ISSN 2452-5448 | **SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**
https://doi.org/10.46219/rechiem.v18i1.225

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

LA PELOTA, ¿DEJARÁ DE REBOTAR? MODELACIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

WILL THE BALL STOP BOUNCING? MODELING THE EXPONENTIAL FUNCTION

Nicolás Gaete Silva
nicolas.gaete.silva@gmail.com
https://orcid.org/0009-0002-9198-2232
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es describir el ciclo de modelación efectuado por estudiantes de educación media en una tarea que involucró experimentación y tecnología para la construcción del concepto de función exponencial. La metodología adoptada fue de enfoque cualitativo descriptivo, utilizando como método un estudio de caso instrumental. Se construyó una situación de enseñanza con preguntas asociadas a las fases del ciclo de modelación de Blum-Borromeo Ferri, las que buscaban estudiar el fenómeno de dejar caer una pelota. Lo anterior contrasta con el método tradicional de enseñanza de la función exponencial, siguiendo el orden de definición, propiedades y ejemplos. La propuesta fue implementada en estudiantes de enseñanza media (16-17 años) de un colegio de dependencia municipal en Chile, en el momento que se comenzaba con la enseñanza de este contenido. Los resultados muestran que los estudiantes logran construir un modelo del fenómeno e interpretarlo a partir de una progresión en sus procesos de validación, sustentados en conocimientos y reflexiones desarrollados durante la tarea. Esto contrasta con sus validaciones intuitivas iniciales y favorece un aprendizaje significativo, al tiempo que permite reconocer las limitaciones del modelo construido para fundamentar afirmaciones sobre las características del fenómeno en el mundo real.

Palabras Clave:
Modelación; función exponencial; situación de enseñanza

ABSTRACT

The aim of this study is to describe the modeling cycle carried out by secondary school students in a task that involved experimentation and technology for the construction of the concept of the exponential function. The methodology adopted was a qualitative descriptive approach, using an instrumental case study as the research method. A teaching situation was designed with questions aligned to the phases of the Blum–Borromeo Ferri modeling cycle, aimed at studying the phenomenon of a bouncing ball. This approach contrasts with the traditional method of teaching the exponential function, which typically follows the sequence of definition, properties, and examples. The proposal was implemented with secondary school students (aged 16–17) from a public school in Chile at the point when this content was first introduced. The results show that students can construct a model of the phenomenon and interpret it through a progression in their validation processes, supported by knowledge and reflections developed during the task. This contrasts with their initial intuitive validations and promotes meaningful learning, while also enabling them to recognize the limitations of the constructed model when making claims about the characteristics of the phenomenon in the real world.

Keywords:
Mathematical modeling; exponential function; teaching situation

Recibido 08 de febrero 2026, Aceptado 29 de abril 2026
Revista Chilena de Educación Matemática, Volumen 18, N°1

1. INTRODUCCIÓN

La Matemática es una ciencia que, en gran parte, se ha ido construyendo desde la necesidad de dar respuestas a problemas o fenómenos del diario vivir. Es en el proceso de búsqueda de estas respuestas que conceptos, operatorias, representaciones y relaciones convergen en el quehacer matemático. Desde esta base, la Matemática se ha establecido como una disciplina fundamental en la formación de cualquier persona, de modo que esta tenga la oportunidad de desarrollar competencias matemáticas en distintos aspectos de su vida (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Uno de los contenidos que es trascendental conocer y entender para cualquier ciudadano es la Función Exponencial (FE), ya que los ciudadanos deben tener claridad del funcionamiento de tasas financieras, crecimientos poblacionales acelerados, y distintas situaciones de crecimiento o decrecimiento exponencial. Durante la pandemia por COVID-19, diversos medios de información intentaban comunicar el comportamiento de los contagios desde modelos matemáticos y representaciones en los que para su comprensión es clave tener conocimiento de este concepto. En este periodo, ante la falta de conocimientos matemáticos para comprender el fenómeno que se vivía, diversas personas no eran conscientes de la velocidad con la que este virus se podía propagar (Heyd-Metzuyanim et al., 2021), lo que terminó en lamentables consecuencias.

El desconocimiento de la FE en ciudadanos se debe en muchos casos a dificultades específicas en el proceso de aprendizaje del concepto, lo que ha sido objeto de estudio en diversas partes del mundo. Confrey y Smith (1995) señalan dificultades en los estudiantes para determinar valores de potencias, tanto con exponentes naturales como no naturales. Realpe Vidal (2022), retomando a Rico (1995), señala que algunos docentes diseñan tareas en las que queda de manifiesto concepciones deficientes en cuanto a la construcción del conocimiento matemático de la FE. Así, los estudiantes sólo memorizan fórmulas, gráficas y procedimientos, dejando de lado la evolución histórica del concepto. Del mismo modo, Brucki (2011), al relatar su experiencia en la enseñanza de la FE, identifica como obstáculo el hecho de considerar el exponente como variable, y señala además un desinterés por parte de los estudiantes cuando el concepto no se vincula con aplicaciones reales. En consecuencia, la expresión matemática del modelo exponencial tiende a carecer de significado para ellos en relación con los fenómenos que representa.

En el ámbito chileno, la FE no ha estado ajena a dificultades en su aprendizaje. Pezoa y Morales (2016) plantean que su enseñanza está centrada en el proceder algebraico, muchas veces descontextualizada de situaciones reales, de modo que recién luego de trabajar en la definición y propiedades del concepto se señalan ejemplos de situaciones en las que se aplica. Actualmente, el tratamiento de la FE en los textos escolares (Barrera et al., 2019; Ministerio de Educación de Chile, 2024) se centra predominantemente en la presentación de sus propiedades algebraicas y gráficas, así como en la exposición de diversos ejemplos de aplicación. Este enfoque deja en un segundo plano el análisis variacional, lo que limita oportunidades para que los estudiantes establezcan, desde procesos investigativos y todas las instancias que este actuar conlleva, conexiones entre sus experiencias previas con variaciones multiplicativas, porcentuales y la estructura propia del crecimiento exponencial. Al respecto, estudios realizados por el Depósito Central de Valores y Cadem (2022) reportaron que solo un 66 % de la población chilena afirma comprender las tasas de interés, quedando en evidencia dificultades en temas que involucran a la FE.

Desde una perspectiva epistemológica, Katz (1998) señala que el surgimiento de la FE se relaciona con estudios astronómicos, donde en la búsqueda de ciertos valores, se transformaron multiplicaciones en sumas y restas mediante identidades trigonométricas. Posteriormente, mediante ideas de Chuquet, Stifel, Napier y Bürgi se construyeron tablas que relacionaban potencias de 2 con sus exponentes. Este nuevo concepto fue presentado, desde los logaritmos, por John Napier en su obra póstuma Mirifici logarithmorum canonis constructio, en la que enfatiza la utilidad del método encontrado para calcular cantidades que, en ese entonces, requería bastantes procedimientos. Finalmente, Euler (trad. en 1998) es quien sienta las bases para lo que hoy conocemos como funciones, en particular, también lo hace para la FE.

Si bien el surgimiento del concepto tratado tomó largos períodos de elaboración, en el ámbito educativo resulta pertinente promover situaciones que permitan a los estudiantes aproximarse a formas de trabajo similares a las desarrolladas por los matemáticos en la construcción del conocimiento. En este sentido, Godino et al. (2004, p. 67) plantean que el rol de los estudiantes en la clase de matemáticas debiese ser similar al de un matemático, vale decir, proceder una serie de acciones como el de investigar y resolver problemas, pre-

decir soluciones, formular conjeturas, comprobar estas soluciones, construir modelos matemáticos, usar lenguaje y conceptos matemáticos, intercambiar y comunicar ideas, filtrar las ideas correctas y determinar cuáles de ellas son de utilidad.

Flores y Vigo (2019) desarrollan un estado del arte, analizando tesis de maestría de distintas universidades de América Latina. En él concluyen que hay una marcada influencia de la modelación matemática como herramienta para introducir la FE. Por medio de esta se construye el modelo , teniendo como base una progresión geométrica. Sin embargo, no se profundiza más en el descubrimiento y comprensión de las propiedades de la función. Así mismo, la mayoría de estas investigaciones no considera la tecnología como una herramienta para el aprendizaje de esta, salvo para fines de cálculo. Un punto importante en estas tesis analizadas es que los estudiantes trabajan con datos entregados o que se construyen desde el modelo.

Confrey y Smith (1995) desarrollan las ideas relacionadas a la enseñanza de la FE, poniendo énfasis en problemas contextuales y el uso de variadas representaciones, profundizando en los conceptos de partición y covariación. Para ello, plantean la construcción de un mundo particionado y otro contable (Tabla 1), donde "su yuxtaposición por medio de la covariación provee la base de la construcción de la función exponencial" (Confrey y Smith, 1995, p.80). Desde esta perspectiva, analizan distintas propuestas que buscan dar a los estudiantes actividades en las que desarrollen las nociones multiplicativas y la conexión entre estos dos mundos.

Tabla 1. Características del Mundo contable y particionado

Contar	**División**
Cero es el origen	Uno es el origen
Sumar uno es la acción sucesora	Dividir por n es la acción sucesora
La unidad básica es uno	La unidad (de crecimiento) es n o $\frac{1}{n}$
La suma y la resta son las operaciones básicas	La multiplicación y la división son operaciones básicas
Cero es el elemento identidad	Uno es el elemento identidad
Reinicialización a cero	Reinicialización a uno
La conmutatividad se aplica a la suma	La conmutatividad se aplica a la multiplicación
La diferencia se utiliza para describir el intervalo entre dos números "enteros" sucesivos	La razón se utiliza para describir el intervalo entre dos números "enteros" sucesivos
Las unidades compuestas se forman agregando conteos en grupos más grandes	Las unidades compuestas se forman elevando las "unidades de división" a una potencia mayor
Las partes (aditivas) se crean mediante la división en n	Las partes (multiplicativas) se crean mediante el cálculo de la raíz n-ésima
La multiplicación se construye como una suma repetida	La exponenciación se crea como una multiplicación repetida
La distributividad se aplica a la multiplicación sobre la suma	La distributividad se aplica a la exponenciación sobre la multiplicación
La tasa es la diferencia por unidad de tiempo	La tasa es la razón por unidad de tiempo

Nota. Traducido de Confrey y Smith (1995, p. 75)

Alarcón Relmucao (2024), enmarcado en la teoría de las nociones básicas (Vom Hofe, 1995), aborda la FE planteando las nociones de crecimiento porcentual y de crecimiento por un factor constante, desde donde se desprenden las funciones de la forma $f(n) = a \cdot (1 + p)^n$ y $f(n) = a \cdot b^n$, respectivamente. En particular, el crecimiento porcentual presenta mayores dificultades al tratarse de un traspaso de un proceso aditivo en uno multiplicativo, lo que también se refleja en el aumento de la posibilidad del error en el cálculo. Entre sus conclusiones se evidencia la dificultad que lleva a error al resolverse situaciones exponenciales debido a la sobregeneralización de los modelos lineales. Además, se releva la necesidad de abordar el crecimiento porcentual a través del factor porcentual siendo este la estrategia central para la construcción de la FE, dado que el entendimiento del factor está arraigado en la profunda comprensión de los porcentajes y, al entenderlo, se podría construir de manera natural y sencilla la FE, además de permanecer siempre en una estructura multiplicativa (Alarcón Relmucao, 2024, p. 221).

2. PROBLEMÁTICA Y OBJETIVO DE ESTUDIO

A partir de lo planteado anteriormente podemos notar que existe una problemática en la enseñanza y aprendizaje de la FE, debido a que el orden en que se presenta su enseñanza – procedimental/algebraico, propiedades, gráfico, y luego una aplicación– no permite en el estudiantado una consolidación de una real comprensión de la FE, estableciéndose falencias en su interpretación y vinculación con los fenómenos a los que se puede asociar, debido a la omisión de una situación real como vía de entrada al concepto que permita en los estudiantes, desde el cuestionamiento, construir conocimiento y contrastarlo con el fenómeno en estudio. Además, si bien las nuevas propuestas de su enseñanza plantean iniciar el contenido intencionando la modelación matemática con situaciones de la vida diaria, en la mayoría de los casos sus datos a estudiar se ajustan perfectamente al modelo buscado, lo que dista del estudio real de fenómenos en los cuales suelen haber márgenes de errores de precisión en la recolección de datos o en cómo se ajustan los datos al modelo (en ocasiones saltándose la etapa de recolección de datos); y de este modo, quitando la posibilidad a los estudiantes de cuestionarse la dificultad de la recolección precisa de datos y las limitaciones que un modelo construido conlleva ante los distintos factores presentes en la realidad y su continua variabilidad. Así, el objetivo que sigue esta investigación es: describir el ciclo de modelación matemática efectuado por estudiantes de educación media en una tarea matemática que involucra experimentación y tecnología para la construcción del concepto de FE.

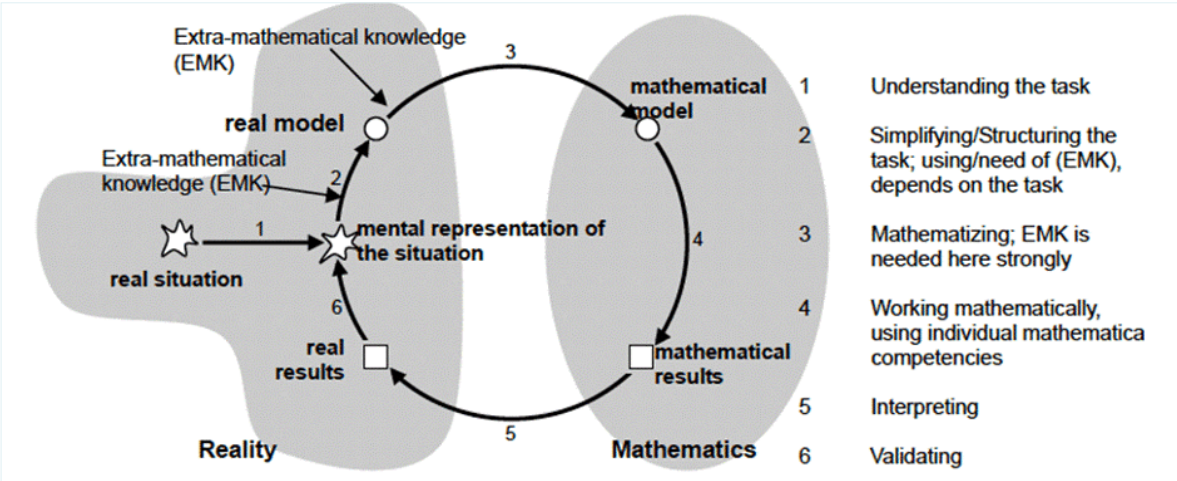
3. MARCO TEÓRICO

La investigación se realizó desde la mirada de la Modelación Matemática. Blum y Borromeo Ferri (2009) describen la Modelación Matemática como una habilidad del quehacer matemático cuyo principal enfoque es la traducción entre el mundo real y el mundo matemático. Este proceso involucra la representación de la realidad a partir de un modelo matemático (entendiendo la realidad como situaciones en contextos no matemáticos que pueden llegar a ser reales en la imaginación de los estudiantes). En Chile, la enseñanza de la matemática a nivel escolar establece el Modelar como una de las habilidades matemáticas pilares en su currículo, junto a las de Argumentar y Comunicar, Representar y Resolver problemas. Se suele distinguir entre dos enfoques en relación con la modelación matemática. Por un lado, se encuentran las aplicaciones y la modelación orientadas al aprendizaje de las matemáticas; por otro, el aprendizaje de las matemáticas con el propósito de desarrollar competencias en la construcción de modelos. El primer enfoque concibe las actividades de modelación como un medio para favorecer la comprensión de conceptos matemáticos, mientras que el segundo se centra en la utilización de las matemáticas para elaborar modelos (Niss et al., 2007). Aunque ambos enfoques no son excluyentes, difieren en el énfasis que otorgan al tipo de actividades que se promueven en el aula. Es importante aclarar la concepción de modelo que se utilizará durante este estudio, la que se relaciona con lo señalado por Borromeo Ferri (2010), quien la establece como un conjunto de relaciones y símbolos matemáticos que, de alguna manera, representan el fenómeno en cuestión (de manera numérica, tabular, gráfica o algebraica).

Existen distintos ciclos de estudio de la modelación matemática, pero nos enfocaremos en el de Blum-Borromeo Ferri (Borromeo Ferri, 2010) el que identifica ciertas etapas en el proceso de modelación matemática, profundizando en el análisis de procesos cognitivos. En este ciclo se distinguen las siguientes fases: (RS) Situación Real, (MRS) Representación Mental de la Situación, (RM) Modelo Real, (MM) Modelo Matemático, Resultados Matemáticos y Resultados Reales. A diferencia de los demás ciclos, en los que se identifican en general aspectos procedimentales entre mundo

real y mundo matemático, Borromeo Ferri enfatiza en el tránsito entre estas fases buscando descifrar lo que ocurre en la mente de una persona al enfrentarse a tipos de tareas que demanden esta habilidad: la RS apunta a la situación presente en el problema. En el tránsito de la RS a la MRS la persona entiende más o menos el problema, y puede trabajar en él, aunque aún no lo comprenda del todo. La MRS puede ser distinta en cada individuo. Dependerá de su estilo de pensamiento, experiencias previas, o podrá construirse desde los datos numéricos y relaciones que existan en el problema, lo que dependerá del conocimiento que tenga y asociaciones que logre la persona en el problema. En el paso de la MRS al RM se realizan simplificaciones, se filtra la información relacionándola con conocimiento extramatemático dependiendo de la tarea. Existe un vínculo estrecho entre la MRS y la RM, ya que la primera está construida a nivel interno, y desde allí se buscan transmitir representaciones externas que representen el RM. La MM es la fase que consiste de representaciones externas, dibujos o expresiones matemáticas. En esta fase las expresiones de la persona se relacionan más con relaciones matemáticas que con la realidad. En este punto, se completa la transición hacia las matemáticas. En el proceso de transición entre el MM a los resultados matemáticos (etiquetado 4 en la Figura 1) influyen las competencias matemáticas que tenga una persona, tales como recursos matemáticos, estrategias procedimentales y de cálculo para obtener resultados y conclusiones. La fase de resultados matemáticos se compone del registro de los resultados desde el modelo. El tránsito de los resultados matemáticos a los resultados reales (etiquetado 5 en la Figura 1) se hace a través de la reinterpretación de los resultados obtenidos a partir del problema original y sus condiciones. Borromeo Ferri (2006) plantea que esta transición muchas veces las personas la realizan de manera inconsciente. Finalmente, en la fase de resultados reales se ponen a prueba estos con la situación. En el proceso de validación, la persona busca relaciones entre los resultados obtenidos y su MRS, desde una validación intuitiva o validación basada en los conocimientos. La Figura 1 muestra las partes, fases y transiciones del ciclo que se han descrito.

Figura 1. Ciclo de modelación de Blum-Borromeo Ferri



Nota: Elaboración propia

4. METODOLOGÍA

4.1 Método y participantes

Esta investigación es de tipo cualitativa y consideró como método el estudio de caso instrumental (Stake, 2007; Yin, 2018), cuya finalidad es describir cómo los estudiantes escogidos desarrollan el ciclo de modelación durante la situación de enseñanza de la FE propuesta.

Los participantes fueron estudiantes de enseñanza media (16-17 años) de un colegio municipal de la comuna de Las Condes de la ciudad de Santiago de Chile. Se identificó a cada estudiante cómo E_(i,j), donde i representa el grupo al que perteneció el estudiante. Para el desarrollo de las sesiones implementadas, se formaron 4 grupos de 3 integrantes, siendo en total 12 participantes. Cada grupo utilizó un tipo de pelota distinto para realizar el experimento (Tabla 2).

Tabla 2. Grupos y estudiantes clase 1 y 2

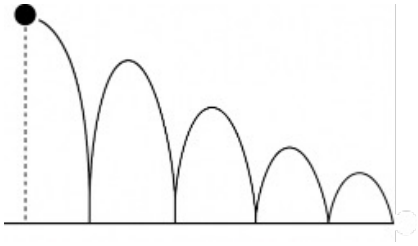
Grupos	G_1 (Básquetbol)	G_2 (Vóleibol)	G_3 (Tenis)	G_4 (Fútbol)
Estudiantes	$E_{1,1}$	$E_{2,1}$	$E_{3,1}$	$E_{4,1}$
	$E_{1,2}$	$E_{2,2}$	$E_{3,2}$	$E_{4,2}$
	$E_{1,3}$	$E_{2,3}$	$E_{3,3}$	$E_{4,3}$

Estos estudiantes abordaron por primera vez la FE, aunque sí habían visto los contenidos previos necesarios para su enseñanza (crecimiento y decrecimiento exponencial, función lineal y cuadrática, variación porcentual, operatoria y orden de números reales). Se les entregó una carta en la que dieron sus consentimientos sobre la investigación, donde se señalaba el resguardo de los datos.

4.2 Situación de enseñanza y técnica de recogida de datos

La situación de enseñanza propuesta a partir de la cual se recogieron los datos consideró uso de tecnología, en particular del Software GeoGebra. La tarea fue elaborada en el marco de un Estudio de Clases en el contexto de estudios de posgrado de Didáctica de la Matemática, en donde colaboraron compañeros y docentes. El fenómeno que se estudió en la tarea fueron las alturas sucesivas que alcanza una pelota luego de cada rebote consecutivo al dejarla caer desde cierta altura inicial, cuya relación se modela mediante una FE. La tarea se estructuró en 3 partes (hipótesis-experimentación-discusión) y se implementó en dos clases de 70 minutos cada una. La modalidad de trabajo fue en grupo de tres personas (salvo las dos primeras preguntas). Cada grupo poseía un computador para usar GeoGebra. Los instrumentos de recolección de datos fueron las producciones escritas, grabación de audio por grupo y grabación de video en el momento de los plenarios y durante el uso del software GeoGebra. Las preguntas de la tarea se construyeron intencionando asociarlas a las fases del ciclo de modelación de Blum-Borromeo Ferri (2010), con la finalidad de hacer emerger en los estudiantes su habilidad de modelar, describiendo este proceso bajo este ciclo. En la Tabla 3, se presenta el análisis a priori de las preguntas de la tarea.

Tabla 2. Análisis a priori de la tarea matemática

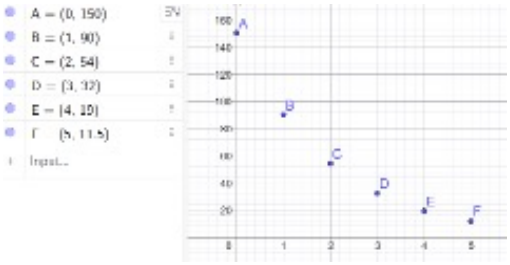
Fases del Ciclo de Modelación	Preguntas/situación de la tarea	Respuesta experta
Situación real	Analizar el comportamiento de las alturas sucesivas que alcanza una pelota luego de cada rebote consecutivo al dejarla caer desde cierta altura.	
Representación mental de la situación	Si dejan caer una pelota desde cierta altura sobre algún piso ¿cómo creen que será la altura que alcance la pelota después de cada rebote? Representen la situación de manera visual y descríbanla con sus palabras.	 La razón entre la altura de la pelota luego de cada rebote y la altura que alcanza la pelota luego del bote anterior es constante.
Modelo real	¿Qué aspectos creen que influyen en la situación anterior?	La pelota (su forma, material, tamaño y presión), el tipo de suelo y la velocidad del viento.

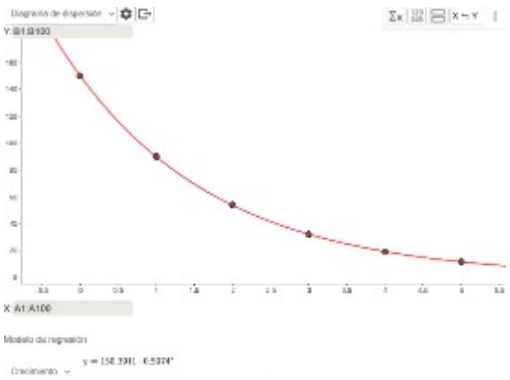
<table>
<tr>
<td>Modelo matemático</td>
<td>
Imaginen que sueltan una pelota desde la altura que ustedes quieran sobre la cancha de cemento del colegio. Representen y describan las alturas que alcanzaría la pelota luego de cada rebote.

Se realiza el experimento y se representan los resultados obtenidos.

Si los datos obtenidos se relacionaran por medio de una función, ¿cómo podríamos describir esta función? Procuren detallar lo que más puedan su descripción.

Registren los datos del experimento en la hoja de cálculo de GeoGebra, y observen los modelos de regresión que aparecen. Si tuvieran que escoger el que mejor se ajusta al fenómeno estudiado y mejor pueden interpretar, ¿cuál escogerían? ¿Por qué? Justifiquen.

¿Cuál es el patrón que pueden evidenciar en las alturas de la pelota?
</td>
<td>
Tabla de observación
<table>
<tr><th>N° de bote</th><th>Altura (cm)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>150</td></tr>
<tr><td>1</td><td>90</td></tr>
<tr><td>2</td><td>54</td></tr>
<tr><td>3</td><td>32</td></tr>
<tr><td>4</td><td>19</td></tr>
<tr><td>5</td><td>11,5</td></tr>
</table>


La función es un decrecimiento exponencial, cuya representación algebraica es de la forma $f(x)=a \cdot b^x$, con $0<b<1$, a representa la altura inicial, y b la razón entre los valores consecutivos de las imágenes de la función. La representación gráfica es una serie de puntos que siguen la tendencia de una curva asíntota al eje X, cuya intersección al eje Y es en el punto $(0,a)$.

El modelo de crecimiento y exponencial son los que mejor se ajustan a la situación, desde su coeficiente de determinación. La representación algebraica del modelo de crecimiento es más fácil de interpretar a nivel escolar. La altura de la pelota alcanzada luego de cada rebote es aproximadamente el 60% de la altura que alcanzó la pelota luego del rebote anterior.
</td>
</tr>
</table>

Resultados matemáticos	A partir de la observación del experimento y representaciones de los datos obtenidos ¿podrían estimar la altura que alcanzaría la pelota luego del sexto rebote? Justifica. A partir del modelo escogido y de los datos graficados, ¿podrían estimar con mayor precisión la altura que habría alcanzado la pelota luego del sexto rebote? Se hace una institucionalización del contenido.	Se puede predecir gracias al patrón presente en la situación. Así, su altura al sexto rebote sería 6,8 cm. El modelo escogido de GeoGebra indica el mismo valor.
Resultados reales	Si un estudiante les cuenta que realizará el mismo experimento, con el mismo tipo de pelota que escogiste en la actividad (fútbol, básquetbol, tenis o vóleibol) y desde la misma altura inicial, pero en su casa ¿podrían predecir **exactamente** lo que ocurrirá con sus alturas luego de cada rebote a partir de lo hecho en esta actividad? Argumenten su respuesta. La pelota, ¿dejará de rebotar alguna vez? ¿Por qué? ¿Crees que otra situación contenga ciertas variables con un comportamiento de decrecimiento (o crecimiento) en el que se presente un patrón similar? ¿Cuál? ¿Por qué?	No, ya que las condiciones iniciales no son las mismas (tipo de suelo, presión de la pelota y condiciones del viento). De todos modos, se podría establecer una predicción en cierto rango, garantizando la mayoría de las condiciones iniciales. La pelota dejará de rebotar. La expresión del modelo es 0 cuando la cantidad de rebotes tiende a infinito. El crecimiento bacteriano, los créditos financieros, la depreciación de la tasación de autos, etc.

Nota. Elaboración propia

En la segunda clase, se consideraron los resultados del experimento obtenidos por el grupo que más se asemejaban a un comportamiento exponencial y los declarados como respuesta experta.

4.3 Técnica de análisis de datos

Para analizar las producciones de los estudiantes se establecieron como unidades de análisis las respuestas a la tarea, las transcripciones de las discusiones entre los grupos y de los plenarios como grupo curso. Considerando el propósito descriptivo de la investigación, en la Tabla 4 se proponen categorías, como técnica de un análisis del contenido (Mayring, 2015), para analizar e interpretar cómo los estudiantes modelan matemáticamente en cada fase del ciclo de modelación que la situación de enseñanza consideró para el concepto de FE.

Tabla 3. Análisis a priori de la tarea matemática

Categorías	Descripción	Ejemplo
Representación mental de la situación	Externalizan alguna hipótesis sobre el fenómeno a partir de experiencias previas por medio de representaciones o descripciones, identificando características de las variables relacionadas (altura- rebotes), tales como sus comportamientos, sus rangos, posibles valores y especifican qué tipo de variables son (discretas/continuas).	Los estudiantes representan la trayectoria de la pelota luego de cada rebote al dejarla caer desde cierta altura. Escriben además las características de esta trayectoria, estimando valores o alguna idea de cómo estos se relacionan.
Modelo real	Mencionan condiciones iniciales que influyen en el comportamiento de la variable altura, y se expresa alguna idea del cómo influyen.	"Influye el tipo de pelota, su presión, tamaño, material, el tipo de suelo, el viento, ya que estas condiciones determinarán que la pelota rebote más o menos luego de cada rebote"
Modelo matemático	Representan la relación entre las variables alturas-rebotes a través de secuencias numéricas, tablas, gráficos o expresiones algebraicas. Interpretan las representaciones del Software GeoGebra.	Proponen alguna función como representante del fenómeno, representándola a través de tablas, gráficas o expresiones algebraicas. Utilizan el Software GeoGebra para determinar la función que modela el fenómeno a partir de los datos entregados, asociando los componentes del modelo a las características del fenómeno.
Resultados matemáticos	Utilizan el modelo encontrado para determinar valores que permitan estudiar las características del fenómeno.	Determinan la altura de la pelota en el rebote consecutivo al último registrado en la experimentación justificándolo desde de la deducción de un patrón en la representación de las variables relacionadas y/o desde una interpretación de las representaciones del Software GeoGebra.
Resultados reales	Argumentan el alcance y las limitaciones del modelo encontrado para su aplicación en contextos reales.	Señalan la relevancia de las condiciones iniciales para poder predecir exactamente el comportamiento del fenómeno a partir de la experiencia vivida. Mencionan ejemplos de otros fenómenos en los que sus variables presenten un comportamiento similar. Afirman si la pelota dejará de rebotar o no alguna vez al dejarla caer.

Nota. Elaboración propia

5. RESULTADOS

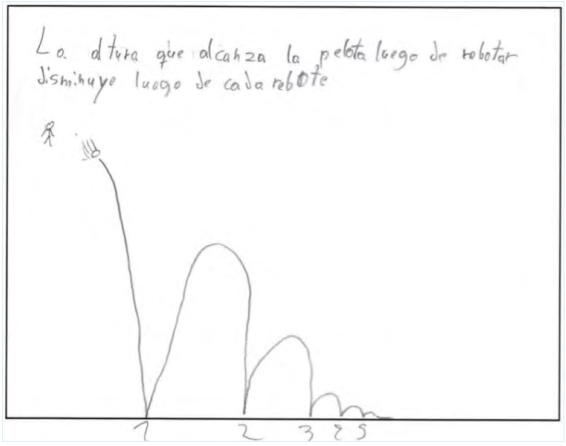
Los resultados que se presentan consideran los datos obtenidos más relevantes en cuanto a la manifestación por parte de los estudiantes de cada fase del ciclo de modelación durante la situación de enseñanza.

5.1 Análisis categoría Representación mental de la situación

En esta categoría, en general las representaciones coinciden con la respuesta experta. Las descripciones varían bastante, ya que algunos estudiantes no agregan descripción de la situación, otros solo señalan la característica decreciente de la altura luego de cada rebote señalando además la característica discreta de esta última variable (Figura 2) y algunos agregan además que en algún un momento la pelota dejará de rebotar. Solo $E_{4,1}$ detalla en su descripción cómo es el comportamiento decreciente de las alturas, relatando una disminución constante de la altura de la pelota en razón 1:4 luego de cada rebote (Figura 3).

Figura 2. Producción de $E_{1,3}$ fase Representación mental de la situación

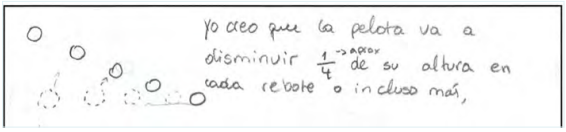
Si dejan caer una pelota desde cierta altura sobre algún piso ¿cómo creen que será la altura que alcance la pelota después de cada rebote? Representen la situación de manera visual y descríbanla con sus palabras.



Nota: "La altura que alcanza la pelota luego de rebotar disminuye luego de cada rebote"

Figura 3. Producción de $E_{4,1}$ fase Representación mental de la situación

Si dejan caer una pelota desde cierta altura sobre algún piso ¿cómo creen que será la altura que alcance la pelota después de cada rebote? Representen la situación de manera visual y descríbanla con sus palabras.



Nota: "yo creo que la pelota va a disminuir $\frac{1}{4}$ aprox de su altura en cada rebote o incluso más,"

5.2 Análisis categoría Modelo real

Todos los estudiantes identifican las variables en estudio (altura-rebotes), lo que se evidencia en las figuras anteriores y en que todos los aspectos señalados en la pregunta de esta sección son condiciones que sí influyen en el comportamiento de las alturas de la pelota. Ningún estudiante por sí solo menciona todos los aspectos considerados en la respuesta experta, aunque luego de discutirlo como grupo pueden complementar los aspectos propuestos por cada uno y se acercan bastante a lo planteado a priori.

Se generan conversaciones entre los participantes de G_2, que evidencian una conciencia de lo relevante que son las experiencias previas y el conocimiento de cada persona para considerar aspectos en el estudio de ciertos fenómenos. La Figura 4 y Figura 5 muestran el diálogo de los estudiantes y sus aspectos considerados en la situación, respectivamente.

Figura 4. Conversación de G_2 en fase Modelo real

[11:41 - 12:12] Audio 1 G_2

$E_{2,1}$: "Va a depender de qué tan inflada esté la pelota, el material de la pelota, la altura y la fuerza"

$E_{2,3}$: "Yo puse la altura desde la que cae la pelota, la fuerza peso, fuerza de roce e inclinación de la caída".

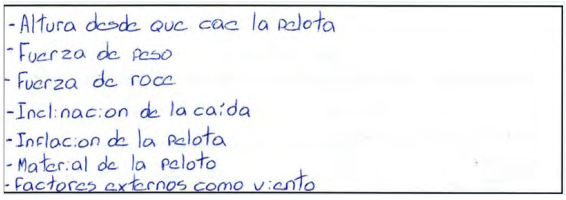
$E_{2,1}$: "Ella la física".

$E_{2,3}$: "Me gustó mucho lo que dijiste de qué tan inflada está la pelota, porque es que porque, siento que ahí se ve como bueno, si se supone que esto es para como pensar en cómo pensamos nosotros las cosas y eso de qué tan inflada está la pelota, es algo que diría una persona que solamente haga cosas con pelota cachay, como tu juegas vóley y todas esas cosas, entonces igual como que muestra una forma distinta de cómo lo relaciona ella con lo que ha visto".

Nota: Transcripción de audio

Figura 5. Producción de G_2 fase Modelo real

¿Qué aspectos creen que influyen en la situación anterior?



Nota: "-Altura desde que cae la pelota -Fuerza peso -Fuerza de roce -Inclinación de la caída -Inflacion de la pelota -Material de la pelota -Factores externos como viento"

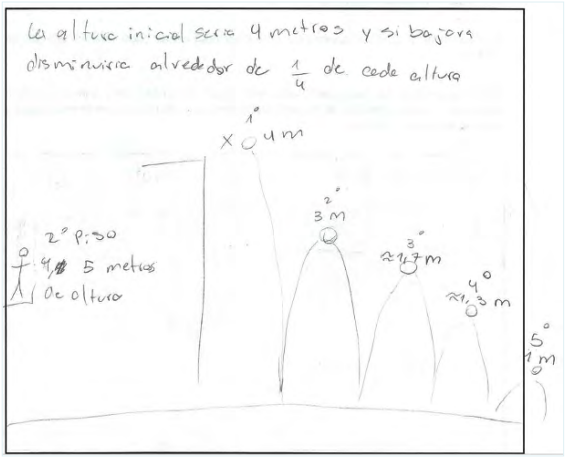
5.3 Análisis categoría Modelo matemático

Previo a realizar el experimento cada grupo manifiesta inquietud e inseguridad en cómo predecir los valores de la altura en cada rebote. Discuten las propuestas, en donde G_1, luego de dibujar una trayectoria, criticarla, borrarla y volver a dibujarla plantea el objeto matemático de fracción como medio para abordar la pregunta. Comienzan planteando un decrecimiento en razón 1:2 de la altura que alcanza la pelota luego de cierto rebote con respecto a la altura alcanzada por la pelota luego del rebote anterior, la cuestionan y luego estable-

cen la razón 3:4, aclarando en su conversación la diferencia de reducción en 3:4 de una reducción a 3:4. La Figura 6 muestra la los valores estimados a partir de esta razón (en la representación se saltan el valor de la altura luego del segundo rebote, aunque en su conversación si señalan que sería 2,25).

Figura 6. Producción de G_1 previo a la experimentación fase Modelo matemático

Imaginen que sueltan una pelota desde la altura que ustedes quieran sobre la cancha de cemento del colegio. Representen y describan las alturas que alcanzaría la pelota luego de cada rebote (al menos 5 rebotes).

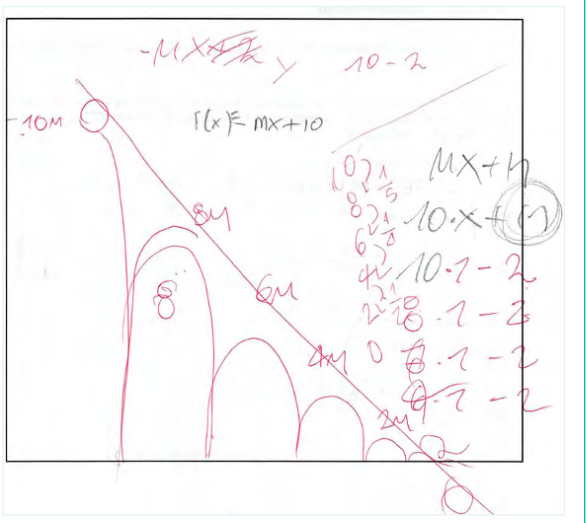


Nota: "la altura inicial seria 4 metros y si bajara disminuiria alrededor de $\frac{1}{4}$ de cada altura. 2° Piso 4, 5 metros de altura"

G_4 discute las condiciones iniciales en casi la totalidad del tiempo destinado a esta sección. Al final plantean una razón de decrecimiento de 1:3, pero por tiempo no alcanzan a calcular los valores. G_2 plantea que, lo solicitado en esta pregunta, según $E_{2,2}$ "es modelarlo". Primero indican que existe una razón de 1:2 entre la altura de la pelota luego de cierto rebote y la altura de la pelota luego del rebote anterior. Cuestionan esta razón. $E_{2,1}$ plantea "quizás se podría partir al revés, quizás podríamos partir de una ecuación". "Todo nos lleva a una ecuación" señala $E_{2,2}$. Plantean una función lineal como modelo de la situación, lo cuestionan y luego señalan que debiese ser afín. La Figura 7 muestra lo desarrollado por este grupo en la guía.

Figura 7. Producción de G_2 previo a la experimentación fase Modelo matemático

Imaginen que sueltan una pelota desde la altura que ustedes quieran sobre la cancha de cemento del colegio. Representen y describan las alturas que alcanzaría la pelota luego de cada rebote (al menos 5 rebotes).



Posterior a la realización del experimento y recolección de los datos, la Figura 8 y Figura 9 muestran los diálogos de G_1 y G_4 respectivamente, en donde se evidencia que ya infieren características de la función que modela el fenómeno. En el plenario ambos grupos manifiestan incapacidad de encontrar la expresión algebraica que represente la situación.

Figura 8. Conversación de G_1 post experimentación en fase Modelo matemático

[11:45 - 12:46] Audio 2 G_1

$E_{1,2}$: "Es afín porque no pasa por el origen".

$E_{1,1}$: "Tampoco sería una línea recta, yo siento que tomaría una curva que se va acercando a x, pero que no la toca".

$E_{1,3}$: "Es como un tobogán".

$E_{1,1}$: "Mientras más grande es el número x, se va achicando la diferencia de las alturas".

Nota: Transcripción de audio

Figura 9. Conversación de G_4 post experimentación en fase Modelo matemático

[10:40 - 11:16] Audio 2 G_4

$E_{4,1}$: "Cada vez se reduce menos".

$E_{4,2}$: "Cada vez que rebote reduce más exponencialmente su altura".

$E_{4,1}$: "¿Qué significa exponencialmente?"

$E_{4,2}$: "Por ejemplo, la curva en que disminuye es más alta, o sea, por ejemplo, puede que va así, pero igual es una gran cantidad para su cantidad de altura que tiene en ese momento".

Nota: Transcripción de audio

Figura 10. Producción de G_3 experimentación fase Modelo matemático

Tabla de observación

N° de bote	Altura (cm)
1	110 cm
2	75 cm
3	45 cm
4	30 cm
5	20 cm
6	10 cm

Figura 11. Producción de G_2 post experimentación fase Modelo matemático

b. Si los datos obtenidos se relacionaran por medio de una función ¿cómo podríamos describir esta función? Procuren detallar lo más que puedan su descripción.

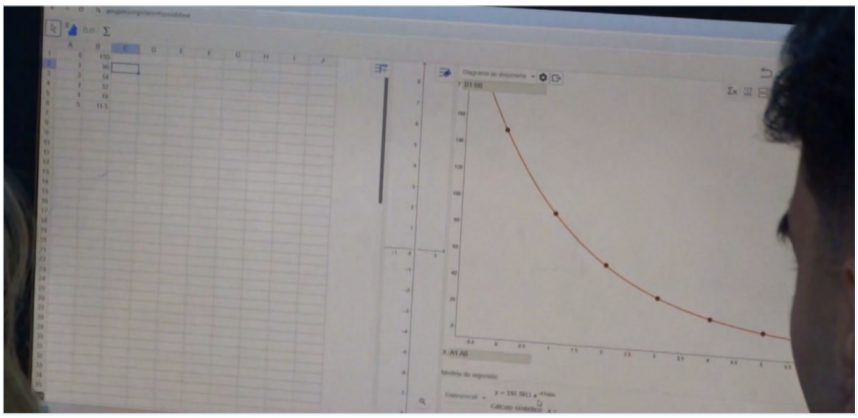
$25x+2y=218$

$59x+3.04y=395.22$

La Figura 10 muestra los datos obtenidos por G_3 en el experimento, los que serán analizados en la clase 2. Por último G_2 señala que, a partir de los datos obtenidos, la relación se asemeja mucho a una función afín. En la Figura 11 se ve como escriben (con ayuda de GeoGebra) dos funciones, una que interseca el primer y el segundo punto de la representación gráfica de los datos obtenidos, y otra que interseca el primer y último punto. En el plenario, señalan que la expresión algebraica que modela la situación sería un promedio de esas dos rectas. Aquí finaliza la clase 1.

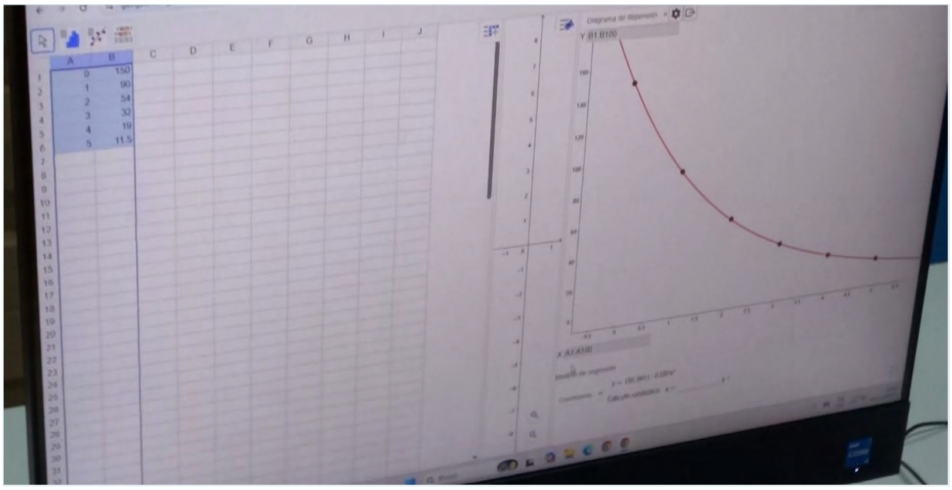
En la clase 2, los grupos comienzan ingresando los datos entregados en GeoGebra y analizan qué modelo de regresión se ajusta más a los datos. G_1 y G_4 escogen el modelo de regresión "crecimiento", señalando que su lectura e interpretación es más fácil, mientras G_2 y G_3 escogen el modelo de regresión "exponencial". Ambos modelos son equivalentes en su representación gráfica, pero se representan de distinta manera algebraicamente. La Figura 12 y Figura 13 muestran las representaciones gráficas y algebraicas de los modelos escogidos. En la Figura 14, G_4 justifica la elección de su modelo.

Figura 12. Modelo de regresión de GeoGebra escogido por G_3 a partir de datos entregados



Nota. "Modelo de regresión exponencial $y=150.3911 \cdot e^{-0,5152x}$"

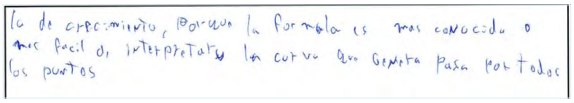
Figura 13. Modelo de regresión de GeoGebra escogido por G_4 a partir de datos entregados



Nota. "Modelo de regresión crecimiento $y=150.3911 \cdot 0.5974^x$"

Figura 14. Producción de G_4 post análisis de los modelos de regresión entregados por GeoGebra

Registren los datos del experimento en la hoja de cálculo de GeoGegra, y observen los modelos de regresión que aparecen. Si tuvieran que escoger el que se ajusta mejor al fenómeno estudiado y mejor pueden interpretar, ¿cuál escogerían? ¿Por qué? Justifiquen.



Nota. "La de crecimiento, porque la fórmula es más conocida o más fácil de interpretar, la curva que genera pasa por todos los puntos"

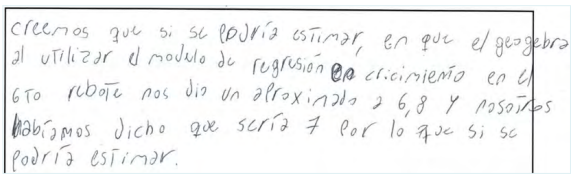
En el plenario de esta pregunta, G_4 expone su producción escrita, y complementa que el modelo de regresión exponencial arrojado por GeoGebra es más difícil de interpretar al estar presente el número de Euler, el que, según sus palabras, es desconocido por muchas personas. Respecto al patrón presente en las alturas, G_1, G_3 y G_4 solo mencionan la característica decreciente. G_2 complementa en el plenario que logran identificar el patrón en los datos de las alturas entregadas luego de cada rebote en la respuesta experta, señalando que existe un decrecimiento muy cercano a un 40%.

5.4 Análisis categoría Resultados matemáticos

Dado que los datos recolectados en la experimentación de G_3 entregan la altura de la pelota luego del sexto rebote, los grupos responden la pregunta de esta sección respecto a los datos brindados de la respuesta experta. Todos los grupos logran estimar el valor de la altura solicitada. Algunos lo hacen desde la interpretación del modelo entregado por GeoGebra, y luego calculando su valor remplazando el valor de la incógnita x en el modelo por 6. Algunos grupos, además, notan que en GeoGebra pueden ingresar algún valor en una de las variables del fenómeno, y el programa les arroja el valor de la otra variable relacionado al valor previamente ingresado. G_1 y G_3 realizan esta acción para comprobar lo hecho anteriormente con calculadora. La Figura 15 muestra la respuesta de G_1 en esta sección.

Figura 15. Producción de G_4 post análisis de los modelos de regresión entregados por GeoGebra

A partir del modelo escogido y de los datos graficados, ¿podrían estimar con mayor presición la altura que habría alcanzado la pelota luego del sexto rebote? ¿Cuál es el patrón que pueden evidenciar en las alturas de la pelota? Descríbanlo.



Nota. "creemos que si se podría estimar, en que el geogebra al utilizar el modelo de regresión en crecimiento en el 6to rebote nos dio un aproximado a 6,8 y nosotros habíamos dicho que sería 7 por lo que si se podría estimar"

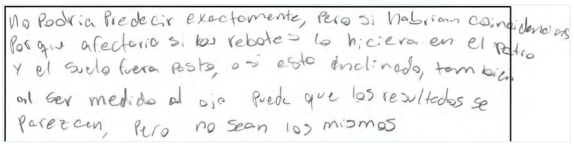
5.5 Análisis categoría Resultados reales

Todos los grupos plantean que en caso de repetir el experimento en otro lugar no se puede predecir exactamente el comportamiento de las alturas de la pelota, ya que dependerá de las condiciones iniciales, y que en caso de que se garantizan estas, se pueden hacer estimaciones bastante

cercanas de lo que pasaría. G_1 es quien relata de manera más amplia esta idea, lo que se muestra en la Figura 16.

Figura 16. Producción de G_1 pregunta predicción al volver a repetir el experimento en otro lugar

Si un estudiante les cuenta que realizará el mismo experimento, con el mismo tipo de pelota que escogiste en la actividad (fútbol, básquetbol, tenis o voleibol) y desde la misma altura inicial, pero en su casa ¿podrían predecir exactamente lo que ocurrirá con sus alturas luego de cada rebote a partir de lo hecho en esta actividad? Argumenten su respuesta.



Nota. "No podría predecir exactamente, pero si habrian coincidencias porque afectaría si los rebotes lo hiciera en el patio y el suelo fuera pasto, o si esta inclinado, también al ser medido al ojo puede que los resultados se parezcan, pero no sean los mismos"

Respecto a los ejemplos de situaciones cuyo comportamiento variacional sea similar, los grupos plantean ejemplos relacionados a tasas de crecimiento poblacional y de intereses en bancos.

Con respecto a la pregunta de si la pelota dejará de rebotar, la Figura 17 muestra el diálogo que se genera respecto a esta en el plenario.

Figura 17. Diálogo plenario final

[02:46 - 07:20] Video 4

$E_{2,1}$: "Sí, porque parte de una base, y va rebotando, se hace más chico, y así así y en algún momento llega a cero, porque no puede pasar a los números negativos tampoco".

$E_{1,2}$: "Yo puse que sí, porque en realidad es conocimiento que ya sabemos, la gravedad y por todo, y en algún punto se va a quedar quieta".

Docente: "Quizás la pregunta no fue la adecuada. ¿A los cuántos rebotes deja de rebotar la pelota?"

$E_{1,2}$: "Nosotros buscamos y en el 29 exactamente".

$E_{1,1}$: "Al menos al comprobar en GeoGebra, en 29 llegaba a cero".

$E_{1,2}$: "En 28 era 0,00001".

$E_{4,2}$: "Yo creo que en realidad nunca llega a cero. Quizás en el GeoGebra llega a cero, pero porque pone una cantidad exacta de decimales. Y como tiene una cantidad infinita de decimales, nunca va a llegar a cero".

Docente: "Jóvenes, lo que dice el $E_{4,2}$ es cierto. El GeoGebra, cuando tienes muchos ceros, y al final un número, coloca que eso es cero. Pero, en términos de cálculo, eso no es cero, es cero coma cero cero cero cero cero y algún otro número después".

$E_{2,3}$: "Pero".

$E_{1,1}$: "Tiende a cero".

$E_{2,3}$: "Sí pero como".

Docente: "Me encantó esa palabra".

$E_{2,3}$: "Eso es como matemáticamente, pero, nosotros ¿no llega a cero? Es que igual a mí me dijeron en esta clase eso no es matemática, es más como física. No se la ley, hay una ley, no recuerdo en este momento, la ley de inercia creo, con lo cual no se puede decir que va a llegar a cero… La matemática no es real, debería tener… no debería existir".

(todos ríen)

Docente: "¿cómo surge la matemática?"

$E_{2,3}$: "no es real no es real".

Nota: Transcripción de audio

6. DISCUSIÓN

En relación a las fases del ciclo de modelación de Blum-Borromeo Ferri, podemos observar en los resultados agrupados en las categorías de análisis Representación mental de la situación y Modelo real, lo importante que son las experiencias previas de los estudiantes en términos de qué aspectos considerar en el estudio de algún fenómeno. Por otro lado, en la categoría de análisis Modelo matemático se da cuenta de lo relevante que son las competencias matemáticas para poder construir e interpretar modelos, lo que se evidencia en las distintas propuestas de funciones por parte de los estudiantes que relacionaban los datos obtenidos después de realizar el experimento, en cómo consideran un abordamiento porcentual en la comparación de cantidades para establecer un patrón, y cómo conectan estos conceptos para manifestar el comportamiento variacional del fenómeno desde las nociones señaladas por Alarcón Relmucao (2024).

En línea con lo anterior, podemos ver cómo el uso de GeoGebra permitió representar, utilizar e interpretar el modelo del fenómeno al punto que los estudiantes cuestionaron sus características aún más de lo que se solicitaba, lo que se evidencia cuando averiguan de manera autónoma a los cuántos rebotes la pelota dejará de hacerlo. Esto complementa el uso de la tecnología solo para fines de cálculo declarados en el estado del arte de Flores y Vigo (2019) para la enseñanza de la FE. Se confirma además cómo el análisis covariacional, estudiado en este caso a través de un Software, es la base para la construcción del modelo buscado tal y como lo plantean Confrey y Smith (1995).

Los diálogos presentados en los resultados de la propuesta son bastante interesantes, ya que manifiestan, en las reflexiones de los estudiantes, cómo las conexiones entre el mundo real y el mundo matemático que plantea el marco teórico, sumados a los conocimientos que se tengan de cada uno de ellos, son trascendentales en el proceso de aprendizaje-enseñanza de la matemática. En particular, las respuestas a la pregunta de si la pelota dejará de caer muestra cómo los estudiantes, al igual que en la anterior implementación, logran a partir del fenómeno estudiado considerar los dos mundos, y son capaces de interpretar el modelo desde la mirada de ambos, articulando lo conceptual y teórico del mundo matemático con los alcances y limitaciones que tienen estas ideas con el mundo real, tal y como apunta Borromeo Ferri (2010).

7. CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos podemos concluir que tareas de modelación que estudien algún fenómeno conocido y busquen transitar por las distintas fases del ciclo de modelación, permiten describir cómo los estudiantes modelan y aprenden en el contexto de aprendizaje de la FE. La combinación de todos los elementos de la tarea dio pie a los estudiantes a utilizar la matemática como herramienta para cuestionarse el fenómeno en estudio durante todo el proceso de enseñanza, y lograr además aprender un nuevo concepto matemático. Se evidencia una progresión en sus validaciones, basadas en conocimientos obtenidos en el transcurso de la tarea, a diferencia de las validaciones intuitivas originales.

Respecto a las fases del ciclo de modelación, en las preguntas de la tarea agrupadas en las fases Representación mental y Modelo real, hubo respuestas de todos los estudiantes, lo que recalca la importancia de contextualizar la enseñanza en situaciones que sean conocidas, de modo que tengan la capacidad de proponer ciertas hipótesis y argumentarlas basadas en experiencias previas y conceptos matemáticos conocidos, comunicándolas a través de una combinación entre ellas. En este sentido, el fenómeno escogido para la situación fue un acierto. En las fases Modelo matemático y Resultados matemáticos fue trascendental la conexión en los estudiantes de sus contenidos previos en matemática con el uso del Software GeoGebra para la interpretación del modelo que este les entregaba, el cuál era desconocido para la mayoría de ellos (el manejo que tenían del concepto función acá fue clave para sus interpretaciones). Lo anterior es importante tenerlo en consideración ante el creciente protagonismo de la inteligencia artificial en la enseñanza de la matemática, ya que su presencia y uso para un aprendizaje significativo debe idealmente estar articulado con las fases anteriores y las características que se buscaron en ellas para enseñar nuevos conocimientos. Finalmente, la fase de Resultados reales se configuró como un momento decisivo en la consolidación del aprendizaje del concepto de FE. Esta etapa representa el cierre del proceso de modelación, en el cual, tras la integración de los distintos conceptos matemáticos abordados durante las clases, se evidenció cómo el modelo construido permitió, mediante su interpretación del fenómeno estudiado, establecer los alcances y limitaciones del mismo en relación con las características del mundo real. La culminación del ciclo de modelación se constituyó, así, en una instancia valiosa para que los estudiantes reconocie-

ran, más allá de la adquisición de un nuevo concepto matemático, la relevancia de esta disciplina en la vida cotidiana, su potencial de aplicación en diversas situaciones y su papel en la comprensión de los fenómenos que los rodean.

Esta investigación abre diversas posibilidades para profundizar en la comprensión de los procesos de modelación matemática en el aula. Los resultados obtenidos evidencian la necesidad de seguir indagando cómo los estudiantes transitan entre los mundos real y matemático, donde están involucradas habilidades de interpretación, argumentación y generalización que no siempre se explicitan, sino que muchas veces se realizan de manera inconsciente. Futuras investigaciones podrían centrarse en caracterizar los distintos tránsitos efectuados por cada estudiante en el ciclo de modelación, considerando los obstáculos epistemológicos y didácticos que surgen durante la construcción de modelos.

DECLARACIÓN DE USO ÉTICO DE HERRAMIENTAS DE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Para apoyar la búsqueda de referencias bibliográficas se utilizó la herramienta Consensus. Para apoyar la revisión de la escritura se utilizó la herramienta ScholarGPT (basada en el modelo GPT-5 de OpenAI).

6. REFERENCIAS

Alarcón Relmucao, N. (2024). Nociones básicas como base de la comprensión de la función exponencial en la educación secundaria: Un estudio comparativo entre Chile y Alemania [Tesis doctoral, Universidad de Bielefeld]. PUB – Publications at Bielefeld University.

Barrera, R., Morales, K., Norambuena, P., y Ortiz, N. (2019). Texto de Matemática 3° Medio del Proyecto SAVIA. SM Chile S. A.

Blum, W., y Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? Journal of Mathematical Modelling and Application. 1(1), 45-58.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), 86–95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behaviour. Journal für Mathematik-Didaktik, 31(1), 99–118. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8

Brucki, C. M. (2011). O uso de modelagem no ensino de função exponencial [Disertación de maestría, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. Journal for Research in Mathematics Education, 26(1), 66–86.

Depósito Central de Valores y Cadem. (2022). Estudio de educación financiera 2022. https://www.dcv.cl

Euler, L. (1998). Introduction to analysis of the infinite. Book 1 (J. Blanton, Trad.). Springer-Verlag. (Trabajo original publicado ca. 1748).

Flores, R., y Vigo, K. (2019). La función exponencial en la enseñanza media: un estado del arte. Revista de Produção Discente em Educação Matemática, 8(2), 27-47.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/

Heyd-Metzuyanim, E., Sharon, A. J., Baram-Tsabari, A., y Golan, D. (2021). Mathematical media literacy in the COVID-19 pandemic and its relation to school mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 108(1–2), 201–225. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10075-8

Katz, V. J. (1998). A history of mathematics: An introduction. Addison-Wesley.

Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods (pp. 365–380). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13

Medina, V., Vallejos, M., y Gutiérrez, D. (2020). El sentido de las matemáticas. Cuaderno de Investigaciones: Semilleros Andina, 13(13), 223–231.

Ministerio de Educación de Chile. (2024). Matemática 3° y 4° medio: Texto del estudiante.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. NCTM.

Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education (pp. 3–32). Springer.

Pezoa, M., y Morales, A. (2016). El rol de la modelación en una situación que resignifica el concepto de función. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 11(2), 52–64.

Realpe Vidal, C. L. (2022). La enseñanza de la función exponencial, apoyada en la teoría del aprendizaje significativo crítico, en los estudiantes del grado 9 de la IER Botero [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional Universidad Nacional de Colombia.

https://redcol.minciencias.gov.co/Record/UNACIONAL2_16e4b5e84c6883c8aa4d0add106dccb1/Details

Stake, R. E. (2007). Investigación con estudio de casos (4.ª ed.). Morata.

Vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Springer Spektrum.

Yin, R. K. (2018). Case study research and applications: Design and methods (6th ed.). SAGE Publications.