



ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

MODELACIÓN MATEMÁTICA ESCOLAR DE LA ELIPSE EN CONTEXTO ASTRONÓMICO

SCHOOL MATHEMATICAL MODELING OF THE ELLIPSE IN AN ASTRONOMICAL CONTEXT

Karla Pacheco López

karla.pacheco2020@umce.cl

<https://orcid.org/0009-0007-0422-2929>

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Iván Pérez-Vera

ivan.perez@umce.cl

<https://orcid.org/0000-0003-2636-6521>

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

RESUMEN

Esta investigación presenta el diseño e implementación de una situación de aprendizaje para la enseñanza de la elipse, desarrollada desde un enfoque interdisciplinario que articula la matemática escolar con fenómenos astronómicos fundamentados en las leyes de Kepler. La propuesta se sustenta en una perspectiva de modelación matemática entendida como una práctica social de construcción de conocimiento y se desarrolla mediante una metodología cualitativa, a través de un estudio de casos en un contexto escolar. El objetivo es analizar cómo los estudiantes construyen significados sobre la elipse al vincularla con el movimiento planetario y cómo una situación de aprendizaje interdisciplinaria favorece aprendizajes significativos y una comprensión más profunda de este objeto matemático. El análisis de las producciones estudiantiles permite reflexionar sobre las estrategias de enseñanza implementadas y su aporte a los procesos de discusión, reflexión y resignificación conceptual. Finalmente, el estudio propone una alternativa contextualizada para la enseñanza de las cónicas y ofrece una experiencia didáctica replicable en otros contextos escolares.

Palabras Clave:*elipse, modelación matemática escolar, leyes de Kepler, interdisciplinariedad, astronomía*

ABSTRACT

This study presents the design and implementation of a learning situation for teaching the ellipse, developed through an interdisciplinary approach that connects school mathematics with astronomical phenomena grounded in Kepler's laws. The proposal is based on a perspective of mathematical modeling understood as a social practice of knowledge construction and is carried out using a qualitative case study in a school context. This study aims to analyze how students develop an understanding of the ellipse when it is linked to planetary motion, and how an interdisciplinary learning situation fosters meaningful learning and a deeper understanding of this mathematical object. The analysis of students' work enables reflection on the teaching strategies implemented and their contribution to processes of discussion, reflection, and conceptual reinterpretation. Finally, the study proposes a contextualized alternative for teaching conic sections and offers a didactic experience that can be replicated in other school contexts.

Keywords:*ellipse, school mathematical modeling, Kepler's laws, interdisciplinarity, astronomy*

1. ANTECEDENTES

La elipse constituye uno de los objetos fundamentales del estudio de las secciones cónicas en la matemática escolar y posee una relevancia significativa tanto desde el punto de vista geométrico como en su aplicación a diversos fenómenos científicos. En el currículum escolar chileno, la elipse es abordada junto con la circunferencia, la parábola y la hipérbola, y se presenta en distintos niveles y asignaturas como un objeto matemático clave para la comprensión de modelos geométricos y analíticos. Materiales oficiales del Ministerio de Educación de Chile y de la Unidad de Currículum y Evaluación (UCE) destacan, por ejemplo, que la elipse surge como la intersección de un cono recto con un plano inclinado, y promueven su estudio mediante el uso de ecuaciones cartesianas, modelos gráficos y contextos aplicados (UCE, s. f., p. 125). Asimismo, programas de estudio de tercer y cuarto año medio incorporan el análisis de órbitas elípticas de planetas como la Tierra y Marte, integrando herramientas de modelación y programación para representar dichos movimientos (UCE, 2021). En este sentido, el currículum escolar reconoce explícitamente la pertinencia de articular el estudio de la elipse con contextos astronómicos, como las leyes de Kepler y la explicación de fenómenos asociados a órbitas planetarias y eclipses.

Desde la literatura científica y didáctica, la enseñanza de la elipse ha sido ampliamente estudiada debido a las dificultades que presenta su aprendizaje cuando se aborda desde enfoques tradicionales centrados casi exclusivamente en su definición algebraica. En esta línea, diversas investigaciones han evidenciado que el tratamiento escolar de las cónicas tiende a privilegiar aspectos formales y procedimentales por sobre su comprensión conceptual y contextualizada. Por ejemplo, Bonilla y Parraguez (2012) muestran que la enseñanza de las cónicas suele reducirse a la manipulación de ecuaciones sin conexión con su significado geométrico o físico, mientras que Del Castillo (2004) identifica dificultades en la comprensión de sus propiedades cuando estas no se articulan con contextos significativos. Desde una perspectiva sociocultural, Pérez y Salazar (2025) señalan que el discurso matemático escolar presenta los objetos matemáticos como conocimientos acabados y centrados en procedimientos, lo que limita las posibilidades del estudiantado de construir, utilizar y resignificar el saber matemático. En consecuencia, este tipo de aproximaciones puede restringir la comprensión profunda del objeto matemático “elipse”, especialmente cuando se desvincula de contextos que le otorgan sentido.

Diversos autores advierten que esta aproximación limita la comprensión conceptual del objeto matemático al relegar otras representaciones relevantes, como la gráfica o la contextual. En respuesta a ello, se han propuesto estrategias didácticas que incorporan la resolución de problemas, el uso de software dinámico —como GeoGebra— y actividades contextualizadas, con el fin de favorecer aprendizajes significativos. Por ejemplo, Del Castillo (2004) destaca el uso de múltiples representaciones para favorecer la comprensión de las propiedades de la elipse, mientras que Osorio (2017) propone actividades mediadas por tecnología para su enseñanza. En la misma línea, Méndez et al. (2023) evidencian el potencial de herramientas digitales para la exploración de objetos geométricos, y Pérez y Salazar (2025) muestran cómo la modelación en contextos situados permite resignificar los objetos matemáticos más allá de su tratamiento procedimental. En esta línea, Del Castillo (2004) destaca la importancia de trabajar con múltiples registros de representación —gráfico, algebraico y contextual—, ya que estos favorecen la exploración de propiedades de la elipse y permiten avanzar hacia una comprensión más integral del objeto matemático. Asimismo, Osorio (2017) propone actividades orientadas a que los estudiantes comprendan propiedades como la suma constante de distancias a los focos, la excentricidad y los semiejes, mediante procesos de exploración guiada y uso de tecnología. Desde una perspectiva de modelación, Arrieta y Díaz (2015) sostienen que los objetos matemáticos adquieren sentido cuando son puestos en uso para intervenir fenómenos, mientras que Pérez y Salazar (2025) muestran que la modelación en contextos situados permite resignificar saberes matemáticos que habitualmente son enseñados de forma procedimental. En conjunto, estas investigaciones permiten sostener que la enseñanza de la elipse se ve fortalecida cuando se integra a contextos significativos y se articula con prácticas de modelación matemática escolar. Estas investigaciones coinciden en señalar que la enseñanza de la elipse se ve fortalecida cuando se integra a contextos significativos y se articula con prácticas de modelación matemática escolar.

Históricamente, la relación entre matemática y astronomía ha sido central para la construcción de modelos explicativos del movimiento planetario. Las leyes formuladas por Johannes Kepler a comienzos del siglo XVII marcaron un quiebre con la concepción circular del universo, al establecer que los planetas describen órbitas elípticas con el Sol situado en uno de sus focos. Este descubrimiento no solo consolidó la elipse como un objeto

matemático de gran relevancia científica, sino que también abrió la posibilidad de utilizar el contexto astronómico como un recurso pedagógico para introducir sus propiedades y definiciones. Desde una perspectiva educativa, trabajos como los de Murillo Silva (2012), Barrios (2016) y Ramírez y Reyes (2017) muestran que el estudio de las órbitas planetarias y de las leyes de Kepler puede constituirse en un contexto fértil para la enseñanza de la elipse y de las secciones cónicas. En particular, Ramírez y Reyes (2017) proponen abordar la primera ley de Kepler a partir de los elementos de la elipse, favoreciendo la articulación entre matemática y astronomía. Asimismo, Barrios (2016) presenta el uso de las leyes de Kepler como alternativa pedagógica para la enseñanza de las secciones cónicas, evidenciando su potencial en contextos educativos. En esta misma línea, Aguilera y Bolívar (2004) destacan que la práctica astronómica permite establecer relaciones entre contenidos matemáticos y fenómenos científicos, promoviendo una comprensión más contextualizada del aprendizaje.

En este escenario, la modelación matemática y la interdisciplina emergen como ejes articuladores para la enseñanza de la elipse. La modelación matemática es reconocida no solo como una herramienta para resolver problemas científicos, sino como un proceso que permite identificar variables relevantes, formular preguntas, traducir fenómenos al lenguaje matemático y construir modelos con sentido. Estudios recientes evidencian que las tareas de modelación en contextos interdisciplinarios promueven aprendizajes significativos y el desarrollo de habilidades críticas, al tiempo que permiten integrar la matemática con otras disciplinas como la física, la astronomía o la tecnología (Cabrera-Baquedano et al., 2022; Nakakoji y Wilson, 2020; Valdés, 2021). No obstante, la literatura también advierte que el diseño de estas tareas requiere preguntas claras y contextos cuidadosamente seleccionados para evitar una integración superficial entre disciplinas. En este sentido, Huincahue (2022) señala que la interdisciplina en educación matemática exige condiciones específicas de articulación entre saberes, ya que, de lo contrario, puede reducirse a una simple yuxtaposición de contenidos sin una integración conceptual real.

A partir de estos antecedentes, el objetivo de este artículo es reportar el diseño e implementación de una situación de aprendizaje orientada a la enseñanza de la elipse, utilizando las leyes de Kepler como contexto interdisciplinario para favorecer procesos de modelación matemática escolar y la articulación entre distintos modelos de repre-

sentación. En particular, se busca responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo contribuye la modelación matemática, en un contexto astronómico, a que los estudiantes construyan significados más profundos sobre la elipse y sus propiedades?

2. POSTURA TEÓRICA

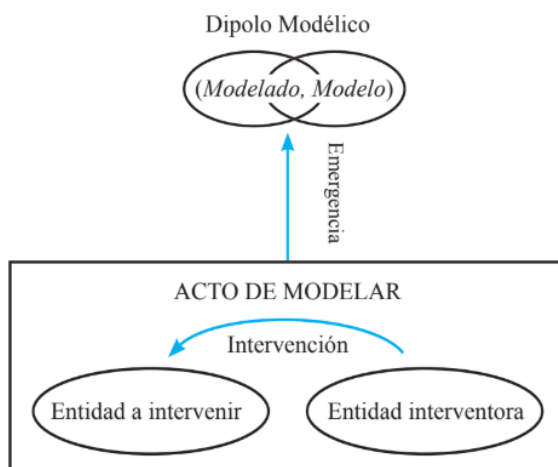
Para configurar los antecedentes y postura teórica, organizamos este apartado desde cuatro ejes que nos permitirán comprender de qué forma la modelación matemática escolar puede, en un contexto astronómico, contribuir a que los estudiantes construyan significados más profundos sobre la elipse y sus propiedades. Se presentan profundizaciones sobre entendimientos sobre la modelación desde la perspectiva sociocultural de la matemática educativa, la articulación entre matemática e interdisciplina, una profundización sobre la elipse en el contexto de las leyes de Kepler y finalmente una propuesta de estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje.

2.1 Modelación desde una perspectiva sociocultural

En este trabajo nos posicionamos desde la perspectiva de modelación propuesta por Arrieta y Díaz (2015), quienes conciben la modelación como una práctica de articulación intencionada entre dos entes: el modelo y lo modelado, con el propósito de intervenir un fenómeno. Desde esta mirada, la modelación no se reduce a la aplicación de técnicas matemáticas, sino que se configura como una práctica situada que permite describir, interpretar, predecir o evaluar fenómenos en contextos específicos.

En este marco, el modelo no existe de manera independiente, sino que adquiere dicho estatus cuando es puesto en uso por un sujeto para intervenir el fenómeno. Así, un objeto matemático se transforma en modelo en la medida en que es utilizado con una intencionalidad de intervención, y el fenómeno, a su vez, aporta significados particulares al objeto matemático en su nuevo rol. Esta relación se representa mediante el dipolo modélico, que articula modelo, fenómeno y acción de modelar, tal como se esquematiza en la Figura 1.

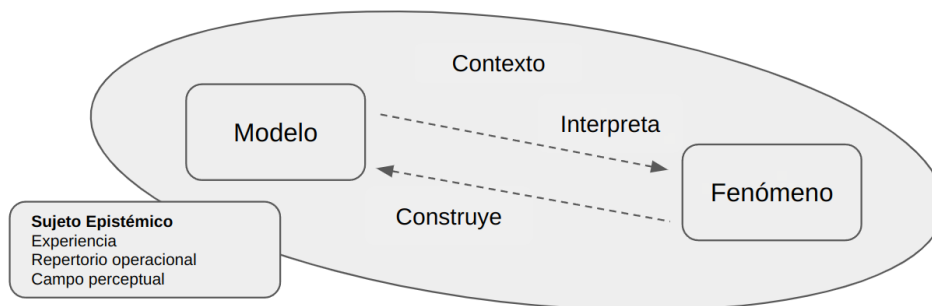
Figura 1. La modelación: El acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico



Nota. Arrieta y Díaz (2015, p.36)

Desde esta perspectiva, el acto de modelar implica necesariamente la participación de quien modela. En este sentido, retomamos la noción de sujeto epistémico propuesta por Carrasco et al. (2014), entendida como aquel que interviene el fenómeno a partir de la articulación entre el propio fenómeno, los modelos construidos y su experiencia. Estos autores sitúan dicha articulación en un espacio epistémico de figuración, caracterizado por dimensiones operacionales, experienciales y perceptuales, noción que en este trabajo ampliamos hacia un espacio epistémico de modelación, como se representa en la Figura 2.

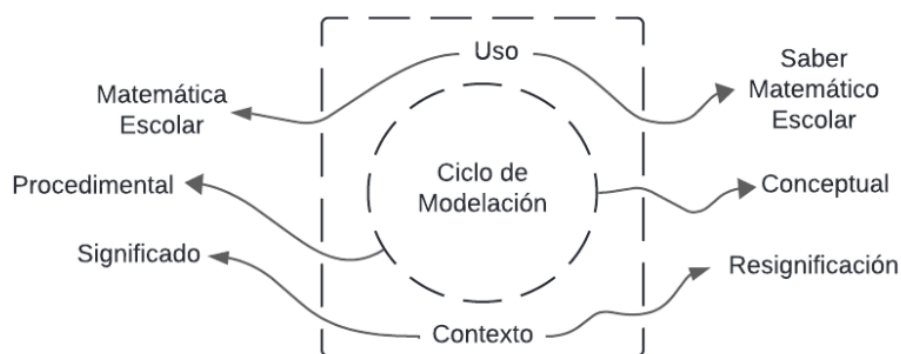
Figura 2. Espacio epistémico de modelación



Nota. Adaptado de Carrasco et al. (2014, p.368)

Desde una perspectiva sociocultural, entendemos que matemática y realidad no se presentan como dominios separados, sino que se articulan en un mismo proceso de construcción de significados. En este sentido, los contextos socioculturales aportan sentidos a los objetos matemáticos cuando estos son puestos en uso para intervenir fenómenos relevantes. Siguiendo a Pérez y Salazar (2024), sostenemos que la vivencia de un ciclo de modelación matemática escolar posibilita la reconfiguración de las herramientas matemáticas del estudiante, transformando lo procedimental en conceptual y resignificando los saberes escolares en función del contexto, tal como se sintetiza en la Figura 3.

Figura 3. Transformaciones al vivenciar un ciclo de modelación matemática escolar



Nota. Pérez y Salazar (2024, p.17)

En síntesis, en este trabajo asumimos la modelación matemática como una práctica social y cultural, en la que el sujeto epistémico, al intervenir un fenómeno mediante la articulación de diversos modelos, construye y resignifica significados matemáticos. Esta postura teórica orienta el diseño de la situación de aprendizaje y el análisis de las producciones estudiantiles, permitiendo comprender cómo la elipse adquiere nuevos sentidos al ser trabajada en un contexto astronómico interdisciplinario.

2.2 Interdisciplina en la enseñanza de la matemática

La interdisciplina, en el contexto de esta investigación, se concibe como una herramienta pedagógica clave para la enseñanza de la matemática. Según Morin (1997), el conocimiento escolar suele organizarse de manera fragmentada, producto de un aislamiento disciplinar que dificulta comprender el mundo en su complejidad, ya que cada disciplina se limita a su propio lenguaje y marcos teóricos. Esta fragmentación se refleja particularmente en la enseñanza tradicional de la matemática, frecuentemente presentada como un conjunto de verdades incuestionables y descontextualizadas (Valencia et al., 2008). Frente a ello, la interdisciplina abre un espacio que permite integrar saberes, establecer relaciones entre disciplinas y promover una formación con una mirada crítica y reflexiva.

En esta línea, Aguilera y Bolívar (2004) destacan la relación permanente entre la matemática y la astronomía, señalando que la elipse constituye un concepto fundamental para comprender fenómenos astronómicos y leyes físicas, como las leyes de Kepler, que explican el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Desde esta perspectiva, la matemática no solo actúa como una herramienta para formalizar y justificar predicciones científicas, sino que también contribuye a la construcción de aprendizajes significativos sobre fenómenos naturales. Esta articulación entre disci-

plinas no se limita a la astronomía, sino que históricamente también se ha manifestado en campos como la física, la química y la biología, donde los modelos matemáticos han sido esenciales para construir, explicar y validar conocimientos, ofreciendo diversos contextos para la enseñanza de contenidos matemáticos.

Asimismo, Falatoozadeh (2012) señala que la investigación y la enseñanza científica se han visto enriquecidas por nuevos conocimientos, destacando que el potencial de la interdisciplina radica en su capacidad para superar la fragmentación de las disciplinas científicas y del currículum escolar. En consecuencia, la literatura coincide en que la interdisciplina no solo enriquece el aprendizaje de la matemática, sino que también promueve el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo, así como la construcción activa del conocimiento por parte de los estudiantes. Esto se logra al situarlos en contextos que favorecen la articulación entre disciplinas, contribuyendo a una educación matemática más contextualizada, significativa y coherente con la complejidad de los fenómenos estudiados.

2.3 La elipse en el contexto de las leyes de Kepler

La elipse ha tenido un valor histórico fundamental en la astronomía, pues en este contexto el matemático y científico Johannes Kepler, a inicios del siglo XVII formuló tres leyes que describen el mo-

vimiento planetario. De Bernardini (2017) y Angulo (2018) destacan que la primera ley descubierta tiene como enfoque el que los planetas giran alrededor del sol en forma de elipse, donde uno de sus focos es el sol, mientras que el otro foco permanece vacío, asimismo esta primera ley define a la elipse como una curva plana en la que la suma de las distancias desde cualquiera de sus puntos a los focos es constantes e igual a la longitud mayor de la elipse. Este descubrimiento no solo significó un cambio en la concepción del universo, sino que le otorgó a la elipse un papel central como herramienta matemática capaz de describir el movimiento planetario.

Desde una perspectiva pedagógica, Del Castillo (2004) identificó que la comprensión de la elipse requiere utilizar múltiples representaciones las cuáles permiten que los estudiantes puedan experimentar con el objeto matemático, este tipo de actividades adquieren gran importancia porque permiten conectar un objeto matemático con un contexto real para los estudiantes, de esta forma la elipse cobra un nuevo sentido para los estudiantes más que una simple figura geométrica dentro de las secciones cónicas. Notemos que, esta experimentación de la elipse por medio del contexto astronómico es una vinculación directa entre la matemática y la astronomía, además que abre la posibilidad de ser aplicada en un contexto escolar por medio de las representaciones que menciona Del Castillo (2004); de esta forma vemos que se abre una posibilidad de presentar un enfoque interdisciplinario a los estudiantes lo que enriquece la comprensión de conceptos matemáticos más complejos como se mencionó en el apartado anterior.

Por ende, la elección del contexto astronómico para el diseño de esta propuesta de aprendizaje resulta ser acertada, pues es aplicable al contexto escolar y no solo otorga profundidad al estudio de la elipse, sino que también promueve aprendizajes significados al despertar la curiosidad del estudiante cuando se sitúa a la matemática en un escenario científico y culturalmente relevante.

3. ANTECEDENTES METODOLÓGICOS

3.1 Enfoque y diseño de investigación

La presente investigación se basa en un estudio de carácter cualitativo utilizando la metodología de estudio de casos como método investigativo. Este tipo de método responde al objetivo general de este trabajo de estudio, pues según Sampieri et

al. (1991) esta metodología es pertinente cuando se busca una comprensión general del estudio, es decir que busca analizar lo que comprenden los estudiantes cuando, en este caso, se someten a una situación didáctica en torno a la articulación que existe entre la matemática y la astronomía.

3.2 Instrumentos de recolección de datos

Para la recolección de datos se diseñó un cuestionario estructurado como situación de aprendizaje, siguiendo la propuesta metodológica de Balda (2022). Previo a la implementación reportada en este estudio, dicho instrumento fue sometido a un proceso de pilotaje con un grupo de 10 estudiantes de una escuela de la comuna de Pichilemu, quienes participaron en una actividad desarrollada en dependencias de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE). Este pilotaje permitió identificar dificultades en la comprensión de las consignas, así como ajustar la redacción de las preguntas y la secuencia de actividades.

De manera complementaria, la investigadora principal mantuvo un diario de campo (Sampieri et al., 1991), en el que consignó observaciones y reflexiones sobre el proceso de implementación, aportando una perspectiva interpretativa que permitió contextualizar y enriquecer el análisis de las producciones estudiantiles.

El análisis se realizó mediante un enfoque interpretativo de las producciones estudiantiles, atendiendo a la emergencia de significados, al tránsito entre modelos (tabular, gráfico y algebraico) y a los momentos del ciclo de modelación matemática escolar que se evidencian en las respuestas y construcciones desarrolladas por los estudiantes.

3.3 Diseño de la situación de aprendizaje

La situación de aprendizaje fue diseñada siguiendo la estructura de cinco fases propuesta por Balda (2022): introducción, exploración, procedimental, consolidación y ejercitación. Esta estructura permitió organizar las actividades de manera progresiva, situando la elipse en un contexto astronómico y favoreciendo el tránsito entre distintos modelos matemáticos en un proceso de modelación escolar.

Cada fase se operacionaliza a través de actividades específicas que articulan objetivos, descripciones y preguntas orientadoras, tal como se pre-

senta en la Tabla 1. En conjunto, las actividades buscan activar el interés inicial mediante el contexto de las leyes de Kepler, promover la exploración de datos astronómicos, construir modelos tabulares, gráficos y algebraicos de la elipse, validar propiedades fundamentales del objeto matemático y, finalmente, aplicar los conocimientos construidos en ejercicios escolarizados.

De este modo, la situación de aprendizaje favorece aprendizajes significativos sobre la elipse, integrando la matemática escolar con un fenómeno científico relevante y promoviendo la articulación entre distintos modelos en un contexto interdisciplinario.

Tabla 1. Diseño de la situación de aprendizaje

Actividades	Objetivo de la actividad	Descripción de la actividad	Pregunta planteada en el cuestionario
1. Introducción	Activar el interés del estudiante para introducir la elipse en su contexto astronómico.	Se les presenta a los estudiantes quién fue Johannes Kepler y su aporte a la astronomía con las 3 grandes leyes que él planteó en la ciencia.	¿Qué crees que permiten describir estas trayectorias propuestas por Kepler?
2. Exploración	Guiar al estudiante en la observación e interpretación de información entregada sobre las órbitas planetarias.	Se les enseña a los estudiantes las herramientas que posee la página web, por ejemplo, cómo calcular distancias desde el planeta al sol en ciertos días, para así extraer datos.	¿Qué crees que podríamos necesitar para representar la trayectoria que observaste en las imágenes o simulador?
3. Procedimental	Analizar y construir diferentes modelos de representación de la elipse.	Se le entregan datos a los estudiantes para que puedan analizar un modelo tabular y construir un modelo gráfico y algebraico de la elipse.	¿Qué sentido tiene organizar estos datos en una tabla antes de graficarlos? ¿Qué puedes entender mejor así? ¿Qué puedes inferir sobre la forma de la órbita si los focos están muy cerca uno del otro? ¿Qué aprendiste sobre la relación entre la forma de la figura y los números que aparecen en la ecuación?
4. Consolidación	Fomentar la discusión colectiva para validar los modelos construidos.	Comparar los distintos modelos creados por los estudiantes para observar similitudes.	¿La suma se mantuvo constante en todos los puntos que se midieron? ¿Por qué crees que ocurre eso? ¿Qué indica que la figura trazada sí es una elipse?
5. Ejercitación	Aplicar el conocimiento construido en ejercicios escolarizados.	Aplicar las propiedades de la elipse en ejercicios escolarizados.	¿Qué información de la órbita puedes obtener a partir de la ecuación? Menciona al menos dos elementos. Sabiendo que la distancia focal es de 11,9 millones de km, ¿Cuál es la excentricidad estimada? ¿Qué diferencias puedes ver entre la excentricidad de Mercurio y la Tierra? ¿Qué error observas que cometió el estudiante? ¿A qué crees que se debe?

3.4 Participantes y contexto

Este estudio contó con la participación de estudiantes del sistema educativo regular chileno, correspondientes a tercero y cuarto año medio de un establecimiento educacional de la comuna de San Ramón, en la Región Metropolitana. La muestra estuvo conformada por 15 participantes, quienes se organizaron en 3 grupos de trabajo de entre 2 y 4 integrantes para resolver el cuestionario diseñado. Para el análisis se consideraron las producciones de aquellos grupos que avanzaron hasta la actividad 3.3 de la guía de implementación, ya que estas evidenciaban un desarrollo suficiente del proceso de modelación propuesto.

4. RESULTADOS

En este apartado se presentan los resultados correspondientes a los grupos que participaron en la implementación y que avanzaron hasta la actividad 3.3 de la guía. Asimismo, se desarrolla un análisis descriptivo y teórico de sus producciones, con base en las respuestas elaboradas por los participantes.

4.1 Resultado y análisis de la actividad N°1

En la primera actividad se presentó a los estudiantes la figura de Johannes Kepler y su aporte a la astronomía y la matemática. A partir de este contexto, se les planteó la pregunta: ¿Qué crees que permite predecir las trayectorias descubiertas por Johannes Kepler? Las respuestas evidencian diversas aproximaciones al fenómeno, predominantemente desde una perspectiva física.

El Grupo 1 relacionó la distancia entre el Sol y la Tierra con la temperatura del planeta, destacando consecuencias climáticas del movimiento orbital. El Grupo 2 asoció las trayectorias con la posibilidad de anticipar eventos futuros, como choques de meteoritos, reconociendo implícitamente la noción de predicción, aunque sin referirse a la forma de la trayectoria. Por su parte, el Grupo 3 mencionó fenómenos como la hora y el clima, vinculándolos de manera indirecta con la posición de la Tierra, sin aludir explícitamente a la órbita ni a la elipse (Tabla 2).

Tabla 2. Respuestas transcritas de los estudiantes de la actividad N°1

Grupo	Respuesta
Grupo 1	"Saber la temperatura del planeta, entre más lejos más frío y entre más cerca del sol más temperatura"
Grupo 2	"Podemos predecir el choque con los meteoritos"
Grupo 3	"El ciclo de la hora y el clima"

En conjunto, las respuestas muestran dificultades para vincular el fenómeno astronómico con el objeto matemático central del estudio. Predomina una interpretación centrada en explicaciones físicas, sin referencias a la forma geométrica de las trayectorias. Estos resultados permiten identificar el conocimiento previo de los estudiantes y evidencian la necesidad de articular explícitamente, desde el inicio, el contexto astronómico con la matemática escolar, como base para el posterior tránsito hacia la comprensión de la elipse.

4.2 Resultado y análisis de la actividad N°2

En la segunda actividad se utilizó el simulador de la NASA Eyes on the Solar System para explorar datos de planetas y satélites. A partir de ello, se preguntó: ¿Qué crees que podríamos necesitar para representar la trayectoria que observaste en las imágenes o en el simulador?

El Grupo 1 señaló la necesidad de conocer todas las distancias entre la Tierra y el Sol, reconociendo que estas varían y que tal información sería esencial para graficar la órbita. Esta respuesta evidencia un avance hacia la comprensión de la trayectoria elíptica, pues introduce el concepto de distancia como variable matemática y plantea la recolección de datos como requisito para representar el movimiento. En contraste, los Grupos 2 y 3 respondieron apelando a la gravedad del Sol y a la fuerza de atracción, centrando su explicación en aspectos físicos más que en elementos matemáticos de la trayectoria.

Tabla 3. Respuestas transcritas de los estudiantes de la actividad N°2

Grupo	Respuesta
Grupo 1	"Habría que conocer todas las distancias de la tierra al sol, por si disminuye o aumenta"
Grupo 2	"La gravedad del sol"
Grupo 3	"La fuerza de atracción"

El aporte del Grupo 1 constituye un indicio temprano de modelación matemática: como destacan Cabrera-Baquedano et al. (2022), los ciclos de modelación promueven aprendizajes significativos al integrar herramientas tecnológicas con la identificación de variables relevantes. En este caso, el simulador permitió visualizar la variación de distancias y conectar la astronomía con el análisis matemático.

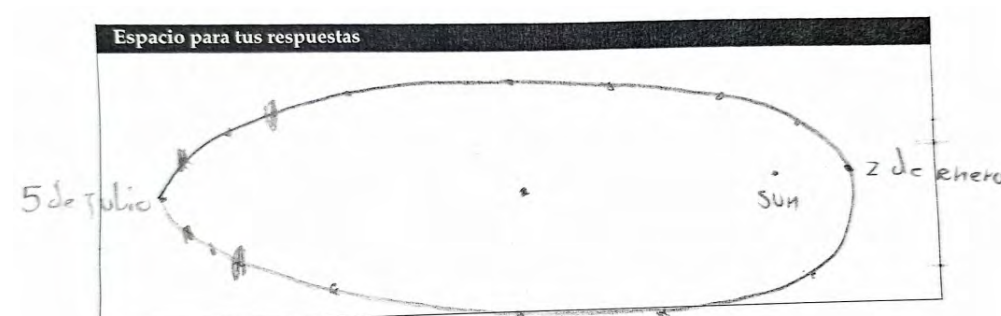
En síntesis, mientras la mayoría de los estudiantes mantuvo un enfoque físico, el Grupo 1 logró articular nociones matemáticas en torno a la variación de la distancia, mostrando una progresión inesperada en el tránsito hacia aprendizajes significativos sobre la elipse y su representación.

4.3 Resultado y análisis de la actividad N°3

En la primera parte de la Actividad 3 se entregaron datos extraídos del simulador de la NASA para organizar en tablas, graficar puntos de la órbita y analizar el modelo algebraico de la elipse. Ante la pregunta ¿Qué sentido tiene organizar estos datos en una tabla antes de graficarlos?, los grupos respondieron de manera diversa.

El Grupo 1 no lo expresó de forma escrita, pero representó gráficamente la órbita a partir de los datos, mostrando que comprendieron cómo los valores tabulares permitían ubicar puntos y construir la curva. El Grupo 2 explicó que ordenar los datos les ayudaba a ubicar la Tierra en su órbita y reconocer en qué meses estaba más cerca o más lejos del Sol, evidenciando noción de variación de distancias. El Grupo 3 no entregó respuesta.

Tabla 4. Respuestas de los estudiantes de la actividad N°3.1

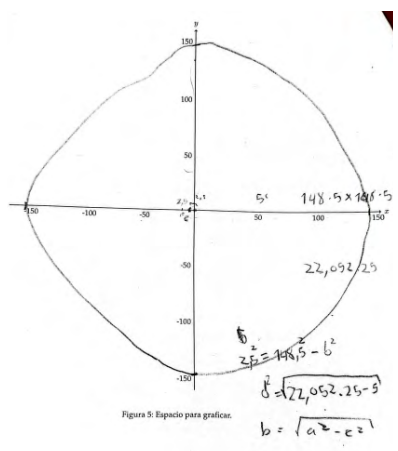
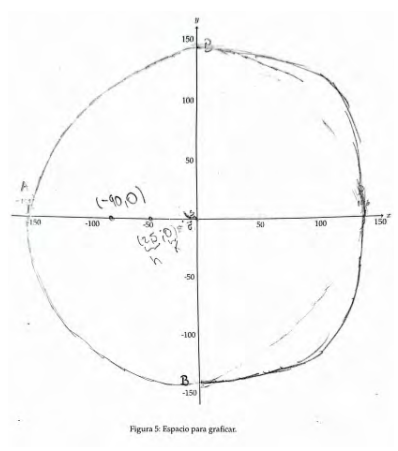
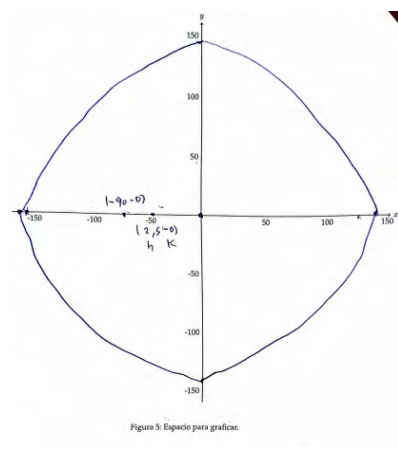
Grupo	Respuesta
Grupo 1	
Grupo 2	“Me sirve tenerlos ordenados para poder ubicar la tierra y en donde va orbitando, en que meses está más cerca o más lejos del sol”

Estos resultados muestran progresos en la transición entre datos tabulares y representaciones gráficas. En el caso del Grupo 1, su gráfica permitió vincular fechas específicas de perihelio y afelio, ejemplificando que las gráficas no solo representan fenómenos sino que también resignifican conceptos matemáticos (Cordero y Suárez, 2010). Tal conexión fortalece la relación entre matemática y astronomía (Aguilera y Bolívar, 2004). El Grupo 2, por su parte, articuló explícitamente el vínculo entre tabla y fenómeno, mostrando que las tablas actuaban como “dipolos modélicos” que median entre fenómeno y representación en línea con lo propuesto por Arrieta y Díaz (2015).

En síntesis, los Grupos 1 y 2 avanzaron hacia una comprensión con herramientas matemáticas de la órbita, mientras que el Grupo 3 no logró reconocer la utilidad de los datos para construir significados en torno a la elipse.

En la segunda parte de la actividad, los estudiantes recibieron instrucciones para construir la órbita de la Tierra en torno al Sol. A partir de ellas elaboraron sus gráficas, que se presentan a continuación.

Tabla 5. Gráficos de los estudiantes

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
		

Luego se les preguntó: ¿Qué puedes inferir sobre la forma de la órbita si los focos están muy cerca uno del otro? Las respuestas textuales se recogen en la Tabla 6.

Tabla 6. Respuestas transcritas de los estudiantes de la actividad 3.2

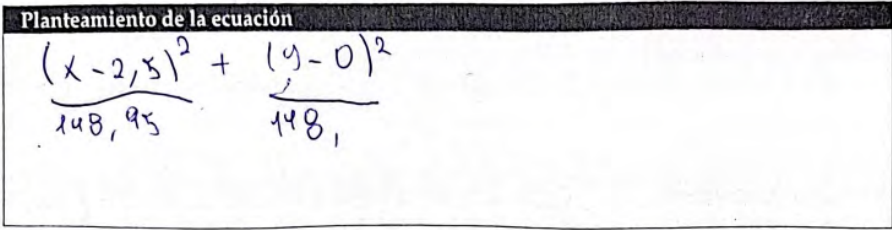
Grupo	Respuesta
Grupo 1	"Parece un círculo al tener los focos muy cercanos"
Grupo 2	"Según la distancia cambiaría la forma de la órbita, en la imagen de ejemplo los puntos estaban más lejos y la órbita era ovalada y en el plano cartesiano los puntos están más juntos y hacen una forma más circular"
Grupo 3	"Si están más cerca los focos es círculo y si están más lejos es ovalado"

Los tres grupos coincidieron en que, a medida que los focos se aproximan, la órbita adquiere una forma más cercana a la de un círculo. El Grupo 1 expresó esta idea de manera breve, señalando directamente la semejanza con una circunferencia. El Grupo 2 elaboró una explicación más detallada, indicando que la distancia entre los focos determina la forma de la órbita: cuando están próximos, la curva parece circular y, al separarse, adopta una forma más ovalada, apoyándose en ejemplos trabajados previamente en la guía. Por su parte, el Grupo 3 sostuvo que, si los focos están cerca, la trayectoria es un círculo, aunque sin distinguir que el círculo no posee focos, sino un único centro.

Estos resultados evidencian avances en la construcción de significados sobre la elipse. En el Grupo 1 se observa un tránsito desde los datos hacia la representación gráfica, proceso que fortalece la comprensión conceptual en contextos dinámicos (Arrieta y Díaz, 2015). El Grupo 2 logró una articulación más elaborada entre fenómeno y representación, configurando un espacio epistémico de figuración que permite resignificar el fenómeno astronómico mediante la gráfica (Carrasco, Díaz y Buendía, 2014). En la última parte de la Actividad 3, los estudiantes plantearon el modelo algebraico de la órbita terrestre a partir de la ecuación general de la elipse, cuyos resultados se presentan en la Tabla 7.

Tabla 7. Modelos algebraicos de los estudiantes

Grupo	Respuesta
Grupo 1	Planteamiento de la ecuación $\frac{(x-25)^2}{151^2} + \frac{(y-148.5)^2}{146.5^2} = 1$ Pregunta
Grupo 2	Planteamiento de la ecuación $\frac{(x-2.5)^2}{148.95^2} + \frac{(y-0)^2}{148.92^2} = 1$

Grupo 3	 Planteamiento de la ecuación $\frac{(x-2,5)^2}{148,95} + \frac{(y-0)^2}{148,}$
---------	--

Posteriormente, se les preguntó: ¿Qué aprendiste sobre la relación entre la forma de la figura y los números que aparecen en la ecuación? Las respuestas se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8. Respuestas transcritas de los estudiantes de la actividad N°3.3

Grupo	Respuesta
Grupo 1	“Con los datos de la distancia mayor y menor pude sacar el centro y eso me ayudó a sacar la fórmula para entender la elipse”
Grupo 2	“Los datos y el plano cartesiano están relacionados de forma que ambos ayudan a la ubicación en el plano, si los números ya están ubicados ayudan a hacer el plano y si solo el plano está ayuda a los números”

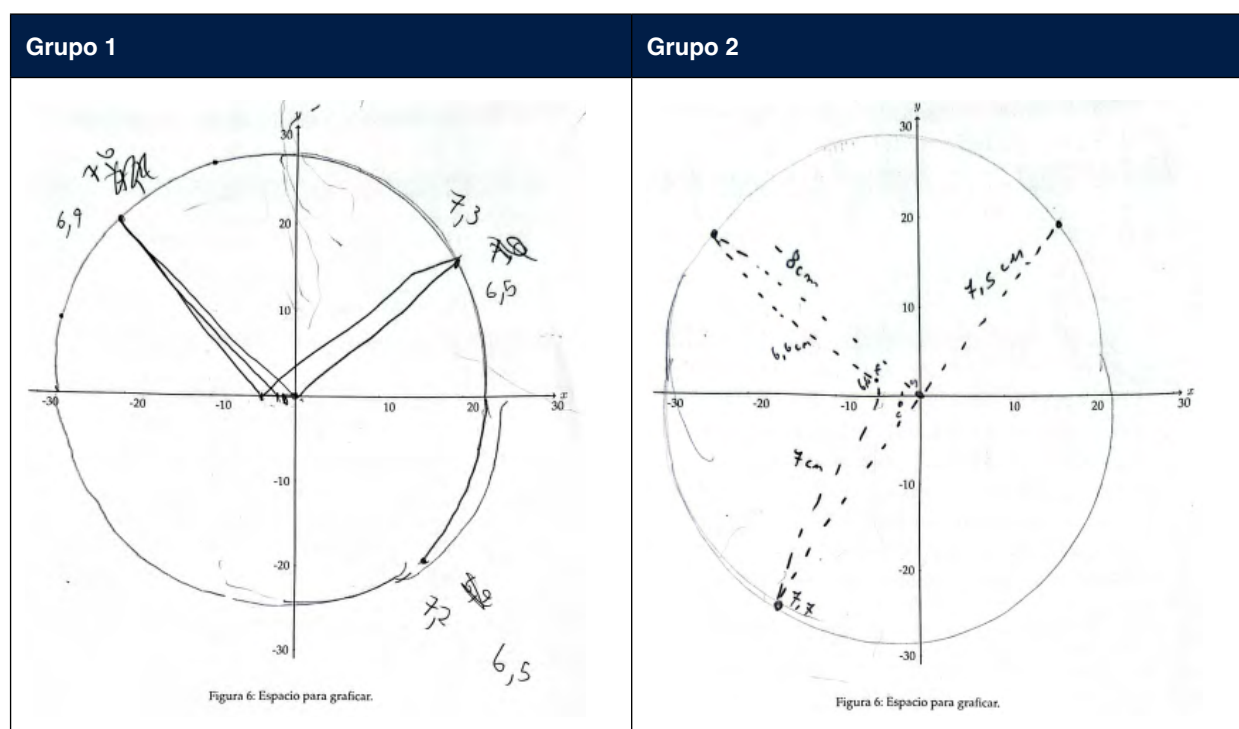
El Grupo 1 indicó que, a partir de las distancias mayor y menor, lograron ubicar el centro y comprender la fórmula de la elipse. El Grupo 2 destacó la relación bidireccional entre el plano cartesiano y los datos, señalando que ambos se apoyan mutuamente. El Grupo 3 no entregó una respuesta.

Estos resultados muestran que los Grupos 1 y 2 fueron capaces de transitar entre los modelos gráfico y algebraico, estableciendo vínculos significativos. Tal relación refleja lo señalado por Valdés (2021), quien plantea que la modelación permite traducir fenómenos reales al lenguaje matemático, y por Cordero y Suárez (2010), quienes subrayan que las gráficas actúan como conocimientos en sí mismos, facilitando conexiones entre teoría y práctica. En cambio, el Grupo 3 avanzó parcialmente, sin consolidar la bidireccionalidad entre representaciones, lo que confirma un ritmo más lento en la construcción de significados respecto a los demás grupos.

4.4 Resultado y análisis de la actividad N°4

En esta actividad, los estudiantes validaron la construcción de la elipse utilizando dos alfileres y un hilo. Los modelos obtenidos por los Grupos 1 y 2 se presentan en la Tabla 9. El Grupo 3 no presentó respuesta.

Tabla 9. Gráficos de los estudiantes



Posteriormente, midieron segmentos desde diferentes puntos de la elipse hasta los focos y respondieron a las siguientes preguntas: ¿Esa suma se mantuvo constante en todos los puntos que mediste? ¿Por qué crees que ocurre eso? y ¿Qué indica que la figura trazada sí es una elipse? Las respuestas textuales se presentan en la Tabla 10.

Tabla 10. Respuestas transcritas de los estudiantes de la actividad N°4

Grupo	Respuesta
Grupo 1	“Los puntos de foco, el círculo tiene uno que es el centro mientras que en la elipse tiene 2, ocurre porque la distancia de los focos son iguales y cuando ponemos un punto forma un triángulo lo que hace que siempre da el mismo resultado”
Grupo 2	“1. La suma es parecida, no es tanta diferencia y esto es debido a la elipse, que es simétrico el círculo 2. Debido a que la suma de F y S es constante”

El Grupo 1 señaló que, a diferencia del círculo, la elipse posee dos focos y que al unirlos con un punto se forma un triángulo que siempre da el mismo resultado. Aunque no formularon explícitamente la propiedad de la suma constante, su razonamiento geométrico muestra una comprensión en desarrollo de este concepto fundamental. El Grupo 2 reconoció directamente dicha propiedad, aunque la describió como “parecida” debido a imprecisiones de la construcción manual. Su respuesta, aunque ambigua al mezclar nociones de simetría, refleja un avance hacia la justificación geométrica. El Grupo 3 no entregó respuesta.

Estos hallazgos evidencian un momento clave de aprendizaje: la validación de un modelo geométrico a partir de una propiedad matemática. Tal como señalan Pérez (2020) y Cordero y Suárez (2010), el diálogo entre modelos tabulares, gráficos y algebraicos enriquece la construcción social del conocimiento matemático. Además, la propiedad de la suma constante conecta el objeto matemático con fenómenos astronómicos, en línea con Valencia et al. (2008) y Ramírez y Reyes (2017), favoreciendo aprendizajes significativos y un puente interdisciplinario entre matemática y astronomía.

4.5 Resultado y análisis de la actividad N°5

La última actividad tuvo como propósito integrar los aprendizajes construidos en las fases previas mediante tres ejercicios: algebraico, tabular y gráfico. El objetivo fue evaluar si los estudiantes eran capaces de movilizar representaciones múltiples para comprender la elipse.

Análisis algebraico: Se presentó la ecuación $\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ y se solicitó identificar información de la órbita. Las respuestas se muestran en la Tabla 11.

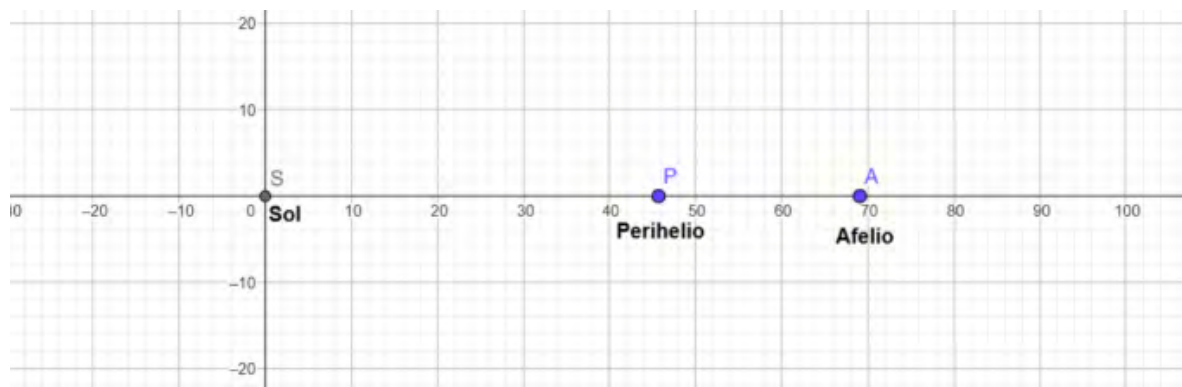
Tabla 11. Respuestas transcritas de los estudiantes de la actividad N°4

Grupo	Respuesta
Grupo 1	"x=5, eje menor = 5 y=-2, eje mayor = 4"
Grupo 2	"El semieje mayor (6) El menor (5) El centro (5,-2)"

El Grupo 1 identificó correctamente el centro, aunque presentó errores en el cálculo de los semiejes. El Grupo 2 logró determinar centro y semiejes de manera más formal y precisa, mostrando un tránsito hacia un lenguaje matemático más elaborado. El Grupo 3 no entregó respuesta. Estos resultados ponen en evidencia distintos niveles de avance en la relación entre ecuación y elementos geométricos: algunos estudiantes permanecen en una etapa inicial de conexión, mientras que otros alcanzan mayor formalización.

Análisis tabular y gráfico: En estos apartados no se registraron respuestas escritas, lo que limitó la posibilidad de análisis. Sin embargo, este hecho constituye un hallazgo en sí mismo, pues revela que los estudiantes avanzaron con mayor seguridad en el modelo algebraico, mientras que las tareas que exigían articular datos numéricos y representaciones gráficas resultaron más complejas. No obstante, un estudiante logró representar la órbita de Mercurio utilizando los datos de la tabla, obteniendo la gráfica que se muestra en la Figura 4.

Figura 4. Representación la órbita de Mercurio utilizando los datos de la tabla



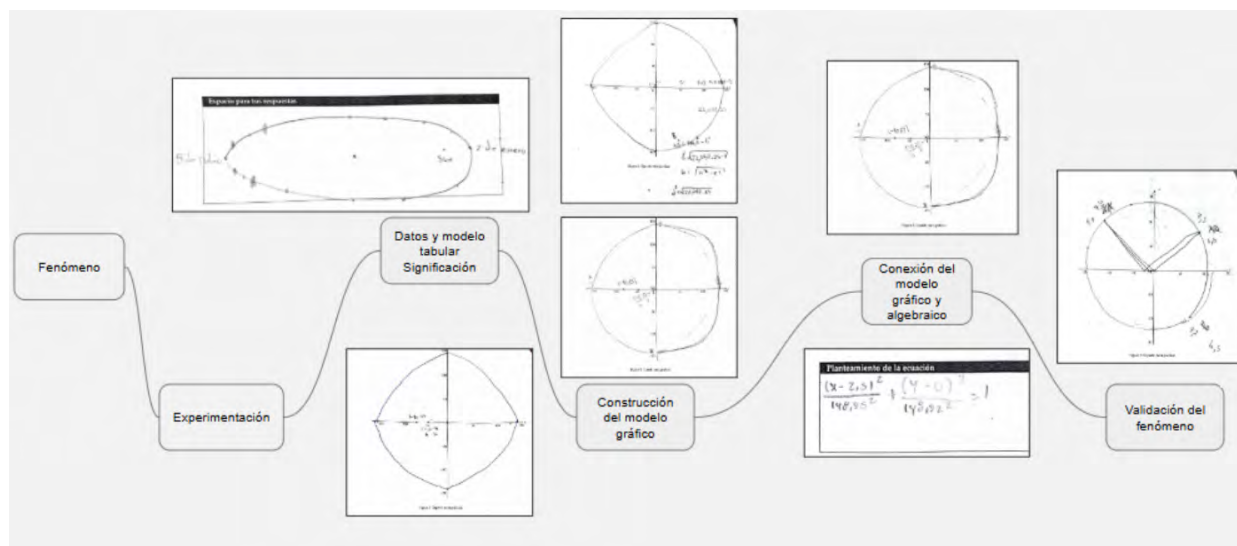
Nota. Producciones de estudiantes

En síntesis, la actividad 5 evidenció progresos relevantes en el análisis algebraico, aunque acompañados de errores de cálculo, y dificultades en el tránsito hacia lo tabular y gráfico. Estos resultados confirman la importancia de trabajar con variedad de modelos para favorecer la resignificación del concepto de elipse (Arrieta y Díaz, 2015) y muestran que los estudiantes requieren apoyos adicionales para articularlos en un mismo proceso de modelación.

4.6 Análisis de los hallazgos

En este apartado se presenta una síntesis de los resultados obtenidos en la implementación, integrando tanto los aspectos descriptivos como los teóricos. Con este fin, se incluye la Figura 5, que resume la ruta de modelación vivido por los estudiantes durante la guía, mostrando cómo progresaron desde la observación del fenómeno astronómico hasta la validación geométrica y algebraica de la elipse.

Figura 5. Ruta de construcción del ciclo de modelación de la elipse en contexto astronómico



Nota. Elaboración Propia

El proceso de implementación se inició con la presentación del fenómeno astronómico a partir de las leyes de Kepler, utilizando el simulador Eyes on the Solar System (NASA), lo que permitió a los estudiantes explorar distintas órbitas planetarias. En las primeras actividades, las respuestas se centraron principalmente en explicaciones de carácter físico —como temperatura, gravedad o clima—, con escasas referencias a trayectorias o propiedades geométricas de la elipse. Esta dificultad inicial resulta coherente con lo señalado por Morin (1997), quien advierte que la enseñanza escolar tiende a presentar los saberes de manera fragmentada, limitando la articulación entre disciplinas.

A medida que avanzó la implementación, algunos grupos comenzaron a reconocer la variación de la distancia entre la Tierra y el Sol como un elemento relevante para representar la trayectoria orbital, evidenciando un tránsito desde explicaciones causales hacia una aproximación propia de la modelación matemática. En este sentido, el uso de datos para construir gráficos permitió extraer propiedades de la elipse, en concordancia con lo planteado por Cabrera-Baquedano et al. (2022) sobre el potencial formativo de los ciclos de modelación.

En particular, la Actividad 3 favoreció el tránsito entre modelos tabulares, gráficos y algebraicos, estableciendo relaciones bidireccionales entre representaciones. Este proceso puede interpretarse a la luz de los dipolos modélicos (Arrieta y Díaz, 2015), donde las tablas operaron como entidades mediadoras entre fenómeno y modelo. Asimismo, en la Actividad 4, la construcción empírica de la elipse con hilo y alfileres permitió validar la propiedad de la suma constante, fortaleciendo el vínculo entre matemática escolar y contexto astronómico.

Finalmente, la Actividad 5 mostró distintos niveles de formalización algebraica, evidenciando un tránsito progresivo hacia una comprensión integrada y significativa de la elipse, donde la modelación y la interdisciplinariedad se consolidan como ejes del aprendizaje.

5. DISCUSIONES

La implementación de la situación de aprendizaje evidenció una progresión en la construcción de significados asociados a la elipse y su articulación con el contexto astronómico fundamentado en las leyes de Kepler. En las primeras actividades, particularmente en la Actividad 1, las respuestas de los estudiantes se centraron en explicaciones de carácter físico, asociando las trayectorias planetarias con factores como la temperatura, la gravedad o el clima. Si bien estas interpretaciones no son incorrectas, carecen de un sentido geométrico explícito, lo que pone de manifiesto una ausencia inicial de vínculo entre el fenómeno astronómico y el objeto matemático de estudio. Esta fragmentación resulta coherente con lo planteado por Morin (1997), quien advierte que la enseñanza escolar tiende a presentar los saberes de manera aislada, dificultando la construcción de relaciones entre disciplinas.

En la Actividad 2 se observa un primer indicio de articulación con la matemática, cuando algunos estudiantes comienzan a reconocer la variación de la distancia entre la Tierra y el Sol como un elemento relevante del fenómeno. Esta identificación permitió comprender que dicha variación puede registrarse y representarse, abriendo paso a la construcción de la trayectoria orbital. Sin embargo, este avance fue logrado solo por uno de los grupos, mientras que los demás mantuvieron explicaciones centradas en lo físico, evidenciando distintos ritmos en la construcción del conocimiento.

La Actividad 3 marcó un punto de inflexión en el proceso, ya que los estudiantes debieron organizar datos en un modelo tabular y establecer relaciones con representaciones gráficas y algebraicas. En esta etapa, algunos grupos lograron articular estos modelos y reconocer la órbita planetaria como una elipse, mientras que otros se limitaron a construir representaciones gráficas sin consolidar su vínculo con el modelo algebraico. Este tránsito entre modelos puede interpretarse desde la perspectiva de la modelación propuesta por Arrieta y Díaz (2015), en la que los modelos no operan de manera aislada, sino que se articulan en dipolos modélicos que configuran una red de modelos para intervenir el fenómeno. En este sentido, las tablas funcionaron como entidades mediadoras que permitieron articular fenómeno y modelo, favoreciendo la interpretación y validación de la trayectoria orbital.

Desde una perspectiva interdisciplinaria, los re-

sultados muestran que la articulación entre matemática y astronomía permitió ampliar la comprensión del fenómeno estudiado. En coherencia con Valencia et al. (2008), la interdisciplina posibilitó una visión más integrada al vincular el objeto matemático con su aplicación en un contexto real. Asimismo, el diseño de la guía, con preguntas claras y progresivas, favoreció el tránsito entre distintos modelos, condición que Huincahue (2022) identifica como central en tareas interdisciplinarias efectivas.

En las Actividades 4 y 5, los estudiantes alcanzaron un mayor nivel de formalización al validar empíricamente la propiedad de la suma constante de distancias y al identificar elementos característicos de la elipse a partir de su ecuación. Este proceso evidencia, en términos de Pérez y Salazar (2024), cómo la matemática escolar se pone en uso en un contexto de alfabetización científico-matemática e interdisciplinariedad, resignificando lo procedimental y favoreciendo la construcción de significados tanto del objeto matemático como del fenómeno astronómico. La validación concreta mediante construcciones con hilo y alfileres reforzó este proceso, permitiendo comprender la elipse más allá de una definición formal.

Finalmente, si bien la propuesta mostró avances significativos, se identifican algunas limitaciones: el tiempo reducido para la exploración autónoma del simulador, el foco exclusivo en la órbita terrestre, el carácter guiado de la etapa de modelación y la ausencia de una discusión colectiva en la Actividad 4. Estas limitaciones abren proyecciones para futuras implementaciones, particularmente en la ampliación de espacios de exploración, comparación y discusión colectiva.

6. CONCLUSIONES

El presente estudio permitió analizar cómo la modelación matemática, situada en un contexto astronómico fundamentado en las leyes de Kepler, contribuye a la construcción de significados más profundos sobre la elipse en estudiantes de enseñanza media. En coherencia con los antecedentes curriculares revisados, el currículum escolar chileno propone explícitamente el uso de contextos astronómicos para abordar la enseñanza de las cónicas, lo que justifica y respalda la elección del escenario de trabajo desarrollado en esta investigación. La incorporación de este contexto permitió articular contenidos matemáticos con fenómenos científicamente relevantes, favoreciendo una enseñanza más contextualizada y alineada con los propósitos formativos del currículum.

Los resultados obtenidos muestran que, si bien los estudiantes inician la experiencia con explicaciones predominantemente físicas del fenómeno astronómico, progresivamente logran establecer vínculos entre dicho fenómeno y el objeto matemático de estudio. Esta evolución confirma lo señalado por Morin (1997) respecto al aislamiento disciplinar presente en la enseñanza escolar, pero también evidencia que dicho aislamiento puede ser superado mediante propuestas didácticas que promuevan la interdisciplina. En particular, el tránsito desde interpretaciones físicas hacia la identificación de propiedades geométricas de la elipse se vio favorecido por el diseño de actividades que exigían organizar datos, construir representaciones y validar propiedades matemáticas.

Desde la literatura científica, diversos autores destacan la necesidad de trabajar con múltiples representaciones para favorecer la comprensión de la elipse (Del Castillo, 2004). En este sentido, la situación de aprendizaje diseñada permitió que los estudiantes transitaran entre modelos tabulares, gráficos y algebraicos, estableciendo relaciones entre ellos y utilizando cada uno como fuente de información para construir nuevos modelos. Este tránsito fue especialmente visible en la Actividad 3, donde algunos grupos lograron articular datos, gráficos y ecuaciones para interpretar la órbita planetaria como una elipse. No obstante, también se evidenció que no todos los estudiantes alcanzaron el mismo nivel de articulación, lo que reafirma la necesidad de generar más instancias de discusión colectiva y validación compartida.

El uso del contexto astronómico, particularmente a través de las leyes de Kepler, resultó ser un recurso potente para otorgar sentido al estudio de la

elipse. Tal como señalan Ramírez y Reyes (2017), preguntas vinculadas al movimiento planetario favorecen la interdisciplina y la motivación estudiantil. Aunque las primeras actividades no lograron inmediatamente el vínculo esperado entre matemática y astronomía, el desarrollo progresivo de la guía permitió que los estudiantes reconocieran la trayectoria planetaria como una elipse y comprendieran propiedades fundamentales como la suma constante de distancias a los focos, especialmente a través de experiencias de validación concreta.

Desde una perspectiva de modelación matemática, los resultados confirman que la modelación no operó únicamente como una técnica de resolución, sino como una práctica que permitió poner en uso la matemática escolar en un contexto significativo. En coherencia con Arrieta y Díaz (2015), los distintos modelos construidos por los estudiantes se articularon en una red de modelos que permitió intervenir el fenómeno, describirlo y validarlo. Asimismo, siguiendo a Valdés (2021), la modelación favoreció el desarrollo de habilidades críticas, como la identificación de variables relevantes y la interpretación de representaciones, contribuyendo a una comprensión más profunda del objeto matemático.

En respuesta a la problemática de investigación, se concluye que la modelación matemática en un contexto astronómico contribuye significativamente a que los estudiantes construyan significados más profundos sobre la elipse y sus propiedades. A pesar de las limitaciones asociadas al tiempo de implementación y a la ausencia de instancias sistemáticas de discusión colectiva, los estudiantes lograron articular matemática y astronomía mediante el tránsito entre diversos modelos, avanzando desde explicaciones fragmentadas hacia comprensiones más integradas. En este sentido, la experiencia desarrollada se configura como una propuesta didáctica con potencial de ser replicada y adaptada en otros contextos escolares, aportando a una enseñanza de la matemática más contextualizada, interdisciplinaria y significativa.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se elaboró en el marco del proyecto de Vinculación con el Medio “Red FerMat: Modelación Matemática y Tecnologías en el Aula Escolar” (Proyecto V-25-4), cuyo apoyo hizo posible la implementación de la experiencia en el establecimiento escolar.

6. REFERENCIAS

- Aguilera, A., y Bolívar, A. (2004). Enseñanza de las matemáticas apoyada en la práctica de la astronomía: Una revisión teórica. *Prospectiva científica*, 18(18), 15 - 32.
- Angulo, M. (2018). Análisis histórico Epistemológico del concepto de la Elipse como objeto matemático. Universidad nacional abierta y a distancia UNAD.
- Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(1), 19 - 48.
- Balda, P. (2022). Estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje desde un enfoque socioepistemológico. *Investigación e innovación en matemática educativa*, 7, 1 - 22.
- Barrios, H. (2016). Aplicación de las leyes de Kepler como alternativa pedagógica para la enseñanza de las Secciones Cónicas: Estudio de casos I. E. Ismael Perdomo Borrero. Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales.
- Bonilla, D., y Parraguez, M. (2012). La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento. *Comité latinoamericano de Matemática Educativa*, 26, 617 - 624.
- Cabrera - Baquedano, A., Huincahue, J. y Gaete - Peralta, C. (2022). Tránsitos al ajustar modelos matemáticos interdisciplinarios: el caso de la alfabetización financiera. *Uniciencia*, 36(1), 1 - 20.
- Carrasco, E., Díaz, L., y Buendía, G. (2014). Figuración de lo que varía. *Enseñanza de las ciencias*, 32(3), 365 - 384.
- Cordero, F., y Suárez, L. (2010). Modelación - graficación, una categoría para la matemática escolar. *Resultados de un estudio socioepistemológico*. *Relime*, 13(4), 319 - 333.
- De Bernardini, E. (2017). Leyes de Kepler. *Astronomía Sur*. <http://astrosurf.com/astronosur/planetas1.html>
- Del Castillo, A. (2004). Geometría dinámica y sistemas de cómputo simbólico en la enseñanza de la geometría analítica: El caso de la elipse. *Memorias de la XIV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*, 14, 45 - 51.
- Falatoonzadeh, A. (2012). La construcción del conocimiento como problema paradigmático para alcanzar la interdisciplinariedad y la transdisciplinariedad. *Revista Sophia: Colección de Filosofía de la Educación*, 13, 350 - 365.
- Huincahue, J. (2022). Interdisciplina en Educación Matemática—Características genuinas de la práctica interdisciplinar académica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 14(2), 59 - 68.
- Méndez, A., Brenes, L. y Delgado, I. (2023). Mediación pedagógica de las figuras geométricas tridimensionales: la esfera, el cilindro y el cono circular recto, por medio de un taller utilizando el software GeoGebra. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, 114, 97 - 115.
- Morin, E. (1997). Sobre la interdisciplinariedad. *Publicaciones ICESI*, 62, 9 - 15.
- Murillo Silva, J. A. (2012). Contribución a la enseñanza de las cónicas mediante el uso de la astronomía. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
- Nakakoji, Y., y Wilson, R. (2020). Interdisciplinary learning in mathematics and science: Transfer of learning for 21st century problem solving at university. *Journal of Intelligence*, 8(3), 1 - 22.
- Osorio, H. (2017). Actividades para la enseñanza del concepto elipse utilizando tecnología. *Memorias X CIE-MAC*, 334 - 357. ISBN 978-9930-541-09-8.
- Pérez, I. (2020). Una significación de los coeficientes de una función cuadrática: una experiencia de modelación en formación de profesores. *Paulo Freire, Revista de pedagogía crítica*, 23, 176 - 193.
- Pérez, I., y Salazar, P. (2024). Modelación matemática como propuesta de trabajo para superar obstáculos y dificultades en el cálculo escolar. Una experiencia en formación inicial docente. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 37(1), 1 - 20. <https://alme.org.mx/revista/index.php/alme/article/view/100>
- Pérez, I., y Salazar, P. (2025). Resignificación colectiva de lo cuadrático en el estudio del plano inclinado: Una experiencia de modelación y tecnologías en formación inicial docente. *El cálculo y su enseñanza*, 21(2), 7-36. <https://doi.org/10.61174/recacym.v21i2.235>
- Ramírez, D., y Reyes, R. (2017). Propuesta de enseñanza de la primera ley de Kepler a partir de los elementos de la elipse. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, Número extraordinario, 787 - 794.
- Sampieri, R., Collado, C., y Lucio, P. (1991). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Interamericana.
- Unidad de Currículum y Evaluación. (s. f.). *Matemática 3° medio: Unidad 2, clase N° 43. Aprendo en línea: Orientaciones para el trabajo con el texto escolar*. Ministerio de Educación de Chile.
- Unidad de Currículum y Evaluación. (2021). *Programa de estudio: Pensamiento computacional y programación - 3° o 4° medio*. Ministerio de Educación de Chile.
- Valdés, E. (2021). Procesando imágenes de descarga eléctrica: hacia la modelación matemática e interdisciplinariedad. *Educare*, 25(2), 368 - 382.
- Valencia, S., Méndez, O., y Jiménez, G. (2008). ¿Enseñanza de las ciencias por disciplina o interdisciplinariedad en las escuelas? *Técne, Episteme y Didaxis*, 23, 78 - 88.