SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.82

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y DISPERSIÓN MIRADAS DESDE UN DEPORTE TÍPICO CHILENO Y LA MODELACIÓN ESTADÍSTICA

MEASURES OF CENTRAL TENDENCY AND DISPERSION SEEN FROM A TYPICAL CHILEAN SPORT AND STATISTICAL MODELING

Elisabeth Ramos-Rodríguez
elisabeth.ramos@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Natalia Alvarado-Garcés
natalia.alvarado.g@mail.pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Patrícia Vásquez
patricia.vasquez@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Andrea Vergara
avergarag@ucm.cl
Universidad Católica del Maule, El Maule, Chile

RESUMEN

Este artículo presenta resultados de una propuesta de aula que considera la modelación estadística para la enseñanza de las medidas de tendencia central y dispersión, a partir del contexto que provee un deporte típico chileno. Desde un enfoque de investigación basado en el diseño, se elabora una propuesta de aula, implementada en estudiantes de 15 y 16 años. Su diseño promueve la modelación estadística, considerando como contexto un deporte nacional chileno, la rayuela, lo que permite abordar un problema cultural de interés para los estudiantes. Para el análisis de su implementación se articularon y adaptaron las fases de un ciclo de investigación estadística con las fases de un modelo asociado al proceso de modelación matemática. Los hallazgos de la implementación evidencian que los estudiantes lograron transitar exitosamente en las dos primeras fases del proceso de modelación, teniendo algunos de ellos más dificultad en las dos últimas fases. Este estudio permite evidenciar que aún es necesario continuar investigando en cómo la modelación de naturaleza estadística se inserta en el currículum matemático, y cómo estas pueden conjugarse, de modo de contar con criterios e indicadores claros para evaluar el desempeño de estudiantes en actividades que involucren análisis estadísticos en contexto.

PALABRAS CLAVE:
Modelación estadística, Medidas de tendencia central, Medidas de dispersión, Deportes típicos.

ABSTRACT

This article presents results of a classroom proposal that considers statistical modeling for the teaching of measures of central tendency and dispersion, based on the context provided by a typical Chilean sport. From a design-based research approach, a classroom proposal is developed, implemented in 15 and 16-year-old students. The design promotes statistical modeling, considering a Chilean national sport, hopscotch, as a context, which allows students to address a cultural problem of their interest. For the analysis of its implementation, the phases of a statistical research cycle were articulated and adapted to the phases of a model associated with the mathematical modeling process. The findings of the implementation show that students managed to successfully go through the first two phases of the modeling process, some of them having more difficulty in the last two phases. This study makes it possible to show that it is still necessary to continue investigating how modeling of a statistical nature is inserted in the mathematical curriculum, and how these can be combined, in order to have clear criteria and indicators to evaluate the performance of students in activities that involve statistical analysis in context.

KEYWORDS:
Statistical modeling, Measures of central tendency, Measures of dispersion, Typical sports.

Recibido: 30 de Mayo de 2021, Aceptado: 1 de Agosto de 2021

1. Introducción

En el ámbito escolar, la estadística y las probabilidades corresponden a un sector de la asignatura de Matemáticas donde las definiciones, propiedades y algoritmos se van presentando de manera progresiva. De acuerdo al Programa de Matemáticas de tercero y cuarto año (jóvenes entre 15 y 17 años de edad) de enseñanza media de Chile (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2020), esta rama de la matemática promueve en los estudiantes maneras de pensar y de actuar en la toma de decisiones. Por otra parte, de acuerdo con la Asociación Americana de Estadística (ASA), la Estadística es "la ciencia de aprender a partir de datos y de medir, controlar y comunicar incertidumbre" (ASA, 2021, s. n., traducción propia), aunque en muchas ocasiones el término de estadística en el ámbito escolar se refiere a la información que proviene de tablas y gráficos (Saavedra, 2018).

El programa de estudios para tercer año medio en el sistema escolar chileno se refiere al uso de datos estadísticos y de modelos probabilísticos para la toma de decisiones, cuyo propósito es que los estudiantes interpreten datos en situaciones de incerteza. Para ello, el Ministerio de Educación de Chile estipula objetivos de aprendizaje, que consideran tanto el desarrollo de habilidades y destrezas, como el logro de conocimiento y comprensión: tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales, tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico y argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados (MINEDUC, 2020).

Sin embargo, se observa que en Chile este contenido suele enseñarse al finalizar el año escolar, pasando a un segundo plano el análisis de los datos. Además, la enseñanza de las medidas de dispersión en los libros de texto se realiza prioritariamente presentando las definiciones y las propiedades y/o fórmulas (Del Pino y Estepa, 2019). Al respecto, Lee y Lee (2011) afirman que los profesores tienen dificultades en la comprensión de las medidas de tendencia central y de dispersión. Es importante resaltar que en Chile la formación de los docentes, en muchas de las instituciones formadoras, contempla dos asignaturas de Estadística y en el último tiempo se ha incorporado una relacionada con la didáctica del tema. Esta exigua dotación de asignaturas relacionadas con la estadística podría ser la razón de las dificultades que presentan algunos docentes para la enseñanza de la disciplina, dado que hay significativas diferencias entre el desarrollo del pensamiento estadístico y el matemático, pues el primero aspira a trabajar a partir de los datos según su contexto, mientras que el segundo se propone la abstracción de la realidad (Cobb y Moore, 1997). En este sentido, la estadística proporciona una metodología para abordar empíricamente información complicada e incierta, de una manera que sea útil y científicamente válida (Chambers, 1993).

Otro elemento interesante que revela el programa de estudio chileno está dado por la relación entre la habilidad de modelar y el aprendizaje de la estadística. El año 2012, en Chile, se puso en marcha el nuevo marco curricular para los cursos de primero a sexto año de educación básica (niños entre 6 y 11 años), el año 2016 se implementó desde séptimo básico a segundo año de educación media (alumnos entre 12 y 15 años) y el año recién pasado para los cursos de tercer y cuarto año de educación media (jóvenes entre 16 y 17 años). Estas bases curriculares (MINEDUC, 2012, 2016, 2020) buscan fomentar en los estudiantes el pensamiento matemático, para ello se hace necesario desarrollar las habilidades –relacionadas entre sí– de: resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar. De esta manera, en los últimos años se han presentado, en los diferentes niveles escolares, situaciones que conllevan la modelación, tomando en cuenta aquellas relacionadas en ámbitos sociales, reales y científicos, tal como se ha venido dando en el ámbito internacional (Solares et al., 2018).

En términos de estudios en educación matemática, la modelación ha ocupado un lugar preponderante desde hace ya dos décadas (véase, por ejemplo, Stillman et al., 2020). Aun así, Frejd y Bergsten (2018) mencionan que no hay un consenso entre los investigadores en educación matemática sobre lo que constituye a la modelación y esta se ha abordado de diferentes maneras en los documentos curriculares en el mundo, dándose un amplio espectro que va desde incorporar modelos matemáticos en otras asignaturas, además de Matemáticas, hasta no enseñar Matemáticas de manera independiente, sino que integrándola a otras materias, de tal manera de potenciar la modelación matemática. Esta problemática se hace latente también en la educación estadística, considerada en este estudio como una rama de la educación matemática, dada su inclusión en el currículum escolar en la asignatura de Matemática, por lo que el profesor que la enseña es el de Matemáticas.

La investigación en modelación matemática, en el ámbito de la educación matemática, ha sido prominente en la última década, pero aquella relacionada con la modelación estadística es limitada (Pfannkuch et al., 2018). Al respecto, Cobb (2007) sugiere que la modelación debería desempeñar un papel importante en la enseñanza de la estadística, afirmando que todos los métodos estadísticos se derivan de un modelo y que uno de los propósitos de la educación matemática es fomentar el pensamiento estadístico en los estudiantes a través de un razonamiento explícito entre el modelo y la realidad. El desarrollo de la modelación estadística ayuda a enfrentar las dificultades de aprendizaje de la estadística, permitiendo al estudiante desarrollar la capacidad de resolución de problemas (Tacoma et al., 2018).

Por su parte, Pfannkuch et al. (2018) argumentan la necesidad de desarrollar innovación en el campo de la educación estadística, en donde podemos destacar algunas propuestas como las de Biehler et al. (2018), Budgett y Pfannkuch (2018) y Kazak y Pratt (2017).

Atendiendo a la problemática expuesta, se presenta una propuesta de aula basada en la modelación estadística con la finalidad de que estudiantes le den significado a las medidas de tendencia central y de dispersión mediante su propia experimentación, poniendo en juego sus conocimientos previos, en especial en lo relativo al concepto de desviación media. La actividad matemática se desarrolla a partir de un deporte típico de Chile, la rayuela, que, de acuerdo con Cádiz (2018), tiene un encanto relevante en el país y que hoy por hoy ha ido perdiendo relevancia.

2. Marco de referencia

El marco de referencia de este estudio considera elementos para el diseño de propuestas de aula que involucra la modelación, los que orientarán la elaboración de la situación de aprendizaje sobre modelación estadística. Además, articula y adapta las fases del ciclo de investigación estadística de Wild y Pfannkuch (1999) con la propuesta de evaluación de las fases de un proceso de modelación matemática de Acebo-Gutiérrez y Rodríguez-Gallegos (2021). Esto aportará en la creación de categorías de análisis para la modelación bajo una conceptualización estadística. Se incorpora a este marco de referencia, una descripción de los elementos estadísticos que se pondrán en juego en la propuesta de aula. Del mismo modo, proveen herramientas para enfrentar el análisis de las producciones de los estudiantes.

2.1 Diseño de actividades de modelación

Para el diseño de actividades de modelación consideramos los principios relacionados con actividades de enseñanza para esta habilidad propuestos por Frejd y Bergsten (2018), así como lo planteado por Da Silva y Barbosa (2011), elementos que se describen a continuación.

En el estudio presentado por Frejd y Bergsten (2018) se presentan ocho principios (Tabla 1) para ser considerados en la planificación de actividades de enseñanza que involucren modelación, los que hemos considerado en el estudio.

Tabla 1. Descriptores de los ocho principios para la planificación de actividades escolares que involucran la modelación
Nota. Obtenido de Frejd y Bergsten (2018, pp. 125-126).

Principio	Descriptores
P1: Explicidad del objetivo de la actividad	Hacer explícito el objetivo del trabajo de modelación (describir, comprender, predecir, participar en una discusión crítica); cómo una descripción matemática/recreación del problema puede contribuir al objetivo.
P2: Centrarse en el problema	Definir el problema y considerar todo el problema durante el trabajo de modelación.
P3: Nivel del sistema	Ver el problema como enmarcado a través de un sistema, considerando que los sistemas parciales se modelan por separado.
P4: Supuestos y simplificaciones	Cuestionar por qué las variables elegidas son importantes.
P5: Relevancia y precisión de los datos	Considerar la calidad de los datos utilizados para estimar la influencia de las variables seleccionadas dentro del modelo.
P6: Papel de la tecnología	Constatar que el uso de tecnología es crucial para el trabajo de modelación.
P7: Cómo funciona el modelo	Revisar cómo funciona el modelo cuando se está probando (validación); si es posible probarlo o no, y qué tan útil y efectivo es para su propósito.
P8: Comunicación	Discusión o negociaciones entre los participantes a lo largo de la actividad de modelación.

Por otro lado, bajo una perspectiva sociocrítica, Da Silva y Barbosa (2011) proponen para el diseño de actividades de modelación tres aspectos: a) la presentación de una situación que aborde un problema socialmente relevante para los estudiantes, b) que los estudiantes tengan una participación activa en la construcción del modelo, y c) que el docente sea un mediador.

2.2 Ciclo de investigación en estadística y modelación estadística

En Wild y Pfannkuch (1999) encontramos un modelo del ciclo de investigación en estadística, conocido por las siglas PPDAC que resumen sus etapas: Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusión (Figura 1). De acuerdo con los autores, un ciclo PPDAC se ocupa de abstraer y resolver un problema estadístico basado en un problema real más grande, dando cuenta de la realidad que enfrentan los estadísticos cuando la conclusión de una investigación genera preguntas que conducen a otra investigación.

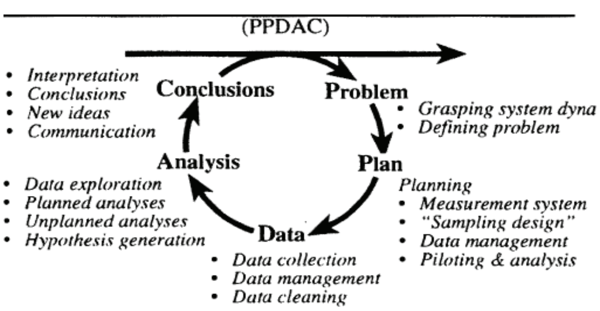

Figura 1. Ciclo de Investigación en Estadística
Nota. Obtenido de Wild y Pfannkuch (1999, p. 226).

Coincidimos con Wild y Pfannkuch (1999) en que se construyen y se usan modelos para comprender y predecir el comportamiento de la realidad y que, en relación a la estadística y la modelación estadística, al igual que la modelación matemática, simplifican la realidad, pero consideran con mayor énfasis la información que se tiene de ella. En la Figura 2 se encuentra el proceso de modelación estadística que dan estos autores y que hemos considerado en este estudio, el cual es un proceso de abstracción que supone las concepciones estadísticas del problema, donde influye la forma en que se recogen los datos sobre el sistema y se analizan.

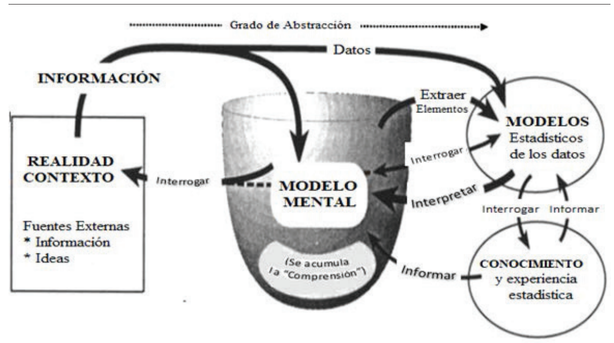

Figura 2. Proceso de Modelación Estadística
Nota. Traducción propia de Wild y Pfannkuch (1999, p. 230).

La Figura 2 ilustra la forma en que aprendemos sobre la realidad en contexto a medida que avanza una investigación estadística. La *comprensión* de la realidad del contexto se construye a partir de modelos mentales de esta. Estos modelos se basan en información de la realidad del contexto, por ejemplo, incorporando *conocimiento experto*. En un mundo ideal, estaríamos comprobando continuamente la idoneidad del mapeo entre modelo y realidad al *interrogar* la realidad del contexto. Parte de la información que buscamos y/o obtenemos de la realidad del contexto son datos estadísticos. Construimos modelos estadísticos para obtener información a partir de esta *interpretación* que retroalimenta el modelo mental.

2.3 Evaluación de la Modelación Matemática en fases

Acebo-Gutiérrez y Rodríguez-Gallegos (2021) proponen el diseño y validación de una rúbrica para la evaluación de modelación matemática en alumnos de secundaria, que nos brinda orientaciones precisas respecto de cómo distinguir las fases que tienen lugar cuando los estudiantes trabajan de forma individual para resolver un problema de modelación. Para efectos de este análisis se considerarán las descripciones generales de las fases, sin considerar los indicadores por nivel de logro, como se puede ver en la Tabla 2.

Tabla 2. Descripción de las fases para evaluar la resolución de problemas de modelación matemática
Nota. Adaptado de Acebo-Gutiérrez y Rodríguez-Gallegos (2021, p. 23).

Fases	**Descripción**
Formulación	Identifica el problema o situación del mundo real. Identifica las partes o datos relevantes del problema para su solución.
Resolución	Determina variables y parámetros para construir un modelo matemático. Genera un modelo matemático para representar el problema. Realiza cálculos y resuelve el modelo matemático.
Interpretación	Formula explicaciones. Hace supuestos y reconoce limitaciones.
Validación	Contrasta los resultados con la realidad. Reflexiona sobre otras formas de resolver el problema o desarrollar las soluciones existentes de diferentes maneras.

2.4 Fases en un ciclo de modelación estadística

Considerando la naturaleza específica del ciclo PPDAC, el proceso de modelación estadística propuesto por Wild y Pfannkuch (1999) y las recomendaciones para evaluar un proceso de modelación matemática, se proponen cuatro fases para la modelación estadística, de tal manera que estas puedan servir como categorías para clasificar las respuestas de los estudiantes cuando se enfrentan a una situación de modelación estadística. Esta propuesta reorganiza las fases del PPDAC según las cuatro fases de la propuesta de Acebo-Gutiérrez y Rodríguez-Gallegos (2021). Las fases *Problema y Dato* del ciclo PPDAC se enmarcan en la fase de *Formulación*, la fase *Planificación* del ciclo PPDAC se combina con la fase *Resolución*, la fase de *Análisis* del ciclo PPDAC complementa y amplía la fase *Interpretación*, finalmente la fase *Conclusión* del ciclo PPDAC se articula con la fase *Validación*. Esta reestructuración puede observarse en la Tabla 3.

Tabla 3. Descripción de las fases propuestas para analizar un proceso de modelación estadística
Nota. Elaboración propia.

Fases	**Origen**	**Descripción**
Comprensión	Problema y datos (PPDAC) + Formulación (rúbrica)	Se identifica o define el problema o situación del mundo real y las partes o datos relevantes para la solución de este. Se recolectan y gestionan los datos.
Construcción y resolución	Plan (PPDAC) + Resolución (rúbrica)	Se planifica el sistema de medición, determinando las variables de interés. Se propone un modelo estadístico para representar el problema y se pone a prueba (pilotaje). Se organizan los datos y se realizan los cálculos.
Interrogación e interpretación	Análisis (PPDAC) + Interpretación (rúbrica)	Se analizan los resultados obtenidos, formulando explicaciones. Se interrogan las posibles hipótesis o bien se hacen nuevos supuestos a partir de la exploración de los datos. También se reconoce limitaciones o redirecciones para continuar investigando.
Elaboración de información	Conclusión (PPDAC) + Validación (rúbrica)	Se contrastan los resultados con la realidad y se elaboran conclusiones. Se reflexiona sobre otras formas de resolver el problema. Se identifican y comunican las nuevas ideas construidas.

2.5 Conceptos basales: medidas de tendencia central y de dispersión

Las medidas de tendencia central son usadas para describir el centro o la localización de este en un conjunto de datos. Estas corresponden a la *moda*, la *mediana* o la *media aritmética*. La moda se calcula para datos numéricos, ordinales o nominales, la mediana para datos numéricos u ordinales y la media, para datos numéricos. De acuerdo con Saavedra (2018), la moda y la mediana no usan toda la información, ya que corresponden respectivamente al valor que más se repite y al valor que está justo al medio o al promedio de los dos datos centrales (cuando el número de datos es par). Por otra parte, una muestra podría no presentar una moda o bien ser bimodal, y la media es una medida sensible a los valores extremos, a diferencia de la mediana, que es más estable frente a cambios en los valores extremos o a la presencia de datos atípicos. Además, aunque la media considera todos los valores de la muestra, no tiene por qué ser uno de los valores de la muestra. Otra característica que tiene la media es que, si se tienen dos muestras distintas con la misma cantidad de datos, entonces la media de la muestra formada por ambas muestras es la suma de cada una de las medias, característica que no se cumple para la moda ni para la mediana.

Otro aspecto a considerar, de acuerdo con Saavedra (2018) en relación a la distribución de frecuencias, es que si esta distribución es:

- *Bastante simétrica*, entonces la media, la mediana y la moda son muy parecidas.
- *Asimétrica a la izquierda*, entonces media < mediana < moda.
- *Asimétrica a la derecha*, entonces moda <mediana < media.

Estas medidas son recomendadas para inferir el comportamiento de variables en poblaciones y muestras.

Las medidas de dispersión complementan a las medidas de tendencia central, siendo esenciales de considerar en la distribución de datos. A su vez, estas resultan ser útiles para comparar distribuciones y comprender los riesgos en la toma de decisiones. De acuerdo con De Veaux et al. (2003), *la dispersión o variabilidad* es la razón de ser de la estadística, donde la dispersión es la diferencia entre el valor observado y el valor verdadero del fenómeno en cuestión. Así, las medidas de dispersión "indican, hablando de un modo general, la distancia promedio de los valores muestrales al centro de la distribución" (Saavedra, 2018, p. 114).

3. Metodología

En este apartado se presentan los elementos metodológicos que guían el estudio y, posterior a ello, la propuesta de aula que se diseña, implementa y analiza.

3.1 Elementos metodológicos del estudio

Este estudio, de carácter cualitativo, busca recoger datos mediante la observación del comportamiento y expresiones de los sujetos puestos frente a un estímulo, buscando el sentido y significado que ellos le dan a la información obtenida, a través de los datos; en nuestro caso, la implementación de una propuesta de enseñanza. Se ciñe al enfoque de *investigación basada en el diseño*, dado que permite diseñar y evaluar intervenciones educativas, con el fin de resolver situaciones complejas, buscando generar y promover un conjunto de construcciones teóricas fundamentadas en contextos naturales. Esta investigación se centrará en explicar por qué el diseño (que considera la modelación estadística) funcionó y de qué manera puede ser adaptado a otras circunstancias.

Consideramos las etapas propuestas por Plomp (2010) para una investigación de diseño: teórica, experimental y terminal. La fase teórica está centrada en el desarrollo de un marco teórico o conceptual, en nuestro caso en relación a la modelación estadística y las medidas de tendencia central y de dispersión. En la fase experimental se diseña la propuesta de prototipo inicial, se realiza la intervención y una evaluación formativa de esta, de manera cíclica. Por último, en la fase terminal concluimos si la intervención cumple con las especificaciones predeterminadas.

Para la fase experimental se creó una situación de aula, en donde los estudiantes recogen los datos mediante su experimentación, dando sentido al proceso de modelación estadística. Esta se presenta en la subsección siguiente de este apartado.

La experimentación se realiza el año 2020 en situación de pandemia, por lo que la propuesta de aula se implementa de forma remota mediante un trabajo grupal previo y una clase virtual desde la plataforma *Zoom*, con una duración de 40 minutos. La implementación se llevó a cabo con un grupo de 28 estudiantes de tercer año medio (15 y 16 años) de un colegio particular subvencionado científico-humanista de la Región Metropolitana de Chile. Es importante destacar que los estudiantes, en el área de probabilidad y estadística, cuentan con conocimientos de gráficos de barras, diagramas, medidas de centralización, medidas de tendencia central para datos cualitativos y cuantitativos, medidas de tendencia central para datos agrupados y no agrupados y sus respectivas organizaciones en tablas de distribución de frecuencias y gráficos. Sin embargo, no han abordado los conceptos de dispersión de datos y de desviación estándar.

Se consideraron dos semanas de aplicación; en la primera de ellas se plantea la problemática a trabajar y los alumnos diseñan el juego (*la rayuela*) de forma asincrónica, a la semana siguiente se recopilan datos obtenidos por los estudiantes, para luego plantear las preguntas que provocan que emerja un modelo, su resolución y validación.

Los datos fueron recogidos a través de diversos canales. Uno de ellos corresponde a la *observación de las clases*, donde se obtiene *registro escrito* del chat por el cual los estudiantes se comunican durante la clase online, se obtiene un *registro visual*, ya sea en video o fotografías, de las construcciones y experimentaciones de los estudiantes, los cuales son enviados a la profesora. Por otra parte, está el *registro escrito* de un informe obtenido por los estudiantes una vez realizada la experimentación y vaciado de la información, los cuales se extraen dando respuesta a las preguntas planteadas, las que tienen como fin obtener información a partir de sus propios análisis y conclusiones.

El método utilizado para el análisis es el método de *análisis de contenido*, donde las unidades de análisis han sido las intervenciones de los alumnos en la clase y las respuestas a la tarea propuesta en el informe grupal. Las categorías de análisis corresponden a las fases de la *Modelación Estadística* propuestas en el marco teórico (Tabla 3). Cada fase tiene sus respectivos indicadores, a su vez los indicadores tienen cuatro niveles para su medición, dependiendo del nivel de presencia de dicha categoría en la producción de los estudiantes, donde 1 es el valor mínimo y 4 es el valor máximo de presencia (Tabla 4).

Tabla 4. Indicadores y niveles para las categorías de análisis utilizadas en el estudio.

Nota. Elaboración propia.

Categorías	**Comprensión**		**Construcción y resolución**			**Interrogación e interpretación**		**Información**	
Indicadores	Identifica el problema o situación del mundo real y construye el modelo mental	Recolecta datos de la realidad	Determina variables y parámetros para construir un modelo estadístico	Genera un modelo estadístico para representar el problema	Realiza cálculos y resuelve el modelo estadístico	Formula explicaciones	Contrasta los resultados con la realidad	Reflexiona sobre otras formas de resolver el problema o desarrollar las soluciones	Presenta los resultados del estudio
Niveles	1/2/3/4	1/2/3/4	1/2/3/4	1/2/3/4	1/2/3/4	1/2/3/4	1/2/3/4	1/2/3/4	1/2/3/4

3.2 El diseño del prototipo de intervención

El objetivo principal de la tarea es la indagación y la recogida de datos por parte de los estudiantes y la utilización de las medidas de tendencia central y de dispersión a partir de un deporte nacional: la rayuela.
Según consta en la Biblioteca Nacional de Chile (Ministerio del Deporte de Chile, 2014), la ley número 20.777, promulgada el 17 de septiembre de 2014, señala: “Declárase la actividad deportiva de la rayuela como deporte nacional, que se disputa por puntos, consistente en el lanzamiento de tejos, desde distancias prefijadas, hacia una superficie determinada, atravesada por una lienza a alcanzar” (p.1).
En Báez et al. (2020) se indica que en tiempos de la Colonia era un juego de la calle, donde niños y adultos se entretenían y se señala las normas de este, las que se dan en la Figura 3.

Se parte con los tejos; existen tejos cilíndricos y redondos metálicos, según el lugar donde se juegue dependerá la forma del tejo; de Arica a Chillán se usa el tejo cilíndrico y en el Sur, la forma redonda conocido como paica.

Los jugadores deben elegir la forma de los tejos antes de empezar el juego, no pueden jugar con tejos diferentes, debe ser el mismo tipo para todos, solo puede variar el peso de estos, lo que queda a criterio del jugador, pero siempre manteniendo la distancia de la rampa de lanzamiento a la lienza.

La rampa de lanzamiento es donde los jugadores tiran los tejos y tiene una distancia de 14 metros hasta el receptáculo, acá es donde caen los tejos; es un marco construido de barro con una leve inclinación para que los jugadores puedan ver mejor la lienza, esta lienza divide el marco y es en ella donde los tejos deben caer para que se produzca la quemada, lo que le otorga los puntos al jugador. La meta del juego son doce puntos, el primer jugador o equipo que llegue a este número es el que gana.

Figura 3. Instrucciones del deporte nacional chileno la rayuela

Nota. Obtenido de Báez et al. (2020, p. 371)

Considerando lo anterior, se elabora la propuesta de aula, de tal manera que pueda ser aplicada y realizada en conjunto con los estudiantes en contexto online. De esta forma, se presentó a los estudiantes la construcción del cajón de rayuela y, mediante la completación de las tablas de distribución de frecuencias, ellos podían concluir algunas situaciones, entregando fotografías y un informe realizado por ellos en el que se ponía de relieve los descubrimientos obtenidos. A continuación, en la Figura 4, se presenta la tarea diseñada en relación a la rayuela.

La Rayuela

Instrucciones

i) En cada partido, deben jugar dos personas, quienes tienen que ubicarse a dos metros de la caja, tal como lo indica la Figura.

ii) Cada jugador debe hacer 10 lanzamientos, en cada uno de ellos debe medir la distancia entre la ubicación donde quedó el tejo (la marca que hay en la caja) al punto medio del hilo (el punto que está ubicado al centro del hilo de la caja) y anotar en la tabla dicha longitud en cm.

Número de lanzamiento	Jugador 1 Distancia entre la marca al punto medio del hilo en cm	Jugador 2 Distancia entre la marca al punto medio del hilo en cm
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Desafío

a) Juega a la rayuela con integrantes de tu familia, recuerda que debes registrar las medidas en la tabla.

b) En grupo de cuatro personas deben presentar sus tablas y a partir de ellas, responder las siguientes preguntas

1. ¿Cuál creen que fue el mejor jugador? ¿Por qué?
2. ¿Cuál debería ser el jugador ganador? ¿Por qué?
3. ¿Cómo determinaron al ganador de la partida? Explique el procedimiento con sus propias palabras
4. Si hubiera una expresión matemática que representara al ganador ¿Cuál creen que podría ser dicha expresión, para determinar el ganador en las futuras partidas de rayuela?

Figura 4. Tarea escolar presentada a los estudiantes

Nota. Elaboración propia.

La tarea escolar planteada pretende que emerja de los estudiantes un concepto estadístico a través de la intuición y la interpretación de los datos recogidos, considerando la participación activa de estos en la construcción del modelo y una actuación del docente como mediador.

Como ya se mencionó, en la propuesta de aula se han considerado los principios de diseño para una actividad de modelación planteados por Frejd y Bergsten (2018). En la tarea escolar se hace explícito el objetivo del trabajo de modelación, se define el problema y es considerado durante el trabajo de modelación. Con las preguntas planteadas en el enunciado de la tarea, se busca que los estudiantes cuestionen por qué las variables elegidas son importantes, indaguen sobre la calidad de los datos utilizados para estimar la influencia de las variables seleccionadas dentro del modelo, y sean capaces de delimitar cómo funciona el modelo cuando se está probando; si es posible probarlo o no, y qué tan útil y efectivo es para su propósito.

Desde la mirada sociocrítica bajo las directrices de la modelación propuesta por Da Silva y Barbosa (2011), la innovación considera la presentación de una situación que aborda un problema socialmente relevante para los estudiantes, la rayuela, como deporte nacional típico, donde se vela por que los estudiantes tengan una participación activa en la construcción del modelo, y donde el docente toma un rol de mediador.

4. Resultados

Los resultados se presentan en relación a la implementación de la propuesta de aula que considera la modelación estadística para la enseñanza de las medidas de tendencia central y dispersión, a partir del contexto que provee un deporte típico chileno, aplicada a estudiantes de 15 y 16 años. La modalidad de trabajo de los estudiantes fue en grupos de cuatro, donde, para efectos del presente escrito, se les nombró como grupo A, B, C, D, E, F y G.
Al tabular las respuestas, según las fases de la Modelación Estadística planteadas, se obtiene el resumen que se presenta en la Tabla 5.

Tabla 5. Tabulación de respuestas según fases del proceso de modelación

Nota. Elaboración propia.

Grupo	Comprensión		Construcción y resolución			Interrogación e interpretación		Información	
	Identifica el problema o situación del mundo real y construye el modelo mental	Recolecta datos de la realidad	Determina variables y parámetros para construir un modelo estadístico	Genera un modelo estadístico para representar el problema	Realiza cálculos y resuelve el modelo estadístico	Formula explicaciones	Contrasta los resultados con la realidad	Reflexiona sobre otras formas de resolver el problema o desarrollar las soluciones	Presenta los resultados del estudio
A	4	4	4	4	4	4	2	2	2
B	4	4	4	4	4	4	4	4	4
C	4	4	4	4	2	1	1	1	1
D	4	4	4	4	4	2	1	1	1
E	4	4	4	4	4	3	1	1	1
F	4	4	4	4	4	4	4	4	4
G	3	3	3	4	2	1	1	1	1

Es posible observar que seis de los siete grupos logran transitar en su completitud por la fase de comprensión (fase 1) y la fase de construcción y resolución (fase 2); en consecuencia, un solo grupo transitó parcialmente por ambas fases. Por otra parte, en el caso de la fase de interpretación (fase 3), esta es lograda en su totalidad por dos de los siete grupos, los cuales son los que finalmente completan a su vez la última fase (de información, fase 4), mientras que los otros grupos lograron un escaso o superficial cumplimiento de ellas. A continuación, se detallan los hallazgos para cada fase del proceso de modelación.

4.2.1 Fase 1: Comprensión

La primera parte del desafío de la tarea: J*uega a la rayuela con algún integrante de tu familia, completa la tabla señalada en las instrucciones y responde las preguntas siguientes: 1) ¿Cómo determinarían al mejor jugador? ¿Por qué?, 2) ¿Cómo determinarían al jugador ganador? ¿Por qué?*, nos instan a evidenciar si los estudiantes son capaces de reconocer las instrucciones entregadas por el docente, si comprenden el problema y si son capaces de recolectar los datos.

De la Tabla 1 se puede observar que todos los alumnos fueron capaces de atravesar satisfactoriamente esta fase. Llama la atención que la respuesta de dos de los siete grupos se relaciona con la distancia al hilo, como se ilustra en la Figura 5, donde se puede evidenciar que el grupo C fue capaz de identificar el problema, posicionándose sobre quién es el ganador y el mejor jugador, argumentando su decisión desde un razonamiento basado en la distancia al hilo en cada tirada y la cantidad de veces que acertaba el jugador en el hilo, sin emplear herramientas estadísticas.

1. ¿Cuál creen que fue el mejor jugador? ¿Por qué?
Respuesta: *Yo creo que Marcela, porque fue la que menos distancia tuvo del hilo y la que más veces dio en el centro.*

2. ¿Cuál debería ser el jugador ganador? ¿Por qué?
Respuesta: *Está entre Moira y Marcela, ya que, si sumamos los puntajes, Moira es la que menos obtuvo, pero Marcela es la que acertó más veces.*

Figura 5. Respuesta del grupo C sobre la comprensión del problema
Nota. Elaboración propia a partir de las respuestas obtenidas de los estudiantes.

Otras respuestas que también aludieron a la distancia al hilo argumentaban desde otra perspectiva: cantidad de tiros acertados, como se puede ver en la Figura 6, donde el grupo G justifica considerando la cantidad de tiros acertados, considerando que el grupo ganador corresponde a aquel que obtiene mas veces el resultado de mayor puntuación, no tomando en cuenta la cantidad de veces que este no acierta, el cual en algunos casos puede ser mayor. Nuevamente la comprensión del problema no evidencia relación con elementos de estadística.

1. ¿Cuál creen que fue el mejor jugador? ¿Por qué?
Respuesta: *Yo creo que el mejor jugador fue el jugador 1, porque fue el que estuvo más cerca a la cuerda.*

2. ¿Cuál debería ser el jugador ganador? ¿Por qué?
Respuesta: *Debería ser el jugador 1, porque dio en el centro 2 veces.*

Figura 6. Respuesta del grupo G sobre la comprensión del problema
Nota. Elaboración propia a partir de las respuestas obtenidas de los estudiantes.

Desde otra arista, es importante destacar aquellas respuestas dadas por los grupos que van más allá de la distancia al hilo, donde incorporan, en su comprensión del problema, justificaciones basadas en medidas de *tendencia central*, como es *el promedio de las distancias.* Destacamos la respuesta del grupo A (Figura 7), que alude al *"promedio de lejanías más bajo a los demás tiros respecto al oponente"*.

1. ¿Cuál creen que fue el mejor jugador? ¿Por qué?
Respuesta: *El mejor jugador fue el número 1, ya que tuvo más aciertos al hilo.*

2. ¿Cuál debería ser el jugador ganador? ¿Por qué?
Respuesta: *El jugador número 1 debería ganar, porque además de haber tenido más aciertos al hilo, tuvo un promedio de lejanía más bajo en los demás tiros respecto a su oponente.*

Figura 7. Respuesta del grupo A sobre la comprensión del problema
Nota. Elaboración propia a partir de las respuestas obtenidas de los estudiantes.

Por último, resaltamos la respuesta del grupo E (Figura 8), quien de manera intuitiva hace emerger la noción de dispersión, a partir de expresiones como las de *"constantemente más cerca"* y *"más cerca"*, realizando además una comparación general.

1. ¿Cuál creen que fue el mejor jugador? ¿Por qué?
Respuesta: *El jugador número dos, ya que a diferencia de los otros dos jugadores (uno y tres), él estuvo constantemente más cerca del hilo durante todo el juego.*

2. ¿Cuál debería ser el jugador ganador? ¿Por qué?
Respuesta: *El jugador dos, porque durante todos sus turnos estuvo más cerca al hilo, incluso en el lanzamiento número siete logró lanzar el tejo justo al hilo.*

Figura 8. Respuesta del grupo E sobre la comprensión del problema
Nota. Elaboración propia a partir de las respuestas obtenidas de los estudiantes.

De esta forma se visualiza la fase de comprensión como una instancia que permite a los estudiantes abordar el problema a partir de distintas posturas o fundamentos, las que les permiten avanzar a la fase dos, de construcción y resolución.

4.2.2 Fase 2: Construcción y resolución

La pregunta 3 de la tarea: *¿Cómo determinan al ganador de la partida?* es clave para evidenciar si los alumnos fueron capaces de transitar por la fase de resolución. De la Tabla 5 se puede visualizar que, si bien no todos los grupos lograron avanzar en plenitud, dos de ellos tuvieron algunas dificultades para realizar cálculos de forma correcta. Cinco de los siete grupos fueron capaces de determinar variables y parámetros para representar el problema, realizar cálculos y resolver el problema a partir de la generación de un modelo estadístico.

Naturalmente, el tipo de razonamiento que ocupan en esta fase depende de la forma de comprender el problema. Se observa que tres de los siete grupos (C, G y D) ocupan modelos básicos, como es el caso del grupo de C, quienes se centran en el máximo de las sumas de los puntajes de cada jugador (Figura 9).

> 3. ¿Cómo determinan al ganador de la partida? Expliquen el procedimiento con sus propias palabras.
> Respuesta: *Se suman todos los puntajes y el que menor valor obtuvo es el ganador.*

Figura 9. Respuesta del grupo C que evidencia su procedimiento para resolver. Nota. Elaboración propia a partir de las respuestas obtenidas de los estudiantes.

Es relevante la respuesta del grupo E, puesto que utilizan el rango y el promedio de las distancias haciendo uso implícitamente de la desviación estándar, siendo estos modelos estadísticos que le permiten resolver el problema, como se ilustra en la Figura 10.

> 3. ¿Cómo determinan al ganador de la partida? Expliquen el procedimiento con sus propias palabras.
> Respuesta: *Comparamos los rangos entre las distancias en los lanzamientos de los jugadores y nos apoyamos al comparar los promedios de las distancias registradas, el jugador que haya registrado distancias menores con el hilo será el ganador.*

Figura 10. Respuesta que evidencia grupo E, del uso de más de una herramienta estadística. Nota. Elaboración propia a partir de las respuestas obtenidas de los estudiantes.

Una respuesta interesante la presentan los integrantes del grupo F (Figura 11), quienes utilizan diversas estrategias y modelos estadísticos. Ellos inician su resolución comparando los puntajes de cada lanzamiento, luego consideran una medida de tendencia central, la media aritmética de las distancias. Esta media aritmética corresponde a un conocimiento previo de los estudiantes, el que es presentado como el "promedio de las distancias". Hay que hacer notar que, si bien este grupo se acerca a la noción de dispersión, el mayor promedio no da cuenta de una mayor dispersión de los datos. Para evidenciar una medida de dispersión tendrían que haber calculado, por ejemplo, la desviación media, sacando un promedio de las diferencias positivas entre cada distancia asociada a un lanzamiento y el promedio, situación que fue aclarada por la docente en la institucionalización.

> Respuesta: *Primero analizamos los resultados y los comparamos respecto al número de lanzamiento, luego sacamos los promedios del primer jugador y del segundo, nuevamente comparamos los resultados y el promedio del jugador 1, con valor de 9,23, es menor al promedio del jugador 2 con valor de 16,69, significando que la media aritmética del jugador 1 es menor a la del jugador 2. Esto nos lleva a afirmar que la dispersión de datos es mayor en el jugador 2 que en el jugador 1.*

Figura 11. Respuesta del grupo F que evidencia el uso de más de una herramienta estadística. Nota. Elaboración propia a partir de las respuestas obtenidas de los estudiantes.

La resolución que cada grupo realiza les permite avanzar con la fase de interrogación e interpretación, lo que se detalla a continuación.

4.2.3 Fase 3: Interrogación e interpretación

La fase 3 de la Modelación Estadística se evidencia a partir de la segunda parte de la pregunta *4: Expliquen el procedimiento con sus propias palabras.* De los siete grupos, tres de ellos pudieron abordar esta fase de manera satisfactoria, principalmente en lo que respecta a la formulación de sus argumentos.

Al indagar en la respuesta del grupo G (Figura 6), se puede inferir que ellos fueron capaces de explicar su procedimiento para resolver el problema a partir de la comparación de la media aritmética obtenida en cada caso y argumentar que es necesario ocupar otro estadígrafo para concluir, observando las limitaciones de la primera de ellas (la media aritmética).

En la Figura 12 está el razonamiento del grupo B, quienes justifican su elección a partir de la media aritmética y la relación con el contexto y las jugadas acertadas.

> *Fácilmente podemos decir que el ganador absoluto fue el jugador 2, ya que fue el que más cerca llegó al hilo según el promedio anteriormente calculado, y además que, en uno de los lanzamientos, pudo llegar con un tejo al hilo (tiro 9).*

Figura 12. Respuesta del grupo B en relación a la fase de interpretación. Nota. Elaboración propia a partir de las respuestas obtenidas de los estudiantes.

4.2.4 Fase 4: Información

Esta fase es posible evidenciarla a partir de las respuestas formuladas en la pregunta 4: *Si hubiera una expresión matemática que permita representar al ganador, ¿cuál creen que podría ser dicha expresión,* *para determinar el ganador en las futuras partidas de rayuela?*

La respuesta del grupo B se muestra en la Figura 13. En ella se puede observar que ellos fueron capaces de contrastar su respuesta con la realidad, considerando la relación entre la media aritmética y el lanzamiento del tejo. Además, reflexionan sobre otras formas de abordar el problema, recurriendo a otras herramientas matemáticas, pensando en supuestos como los gráficos o funciones, pero afirman que no lo saben con certeza, reconociendo sus limitaciones en términos de conocimientos para generar una argumentación más robusta y precisa.

4) Si hubiera una expresión matemática que representara al ganador, ¿cuál creen que podría ser dicha expresión, para determinar el ganador en las futuras partidas de rayuela?
Respuesta: *La verdad es que investigamos un poco, buscamos juegos matemáticos para tomar ideas, pero no se nos ocurre cuál puede ser esa expresión. Probablemente se debería establecer con el uso de gráficos y funciones matemáticas, tema que hemos estado estudiando en clases pero que aún no dominamos.*

Figura 13. Respuesta del grupo B

Nota. Elaboración propia a partir de las respuestas obtenidas de los estudiantes.

Por otra parte, destacamos la respuesta del grupo F (Figura 14) quienes fueron capaces de contrastar sus resultados con la realidad y asociar otro tipo de soluciones desde otras áreas del saber, como la física.

4) Si hubiera una expresión matemática que representara al ganador, ¿cuál creen que podría ser dicha expresión, para determinar el ganador en las futuras partidas de rayuela?
Respuesta: *Creemos que una especie de cálculo que tenga que ver con frecuencias y rango, por ejemplo, calcular la diferencia del mayor y menor resultado que obtuvo un jugador, así se comparan los rangos de los participantes y, dependiendo del que cuenta menor rango, tiene más posibilidades de ganar.*

Por ejemplo:
Rango 1 = 56-0 *Rango 1 < Rango 2*
Rango 2 = 67-0 *56 < 67*

Pensamos que otra forma de expresión matemática, que sería en cierta medida más extensa, tendría que ver con las mediciones del centro de gravedad del deportista, ángulo de tiro, fuerza de impulso y velocidad de lanzamiento del tejo, dado que estos conceptos influyen en el juego. Por lo tanto, su implementación en el cálculo no estaría errónea.

Es posible que en este tipo de juego exista una técnica para obtener buenos lanzamientos, la costumbre y dedicación también son factores que influyen en ello.

Figura 14. Respuesta del grupo F

Nota. Elaboración propia a partir de las respuestas obtenidas de los estudiantes.

5. Conclusiones

Este trabajo muestra los resultados del diseño e implementación de una propuesta de aula basada en la modelación estadística con la finalidad de que estudiantes le den significado a las medidas de tendencia central y de dispersión. El diseño se desarrolló considerando los ocho principios para la planificación de actividades escolares que involucran la modelación (Frejd y Bergsten, 2018), decantando por un contexto que incluye un deporte nacional chileno, la rayuela, que aborda un problema socialmente relevante para los estudiantes, donde ellos tienen una participación activa en la construcción del modelo, y el docente es un mediador (Da Silva y Barbosa, 2011).

Los resultados de la implementación de la propuesta se analizaron a partir de la adaptación y articulación entre el ciclo de investigación y el proceso de modelación estadística (Wild y Pfannkuch, 1999) con la propuesta de evaluación para el ciclo de modelación matemática (Acebo-Gutiérrez y Rodríguez-Gallegos, 2021). Los hallazgos evidencian que los estudiantes lograron transitar exitosamente en las dos primeras fases del proceso de modelación, teniendo algunos de ellos dificultades en las dos últimas fases. A pesar de esto, fueron capaces de reconocer los conceptos involucrados, y mediante la interpretación y el análisis de datos avanzaron hacia la toma de decisiones.

Si bien la actividad de modelación fue pensada para que los estudiantes interactuaran físicamente, ello no fue posible por el contexto sanitario de Chile del año 2020, solo daba la posibilidad de que los estudiantes se relacionaran de manera virtual. Esto pudo influir en que no todos los grupos pudiesen llegar a las últimas fases de la modelación. Aun así, es importante destacar que la actividad está pensada con la intencionalidad de contar con una instancia de interacción familiar, con un contexto que se conozca (medianamente) dando relevancia a un deporte nacional chileno que ha perdido fuerza entre las nuevas generaciones.

Esta propuesta de innovación tuvo como propósito proponer una situación socialmente relevante a los estudiantes, junto con el de generar y fomentar procesos de modelación con ellos, que les permitan acercarse a la estadística a través de otra arista y desde la realidad, realidad que les provoque interactuar con su entorno cercano y reconocer las matemáticas y/o la estadística en ello.

Esta innovación pretende mostrar un escenario en donde se conjuguen elementos del ámbito tradicional chileno (la rayuela) con la enseñanza de la estadística, articulación que promueve la modelación estadística, de manera que pueda ser un insumo para otros docentes en la generación de conocimiento y habilidades de otras generaciones de estudiantes.

El estudio evidencia que aún es necesario continuar investigando cómo la modelación, de naturaleza estadística, se inserta en el currículum matemático, de manera que se rescaten elementos como lo es el deporte nacional en la construcción de situaciones y conceptos matemáticos. Además, se deja entrever la necesidad de generar ambientes más cercanos al estudiante, teniendo en cuenta que, en la medida que los estudiantes avanzan hacia los últimos años de escolaridad, dejan de "jugar" para aprender, lo que puede provocar asignaturas rígidas o abstractas.

Por último, sostenemos la importancia de contar con actividades de modelación estadística que puedan conjugarse con las propuestas ministeriales, de modo de tener criterios e indicadores claros para evaluar el desempeño de los estudiantes en actividades que involucren análisis estadísticos en contexto.

Una de las implicancias prácticas de este estudio está en la posibilidad de aplicar la actividad de modelación propuesta en otros niveles de enseñanza, usando y adaptando las categorías de análisis como rúbrica para la evaluación del desempeño grupal de los estudiantes. Del mismo modo, el estudio ofrece un recurso concreto para instalar el trabajo con otras disciplinas, como historia y educación física, que se puede concretar en un ABP (aprendizaje basado en proyectos).

Algunas proyecciones del estudio pueden apuntar a que la propuesta de innovación incorpore otras preguntas que ayuden a los estudiantes a completar las fases en el ciclo de modelación. Por ejemplo, se podría incluir una situación hipotética, en la que dos de los jugadores lograran el mismo promedio de las distancias con el propósito de animar a los estudiantes a elaborar y comunicar nuevos argumentos para dirimir quién debe ser el ganador. Esto permitiría continuar investigando sobre cómo surge la necesidad de utilizar medidas de dispersión en este tipo de situaciones de modelación estadística y cómo estas se acoplan o coordinan con las medidas de tendencia central.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiando por la beca para Magister Profesionales de la Educación 50210054 de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo, ANID, Chile.

Referencias

Acebo-Gutiérrez, C. J., y Rodríguez-Gallegos, R. (2021). Diseño y validación de rúbrica para la evaluación de modelación matemática en alumnos de secundaria. *Revista Científica, 40*(1), 13-29. https://doi.org/10.14483/23448350.16068

ASA. (2021). *American Statistical Association*. https://www.amstat.org/

Báez, P., Berríos, F., Rubio, M., Muñoz, M. J., y Guevara, J. (2020). *Tras las memorias de la comunidad de Petorca* [Trabajo Final de grado, Universidad Católica de Valparaíso]. Casiopea. https://wiki.ead.pucv.cl/Proyecto_de_titulo_-_Tras_las_memorias_de_la_comunidad_de_Petorca

Biehler, R., Frischemeier, D., Reading, C., y Shaughnessy, J. (2018). Reasoning about data. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield, *International handbook of research in statistics education* (pp. 139-192). Springer International Handbooks of Education. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7

Budgett, S., y Pfannkuch, M. (2018). Modelling and linking the Poisson and exponential distributions. *ZDM Mathematics Educatioin, 50*, 1281-1294. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0989-2

Cádiz, O. (2018). *Juegos tradicionales y populares en Chile*. Ediciones Universitarias de Valparaíso. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Chambers, J. M. (1993). Greater or lesser statistics: A choice for future research. *Statistics and Computing, 3*(4), 182-184. https://doi.org/10.1007/BF00141776

Cobb, G. (2007). The introductory statistics course: A Ptolemaic curriculum? *Technology innovations in statistics education, 1*(1), 1-15. https://doi.org/10.5070/T511000028

Cobb, G. W., y Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly, 104*(9), 801-823. https://doi.org/10.1080/00029890.1997.11990723

Da Silva, J., y Barbosa, J. (2011). Modelagem Matemática: as discussões técnicas e as experiências prévias de um grupo de alunos. *Boletim de Educação Matemática, 24*(38), 197-218.

Del Pino, J., y Estepa, A. (2019). Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en los libros de texto. Avances de I*nvestigación en Educación Matemática, 16*, 86-102. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i16.232

De Veaux, R. D., Bock, D. E., y Velleman, P. (2003). *Intro Stats*. Addison-Wesley.

Frejd, P., y Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling: ideas for education. *ZDM, 50*(1), 117-127. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0928-2

Kazak, S., y Pratt, D. (2017). Pre-service mathematics teachers' use of probability models in making informal inferences about a chance game. *Statistics Education Research Journal, 16*(2), 1-18. https://doi.org/10.52041/serj.v16i2.193

Lee, H. S., y Lee, J. T. (2011). Enhancing prospective teachers' coordination of center and spread: A window into teacher education material development. *The Mathematics Educator, 21*(1), 33-47.

Ministerio de Educación de Chile. (2012). *Programas de estudio, matemáticas*. Autor.

Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Programas de estudio, matemática*. Autor.

Ministerio de Educación de Chile. (2020). *Programas de estudio, tercero medio para matemáticas.* Autor.

Ministerio del Deporte de Chile (2014). *Ley 20777, reconoce a la rayuela como deporte nacional.* https://www.bcn.cl/leychile/navegar?idNorma=1067843

Pfannkuch, M., Ben-Zvi, D., y Budgett, S. (2018). Innovations in statistical modeling to connect data, chance and context. *ZDM, 50*(7), 1113-1123. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0989-2

Plomp, T. (2010). Educational Design Research: An introduction. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *An introduction to Educational Design Research* (pp. 11-50). Netherland Institute for Curriculum.

Saavedra, E. (2018). *Contenidos Básicos de Estadística y Probablidad.* Editorial USACH.

Solares, A., Preciado, A. P., Peña, F., Ortiz, A., Sandoval, M., Soriano, R., Carrión, V., y Fuentes, M. (2018). Tendencias en Modelación Matemática en Latinoamérica. En T. E. Hodges, G. J. Roy y A. M. Tyminski (Eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 88-100). University of South Carolina & Clemson University.

Stillman G. A., Kaiser, G., y Lampen, E. (2020). Sense-Making in Mathematical Modelling and Applications Educational Research and Practice. En G. Stillman, G. Kaiser y C. Lampen (Eds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-making. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 15-29). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_2

Tacoma, S., Sosnovsky, S., Boon, P., Jeuring, J., y Drijvers, P. (2018). The interplay between inspectable student models and didactics of statistics. *Digital Experiences in Mathematics Education, 4*(2), 139-162. https://doi.org/10.1007/s40751-018-0040-9

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-248. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x