 → B3, hay que considerar una hoja intermedia, como puede ser A3, entonces la razón de A2 → A3 → B3 será $k = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{2} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ (k ≅ 0,84…); y por lo tanto el porcentaje que debe seleccionarse en el panel de la fotocopiadora es 84%. Además, si se quiere averiguar qué hojas involucran la reducción de una imagen utilizando, por ejemplo, el 25% podemos considerar que la razón será $k = 0{,}25 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$ y permitiría pasar de An → An+4, y análogamente Bn → Bn+4.

A diferencia de la tarea anterior, con la 10 proponemos estudiar geométricamente la composición de homotecias y las diferentes posibilidades que se obtienen al componer dos homotecias, según la posición de las imágenes.

Tarea 10

Dadas las hojas F, F' y F'' tales que $F'=h_{k,O}(F)$ y $F''=h_{k',O'}(F')$ ¿Cómo podemos encontrar las diferentes posiciones de los centros O, O' y O'' y cuáles serían los respectivos valores de k, k' y k'', si las homotecias también verifican que $F''=h_{k'',O''}(F)$? ¿Cómo podemos justificar cada una de estas impresiones utilizando las funciones de la fotocopiadora?

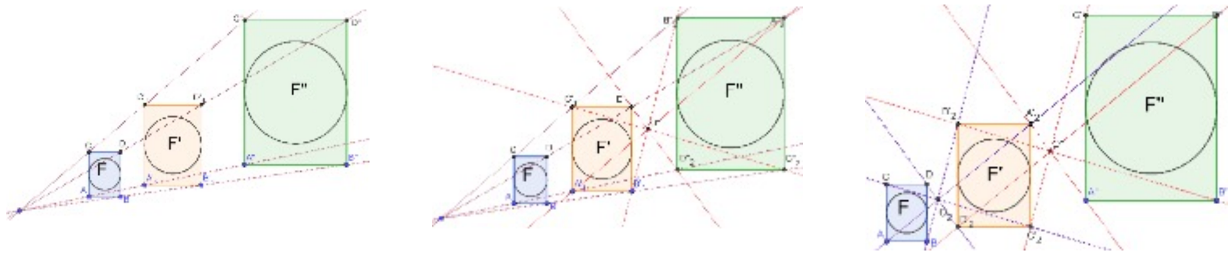


Nota: Elaboración propia

Para el caso 3, se observan tres posibilidades (Figura 9). La primera corresponde a dos homotecias directas e iguales, es decir, coinciden el centro y el valor de la razón, y por lo tanto los puntos homotéticos se encuentran al mismo lado respecto al centro de homotecia. Otra posibilidad es que una de las homotecias sea directa y la otra inversa, en cuyo caso los centros serán colineales y uno de ellos quedará en el centro de ambas hojas, y una de las hojas que se corresponde con la homotecia inversa fue colocada en la fotocopiadora al revés. Finalmente, si ambas homotecias son inversas, ambos centros son colineales y se encuentran en el centro de cada una de las hojas homotéticas; en la fotocopiadora, la hoja de partida y la hoja de salida poseen igual orientación, mientras que la que se utilizó entre ellas fue orientada diferente.

Figura 6. Posibilidades de las homotecias

Dos homotecias directas | Primera homotecia directa y la segunda no | Dos homotecias inversas



Nota: Elaboración propia

La tarea 11 profundiza el estudio de las hojas de la serie DIN vinculadas a la composición de homotecias y considera otro tipo de hoja, que utilizan las fotocopiadoras y hasta ahora no se había contemplado, como es el caso de la hoja oficio.

Tarea 11

Suponiendo que se dispone de una fotocopiadora que permite utilizar cualquier tipo de hoja, ¿cómo es posible ampliar o reducir una imagen en la fotocopiadora utilizando un porcentaje distinto al que se muestra en el panel? ¿Cómo es posible ampliar o reducir una imagen en la fotocopiadora sobre un formato de hoja oficio?

Nota: Elaboración propia

En esta tarea se estudia la composición de homotecias, combinando los distintos botones de la fotocopiadora, es decir las distintas razones de homotecia, para obtener la ampliación o reducción deseada. Es posible considerar las siguientes posibilidades, algunas de las cuales ya fueron estudiadas en las tareas previas:

- An→An+1 y Bn→Bn+1: $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- An+1→ An y Bn+1→Bn: $k = \sqrt{2}$
- Bn→$Ank = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ y An→Bn: $k = \sqrt[4]{2}$
- An→An+i y Bn→Bn+i: $k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^i$, con i los lugares que equidistan en la serie.
- An+i→An y Bn+i→Bn: $k = \left(\sqrt{2}\right)^i$, con i los lugares que equidistan en la serie.
- An→Bn+i: Considerando la composición An→Bn→Bn+i, se tiene $k = \frac{1}{\sqrt[4]{2^{2i-1}}}$.

Específicamente, se verifica para A3→B4 con $k = \frac{1}{\sqrt[4]{2^{2-1}}} \cong 84\%$

- Bn+i→An: $k = \sqrt[4]{2^{2i-1}}$, y se verifica para B4→A3
- Bn→An+i: $k = \frac{1}{\sqrt[4]{2^{1+2i}}}$ y se verifica para B3→A4
- An+i→Bn: $k = \sqrt[4]{2^{1+2i}}$ y se verifica para A4→B3

Para pasar, por ejemplo, de una hoja A4 a una oficio, seleccionamos el porcentaje que surge al considerar la razón entre los dos lados menores de ambas hojas, esto es 93%, que es la función de la fotocopiadora que hasta ahora no se había indagado. Si la imagen está en otro tamaño, bastará ampliar o reducir sobre una A4 y luego sobre la hoja oficio e ingresar manualmente el porcentaje en la fotocopiadora.

6. DISCUSIONES

Los REI vienen a resolver el problema de la pérdida de sentido y razón de ser de los saberes de matemática a reencontrar que, en general o habitualmente, los profesores muestran a sus alumnos en el aula, y éstos practican y reproducen lo que les fue mostrado en otros casos, pero se desconoce el por qué y para qué habría que estudiar un tal saber matemático. Como parte del proceso de ingeniería del REI, nos hemos propuesto una pregunta generatriz relativa al funcionamiento de la fotocopiadora, y no sólo basta con analizar los alcances y la pertinencia al contexto para el que el REI se piensa, sino que es necesario analizar qué saberes podrían reencontrarse y cuáles serían posible estudiar. Para garantizar un estudio en profundidad de geometría y específicamente homotecia, pensamos un conjunto de tareas que hemos diseñado para implementar el REI en la formación de profesores de Matemática de un ISFD de la provincia de Buenos Aires, con una doble intensión: por un lado acercar a los futuros profesores a una enseñanza en el marco del PICM en un curso de Didáctica de la Matemática, y por otro dar la oportunidad de reencontrar los saberes de geometría desde otro lugar, en dicho curso. Las tareas son relativas a las posibles preguntas que consideramos podrían desarrollarse según el MPR del REI, que derivan del estudio geométrico del problema (Q_3: ¿Cómo justificar geométricamente las condiciones de la hoja que debe considerarse para poder ampliar o reducir sobre ella una imagen, ocupando la misma superficie que en la hoja original?) y de otras preguntas que están vinculadas y corresponden al análisis de Q_1: ¿Cuáles son las condiciones para que pueda ampliarse o reducirse una imagen sobre una hoja cualquiera? y Q_2: ¿Cuáles son las condiciones de la hoja que debe considerarse para poder ampliar o reducir sobre ella una imagen, ocupando la misma superficie que en la hoja original?

- Derivadas de Q_1 y Q_2:
  - $Q_{1.2.1}$: ¿Cuáles son las condiciones para que una imagen pueda ampliarse o reducirse sobre un tamaño de hoja diferente, si la imagen ocupa toda la hoja?
  - $Q_{2.2}$: ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir la razón de proporción para que sobre la nueva hoja se pueda ampliar o reducir una imagen, ocupando la misma superficie en ambas hojas?
- Derivadas de $Q3$:
  - $Q_{3.1}$: ¿Cómo se relacionan geométricamente las hojas para que pueda realizarse una ampliación o reducción de una imagen conservando las características de la misma?
  - $Q_{3.2}$: Además de la proporción de sus lados correspondientes, ¿qué otras relaciones pueden establecerse entre los lados de las hojas homotéticas?
  - $Q_{3.7}$: ¿Qué tipo de hojas utilizan las fotocopiadoras?
  - $Q_{3.8}$: ¿Cómo se relacionan las dimensiones de las hojas de las diferentes series?
  - $Q_{3.10}$: ¿Qué otras relaciones existen entre dos copias realizadas por la fotocopiadora?

En la Tabla 2 se presenta un análisis que contrasta las preguntas Q_i y las obras O_k que pueden reencontrarse en cada tarea.

Tabla 2. OMs que podrían reencontrarse en cada tarea y preguntas Q_j que responden

Q_0: ¿Por qué una fotocopiadora puede realizar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma?			
Tarea	Preguntas Q_i que responde		Obras O_k
	Derivadas de Q_3	Derivadas de Q_1 y Q_2	
1	$Q_{3.7}$	$Q_{1.2.1}$	Porcentaje
2	$Q_{3.7}$ y $Q_{3.1}$	$Q_{1.2.1}$ y $Q_{2.2}$	Proporcionalidad. Porcentaje
3	$Q_{3.1}$, $Q_{3.2}$, $Q_{3.7}$ y $Q_{3.8}$		Proporcionalidad. Semejanza
4	$Q_{3.7}$ y $Q_{3.8}$		Proporcionalidad. Cálculo de media geométrica
5			Construcción con regla y compás de puntos y segmentos homotéticos, teorema de Thales, paralelismo entre rectas homotéticas, congruencia de ángulos internos de dos figuras homotéticas.
6	$Q_{3.1}$ y $Q_{3.8}$		Cálculo de la razón de homotecia, construcción con regla y compás de segmentos homotéticos.
7	$Q_{3.10}$		Homotecia directa e inversa. Simetría.
8	$Q_{3.1}$ y $Q_{3.10}$		Construcción del centro de homotecia. Homotecia directa e inversa. Razón de homotecia.
9	$Q_{3.8}$		Razones y porcentaje. Composición de homotecias y cálculo de su razón
10	$Q_{3.1}$ y $Q_{3.8}$		Construcción del centro de una composición de homotecias. Relación entre los tres centros de homotecia
11	$Q_{3.7}$ y $Q_{3.8}$		Composición de homotecia. Razón entre los lados homotéticos

Nota. Elaboración propia

El análisis de las tareas muestra la posibilidad de adaptar el REI para implementarlo en un curso de Didáctica de la Matemática para profesores en formación en un ISFD de la provincia de Buenos Aires, Argentina.

Además, dicho análisis permite sostener que el REI diseñado presenta características diferenciales respecto de otros previamente documentados (Nicasso y Bosch, 2021; Gaud y Minet, 2019; Rojas y Sierra, 2020; García, 2021, Lobo y Almouloud, 2023). En particular en este caso, poner el uso de un dispositivo real como es la fotocopiadora como generador del estudio a partir de Q_0 configura un medio con fuerte potencial problematizador que no sólo permitiría la cobertura integral de las OMs correspondientes a la cátedra de geometría métrica del profesorado, sino que podría incorporar vínculos con otras asignaturas que es el espíritu del PICM. Pero además los resultados se pueden poner en diálogo con otras investigaciones que evidencian una reducción de los saberes de geometría en la escuela secundaria (Bravo y Riofrío, 2024; Pérez y Guillén, 2007), e incluso su progresiva desaparición en el aula (Eugui, 2023). En este sentido, el REI propuesto se constituye como una alternativa que permite reintroducir la homotecia no como objeto aislado o monumentalizado, sino como respuesta a preguntas que exigen la reconstrucción de este saber junto con otras nociones de geometría y de otras áreas si se quisiera avanzar.

Por otro lado, introducir un REI en la formación de profesores, podría contribuir a transformar su concepción de la enseñanza por estar sometidos a un nuevo paradigma escolar y vivir esa experiencia en primera persona a la vez que podría contribuir a transformar la relación institucional con la geometría, dado que consideramos que el hecho de reducir y hasta eliminar la geometría de las clases de matemática responde a una decisión deliberada de los profesores, tal vez sea porque no han tenido oportunidad de que sea parte de su formación. El REI de la fotocopiadora en la formación de profesores permitiría reivindicar el estudio completo de la homotecia, articulado con otros saberes geométricos, a fin de que los futuros profesores puedan superar la idea de que los temas de geometría, y de otras áreas de la matemática, están descontextualizados, aislados y desarticulados entre sí. Así mismo, las 11 tareas que diseñamos muestran que sería posible utilizar el REI como recurso para desarrollar una enseñanza basada en preguntas y cuestionamientos en la formación de los profesores, reencontrando la OM homotecia y otras OMs de geometría que permiten justificar geométricamente cómo es posible que la fotocopiadora realice la ampliación o reducción de una imagen. Se espera ampliar las tareas que hemos diseñado para adaptar el REI a fin de estudiar con ellas una mayor cantidad de OMs y cubrir otros saberes del profesorado a la vez que se daría respuesta a otras Q_j que forman parte del MPR del REI.

7. CONCLUSIONES

En términos teóricos implementar un REI implica llevar una pregunta al aula, y generar procesos de estudio y de investigación a partir de la misma que permitan una cobertura lo más completa posible de las obras de un programa. Aquí sin embargo hemos diseñado un conjunto de tareas que harían funcionar el REI, pero que sólo podrán considerarse para ser utilizadas si la pregunta generatriz Q_0 da lugar a las preguntas derivadas para las cuáles específicamente se propone una tarea que “saca a la luz” la matemática implicada en el funcionamiento de la fotocopiadora. Este estudio a priori del REI, y el diseño de potenciales tareas a incluir en el aula, permite identificar los diferentes saberes matemáticos, y de geometría, que se podrían reconstruir con base en el cuestionamiento de la fotocopiadora.

Por otro lado, implementar un REI como el que proponemos en los cursos de formación de profesores permitiría a los estudiantes vivenciar una enseñanza por REI, “rompiendo” con la habitual y acercándolos a un nuevo paradigma, el PICM. Además, se espera que los futuros profesores adopten gestos de una enseñanza por investigación, invitándolos a cuestionarse sobre la matemática, particularmente la geometría que deben enseñar, y brindándoles herramientas para incorporar a sus futuras prácticas. La implementación de este REI permitirá generar resultados sobre su funcionamiento, y poner el recurso a disposición de profesores para utilizarlo tanto para enseñar geometría en el nivel medio o superior, como para dar a conocer en la formación de profesores las características del paradigma emergente en oposición al habitual.

8. REFERENCIAS

Barachet, F., Demichel, Y. & Noirfalise, R. (2007). Activites d'etude et de recherche (AER) pour dynamiser l'etude de la geometrie dans l'espace en classe de seconde. Petit x, (75), 34-49.

Bravo, F. & Riofrio, E. (2024). Clases constructivistas de Geometría. UISRAEL, 11(2), 159-172. https://doi.org/10.35290/rcui.v11n2.2024.1082

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad del mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. Journal of Research in Mathematics Education, 2(2), 161-182. http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. Gaceta, 20(1), 159-169.

Chevallard, Y. & Strømskag, H. (2022). Condições de uma transição para o paradigma do questionamento do mundo. Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático, 1, 27–58.

Chevallard, Y. & Strømskag, H. (2025). Institutional and epistemological conditions for a transition to the paradigm of questioning the world. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC), 20(NE), 1-17. https://doi.org/10.54343/reiec.v20iEspecial.514.

Cid, E., Muñoz, J. & Ruiz, N. (2020). La introducción de los REI en la formación de profesores: un ejemplo de REI-FP. Educação Matemática Pesquisa, 22(4), 646-660. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p.646-660

Eugui, N. (2023). Enseñanza de la geometría en la escuela secundaria: análisis de los diseños curriculares de los últimos 160 años [Tesis de Licenciatura]. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. https://www.ridaa.unicen.edu.ar/handle/123456789/4087

Ferreyra, M. (2021). La construcción de fórmulas: una articulación entre geometría y álgebra. Quintaesencia, 12(1), 103–114. https://doi.org/10.54943/rq.v12i1.41

Fraustro, G. (2014). Evolución en las medidas de los papeles y su estandarización. Revista Brasileira de Design da Informação, 11(2), 166-184. https://doi.org/10.51358/id.v11i2.321

García, D. (2021). Um percurso de estudo e pesquisa a distância em uma formação continuada de professores de matemática para o ensino de quadriláteros [Tesis de Doctorado]. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/23674

Gaud, D. & Minet, N. (2019). Parcours d'etude et de pecherche en Géométrie pour la classe de seconde. Petit x, (79), 49-70.

Laplace, E., Otero, M. & Llanos, V. (2024). El álgebra escolar y la modelización en la escuela secundaria a partir de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI). RevIn, 5, 1-25.

Lobo, R. & Almouloud, S. (2023). Percurso de estudo e pesquisa: um dispositivo de pesquisa e formação profissional. Educação Matemática Pesquisa, 25(2), 278-328. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i2p278-328

Moreira, M & Rosa, P. (2009). Subsidios Metodológicos para el Profesor Investigador en Enseñanza de las Ciencias. http://moreira.if.ufrgs.br/Subsidios12.pdf

Nicasso, R. & Bosch, M. (2021). Descripción y análisis de un Recorrido de Estudio e Investigación en geometría. Caminhos da educação matemática em revista, 11(1).

Pérez, S. & Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. En M. Camacho Machín, P. Flores Martínez, y P. Bolea Catalán (Eds.), Investigación en Educación Matemática XI (pp. 295-305). SEIEM.

Rabanedo, P. & Llanos, V. (2024). La homotecia en el tiempo: Transformaciones de este saber. VIII Jornadas de Educación Matemática y V Jornadas de Investigación en Educación Matemática.

Rabanedo, P., Llanos, V., Otero, M. & Gazzola, M. (2024). El REI "de la fotocopiadora" como propuesta para enseñar geometría: diseño y análisis a priori. V Congresso Paulista de Ensino de Ciências.

Reymonet, C. (2004). Un cadre experimental pour l'etude de la geometrie Au cycle 3 : le cas du parallelisme. Grand N, (73), 33-48.

Rojas, C. & Sierra, T. (2020). Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación. Educación Matemática, 33(1), 208-239. https://doi.org/10.24844/EM3301.08