VOLÚMEN 15
N°2
AGOSTO 2023

RECH IEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

ÍNDICE

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

PROPUESTAS DIDÁCTICAS

sochiem

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448 Versión en línea
Chile

https://doi.org/10.46219/rechiem.v15i2.125

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

ERRORES QUE COMETEN LOS ESTUDIANTES DE TERCERO Y CUARTO AÑO DE ENSEÑANZA MEDIA EN VISTAS ORTOGONALES DE FIGURAS GEOMÉTRICAS 3D

ERRORS MADE BY THIRD AND FOURTH YEAR HIGH SCHOOL STUDENTS IN ORTHOGONAL VIEWS OF 3D FIGURES

Brahiam Ramírez Jofré
brahiam.ramirez@pucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Marcelo González Díaz
marcelo.gonzalez.d@mail.pucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Ricardo Zambrano Reyes
ricardo.zambrano@pucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

RESUMEN

El artículo presenta resultados de una investigación cualitativa cuyo objetivo es estudiar errores que cometen alumnos de tercer y cuarto año de enseñanza media (16-18 años) en el dibujo de vistas ortogonales de figuras 3D y del proceso de dibujar figuras desde vistas ortogonales. La fundamentación teórica se basa en la teoría de los registros de representación semiótica (TRRS) y habilidades de manipulación mental. La recolección de datos se ha obtenido de las respuestas de 30 estudiantes de dos establecimientos chilenos a un cuestionario de cuatro partes que ha pretendido evidenciar los procesos de visualización, habilidades y razonamiento espacial. Como resultado, se han obtenido 11 tipos de respuestas diferentes para cada una de las vistas ortogonales analizadas, presentando mayor error de representación en vistas superiores (66,4% de error) y vistas traseras (63,2% de error), y con el 56,4% de las respuestas diferentes a la correcta en el apartado principal del cuestionario, evidenciando dificultades en habilidades espaciales y de manipulación mental.

PALABRAS CLAVE:
Geometría 3D, Vistas ortogonales, Aprendizaje de la geometría.

ABSTRACT

The article presents the results of a qualitative research whose objective is to study errors made by high school students (16-18 years old) in the drawing of orthogonal views of 3D figures and the process of drawing figures from orthogonal views. The theoretical foundation is based on the TRRS and mental manipulation skills. Data collection was obtained from the responses of 30 students from two Chilean schools to a four-part questionnaire that sought to demonstrate the processes of visualization, skills, and spatial reasoning. As a result, 11 different types of responses were obtained for each of the orthogonal views analyzed, with the greatest error of representation in top views (66.4% error) and back views (63.2% error), and with 56.4% of the responses different from the correct one in the main section of the questionnaire, showing difficulties in spatial skills and mental manipulation.

KEYWORDS:
3D Geometry, Orthogonal Views, Geometry Learning.

Recibido: 14 de diciembre de 2022 , Aceptado: 31 de marzo de 2023

1. Introducción

Esta investigación se centra en errores que surgen de estudiantes de tercer y cuarto año de enseñanza media al realizar proyecciones ortogonales de figuras geométricas tridimensionales (3D). La justificación de dicha investigación se basa en sustentos teóricos sobre el concepto de proyecciones ortogonales, sus vistas, las dificultades de sus representaciones, la didáctica asociada al objeto matemático en el currículo ministerial chileno e investigaciones al respecto.

Para comenzar, en Fujita et al. (2017) se plantea una investigación en escuelas japonesas, cuyo objetivo ha sido estudiar cómo escolares (455 estudiantes de 12 a 15 años) emplean las habilidades de razonamiento espacial para resolver problemas que implican representaciones 2D de cuerpos geométricos 3D. Se trabaja en torno a cuatro tipos de razonamiento en geometría 3D: representación de objetos 3D, estructuración espacial, conceptualización de propiedades matemáticas y medición. Estos se relacionan con habilidades espaciales como la visualización espacial (codificación), orientación o el razonamiento analítico espacial basado en propiedades de los objetos (descodificación). Los resultados de esta investigación presentan que hay errores del 99% (grado 7), 96% (grado 8) y 76% (grado 9), que corresponden a una respuesta incorrecta influenciada por el conocimiento intuitivo y la información visual que se les entrega. Los autores concluyen que tanto la visualización espacial como el razonamiento analítico espacial basado en propiedades de los objetos tienen un rol importante, pero que, sin el conocimiento específico del dominio apropiado, el razonamiento de los estudiantes puede verse influenciado por la apariencia visual de la geometría. El estudio evidencia que los estudiantes fallan en resolver problemas dado que la manipulación mental de las representaciones no ha sido efectiva, mientras que los que sí logran manipularlas, han podido razonar para obtener las soluciones correctas a los problemas planteados.

Por su parte, Kok (2020) lleva a cabo una investigación cualitativa en la que se congregan datos de 100 estudiantes. Estos manifestaron dependencia de un objeto concreto para realizar la transición de 2D a 3D. Además, se planteó que la habilidad visoespacial es relevante para dicho proceso ya que la capacidad de utilizar un sistema de imágenes espaciales está vinculada con las habilidades de los estudiantes. Esto se refleja en la capacidad de imaginar el objeto y manipularlo. Así, este autor sugiere que en las aulas debe existir material didáctico para abordar el contenido matemático de geometría, y de este modo, complementar las habilidades visoespaciales.

Finalmente, Saralar et al. (2018) presentan una investigación cualitativa basadas en investigaciones previas realizadas por los mismos autores sobre la comprensión de formas tridimensionales. El sustento de este estudio es en torno a los procesos del pensamiento (habilidades, razonamiento y visualización espacial) de los estudiantes cuando resuelven problemas con figuras 3D. Una vez que estos procesos del pensamiento fueron estudiados, se procede con los errores en dos tipos de representaciones bidimensionales de formas policúbicas: dibujos ortogonales y dibujos isométricos. Con tal fin, estudian los errores de 199 estudiantes de séptimo nivel académico en Turquía, en una sesión de 80 minutos con un cuestionario de 10 preguntas que se basa en pruebas estandarizadas del Ministerio de Educación Nacional de Turquía (2016). A partir de los resultados obtenidos (66% de respuestas correctas en vistas ortogonales y 34% de respuestas correctas en el dibujo isométrico), los autores concluyen que los alumnos de séptimo grado tienen dificultades para construir representaciones en 2D de las formas 3D.

Los estudios presentados comparten que no es sencillo llevar figuras 3D a 2D, ya sea por la información que se pierde en una proyección ortogonal, el desarrollo de razonamiento al interpretar una figura 3D que es representada en un medio 2D (impresa) o porque el alumno necesita de ciertas habilidades visoespaciales. Para Fujita et al. (2017), en la geometría se necesitan distintas representaciones, ya que los estudiantes presentan problemas al manipular la representación geométrica, incluso generando una dificultad en el tipo de visualización que se les presenta. Así, se centran en el razonamiento de los alumnos frente a una figura y a un problema, por lo que cada imagen que se presenta es relevante para que el alumno logre desarrollar la actividad de manera satisfactoria con las herramientas que le entregan y las habilidades que ha desarrollado.

A partir de lo anteriormente descrito, se establece como problema de investigación el reconocer los errores de los estudiantes en su visualización espacial y en la representación de vistas ortogonales de figuras geométricas. Esto se sintetiza ante la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué errores cometen los estudiantes en tercer y cuarto año de enseñanza media al representar las vistas ortogonales de objetos geométricos tridimensionales?

Antes de exponer el marco teórico que permite responder la pregunta planteada, se presenta brevemente en qué niveles educativos y cómo se abordan las figuras 3D en el currículo chileno.

2. Las figuras geométricas 3D en el currículo chileno

En el primer año de enseñanza básica en Chile los estudiantes (6-7 años) deben identificar las figuras 3D en el entorno y relacionarlas con objetos concretos (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2021a). En el nivel siguiente, el alumno debe “describir, comparar y construir figuras 3D” (MINEDUC, 2012a, p. 232), identificando las caras de cada figura (partes planas), y construir figuras 3D con material concreto (MINEDUC, 2021b). Al identificar las caras, se espera que continúen en tercer año con la construcción de figuras tridimensionales a partir de figuras bidimensionales (2D) (MINEDUC, 2012a). En el cuarto nivel, se enseñan las vistas 2D de una figura 3D, identificando tres vistas: frontal, superior y lateral (MINEDUC, 2012b). En quinto año se plantea que se describan las caras de las figuras 3D para comprobar sus intersecciones (vértices) y las aristas (para comprobar perpendicularidad). Además, se realizan cortes a los cuerpos geométricos para ver la figura 2D resultante (MINEDUC, 2021c).

Según las bases curriculares (MINEDUC, 2012a, 2015, 2019), en sexto año se trabaja con áreas de cuerpos 3D (cubos y paralelepípedos), lo que luego se complementa en octavo año con prismas y cilindros, en noveno nivel (primer año de enseñanza media) con conos y en décimo nivel (segundo año de enseñanza media) con esfera. Mientras, en el séptimo nivel no se trabaja con figuras 3D, al igual que en tercer y cuarto año de enseñanza media, que son los dos últimos niveles de la educación escolar obligatoria; sin embargo, se imparten cursos optativos como el curso de Geometría 3D.

El curso Geometría 3D abarca contenidos en torno a isometrías, vectores, representaciones digitales, áreas y volumen de figuras rotadas y/o trasladadas en el espacio, y relaciones entre figuras 3D y 2D (MINEDUC, 2019). Este último punto se aborda al "resolver problemas que involucren relaciones entre figuras 3D y 2D en las que intervengan vistas, cortes, proyecciones en el plano o la inscripción de figuras 3D en otras figuras tridimensionales" (MINEDUC, 2019, p. 279).

Por último, el MINEDUC (2021d) propone que se utilicen proyecciones para crear ilusiones de profundidad y así "ver un espacio tridimensional en una superficie plana bidimensional" (p. 154). Su objetivo es conectarla con el entorno y el arte, por lo que solicitan al estudiante dibujar las rectas proyectivas e identificar las caras de figuras dependiendo del tipo de proyección que tenga.

3. Marco teórico

La proyección ortogonal es la descripción de un cuerpo tridimensional en un plano bidimensional. Específicamente corresponde a proyecciones planas paralelas ortogonales, que es identificar cada vista que se proyecta del cuerpo en el plano bidimensional (vistas ortogonales), donde las rectas proyectantes son todas paralelas entre sí y perpendiculares a un plano. Estas vistas suelen ser: frontal, superior, posterior, inferior, lateral izquierda y lateral derecha (Casas et al., 2015), por lo que este proceso es un cambio de dimensiones para representar a un mismo objeto.

Se ha planteado que una de las problemáticas de las proyecciones ortogonales paralelas es que son poco realistas debido a que se pierde la noción de profundidad haciendo que el cerebro presente dificultades para interpretar la tridimensionalidad (Casas et al., 2015). Aquellas dificultades pueden venir acompañadas de una incorrecta manipulación mental del objeto o indicando que no se ha accedido a él por medio de la información que se tiene, causando errores en el tratamiento o conversión de este objeto; aquello es profundizado con las acepciones propias de la teoría de los registros de representación semiótica (TRRS).

3.1 Teoría de los registros de representación semiótica (TRRS)

Las representaciones son diferentes maneras de mostrar un objeto y la semiótica es el estudio sobre los sistemas de signos que permitirán al estudiante la comunicación, modos de producción, funcionamiento y recepción de información (entendiendo los signos como un significado otorgado). Así, Duval (1999) plantea que no se puede hacer aprehensión de un concepto si no hay una representación de él, presentando dos tipos de representaciones:

- Representación mental: conjunto de imágenes que se tiene sobre un objeto.
- Representación semiótica: conjunto de signos mediante los que las personas manifiestan las representaciones mentales y las comparten (visibilizan) utilizando diferentes registros para aquello (tabular, numérico, algebraico, gráfico, pictórico y lenguaje natural).

Duval (1999) hace énfasis en la semiosis, que se define como la aprehensión o producción de una representación semiótica; también se considera la noesis como la aprehensión conceptual de los objetos representados. Indica que no existe el proceso de noesis si no está la semiosis involucrada.

Para trabajar en torno a representaciones, se considera un proceso abordado por:

- Formación: identificar una representación en un registro.
- Transformación: cambio de representación.
- Conversión: transformación externa en el sistema semiótico, cambiando de registro, pero sin cambiar de objeto.
- Tratamiento: transformación interna en el sistema semiótico, no se cambia de registro ni de objeto.

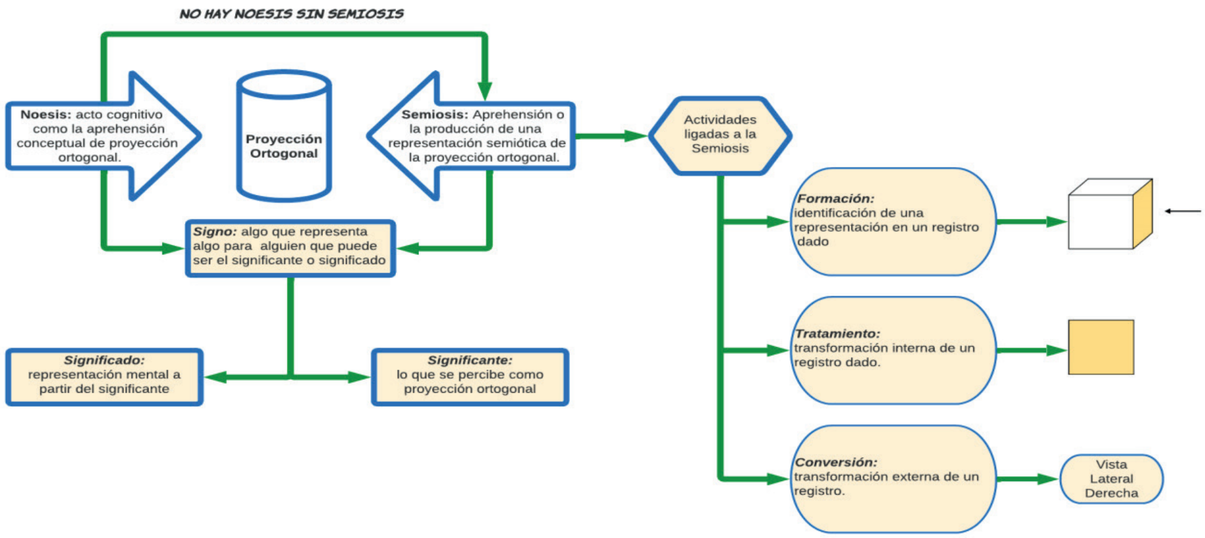


Figura 1. Actos cognitivos según la TRRS en la proyección ortogonal
Nota. Creado a partir de la información obtenida de Duval (1993).

Callone y Torres (2013) plantean que “cada alumno efectúa una comprensión diferente de cualquier otra comprensión porque todo intento de dar significado se apoya no solo en los materiales de aprendizaje (representaciones externas), sino en los conocimientos previos activados para tal fin” (p. 289), por lo que se ha empleado la TRRS para identificar en diversas representaciones de cuerpos geométricos, cuyo registro es el pictórico, las vistas posibles que infiere el alumno, recolectando información mental de un registro (semiosis) cuyo proceso se debe introducir con la aprehensión de los conceptos matemáticos involucrados del cual podrían resultar errores.

3.2 Consideración de errores para la clasificación de respuestas

La representación mental es la agrupación de conceptualizaciones e imágenes que tiene un sujeto al verse enfrentado a un objeto o situación que debe interpretar (Duval, 1993). Dicha agrupación puede tener dos implicancias: que los estudiantes generen propiedades del objeto matemático al pasar de un tipo de representación; y que el alumno no manipule mentalmente la información que ha recolectado de la figura, generando una representación errónea en alguna de ellas. Por ello, se considera error toda aquella representación pictórica que no es una equivalencia entre la figura 3D y sus vistas representadas en 2D.

La distinción de error y dificultad que alude la investigación hace referencia a lo expuesto por Gotte (2019) en torno a estos dos conceptos:

- Error: práctica que lleva en su naturaleza conceptos equivocados o procedimientos no consolidados, que se pueden presentar a través de las producciones de los estudiantes.
- Dificultad: limitante de comprensión de conceptos o ejecución correcta de una tarea, pudiendo manifestarse por medio de errores.

En esta investigación el objetivo es identificar los errores de los estudiantes en su visualización espacial y en la representación de vistas ortogonales de las figuras geométricas, no así la naturaleza del error, por lo que para la interpretación de los errores se tendrán en consideración: la visualización, habilidades y/o razonamiento espacial empleado por el estudiante.

3.2.1 Visualización, habilidades y razonamiento espacial

Para Duval (2005), la manera matemática de ver las figuras se basa en la descomposición de formas conocidas, disminuyendo sucesivamente la dimensión; en este proceso la percepción puede causar problemas al momento de visualizar las figuras. Dicha visión del objeto (percepción) es la información directa que se extrae de él, teniendo que manipularlo físicamente, pero no se consigue una aprehensión completa; en cambio, la visualización es la representación semiótica de un objeto (Duval, 2002).

Para complementar la definición de visualización se considera la confeccionada por Arcavi (2003):

> Es la habilidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión de imágenes y diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y entendimientos avanzados. (p. 217)

En torno a las habilidades espaciales, se han adaptado a la investigación 5 habilidades visuales espaciales planteadas por Miragliotta et al. (2017):

- Organización visual: reconocer propiedades de la figura no visible en totalidad, como aquello producido por la imposibilidad de la manipulación física de la figura 3D para obtener vistas.
- Escaneo visual: reconocer las propiedades de la figura a partir de su representación icónica.
- Generación de la imagen: producir mentalmente las propiedades espaciales (forma, posición y tamaño).
- Reconstrucción visual: reconstruir la figura a partir de las representaciones dadas, tal como presentar vistas de un objeto 2D y que se deba dibujar en su representación 3D.
- Manipulación de la imagen: usar propiedades de idealidad, abstracción, generalidad y perfección de la figura o manipular la forma, posición o tamaño para llevarla de una figura a otra nueva. Aquello es evidenciado en el resultado del cambio de dimensiones.

En el caso del razonamiento espacial, se tendrá presente la definición de Clements y Battista (1992), considerado como "el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales" (p. 420).

De este modo, para responder la pregunta de investigación, se plantea estudiar los errores que cometen los estudiantes en representaciones de vistas ortogonales de objetos geométricos tridimensionales desde la TRRS.

4. Metodología

La metodología de la investigación llevada a cabo es de carácter cualitativo, es decir, se ha enfocado en comprender el objeto de estudio en profundidad de un grupo de estudiantes, mediante la recolección de datos empíricos, auténticos del mundo real (Yin, 1994) e interpretación de datos cualitativos desde la TRRS.

Con tal fin, se ha usado la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) como la metodología de la investigación, considerando los siguientes 4 pasos:

- Análisis preliminar, llevado a cabo desde el currículo escolar chileno y desde el conocimiento esperado del alumno debido a su trayectoria de educación. Aquello fue analizado para presentar la problemática y para confeccionar el instrumento de recolección de datos.
- Análisis *a priori* (Anexo 1), correspondiente a respuestas hipotéticas de los estudiantes antes de la implementación del instrumento; se basó en los resultados de la Agencia de Calidad de la Educación (2019), conocimientos personales debido a las modificaciones de las preguntas y a los resultados de la investigación de Saralar et al. (2018).
- Experimentación, cuya etapa consistió en implementar el cuestionario en dos cursos del sistema educativo chileno, sin clases previas ni intervención de los investigadores.
- Análisis *a posteriori* y evaluación, llevado a cabo en el análisis de resultados, cuyo fin fue contrastar con el análisis a priori, definir nuevas respuestas encontradas y justificarlas desde la TRRS, cuantificando la cantidad de respuestas para complementar al análisis cualitativo.

4.1 Sujetos y proceso de recolección de datos

Se han considerado como sujetos de la investigación 30 estudiantes de tercero y cuarto año de enseñanza media (entre 16 y 18 años), en específico del curso optativo de Geometría 3D; el grupo ha tenido conocimientos previos del contenido a preguntar.

La recolección de datos se ha realizado en una sesión de 60 minutos en dos establecimientos educacionales de la ciudad de Viña del Mar, entre octubre y noviembre de 2022. Durante la sesión se llevó a cabo la implementación de un cuestionario de cuatro partes, diseñado con preguntas de pruebas estandarizadas (algunas textuales y otras modificadas), que presentamos a continuación.

Los datos recolectados son de carácter primario (extraídos directamente por los investigadores). No se contemplaron entrevistas, observaciones, intervenciones docentes ni registro audiovisual durante la sesión.

4.2 Instrumento de recogida de datos

El instrumento de recolección de datos (cuestionario) se secciona en cuatro partes:

4.2.1 Primera parte (P1)

Consiste en que los alumnos establezcan la cantidad de cubos que componen una figura. La Agencia de Calidad de la Educación (2019) establece esta pregunta, cuyo enfoque es evaluar los objetivos de aprendizaje relacionados con el concepto de volumen de cuerpos geométricos; para la finalidad de la investigación, se considera el uso de la habilidad espacial para poder descomponer la figura en cada uno de los cubos.

El propósito de las preguntas (separadas en partes "a" y "b") es conocer el razonamiento que tendrán los estudiantes ante una pregunta de descomposición de una figura policúbica, considerando que se trabajarán con figuras similares en las partes 3 y 4 (P3 y P4).

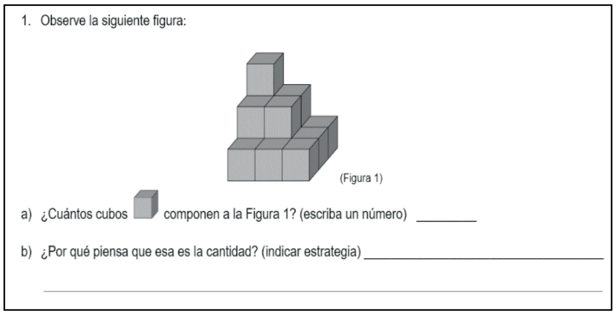


Figura 2. Pregunta 1 (P1)
Nota. Adaptado de Agencia de Calidad de la Educación (2019, p. 34).

4.2.2 Segunda parte (P2)

Esta parte hace referencia a la visualización espacial y su objetivo es identificar si los estudiantes logran plantear vistas diferentes a las que se trabajarán en el cuestionario (superior, frontal, derecha, izquierda, trasera) por medio de una pregunta de selección múltiple con opción de dibujar otra respuesta.

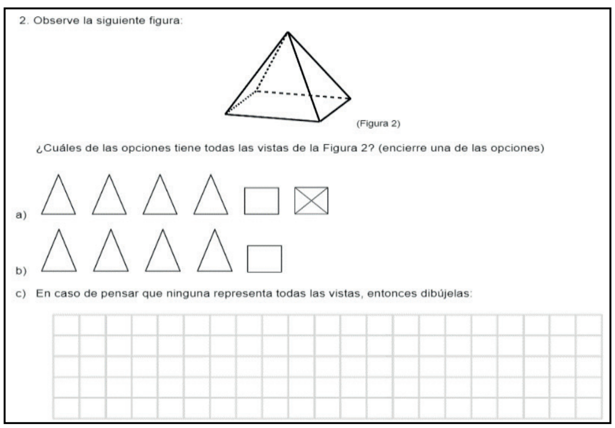


Figura 3. Pregunta 2 (P2)
Nota. Adaptado de Agencia de Calidad de la Educación (2019, p. 28).

4.2.3 Tercera parte (P3)

Se basa en el cuestionario creado por Saralar et al. (2018). Las primeras tres partes (P3.1 - P3.3) se consideran las vistas: derecha, izquierda, superior y frontal. La P3.4 y P3.5 contempla la vista trasera (modificando el cuestionario original, descartando la vista derecha), como se solicita en la Figura 4, debido a que se busca interpretar la capacidad del alumno ante una manipulación más compleja de la figura y la representación resultante de aquella manipulación (cinco partes en total de la P3).

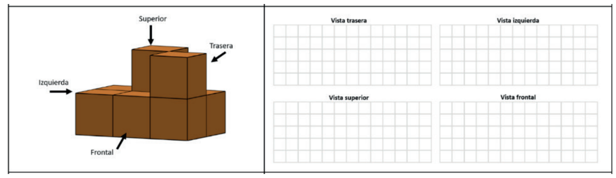


Figura 4. P3.3: Representar por medio de dibujo las vistas indicadas de la figura
Nota. Adaptado de Saralar et al. (2018).

4.2.4 Cuarta parte (P4)

Se enfoca en el proceso inverso de la parte 3, aquello implica que el alumno debe construir la figura 3D basándose en las vistas ortogonales (4 preguntas).

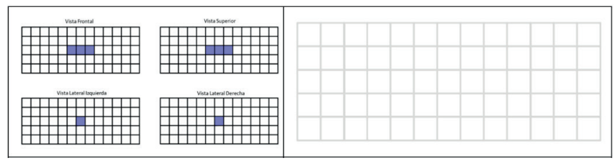


Figura 5. P4.1: Representar por medio de dibujo la figura a la que le corresponden las vistas presentadas
Nota. Adaptado de Saralar et al. (2018).

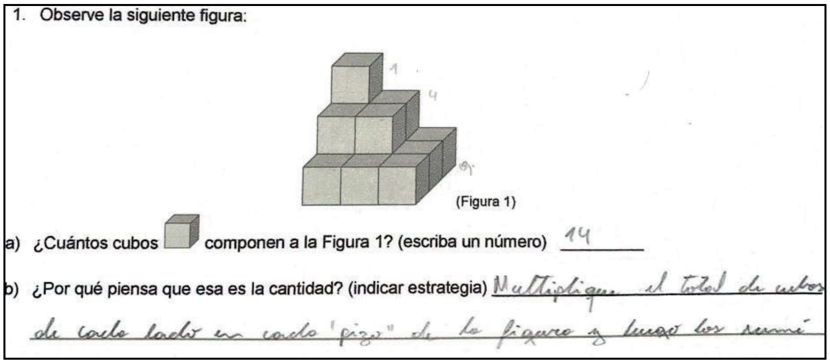
5. Resultados y discusión

Tras la implementación del cuestionario a los 30 estudiantes, estos fueron analizados teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- Los alumnos tienen asociado un número único entre 1 y 30, el cual será su identificador para los casos que se expondrán (A1-A30).
- Las respuestas anticipadas en el análisis a priori se presentan en el Anexo 1 y las no anticipadas continúan con la enumeración respectiva, considerada en el análisis a priori.
- La parte P3 del cuestionario es el enfoque de esta investigación, por lo que los resultados referidos a esta parte se presentan con mayor detalle y las conclusiones son enfocadas en esta.

5.1 Parte 1 del cuestionario

23 de 30 estudiantes responden que la figura está compuesta por 14 cubos. Esta situación alude al razonamiento geométrico que tiene una persona, el cual es planteado en Duval (1993) como el proceso donde se visualiza, se construye y se razona, haciendo énfasis en las representaciones visuales. Se presentan dos tipos de argumentos a continuación:

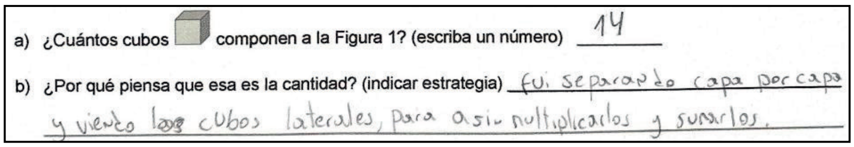

1. Observe la siguiente figura:

1
4
9
(Figura 1)

a) ¿Cuántos cubos componen a la Figura 1? (escriba un número) 14

b) ¿Por qué piensa que esa es la cantidad? (indicar estrategia) Multipliqué el total de cubos de cada lado en cada 'piso' de la figura y luego los sumé

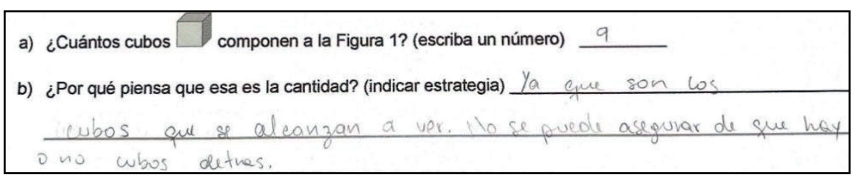
Figura 6. Respuesta de A16 a la P1
Nota. A16 argumenta que su estrategia fue hacer multiplicaciones: 3·3,2·2,1·1.
Luego, suma los resultados previos: 9+4+1=14.


a) ¿Cuántos cubos componen a la Figura 1? (escriba un número) 14

b) ¿Por qué piensa que esa es la cantidad? (indicar estrategia) Fui separando capa por capa y viendo los cubos laterales, para así multiplicarlos y sumarlos.

Figura 7. Respuesta de A22 a la P1
Nota. A22 justifica con respecto al resultado de una manipulación mental de la figura, la cual pudo ser descompuesta por tres etapas para estimar la cantidad de cubos. Se alude al uso de habilidades espaciales para reconocer propiedades de la figura, generar una imagen descompuesta y manipularla.

La respuesta esperada 1.a.2 se evidenció en tres respuestas, esto es debido a que no se puede manipular la figura. Se evidencian argumentos como el de a continuación:


a) ¿Cuántos cubos componen a la Figura 1? (escriba un número) 9

b) ¿Por qué piensa que esa es la cantidad? (indicar estrategia) Ya que son los cubos que se alcanzan a ver. No se puede asegurar de que hay o no cubos detrás.

Figura 8. Respuesta de A29 a la P1
Nota. Argumenta con respecto a que no hay cómo asegurar que la figura tiene elementos detrás, esto indica que el estudiante, al no poder manipular la figura, solo considera lo que ve sin hacer suposiciones de aquello que no tiene como evidencia.

La respuesta esperada 1.a.3 se encontró en dos oportunidades: contando un cubo que estaría compuesto por 4 cubos más pequeños, los dos estudiantes aluden al cubo que está oculto. A13 lo identifica como la conformación de 8 cubos y A4 lo identifica como el cubo "tapado por el resto".

Otras respuestas son:

1.a.4: 10 cubos, por suma errónea de cubos visibles contando dos veces un cubo de la base.
1.a.5: 13 cubos, con base de 9 cubos y suma los cubos visibles sobre la base (4 cubos).

El porcentaje por respuestas obtenidas se tabula a continuación:

Tabla 1. Tipo de respuesta encontrada y su frecuencia porcentual de la P1
Nota. Los porcentajes se redondean al primer decimal.

Respuesta	%
1.a.1	76,7
1.a.2	10,0
1.a.3	6,7
1.a.4	3,3
1.a.5	3,3

5.2 Parte 2 del cuestionario

25 de 30 alumnos consideran que la alternativa "a" (2.a.1) es la correcta, esto indica que se identifican 6 vistas.

La respuesta 2.b.1 se presenta en cuatro oportunidades, ninguna posee justificación y se puede aludir a que el alumno identificó caras y no vistas. También aparece una respuesta no anticipada (2.c.6) que se evidenció en una oportunidad, en la cual el alumno dibuja una séptima vista (Figura 9). Esta vista corresponde a una proyección plana paralela ortogonal ya que se trazan rectas proyectantes que son paralelas entre sí y perpendicular a la superficie de proyección (definición que trabaja Casas et al., 2015) esto conlleva a que el alumno realizara esta proyección (implícita) e identificara la vista; dicha sospecha de acción se encuentra en que el dibujo no tiene noción de profundidad.

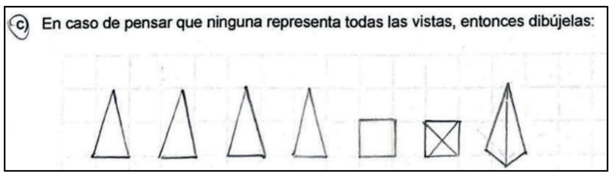


Figura 9. Respuesta de A4 a la P2

La parte 2 del cuestionario se resume a continuación:

Tabla 2. Tipo de respuesta y su porcentaje de la P2

Respuesta	%
2.a.1	83,3
2.b.1	13,3
2.c.6	3,3

5.3 Parte 3 del cuestionario

Para considerar un tipo de respuesta se contabiliza cada una de las vistas, por lo que un estudiante puede entregar hasta cuatro tipos de respuesta por una figura (20 respuestas máximo por estudiante para P3). En este tipo de respuesta se considera la noción de representación en 2D con profundidad por medio de oscurecer las caras de cada cubo dependiendo del plano en el cual se encuentre, resultando que el 43,6% de las respuestas son correctas en la P3.

5.3.1 Respuesta 3.1

En la Figura 10 se aprecia que A12 ha marcado tres tipos de profundidad (graduando el oscurecimiento); en la vista superior el alumno oscurece solo los cuadrados superiores de la figura que están en segundo plano (este tipo de vista [superior] tiene 66,4% de error). En la vista frontal identifica una cara de un cubo que está atrás que el resto de las caras, esta vista (frontal) posee un 56,3% de errores en su representación.

El tipo de respuesta 3.1 es un tratamiento de la figura 3D manteniendo el registro, empleando un razonamiento geométrico en este tratamiento para manipular la representación pictórica que ve en una superficie plana. Esta es una ilusión óptica, la cual es favorecida por las texturas, líneas y formas para que nuestro sistema visual interprete la sensación de espacio y profundidad activando la percepción sensorial tridimensional (Mimbrero, 2017), lo que contribuye a interpretar que el alumno posee habilidades de visualización espacial, logrando manipular la figura para representarla en otra dimensión sin perder la noción de qué figura está representando.

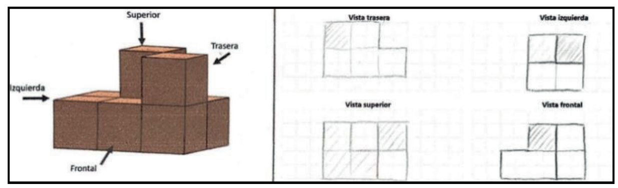


Figura 10. Respuesta de tipo 3.1 de A12 a la P3.4

5.3.2 Respuesta 3.2

El intercambio de vistas se evidencia en la Figura 11, en la cual A14 intercambia la vista derecha con la izquierda. Este tipo de respuesta evidenció la más baja frecuencia con dos casos (0,3% de las respuestas), ambas del A14, el cual manipuló incorrectamente la representación y tuvo problemas con la visualización espacial rotándola incorrectamente (Jaimes y Romo [2013] han asociado que este error es causal de una dificultad en la orientación espacial), por ende, no se consigue una representación semiótica dado a que no se evidencia su correcta manipulación.

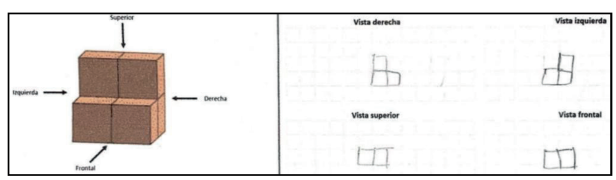


Figura 11. Respuesta de tipo 3.2 de A14 a la P3.3 en vistas derecha e izquierda

5.3.3 Respuesta 3.3

El 6,5% de respuestas en la P3 aluden a una representación de vistas en 3D. Hay estudiantes que trabajaron todas las vistas en 3D y otros que hacen la combinación entre vistas 2D y 3D, para aquello se evidencia la respuesta de A18 que en la vista frontal dibuja la misma figura que se presenta.

Aquello es causante del no logro de la manipulación mental de la figura, además de que no se consigue la deconstrucción dimensional de ella, siendo que la figura está compuesta por cubos, figura que es conocida por el estudiante.

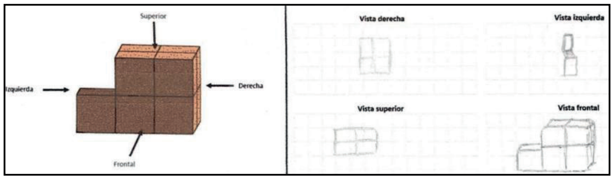


Figura 12. Respuesta de tipo 3.3 de A18 a la P3.2 en vista frontal
Nota. El estudiante en la vista izquierda trata de hacer una representación con perspectiva, aludiendo a una figura 3D.

5.3.4 Respuesta 3.4

Dibujar la cara sobresaliente de la figura ocurrió en diez ocasiones, y se interpreta como la incorrecta manipulación mental completa de la figura y la representación del objeto, lo que está causando que en la vista se pierda información, por lo que el proceso de 2D a 3D lo hará difícil (o casi imposible) con su planteo. Además, la distorsión de las dimensiones verifica que el alumno no logra rotar la figura mentalmente y se queda con la información visual de ella. Se considera que se ha tenido una percepción errada del objeto, extrayendo información visual sin lograr la habilidad de visualización (Duval, 2002).

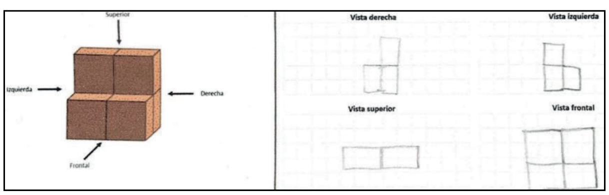


Figura 13. Respuesta de tipo 3.4 de A3 a la P3.3 en vista superior

5.3.5 Respuesta 3.5

Se considera que el tipo de respuesta 3.5 se debe a que el alumno cambia el método de representación del objeto geométrico y emplea una posible proyección plana oblicua de ampliación (Casas et al., 2015), evidenciada en el 16,8% de las respuestas. Aquello se debe al no dominio de habilidades espaciales y de capacidad de visualización, ya que distorsiona las proporciones de un objeto conocido (cubos).

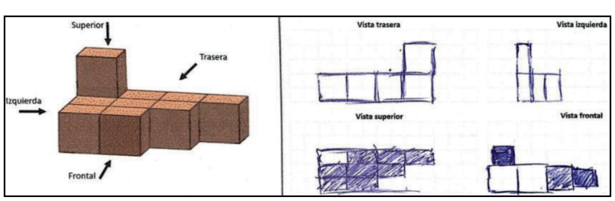


Figura 14. Respuesta de tipo 3.5 del A1 a la P3.5 en vista izquierda

5.3.6 Respuesta 3.6

El 2,6% de las respuestas evidencian que posiblemente los alumnos puedan hacer un tratamiento de la figura, sin embargo se representa sin respetar cuadrículas alterando la forma de la figura original.

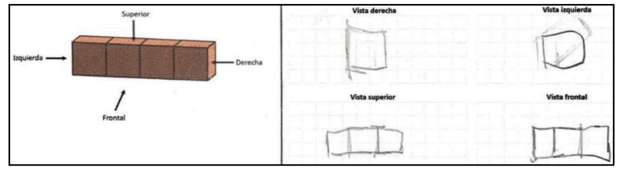


Figura 15. Respuesta de tipo 3.6 de A15 a la P3.1 en vista izquierda
Nota. Se distorsiona la figura en todas sus vistas, además presenta un error de dimensión en vistas superior y frontal.

5.3.7 Respuesta 3.7

El estudiante da una respuesta similar a la 3.1, sin embargo, no representa la noción de profundidad por medio de bosquejos; esta situación reúne el 17,8% de las respuestas (segunda mayoría). La dificultad en el razonamiento espacial en el alumno no se evidencia en este tipo de respuestas, sino que es la técnica de sombreado que permite entregar la sensación de espacio y profundidad (aquello es definido en Mimbrero [2017] y es considerado para esta investigación como una técnica que favorece la aprehensión de un objeto). Dado a que no se profundizó en la respuesta del alumno, no se puede extraer si hay insuficiencia de dominio de habilidades espaciales y/o de visualización; sin embargo, no atiende a la técnica de sombreado que puede favorecer a los cambios de dimensiones y a la manipulación mental del objeto con perspectiva.

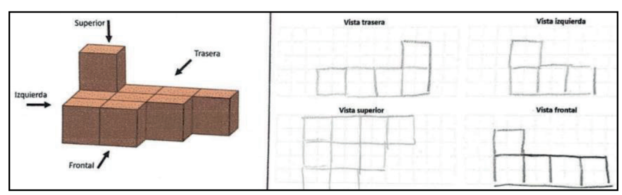


Figura 16. Respuesta de tipo 3.7 de A13 a la P3.5

5.3.8 Respuesta 3.8

El 4% de las respuestas no se categorizaron ya que no se interpretó la intención del estudiante. Aquello se refleja en la Figura 17, en la que un estudiante ha presentado una distorsión en las vistas superior y frontal, lo que se asocia a que intenta representar la profundidad por medio de una perspectiva (proyección plana perspectiva); sin embargo, la figura del plano trasero no posee dimensiones que permitan tener noción correcta de la figura inicial. Este tipo de respuestas obtiene diversas interpretaciones, desde respuestas como la ejemplificada hasta figuras que están completamente incorrectas ya que no poseen ninguna relación con la figura inicial (considerada como la no aprehensión del concepto reflejada en un mal tratamiento de la figura).

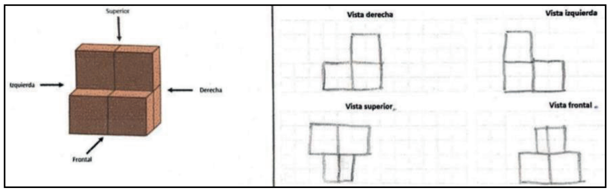


Figura 17. Respuesta de tipo 3.8 de A19 a la P3.3 en vista superior y frontal

5.3.9 Respuesta 3.9

El 2,1% de las respuestas posee una rotación en la representación de las vistas, esta situación se produce al cometer una equivocación en la manipulación y rotación mental de la figura, por lo que, al ser externalizada, se asocia a que el estudiante no ha logrado una completa aprehensión del objeto para poder representarlo.

La Figura 18 corresponde a una respuesta del tipo 3.9 efectuada en la vista superior y frontal; se evidencia que A5 identifica la profundidad asociándola con oscurecer caras, sin embargo, esta acción se hizo identificando la profundidad de manera errada.

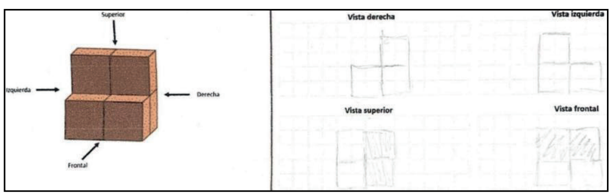


Figura 18. Respuesta de tipo 3.9 de A5 a la P3.3 en vista superior y frontal

5.3.10 Respuesta 3.10

El 2,4% de las respuestas presenta una reflexión de las vistas, esta situación es similar al planteo de una respuesta del tipo 3.9, producida por la manipulación errónea de la representación mental. En la situación ejemplificada, el estudiante ha confundido la posición de una de las caras de un cubo.

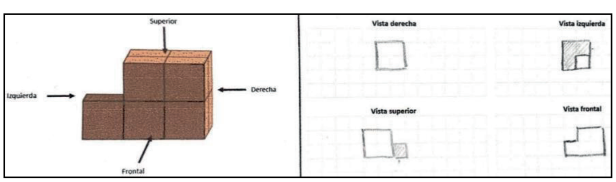


Figura 19. Respuesta de tipo 3.10 de A17 a la P3.2 en vista superior

5.3.11 Respuesta 3.11

El 2,4% de las respuestas tienen un error en representar la profundidad, esto se evidencia en situaciones como en la Figura 20, en la cual el estudiante emplea un color más oscuro para representar una vista más cercana en la vista superior pero en la vista frontal no hace coincidir la misma noción de profundidad por la tonalidad del color, ya que en la vista superior el color más oscuro representa la cara más cercana y en la vista frontal no es así, oscureciendo con la misma intensidad caras de cubos que no están en la misma posición.

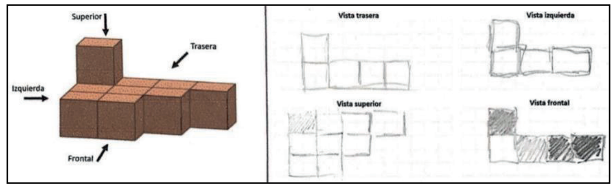


Figura 20. Respuesta de tipo 3.11 de A7 a la P3.5 en vista frontal

La parte 3 del cuestionario se resume a continuación:

Tabla 3. Porcentajes de respuestas a la Parte 3, según su clasificación

Tipo de respuesta	%
3.1	43,6
3.2	0,3
3.3	6,5
3.4	1,7
3.5	16,8
3.6	2,3
3.7	17,8
3.8	4,0
3.9	2,1
3.10	2,4
3.11	2,4

5.4 Parte 4 del cuestionario

5.4.1 Respuesta 4.1

El 51,8% de respuestas demuestra que los estudiantes tienen desarrollada su habilidad espacial, en donde existe precisión entre la relación visual y la espacial. Además, complementando con Tristancho et al. (2019), estos tipos de estudiantes evidencian que pueden transformar las percepciones y recrear las figuras geométricas con base a su experiencia visual. Junto a eso, Duval (2002) señala que el dominar el cambio de dimensiones sin una manipulación física implica tener una capacidad de visualización.

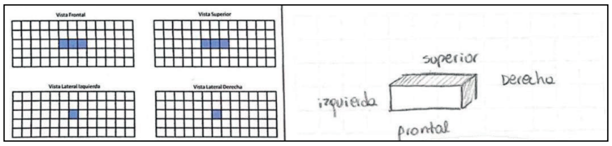


Figura 21. Respuesta 4.1 de A17

5.4.2 Respuesta 4.2

9,8% de respuestas representan a la vista frontal, superior, lateral izquierda o lateral derecha en 2D, causando que no representen una figura en 3D como se esperaba dado a una mala manipulación del objeto.

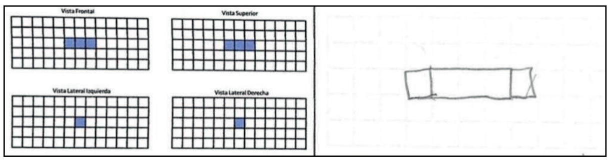


Figura 22. Respuesta 4.2 de A26

5.4.3 Respuesta 4.3

En el 12,5% de veces se dibuja una de las vistas en 3D. Para Duval (1999) se debe identificar la representación del registro para que posteriormente se realice la transformación interna en base a ella. En este caso, el estudiante identificó la vista frontal y, apoyándose en ella, realizó la transformación para construir la figura policúbica, ignorando las otras vistas proporcionadas.

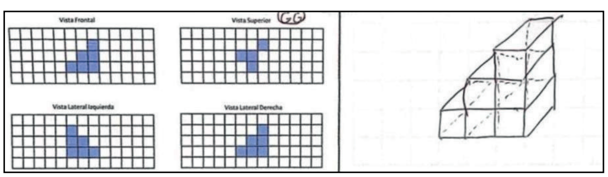


Figura 23. Respuesta 4.3 de A21

5.4.4 Respuesta 4.4

La respuesta 4.4 está presente 4 veces (3,6%). En esta, los estudiantes intercambian las vistas reflejado en un tratamiento visual con el que los alumnos reorganizan las vistas realizando una incorrecta transformación interna de este cuerpo geométrico.

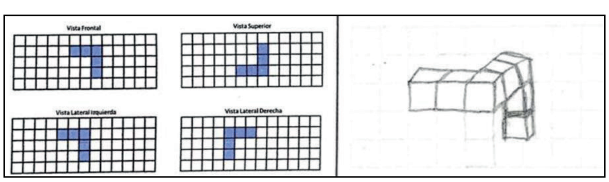


Figura 24. Respuesta 4.4 de A8

5.4.5 Respuesta 4.5

La respuesta 4.5 está presente el 6,3% de las veces, evidenciando la representación de una de las vistas 2D. Esta respuesta es similar a lo que ocurrió en la 4.2 y 4.4: los estudiantes no manipulan el objeto debido a que no lograron llegar a él con las representaciones entregadas.

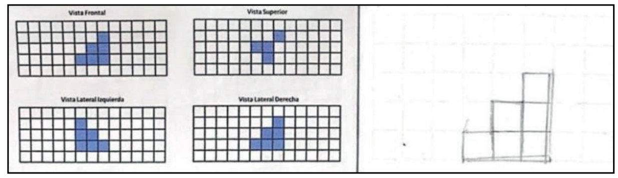


Figura 25. Respuesta 4.5 de A4

5.4.6 Respuesta 4.6

En 6,3% de las respuestas los estudiantes alteran las dimensiones del cuerpo geométrico. Según Fujita et al. (2020) esto sucede debido a que los estudiantes, al carecer de habilidades espaciales, manipulan las propiedades que cumple el objeto matemático adaptándolas a lo que ellos interpretan. Esto, debido a la influencia de la apariencia visual a causa de la ausencia de conocimiento específico del dominio apropiado.

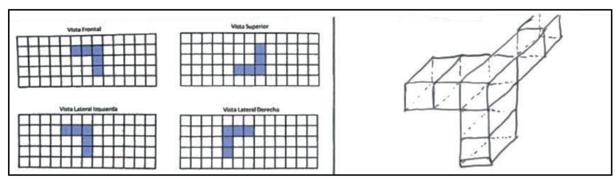


Figura 26. Respuesta 4.6 de A21

5.4.7 Respuesta 4.7

El 7,1% de las respuestas alude a que no se respetaron las cuadrículas ni la figura a base de cubos, por lo que el estudiante no está representando correctamente la figura, sin embargo, aquello no significa que no haya logrado acceder a ella.

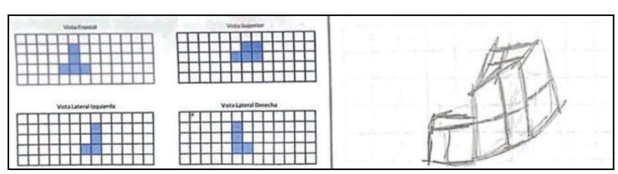


Figura 27. Respuesta 4.7 de A11

5.4.8 Respuesta 4.8

En tres ocasiones (2,7%) no se logra clasificar el tipo de respuesta entregada, como lo sucedido en la Figura 28.

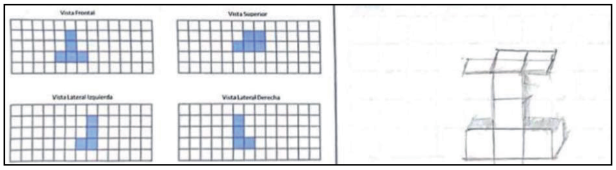


Figura 28. Respuesta 4.8 de A4

La parte 4 del cuestionario se resume a continuación:

Tabla 4. Porcentaje de respuestas de la P4, según su clasificación

Tipo de respuesta	%
4.1	51,8
4.2	9,8
4.3	12,5
4.4	3,6
4.5	6,3
4.6	6,3
4.7	7,1
4.8	2,7

5.5 Vistas ortogonales

Las vistas de la P3 presentan errores asociados a los expuestos anteriormente en la parte 5.3 de resultados y discusiones, adicionalmente se cuantifican a continuación:

Tabla 5. Porcentaje de errores en la P3, según vistas

Tipo de vista	% de error
Derecha	36,0
Frontal	56,3
Izquierda	55,6
Superior	66,4
Trasera	63,2

6. Conclusiones

El análisis de la parte principal de la investigación (P3) ha arrojado resultados favorables para atender a la diversidad de producciones y razonamientos que pueden surgir en el aula de clases ante actividades similares a las planteadas en el cuestionario de la investigación, estos son 11 diferentes tipos de respuestas que evidencian que el 56,4% de ellas no corresponden a una respuesta correcta (3.2 - 3.11). Aquel resultado implica que más de la mitad de los estudiantes no ha logrado comprender los objetos por medio de la representación entregada; Duval (1999) plantea que el centro de la comprensión en matemática es la representación y la visualización, aquella interacción entre estos dos elementos es favorable para producir aprendizaje.

Se han encontrado problemas de visualización del objeto representado de manera icónica, y en la manipulación de la representación mental y la aprehensión del objeto para ser representado por medio de un tratamiento de la representación inicial. Hay estudiantes que pareciera que no comprenden la noción de vistas ortogonales, ya que hacen representaciones tridimensionales; luego, la P3.4 y la P3.5 reúnen el 52% de las respuestas erróneas. Esto es coincidente con la complejidad de las figuras con respecto a las demás, dada la incorporación de la vista trasera.

Se han evidenciado respuestas que validan el análisis a priori, presentando al menos una respuesta esperada (Anexo 1) en este. Por otra parte, los hallazgos de esta investigación confirman los resultados encontrados en Saralar et al. (2018) pese a la diferencia entre edades (y grado), por lo que se puede cuestionar sobre la efectividad de los métodos de enseñanza del contenido geométrico y la potencia de habilidades de razonamiento geométrico y espacial en la formación de los estudiantes en Chile.

Junto con el análisis a priori efectuado, se esperaba que los alumnos presentaran una mayor dificultad en las P3.4 y P3.5 ya que ambas preguntas consideran vistas traseras, esta vista es la menos accesibles para el alumno y debe emplear las habilidades de visualización para llegar a estas (organización visual para identificar la vista no accesible, escaneo visual para identificar propiedades de la figura, generación mental de la figura con sus características, y reconstruir visualmente una figura luego de la manipulación mental). Sin embargo, como se aprecia en la Tabla 5, esta vista a pesar de ser la menos accesible debido a que no se puede manipular la figura físicamente, presentó 63,2% de error (36,8% de respuestas correctas) no siendo la que mayor error tiene, ya que fue superada por la vista superior con el 66,4% de error en la representación de esta vista por los estudiantes en la P3. Aquella situación se puede atribuir a que la información recepcionada no fue suficiente para interpretar, manipular y manifestar representaciones del objeto (Duval, 1999).

En el caso de la P4, la mayoría de las respuestas representan una correcta representación de las figuras que aludían a las vistas, sin embargo, la segunda mayoría de respuestas está centrada en estudiantes que comienzan bosquejando una de las vistas en 3D y luego no interpretan el resto de las vistas.

Duval (1998), además, plantea que un dibujo (como el presentado a los estudiantes en el cuestionario) nos permite ver figuras en 1D o 2D y representaciones de figuras 3D en un medio 2D, por lo cual la percepción de cada una de estas figuras y su dimensión se basa en la interpretación del observador. Por tanto, el trabajo con estudiantes debiese ser estratégico para abarcar el razonamiento espacial, el desarrollo de habilidades espaciales y de visualización.

Como docentes nos vemos enfrentados a presentar propuestas para superar los obstáculos en el aprendizaje de contenidos matemáticos que propone el currículo, por tanto, se debe considerar tener soluciones para subsanarlos; ya que interpretar representaciones no es una acción inmediata (Duval, 1998), sino que es un proceso de preparación para el estudiante el cual debe tener experiencias con el trabajo de representaciones y dominar el trabajo entre dimensiones. En este sentido, la presente investigación ha tratado de aportar a la problemática planteada y se espera subsanar las dificultades por medio de una propuesta con proyecciones de ser implementada en establecimientos educacionales de Chile y publicada en una instancia futura. Esta pretende ser por medio de la realidad virtual (VR), proponiendo hacer uso de algún software en el cual el alumno esté inmerso en una manipulación virtual de la figura por medio de lentes VR.

Referencias

Agencia de la Calidad de la Educación. (2019). *Aprendiendo de los Errores: Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4º básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas.* Agencia de Calidad de la Educación.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Grupo Editorial Iberoamérica.

Callone C., y Torres, N. (2013). ¿Por qué las representaciones semióticas pueden ser obstáculos para la comprensión? Un estudio en el tema ácido-base. *Educación Química, 24*(3), 288-297. https://doi.org/10.1016/S0187-893X(13)72478-9

Casas, S., Pareja, I., y Pérez, M. (2015). *Expresión gráfica*. Universidad de Valencia.

Clements, D., y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics.* (pp. 161-2004). Macmillan Publishing Co, Inc.

Duval, R. (1993). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1998). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp.173-201). Grupo Editorial Iberoamericana.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos de Aprendizajes Intelectuales.* Universidad del Valle.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 311-335). North American Chapter of PME.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 18*(10), 5-53.

Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., y Kunimune, S. (2017). Students' geometric thinking with cube representations: Assessment framework and empirical evidence. *The journal of mathematical behavior, 46*, 96-111. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.003

Fujita, T., Kondo, Y., Kumakuram, H., Kunimune, S., y Jones, K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Mathematics Education Research Journal, 32,* 235-255. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00335-w

Gotte, M. (2019). *Resoluciones de problemas de geometría especial: Errores y dificultades en futuros profesores de matemática* (Tesis de Magíster, Universidad Nacional del Litoral). Repositorio Institucional de la Universidad Nacional del Litoral. https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8443/bitstream/handle/11185/5808/Tesis.pdf

Jaimes, E., y Romo, A. (2013). Integrando el uso de habilidades espaciales y geométricas para el aprendizaje significativo del concepto de volumen de sólidos con estudiantes de dibujo técnico. *Revista Científica, [edición especial]*, 462-466.

Kok, P. (2020). Pre-service Teachers' Visuospatial Cognition: 2D to 3D Transition. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 24*(1), 1-14. https://doi.org/10.1080/18117295.2020.1848279

Mimbrero, D. (2017). *El dibujo en perspectiva a mano alzada: una propuesta metodológica para la enseñanza de los sistemas de representación en bachillerato* (Tesis de magíster, Universidad Politécnica de Madrid). Archivo Digital UPM. https://oa.upm.es/48387/1/TFM_DAVID_MIMBRERO_JIMENEZ.pdf

Ministerio de Educación de Chile. (2012a). *Bases Curriculares: Primero a Sexto Básico.* Unidad de Currículum y Evaluación. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/2342/mono-1003.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ministerio de Educación de Chile. (2012b). *Matemática: Programa de Estudio: Cuarto Año Básico.* Unidad de Currículum y Evaluación. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/644/MONO-148.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ministerio de Educación de Chile. (2015). *Bases Curriculares: 7° básico a 2° medio.* Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34949_Bases.pdf

Ministerio de Educación de Chile. (2019). *Bases Curriculares: 3° y 4° medio.* Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-133992_recurso_10.pdf

Ministerio de Educación de Chile. (2021a). *Sumo Primero: 1° básico: Texto del Estudiante: Tomo 1.* Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Tipo/Textos-escolares-oficiales/Textos-Escolares-elaborados-por-Mineduc/#doc_01

Ministerio de Educación de Chile. (2021b). *Sumo Primero: 2° básico:* Texto del Estudiante: Tomo 2. Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Tipo/Textos-escolares-oficiales/Textos-Escolares-elaborados-por-Mineduc/#doc_02

Ministerio de Educación de Chile. (2021c). T*exto del estudiante: Matemática 5° básico.* Santillana.

Ministerio de Educación de Chile. (2021d). *Programa de Estudio: 3° y 4° Medio: Formación Diferenciada: Matemática: Geometría 3D.* Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140147_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Turquía. (2016). *Banco de exámenes de secundaria.* http://www.meb.gov.tr/meb_sinavindex.php

Miragliotta, E., Baccaglini-Frank, A., y Tomasi, L. (2017). Apprendimento della geometría e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica. *L'In-segnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrate, 40*(B), 339-360.

Saralar, I., Ainsworth, S., y Wake, G. (2018). Middle school students' errors in two-dimensional representations of threedimensional shapes. *Research in Mathematics Education, 20*(2), 1-3. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1482475

Tristancho, J., Vargas, L., y Contreras, L. (2019). Desarrollo de habilidades espaciales en estudiantes de ingeniería mediante CAD especializado. *Scientia et Technica, 24*(1), 57-66. https://doi.org/10.22517/23447214.20261

Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods.* Sage Publications.

Anexos

Análisis a priori

Confección de posibles respuestas con base a resultados previos obtenidos de la Agencia de Calidad de la Educación (2019), conocimientos personales de los investigadores ante las modificaciones intencionadas a las preguntas y resultados de la investigación de Saralar et al. (2018).

6.1 Pregunta 1 (P1)

1.a.1: 14.

1.b.1: Considera los cubos que se encuentran en la parte posterior de la figura que no se logran visualizar.

1.a.2: 9.

1.b.2: Considera los cubos que se logran visualizar en la figura, ya que no se puede asumir que en la parte posterior existen cubos.

1.a.3: 15.

1.b.3: Considera los cubos que se encuentran en la parte posterior y contabiliza un cubo de mayor tamaño formado a partir de ocho cubos pequeños.

6.2 Pregunta 2 (P2)

2.a.1: Respuesta experta, cuatro triángulos isósceles (vista frontal, izquierda, derecha y trasera), un cuadrado (vista inferior), un cuadrado con sus diagonales (vista superior).

2.b.1: Considera cuatro triángulos isósceles como las caras de la figura (vista frontal, lateral izquierda, lateral derecha y trasera) y la vista inferior (cuadrado).

2.b.2: Considera cuatro triángulos isósceles como las caras de la figura (vista frontal, lateral izquierda, lateral derecha y trasera).

2.c.1: No considera la vista superior.

2.c.2: Considera la base (vista inferior) como un triángulo.

2.c.3: Considera la vista superior como un triángulo con segmentos desde el centro de este hacia cada vértice.

2.c.4: Considera la base (vista inferior) como un triángulo y la vista superior como un triángulo con segmentos desde el centro hacia cada vértice.

2.c.5: Considera solo tres triángulos isósceles como las caras de la figura (vista diagonal derecha, vista diagonal izquierda y vista trasera).

6.3 Pregunta 3 (P3)

3.1 (respuestas expertas)

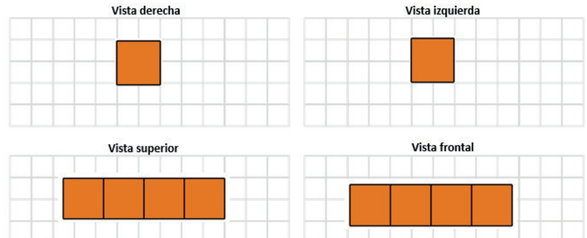


Figura 29. Respuesta experta pregunta P3.1

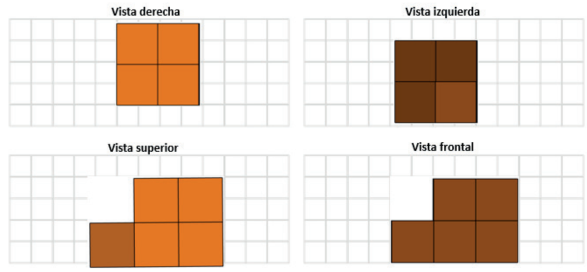


Figura 30. Respuesta experta pregunta P3.2

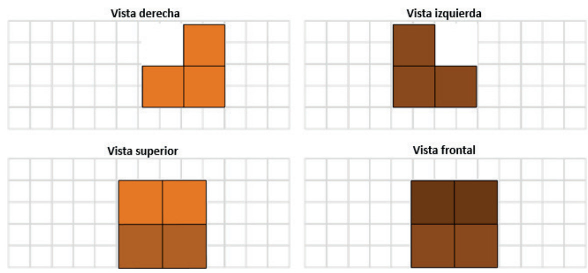


Figura 31. Respuesta experta pregunta P3.3

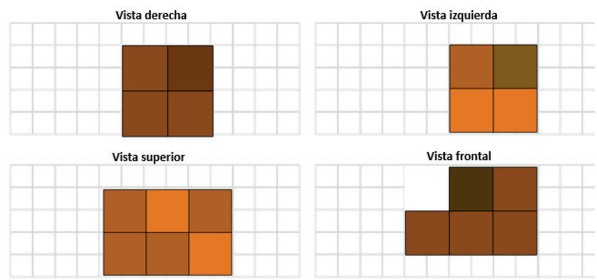


Figura 32. Respuesta experta pregunta P3.4

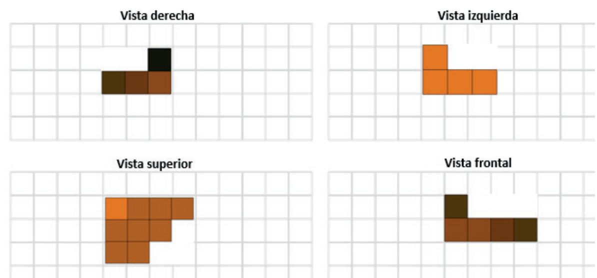


Figura 33. Respuesta experta pregunta P3.5

3.2: No dibuja correctamente los distintos tipos de vistas.

3.3: Representa las vistas mediante objetos tridimensionales, ya sea utilizando líneas segmentadas o líneas que inducen a la profundidad de una figura.

3.4: Solo se considera la cara más expuesta de la figura.

6.4 Pregunta 4 (P4)

4.1:

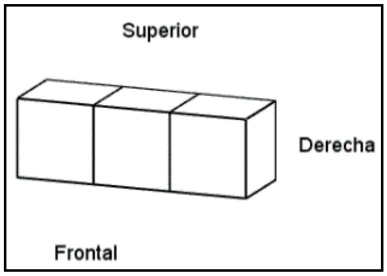


Figura 34. Respuesta experta pregunta P4.1

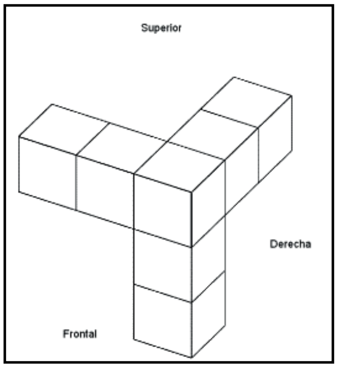


Figura 35. Respuesta experta pregunta P4.2

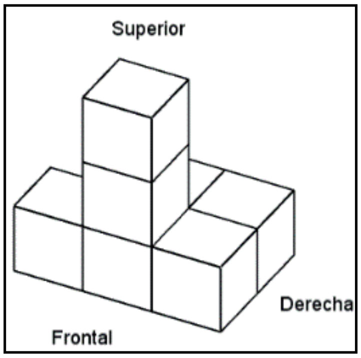


Figura 36. Respuesta experta pregunta P4.4

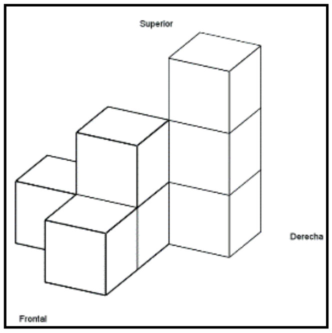


Figura 37. Respuesta experta pregunta P4.5

4.2: Une los diferentes puntos de vista, uno al lado de la otra en su forma bidimensional o tridimensional.

4.3: Dibuja vistas en 3D.

4.4: Confunde los distintos tipos de vistas al momento de dibujar el objeto tridimensional.

4.5: Dibuja vistas en 2D.

https://doi.org/10.46219/rechiem.v15i2.124
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

DIFICULTAD ESPECÍFICA DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: EVIDENCIA DISPONIBLE EN IBEROAMÉRICA

SPECIFIC LEARNING DIFFICULTY IN MATHEMATICS: IBEROAMERICAN EVIDENCE

Lucía Arroyo Hernández
luciaarroyo@unach.cl

Universidad Adventista de Chile, Chillán, Chile.

Dafne Ramos Cisternas
dafneramos@alu.unach.cl

Universidad Adventista de Chile, Chillán, Chile.

Daniela Peña Bravo
danielapenab@alu.unach.cl

Universidad Adventista de Chile, Chillán, Chile.

Samuel Flores Alberto
samuelflores@alu.unach.cl

Universidad Adventista de Chile, Chillán, Chile.

Yael Choquehuanca Subieta
yaelchoquehuanca@alu.unach.cl

Universidad Adventista de Chile, Chillán, Chile.

Danitza Campos Venegas
danitzacampos@unach.cl

Universidad Adventista de Chile, Chillán, Chile.

Oscar Salgado
diferencial@unach.cl

Universidad Adventista de Chile, Chillán, Chile.

RESUMEN

El objetivo de esta revisión fue analizar evidencia científica disponible sobre las Dificultades Específicas de Aprendizaje en Matemáticas (DEAM) en Iberoamérica, a fin de conocer el estado de conocimiento y las líneas de investigación que se proyectan con impacto en Latinoamérica. La metodología consistió en una revisión sistemática en las bases de datos Ebsco, Dialnet, Scielo y Scopus, abarcando publicaciones hasta abril de 2022 bajo distintos criterios. En base a la evidencia recopilada en ocho publicaciones, se identificó que las dificultades de aprendizaje se presentan en los años iniciales de escolaridad, donde no se logra afianzar el conocimiento de las cuatro operaciones matemáticas básicas. Además, se observó la importancia del rol del profesor en el diagnóstico temprano de las DEAM mediante la implementación de instrumentos estandarizados. Por otro lado, se observa la necesidad de considerar en la formación inicial docente los indicadores de riesgo de las DEAM, a fin de entregar apoyos especializados eficientes en aula. Las líneas de investigación identificadas realzan la necesidad del diagnóstico temprano y del enfoque en la formación docente inicial y continua, donde se requieren nuevas metodologías de enseñanza.

PALABRAS CLAVE:
Discalculia, Dificultades Específicas del Aprendizaje, Matemáticas.

ABSTRACT

The objective of this review was to analyze available scientific evidence on Specific Learning Difficulties in Mathematics (SLDM) in Ibero-America, in order to know the state of knowledge and the lines of research that are projected to have an impact in Latin America. The methodology consisted of a systematic review in the Ebsco, Dialnet, Scielo and Scopus databases, covering publications up to April 2022 under different criteria. Based on the evidence collected in eight publications, it was identified that learning difficulties occur in the initial years of schooling, where the knowledge of the four basic mathematical operations is not yet consolidated. In addition, the importance of the role of the critical teacher was observed in the early diagnosis of SLDM through the implementation of standardized instruments. On the other hand, there is a need to consider the SLDM risk indicators in teacher formation in order to provide efficient specialized support in the classroom. The lines of research identified point to the need for early diagnosis and focus on initial and continuous teacher development, where new teaching methodologies are required.

KEYWORDS:
Dyscalculia, Specific learning difficulty, Mathematics.

Recibido: 2 de noviembre de 2022 , Aceptado: 17 de abril de 2023

1. Introducción

En la actualidad, la educación inclusiva impulsa un conjunto de acciones a fin de asegurar la equidad de oportunidades de todos los estudiantes, como una tendencia educativa y social (Latorre y Carrizalez, 2020), estableciendo alternativas pedagógicas que toman en cuenta la diversidad de sus necesidades, capacidades y particularidades (Daza Suárez et al., 2019; Palaguachi-Tenecela et al., 2020; Rodríguez y Gómez, 2018) hacia una intervención más activa y significativa (Ferreira et al., 2020). En el ámbito escolar se pueden observar diferentes categorías relacionadas a las necesidades de apoyo educativo, siendo una de las más comunes las Dificultades Específicas del Aprendizaje (DEA) (Málaga y Arias, 2010), las que evidencian dificultades específicas en diferentes áreas académicas, donde se encuentran: la lectura imprecisa, comprensión lectora descendida, errores ortográficos (como añadir, omitir o sustituir letras), inexactitud en la expresión escrita y dificultad en la comprensión del sentido numérico o del razonamiento matemático. Estas características se encuentran más descendidas, al menos por debajo de lo esperado para la edad cronológica del estudiante, y se convierten en una barrera que afecta significativamente el rendimiento académico (Fonseca et al., 2019). Una de las formas de confirmar este diagnóstico es por medio de pruebas estandarizadas que se aplican de forma individual a cada estudiante, teniendo como condición no estar asociado a ningún tipo de discapacidad de características cognitivas o sensoriales (DSM-5, 2014; Álvarez y Brotóns, 2018; Carrillo et al., 2009). Actualmente las Dificultades Específicas del Aprendizaje en Matemáticas (DEAM) presentan una prevalencia de entre un 3% y un 6% (Velasco et al., 2018), es por ello que la presente investigación se centra en analizar la evidencia disponible a fin de conocer el estado del arte y dilucidar cuáles son las nuevas líneas de investigación. Por otro lado, el conocimiento de la evidencia en países de habla hispana contribuye al conocimiento transversal de la temática, permitiendo que los educadores logren profundizar la investigación en las DEAM mediante el conocimiento de variadas realidades, cercanas y comprensibles, sobre todo si se reconoce la prioridad de una educación inclusiva, de calidad y equidad, especialmente en estudiantes que poseen dificultades de aprendizaje (Castro et al., 2021). Por último, el estudio permite determinar la principal barrera que puede llegar a limitar la presencia, el aprendizaje y la participación de los estudiantes en su progreso escolar (Echeita y Fernández-Blázquez, 2021).

2. Métodos

Esta investigación se desarrolló como una Revisión Sistemática (RS) según la metodología de Reyes et al. (2021). En coherencia con lo descrito (Cardona-Arias, 2016; Letelier et al., 2005; Moreno et al., 2018), la estrategia permitió construir un marco teórico de referencia que da cuenta de la evidencia publicada sobre las DEAM en Iberoamérica de manera exhaustiva y reproducible.

Los criterios de inclusión fueron: artículo publicado en revista, idioma español, período comprendido hasta abril del 2022, que mencionen la metodología en el resumen (abstract), ser estudios primarios o estudios secundarios, y que reporten temáticas asociadas a aspectos educativos sobre trastornos específicos del aprendizaje en matemáticas, o dificultades específicas de aprendizaje en matemáticas. En tanto los criterios de exclusión fueron: artículos duplicados, artículos en los que no se describe la metodología en el resumen (abstract), los estudios que trataran sobre Dificultades Específicas del Aprendizaje en Salud, artículos de países no iberoamericanos y artículos que considerasen Educación Prebásica. La búsqueda se realizó en las bases de datos Dialnet, Scielo, Ebsco y Scopus, puesto que presentan un gran volumen de artículos en español en el área de educación, son parte de las bases de datos más utilizadas en Iberoamérica y son de libre acceso para los autores de este estudio.

En la estrategia de búsqueda se utilizaron los descriptores: "trastornos específicos del aprendizaje en matemáticas", "dificultades específicas del aprendizaje en matemáticas", "dificultades específicas del aprendizaje en cálculo" y "discalculia". En las bases de datos se trabajó con filtros comunes (comillas, rango temporal, tipo de documento e idioma). Para lograr conseguir una mayor precisión de estudios, se seleccionaron conexiones booleanas que limitaran la amplitud de búsqueda en expresiones semánticamente amplias (Ierandi et al., 2017; Reyes et al., 2021): dificultades específicas del aprendizaje "or" trastornos específicos del aprendizaje. Finalmente, cuatro revisores analizaron de forma independiente el conjunto candidato de ocho artículos a incluir en esta revisión mediante el análisis de título y resumen; selección que fue corroborada por una experta en DEAM. Los ocho artículos finales se leyeron a texto completo.

En el proceso de revisión de la evidencia iberoamericana se obtuvo por cada base de datos la siguiente cantidad de artículos: 2.989 en Ebsco, 8 en Scopus, 74 en Dialnet y 44 en Scielo. Del total inicial de 3115 artículos, 747 no estaban escritos en español y 723 no correspondían a la temática luego de analizar título y resumen, o no declaraban su metodología en el resumen.

Al aplicar los criterios de exclusión sobre Dificultades Específicas de Aprendizaje en Salud, artículos de países no iberoamericanos y artículos que considerasen Educación Prebásica, la lista se redujo a 24 textos completos, los que entregaron un conjunto no redundante de 8 artículos (Figura 1). Estos corresponden a estudios de casos que se encuentran publicados en las siguientes revistas (se indica también institución y país): Edusol (Centro de Investigación Científico Técnica de la Universidad de Guantánamo, Cuba), REIEC (Revista Electrónica de

Investigación en Educación en Ciencias, Argentina), Ciencias Psicológicas (Universidad Católica, Uruguay), Psychological Writings (Escritos de Psicología, España), Educare Electronic Journal (Revista Educare, Costa Rica), Bordo (Revista de pedagogía, España), Alternancia (Revista de Educación e Investigación, Perú), Revista Respuestas (Universidad Francisco de Paula Santander, Colombia).

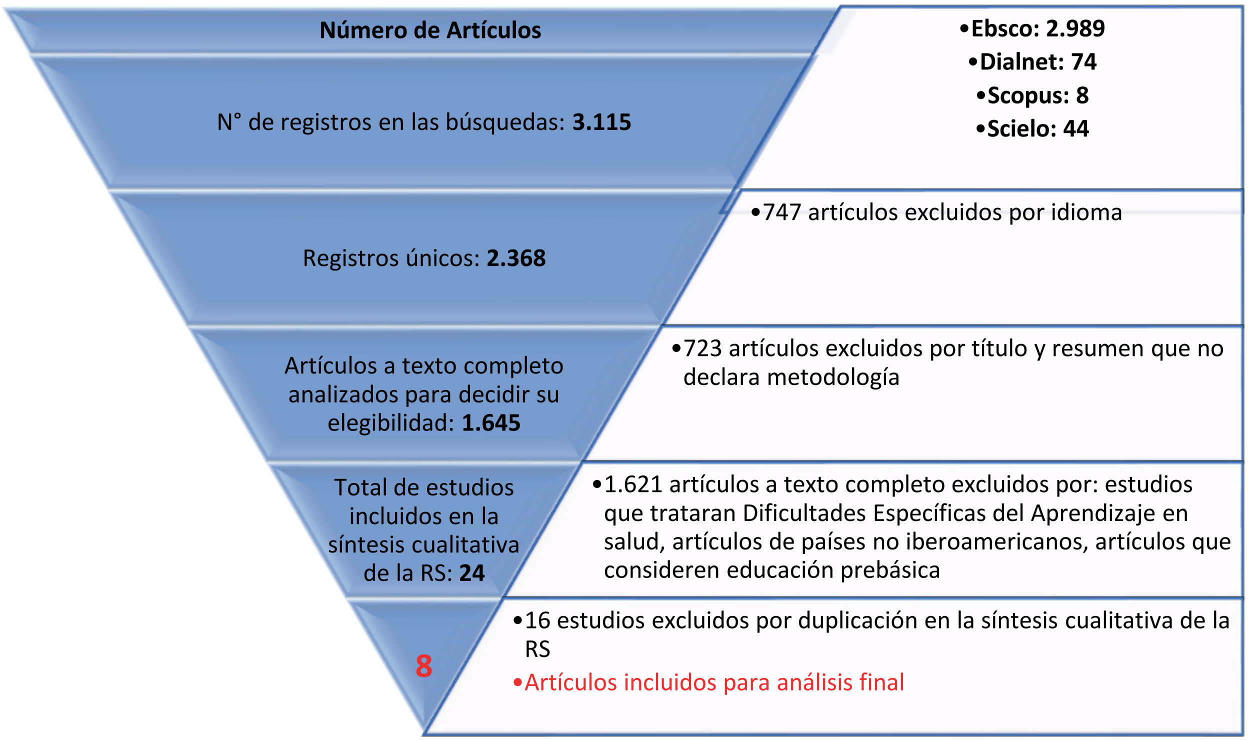


Figura 1. Diagrama de flujo para la obtención de artículos a incluir en esta revisión sistemática
Nota. Diagrama basado en Reyes et al. (2021). En la pirámide invertida (izquierda) se indica el número de artículos que resultó luego de cada exclusión (derecha) según criterios especificados en Metodología. Cuatro revisores independientes analizaron la pertinencia de exclusión luego de leer el título y el resumen del artículo.

Se verificó la calidad metodológica según Reyes et al. (2021) (Tabla 1), donde se indica si el trabajo contiene los elementos metodológicos básicos que lo validen y permitan su reproducibilidad. En respuesta al análisis realizado, se observa que los artículos seleccionados en esta revisión sistemática cumplen con los requisitos metodológicos correspondientes al tipo de estudio, donde se expone el problema de estudio, objetivos, diseño del estudio, lugar de la investigación, participantes, criterios de inclusión y criterios de exclusión. En metodología señalan: muestreo, variables, seguimiento, estadísticas, principios éticos y participantes. En resultados presentan: análisis de grupos y subgrupos. Los artículos A1, A3, A5, A6 y A7 no presentan otros análisis estadísticos. Todos presentan también en la discusión novedad de la propuesta, comentarios de los resultados, limitaciones del estudio y conclusión(es). En el análisis se utilizaron datos descriptivos (Tabla 2) basados en el estudio de Reyes et al. (2021): base de datos en donde se encontró la publicación, revista, país de la revista, autor(es), año de publicación, título, resumen, tipo de evidencia, tipo de artículo (estudio de casos, series de casos, ensayos controlados, revisiones sistemáticas, metaanálisis, aleatorizados, artículo original, revisión narrativa), objetivo principal del artículo, estrategia, grupos de intervención, resultado principal y conclusión principal.

Tabla 1. Análisis de calidad metodológica

Dominio	Ítem	Pregunta clave	Sí	No corresponde
Introducción	Problema de estudio	¿Desarrolla un enfoque general del problema de estudio, de la información científica disponible y de la justificación de la investigación que se está reportando?	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Objetivos	¿Se plantean objetivos claros y precisos?	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Diseño del estudio	¿Menciona el diseño de estudio utilizado?	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Lugar de la investigación	¿Describe el escenario, lugares y fechas correspondientes, incluyendo la eventual exposición, seguimiento y recopilación de datos?	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Participantes	¿Indica el número de sujetos estudiados o el tamaño de la muestra utilizada?	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Criterios de inclusión	¿Señala los criterios de inclusión de la población estudiada?	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Criterios de exclusión	¿Cita los criterios de exclusión de la población estudiada?	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
Metodología	Muestreo	¿Indica el tipo de muestreo utilizado? (cuando corresponda).	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Variables	¿Define claramente las variables estudiadas? Idealmente la variable principal o de resultado y "otras variables de interés". Si corresponde, señalar quién, cómo, con qué y cuánto midió.	Resultados	
	Seguimiento	¿Menciona el tiempo de observación o de seguimiento de los sujetos en estudio? (según corresponda).	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Estadísticas	¿Señala las herramientas estadísticas utilizadas? Referirse a las estadísticas descriptivas y analíticas que se emplearon (según corresponda).	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Principios éticos	¿Indica los principios éticos involucrados?	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Participantes	¿Describe de forma general la muestra estudiada?	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
Resultados	Análisis de grupos y subgrupos	¿Aplica estadísticas analíticas y comparación de grupos y subgrupos? (cuando corresponda).	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	A1, A3, A5, A6, A7
	Otros análisis	¿Emplea otro tipo de análisis estadístico? Por ejemplo: análisis de supervivencia, ajustes por factores de confusión y su precisión estimando los intervalos de confianza del 95% (según corresponda).	A2, A4, A8	
Discusión	Novedad de la propuesta	¿Discute acerca de los aspectos novedosos del estudio que se presentan?	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Comentarios de los resultados	¿Comenta e interpreta los resultados obtenidos en relación al conocimiento existente y resultados de estudios similares?	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Limitaciones del estudio	¿Expone las limitaciones del estudio y los potenciales sesgos existentes en él?	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	
	Conclusión (es)	¿Plantea una conclusión? Solo para aquellos estudios en los que se pueda plantear.	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	

Nota. Los artículos están organizados con códigos según también se indica en la Tabla 2: A1= Fonseca y López (2021); A2= López (2016); A3= Balbi y Dansilio (2010); A4=Blanco y Bermejo (2009); A5= Inostroza-Inostroza (2018); A6= Martínez (2020); A7= Rojas, Contreras y Arévalo (2011); A8= Coronado-Hijón (2014).

Tabla 2. Análisis descriptivo de los ocho artículos incluidos en esta revisión

Autor(es)/ Código	**Año**	**País de publicación**	**Título**	**Objetivo**	**Grupo(s)**	**Resultado principal**	**Conclusión principal**
Fredi Fonseca y Pedro López (A1)	2021	Cuba	*Desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje y el tratamiento al cálculo aritmético en escolares con discalculia*	Recopilar información acerca del tratamiento que se le ha dado al cálculo aritmético en la asignatura de Matemática y conocer cuáles son los aspectos que no han sido solucionados satisfactoriamente en el proceso de tratamiento al cálculo aritmético en escolares con discalculia en la Escuela Primaria.	Se estudia una población constituida por 75 escolares de 2° y 3° grado de los 3 seminternados del municipio de Manzanillo, 15 maestros, 3 jefes de ciclo, 3 psicopedagogos, 3 logopedas y 6 profesores de Informática. La muestra se compone por 30 escolares con discalculia, 5 maestros, 2 jefes de ciclo, 2 psicopedagogos, 2 logopedas, 2 profesores de Informática y 30 familias de los escolares, los que trabajaban o estudiaban en este centro docente durante el curso escolar 2016-2017.	Se infiere la necesidad, en el proceso de enseñanza-aprendizaje, del cálculo aritmético en la asignatura de Matemática, de introducir nuevas estrategias que permitan darle tratamiento al cálculo aritmético en escolares con discalculia para favorecer su aprendizaje, a partir de perfeccionar y modernizar lo relacionado con: la preparación, dinámica y evaluación de este proceso, al tener en cuenta la preparación del maestro, las potencialidades y debilidades cognitivas de los escolares, la motivación, la atención integral de los escolares y la utilización eficiente de las tecnologías, de manera que se logren los objetivos propuestos.	Los resultados del diagnóstico fáctico complementado con la caracterización histórica del proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo aritmético en la asignatura Matemática, con énfasis en la atención a escolares con discalculia evidencia la presencia, objetividad y actualidad del problema.
Mario López (A2)	2016	Argentina	*Peso diferencial que ostentan variables cognitivas y no cognitivas en el rendimiento matemático*	Determinar la relación existente de algunos factores cognitivos, como son la memoria a corto plazo visual y verbal y la atención concentrada y selectiva, con el rendimiento matemático en distintos niveles evolutivos, tratando de dirimir la influencia que el grado de dominio de los aprendizajes verbales suscita sobre la consecución de un determinado rendimiento matemático.	La población fue de 153 sujetos (80 niños y 73 niñas) distribuidos en dos niveles educativos diferentes: 4° de Primaria (78 sujetos distribuidos en tres clases) y 2° de la ESO (75 sujetos, distribuidos en tres clases).	Los resultados demostraron una mayor influencia de las variables cognitivas con respecto a la Etapa de Secundaria en detrimento de Primaria, siendo los factores verbales la variable que soportaba un mayor peso sobre el rendimiento matemático en Primaria, incluso por encima de la atención y la memoria.	Como conclusión general, tras haber comprobado los resultados obtenidos, se ha constatado que existe un perfil diferente para las etapas evaluadas. Así, para el caso de Secundaria, las variables cognitivas se erigen como los grandes predictores del rendimiento matemático, siendo la memoria a corto plazo visual y verbal la que adquiere un mayor peso justo por delante de la atención, desechándose la influencia del factor verbal como variable a tener en cuenta en la predicción del rendimiento matemático. Por otro lado, para el caso de Primaria,

							se confirma el gran peso que sostiene el factor verbal en este nivel y que podría explicar las altas tasas de comorbilidad en sujetos con afectación en matemáticas y lectura.
Alejandra Balbi y Sergio Dansilio (A3)	2010	Uruguay	*Dificultades de aprendizaje en cálculo: Contribuciones al diagnóstico psicopedagógico*	Este estudio tiene el objetivo de proporcionar evidencia clínica que contribuya a un diagnóstico riguroso.	Se presentan dos estudios de caso: "Martín" (8,0 años) y "Maia" (7,3 años).	Al discutir sobre las razones del subdiagnóstico, identificamos como una fuente de explicación la afectación intensa en las funciones visoespaciales. Una discrepancia significativa verbal-no verbal es comúnmente atendida y orientada hacia servicios de asistencia psicomotriz. Dado que esta dificultad es severa y persistente, los sujetos continúan necesitando asistencia psicomotriz dejando encubierta la semiología de la DD identificable a través del diagnóstico psicopedagógico. Subrayamos la importancia del rol docente que, según reportan nuestros casos, fue clave para la detección y derivación temprana.	En la revisión realizada por Dowker (2004) referente a las acciones educativas y psicopedagógicas indicadas para las DD, la autora hace mención enfática a las oportunidades de cambio y progreso, con intervenciones tempranas, intensivas e individualizadas. No estaremos en condiciones de ofrecer esta respuesta mientras no realicemos diagnósticos apropiados.
Margarita Blanco y Vicente Bermejo (A4)	2009	España	*El efecto Mateo en niños con Dificultades Específicas de Aprendizaje de las Matemáticas*	Determinar si la presencia de Dificultades Específicas de Aprendizaje en Matemática (DEAM) se asociaba con la caída de las puntuaciones en las pruebas psicométricas empleadas para valorar el Cociente Intelectual (CI) que con el paso de los cursos se observa en estos niños, tal como sostienen algunos autores con las Dificultades en Lectura y Matemáticas.	Para la selección de la muestra se contactó con los tutores de 28 colegios que habían trabajado con los niños en el último curso de la Educación Infantil y en 2° de Educación Primaria y se les pidió que indicasen los alumnos de sus clases que podrían presentar "riesgo de sufrir dificultades de aprendizaje en matemáticas".	Se observó que el CI de los niños DEAM de mayor edad (3° curso) era significativamente más bajo que el de los niños más jóvenes, mientras que no existían diferencias entre los niños sin DEAM. Además, la presencia de un CI alto o bajo no suponía siempre un rendimiento matemático igualmente alto o bajo en los escolares.	Se concluye subrayando la necesidad de detectar a los niños con dificultades lo más precozmente posible, ya que solo a edades tempranas se evita confundir el diagnóstico debido a la "caída" de las puntuaciones de CI, pudiendo constatar más fácilmente la especificidad de las DEAM.

Fabián Inostroza-Inostroza (A5)	2018	Chile	*Creencias pedagógicas de las Dificultades Específicas del Aprendizaje de las Matemáticas desde las perspectivas de las educadoras diferenciales en una escuela pública de Chile*	Describir las creencias pedagógicas de las personas educadoras diferenciales sobre las Dificultades Específicas del Aprendizaje en Matemáticas.	Cuatro docentes de educación especial.	Las Dificultades Específicas del Aprendizaje de las Matemáticas corresponden a una condición intrínseca al estudiantado, El origen de estas dificultades está asociada tanto a un problema de salud como a metodologías inadecuadas de enseñanza de las matemáticas. Así mismo, se propone que estudiantes que poseen estas dificultades tienen un problema a nivel de razonamiento matemático, el que le impide progresar en el aprendizaje de esta asignatura escolar.	Se logró detectar, en la mayoría de los casos, una coherencia entre las creencias pedagógicas y las prácticas que desplegaban las educadoras diferenciales, evidenciando solo algunos matices entre estas. En este sentido, se pudo constatar una vinculación entre las creencias pedagógicas y las prácticas de estas participantes, respecto de la enseñanza de las matemáticas, sobre las matemáticas mismas y en torno al estudiantado que presenta DEAM, respectivamente.
Carlos Martínez (A6)	2020	Venezuela	*Instrumentos para develar indicadores de riesgo de la discalculia en estudiantes de Educación Primaria*	Diseñar un instrumento para develar los indicadores de riesgo de la dificultad en el aprendizaje de la matemática (discalculia) en los estudiantes de Educación Primaria	24 docentes de aula de la U.E. "Juan Antoni Michelena", donde la muestra fue de un 30%, equivalente a siete docentes.	Debido al problema de desconocimiento de los profesores con relación a las Dificultades Específicas del Aprendizaje en Matemáticas, se propuso diseñar instrumentos que ayudasen a recopilar datos de estudiantes del establecimiento "Juan Antonia Michelena" para detectar tempranamente los posibles diagnósticos de discalculia en Primaria.	Se observó la necesidad de proveer al docente de la información necesaria acerca de los indicadores de riesgo de las Dificultades Específicas de la Matemática (discalculia).
Andrea Rojas, Adriana Contreras y Mayra Arévalo (A7)	2011	Colombia	*Intervención didáctica para promover el aprendizaje de las matemáticas en niños con discalculia*	Favorecer el aprendizaje de las matemáticas en niños con discalculia mediante el desarrollo de estrategias didácticas.	17 estudiantes que, según el maestro y el registro académico, presentan mayores dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.	Se encontró que una de las posibles causas puede estar en la constitución y estabilidad de la familia y en el papel que juegan los padres en el acompañamiento académico de sus hijos.	Las estrategias utilizadas permitieron al estudiante no solo conocer el tema a partir del proceso desarrollado sino que al mismo tiempo reforzar y mantener constante su motivación y participación en el aprendizaje de esta área fundamental en el currículo escolar.

Antonio Coronado-Hijón (A8)	2014	España	Estudio de prevalencia de Dificultades de Aprendizaje en el Cálculo Aritmético	Tiene como objetivo aportar datos en este campo de investigación, concretamente en lo referente a la prevalencia de las dificultades procedimentales sintácticas que presenta el alumnado a lo largo de la Educación Primaria en el aprendizaje del cálculo aritmético básico.	La muestra de estudio estaba constituida por 247 sujetos (51,8% chicos y 48,2% chicas) pertenecientes a seis colegios, seleccionados entre centros públicos y concertados de la provincia de Sevilla, mediante un muestreo aleatorio por conglomerados de seis grupos de alumnado del estrato de 4° curso de Primaria de edades comprendidas entre los 9 y 10 años, que hacían un total de 126 sujetos y cinco grupos de alumnado del estrato de 6° curso de Primaria, de edades comprendidas entre los 11 y 12 años, que hacían un total de 121 sujetos.	Respecto a lo concerniente al estrato de alumnado de 4°, podemos observar que los datos más significativos son los referentes a los porcentajes de frecuencia de error de resta relativo a las "llevadas" y los relacionados con la memorización de las tablas de multiplicar, que muestran como los errores más frecuentes. Respecto al estrato del alumnado de 6°, podemos observar que los datos más significativos coinciden con los mismos que destacan en 4°, respecto a la frecuencia de dificultades en suma, resta y multiplicación, aunque en el alumnado de 6°, aparece como el error más frecuente el relativo a la memorización de las tablas de multiplicar.	Los datos encontrados concuerdan con datos previos obtenidos de otros investigadores, sin embargo, resultan de gran utilidad como orientador y guía para los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Nota. Los artículos están organizados con códigos (primera columna) para el análisis metodológico de la Tabla 1 (ver más arriba)

3. Resultados y discusión

Del total de las investigaciones revisadas, siete fueron realizadas en nivel primario y una en nivel secundario. En cuanto al estado del arte, seis se enfocan en los estudiantes con DEAM y dos de ellos están dirigidos a docentes de aula que trabajan con estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas. Los instrumentos utilizados en los diferentes artículos están relacionados con entrevistas y encuestas a docentes, las que buscan indagar sobre las creencias pedagógicas, metodologías de enseñanza, el nivel de conocimiento que poseen los profesores en torno a las DEAM y sus respectivos indicadores de riesgo. Por otro lado, a los estudiantes se les aplicó una serie de baterías diagnósticas, tales como test de funciones cognitivas, pruebas pedagógicas en la asignatura de Matemáticas y baterías de evaluación psicopedagógicas, las que incorporan test de memoria, atención, resolución de problemas y cálculo numérico, con el objeto de analizar las variables que más afectan en la etapa escolar.

3.1. Investigación según diagnóstico

Dentro de los factores con mayor influencia a la hora de realizar un diagnóstico oportuno que permita implementar estrategias de apoyo especializado se encuentra el de reconocer las características diferenciadoras que poseen los estudiantes con DEAM en comparación con alguna otra dificultad. Es por ello que en cuatro artículos se concluye la necesidad de la detección temprana (Balbi y Dansilio, 2010; Blanco y Bermejo, 2009; Coronado-Hijón, 2014; Martínez, 2020). Para ello es requisito que los docentes a cargo de estudiantes con DEAM estén informados acerca de esta dificultad y sus indicadores de riesgo, con el fin de implementar pruebas o herramientas para el diagnóstico en las siguientes áreas: Números, Operaciones, Geometría, Medidas, Probabilidad y Estadística (Martínez, 2020). Su importancia radica en la frecuencia de errores de los estudiantes con discalculia en las áreas anteriormente mencionadas. Al mismo tiempo se concluye que la detección temprana de las DEAM permite implementar planes de apoyo especializado para orientar la enseñanza específica en esta área y prevenir el posible fracaso escolar (Coronado-Hijón, 2014)

En este mismo sentido, la evidencia muestra la falta de conocimiento que los docentes poseen respecto a las características y criterios diagnósticos correspondientes a las DEAM, lo que impacta en la ineficacia de los apoyos entregados (Benedicto-López y Rodríguez-Cuadrado, 2019). Por ello se hace imprescindible educar e informar a los docentes sobre estas dificultades, ya que permitiría realizar un correcto diagnóstico temprano e implementar estrategias de apoyos especializados que resulten eficaces (Benedicto-López y Rodríguez-Cuadrado, 2019).

Por otro lado, el diagnóstico temprano se enfoca en evaluar las capacidades de aprendizaje de forma integral y a tiempo para evitar un bajo rendimiento (Millá, 2006), el cual puede influir en la progresión de los aprendizajes cuando no se conoce el diagnóstico por parte de los docentes (Blanco y Bermejo, 2006). Para ello, según Benedicto-López y Rodríguez-Cuadrado (2019), es necesario considerar instrumentos específicos para la detección de la discalculia; por el contrario, los que existen actualmente son generales.

3.2. Investigación según tipo de metodología

Con relación al tipo de estrategias y metodologías que utilizan los profesores de la especialidad de matemáticas, se puede mencionar que son poco efectivas y significativas para los estudiantes que presentan DEAM (Inostroza-Inostroza, 2018). Además, se considera que la utilización de metodologías tradicionales como: transcripciones, utilización del libro de contenido, ejercicios, etc., no contribuye de manera efectiva y eficaz en el desarrollo del aprendizaje. La investigación de Fonseca y López (2021) revela que la concepción didáctica del aprendizaje del cálculo aritmético evoluciona desde lo tradicional reproductivo, dando énfasis a la utilización eficiente de las tecnologías, de manera que se logren los objetivos propuestos. Frente a lo anterior, es fundamental que el profesor planifique y promueva estrategias didácticas implementando en el aula el uso de las TIC para que sean a favor de las necesidades de todos los estudiantes con el fin de ejercer una educación de calidad (Rojas et al., 2011). Por otro lado, se hace importante que las metodologías de enseñanza-aprendizaje utilizadas por los profesores sean novedosas, donde se combinen el apoyo al área académica (números y signos, seriación, escalas, cálculos mentales, operaciones y problemas) y el área de dificultad afectada (Fonseca y López, 2021), favoreciendo la motivación por aprender en los escolares. Esto se refuerza con la investigación de Rojas et al. (2011), donde se indica que la utilización de metodologías didácticas innovadoras favorece los procesos como el refuerzo de conceptos matemáticos, el aumento en la participación, la motivación y el interés por el trabajo en clase, logrando una mayor visión y desenvolvimiento de los estudiantes ante situaciones nuevas que les demandan esfuerzo, responsabilidad y habilidades matemáticas para su desarrollo. Además, esto permite que los estudiantes con discalculia trabajen colaborativamente, provocando así un fortalecimiento en el área social, mejorando aspectos como el autoconcepto, la autoestima, debido a que aplica una metodología que aumenta el conocimiento de los conceptos matemáticos, la participación y motivación, que se podría resumir como: cooperativa, didáctica y con relación a la cotidianidad.

Frente a esta necesidad emerge el uso de nuevas metodologías asociadas al uso de tecnologías en las prácticas pedagógicas. De hecho, Rojas et al. (2011) advierten que el uso de estas impacta positivamente en los estudiantes con DEAM debido a que se presentan mejoras significativas en las operaciones aritméticas. Por lo tanto, es muy importante tener en cuenta que las nuevas tecnologías han cambiado el modo de enseñanza-aprendizaje, con el objetivo de que el estudiante sea el protagonista de este proceso (Velasco et al., 2018). Por otro lado, se debe considerar las necesidades de los estudiantes, sus conocimientos iniciales, y en qué momento de la clase se empleará la metodología para hacer un manejo efectivo y apropiado (Margalef-Ciurana y García-Tamarit, 2016). Según lo anterior, resulta necesario que los docentes conozcan las características y las ventajas de la incorporación a las aulas de estos contenidos educativos digitales, transformando las aulas en espacios abiertos, motivadores, flexibles, participativos y dinámicos, seleccionando las tareas adecuadas para que los estudiantes logren sus competencias mediante procesos de enseñanza-aprendizaje significativos (Aguirre et al., 2019). En síntesis, el manejo de las herramientas tecnológicas favorece el proceso de enseñanza, logrando un alcance de 8% a 48% en las habilidades matemáticas básicas (Velasco et al., 2018).

3.3. Investigación según dificultades en el aprendizaje en DEAM

La información recopilada determina que existe una baja cantidad de estudios en idioma español relacionados con los tipos de errores que cometen los niños con discalculia. Por otro lado, es importante destacar que a medida que en los cursos de 4º grado (9-10 años de edad) los estudiantes logran un nivel de asentamiento en las operaciones matemáticas básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) pero cuando llegan a 6º grado (11-12) estas son descendidas (Coronado-Hijón, 2014). Según la metodología utilizada, se confirma la escasa evidencia en Iberoamérica en idioma español con respecto a investigaciones científicas sobre las DEAM, lo que atestigua una carencia mayor de investigadores y políticas públicas que fomenten la investigación en el área, lo que a su vez podría impactar en la implementación de estrategias de apoyo especializadas (Benedicto-López y Rodríguez-Cuadrado, 2019).

En otro punto, López (2016) investiga sobre la relación de determinados factores cognitivos en el rendimiento matemático. Para ello focaliza su estudio en una población de estudiantes de primaria (78 participantes) y secundaria (75 participantes), cuyos resultados señalan que las funciones cognitivas son un factor fundamental que intervienen en las DEAM debido a que se utilizan de forma transversal en la adquisición de contenidos matemáticos. Se determinó en los test de Series Numéricas, como el de Resolución de Problemas, que las variables de atención y memoria son las que presentan mayor influencia. Este mismo autor confirma que a nivel primario tiene mayor peso el factor verbal, en cambio en nivel secundario se ve interferida la memoria a corto plazo visual y verbal. Estos hallazgos se complementan con el estudio realizado por Balbi y Dansilio (2010), donde se señala que recuperar los cálculos de la memoria permite fomentar una mayor agilidad y gestión de los recursos cognitivos, debido a que se prescinde del conteo cada vez que se debe calcular, pudiendo trabajar los procesos más complejos de la matemática. Así mismo, la memoria de trabajo y la atención tienen relación directa con los resultados matemáticos (Balbi y Dansilio, 2010; Blanco y Bermejo, 2009; López, 2016), debido a su implicancia en los logros de aprendizaje, ya que los niveles bajos de atención provocan errores de puntuación, intercambio de signos y otras faltas por precipitación al término de las evaluaciones (López, 2016). Por tanto, en esta revisión se evidencia que los estudiantes con DEAM presentan un rendimiento escolar inferior a sus pares, dificultades en la producción numérica y en la memoria de trabajo; esto debido a que las funciones cognitivas pueden predecir el rendimiento matemático, siendo la memoria a corto plazo, visual y verbal la que adquiere un mayor peso justo por delante de la atención (Arias-Rodriguez et al., 2017), debido a que estas habilidades cognitivas tienen como finalidad lograr una adecuada decodificación de los estímulos (Ramírez y Olmos, 2020). De aquí que la incorporación de estrategias de aula que estimulen estas funciones favorezca al estudiante para la planeación, ejecución y control de las actividades, teniendo un impacto positivo en su aprendizaje (Ávila et al., 2021).

4. Conclusiones

Las contribuciones del presente estudio como resultado de los objetivos planteados en atención a los hallazgos recopilados durante esta investigación demuestran una carencia de evidencia disponible sobre las DEAM en Iberoamérica en las tres líneas de investigación que se desprenden del análisis de la revisión sistemática: diagnóstico, metodologías y dificultades de aprendizaje en matemáticas. En atención a ello, se propone:

En el proceso diagnóstico, realizar un proceso integral que incluya la aplicación de instrumentos evaluativos específicos en el área de las matemáticas para un diagnóstico temprano y oportuno.

En la metodología, en el proceso de preparación de la enseñanza, incorporar acciones educativas que incluyan el uso de tecnologías a favor del aprendizaje de todos los estudiantes para favorecer la motivación por aprender.

En las DEAM, considerar el levantamiento de información sobre acciones educativas de fortalecimiento o estimulación de los procesos cognitivos: a nivel primario factor verbal y secundario memoria a corto plazo visual y verbal.

La principal limitación del presente estudio radica en el número de estudios filtrados, los que responden a: calidad metodológica de los estudios y escasa investigación de la temática en idioma español.

En virtud de lo anterior, genera interés el ampliar la investigación en formación inicial docente primaria y secundaria en aspectos metodológicos y prácticos para el abordaje de estudiantes que presentan DEAM, y se sugiere ampliar la búsqueda de información con la inclusión de los idiomas inglés, español y portugués.

Finalmente, sería importante que las futuras investigaciones profundicen sobre los procesos de organización de la enseñanza que consideren el desarrollo de las funciones ejecutivas y apoyos metodológicos por medio del uso de las TIC, siendo estas las principales barreras de aprendizaje y participación identificadas en el estudio.

Referencias

Aguirre, S., García, C., y Limón, A. (2019). Uso de la Tecnología de la Información y las Comunicaciones (TIC) en el aula como recursos de apoyo. *Revista Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores, 1*(47), 1-25. https://doi.org/10.46377/dilemas.v28i1.1648

Álvarez, C., y Brotóns, E. B. (2018). Dislexia y discalculia: una revisión sistemática actual desde la neurogenética. *Universitas Psychologica, 17*(3), 1-11. https://doi.org/10.11144/javeriana.upsy17-3.ddrs.

Arias-Rodriguez, I., Mendes, J., y Santos, F.-H. (2017). Perfil de niños con déficits en la cognición numérica. *Universitas Psychologica, 16*(3), 1-10. https://doi.org/10.11144/Javeriana.upsy16-3.pndc

Asociación Estadounidense de Psiquiatría. (2014). *Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales (DSM-5)* (5.a ed.). Editorial Médica Panamericana.

Ávila, J. H., Vargas, L. J., Escobar, G. L., Peñaloza, A. P., y Herrera, M. A. (2021). Comprensión docente de la relación entre aprendizaje matemático y funciones ejecutivas. *Revista de psicología y educación, 16*(1), 44-59. https://doi.org/10.23923/rpye2021.01.201

Balbi, A., y Dansilio, S. (2010). Dificultades de aprendizaje del cálculo: contribuciones al diagnóstico psicopedagógico. *Ciencias Psicológicas, 4*(1), 7-15. https://doi.org/10.22235/cp.v4i1.107

Benedicto-López, P., y Rodríguez-Cuadrado, S. (2019). Discalculia: manifestaciones clínicas, evaluación y diagnóstico. Perspectivas actuales de intervención educativa. *RELIEVE. Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa, 25*(1), 1-7. https://doi.org/10.7203/relieve.25.1.10125

Blanco, M., y Bermejo, V. (2006). *Dificultades específicas del aprendizaje de las matemáticas en los primeros años de la escolaridad: detección precoz y características evolutivas* (Tesis de Doctorado, Universidad de Valladolid). Dialnet. http://hdl.handle.net/11162/83877

Blanco, M., y Bermejo, V. (2009). El efecto Mateo en niños con Dificultades específicas de Aprendizaje de las Matemáticas. *Escritos de Psicología - Psychological Writings, 3*(1), 30-36. https://doi.org/10.24310/espsiescpsi.v3i1.13332.

Cardona-Arias, J. A., Higuita-Gutiérrez, L. F., y Ríos-Osorio, L. A. (2016). *Revisiones sistemáticas de la literatura científica: la investigación teórica como principio para el desarrollo de la ciencia básica y aplicada.* Ediciones Universidad Cooperativa de Colombia. http://dx.doi.org/10.16925/9789587600377

Carrillo, M. F., Henríquez, S. S., y Bravo, A. S. (2009). Conocimiento que poseen los estudiantes de pedagogía en dificultades de aprendizaje de las matemáticas (DAM). *Estudios pedagógicos (Valdivia), 35*(1), 47-62. https://doi.org/10.4067/s0718-07052009000100003

Castro, F. B., Vega, J. O., y Bolívar, O. E. (2021). Influencia de la comunicación oral de los docentes en la atención de niños con trastornos específicos del aprendizaje. *Revista EDUCARE, 25*(2), 132-160. https://doi.org/10.46498/reduipb.v25i2.1491

Coronado-Hijón, A. (2014). Estudio de prevalencia de dificultades de aprendizaje en el cálculo aritmético. Bordón: *Revista pedagogía, 66*(3), 39-60. https://doi:10.13042/Bordon.2014.66303

Daza Suárez, S. K., Henríquez Carrera, E. G., Andrade Alcívar, L. E., y Sánchez Salazar, T. del R. (2019). Educación inclusiva desde la diversidad cultural para estudiantes de Educación Básica. *Dilemas contemporáneos: Educación, Política y Valores, 7*(Ed. Especial), 1-17. https://doi.org/10.46377/dilemas.v30i1.1231

Echeita, G., y Fernández-Blázquez, M. (2021). *Escuelas inclusivas. Colaboración y participación en el proceso hacia una educación más inclusiva.* Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI). https://doi.org/10.14201/teri.27699

Ferreira, M. P. M., Gonçalves, C. S. da V., Silva, C. B. C., y Olcina-Sempere, G. (2020). Inclusión y diferenciación pedagógica: Concepciones y prácticas. Dos estudios cualitativos en la realidad del sistema educativo portugués. *Revista Colombiana de Educación, 78*(1), 321-342. https://doi.org/10.17227/rce.num78-9922

Fonseca, F., y López, P. (2021). Desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje y el tratamiento al cálculo aritmético en escolares con discalculia. *EduSol, 21*(76), 100-115.

Fonseca, F., López, P., y Martínez, L. (2019). La discalculia un trastorno específico del aprendizaje de la matemática (Revisión). *Roca: Revista científico - educacional de la provincia Granma, 15*(1), 212-224.

González-Castro, P., Rodríguez, C., Cueli, M., Cabeza, L., y Álvarez, L. (2014). Competencias matemáticas y control ejecutivo en estudiantes con Trastorno por Déficit de Atención con Hiperactividad y Dificultades de Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista psicodidáctica, 19*(1), 125-143. https://doi.org/10.1387/RevPsicodidact.7510

Ierandi, C., Orihuela, L., Jurado, I., Rodríguez del Nozal, A., y Tapia, A. (2017). Revisión sistemática de la literatura en ingeniería de sistemas. Caso práctico: técnicas de estimación distribuida de sistemas ciberfísicos. En *Actas de las XXXVIII Jornadas de Automática* (pp. 84-91). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo.

Inostroza-Inostroza, F. A. (2018). Creencias pedagógicas respecto de las dificultades específicas del aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva de las educadoras diferenciales en una escuela pública de Chile. *Revista Electrónica Educare, 22*(3), 1-22. https://doi.org/10.15359/ree.22-3.13

Latorre, L. V., y Carrizalez, D. M. (2020). La educación de los sujetos con discapacidad en Colombia: Abordajes históricos, teóricos e investigativos en el contexto mundial y latinoamericano. *Revista Colombiana de Educación, 78*, Artículo 78. https://doi.org/10.17227/rce.num78-9902

Letelier, L., Manríquez, J., y Rada, G. (2005). Revisiones sistemáticas y metaanálisis: ¿son la mejor evidencia? *Revista Médica de Chile, 133*(2), 246-249. http://dx.doi.org/10.4067/S0034-98872005000200015

López, M. (2016). Peso diferencial que ostentan variables cognitivas y no cognitivas en el rendimiento académico. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 11*(1), 53-64. https://doi.org/10.54343/reiec.v11i1.194

Málaga, D., y Arias, J. (2010). Los trastornos del aprendizaje. Definición de los distintos tipos y sus bases neurobiológicas. *Boletín de Pediatría, 50*, 43-47.

Margalef-Ciurana, I., y García-Tamarit, C. (2016). The Application of a Digital Educational Resource to the Learning Disability of Subtraction: A Case Study. *Revista Electrónica Educare, 20*(1), 1-22. https://doi.org/10.15359/ree.20-1.13

Martínez, C. J. (2020). Instrumentos para develar indicadores de riesgo de la discalculia en estudiantes de Educación Primaria. *Alternancia-Revista de Educación e Investigación, 2*(3), 79-91. https://doi.org/10.33996/alternancia.v2i3.319

Millá, M. G. (2006). Atención temprana de las dificultades de aprendizaje. *Revista de Neurología, 42*(Supl. 2), 153-156. https://doi.org/10.33588/rn.42s02.2005821

Moreno, B., Muñoz, M., Cuellar, J., Domancic, S., y Villanueva, J. (2018). Revisiones Sistemáticas: definición y nociones básicas. *Revista clínica de periodoncia, implantología y rehabilitación oral, 11*(3), 184-186. http://dx.doi.org/10.4067/S0719-01072018000300184

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2019). *Inclusión en la Educación.* https://es.unesco.org/themes/inclusion-educacion

Palaguachi-Tenecela, M. C., García-Herrera, D. G., Ochoa-Encalada, S. C., y Erazo-Álvarez, J. C. (2020). Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) como estrategia pedagógica en educación inicial. *Revista Arbitrada Interdisciplinaria Koinonía, 5*(1), 72-101. http://dx.doi.org/10.35381/r.k.v5i1

Ramírez, M. del R., y Olmos, H. I. (2020). Funciones cognitivas y motivación en el aprendizaje de las matemáticas. *Naturaleza y Tecnología, 2*, 51-63.

Reyes, A., Ibáñez, M., Villagra, N., Maureira, P., y Pávez-Adasme, G. (2021). Tiempo de compromiso motor en educación física para enseñanza primaria. Una revisión sistemática. *Páginas de Educación, 14*(2), 1-27. https://doi.org/10.22235/pe.v14i2.2587

Rodríguez, J., y Gómez, O. (2018). Nuevos paradigmas de atención educativa a la diversidad. Consideraciones. *Revista de Ciencias de la Comunicación e Información, 23*(2), 1-14. https://doi.org/10.35742/rcci.2018.23(2).1-14

Rojas, A., Contreras, A., y Arévalo, M. (2011). Intervención didáctica para promover el aprendizaje de las matemáticas, en niños con discalculia. *Respuestas, 16*(2), 5-13. https://doi.org/10.22463/0122820X.359

Velasco, A., Montiel, S., y Ramírez, S. (2018). Los videos educativos como herramienta disruptiva para apoyar el proceso de aprendizaje de algoritmos de resta y multiplicación en estudiantes de segundo grado de primaria. *Revista Educación, 42*(2), 149-169. https://doi.org/10.15517/revedu.v42i2.24236

https://doi.org/10.46219/rechiem.v15i2.117
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

PROPUESTAS DIDÁCTICAS

MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA RAPIDEZ DE PROPAGACIÓN DE ONDAS SUPERFICIALES

MATHEMATICS IN THE TEACHING OF THE SPEED OF PROPAGATION OF SURFACE WAVES

Alberto Sánchez Moreno
asanchez@ciidet.edu.mx

Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica, Santiago de Querétaro, México

Aranza Gutiérrez Ramírez
agutierrez14@ucol.mx

Instituto de Ciencias del Mar y Limnología, Ciudad de México, México

Omar Jaimes Gómez
omarjaimesg@yahoo.com.mx

Escuela Nacional de Ciencias Biológicas, Ciudad de México, México

RESUMEN

En México, una de las quejas más comunes sobre por qué los estudiantes no estudian física es que no conocen suficientes matemáticas para comprender los conceptos físicos. También existe la creencia entre los profesores de que se deben presentar ejemplos de la vida real en los cursos para motivar el aprendizaje de la ciencia y demostrar su utilidad. Pero, ¿qué tan fácil es llevar a cabo un proceso tan didáctico? En este trabajo, a través de una propuesta didáctica, demostramos la importancia de las matemáticas para comprender los conceptos físicos relacionados con las ondas. En particular, explica la enseñanza de la rapidez de las ondas superficiales en líquidos y cómo este concepto permite entender el comportamiento de los tsunamis. Esta propuesta contribuye a la enseñanza de la física básica en las diferentes carreras de ingeniería que se imparten en las instituciones de educación superior, y en particular puede ser de gran ayuda en las carreras relacionadas con las ciencias del mar.

PALABRAS CLAVE:
Métodos y estrategias de enseñanza, Teoría del aprendizaje y la enseñanza de las ciencias, Tsunamis, Ondas en el océano y oscilaciones, Propagación de ondas.

ABSTRACT

In Mexico, one of the most common complaints about why students do not study physics is that they do not know enough mathematics to understand physics concepts. There is also a belief among teachers that real-life examples should be presented in courses to motivate science learning and demonstrate its usefulness. But how easy is it to carry out such a didactic process? In this paper, through a didactic proposal, we demonstrate the importance of mathematics in understanding physical concepts related to waves. In particular, it explains the concept of the speed of surface waves in liquids and how this concept allows us to understand the behavior of tsunamis. This proposal contributes to the teaching of basic physics in the different engineering careers taught in higher education institutions and, in particular, can be of great help in careers related to marine sciences.

KEYWORDS:
Teaching methods and strategies, Learning theory and science teaching, Tsunamis, Ocean waves and oscillations, Wave propagation.

Recibido: 22 de junio de 2022 , Aceptado: 25 de abril de 2023

1. Introducción

Los numerosos trabajos que se pueden encontrar relacionados con la enseñanza de la física (Campanario y Moya, 1999; Corral y Castro, 2020 ; Crespo et al., 2014; García, 2005 ;Perales y Cañal de León, 2000;Pino y Ferreira, 2022) ponen de manifiesto la importancia y la dificultad que siempre ha existido, con respecto a su enseñanza y aprendizaje en todos los niveles educativos (Chasteen y Scherr, 2020; Elizondo, 2013; Ferreyra y González, 2000; Geelan, 2020; Larsson y Airey, 2021; Larsson et al., 2021; Tobón y Perea, 1985; Treviño y Socorro, 2013). Entre los factores reportados que más influyen en la dificultad de comprensión de los conceptos físicos es aquel que se refiere a las matemáticas, considerando que éstas inhiben el aprendizaje de los alumnos (Kriek y Koontse, 2017; Monk, 1994; Pospiech et al., 2015).

Dicha dificultad radica en el carácter abstracto de las matemáticas (Ruiz, 2015) y en su estructura jerárquica (Carrillo, 2009; Rivière, 2012). Debido a que la abstracción es una capacidad que requiere prestar mucha atención por parte de los estudiantes, ya que es un acto de desmaterialización difícil de asimilar (Cuccia, 2017), aunado a que un conocimiento matemático se construye sobre otro y depende de él, que requiere también una jerarquización para su aprendizaje, lo cual no siempre sucede.

La mala preparación en matemáticas de los estudiantes que asisten a un curso de Física, aunada a una pobre o inexistente didáctica del profesor que imparte dicha asignatura, ha dado como resultado el bajo rendimiento académico que se reporta en dicha área del conocimiento. Sin embargo, es innegable que son las matemáticas, a través de sus distintas representaciones y modelos, las que permiten comprender y entender la física. Es en este sentido, que consideramos que ellas deberían ser, más que un obstáculo, el recurso didáctico para enseñar esta área del conocimiento (Piñeros, 2018; Rodríguez, 2011).
Nótese que la contradicción que pudiera existir al considerar las matemáticas como un problema y al mismo tiempo verlas como un recurso didáctico en realidad no lo es, dado que toda propuesta tiene condiciones iniciales de funcionamiento. En el caso de la nuestra se requiere que el alumno tenga un buen conocimiento de las matemáticas.

Por otra parte, se ha argumentado que los estudiantes muestran poco o nulo interés en aprender física porque encuentran una desconexión total entre los conceptos que aprenden y su vida cotidiana. Esto es especialmente preocupante en el caso de las ondas o el movimiento ondulatorio, porque están presentes en nuestro quehacer diario, en la comunicación verbal, en la radio, la televisión o la telefonía celular. Sin embargo, los estudiantes -y en general la sociedad- desconocen los fundamentos y principios de dicho fenómeno. Por tal razón, consideramos que el estudio del movimiento ondulatorio es uno de los temas que requiere mayor atención para su enseñanza y aprendizaje. Además, la enseñanza de los fenómenos ondulatorios ofrece la posibilidad de demostrar la necesidad de un conocimiento matemático adecuado para su comprensión, así como, la oportunidad de presentar diversos ejemplos que muestran su aplicación práctica.

En este trabajo se presenta una secuencia para la enseñanza de la rapidez de propagación de una onda superficial, considerando que su didáctica está fundamentada en explicar paso a paso, y de manera obvia, la formulación matemática de los conceptos físicos, para que, de esa manera, se entienda porqué una expresión matemática representa y explica las propiedades del fenómeno ondulatorio. Cómo ejemplo de aplicación práctica se discute la rapidez de una ola en un Tsunami.

El trabajo se organiza de la siguiente manera: en la sección 2 hacemos una breve revisión del movimiento ondulatorio y de las matemáticas como recurso didáctico para la enseñanza de la física; en la sección 3 presentamos nuestra propuesta de secuencia didáctica para la enseñanza de la rapidez de una onda superficial en un fluido, la cual incluye como recurso didáctico a las matemáticas, y su aplicación para entender el fenómeno del Tsunami. Por último, la sección 4 la dedicamos a las conclusiones y comentarios finales.

2. Marco teórico

Tal vez una de las propiedades más difíciles de entender en el movimiento ondulatorio es el hecho de que tiene una energía asociada a él, que se pone de manifiesto cuando provoca que cualquier punto en la trayectoria de propagación oscile alrededor de una posición de equilibrio. Por ejemplo, se puede provocar una oscilación de moléculas de aire, como en el caso del sonido que viaja por la atmósfera, de moléculas de agua (como en las olas que se forman en la superficie del mar) o de porciones de una cuerda o un resorte. En todos estos casos, las partículas oscilan en torno a su posición de equilibrio y solo la energía avanza de forma continua.

Otra de las dificultades existentes en la comprensión del movimiento ondulatorio es que, a pesar de que podemos hablar de ondas mecánicas, en el sentido de que son perturbaciones de las propiedades mecánicas (densidad y presión) que generan oscilaciones locales de los átomos de un medio material, propagándose a otros átomos del medio (Hecht, 2017), el movimiento ondulatorio no es un fenómeno mecánico porque una onda no es un objeto material, sino un estado. Por lo mismo, no se le puede atribuir una masa, el concepto de aceleración no tiene sentido y, como ya mencionamos, el movimiento de una onda es diferente del medio en el que viaja; inclusive hay ondas, como las electromagnéticas, que no necesitan medio alguno para propagarse (Amineh, 2020; Reitz et al., 1996).

Los fenómenos ondulatorios se encuentran presentes en muchos sucesos de la naturaleza, por ejemplo, a nivel macroscópico, en la luz (De la Peña, 2018), el sonido (López, 2010; Merino y Muñoz, 2013), la radio (Bará, 2000; Barreto, 1996) o las olas en la superficie del agua; y a nivel microscópico, en las partículas elementales, a través de la dualidad onda-partícula (Acosta et al., 1999; Knight, 2017; Krane, 2020; Serway y Jewett, 2014;). Esto indica la importancia del estudio de las ondas y su propagación a través de distintos medios. Una onda es uno más de los conceptos abstractos de la física que es fundamental en el entendimiento de la naturaleza y que, como muchos otros conceptos de la física, no ha estado exento de las dificultades que presenta su aprendizaje y enseñanza (Andrés et al., 2006; Barniol y Zavala, 2019; Bravo et al., 2009; Orozco, et al. 2022, Rico et al.,2021).

Una propuesta didáctica que intenta resolver dicha situación es aquella que recomienda dar prioridad a la observación experimental y a partir de ella, a través de la discusión y reflexión acerca de los conceptos involucrados, introducir las representaciones matemáticas (Briceño et al., 2019; Ferreyra y González, 2000; Riveros, 2020). Sin embargo, consideramos que una propuesta de tal índole podría llevar a pensar que las matemáticas no son fundamentales para entender física.

Por otra parte, también existen numerosas críticas a la enseñanza tradicional de la física, ya que se considera como una actividad donde se presentan los conocimientos solamente a través de fórmulas o relaciones matemáticas que deberán ser aprendidas y aplicadas a ejemplos particulares, sin reflexionar o entender la razón de dichas expresiones, en aras de la utilidad práctica de la física. Este tipo de enseñanza irremediablemente induce a un aprendizaje por memorización que no es el adecuado en el caso de la física (Moreira, 2014; Posada, 2002).

Su pertinencia es altamente cuestionable en el estado actual. Esto, porque en la enseñanza tradicional al explicar un concepto físico normalmente se hace la deducción de la relación matemática que lo describe, recordando que cada paso, que la constituye, puede tener también una justificación física.

Cuando se entiende la deducción de la fórmula final, o ecuación, que modela un fenómeno físico, se puede afirmar que también se aprende física, y es que la relación indisoluble entre física y matemáticas, como ya lo hemos mencionado, no se puede negar. De hecho, uno de los grandes problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la física es la confusión de algunos docentes y alumnos al considerar que las matemáticas son física, y no que se debe aprender matemáticas para aprender física.

De esta manera, puesto que un recurso didáctico se define como el medio o estrategia que el maestro utiliza para facilitar su tarea docente, y donde se considera tanto aspectos organizativos de las clases como la manera de transmitir los conocimientos o contenidos (Vargas, 2017), podemos considerar a las matemáticas como un recurso didáctico para la enseñanza de la física (Rodríguez, 2011). Las matemáticas en general cumplen con esta definición, ya que son el medio por el cual comprendemos y describimos los conceptos físicos, a través de sus diferentes representaciones semióticas (Castro et al., 2017). Por ejemplo, la representación simbólica $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ nos permite representar la densidad de corriente eléctrica $(\vec{J})$, la densidad volumétrica de carga (ρ), describir y entender la ley de conservación de la carga eléctrica y una gráfica (representación gráfica) de velocidad contra tiempo nos permite entender un movimiento rectilíneo uniforme. En este trabajo las matemáticas que se describen en la tabla 3 son utilizadas como recurso didáctico para enseñar la velocidad de las ondas superficiales en un fluido.

Ahora bien, si consideramos que una secuencia didáctica está definida cómo una serie de actividades de aprendizaje que se suceden unas a otras siguiendo un orden podemos pensar que en ellas se utilicen estrategias didácticas preinstruccionales, coinstruccionales y postinstruccionales (Acosta y García, 2012; Díaz y Hernández, 2002), las cuales se explican con mayor detalle en la siguiente sección. La propuesta presentada en este trabajo considera todas ellas, poniendo especial atención a la coinstruccional, cuyo objetivo es que el estudiante organice, relacione e interrelacione los contenidos e ideas más relevantes para el logro del aprendizaje, cualidades propias de las matemáticas, y donde, al deducir paso a paso las relaciones matemáticas que representan un concepto físico, el estudiante se haga consciente del porqué de la relación final que empleará o utilizará para poder resolver un problema particular que se le presente.

3. Desarrollo de la propuesta didáctica

Una propuesta didáctica consiste en plantear o sugerir una serie de acciones que coadyuven al proceso de enseñanza-aprendizaje de un tema en particular. En este trabajo consideramos una propuesta didáctica para la enseñanza de la rapidez de propagación de ondas superficiales que se fundamenta en las estrategias docentes para un aprendizaje significativo (Díaz y Hernández, 2002), las matemáticas como recurso didáctico (Rodríguez, 2011) y las representaciones semióticas (Duval, 1998; Oviedo y Kanashiro, 2012). Esta propuesta contribuye a la enseñanza de la física básica en las diferentes carreras de ingeniería que se imparten en las instituciones de educación superior, y en particular puede ser de gran ayuda en las carreras relacionas con las ciencias del mar.

Una secuencia didáctica se deriva de una serie de actividades organizadas que constituyen la configuración denominada estructura didáctica, la cual está basada en generar procesos centrados en el aprendizaje (D'Hainaut, 1985). Para elaborar una secuencia didáctica se debe conocer el curso, asignatura o el tema que se pretende enseñar (Díaz, 2013).

De acuerdo con la estructura didáctica, una secuencia didáctica debe poseer tres componentes prediferenciadas: actividades de apertura, desarrollo y cierre, como se esquematiza en la Figura 1.

Figura 1. Estructura didáctica
Nota. Elaboración propia.

Para cada una de las componentes de la estructura didáctica se tiene una estrategia didáctica definida como los procedimientos (métodos, técnicas y actividades) por medio de las cuales se pretende construir y lograr metas previstas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En las actividades de apertura existen las estrategias preinstruccionales que tienen como objetivo preparar y alertar al estudiante sobre qué y cómo aprender, incidiendo en la activación o generación de conocimientos previos. En el caso del estudio del movimiento ondulatorio, sería conveniente utilizar una estrategia didáctica que permita al estudiante recordar conceptos físicos como la velocidad o la rapidez, y conceptos matemáticos como el gradiente o el rotacional.

Para las actividades de desarrollo, las estrategias coinstruccionales son las indicadas. La característica principal de estas estrategias es que el estudiante va relacionando e interrelacionando las ideas y conceptos para lograr el aprendizaje propuesto. Es por eso que, consideramos que la deducción matemática, paso a paso, de las relaciones que describirán un concepto físico se encuentra en el marco de este tipo de estrategia. En el presente trabajo la ejemplificaremos deduciendo la expresión matemática que define el concepto de rapidez de ondas superficiales en el agua.

Finalmente, para las actividades de cierre se cuenta con las estrategias postinstruccionales, que permiten llevar a cabo una revisión final de la clase, resumiendo las ideas principales de lo que se enseñó e incluso estimulando a los estudiantes para discutir y reflexionar acerca del tema tratado. Nosotros proponemos considerar como estrategia postinstruccional la aplicación del concepto estudiado, es decir, cómo este se utiliza para entender un fenómeno de la naturaleza particular. Como ejemplo, consideramos la rapidez de las ondas superficiales en un Tsunami.

Nuestra propuesta didáctica para la rapidez de ondas superficiales se muestra en la Figura 2.

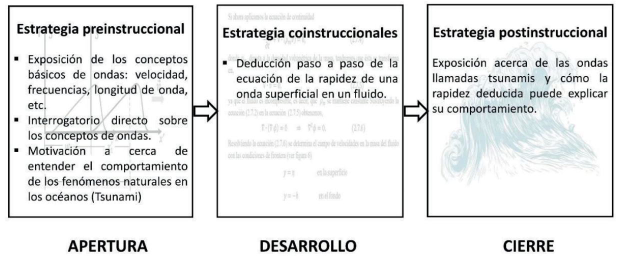


Figura 2. Secuencia didáctica
Nota. Elaboración propia.

En la apertura de la secuencia didáctica se consideran tres estrategias preinstruccionales: la motivación, el interrogatorio directo y la exposición de conceptos.

Con respecto al interrogatorio directo podemos destacar su importancia, ya que, mediante esta actividad, el maestro puede:

a) asegurar, mediante el interrogatorio adecuado, si los alumnos poseen los antecedentes mínimos indispensables, físicos y matemáticos, para atender el tema que se enseñará.
b) dirigir el razonamiento del alumno para que recuerde o aprenda algún concepto necesario para atender el tema que se enseñará.

Esta actividad llevará al estudiante a un estado de desequilibrio que surgirá cuando una concepción que tiene entra en conflicto con alguna otra concepción que él mismo tiene, o bien con alguna del maestro o de sus compañeros. En el conflicto cognitivo el estudiante se puede dar cuenta de las razones por las que los conceptos o métodos que maneja no son los adecuados para comprender un tema o para resolver algún problema. Con respecto a la labor docente, el maestro es el encargado de crear las situaciones necesarias para que los estudiantes experimenten un conflicto cognitivo durante esta etapa de la secuencia didáctica. El maestro mediante la dinámica de preguntas y respuestas crea en el salón de clase un ambiente que favorece el surgimiento de conflictos cognitivos con fines didácticos.

En esta actividad, si bien el maestro es el encargado de preguntar y guiar el interrogatorio, el estudiante no solo responde, sino que también piensa y considera su respuesta (reflexiona), y relaciona ideas y conceptos distintos para obtener conclusiones o formar un juicio (razona) que se encontrará en sus respuestas. En esta dinámica grupal el estudiante tiene la libertad de preguntar al maestro o a sus compañeros estableciendo una discusión y diálogo. También, el estudiante podría estar frente al grupo respondiendo a las preguntas con apoyo de la tiza y el pizarrón, expresando conceptos y desarrollos matemáticos, si así se requiere. De esta manera se espera que los estudiantes participen en esta estrategia preinstruccional.

Cada una de estas estrategias generará un aprendizaje (Marzano y Pickering, 2005), como se menciona en la Tabla 1. Una sugerencia de cómo proceder en la estrategia de exposición de conceptos básicos se muestra en la Tabla 2.

Tabla 1. Estrategias preinstruccionales

Estrategia	**Sugerencia**	**Aprendizaje**
Motivación	Informar, dando cuenta al estudiante acerca de los fenómenos físicos que se pueden estudiar y entender a través del concepto de onda y el movimiento ondulatorio, por ejemplo, la luz, el sonido, la radio, las olas en el agua o la dualidad onda-partícula. Reflexionar, preguntando a los estudiantes acerca de lo que piensan con respecto a la posibilidad de explicar a partir de los fenómenos naturales, el concepto de onda y sus propiedades.	Percibirá el valor del tema que se estudiará. Desarrollará una actitud positiva hacia el tema que estudiará.
Interrogatorio directo	Dinámica de preguntas y respuestas. Se pretende con esta estrategia llevar al estudiante al conflicto cognitivo. Esto hará al estudiante profundizar y reflexionar acerca de los temas que queremos que comprenda. Ejemplos de preguntas serían: ¿Las ondas se mueven (propagan)? ¿Cuál es la diferencia entre una onda en el agua y una onda en una cuerda? ¿Sin el agua se puede hablar de una onda en ese medio? ¿Las ondas tienen energía? ¿Las ondas se pueden propagar sin un medio que las sustente? etc.	Desarrollará el hábito mental de la autorregulación, pues será consciente de lo que está pensando y de la meta que se busca. Desarrollará el hábito del pensamiento creativo, pues se esforzará al máximo y exigirá hasta el límite de su conocimiento y habilidad para responder las preguntas. Desarrolla el pensamiento crítico.
Exposición de conceptos básicos	Exposición oral que incluya: Definición del concepto de onda y sus propiedades. Movimiento ondulatorio y sus propiedades.	Conocimiento declarativo. El estudiante conocerá hechos, conceptos y principios: Entenderá el significado de los nuevos conceptos a partir de su conocimiento previo, que ha recordado o aprendido en esta etapa de la estrategia. Organizará la información nueva en esquemas, mapas, organizadores gráficos, representaciones simbólicas. Relacionará de manera sustancial la nueva información con sus conocimientos y experiencias previas.

Nota. Elaboración propia.

Tabla 2. Propuesta para la exposición de conceptos básicos

Ondas y movimiento ondulatorio
Se define a una onda como el movimiento de una perturbación en un medio. Cuando una onda se transporta por medios deformables o elásticos se le denomina onda mecánica (Hecht, 1999). En un movimiento ondulatorio, las partículas que constituyen el medio no se propagan con la perturbación, sino que se limitan a transmitir la perturbación, para lo cual vibran alrededor de su posición de equilibrio. Por lo tanto, existe un transporte de energía, pero no de materia (Serway, 1999). En general, el movimiento ondulatorio es un fenómeno que consiste en la transmisión de un estado. Si colocamos fichas de dominó alineadas y derribamos la primera, se iniciará un tren de sucesos que acabará en que todas las fichas estén tiradas. A lo largo de la fila de fichas no ha habido ningún transporte total de masa, sino que lo que ha viajado ha sido el "estado" de caída. La rapidez con que se ha movido el estado de caída recibe el nombre de rapidez de propagación de la onda (Ingard y Kraushaar, 1966). La rapidez de propagación de una onda se determina por la naturaleza de la perturbación y por las propiedades físicas del medio (Ingard y Kraushaar, 1966). Depende de la elasticidad y de la densidad del medio: mientras este sea más elástico y menos denso, la rapidez de propagación será mayor. La rapidez junto con la longitud y la frecuencia son los tres conceptos físicos que caracterizan a una onda. Una longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos de una onda, por ejemplo, en el caso de la onda en una cuerda, la longitud de onda es la distancia entre dos crestas o valles adyacentes. A la longitud de onda regularmente se le denota con la letra griega λ. La mayoría de las ondas son periódicas y en tal caso la frecuencia es la rapidez con que se repite la perturbación, a la frecuencia se le denota con la letra f (Serway, 1999) o la letra griega ν (Resnick et al., 1998). La rapidez o magnitud de la velocidad de propagación de una onda cualesquiera v, se determina mediante el producto de su frecuencia por su longitud de onda (Serway, 1999) y se conoce también como rapidez de fase.

Nota. Elaboración propia.

La segunda etapa de la propuesta didáctica corresponde a la estrategia coinstruccional. Es en esta etapa donde se utiliza a las matemáticas como recurso didáctico indispensable, puesto que es un lenguaje que permite al estudiante la construcción, la interpretación, la abstracción y la consolidación de significados de los fenómenos Físicos. En el caso particular que estamos considerando, son las matemáticas que se describen en la Tabla 3 las más adecuadas para la enseñanza de la rapidez de propagación de ondas superficiales en el sentido de que sin ellas no sería posible deducir y entender la expresión matemática de la ecuación (8), que modela dicho fenómeno físico.

Tabla 3. Matemáticas necesarias para la enseñanza de la rapidez de una onda superficial

Conceptos matemáticos	
Álgebra	• Factorización. • Ecuación de Euler $e^{+i\theta} = \cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$
Álgebra vectorial	Vector $\vec{v}$
Función	• Suma de funciones. • Funciones pares e impares. • Funciones. hiperbólicas $\cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$, $\sinh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$

Cálculo Vectorial	• Diferenciación. • Operador nabla. • Rotacional • Gradiente • Divergencia • Laplaciano. • Identidad vectorial.
Diferencial de una función escalar	Si $f = f(x, y, z)$, Entonces $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial y}dy$
Derivadas parciales	Si $f = f(x, y, z)$, Entonces $\frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_j + h, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_n)}{h}$
Ecuaciones Diferenciales Parciales	• Solución método de separación de variables
Ecuaciones diferenciales ordinarias	• Solución ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

Esta estrategia consiste en la deducción, paso a paso, de la expresión matemática que determina la rapidez de propagación de una onda superficial en un fluido cualquiera. Considerar todos los pasos de una deducción, donde se explican todas y cada una de las consideraciones, deducciones, operaciones y simplificaciones necesarias para llegar a obtener la expresión o modelo matemático deseado, proporciona al estudiante aprendizajes relacionados con la adquisición e integración, refinamiento y profundización y aplicación significativa del conocimiento.

Esta afirmación se encuentra en el contexto de la teoría epistemológica y didáctica conocida como constructivismo (Osborne y Wittrock, 1983; Posner et al., 1982) y del aprendizaje significativo (Ausubel,1968), ya que tal propuesta de enseñanza permite que el estudiante establezca relaciones entre sus conocimientos previos y los nuevos, reflexione acerca de ellos, confronte lo conocido con lo nuevo por conocer, promueva la solución del conflicto cognitivo y desarrolle la autonomía y capacidad crítica. Es decir, que sea un ente activo (Londoño, 2009; Luria, 1979) en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En esta etapa el estudiante no es un ente pasivo, como se podría pensar, ya que al escuchar al maestro y poner atención a las deducciones detallada (paso a paso) su cerebro responde, de manera natural, para tener la capacidad de recibir, entender e interpretar información, así como, de responder a los mensajes verbales y no verbales del maestro. En este sentido, el estudiante es activo y este proceso impacta favorablemente en su aprendizaje (Cova, 2012), ya que, esta capacidad cerebral se encuentra relacionada con la abstracción, capacidad intelectual indispensable en la enseñanza de la física (Campusano, 2017; Gaitám et al., 2022).

Pongamos como ejemplo el inicio de la deducción mencionada. En la deducción de la rapidez de propagación de las ondas superficiales es necesario conocer las matemáticas que se muestran en la Tabla 3. Como en todo problema de física el primer paso es la abstracción, es decir, la idealización del fenómeno físico que se quiere estudiar, esto se hace mediante la ayuda de la representación gráfica. En este caso se considera la situación bidimensional que se ilustra en la Figura 3, que representa un fluido con una profundidad h, el cual sufrirá una perturbación que genera ondas superficiales de altura ξ , como lo muestra la Figura 4. En este sentido, las consideraciones que definen a una onda superficial son las siguientes:

- Solo se perturba la superficie.
- El movimiento del fluido es irrotacional.
- El fluido es incompresible.

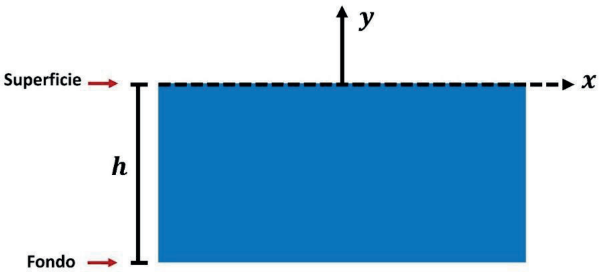


Figura 3. Fluido sin perturbar
Nota. Elaboración propia.

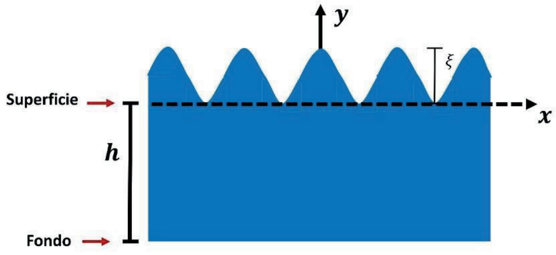


Figura 4. Ondas superficiales en el fluido
Nota. Elaboración propia.

Ahora bien, para proceder a la deducción de la velocidad de las ondas en este sistema e interpretar estas condiciones es necesario utilizar matemáticas. El primer lugar se representa a la velocidad de las ondas como un campo vectorial denotado como $\vec{v}$ y se le denomina campo vectorial de velocidades.

Entonces, la condición de no rotación, de acuerdo con el cálculo vectorial (Marsden y Tromba, 1981), se representa como

$$\nabla \times \vec{v} = 0, \tag{1}$$

donde $\nabla \times \vec{v}$ representa el rotacional de la velocidad y ∇ es el operador nabla en coordenadas cartesianas: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$. La ecuación (1) implica la existencia de una función escalar ϕ tal que

$$\vec{v} = \nabla\, \phi, \tag{2}$$

aquí $\nabla\, \phi$ es el gradiente de la función ϕ, debido a que el rotacional del gradiente de cualquier función escalar cumple con la relación

$$\nabla \times (\nabla\, \phi) = 0. \tag{3}$$

Para considerar la condición de incompresibilidad es necesario recordar la expresión matemática que representa la continuidad (conservación) de un fluido, la cual tiene la forma (Arregui de la Cruz et al., 2017)

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0. \tag{4}$$

donde ρ_m representa la densidad volumétrica de masa. Ahora, si el fluido es incompresible, la cantidad ρ_m se mantiene constante, por tanto, la ecuación (4) nos dice que

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \tag{5}$$

Hasta aquí el estudiante habrá entendido que la representación verbal irrotacional e incompresible se traduce a la representación funcional vectorial como lo indican las ecuaciones (1) y (5) (Duval, 1998; Oviedo y Kanashiro, 2012)

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (5) obtenemos

$$\nabla \cdot (\nabla\, \phi) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2 \phi = 0. \tag{6}$$

La ecuación (6) es una ecuación diferencial en derivadas parciales conocida con el nombre de Laplaciano o ecuación de Laplace de la función ϕ .

En este momento el estudiante entiende que para determinar el campo vectorial de velocidades en la masa del fluido es necesario resolver la ecuación (6) con las condiciones de frontera (7), que entenderá a través de la representación gráfica que se muestra en la Figura 4 (Duval, 1998; Oviedo y Kanashiro, 2012)

$$\begin{aligned} y &= \xi \qquad \text{en la superficie} \\ y &= -h \qquad \text{en el fondo} \end{aligned} \tag{7}$$

El resto de la deducción se puede llevar a cabo de la misma manera, desafortunadamente es demasiado extensa para reportarla explícitamente en este artículo. La figura 5 esquematiza y resume la secuencia didáctica matemática para este fin.

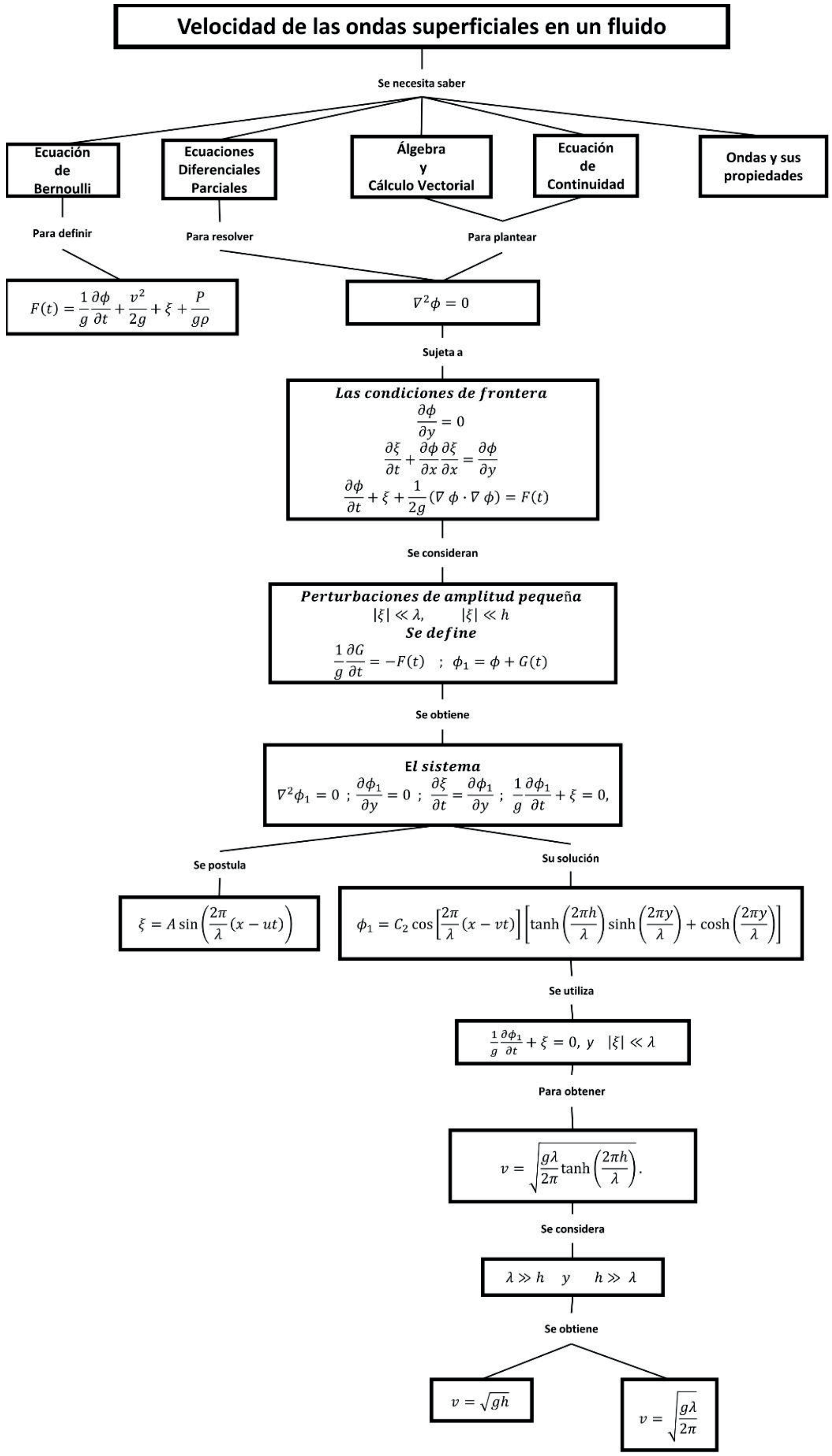


Figura 5
Secuencia de ecuaciones utilizada para obtener la rapidez de una onda superficial en un fluido
Nota. Elaboración propia.

Una vez terminado este proceso de enseñanza-aprendizaje, el estudiante entenderá por qué la expresión buscada tiene la forma

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}, \tag{8}$$

con λ, h y g representando la longitud de onda, la profundidad y el campo gravitacional cerca de la tierra, pero, sobre todo, porque involucra la función tangente hiperbólica, que es una de las situaciones que más desconcierta a los estudiantes cuando esta velocidad se les presenta sin deducción alguna.

Además, utilizando matemáticas nuevamente, el estudiante aprenderá cómo, a partir de esta misma ecuación, la rapidez de una onda infinitamente pequeña $(\lambda >> h)$ en una masa de fluido de profundidad h, se obtiene mediante la ecuación,

$$v = \sqrt{gh}\,, \tag{9}$$

y para el caso de una gran profundidad $(h \gg \lambda)$ esta solo depende de la longitud de onda,

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{10}$$

También las matemáticas le dirán que la energía $\mathcal{E}$ que transporta la onda está representada por la relación

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4}\,\rho\lambda A(v^2 + gA). \tag{11}$$

donde A y ρ representan la amplitud de la onda y la densidad de masa del fluido respectivamente.

La estrategia posinstruccional corresponde al cierre de la secuencia didáctica. Aquí, proponemos que se discuta alguna aplicación de lo aprendido, como el uso de las relaciones para la rapidez de la onda superficial. Vamos a ejemplificarla con el agua de los océanos y el fenómeno del Tsunami.

Si consideramos que el fluido donde se producen las ondas es el agua, la expresión (8) representa la rapidez general de una onda superficial en el agua y las ecuaciones (9) y (10) nos dan la rapidez de una onda superficial en aguas poco profundas y profundas respectivamente.

Se tendrán ondas superficiales en el agua cuando algún punto de su superficie se aparta de su equilibrio debido a alguna perturbación provocada, por ejemplo, por el viento u otra interacción con ella. Esto provocará un movimiento en el agua que se propagará por toda la superficie en forma de ondas. Dichas ondas no son ni longitudinales ni transversales, como se podría pensar, porque tienen un movimiento más complicado, pues es en dos dimensiones, por eso cuando estamos en el mar y nos encontramos con una ola, esta nos mueve de un lado a otro y de adelante hacia atrás (Thurman y Trujillo, 2019).

Si las ondas superficiales se propagan en una región donde la profundidad es mayor que media longitud de onda, el movimiento de las partículas es circular (Thurman y Trujillo, 2019), como se muestra en la Figura 6. Por eso, las olas no se sienten en el fondo.

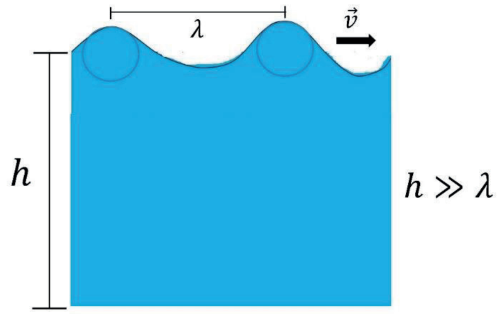


Figura 6. Ondas superficiales en aguas profundas
Nota. Elaboración propia.

Como muestra la ecuación (10), la rapidez de este tipo de ondas solo depende de su longitud de onda, que nos indica que las ondas con una longitud de onda mayor viajan más rápido que las de menor longitud. A tal dependencia de la rapidez se le llama dispersión (You, 2008).

Sin embargo, si las ondas que se propagan en una región donde la profundidad es pequeña comparada con la longitud de onda, por ejemplo $h < \frac{\lambda}{20}$, toda la capa de agua desde la superficie hasta el fondo estará en movimiento. En dicho caso, las trayectorias de las partículas se encuentran en órbitas elípticas muy planas que se acercan a la oscilación horizontal (de ida y vuelta). El componente vertical del movimiento de las partículas disminuye con el aumento de la profundidad, haciendo que las órbitas se vuelvan aún más aplanadas (Thurman y Trujillo, 2019). Como se esquematiza en la Figura 7.

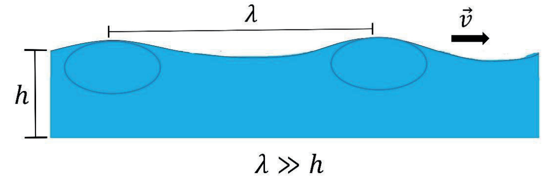


Figura 7. Ondas superficiales en aguas poco profundas
Nota. Elaboración propia.

Este tipo de ondas viaja a la misma rapidez y, por tanto, no son dispersivas.

El conocimiento de las ondas superficiales permite entender el comportamiento del fenómeno natural conocido como Tsunami. Se les llama así a las ondas sísmicas producidas por terremotos en el fondo del océano. Tsunami es una palabra de origen japonés formada por dos términos: *tsu*, que significa "puerto" o "bahía", y *nami* "ola"; por tanto, Tsunami significaría maremoto en un puerto o bahía.

La longitud de las ondas que se producen en un Tsunami está en un intervalo de entre decenas y centenas de kilómetros (Cartwrigh y Nakamura 2008). Dado que la profundidad media del océano es de 3682 metros (Charette y Smith, 2010), las olas se consideran como ondas de agua poco profundas. Entonces, de acuerdo con la ecuación (9), la rapidez de las ondas superficiales para la profundidad media es de aproximadamente 684 kilómetros por hora. Si consideramos para un Tsunami una longitud de onda de 350 km, entonces, de acuerdo con la relación entre la rapidez v, la longitud λ y el período temporal T,

$$v = \frac{\lambda}{T}, \qquad (12)$$

se tiene una frecuencia aproximada de dos olas por hora o una ola cada 30 minutos. La energía de este tipo de olas, de acuerdo con las ecuaciones (9) y (11), será,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,\rho g \lambda A^2. \qquad (13)$$

Por conservación de la energía, la cantidad $\mathcal{E}$ es constante. Entonces, la relación (13) implica que

$$\lambda A^2 = \kappa_1\,, \qquad (14)$$

con $\kappa_1 = \frac{2\mathcal{E}}{\rho g}$, una cantidad constante. La ecuación (14) nos indica que la amplitud de la onda es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de onda, por tanto, en altamar el Tsunami es incapaz de causar mayor daño pues generará olas de amplitud muy pequeña. Ahora, si sustituimos la ecuación (9) en la ecuación (12) tendremos

$$\lambda = T\sqrt{gh}\,. \qquad (15)$$

Como el período se mantiene constante durante la propagación de la ola, entonces podemos decir que

$$\lambda = \kappa_2\sqrt{h}\,, \qquad (16)$$

con $\kappa_2 = T\sqrt{g}$,una cantidad constante. Sustituyendo la ecuación (16) en la ecuación (15) se tiene que

$$\sqrt{h}\,A^2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \;\Rightarrow\; hA^4 = \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2 \;\Rightarrow\; A = \frac{\kappa_3}{h^{\frac{1}{4}}}, \qquad (17)$$

con $\kappa_3 = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}$, una cantidad constante. Dicha expresión se utiliza para comparar la amplitud de las olas del Tsunami en el océano A_O con las del litoral A_L . Aplicando la ecuación (17) tenemos,

$$A_O = \frac{\kappa_3}{h_O^{\frac{1}{4}}}, \quad A_L = \frac{\kappa_3}{h_L^{\frac{1}{4}}} \;\Rightarrow\; \frac{A_L}{A_O} = \left(\frac{h_O}{h_L}\right)^{\frac{1}{4}}. \qquad (18)$$

La ecuación (18) nos dice que la amplitud de una onda en el litoral es $\left(\frac{h_O}{h_L}\right)^{\frac{1}{4}}$ veces la amplitud de la onda en el océano. Por ejemplo, si se considera una profundidad en el océano de 4000 metros y en el litoral una de 2 metros, la cantidad $\left(\frac{h_O}{h_L}\right)^{\frac{1}{4}}$ tendrá un valor de aproximadamente 6.7, por tanto, la amplitud de la ola en el litoral será 6.7 veces la amplitud de la ola en el océano. Si en el océano el Tsunami tiene una ola de 3 metros de amplitud, en el litoral su amplitud será de casi 20 metros. Dado que la energía de la ola es proporcional al cuadrado de la amplitud, ecuación (13), la energía de tales olas en el litoral es enorme y la cantidad de agua que ponen en movimiento es la causa de su poder destructor. Un Tsunami pone en movimiento una capa de agua que se extiende desde el fondo del océano hasta su superficie.

En esta etapa de la propuesta didáctica se pretende que el estudiante relacione los conceptos y expresiones matemáticas aprendidos durante la etapa de desarrollo de la secuencia didáctica, junto con su utilidad para entender y explicar los fenómenos naturales; además, se espera motivarlo a pensar y considerar las posibles aplicaciones prácticas de dichos conceptos.

4. Conclusiones

En este trabajo se propone a las matemáticas como recurso didáctico indispensable para la enseñanza de la física, y se presentó una propuesta didáctica para la enseñanza de las ondas superficiales en un fluido.

La secuencia didáctica presentada y sugerida consta de tres etapas, cada una con estrategias instruccionales denominadas, respectivamente, preinstruccional, coinstruccional y posinstruccional. En la etapa preinstruccional se propone tres estrategias didácticas: la motivación, preguntas que detonan el conflicto cognitivo, una introducción al concepto de onda y a sus propiedades básicas, como son: la rapidez de propagación, longitud de onda, periodo y amplitud, y el repaso de los conceptos matemáticos básicos necesarios para comprender la deducción de la rapidez de una onda superficial.

Considerando que en la mayoría de los cursos que presentan el tema de la rapidez de ondas superficiales en un fluido se remiten a dar la fórmula para aplicarla y no se discute su procedencia (aunque en algunos sí sus consecuencias), lo que a nuestro parecer fomenta un aprendizaje conductista y memorista del que la mayoría de los docentes se ha quejado, presentamos en la etapa coinstruccional la propuesta de utilizar a las matemáticas con recurso didáctico para la comprensión y deducción de la rapidez de las ondas superficiales en un fluido, así como de su energía. Esta etapa de la secuencia didáctica permite reflexionar acerca de los antecedentes matemáticos que un estudiante debe tener para comprender este tema. En este sentido, es importante mencionar la necesidad de que los estudiantes cuenten con un aprendizaje significativo en álgebra, geometría, álgebra vectorial, cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales.

Si definimos un recurso didáctico como el instrumento o estrategia que el maestro utiliza para enseñar un determinado tema, entonces, las matemáticas cumplen con tal característica. Desafortunadamente, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas representan un problema en sí mismo. De allí la necesidad de asegurarse de que los estudiantes han aprendido correctamente matemáticas antes de emprender la tarea de enseñarles física.

Por otra parte, consideramos que un factor relevante para aprender física es la motivación, entendiéndola como los factores internos y externos que estimulan el deseo en los estudiantes para estar continuamente interesados y comprometidos en aprender algo. Además, estimula una actitud positiva hacia la física y juega un rol invaluable en el aprendizaje de dicha área del conocimiento. La estrategia posintruccional propuesta, donde se explica el comportamiento de un Tsunami a partir de la rapidez y energía de las ondas superficiales obtenidas en la etapa de desarrollo de la secuencia didáctica, coadyuva en tal sentido. Sin embargo, consideramos importante señalar que para implementarla es necesario tener un conocimiento multidisciplinar que no siempre el profesor y/o el estudiante poseen. Por ejemplo, si en la clase de Electrostática se enseña el concepto de momento dipolar eléctrico, se podría pensar en el horno de microondas como un ejemplo de aplicación interesante. Sin embargo, hay que considerar que la explicación de su funcionamiento puede requerir de otros conceptos que posiblemente sean desconocidos o incomprensibles para los estudiantes, como puede ser el momento (o torca) de una fuerza o las ondas electromagnéticas de longitud del orden de 10^(-2) metros. Por lo tanto, hay que ser cuidadosos para escoger adecuadamente el ejemplo, asegurándonos de que se conocen todos los conceptos involucrados en la explicación.

La historia de la ciencia nos muestra que hay una relación directa entre el conocimiento eficaz de las matemáticas y el aprendizaje de la física. Si el estudiante sabe matemáticas, comprenderá cómo y por qué los conceptos físicos se expresan en ese lenguaje y podrá extraer conclusiones y predicciones de los mismos. En un curso de Física no se debe privar a los estudiantes de la deducción de las expresiones matemáticas que describen los fenómenos físicos, como en el caso de las ondas superficiales en los fluidos, que hemos presentado aquí. De otro modo, se propiciará un aprendizaje memorístico o conductista, que puede ser útil, pero no contribuirá al tan ansiado aprendizaje significativo.

Para lograr un adecuado aprendizaje en física es necesario que el estudiante haya desarrollado su pensamiento matemático, el cual le permite tener la habilidad de comparar, describir, analizar, sintetizar, modelar y sobre todo de abstraer. De esta manera, las matemáticas tienen una función invaluable en el aprendizaje de la física.

Nuestra propuesta pretende impactar positivamente en el aprendizaje significativo de los estudiantes. Esperamos que trabajos futuros puedan reportar los resultados de la implementación de esta propuesta didáctica.

Finalmente, concluimos que, solo mediante la deducción explícita (y paso a paso), de las expresiones matemáticas que representan los fenómenos físicos, el estudiante les da sentido y se apropia significativamente de ellos.

Agradecimientos

Dedicamos este trabajo a la memoria del profesor Gonzalo Zubieta Russi, que falleció inesperadamente el 9 de abril del 2021.

Referencias

Acosta, S. F., y García, M. CH. (2012). Estrategias de enseñanza utilizadas por los docentes de biología en las universidades públicas. *Omnia, 18*(2), 67-82.

Acosta, V., Cowan, C., y Graham, B. (1999). *Curso de física moderna.* Oxford University Press.

Amineh, R. K. (2020). Applications of Electromagnetic Waves: Present and Future. *Electronics, 9*(5), 1-4. https://doi.org/10.3390/electronics9050808

Andrés, M. M., Danón, M. A., y Meneses, J. A. (2006). Desarrollo conceptual acerca de ondas mecánicas en un laboratorio guiado por el modelo MATLaF. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 5*(2), 260-288.

Arregui de la Cruz, F. J., Cabrera, E., Cobacho, R., Gómez, E., y Soriano, J. (2017). *Apuntes de mecánica de fluidos.* Universitat Politècnica de València.

Ausubel, D.P. (1968). *Educational psychology: a cognitive view.* Holt, Rinehart and Winston. (Trad. cast. Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. Trillas, 1976).

Bará, J. (2000). *Ondas electromagnéticas en comunicación* (2.a ed.). Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Barniol, P., y Zavala, G. (2019). Evaluación del entendimiento de ondas mecánicas utilizando un test de opción múltiple en español. *Rev. Bras. Ensino Fís., 41*(4), Artículo e20190119. https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2019-0119

Barreto, J. A. G. (1996). Radioastronomía: Detección de ondas de radio provenientes del universo. *CIENCIA ergo-sum, 3*(3), 295-307.

Bravo, S., Pesa, M., y Caballero Sahelices, C. (2009). Representaciones de alumnos universitarios sobre propagación de ondas mecánicas. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(3), 405-420. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3651

Briceño, J., Rivas, Y., y Lobo, H. (2019). La Experimentación y su Integración en el proceso Enseñanza Aprendizaje de la Física en la Educación Media. *Revista Latinoamericana de Estudios en Cultura y Sociedad, 5*(2), 2-17. https://doi.org/10.23899/relacult.v5i2.1512

Campanario, J. M., y Moya, A. (1999). ¿Cómo enseñar Ciencias? Principales tendencias y propuestas. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(2), 179-192. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4085

Campusano, R. A. (2017). Conceptos abstractos, notaciones y convenciones en la enseñanza de ciencias físicas universitarias. *Axioma,* (17), 108-117.

Carrillo, B. (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. Innovación y Experiencias

Cartwrigh, J. H., y Nakamura, H. (2008). Tsunami: a history of the term and scientific understanding of the phenomenon in japanese and western culture. *Notes and Records of the Royal society, 62*(2), 151-166. https://doi.org/10.1098/rsnr.2007.0038

Castro, M. G., González, M. D., Flores, S., Ramírez, O., Cruz, M. D., y Fuentes, M. C. (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I Entreciencias: *Diálogos en la Sociedad del Conocimiento, 5*(13), 1-22. http://dx.doi.org/10.21933/ J.EDSC.2017.13.218

Charette, M. A., y Smith, W. H. F. (2010). The Volume of Earth's Ocean. *Oceanography, 23*, 112-114. https://doi.org/10.5670/oceanog.2010.51

Chasteen, S. V., y Scherr, R. E. (2020). Developing the Physics Teacher Education Program Analysis rubric: Measuring features of thriving programs. *Physical Review Physics Education Research, 16*(1). https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010115

Corral, Y. J., y Castro, R. C. (2020). Actitud hacia la física de los estudiantes de quinto año de Educación Media General durante el confinamiento por COVID-19. *Revista Ciencias de la Educación, 30,* 941-964.

Cova, Y. (2012). La comprensión de la escucha. *Letras, 54*(87), 125-140.

Crespo, M., Cortázar, A., Julián, M., y Díaz, M. (2014). Ordenadores en el aula: ¿estamos preparados los profesores? *Enseñanza de las Ciencias, 2*(32), 239-250. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.939

Cuccia, E. J. (2017). Abstracción y matemática en el Comentario a la Física de Tomás de Aquino: más allá de las operaciones intelectuales. *Eidos, 27,* 154-173.

D'Hainaut, L. (1985). *Objetivos didácticos y programación. Análisis y construcción de currículums, programas de educación objetivos operativos y situaciones didácticas.* Oikos Tau.

De la Peña, L. (2018). La naturaleza de la luz. *Revista Digital Universitaria, 19*(3), 1-11. https://doi.org/10.22201/codeic.16076079e.2018.v19n3.a1

Díaz, A. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 17*(3), 11-33.

Díaz, F., y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo* (2.a ed.). McGraw-Hill Interamericana.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento* (Vol. II). Grupo Editorial Iberoamérica.

Elizondo, M. S. (2013). Dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de la Física. *Presencia Universitaria, 3*(5), 71-77.

Ferreyra, A., y González, E. E. (2000). Reflexiones sobre la enseñanza de la física universitaria. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(2), 189-199. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4038

Gaitám, J., Porras, M., Zúñiga, A., Picado, E., y Fracaro, A. (2022). I*mplicaciones del lenguaje simbólico en el aprendizaje de la Física un estudio desde la semiótica de la imagen.* Editorial Grupo Compás.

García, A. (2005). Situaciones sofísticas en el aprendizaje de la física. Estrategias para su puesta en práctica en el aula. *Revista Iberoamericana de Educación, 36*, 1-11. https://doi.org/10.35362/rie3692766

Geelan, D. (2020). Physical Science Teacher Skills in a Conceptual Explanation. *Educ. Sci., 10*(23), 1-11. https://doi.org/10.3390/educsci10010023

Hecht, E. (1999). *Física 1* (2.a ed.). International Thomson Editores.

Hecht, E. (2000). *Óptica.* (3a ed.). Pearson Educación, S.A.

Ingard, U., y Kraushaar, W. L. (1966). *Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas.* Reverte.

Knight, R. D. (2017). *Physics for Scientists and Engineers: A Strategic Approach with Modern Physics* (4.a ed.). Pearson Press.

Krane, K. S. (2020). *Modern Physics* (3.a ed.). John Wiley & Sons.

Kriek, J., y Koontse, R. D. (2017). First Year Physics Students' Expectations of the Role of Mathematics in Physics. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education, 25*(2), 1-16.

Larsson, J., y Airey, J. (2021). On the periphery of university physics: trainee physics teachers' experiences of learning undergraduate physics. *Eur. J. Phys., 42*(5). https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac0e1e

Larsson, J., Airey, J., y Lundqvist, E. (2021). Swimming against the Tide: Five Assumptions about Physics Teacher Education Sustained by the Culture of Physics Departments. *Journal of Science Teacher Education, 32*(8), 934-951. https://doi.org/10.1080/1046560X.2021.1905934

Londoño, L. P. (2009). La atención: un proceso psicológico básico. *Revista de la facultad de psicología de la Universidad cooperativa de Colombia, 5*(8), 91–100.

López, V. (2010). Ondas, Sonido y Música. *Pasaj. Cienc., 13*, 49-54.

Luria, A. (1979). *Atención y Memoria.* Fontanella.

Marsden, J. E., y Tromba, A. J. (1981). *Cálcul*o v*ectorial* (3.a ed.). Fondo Educativo Interamericano.

Marzano, R. J., y Pickering, D. J. (2005). *Dimensiones del aprendizaje* (2.a ed.). ITESO.

Merino, J. M., y Muñoz, L. (2013). La percepción acústica: Física de la audición. *Revista de Ciencias, 2*, 19-26.

Monk, M. (1994). Mathematics in physics education: a case of more haste less speed. *Phys. Educ., 29*(4), 209-211. https://doi.org/10.1088/0031-9120/29/4/005

Moreira, M. A. (2014). Enseñanza de la física: aprendizaje significativo, aprendizaje mecánico y criticidad. *Revista de Enseñanza de la Física, 26*(1), 45-52.

Orozco, C. C., Velásquez, S., y Flórez, C. M. (2022). *La experimentación cualitativa exploratoria y su contribución al desarrollo del pensamiento crítico. El caso de los fenómenos ondulatorios en la clase de física* (Tesis de licenciatura, Universidad de Antioquia). Repositorio Institucional Universidad de Antioquia. https://hdl.handle.net/10495/29366

Osborne, R.J. & Wittrock, M.C. (1983). Learning science: A generative process. Science Education, 67 (4), 489-508.

Oviedo, L., y Kanashiro, A. (2012). Los registros semióticos de representación en matemáticas. *Revista aula universitaria, 13*, 29-36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Perales, F., y Cañal de León, P. (2000). *Didáctica de las Ciencias Experimentales: teoría y práctica de las ciencias.* Marfil Alcoy.

Pino, M. G., y Ferreira, M. R. (2022). La enseñanza de los problemas físico-docentes experimentales. *Lat. Am. J. Phys. Educ., 14*(2), Artículo 2302.

Piñeros, B. (2018). *Didáctica de la física y las matemáticas: enseñanza del movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática* (Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional). Repositorio Institucional UPN. http://hdl.handle.net/20.500.12209/11115

Posada, J. M. (2002). Memoria, cambio conceptual y aprendizaje de las ciencias. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 1*(2), 92-113.

Posner, G.J., Strike, K.A., Hewson, P.W. & Gertzog, W.A. (1982). Acconunodation to a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education, 66*(2), 211-227.

Pospiech, G., Eylon, B., Bagno, E., y Geyer, M. A. (2015). The role of mathematics for physics teaching and understanding. *IL NUOVO CIMENTO, 38*, 1-10.

Reitz, J. R., Milford, F. J., y Christy, R. W. (1996). *Fundamentos de la teoría electromagnética* (4.a ed.). Addison Wesley Iberoamericana.

Resnick, R., Halliday, D., y Krane, K. (1998). *Física 1* (4.a ed.). Compañía Editorial Continental.

Rico, A., Ruiz-González, A., Azula, O., y Guisasola, J. (2021). Dificultades de aprendizaje del modelo de sonido: una revisión de la literatura. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(2), 5-23. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3217

Riveros, H. (2020). Enseñanza de la física experimental. *Lat. Am. J. Phys. Educ, 14*(4), Artículo 3415.

Rivière. A. (2012). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En Á. Marchesi., C. Coll y J. Palacios (Comp.), *Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar* (cap.9, pp. 155-182). Alianza.

Rodríguez, M. E. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números, Revista de didáctica de las matemáticas, 77*, 35-49.

Ruiz, A. (2015). Asuntos de método en la educación matemática. Revista Digital: Matemática, Educación E Internet, 2(1). https://doi.org/10.18845/rdmei.v2i1.2157

Serway, R. A. (1999). *Física 1* (4.a ed.). McGraw Hill.

Serway, R. A., y Jewett, J. W. (2014). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (9.a ed.). Cengage Learning.

Thurman, H. V., y Trujillo, A. P. (2019). *Essential of Oceanography* (13.a ed.). Pearson.

Tobón, R., y Perea, A. (1985). Problemas actuales en la enseñanza de la física. *Enseñanza de la Física, 1*(1), 7-15.

Treviño, E., y Socorro, M. (2013). Dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de la Física. *Presencia Universitaria, 3*(5), 70-77.

Vargas, G. (2017). Recursos educativos didácticos en el proceso enseñanza aprendizaje. *Cuadernos, 58*(1), 68-74.

You, Z. J. (2008). A close approximation of wave dispersion relation for direct calculation of wavelength in any coastal water depth. *Applied Ocean Research, 30*, 113-119.

VOLÚMEN 15
N°2
AGOSTO 2023

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem