VOLÚMEN 16
N°2
AGOSTO 2024

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

ÍNDICE

Sociedad Chilena de Educación Matemática

Revista Chilena de Educación Matemática

ISSN 2452-5448 Versión en línea

Chile

CONDICIONES PARA UNA ACTIVIDAD MATEMÁTICA NO ALIENANTE EN QUINTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

CONDITIONS FOR A NON-ALIENATING MATHEMATICAL ACTIVITY IN FIFTH GRADE OF PRIMARY EDUCATION

Rafael Moreno León
rmorenol@udistrital.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-1597-6677
Candidato a doctor, Universidad Distrital
Doctorado Interinstitucional en Educación (DIE)
Bogotá, Colombia.

Rodolfo Vergel
rvergelc@udistrital.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-0925-3982
Doctor, Universidad Distrital
Doctorado Interinstitucional en Educación (DIE)
Bogotá, Colombia.

RESUMEN

El objetivo de este artículo es presentar algunas reflexiones teóricas y prácticas sobre las condiciones en el trabajo de aula con estudiantes de quinto grado, que posibilitan formas no alienantes de interacción social. El estudio es cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo, y se desarrolla inspirado en la Teoría de la Objetivación, asumiendo una perspectiva multimodal de la cognición humana. Se trabaja con un grupo de 32 estudiantes de quinto de primaria (10-11 años), al analizar su actividad matemática de clase cuando resuelven dos tareas de proporcionalidad directa. El análisis de datos, a partir de tres episodios de clase, se fundamenta en la noción vygotskiana de método, la cual se considera como una práctica reflexiva y crítica. Los resultados sugieren que las condiciones en el trabajo de aula que posibilitan formas no alienantes de interacción social comprometen el posicionamiento de un sujeto histórico-cultural, en un tipo de actividad con un fuerte sentido social de los estudiantes, alrededor de un objeto común de aprendizaje (encuentro colectivo de un saber cultural sobre las razones, las proporciones y la proporcionalidad).

Palabras clave:

Actividad matemática, Alienación, Ética comunitaria, Subjetividad, Teoría de la Objetivación.

ABSTRACT

This article presents some theoretical and practical reflections on the conditions in classroom work with fifth-grade students, which enable non-alienating forms of social interaction. The study is qualitative, descriptive, and interpretive, and it was developed inspired by the theory of objectification, which assumes a multimodal perspective of human cognition. We work with 32 fifth-grade students (10-11 years old), analyzing their class mathematical activity when they solve two direct proportionality tasks. Based on the Vygotskian method, the data analysis considered a reflective and critical practice in three class episodes. The results suggest that the conditions in classroom work that enable non-alienating forms of social interaction compromise the positioning of a historical-cultural subject in a type of activity with a strong social sense of the students around a shared learning object (collective encounter of cultural knowledge about ratios, proportions and proportionality).

Keywords:

Mathematical activity, Alienation, Communitarian ethics, Subjectivity, Theory of Objectification.

Recibido: 18 de Enero de 2024, Aceptado: 17 de Julio de 2024

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la subjetividad en el aula de Matemáticas ha sido preocupación en la Teoría de la Objetivación (TO) (Lasprilla y León, 2020; Lasprilla et al., 2021; Radford, 2020b). Más específicamente, desde esta perspectiva, no solo se estudia el asunto de la producción de saberes en el aula, sino también las formas de colaboración humana (Radford, 2020a; Radford, 2023; Vergel y Miranda, 2020).

En gran parte de las investigaciones del campo se nota una especial atención al asunto del eje del saber y el conocimiento, pero no así al eje del ser y el devenir (Radford, 2023). Particularmente, esto también sucede en el asunto del estudio del pensamiento proporcional: la focalización sobre el primer eje deja de lado la investigación sobre la subjetividad, y el saber escolar sobre las razones, proporciones y proporcionalidad (RPP) se muestra como una entidad psicológica subjetiva, en forma de una construcción propia del individuo (Moreno, 2023).

En el estudio de la subjetividad (Lasprilla y León, 2020; Lasprilla et al., 2021) se consideran las formas de interacción social y las formas de relación ética entre los sujetos en el aula (Lasprilla y León, 2020; Radford, 2021). Para la TO, la ética se define como una forma de la alteridad (Lasprilla y León, 2020; Radford, 2023; Radford y Silva, 2021). Desde esta consideración, las formas de colaboración humana son asumidas desde una ética de orientación comunitaria (Lasprilla y León, 2020). Por otra parte, a propósito de estas formas de relación entre los sujetos, se han observado al menos dos tipos de éticas diferentes en el aula, una centrada en la obediencia y otra en la autonomía (Radford, 2016b; Radford y Silva, 2021). Esto pone en evidencia el asunto de la alienación en la clase de Matemáticas, un aspecto poco explorado en el campo (Radford, 2016b; Radford, 2023), dado que la investigación ha estado centrada en una perspectiva individualista de los procesos de la enseñanza y aprendizaje del área. Si bien el asunto de la alienación en el aula de Matemáticas ha sido importante de investigar, no lo es menos la idea de identificar condiciones en el aula de clase que posibiliten la materialización de formas de alteridad no alienantes. Este artículo tiene como objetivo presentar algunas reflexiones teóricas y prácticas sobre las condiciones en el trabajo de aula con estudiantes de quinto grado, que posibilitan formas no alienantes de interacción social.

2. MARCO TEÓRICO

Para el abordaje de la dimensión del Ser y el Devenir, la TO considera los procesos de subjetivación. Estos "se definen como aquellos procesos en los que los profesores y los estudiantes se posicionan, mientras que al mismo tiempo son posicionados por otros, apoyados, ineluctablemente, en las redes sociales de la cultura y la historia" (Radford, 2020a, p. 37).

Desde una perspectiva filosófica, esta consideración de los sujetos en el aula requiere de una nueva visión del sujeto, de la actividad y del saber, para poder romper el usual fundamento en el individuo encontrado en el campo de la Educación Matemática.

2.1. El sujeto histórico-cultural de la TO

El fundamento en el individuo tiene sus orígenes al inicio de la Edad Moderna. En este momento el ser humano empezó a producir recursos para su subsistencia, como manufacturas y artículos para la comercialización. Esta situación generó una mirada hacia el propio ser humano, como centro de la actividad cultural, social y económica, lo que repercutió en un natural antropocentrismo filosófico. Es así como Descartes, Leibniz y Spinoza, entre otros, infieren que la fuente del conocimiento es la razón humana, como camino para alcanzar verdades universales. Más adelante, en el siglo XVIII, el aparato socioeconómico y jurídico garantizó el liberalismo económico, ante el intervencionismo del estado en el manejo de la economía. Esta libertad desde la filosofía de Kant se interpreta como la autonomía o capacidad del sujeto para actuar por sí mismo, a partir de la razón y el juicio. Este principio de la autonomía fue retomado por Piaget en los años 60, en su análisis psicogenético del aprendizaje del niño, y posteriormente desarrollado por diversos autores de los enfoques constructivistas en la educación matemática de los años 70 y 80 del siglo XX, mediante los cuales el sujeto que aprende adquiere la capacidad de pensar por sí mismo a través de interactuar con el medioambiente que lo rodea; esto obliga al individuo a pensar y a resolver problemas.

Esta situación ha puesto en evidencia el asunto de la alienación en la clase de Matemáticas (Radford, 2016b). Adicionalmente, consideramos, al igual que Zevenbergen (1996), que este enfoque en la construcción individual del significado niega el contexto social y político de las matemáticas, a la vez que margina a muchos grupos sociales y culturales.

Por otro lado, el aprendizaje de las matemáticas usualmente es visto como la adquisición de ciertos conocimientos, habilidades y actitudes en relación con ellas, como el resultado de la experiencia subjetiva (Radford, 2023). Esta capacidad del individuo de pensar, reflexionar o juzgar algo que aprende, se fundamenta usualmente desde la filosofía de Kant y el idealismo, que considera la razón como eje central del pensamiento. Una consecuencia del racionalismo es el posicionamiento del individuo como centro de la acción de conocer.

Desde esta perspectiva surge el sujeto kantiano, un individuo al centro de la cognición humana; la realidad surge de él, a partir del uso de su autonomía, de la experiencia y de su razonamiento a priori sobre el objeto de conocimiento. Esta visión de ser humano se traslada al campo educativo, bajo la influencia del neoliberalismo económico; así, la escuela se ha transformado en un lugar de fabricación de individuos necesarios para la vida socioeconómica, a partir del buen uso de su autonomía (Radford, 2020a). En los enfoques constructivistas o con afinidad a ellos, se considera un sujeto kantiano, mientras que desde la TO consideramos un sujeto histórico-cultural.

El sujeto kantiano está asociado a dos de los modelos más influyentes en Educación Matemática descritos por Radford (2016b): el modelo transmisivo y el modelo progresista. Es claro que la autonomía implica no solo tener la capacidad de elegir entre varias opciones, sino también tener la capacidad de tomar decisiones y actuar consecuentemente de manera independiente, responsable y autodirigida.

Luego de nuestra revisión sobre los estudios del aprendizaje y la enseñanza las RPP, vemos que existe un marcado énfasis en el individuo que aprende (Moreno, 2023). Este fundamento en el individuo debe romperse, para así mismo promover las formas de colaboración humana presentes en el aula de Matemáticas.

El sujeto histórico-cultural es un individuo que se produce en la cultura y a partir de su transformación, mediante la conformación de su subjetividad; el individuo visto de esta forma es único, histórico, cultural y concreto (Radford, 2020a). Marx da origen a esta nueva concepción de sujeto, como se aprecia en la Tesis 6 sobre Feuerbach: "la esencia humana no es algo abstracto inherente a cada individuo. Es, en su realidad, el conjunto de las relaciones sociales" (Pérez, 2023). De esta idea se desprenden dos conclusiones: no existen dos sujetos iguales, porque cada uno tiene un entorno y relaciones sociales diferentes a las de los demás; y el sujeto, al interactuar con otro, al moverse dentro de la cultura, está en constante transformación al establecer otros vínculos sociales con los demás.

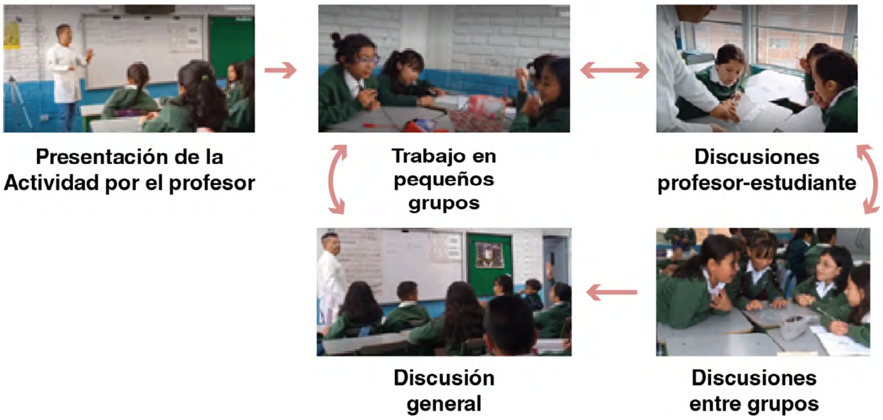
Al hablar del sujeto histórico-cultural debemos considerar lo que Stetsenko y Ho (2015) llaman "una de las paradojas más complejas de la existencia humana" (p. 224). El individuo comparte con otros el lenguaje, las costumbres y hasta cierta forma de ver el mundo; sin embargo, cada sujeto es un ser único y singular, y a la vez es profundamente relacional y social.

2.2. La Actividad matemática en la TO

Existen al menos dos connotaciones en Educación Matemática para el término actividad: i) Aktivität/aktivnost´ (tomado del alemán y el ruso), como "una serie de acciones que un individuo realiza en la consecución de su objetivo" (Radford, 2023, p. 36); ii) mientras que Tätigkeit (en alemán) y deyatel´nost´ (en ruso) "se refiere a un sistema dinámico en el que los individuos interactúan colectivamente en un fuerte sentido social, lo que hace que los productos de la actividad sean también colectivos". Desde la TO acogemos este segundo significado de actividad (Tätigkeit), dado como una forma de vida, a la cual la llamamos labor conjunta.

La labor conjunta es nuestra categoría principal en la TO, esta se compone de tres dimensiones: epistemológica (cómo llegamos a saber); ontológica (cómo llegamos a ser lo que somos), y estética (cómo llegamos a expresar nuestra subjetividad) (Radford, 2023). La labor conjunta incluye el lenguaje, las experiencias corpóreas del movimiento, la acción, el ritmo, lo estético y lo sensual (Radford, 2016a). En la labor conjunta se distinguen ciertos momentos de trabajo (ver Figura 1), en los cuales la alteridad toma protagonismo y el sentido social de la interacción permite un encuentro colectivo con las formas de pensamiento matemático.

Figura 1
Momentos de la actividad de clase propuesta



Nota. Adaptado de Radford (2023).

2.3. El saber desde la TO

Desde otras aproximaciones teóricas, el saber o conocimiento es casi lo mismo. Desde el constructivismo, por ejemplo, el saber se entiende como una construcción, como una entidad psicológica subjetiva. Por ello, para Radford (2023), desde esta perspectiva el saber no se recibe pasivamente, el sujeto lo construye; la función de la cognición es adaptativa para organizar el mundo experiencial del individuo, y el sujeto no solo construye su propio saber, sino que lo hace de manera autónoma.

En otros enfoques con influencia del constructivismo, como la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), el saber resulta de una solución "óptima" a una situación o problema específico; el aprendizaje se logra por una adaptación cognitiva del sujeto al medio, y para cada saber matemático hay un conjunto de situaciones que le dan un apropiado significado (Radford, 2023).

Mientras que, desde la TO, creemos que el aula de Matemáticas es un espacio en el que no solo se producen saberes, sino también subjetividades; de igual manera, para nosotros en la investigación se debe estudiar no solo la dimensión del saber, sino también la del devenir (la dimensión de la subjetividad), y por tal razón, consideramos la Educación Matemática como:

> Un esfuerzo dinámico, político, social, histórico y cultural que busca la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas que se constituyen histórica y culturalmente, discursos y prácticas que están en permanente evolución. (Radford, 2017, p. 97)

Por tanto, el saber no es algo que se construye o se transmite al sujeto. El saber (el saber cultural) se crea y recrea a través de la actividad histórico-cultural sensual y sensible, se entiende como una entidad general. Concretamente, el saber es "un sistema de arquetipos de pensamiento, acción y reflexión, constituido histórica y culturalmente a partir de la labor colectiva material, sensual y sensible" (Radford, 2023, p. 51).

2.4. El estudio de la alienación en el aula de Matemáticas

Desde un contexto filosófico, Hegel (2001) fue el primero en hablar de alienación. La consideró como una condición generalizada en la sociedad moderna, definida como la separación de los sujetos de su trabajo, de su espíritu y del mundo natural.

Por otro lado, dada la traducción de Marx desde el alemán, entfremdung es una palabra compuesta, formada por las palabras "ent" (de) y "fremd" (extraño, ajeno). De ahí que, "Entfremdung" significa literalmente "extrañamiento" o "ajenización". Es decir, un sujeto se siente separado de sí mismo, de sus capacidades o potencialidades, de su entorno o de otros individuos, cuando sufre alienación.

El concepto de alienación de Marx supone una perspectiva filosófica materialista de interpretar la realidad. Recordemos que el idealismo concibe la realidad como una creación de la mente, mientras que el materialismo considera la realidad de forma independiente a la mente, en un sentido opuesto de percepción, de lo externo a lo interno (Yajot, 1969).

Tomando como base principios filosóficos del materialismo dialéctico de la obra de Marx (2015), Radford (2016b) plantea una estructura para el análisis de la alienación compuesta por:

a. Un preciso concepto antropológico de sujeto;
b. Un concepto específico de trabajo y
c. Una relación precisa entre los individuos y los objetos que producen mediante la actividad.

Para nuestro caso, el individuo en cuestión sería el sujeto histórico-cultural, dada la singularidad del ser y el sentido de transformación de los individuos, según su contexto y relaciones sociales. El trabajo considerado en la obra de Marx, como acción humana, se puede extrapolar al aula de Matemáticas en forma de actividad cognoscitiva. Mientras que los objetos producidos se refieren a los saberes originados en el aula.

Estos elementos de la estructura filosófica de la alienación nos permiten determinar que podrían darse al menos dos tipos de ella en el aula de Matemáticas, por la actividad matemática y por el conocimiento (en forma de saber desde otras aproximaciones teóricas), como en los enfoques transmisivos o en los progresistas (Radford, 2016b).

3. METODOLOGÍA

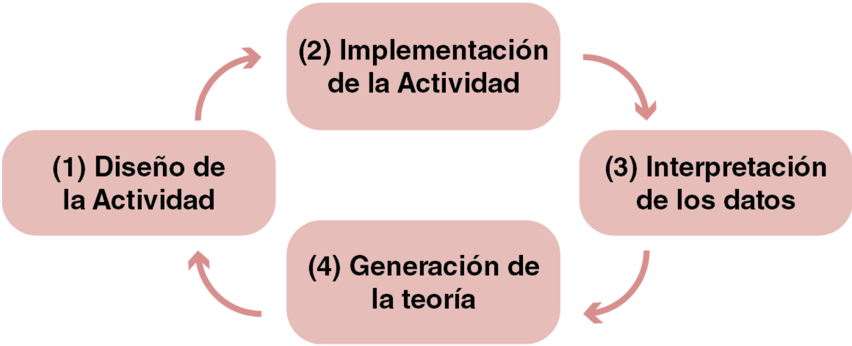
3.1.Tipo de estudio

Esta investigación tiene un enfoque de estudio cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo. Las interpretaciones que surgen de nuestro propósito investigativo se encuadran en una metodología acorde a nuestra perspectiva semiótica, basada en la idea de método de Vygotsky (Radford y Sabena, 2015), y el análisis realizado se fundamenta en el método dialéctico (Yajot, 1969. Desde esta perspectiva, un método es un esfuerzo reflexivo y crítico, una práctica filosófica. El método vygotskiano contempla una visión del mundo que proporciona ideas sobre las entidades o fenómenos que pueden ser estudiados desde esta perspectiva, en la cual “los diversos canales sensoriales y signos semióticos (lingüísticos, símbolos escritos, artefactos, diagramas, etc.) se relacionan, coordinan y subsumen en un nuevo pensamiento o unidad psíquica” (Radford, 2023, p. 151), desde una perspectiva multimodal del pensamiento (Arzarello, 2006; Radford, 2023; Radford y Sabena, 2015).

3.2. Participantes

La investigación se desarrolló en un aula de clases de quinto grado de primaria con 32 estudiantes (10 a 11 años), de un colegio oficial de Bogotá. Se seleccionó este grado en particular, porque este nivel de primaria se considera el momento en que surge el pensamiento proporcional para los estudiantes, según el currículo escolar colombiano; además, el álgebra temprana puede ser apoyada desde lo proporcional en este nivel.

Figura 2
Ciclo de la metodología de investigación longitudinal



3.3. Etapas del estudio

Siguiendo el ciclo de investigación longitudinal propuesto por Radford (2010), la investigación principal tuvo cuatro etapas (ver Figura 2).

En la primera etapa se consolidó el diseño de la actividad de acuerdo con los principios de la TO, a partir de una primera experimentación de tareas, con un grupo de características similares al presentado en este escrito. En la segunda etapa se implementó la actividad de clase de acuerdo con los momentos señalados por Radford (2023) (ver Figura 1). En la tercera etapa se buscó transformar la información recolectada a través de distintas fuentes, en la constitución de los datos de la investigación. Finalmente, en la cuarta etapa se generaron los aspectos teóricos desprendidos de los datos constituidos.

Nota. Adaptado de Radford (2010).

Al inicio de las sesiones el profesor hacía la presentación de la actividad propuesta para el día, así como una reflexión en relación con las formas de trabajo observadas en la clase, vinculadas con la interacción social de los estudiantes. Dado que en una fase previa de la investigación se desarrolló una experimentación con las tareas propuestas, para esta segunda etapa del estudio, implementación de la actividad de clase, se mejoraron las tareas. Por ello, se modificó el lenguaje en las instrucciones para que involucrara a los otros estudiantes en el desarrollo de la actividad, se limitaron los recursos o materiales de trabajo para propiciar la interacción social desde la necesidad de los sujetos, y para el cumplimiento de la meta de trabajo se implementaron los "momentos de la actividad" de Radford (2023). Este cambio en las tareas se mantuvo a lo largo de la experimentación.

3.4. Instrumentos y recolección de la información

Para la recolección de la información se realizaron videograbaciones de las 8 sesiones de 60 minutos, junto con 7 tareas sobre proporcionalidad directa. Así mismo, grabaciones de audio, fotografías de los momentos de la actividad de la clase y de las producciones escritas de los estudiantes y del profesor.

Siguiendo orientaciones de Miranda et al. (2007), para la recolección de la información se desarrollaron cuatro fases. En la primera fase se realizaron grabaciones de audio y video, además de registros fotográficos de la actividad de estudiantes y profesor al resolver las tareas propuestas. En la segunda fase se recopilaron las producciones de los estudiantes (cuestionarios resueltos), las fotografías de lo anotado en el tablero y las grabaciones del trabajo de aula (audio y video), para indagar sobre la subjetividad emergente en la actividad matemática. En la tercera etapa se estudiaron las grabaciones, para destacar los segmentos de la actividad de clase que mostraban rasgos asociados a los tipos de ética presupuestados. En la cuarta etapa se realizaron transcripciones, tanto de lo verbal como de lo no verbal de las acciones empleadas por los estudiantes y el profesor. Las dos primeras fases buscaban reconstruir la actividad matemática de los estudiantes, a partir de las distintas fuentes de información, de tipo verbal, escrito, gestual, perceptual, etc., para posteriormente, en las dos siguientes fases, interpretar y analizar los segmentos de actividad que mostraran rasgos de una ética de orientación comunitaria (ver Figura 3) y de nuestras categorías de análisis.

3.5. Categorías de análisis

A partir de varias fuentes de información se analizó la alienación en el aula indagada, a partir de:

- El sujeto presente en el aula,
- El tipo de actividad de clase y
- La relación precisa entre los sujetos y lo producido en la clase (el saber sobre la proporcionalidad).

Complementariamente a estas categorías de análisis, durante la actividad matemática de los estudiantes observamos la ética comunitaria que evolucionaba. Esta se enuncia a partir de tres vectores que la componen, los cuales muestran en esencia el asunto de la subjetividad en el aula: la responsabilidad, el cuidado del otro y el compromiso hacia el trabajo conjunto. A su vez, cada vector se configura a partir de dos componentes específicos que lo caracterizan, relacionados con elementos de la TO y los planteamientos de Lévinas (2002) sobre su noción de responsabilidad (esta se constituye desde la necesidad del otro, y desde nuestra respuesta a ese llamado), ampliada a partir de la consideración de los aspectos sociales y culturales que trascienden a los sujetos y a la misma relación. Mientras, los indicadores asociados a cada componente constituyen rasgos o acciones de los sujetos que nos señalan la presencia de cada indicador en la actividad de aula (Lasprilla y León, 2020). A continuación, mostramos un cuadro de los indicadores y vectores de la ética comunitaria, propuestos por Lasprilla et al. (2021).

Figura 3
Indicadores y vectores de la ética comunitaria

Relación de alteridad "subjetividad"				Indicador de búsqueda especifico (acciones)
Sustrato ético	Vectores	Componentes		
Responsabilidad (Lévinas, Buber, Rorty) yo-	Responsabilidad (R) (yo- tú) (relación de responsabilidad)	Otredad	Excedencia	Los participantes asumen posicionamientos con el trabajo, que les permite: hacer frente a las dificultades, comprometerse con el trabajo y mostrar responsabilidad por el "otro" quedándose y escuchando las ideas de otros
			Acogida (hacerse cargo)	Se interesa por la comprensión o no de los compañeros. Ofrece ayuda a alguien; los apoya en sus pasos. Se muestra dispuesto a atender alcompañero. Valora los esfuerzos de los demás y el propio en el esfuerzo conjunto para avanzar enuna tarea (por ejemplo, una solución de un problema)
Socialidad (Lévinas)	Cuidado del otro(CO) (Relación de Similitud, nosotros, los otros)		Inmanencia	Prevalecen sobre el otro mis ideas y pensamientos, existe el otro, pero existe desde el"yo creo", "yo pienso" o "yo considero".
			Encuentro "diálogo"	Muestra respeto por lo que hacen o dicen los demás. Maneja con respeto y responsabilidad el poder. Tiene puntos de referencia parareconocer su estado de ánimo y la forma en quepiensa y actúa. A partir de varias actividades, escapaz de cambiar sus creencias sobre sus habilidades y las del compañero, asumiendo que si pueden desarrollarlas de manera adecuada. Trata de entender una idea o una acción propuesta por alguien más. Felicita a otros por los buenos aportes.
La sensibilidad (Lévinas, Farias)	Compromiso en el trabajo conjunto (CTC) (Relación de cercanía, nosotros)	Otredad	Proximidad (empatía)	Muestra querer estar al lado del otro por gusto propio, necesidad de hacer algo juntos. Llamar la atención del otro por algo que hace o dice. Les pide a los que no hablan mucho participar y les da la palabra para darles confianza, etc. En sus acciones, posicionamientos o actitudes muestra un interés por el compañero, en sus incomprensiones o dudas, atento (a) a prestar su ayuda.
			Exposición	Propone abiertamente ideas y comprensiones, buscando aportar a la tarea común. Se interesa por las ideas y comprensiones de loscompañeros. Maneja las emociones para pensary resolver problemas en el contexto de una actividad de colaboración o cooperación entre pares. Se pone en el lugar del compañero y emprende acciones para apoyarlo o guiarlo.

Nota. Tomado de Lasprilla et al. (2021).

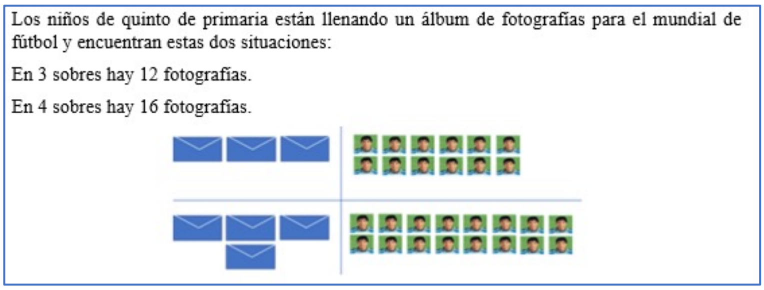
3.6. Tareas

Las siete tareas se diseñaron con el fin de establecer condiciones de trabajo que propiciaran formas de colaboración humana, de acuerdo con las indicaciones de Radford (2023), con una unidad conceptual y contextual. La unidad contextual de todas las tareas giraba en torno a una misma historia: el álbum de fotografías del Mundial de fútbol. Sobre esta misma historia se diseñaron las tareas con una unidad conceptual, en relación con las tablas de proporcionalidad y las funciones de primer grado asociadas a los patrones numéricos; las tareas incrementaban su nivel de dificultad a medida que transcurrían las sesiones de trabajo. En este escrito se presentan solamente tres episodios y dos tareas, correspondientes a la primera, segunda y última sesión de trabajo.

Las tareas en esta investigación las entendemos como los cuestionarios diseñados, a partir de un contexto de trabajo del cual se desprenden una serie de ítems o preguntas para resolver. Mientras que la actividad matemática desde la TO tiene un sentido específico, la vemos como un sistema dinámico en el que los estudiantes interactúan de forma colectiva, con un fuerte sentido social, expresando el producto de lo que hacen en un objeto que los representa. Consideramos inicialmente que las tareas no inducen a la alienación, porque en el lenguaje de las instrucciones se involucra al otro, además, a partir de la implementación de los momentos de la actividad se promueve el trabajo colectivo, por encima del individual.

La tarea de las dos primeras sesiones de trabajo estaba conformada por el contexto de la tarea 1 "Vamos a llenar el álbum" (ver Figura 4) y una serie de preguntas. Se buscaba que los estudiantes extendieran la secuencia de parejas ordenadas, para 5, 6, 7, 8 o más sobres y sus correspondientes fotografías. Para esta sesión, el profesor suministró a cada grupo un solo cuestionario, 7 sobres y 28 fotografías (material en físico para representar el contexto y como apoyo para resolver el cuestionario). Se debe aclarar que los sobres de fotografías, los que se venden para llenar el álbum del mundial de fútbol, tienen el mismo número de fotografías cada uno.

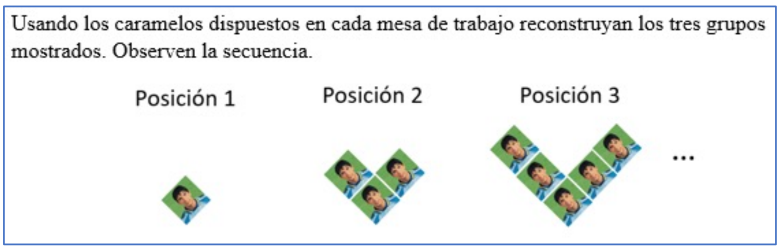
Figura 4
Contexto de la Tarea 1, "Vamos a llenar el álbum" y de la Tarea 2, "Comparando sobres y fotografías"



Nota. *Elaboración propia.*

En la última sesión de trabajo se abordó la tarea "Las esquinas que crecen diferente"; esta actividad estaba conformada por un contexto (ver Figura 5) y 6 preguntas sobre él. El cuestionario, junto con un material en físico (21 fotografías) fue entregado a los grupos de trabajo para desarrollar la actividad de clase.

Figura 5
Contexto de la última tarea, "Las esquinas que crecen diferente"



Nota. *Elaboración propia.*

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Luego de las indicaciones generales del profesor sobre el cuestionario e instrucciones de trabajo, los estudiantes se organizaban en grupos de tres o cuatro individuos para resolver de forma conjunta el cuestionario de cada sesión.

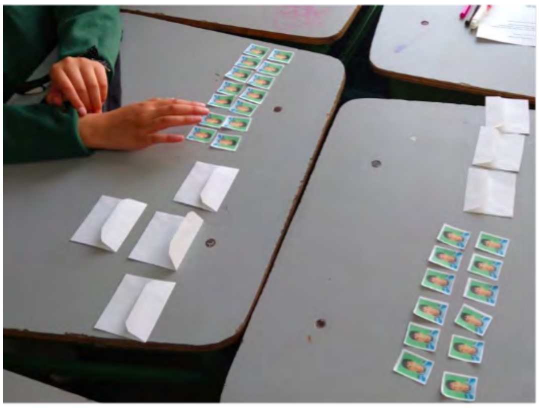
4.1. El tipo de sujeto presente en la actividad de clase analizada

A lo largo de las sesiones se observaron dos tipos de sujetos al desarrollar la actividad, el kantiano y el histórico-cultural que fue evolucionando. Los dos tipos de sujetos están presentes en la actividad de clase diseñada e implementada a lo largo de la investigación. Pero ¿cómo usa su autonomía por aprender el individuo de nuestra actividad matemática?

En esta primera sesión, las actitudes de los niños al representar el diagrama de sobres y fotografías, del contexto de trabajo, nos indicaron varios detalles que hicieron inferir una forma individual del trabajo grupal matemático, asociada al sujeto kantiano en el aula. Estas formas de trabajo de los estudiantes no eran las esperadas en la actividad colectiva que el profesor sugería.

En primer lugar, para el desarrollo de las tareas consideramos la perspectiva visual de los sujetos frente al trabajo realizado. Por ejemplo, para la primera instrucción de la Tarea 1, "representen con el material dado el contexto de la tarea", en varios grupos observados, dos sujetos construían un mismo esquema desde dos perspectivas diferentes. Este es el caso mostrado en la Figura 6: Martín arma la pareja ordenada (3,12), mientras que desde el sentido opuesto Esther arma la pareja 4 sobres y 16 fotografías y cuenta de izquierda a derecha las cantidades de sobres y fotografías. Sin embargo, la instrucción del primer ítem buscaba una acción colectiva del grupo de trabajo frente a una única tabla.

Figura 6
Dos formas individuales en el trabajo grupal, Esther y Martín.



Nota. Protocolo de fotografías de la actividad de clase.

Es decir, los estudiantes debían representar una columna de sobres a la izquierda y una columna de fotografías a la derecha mostrando, desde una misma perspectiva visual, una única tabla de datos que reflejara el contexto de la Figura 6, de forma colectiva, no desde el solipsismo de cada individuo. De esta sencilla actitud de Esther y Martín, se infiere la necesidad de provocar en el trabajo de los niños situaciones que impliquen mirar el material de trabajo desde una misma perspectiva, desde un mismo punto o extremo de la mesa de trabajo, para permitir verdaderas formas de colaboración humana al interior de la clase. Mi perspectiva frente a la tarea marca no solo mi apreciación acerca de esta, indica mi nivel de intervención en la obra común desarrollada al interior de la labor conjunta.

Recordemos que para Hegel (2001) la obra común se refiere a la necesidad que tiene un grupo social en lograr ciertos objetivos colectivos; además está conformada por un cúmulo de subjetividades articuladas en el concepto de comunidad, a la par de instaurar ciertos mecanismos de colaboración humana para todos en el grupo. Por tanto, dicho esfuerzo requiere de la participación de cada miembro de manera activa y articulada hacia cierto fin.

En segundo lugar, según la actividad de clase observada existe un marcado énfasis en el trabajo individual, como sustento del trabajo grupal. Es decir, el grupo hace una división del trabajo para que cada sujeto cumpla con su responsabilidad sobre la actividad colectiva. Los niños reparten los ítems del cuestionario para que sean desarrollados por turnos; de este modo, cada sujeto debe desarrollar individualmente al menos algún punto del cuestionario (Ver Figura 7).

Figura 7
Momentos de trabajo del grupo de Sheila, Katherine, Esther y Manuel.

a. b. c. d.

Nota. Protocolo de fotografías de la actividad de clase.

Inicialmente, Katherine empieza el trabajo y asume el responder la primera pregunta del cuestionario: ¿Cuántas fotografías le corresponden a cada sobre? (Figura 7a), aunque Sheila quiere ayudar e intervenir, y por ello logra dibujar parte de la respuesta, como se mencionó anteriormente. Luego, Sheila asume la responsabilidad de dibujar la respuesta de la segunda pregunta: ¿Cuántas fotografías les corresponden a 5 sobres? (Figura 7b), mientras Katherine mira atentamente lo que hace su compañera. A continuación, Esther responde la siguiente pregunta: ¿Cuántas fotografías les corresponden a 6 sobres? (Figura 7c), pero dialoga un poco más con el grupo que sus anteriores compañeras al hacerlo. Finalmente, Martín debe responder el cuarto ítem: ¿Para 7 sobres cuántas fotografías hay? (Figura 7d); en la imagen se observa cómo él afronta el trabajo sin intervención de sus compañeros.

Esta misma conducta, la de repartir los puntos del cuestionario, se aprecia en otros grupos de la clase. El docente observa al rotar por los grupos esta misma división del trabajo; parece ser que la obra común que persigue la clase es la de terminar el cuestionario, sin importar las indicaciones del docente para trabajar colectivamente.

Según Marx (2015), el hombre es un ser de necesidades, las cuales suple fuera de él, a partir de un objeto determinado; mediante el trabajo el ser humano subsiste y a la vez se expresa como ser social. Concretamente, desde esta perspectiva el propósito ontológico de la actividad es la interacción del hombre con el mundo natural, para así producir los medios de su subsistencia. Para nuestro caso, la actividad matemática le permite al estudiante suplir su necesidad de aprender y de expresarse con otros a partir de lo que sabe.

Dado lo anterior, no podemos apreciar una necesidad por aprender de forma social. La actitud de los estudiantes en la experiencia de aula presentada, a partir de la división del trabajo propuesta por ellos para resolver el cuestionario, es prueba de ello.

4.2. La evolución de la actividad matemática: del trabajo individualista hacia la labor conjunta

En nuestra investigación es primordial promover las formas de colaboración humana, de ahí la necesidad de transformar la actividad matemática en nuestra investigación, de Aktivität/aktivnost´ a Tätigkeit/deyatel´nost´. Al juntar las mesas individuales para formar una sola (ver Figura 7), el trabajo grupal de los estudiantes empieza a desarrollarse de otra manera, dada la proximidad natural entre ellos. Los estudiantes se miran unos a otros, lo que posibilita el diálogo y la interacción social. Esto se aprecia en el diálogo de los estudiantes: están sentados uno al lado del otro, y su perspectiva es la misma hacía el cuestionario, por eso lo leen de manera conjunta. Sin embargo, aún no hay una organización como colectivo, ni hay una obra común que los represente como grupo.

Figura 8
El énfasis en el individuo, repartición del trabajo del grupo de Miguel, Carlos, Sandra y Luisa.

Nota. Protocolo de fotografías de la actividad de clase.

No obstante, la organización de las mesas individuales de esta forma no garantiza una actividad colectiva, con fuerte sentido social alrededor de una obra común que represente a los estudiantes. El trabajo del grupo de Miguel, Carlos, Sandra y Luisa lo comprueba (ver Figura 8). La hoja del cuestionario se ha estado rotando por los miembros del grupo, para que cada uno cumpla con una parte del trabajo, como lo señala la flecha roja de la imagen. Esta forma de trabajo no permitía el sentido social que se pretendía, a partir del diálogo, la concertación o el consenso. Veamos el siguiente diálogo, entre el docente y los integrantes del grupo, que comprueba la forma de trabajo individualista dentro del grupo.

L1	Profesor	*¿Cómo están haciendo para trabajar en el grupo? ¿Qué hace cada uno?... (pregunta al grupo de Miguel, Carlos, Sandra y Luisa).*
L2	Miguel	*Cada uno hace un punto, así todos participan… (toma la iniciativa de responder al profesor).*
L3	Profesor	*Les expliqué y en el cuestionario dice: "Ahora respondan, luego de ponerse de acuerdo todos en el grupo de trabajo"… (leyendo la instrucción escrita en el cuestionario).*
L4	Sandra	*Pues eso decidimos.*
Transcripción 1		

Efectivamente, el grupo logró un acuerdo sobre la forma de trabajo, pero este no es el sentido de actividad matemática que busca desarrollar la TO. Luego de estas primeras reflexiones sobre el trabajo grupal visto, el docente intervino para cambiar la forma de trabajar grupalmente. Para ello, el profesor propuso asignar un rol específico a cada miembro del grupo (ver Figura 9), con la intención de propiciar el debate y la discusión, así como la participación directa de cada integrante en la obra común pretendida.

Figura 9
Instrucciones del segundo cuestionario

2. Para el trabajo de hoy, ustedes deben organizar los mismos grupos de a tres o cuatro personas de la sesioón anterior.

3. Ahora elijan en el grupo de compañeros personas para los siguiente cargos:

- **Relator**: Representa al grupo y expone al resto de la clase las respuestas obtenidas.
- **Moderador**: Permite el uso de la palabra dentro del grupo y resume lo discutido por sus compañeros, luego de cada intevención.
- **Sintetizador**: Va regustrando lo sucedido en la discusión, no solo las respuestas obtenidas, sino la forma en como se obtienen.
- **Cromometrista**: Él es el encargado de administrar el tiempo total de trabajo y de llamar al orfen cuando el grupo se distraiga.

Nota. Elaboración propia.

Para presentar el rol que cada estudiante debía seguir, el profesor recurre a su experiencia personal, como se aprecia a continuación:

L1	Profesor	*…Cuando en un grupo de profesores, por ejemplo, tenemos que desarrollar una agenda de trabajo y hay 7 u 8 puntos, de vez en cuando un compañero dice lo siguiente "moción de orden". ¿Qué significa eso? Que nos estamos dedicando mucho a uno de los puntos y los demás puntos son importantísimos, porque hay que cumplir con toda la guía de trabajo… entonces, cuando el cronometrista vea que nos estamos demorando mucho en un punto dice moción de orden, vamos a avanzar con los demás puntos o vamos a hacerlo un poquito más rápido, para acabar de cumplir el trabajo…*
Transcripción 2		

Al respecto, debemos señalar la necesidad de desarrollar este tipo de diálogos, al inicio o al final de la sesión, si queremos transformar el tipo de relación ética entre los estudiantes. En efecto, como se mostró en el anterior episodio, existe un marcado énfasis en el individuo, en la forma en cómo los sujetos aprenden, en la cual cada uno de los miembros de la clase construye su conocimiento y su realidad sin considerar a veces la alteridad. Para este cambio, la acción docente es crucial en el desarrollo de la labor conjunta. Por ello, Radford (2020b) concibe al profesor como encarnación de una forma ideal de comportarse, de pensar, de hablar, de hacer, etc.; estas formas ideales o estructuras culturales, asociadas al rol del educador, son históricamente constituidas y además ejercen una influencia real sobre el estudiante; y no solo se relacionan con el eje del Saber y el Conocimiento, sino también con el del Ser y el Devenir. De ahí vemos la necesidad del diálogo docente, desde su experiencia, al dirigirse a sus estudiantes, para intentar cambiar las formas de relación de los sujetos.

Este diálogo del docente se enmarca en el vector de la ética comunitaria del Cuidado por el otro (CO), desde el componente del Encuentro, fundamentado desde el concepto de socialidad de Lévinas (2002), basado en la idea de la consideración de la alteridad en el sustento de la existencia humana. Ese otro, un ser diferente a mí, define mi propia identidad y a la vez se convierte en objeto de respeto y consideración.

Veamos ahora otro momento de la actividad de clase, la discusión general guiada por el docente, luego de explicar los nuevos roles para los estudiantes dentro de los grupos. El profesor quiere retomar el trabajo desarrollado anteriormente, para ello usa una cartelera que muestra el contexto del problema de la primera tarea, 3 sobres y 12 fotografías, junto con 4 sobres y 16 fotografías.

L1	Profesor	*…aparecían tres sobres (señalando con su dedo índice derecho los objetos en el tablero) … para esos tres sobres le correspondían ¿Cuántas fotografías de las que están acá? (señalando el conjunto de objetos)*
L2	Estudiantes	*Cuatro (contestan en coro).*
L3	Profesor	*¿Para los tres sobres hay cuatro? (señalando nuevamente con el índice derecho el conjunto de 12 fotografías en el tablero).*
L4	Esther y Jostin	*No, 12. (levantando su brazo para pedir la palabra).*
L5	Profesor	*Ah, para los tres sobres hay 12…Yo no he preguntado, ni voy a preguntar todavía cuántas fotografías le corresponden a cada uno. Lo que dije fue… para los tres sobres ¿Cuántas fotografías hay?*
L6	Esther	*12*
L7	Martín	*16*
L8	Profesor	*Y si fueran cuatro sobres ¡Cuántas fotografías hay acá? (señalando los dos conjuntos de objetos con el mismo dedo).*
L9	Estudiantes	*16 (contestan en coro).*
L10	Profesor	*16, ahora si ¿Cuántas fotografías le corresponderían a un sobre? (señalando solamente un objeto en cada grupo con su dedo).*
L11	Estudiantes	*4 (contestan en coro).*
L12	Profesor	*4, ok. ¿Quién me puede decir la manera cómo pensó o razonó para concluir que eran cuatro? ... (dándole la palabra a varios estudiantes).*
L13	Esther	*Yo creo que, para hacerlo división, tocaría 3 por 12 (luego del permiso del docente para hablar, señalándola con su mano derecha).*
Transcripción 4		

Como se aprecia a lo largo de esta interacción entre los estudiantes y el profesor, se evidencian rasgos de una ética de la obediencia: debido a lo discutido anteriormente, el profesor representa una forma ideal de comportarse, de hablar. Por ello, el diálogo en la interacción se adelanta con respeto y el flujo de las intervenciones las gestiona el profesor (L4, L12 y L13. Transcripción 3). Adicional a ello, en la línea 13 aparece en la intervención de Esther la expresión “yo creo que para hacerlo…”, lo cual nos indica la presencia del vector de la ética comunitaria del CO, desde la Inmanencia, en relación con dos cosas en cuanto al estudio de la subjetividad: Esther toma presencia en la clase a partir de su participación, se posiciona frente a los otros, a partir de su opinión; y en sus formas de expresarse al comunicar su respuesta tiene una relación de similitud y consideración por los otros. Este momento de la interacción muestra un nivel más profundo de conciencia en Esther (al lograr un encuentro con el saber), luego del anterior episodio, a la par de posicionarse frente al grupo a partir de su opinión frente a la pregunta realizada por su profesor.

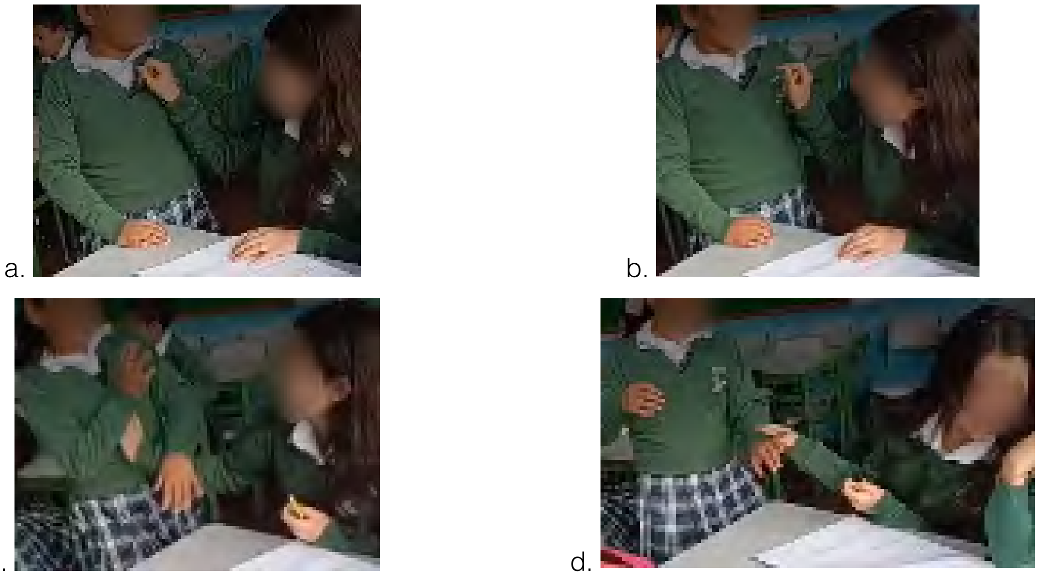
Es claro que al interior de la clase pueden convivir simultáneamente dos tipos de ética diferentes: la ética de la obediencia, que encarna de manera natural el docente, y la ética comunitaria del colectivo, la relación entre el educador y los estudiantes o entre ellos. Se deben identificar ciertas condiciones en el trabajo de clase, que permitan mostrar dicha evolución ética, desde la obediencia y la autonomía hacia lo comunitario en el trato con los otros.

4.3. El saber desde la TO

Dada la estructura filosófica para analizar la alienación deducida de la obra de Marx, el saber emerge como el producto de la actividad de clase. Pero desde la TO y en nuestra investigación sobre las RPP, no lo consideramos como un valor transmitido o un objeto construido, como entidad psicológica subjetiva (Moreno, 2023), sino como un elemento constituido histórica y culturalmente. Esta constitución del saber se entiende desde la TO a partir de una relación precisa entre los sujetos y los objetos de conocimiento. Por otro lado, aunque este elemento (el saber) está asociado a las formas de producción de conocimiento en el aula, también necesita unas formas de relación adecuadas entre los sujetos para que emerja. El encuentro con estos sistemas de pensamiento que circulan en el aula (el saber) posiciona a los sujetos frente a sus compañeros de clase y permite otras formas de relación con carácter comunitario.

Veamos esto a partir de un ejemplo: dos estudiantes, Sheila y Katherine, inicialmente dialogan, pero luego se agreden, como se aprecia en la Figura 10. Luego de esta escena sucede algo que nos llamó la atención en la interacción grupal, con respecto a las formas de regulación social del grupo.

Figura 10
Gestos agresivos en la interacción social Sheila y Katherine.



a. b. c. d.

Nota: Fuente, protocolo de fotografías de la actividad de clase.

En la siguiente transcripción se refleja el diálogo de Esther con sus compañeras que eran agresivas.

L1	Sheila	*Igual, el profe no va a saber, no la van a dejar salir al baño porque…la otra compañerita está ahí…usted también es como boba (mientras que con su mano izquierda abierta golpea suavemente a Katherine en la mejilla derecha)*
L2	Katherine	*(responde con un gesto parecido sobre Sheila, al golpear con un poco más de intensidad el pecho de Sheila)*
L3	Sheila	*(responde con otra palmada más fuerte sobre el rostro de Katherine)*
L4	Esther	*Yaaa… no se peleen*
L5	Sheila	*(regresa a su puesto, luego de haber agredido y hablado con Katherine)*
L6	Katherine	*(termina la interacción con Sheila y se dispone a continuar con el trabajo de clase)*
L7	Esther	*Ya, ya… (a continuación, ella retoma el trabajo de la actividad, al conducir la discusión como moderadora, sobre la pregunta que antes de la distracción de sus compañeras desarrollaban)*
Transcripción 4		

Estos conflictos e interacciones agresivas son habituales en la clase; esa es la conclusión, luego de observar 16 horas de videograbaciones en nuestra investigación. En particular, en esta interacción de Sheila y Katherine se puede apreciar cierta complacencia entre las dos al sonreír, mientras se golpean el rostro y el pecho, respectivamente. Ante esto, Esther las llama al orden, ejerciendo su rol de moderadora durante la sesión del día y ellas acatan la indicación de su compañera (L4 a L7 – Transcripción 4).

Dado lo anterior, vemos la emergencia del vector del Compromiso en el trabajo conjunto, manifestado en el liderazgo de Esther en su rol de moderadora al llamar al orden a sus compañeras, mediante la proximidad y el respeto que ella ha desarrollado a lo largo de las sesiones. Esther ha mostrado frente a su profesor y sus compañeras una actitud propositiva frente al trabajo a realizar; además, sus intervenciones acertadas han generado un posicionamiento de ella frente al grupo, por eso el acatamiento de sus compañeras al llamarlas al orden. De igual forma, la respuesta de Sheila y Katherine a su compañera Esther, al querer continuar con el trabajo, denota también un encuentro, desde el vector del cuidado del otro, dado el respeto que manifiestan ellas hacia Esther, al disponerse para continuar con el trabajo matemático.

4.4. Discusión

La alienación en el aula de Matemáticas está presente, a partir de las formas de producción de conocimiento, basadas o en la repetición de ejercicios, la memorización de técnicas, etc., o en la no autoexpresión del individuo al desarrollar sus estructuras cognitivas, dado el fundamento en el estudiante que hemos explicado anteriormente, a partir de la promoción del sujeto, de su libertad y autonomía. Sin embargo, desde otras perspectivas teóricas de la educación matemática pueden existir prácticas de aula no alienantes desde un enfoque centrado en el estudiante (individuo), desarrolladas para que el sujeto encuentre en ellas una forma de expresión en el producto de estas. Pero, generalmente, desde la TO, consideramos que este fundamento en el individuo no posibilita formas de colaboración humana, tan necesarias para transformar el entorno social de la escuela.

En nuestra investigación hemos encontrado formas de relación ética entre los sujetos que posibilitan el desarrollo de la alienación. Por ejemplo, las interacciones sociales basadas en la ética de la obediencia, debido al rol natural de autoridad que representa el docente, no posibilitan que los estudiantes encuentren expresión en la actividad propuesta y en el producto de esta. Por otro lado, la ética de la autonomía, propia de concebir el conocimiento como una construcción psicológica subjetiva, no permite formas de colaboración de los estudiantes, basadas en la necesidad colectiva, alrededor de la obra común; dado que el fundamento es el individuo que aprende, hacia él se tornan las interacciones sociales del aula.

Según nuestros hallazgos, estas formas de colaboración entre los sujetos podrían contrastarse con investigaciones realizadas en comunidades de aprendizaje o con algunos trabajos desde enfoques social constructivistas, sin embargo, estos estudios surgen de otros contextos teóricos y sus correspondientes herramientas analíticas. Nuestra investigación se centra en presentar las condiciones en el trabajo de aula con estudiantes de quinto grado, que posibilitan formas no alienantes de interacción social usando una perspectiva multimodal del pensamiento humano, en este punto marcamos la diferencia.

5. CONCLUSIONES

El análisis de las evidencias empíricas nos permite mostrar en este artículo una visión de cómo propiciar la colaboración humana desde la TO, a partir de un proceso de construcción colectiva del conocimiento en el aula. Estas formas de colaboración que emergen en una actividad matemática no alienante incluyen la consideración y evolución de un sujeto particular (histórico-cultural), un tipo de actividad desarrollada (orientada hacia la labor conjunta) y una relación precisa entre los individuos y el saber producido mediante la actividad.

Nuestra reflexión teórica y práctica contrasta de forma dialéctica materialista:

I. Dos tipos de sujetos presentes en nuestra investigación, uno de tipo kantiano y otro histórico-cultural;

II. Dos tipos de trabajo grupal, uno de tipo individualista y otro orientado hacia la labor conjunta, y

III. Dos tipos de saber, uno centrado en el sujeto y otro que emerge del colectivo.

Igualmente, a la par de la promoción y evolución de una ética de orientación comunitaria apreciamos rasgos de la ética de la obediencia y de la autonomía.

Luego de nuestra revisión, no encontramos trabajos relacionados con el asunto de la alienación en el desarrollo del pensamiento proporcional, por ello, nuestra investigación busca contribuir en este sentido, centrando la atención en este aspecto que demanda un análisis más profundo.

Referencias

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa RELIME, Extraordin(9), 267-299.

Hegel, G. (2001). The philosophy of history. Batoche Books. (Original work published 1837).

Lasprilla, A., y León, O. (2020). Elementos de un método para el estudio de aspectos éticos en la educación matemática escolar inicial. RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5(2), 129-139.

Lasprilla, A., Radford, L., y León, O. L. (2021). La labor conjunta en actividades de enseñanza-aprendizaje a partir del estudio de los vectores de la ética comunitaria. REMATEC, 16(39), 228-245. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p228-245.id498

Lévinas, E. (2002). Totalidad e infinito: ensayo sobre la exterioridad (6.a ed.). Ediciones Sígueme.

Marx, K. (2015). Manuscritos económico-filosóficos de 1844 (Trad. M. Vedda, F. Aren y S. Rotemberg). Ediciones Colihue SRL.

Miranda, I., Radford, L., y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. Educación Matemática, 19(3), 5-30. https://doi.org/10.24844/EM1903.01

Moreno, R. (2023). El pensamiento proporcional y la formación de subjetividades en el aula: Una aproximación al estado del arte. Revista Venezolana de Investigación En Educación Matemática, 3(3), e202313. https://doi.org/10.54541/reviem.v3i3.68

Pérez, J. (2023). Ludwig Feuerbach y el fin de la filosofía clásica alemana. Siglo XXI Editores.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Research in Mathematics Education, 12(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2016a). Mathematics Education as a Matter of Labor. En M. A. Peters (Ed.). Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory. Section: Mathematics education philosophy and theory (pp. 978-981). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-287-532-7_518-1

Radford, L. (2016b). On alienation in the mathematics classroom. International Journal of Educational Research, 79, 258-266. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.04.001

Radford, L. (2017). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore, y L. Radford (Eds.), Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos (pp. 95-112). Doctorado Interinstitucional en Educación, DIE.

Radford, L. (2020a). El aprendizaje visto como saber y devenir: una mirada desde la teoría de la objetivación. REMATEC, 15(36), 27-42. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n16.p27-42.id306

Radford, L. (2020b). Play and the production of subjectivities in Preschool. En M. Carlsen, I. Erfjord, y P. Hundeland (Eds.), Mathematics education in the early years. Results from the POEM4 conference 2018 (pp. 43-60). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_3

Radford, L. (2021). Mathematics teaching and learning as an ethical event. La matematica e la sua didattica, 29(2), 185-198.

Radford, L. (2023). La teoría de la objetivación: Una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de los Andes.

Radford, L., y Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education (pp. 157-182). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7

Radford, L., y Silva, M. (2021). Ética: entre educación y filosofía. Universidad de los Andes.

Stetsenko, A., y Ho, P. C. G. (2015). The Serious Joy and the Joyful Work of Play: Children Becoming Agentive Actors in Co-Authoring Themselves and Their World Through Play. International Journal of Early Childhood, 47(2), 221-234. https://doi.org/10.1007/s13158-015-0141-1

Vergel, R., y Miranda, I. (2020). Editorial. Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5(2), 1-13. http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/386

Yajot, O. (1969). Qué es el materialismo dialéctico (Trad. I. Mendieta). Editorial Progreso.

Zevenbergen, R. (1996). Constructivism as a liberal bourgeois discourse. Educational Studies in Mathematics, 31, 95-113. https://doi.org/10.1007/BF00143928

 10.46219/rechiem.v16i2.158

CONSTRUCCIÓN Y DISEÑOS DE RECTÁNGULOS A PARTIR DEL PERÍMETRO Y ÁREA: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO

CONSTRUCTION AND DESIGN OF RECTANGLES BASED ON PERIMETER AND AREA: A DIDACTIC PROPOSAL BASED ON MODES OF THINKING THEORY

Javiera Paz Lizana Beltrán
beltranlizana@gmail.com
https://orcid.org/0009-0001-2969-1488
Licenciada; Universidad de O'Higgins
Av. Libertador Gral. Bernardo O'Higgins 611
Rancagua, Chile.

RESUMEN

El presente trabajo tiene como por objetivo diseñar una propuesta didáctica que permita el tránsito entre los distintos modos de pensar en la construcción y diseño de rectángulos a partir del perímetro y área en estudiantes de 5° básico. Para esto, la propuesta fue implementada en un colegio particular de la comuna de Machalí, aplicándose en un curso de 35 estudiantes del nivel 5° básico. Entre los principales resultados se obtuvo que, con respecto a las construcciones a partir del perímetro, prevalece un modo de pensar analítico aritmético; por otra parte, en la construcción de rectángulos dada el área, prevaleció una articulación entre el modo analítico aritmético y sintético geométrico. En ambos casos, las operaciones básicas fueron fundamental para que los y las estudiantes transitasen de un modo de pensar a otro.

Palabras clave:

Perímetro de rectángulos, Área de rectángulos, Modos de Pensamiento.

ABSTRACT

This work aims to design a didactic proposal that allows the transition between the different ways of thinking in constructing and designing rectangles based on the perimeter and area in 5th-grade students. For this, the proposal was implemented in a private school in the commune of Machali and applied to a course of 35 students at the 5th-grade level. Among the main results, it was obtained that an arithmetic analytical way of thinking prevails concerning constructions based on the perimeter. On the other hand, in the construction of rectangles given the area, an articulation between the arithmetic analytical and geometric synthetic modes prevailed. In both cases, basic operations were essential for students to transition from one way of thinking to another.

Keywords:

Perimeter of rectangles, Area of rectangles, Modes of thought.

Recibido: 23 de Febrero de 2024 Aceptado: 17 de Julio de 2024

1. INTRODUCCIÓN

Las bases curriculares de la asignatura de matemática de 1° a 6° año básico están secuenciadas en cinco ejes temáticos: número y operaciones, patrones y álgebra, geometría, medición y datos y probabilidades. Considerando el contexto actual, el plan curricular ha sufrido una modificación, ya que se está priorizando Objetivos de Aprendizajes a trabajar con los y las estudiantes conllevando cambios en la manera en que se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Específicamente, la enseñanza y aprendizaje del eje de medición que está directamente vinculado con la geometría, a tal punto de fusionar estas dos temáticas en los cursos posteriores a 6° año básico. El Ministerio de Educación (Mineduc, 2012a) señala en las bases curriculares de 1° a 6° año básico que "este eje pretende que los estudiantes sean capaces de identificar las características de los objetos y cuantificarlos, para poder compararlos y ordenarlos" (p. 219).

Para abordar el tema de la presente propuesta didáctica se trabajará en el eje de medición, focalizando las representaciones utilizadas por el estudiantado en la construcción de diferentes rectángulos a partir del perímetro, área o ambas para evidenciar su modo de pensamiento, en estudiantes que cursan 5° básico. Lo antes escrito está estipulado en las Bases Curriculares nacionales a través del siguiente Objetivo de Aprendizaje: "OA21 Diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro, el área o ambos, y sacar conclusiones" (Mineduc, 2012a, p. 249).

En los indicadores de evaluación se espera que los y las alumnas puedan dibujar rectángulos de igual perímetro y área para comprobar que entre los rectángulos de igual perímetro es el cuadrado el que tiene mayor área. Para lograr esto, el estudiantado debe desarrollar la actividad de manera colaborativa con sus pares para dar respuesta a una situación contextualizada, donde se tendrá que trabajar de manera metódica y ordenada abordando de manera flexible la solución de problemas.

El objetivo general es describir una propuesta didáctica que permita el tránsito entre los distintos modos de pensar en la construcción y diseño de rectángulos a partir del perímetro y área en estudiantes de 5° básico. Dicha propuesta está compuesta por cuatro sesiones de dos horas pedagógicas cada una.

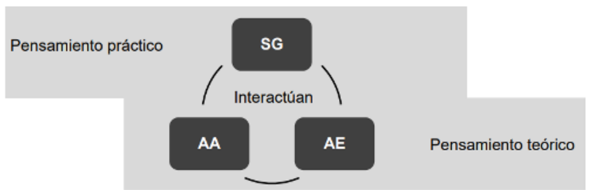
2. PROPUESTA DIDÁCTICA

2.1 Marco teórico

La propuesta didáctica está diseñada desde la Teoría Modos de Pensamiento de Sierpinska, la cual se caracteriza en el estudio de los diferentes modos en que los y las estudiantes comprenden y utilizan los conceptos matemáticos en un determinado contexto, fomentando el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico.

La Teoría Modos de Pensamiento de Sierpinska (2000) plantea la existencia de tres modos de pensamiento: el modo sintético geométrico, que está relacionado con un pensamiento práctico, y los modos analítico aritmético y analítico estructural, que lo están con un pensamiento teórico. La articulación entre estos tres modos de pensamiento facilita la comprensión profunda del objeto matemático en estudio.

Figura 1
Modos de pensar de Sierpinska en el contexto del pensamiento práctico y teórico.



Nota. Randolph y Parraguez (2019, p. 61).

El modo sintético geométrico (SG), tal como señala Astorga y Parraguez (2019), corresponde al "modo desde el pensamiento práctico, el cual describe el objeto en su forma desde la representación gráfica convencional, utilizando elementos de la geometría como puntos, líneas, curvas, planos, por mencionar algunos" (p. 45). Asimismo, Randolph y Parraguez (2019) señalan que "el modo SG usa un lenguaje geométrico teniendo visualmente puntos, líneas, planos, figuras y cuerpos geométricos; la visualización matemática juega un rol fundamental en lo que es la resolución de problemas en este modo de pensamiento" (p. 61).

Para la presente propuesta didáctica, las producciones categorizadas en este modo son aquellos registros figurales geométricos que realicen los y las estudiantes, como por ejemplo, dibujar un rectángulo para visualizar y utilizar las características de este cuadrilátero para determinar el perímetro y/o área.

Por otra parte, el modo analítico aritmético (AA) consiste en aquel "pensamiento teórico, utiliza el álgebra para describir el objeto a través de fórmulas, relaciones numéricas o ecuaciones" (Astorga y Parraguez, 2019, p. 45). En relación con lo antes mencionado, Randolph y Parraguez (2019) dicen que "el pensamiento es teórico desde el momento en que el estudiante debe interpretar los objetos a partir de ciertas relaciones numéricas o simbólicas" (p. 61). Por eso, para esta propuesta didáctica se evidenciará un modo de pensar AA cuando el estudiantado exprese relaciones numéricas o simbólicas para determinar el área y/o perímetro de los diferentes rectángulos construidos.

El modo analítico estructural (AE) es aquel que corresponde a cuando un objeto es definido por un grupo de determinadas propiedades y axiomas (Sierpinska, 2000, como se citó en Ramírez et al., 2006). En el modo de pensar AE, los objetos matemáticos son representados mediante propiedades que poseen o a través de la caracterización de axiomas (Randolph y Parraguez, 2019). Para lograr este tipo de pensamiento en la propuesta didáctica, los y las estudiantes tendrán un manejo del lenguaje algebraico acorde a su nivel para extender la estrategia utilizada para construir los diferentes rectángulos dado el perímetro y/o área a otro contexto, donde la extensión del plan involucrará propiedades y axiomas asociados a los conceptos de perímetro y área de cuadriláteros.

Finalmente, es fundamental tener en consideración lo que señalan Rueda y Parraguez (2014):

> Cada uno de los modos de pensamiento permite una mirada diferente del objeto matemático, lo cual conduce a distintas comprensiones del mismo; cada uno de ellos no constituyen etapas en el desarrollo del pensamiento algebraico, sino que por el contrario, son igualmente útiles, cada uno en su propio contexto, para propósitos específicos y sobre todo cuando están interactuando. (p. 312)

2.2 Secuencia didáctica

El propósito de esta secuencia es aportar en el desarrollo de un contenido estipulado en la Priorización Curricular de la asignatura de Matemática, y trabajar habilidades y actitudes del nivel 5° básico.

La Tabla 1 muestra los aspectos curriculares en los que se enmarca la propuesta. El Objetivo de Aprendizaje corresponde al número 21 de 5° básico, donde se potenciará la habilidad de argumentar y comunicar, manifestando un estilo de trabajo ordenado y metódico.

Tabla 1
Objetivos y actitudes curriculares abordados en la secuencia didáctica

Objetivo de Aprendizaje	OA_21 Diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro, el área o ambos, y sacar conclusiones.
Objetivos de Habilidades	Argumentar y comunicar OA_h Documentar el procedimiento para resolver problemas, registrándolo en forma estructurada y comprensible.
Actitudes	a. Manifestar un estilo de trabajo ordenado y metódico.

Nota. Obtenido de Mineduc (2012b, pp. 41-44).

El objetivo general es describir una propuesta didáctica que permita el tránsito entre los distintos modos de pensar en la construcción y diseño de rectángulos a partir del perímetro y área en estudiantes de 5° básico. Para lograr esto, se proponen los siguientes objetivos específicos:

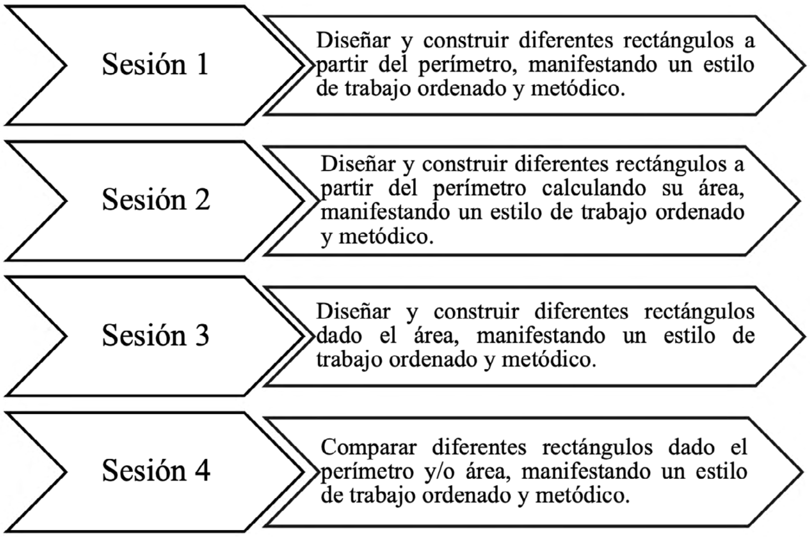
I. Diseñar y aplicar actividades de aprendizaje que promuevan el tránsito entre los modos de pensamiento de la construcción y diseño de rectángulos dado el perímetro y/o área en estudiantes de 5° básico.

II. Identificar los elementos matemáticos que propician el tránsito entre los modos de pensar para la construcción de distintos rectángulos a partir del perímetro y/o área.

III. Indagar en los modos de comprender el pensamiento que prevalece en estudiantes de 5° básico para construir y diseñar diferentes rectángulos dado el perímetro y/o área.

La secuencia se propone en 4 sesiones de 2 horas pedagógicas por sesión. La Figura 2 muestra la organización de las sesiones con sus respectivos objetivos.

Figura 2
Organización de la secuencia didáctica con los objetivos asociados a cada sesión



Nota. Elaboración propia.

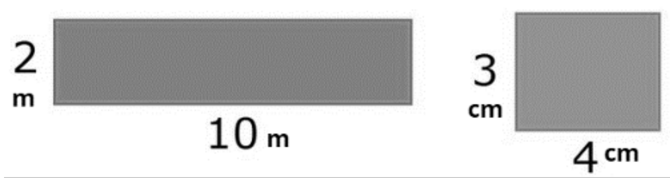
2.2.1 Sesión 1

El propósito de esta sesión es que los y las estudiantes diseñen y construyan diferentes rectángulos a partir del perímetro, manifestando un estilo de trabajo ordenado y metódico. Para lograrlo, se propone que de forma colaborativa elaboren una estrategia que les permita diseñar y construir todos los rectángulos que tengan un determinado perímetro, donde los lados sean números naturales.

Inicio. Para comenzar, se les pregunta a los y las estudiantes ¿qué es lo que recuerdan sobre lo que es el perímetro de un rectángulo? Se les pide que escriban en sus cuadernos sus ideas sobre el perímetro de un rectángulo para después compartirlas con el curso de manera voluntaria.

Se define formalmente lo que es el perímetro de una figura plana, para luego aplicar dicho concepto en los siguientes rectángulos.

Figura 3
Ejercicios propuestos por el docente en clases

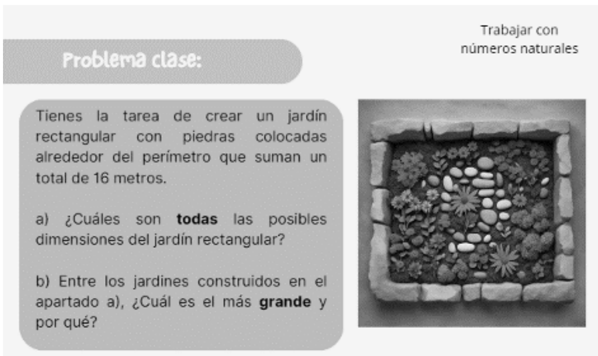


En la pizarra se registrará los diferentes cálculos que utilicen los estudiantes para determinar el perímetro de ambos rectángulos.

Desarrollo. Una vez recordado y aplicado el concepto de perímetro en rectángulos, se les pedirá a los y las estudiantes que se agrupen de 3 o 4 personas, entregándoles una hoja cuadriculada por cada grupo con el propósito de dejar por escrito todos los argumentos, cálculos y/o dibujos utilizados en el desarrollo de la actividad. Esto, con el fin de observar el modo de pensamiento que utiliza el estudiantado para diseñar y construir rectángulos dado el perímetro.

Posteriormente, se les presenta el primer problema, en el que se espera que los y las estudiantes determinen las dimensiones del jardín rectangular a partir de su perímetro, tal como se muestra en la Figura 4. Luego, tendrán que reconocer cuál de los jardines construidos es el más grande, por lo que los y las estudiantes compararán la superficie de los rectángulos. Si bien el objetivo no es trabajar con área, se busca con ello introducir este concepto para estudiarlo en la próxima sesión.

Figura 4
Problema 1: dimensiones del jardín a partir del perímetro



Nota. Elaboración propia.

En este problema son cuatro rectángulos distintos que se pueden construir y diseñar a partir del perímetro dado, por eso se les pregunta constantemente a los y las estudiantes: ¿habrá otro rectángulo que tenga perímetro 16 donde los lados sean números naturales? En caso de que hubiese un grupo que no pueda avanzar porque no encuentra otro rectángulo, se les preguntará: ¿en qué se fijaron para construir el rectángulo que tienen en su hoja?

Cierre. Para finalizar, los y las estudiantes tendrán que responder en la hoja cuadriculada entregada:

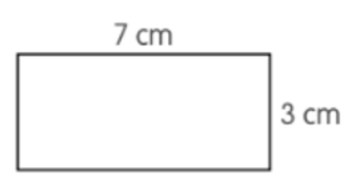
I. ¿Cuál fue la primera estrategia que pensaron? Explica.
II. ¿Todos los integrantes del grupo estuvieron de acuerdo con la primera estrategia? ¿Por qué?
III. ¿Crees que existen otras estrategias? ¿Por qué?

2.2.2 Sesión 2

El propósito de esta sesión es que los y las estudiantes profundicen el trabajo de la construcción y diseño de rectángulos dado el perímetro determinando su respectiva área, para eso tendrán que manifestar un trabajo ordenado y metódico. Para lograr esto, tendrán que utilizar una estrategia de manera individual que les permita construir y diseñar rectángulos dado el perímetro, donde sus lados sean números naturales.

Inicio. Para comenzar, se les pregunta a los y las estudiantes: ¿cómo se calcula el perímetro del siguiente rectángulo?, ¿cuánto es?

Figura 5
Rectángulo de ejemplo para recordar el cálculo del perímetro



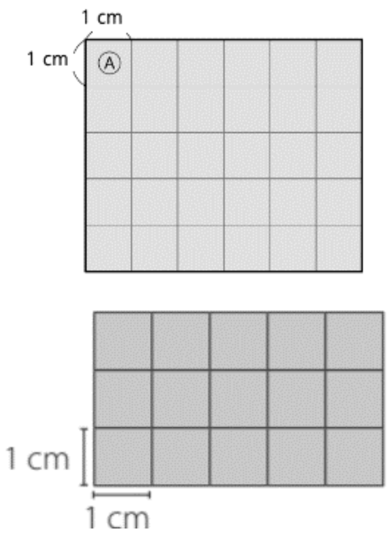
Desarrollo. A partir de las respuestas del estudiantado, se abordará nuevamente el problema de las dimensiones del jardín dado su perímetro para tener una discusión plenaria entre todo el curso. Para responder la primera pregunta, cada grupo va a exponer respondiendo cuántos rectángulos distintos hallaron y cuáles son las dimensiones de estos manteniendo el perímetro en 16 metros. Así también, cuál es la estrategia que utilizaron para hallar, construir y diseñar dichos rectángulos dado el perímetro.

Una vez que todos los grupos expongan sus resultados con respecto a la primera pregunta, se va a realizar una síntesis de las ideas centrales de manera conjunta para elaborar una estrategia que les permita diseñar y construir diferentes rectángulos dado el perímetro, con el propósito de articular los modos de pensamiento manifestados en la actividad con un modo analítico estructural e ir generando una comprensión profunda del contenido. En la pizarra se registrarán dichas ideas para que los y las estudiantes lo documenten en sus cuadernos con el propósito de que puedan construir y diseñar todos los rectángulos cuyo perímetro es 14 cm, dado que sus lados son números naturales.

Con respecto a la segunda pregunta del problema principal de la clase pasada, los grupos tenían que responder cuál de todos los rectángulos construidos y diseñados era más grande, justificando dicha respuesta. Al igual que antes, los y las estudiantes tendrán que mencionar cuál de los jardines rectangulares construidos es el más grande y por qué, esto tiene como fin introducir el concepto de área de una figura plana.

Se les preguntará a los y las estudiantes qué entienden por área de una figura plana, en la pizarra se registrarán sus ideas. Posteriormente, se aplicará este concepto determinando el área de rectángulos a partir del conteo de cuadrados unitarios para intencionar un modo de pensar sintético geométrico, tal como los que se muestran a continuación:

Figura 6
Ejemplos de rectángulos para determinar su área

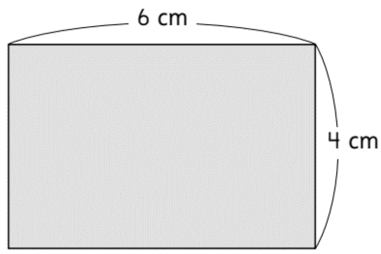


Cierre. Para finalizar, los y las estudiantes tendrán que responder en su cuaderno:

- ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?
- ¿Cómo se puede determinar el área del rectángulo? ¿Cuál es su valor?

Para esto, utilizarán el rectángulo de la Figura 7.

Figura 7
Rectángulo utilizado para la actividad de cierre de la sesión 2

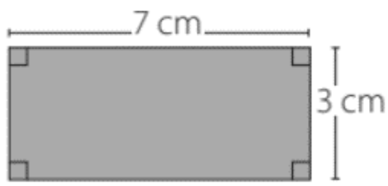


2.2.3 Sesión 3

El propósito de esta sesión es que los y las estudiantes puedan construir y diseñar distintos rectángulos dada el área. Para lograr esto, se trabajará de manera ordenada y metódica de forma colaborativa con sus pares, dejando por escrito todos los argumentos, cálculos y/o dibujos utilizados para desarrollar la actividad con el fin de visualizar su modo de pensamiento.

Inicio. Para comenzar, el estudiantado tendrá que mencionar en qué consiste el área en un rectángulo y aplicar dicho concepto en el rectángulo de la Figura 8:

Figura 8
Rectángulo utilizado para la actividad de inicio asociada a la sesión 3



Para esto, se utiliza las siguientes preguntas orientadoras:

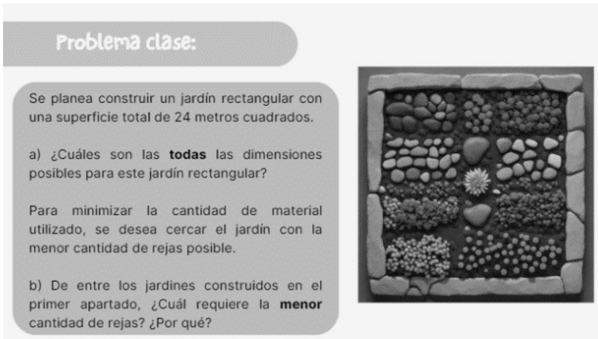
- ¿Qué es el área? ¿Cómo la podemos aplicar para comparar rectángulos?
- ¿Cuál es el área del rectángulo de largo 7 cm y ancho 3 cm?

Desarrollo. Una vez recordado y aplicado el concepto de área en rectángulos, se les pedirá a los y las estudiantes que se agrupen de 3 o 4 personas entregándoles una hoja cuadriculada por cada grupo con el propósito de dejar por escrito todos los argumentos, cálculos y/o dibujos utilizados en el desarrollo de la actividad. Esto, con el fin de observar el modo de pensamiento que utiliza el estudiantado para diseñar y construir rectángulos dada el área.

Posteriormente, se les presenta el segundo problema en el que se espera que los y las estudiantes determinen las dimensiones del jardín rectangular a partir de su área, tal como se muestra en la Figura 9. Luego, tendrán que reconocer cuál de los jardines construidos es el que tiene menor perímetro, por lo que los y las estudiantes compararán dicho objeto matemático para mencionar qué jardín ocupará menos metros de reja. Si bien el objetivo es diseñar y construir rectángulos dada el área, esto es para reforzar el concepto de perímetro trabajado en las sesiones pasadas.

Figura 9

Problema 2: dimensiones del jardín a partir del área



Nota. *Elaboración propia.*

En este problema, son cuatro los rectángulos distintos que se pueden construir y diseñar a partir del área dada, por eso se les pregunta constantemente a los y las estudiantes: ¿habrá otro rectángulo que tenga área donde los lados sean números naturales? En caso de que hubiese un grupo que no puede avanzar porque no encuentra otro rectángulo que cumpla con las condiciones entregadas, se les preguntará: ¿en qué se fijaron para construir el rectángulo que tienen en su hoja? ¿Se podrá aplicar el mismo criterio para construir otro rectángulo?

Con respecto a la segunda pregunta, esta tiene como fin que los y las estudiantes determinen el perímetro de los rectángulos construidos en el primer apartado para compararlos a partir de la longitud de su contorno. Esto es para continuar reforzando dicho concepto y que sea abordado de manera simultánea con el área.

Cierre. Para finalizar, los y las estudiantes tendrán que responder en la hoja cuadriculada entregada:

- ¿Cuál fue la primera estrategia que pensaron? Explica.
- ¿Todos los integrantes del grupo estuvieron de acuerdo con la primera estrategia? ¿Por qué?
- ¿Crees que existen otras estrategias? ¿Por qué?

2.2.4 Sesión 4

El propósito de esta sesión es que los y las estudiantes profundicen el trabajo de la construcción y diseño de rectángulos dado el área y/o perímetro, comparando dichos cuadriláteros. Para eso, tendrán que manifestar un trabajo ordenado y metódico, y deberán utilizar una estrategia de manera individual que les permita construir y diseñar rectángulos dado el perímetro y/o área, donde sus lados sean números naturales.

Inicio. Para iniciar, se va a recordar el problema del jardín 2 que se puede visualizar en la Figura 9. Para esto, se le va a preguntar al estudiantado: ¿cuál fue la estrategia inicial que consideraron para construir y diseñar los rectángulos cuya superficie total es de Posteriormente, en la pizarra se registrarán las respuestas de los y las estudiantes con el objetivo de elaborar una estrategia de manera conjunta para determinar todos los rectángulos dada un área, articulando los modos de pensar manifestados en el trabajo con un pensamiento teórico, específicamente con un analítico estructural.

Desarrollo. Una vez elaborada de manera conjunta la estrategia, se va a iniciar preguntando: ¿qué pares de números naturales tienen como producto 24?, ¿qué representan estos pares de números en el contexto? En la pizarra se va a documentar los pares de números que van señalando los estudiantes, como también se va a representar pictóricamente los rectángulos con sus respectivas medidas.

Posteriormente, se va a realizar la segunda pregunta, que consiste en comparar los rectángulos construidos y diseñados anteriormente determinando cuál es el que tiene menor perímetro. Para esto, se va a preguntar: ¿cómo podemos determinar cuál es el jardín que ocupará menor reja?, ¿por qué?

Después, los y las estudiantes tendrán que aplicar la estrategia elaborada en el inicio de la sesión. Para ello, tendrán que responder lo siguiente de manera individual en sus cuadernos:

- ¿Cuáles son las dimensiones de todos los rectángulos cuya área es donde sus lados son números naturales? ¿Cuál de ellos tiene mayor perímetro?

Asimismo, también se les pedirá lo siguiente:

- Construye y diseña todos los rectángulos donde los lados sean números naturales cuyo perímetro es: 12 cm, 20 cm y 24 cm. ¿Cuál rectángulo es el que tiene mayor superficie en cada caso?

Esta segunda pregunta tiene como propósito comprobar que, de entre los rectángulos de igual perímetro, el cuadrado tiene mayor área. Además, con esta actividad se pretende que los y las estudiantes articulen los tres modos de pensar utilizando los conceptos y estrategias discutidas en clase para lograr una comprensión profunda sobre el perímetro y área de rectángulos.

Cierre. Para finalizar la sesión, los y las estudiantes tendrán que responder dos preguntas teniendo en consideración la segunda pregunta de la actividad de desarrollo:

- A partir de los rectángulos construidos previamente, ¿qué similitud puedes observar sobre los rectángulos de mayor superficie?
- ¿Qué puedes concluir al respecto? Explica.

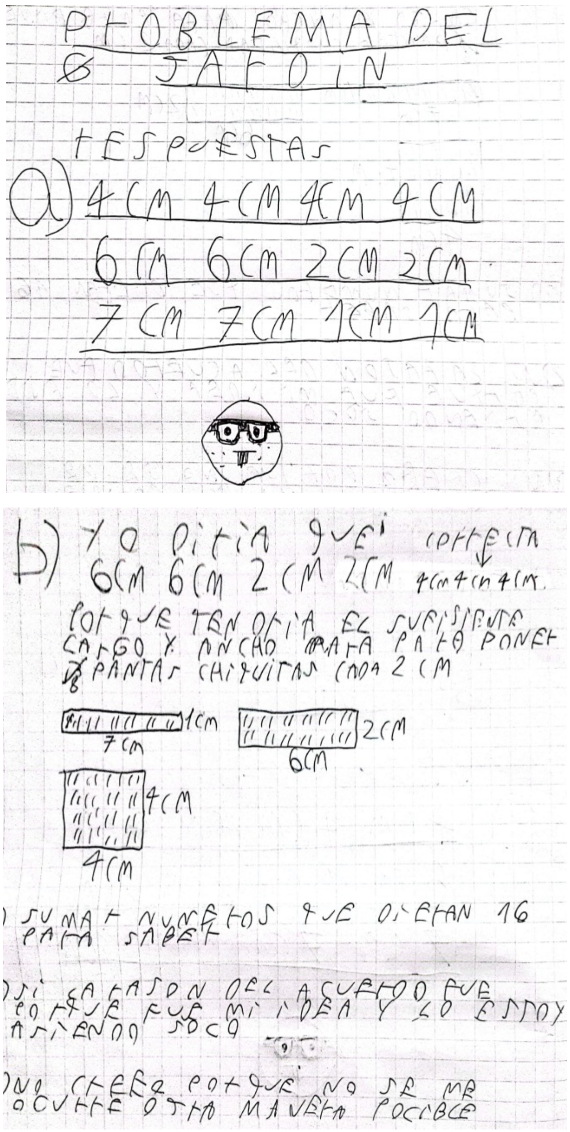
3. RESULTADOS

La propuesta didáctica fue implementada en un colegio particular de la comuna de Machalí, región del Libertador Bernardo O'Higgins, Chile. El establecimiento es mixto, imparte clases desde Prekínder hasta Cuarto Medio contando con dos cursos por nivel, a excepción de 4° básico y 5° básico que tienen un curso por nivel, donde en promedio hay 30 estudiantes por aula.

El diseño didáctico se aplicó en un curso de 35 estudiantes del nivel 5° básico, y se enmarcó en el inicio de la unidad 5 que está relacionado con el eje de Geometría y Medición: Figuras geométricas.

En la sesión 1 los y las estudiantes se enfrentaron de forma grupal al problema 1 (Figura 4) y respondieron de acuerdo con los conocimientos previos abordados en la actividad de inicio, elaborando estrategias desde el diálogo entre pares.

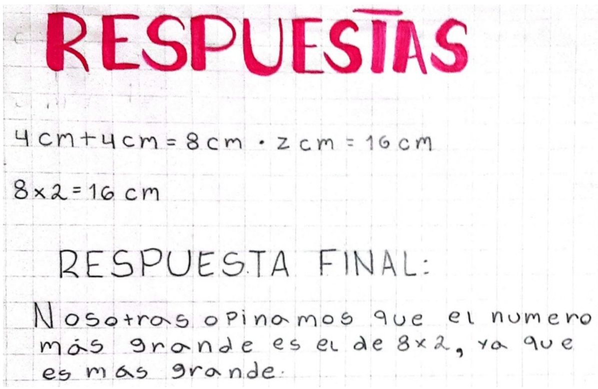
Figura 10
Producción Grupo 1 (G1)



G1 utiliza en una primera instancia un pensamiento teórico, específicamente analítico aritmético, ya que señala que la estrategia utilizada para encontrar los rectángulos fue "sumar números que dieran

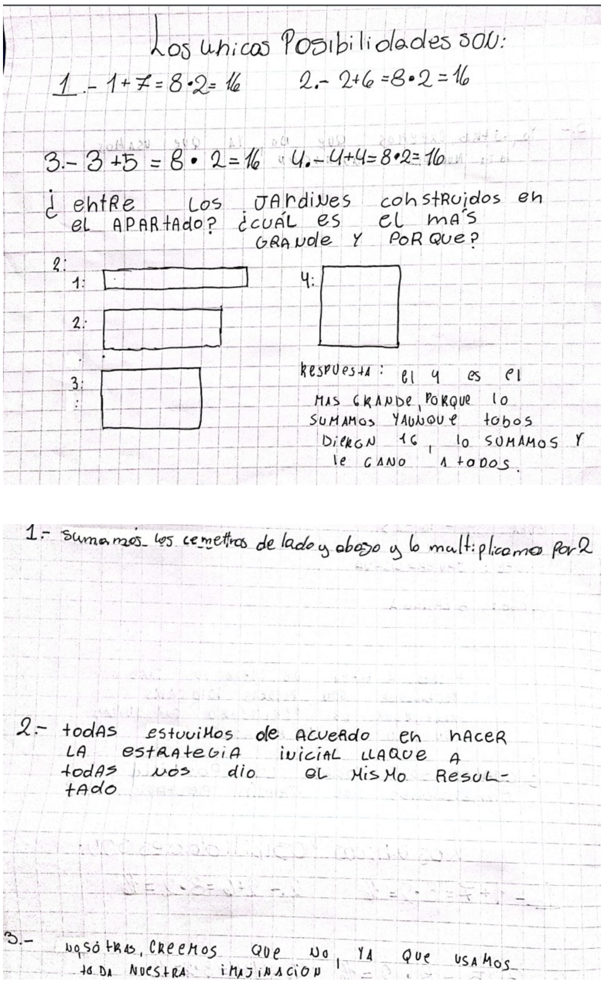
16”. Al utilizar esta estrategia les permitió determinar 3 de los 4 rectángulos de perímetro 16 m, donde los lados son números naturales. Sin embargo, para determinar cuál es más grande se utiliza un pensamiento práctico, sintético geométrico, dado que representan de manera pictórica un rectángulo para contar la cantidad de cuadrados que forma el polígono, por lo cual esta estrategia les permitió responder correctamente que de los distintos rectángulos el cuadrado es el más grande, pudiendo con ello corregir su respuesta inicial.

Figura 11
Producción Grupo 2 (G2)



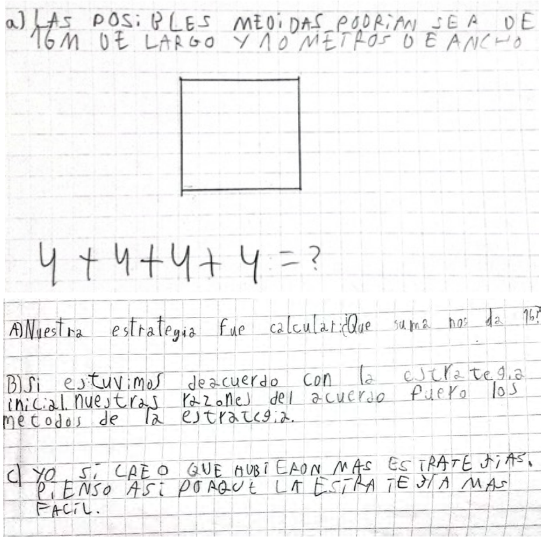
La producción de G2 solo entrega un rectángulo que corresponde al cuadrado de lado 4 cm. Para la primera pregunta se utiliza un tratamiento numérico, relacionando esto con un modo de pensar analítico aritmético; no obstante, al responder cuál es el más grande, señalan que es el de . Hay que mencionar que este grupo no respondió las preguntas finales donde explicaban la estrategia utilizada para la construcción y diseño de rectángulos dado un perímetro.

Figura 12
Producción Grupo 3 (G3)



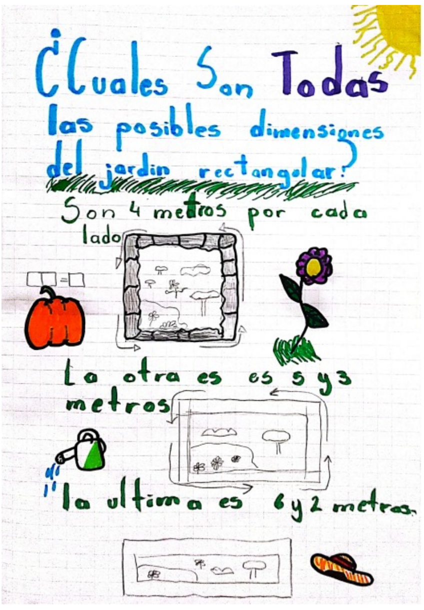
El grupo 3 comienza con un pensamiento teórico, ya que tiene un modo de pensar analítico aritmético. Esto, pues realizan tratamientos numéricos de números naturales que al sumarlos den como resultado 8, para luego multiplicarlo por 2. Lo anterior se puede evidenciar en las respuestas entregadas, dado que señalan “sumamos los centímetros de lado y abajo y lo multiplicamos por 2”. Por otra parte, para la segunda pregunta dibujan los rectángulos señalando que el cuarto rectángulo corresponde a un cuadrado, siendo este el más grande. Describen que, a pesar de tener todos el mismo perímetro, sumaron la cantidad de cuadrados unitarios dentro de cada rectángulo y el del cuadrado obtuvo la mayor cantidad; por eso, pensaron de manera práctica la segunda pregunta.

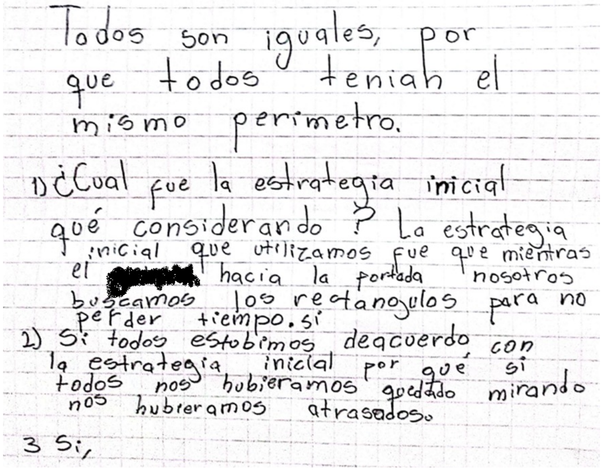
Figura 13
Producción Grupo 4 (G4)



La producción de G4 se puede observar una articulación entre el pensamiento práctico y teórico para la construcción del rectángulo de perímetro 16 m. El grupo solo logra determinar un rectángulo que es el cuadrado de lado 4, el que dibujan con sus respectivas medidas señalando que su perímetro se obtiene a través del resultado de la expresión . En este sentido, no respondieron la pregunta de cuál rectángulo es más grande debido a que su estrategia les permitió encontrar solo un rectángulo. G4 describe que su estrategia inicial fue preguntarse: "¿Qué suma nos da 16?". Además, señalan que estuvieron en desacuerdo con esta estrategia, siendo uno de los motivos por el cual no pudieron determinar todos los rectángulos.

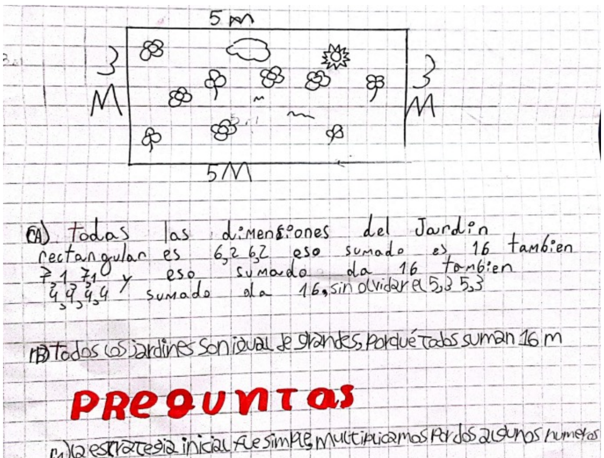
Figura 14
Producción Grupo 5 (G5)





La producción de G5 utiliza representaciones pictóricas para caracterizar los rectángulos, señalando sus respectivos lados, donde solo se puede evidenciar un modo de pensar sintético geométrico. En la descripción de su estrategia solo manifiestan la forma en la que se dividieron las tareas los integrantes del grupo. Para responder sobre cuál de los diferentes rectángulos es más grande, continuaron utilizando el perímetro señalando que son todos iguales.

Figura 15
Producción Grupo 6 (G6)



G6 en un comienzo dibuja el rectángulo de dimensiones manifestando un modo de pensar sintético geométrico, pero en la descripción de su estrategia evidencia un pensamiento teórico, específicamente analítico aritmético, puesto que escriben que "la estrategia inicial fue simple, multiplicar por dos algunos números y luego lo sumamos". Asimismo, escriben todas las dimensiones de los diferentes rectángulos cuyo perímetro es 16 m, representándolas solo de manera numérica.

El último grupo, G7, no desarrolló ninguna actividad durante la sesión.

Todas las producciones permitieron aproximar una primera estrategia inicial utilizando un modo de pensar teórico (analítico aritmético); no obstante, solo un grupo tuvo en consideración un modo de pensar geométrico para elaborar su plan de diseño y construcción dado el perímetro donde los lados son números naturales.

En la sesión 2, tras haber recordado lo que es el perímetro de una figura plana junto a su manera de calcularlo, los y las estudiantes expusieron sus estrategias para la construcción y diseño de rectángulos de perímetro 16 m, donde se llegó al consenso de la primera pregunta:

- ¿Qué suma nos da 16?
- Sumamos el largo con el ancho donde la suma es la mitad de 16, y luego multiplicamos por 2.

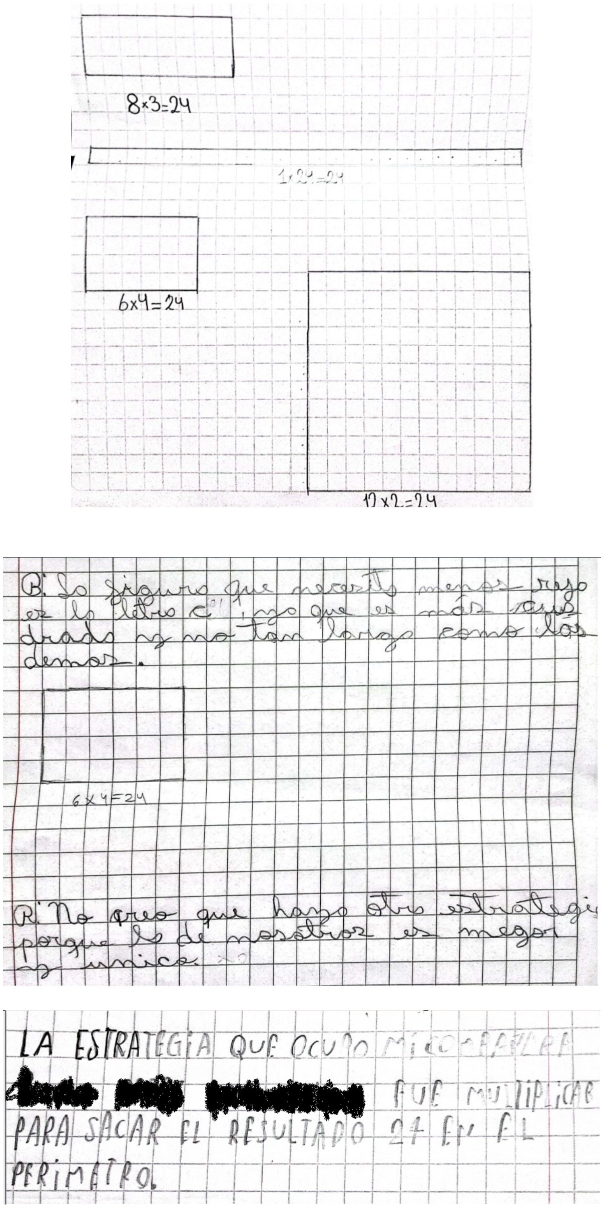
Asimismo, para que los y las estudiantes pudiesen articular lo trabajado con un modo analítico estructural, se generalizó a través de una discusión grupal a nivel de curso:

- ¿Qué suma nos da el valor del perímetro?
- Si corresponde al semiperímetro de un rectángulo, entonces y .

Posteriormente, al introducir el concepto de área de una figura plana, el estudiantado recordó lo trabajado en años anteriores, pudiendo explicar qué es el área y cómo se calcula. En los primeros ejemplos de área, los y las estudiantes articularon los tres modos de pensamiento, ya que dibujaron los rectángulos utilizando los cuadrados del cuaderno y señalaron que "hay que multiplicar el largo por el ancho para no contar todos los cuadrados dentro del rectángulo".

En la sesión 3, los y las estudiantes se enfrentaron de forma grupal al problema 2 (ver Figura 9) respondiendo de acuerdo con lo que sabían sobre el área de un rectángulo para elaborar estrategias desde el diálogo entre pares. Cabe mencionar que en esta clase los grupos que armaron los y las estudiantes fueron distintos a los de la sesión 1.

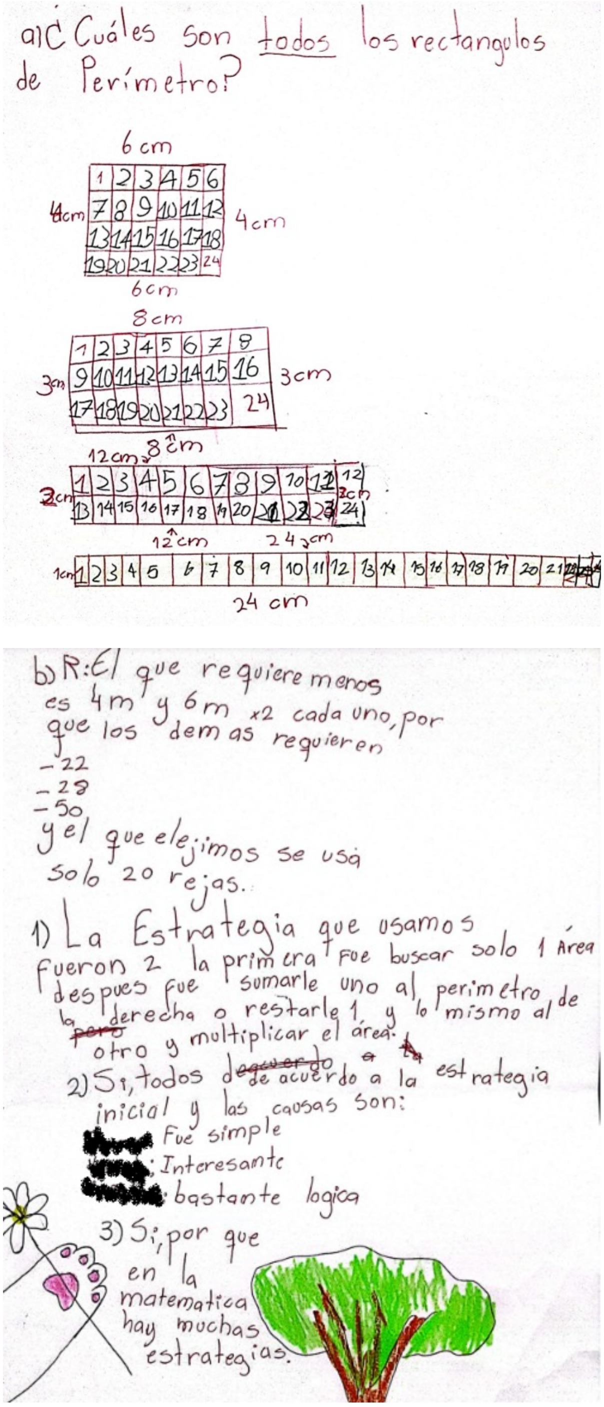
Figura 16
Producción Grupo A (GA)



GA utilizó una estrategia que les permitió construir los cuatro rectángulos pedidos con la condición dada, señalando que su plan consistía en "multiplicar para sacar el resultado 24 en el perímetro". En la respuesta de la segunda pregunta manifiestan que el rectángulo de dimensiones tiene menor perímetro, "ya que es más cuadrado y no tan largo como los demás". Este grupo articula los tres modos de pensar, ya que utiliza un modo práctico al representar de manera figural el rectángulo, un modo teórico porque utilizan las multiplicaciones para construir los rectángulos dada el área y finalmente generalizan al señalar que el perímetro es mayor porque es más similar a un cuadrado.

Figura 17

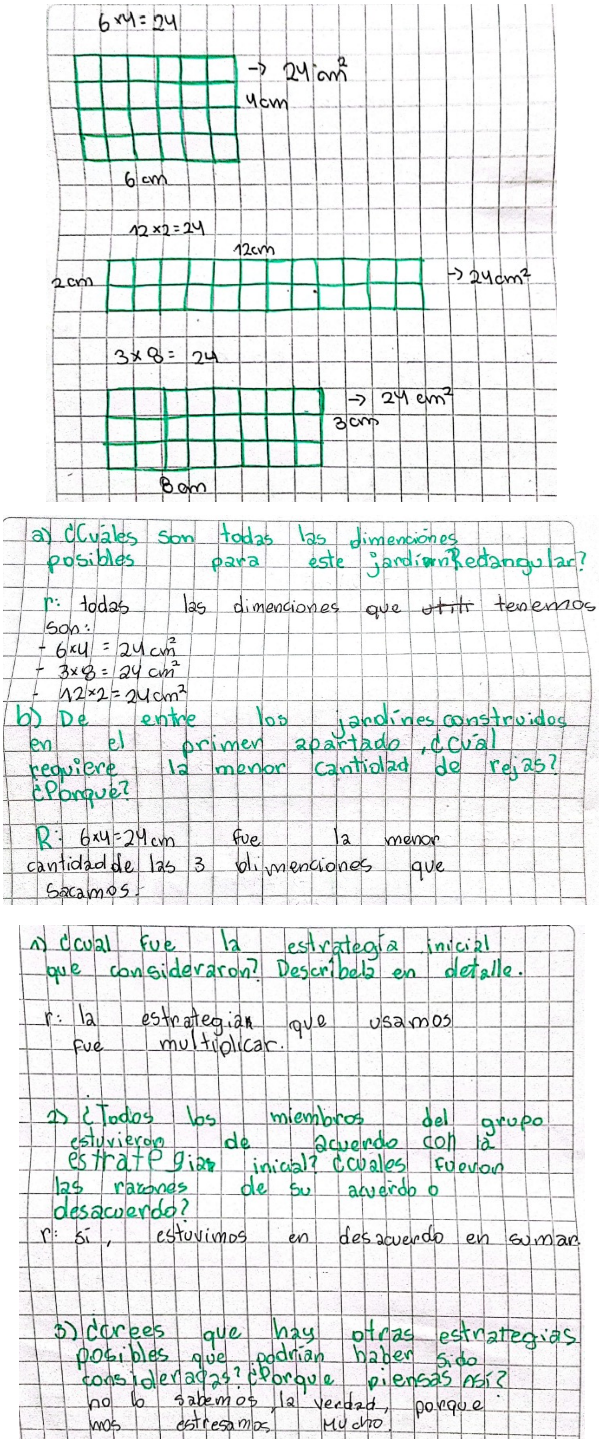
Producción Grupo B (GB)



La producción de GB utilizó un registro figural de los rectángulos, incorporando la cantidad de cuadrados unitarios dentro de él a pesar de no haber utilizado una hoja cuadriculada para resolver el problema, por eso manifiestan un modo de pensar sintético geométrico. Su estrategia de "buscar solo 1 área y después fue sumarle uno al perímetro de la derecha o restarle 1 y lo mismo al otro y multiplicar el área" les permitió encontrar los cuatro rectángulos pedidos utilizando un modo analítico aritmético. Cabe mencionar que en la descripción de su estrategia hubo una confusión de conceptos, pero esto no fue impedimento para responder correctamente.

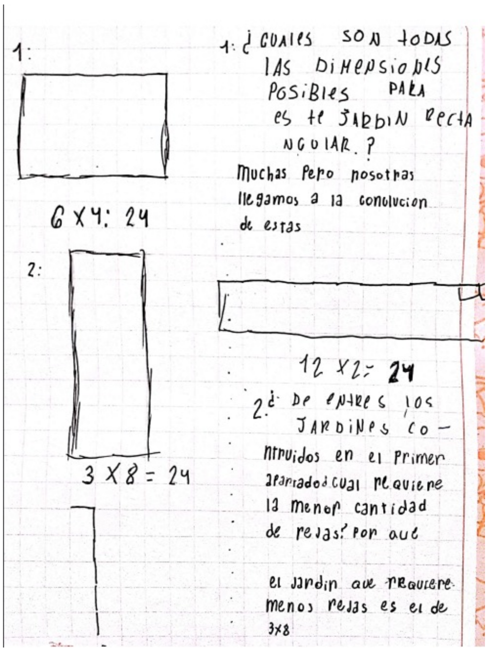
Figura 18

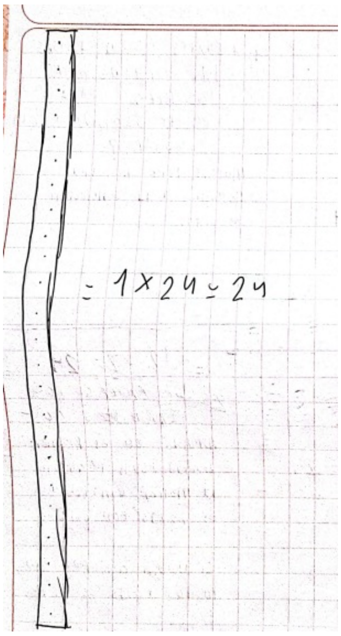
Producción Grupo C (GC)

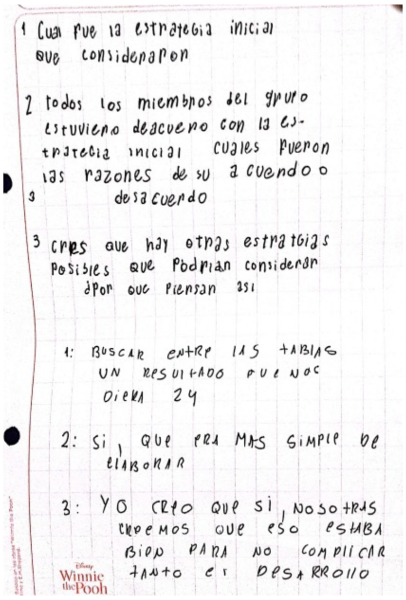


La producción de GC usó los mismos registros que los grupos anteriores, pero la estrategia de la multiplicación les permitió hallar tres de los cuatro rectángulos solicitados, pudiendo así articular el modo sintético geométrico y analítico aritmético. Pese a lograr parciales resultados, el grupo declara que se estresó mucho con la actividad, por lo que no saben si habrá otra estrategia o no para diseñar y construir los rectángulos dada el área. Además, sin inconvenientes pudieron reconocer que el rectángulo cuyas dimensiones son es aquel que tiene menor perímetro.

Figura 19
Producción Grupo D (GD)

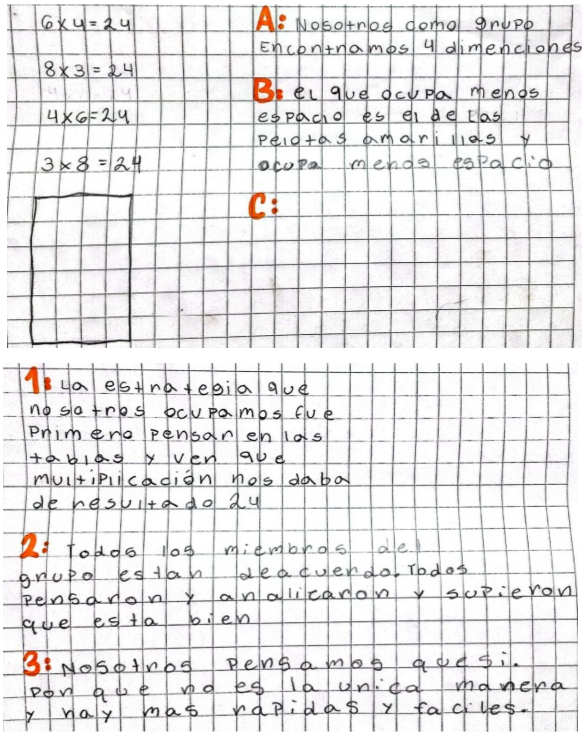






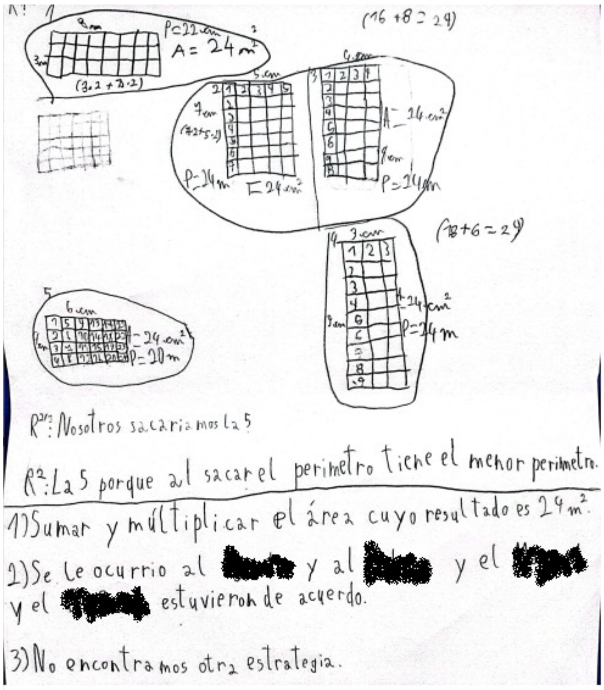
GD manifiesta un modo de pensar analítico aritmético, ya que su plan consistía en "buscar entre las tablas un resultado que nos diera 24". Una vez encontrados los números, fueron representando de manera figural y numérica los rectángulos construidos, articulando así un modo de pensar teórico y práctico para representar el objeto matemático utilizando dos registros distintos. No obstante, en la segunda pregunta señalan que el jardín con menor perímetro es el de dimensiones.

Figura 20
Producción Grupo E (GE)



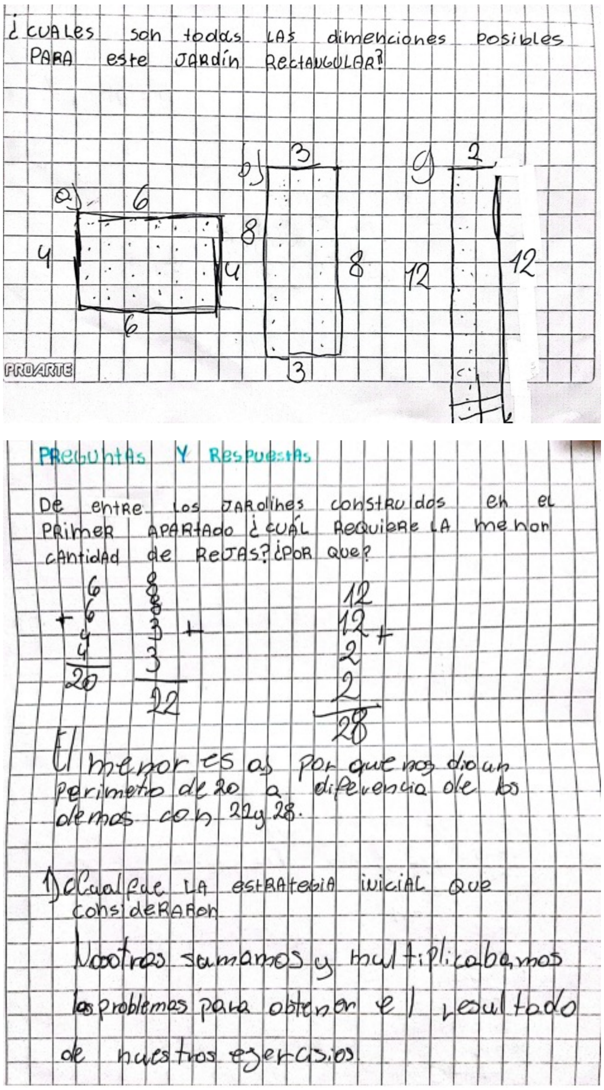
GE señala que su estrategia consistía en “primero pensar en las tablas y ver qué multiplicación nos daba de resultado 24”. Considerando lo antes dicho, encontraron cuatro rectángulos que cumplían la condición entregada, utilizando un modo de pensar analítico aritmético; sin embargo, solo representa un rectángulo de manera figural cuya dimensión es . Aunque en la respuesta para la segunda pregunta señalan que “el que ocupa menos espacio es el de las pelotas amarillas y ocupa menos espacio”, en la producción no se puede visualizar cuál es el rectángulo o las dimensiones que tienen las pelotas amarillas.

Figura 21
Producción Grupo F (GF)



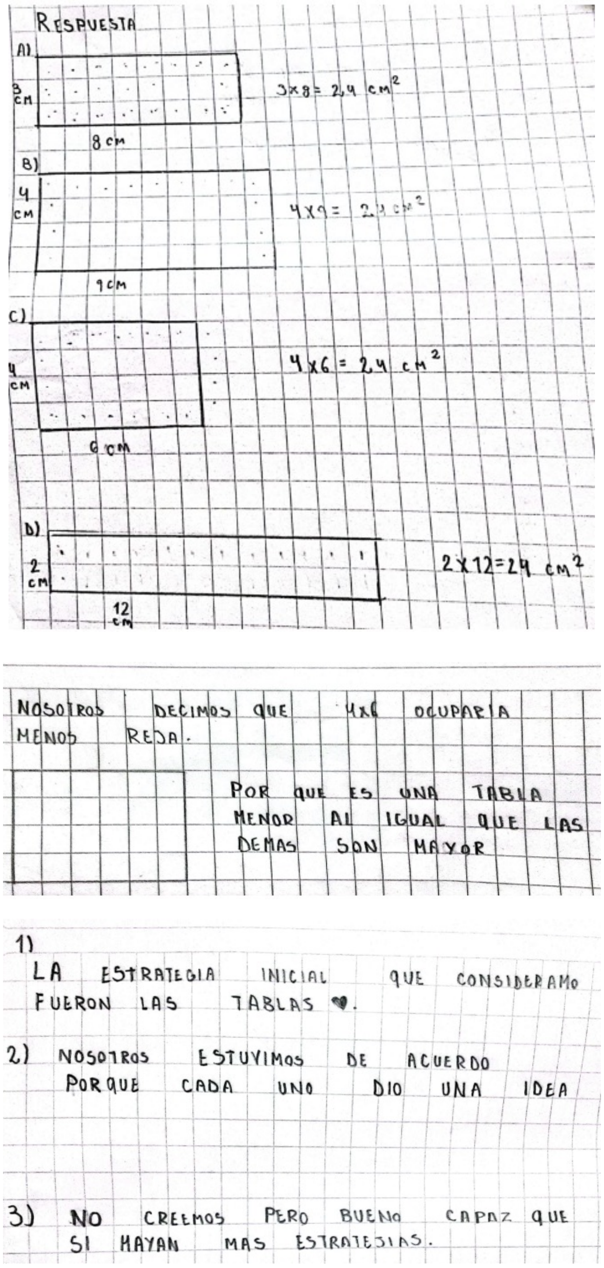
GF articula un modo de pensar sintético geométrico y analítico aritmético; sin embargo, no todos los rectángulos que construyeron cumplen la condición entregada, puesto que hay dibujos que muestran que su área es mayor de , como es el caso del rectángulo de dimensiones , y . Por eso, en la descripción de su estrategia manifiestan sumar porque estaban construyendo y diseñando los rectángulos a partir del perímetro. A pesar de haber construido los rectángulos considerando el perímetro, respondieron que el rectángulo de dimensiones es aquel que tiene menor metros de contorno.

Figura 22
Producción Grupo G (GG)



En la producción de GG se puede observar que se determinaron tres de cuatro rectángulos. En un principio manifiestan un modo de pensar práctico, sintético geométrico, ya que al dibujar los rectángulos hay un conteo de cuadrados unitarios para verificar que efectivamente la medida de la superficie fuese . Describen que “nosotros sumamos y multiplicábamos los problemas para obtener el resultado de nuestros ejercicios”, con lo descrito evidencia un modo de pensar analítico aritmético. En síntesis, los y las estudiantes de GG articulan un modo de pensar sintético geométrico con un modo analítico aritmético para resolver el problema.

Figura 23
Producción Grupo H (GH)



GH representa pictóricamente los cuatro rectángulos diferentes con las dimensiones encontradas con tal de que su área sea 24 . Los integrantes de este grupo señalan que "la estrategia inicial que consideramos fueron las tablas", entonces, a partir de esa información determinaron las dimensiones del largo y ancho para representarlos de forma geométrica. Posteriormente, dibujaron el rectángulo con menor medida utilizando los cuadrados de la hoja sin señalar la medida, por lo que se evidencia un pensamiento sintético geométrico para responder a la pregunta.

La sesión 4 tenía por objetivo comparar diferentes rectángulos dado el perímetro y/o área, los y las estudiantes expusieron brevemente las estrategias para la construcción y diseño de rectángulos de área , donde se llegó al siguiente acuerdo con respecto a la primera pregunta:

- ¿Qué pares de números naturales al multiplicarlos nos dan como producto 24?

Asimismo, para articular los modos de pensar manifestados en los y las estudiantes en el desarrollo de la actividad con el modo analítico estructural, a través de una discusión grupal a nivel de curso se estableció el siguiente plan para construir distintos rectángulos dada el área:

- ¿Qué pares de números al multiplicar nos dan como producto el valor del área?
- Donde reemplazamos el área por el valor dado según el problema.

En relación con la segunda pregunta, se le preguntó al estudiantado qué concepto tuvieron en cuenta para responder y determinar el rectángulo que ocupará la menor cantidad de rejas. Tal como se evidenciaba en las producciones de los y las estudiantes, estos utilizaron el concepto de perímetro, ya que al colocarse las rejas en los bordes del jardín rectangular se estaba calculando la longitud del contorno.

Para finalizar, hay que mencionar que no se pudieron implementar todas las tareas descritas en el desarrollo y cierre de la clase, dado que se tuvieron que realizar actividades institucionales. Por lo tanto, en esta secuencia didáctica, los y las estudiantes no alcanzaron a construir ni diseñar diferentes rectángulos dado el perímetro para comprobar que el cuadrado es aquel que tiene mayor área, aunque en la primera sesión se tuvo una primera aproximación a esta idea.

4. CONCLUSIONES

La secuencia didáctica se presentó como una propuesta basada en la Teoría de Modos de Pensamiento adecuada a estudiantes de 5° básico para indagar en los modos de comprender el pensamiento que prevalece en estos estudiantes para construir y diseñar diferentes rectángulos dado el perímetro y/o área, trabajando de manera colaborativa en grupos de 3 o 4 estudiantes.

Los resultados, en cuanto a la diversidad de producciones y estrategias elaboradas por los estudiantes, demuestran que el estudiantado piensa en un modo teórico y analítico numérico la construcción y diseño de rectángulos dado el perímetro. Para lograr una articulación con el modo analítico estructural se generalizó el plan construido utilizando un lenguaje algebraico acorde al nivel trabajo. Cabe mencionar que para responder cuál rectángulo es más grande, se tuvo que 2 de los 6 grupos lograron una articulación con el modo sintético geométrico, ya que representaron pictóricamente el rectángulo contando los cuadrados unitarios.

En relación con la construcción y diseño de rectángulos dada el área, en el desarrollo de la actividad los y las estudiantes manifiestan una articulación entre los tres modos de pensar. Con respecto al pensamiento práctico, los y las estudiantes dibujaron los rectángulos con sus respectivas dimensiones, considerando que el rectángulo se compone por cuadrados unitarios y el total de estos corresponde a la medida de la superficie. Así también, explicitaron las multiplicaciones de dos números naturales cuyo producto fuese 24, donde esto hace referencia al modo de pensar teórico, analítico aritmético. Además, para construir esta estrategia tuvieron presente la relación de esto quiere decir que manifiestan un modo de pensar analítico estructural, logrando una comprensión profunda con respecto al trabajo con áreas de rectángulo.

Sobre los elementos matemáticos que propiciaron el tránsito de un modo de pensar a otro en la construcción de rectángulos dado el perímetro, este fue la suma, ya que la estrategia que prevalecía en el estudiantado se relacionaba directamente con dicha operación, mientras que la multiplicación fue de gran relevancia en la construcción dada el área porque les permitía obtener la cantidad de cuadrados unitarios sin tener la necesidad de contar uno a uno.

Por otra parte, si bien los y las estudiantes desarrollaron estrategias para responder a lo pedido mostrando comprensión en los conceptos de perímetro y área en un determinado contexto, hay que resaltar que en la mayoría de los grupos utilizaban una unidad de medida distinta a lo que planteaba el problema, puesto que muchos respondían con o, e incluso algunos grupos no incorporaron la unidad de medida, a pesar de estar explícito en el problema que el perímetro y el área estaban entregadas en metros y metros cuadrados.

Considerando los aspectos curriculares, se espera que los y las estudiantes sean capaces de abordar de manera creativa y flexible la solución de problemas sin tener que entregarles una fórmula de manera explícita. La secuencia didáctica permitió que el estudiantado, de manera colaborativa, elaborara un plan para construir los rectángulos a partir del área y/o perímetro sin tener que el docente intervenga en esto, dado que en los textos de estudio se señalaba de manera inmediata cómo podían construir los diferentes rectángulos.

La relevancia de esta propuesta didáctica basada en la Teoría Modos de Pensamiento permitió visualizar la forma de pensar en los estudiantes de 5° básico a través de sus representaciones para resolver un problema. La manera en que el estudiantado abordó las situaciones planteadas es totalmente distinta a lo que mostraban en los textos de estudio, puesto que en estos libros predominaba un registro tabular señalando el largo, ancho, perímetro y área para la construcción y diseño de los diferentes rectángulos. Por eso, como profesores de Matemática es nuestro deber saber cómo piensan nuestros estudiantes para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje sin imponer un tipo de registro sobre otro.

Para finalizar, en cuanto a las proyecciones para esta propuesta didáctica, los conceptos de perímetro y de área pueden ser abordados en niveles superiores; por ejemplo, en Segundo medio, cuando se trabaja problemas asociados a maximizar área utilizando funciones cuadráticas, o en los cursos de educación superior, utilizando derivadas de una función cuadrática.

Referencias

Astorga, M., y Parraguez, M. (2019). Las cónicas en métricas no euclidianas: una mirada desde la teoría de los modos de pensamiento. Transformación, 15(1), 39-51.

Ministerio de Educación. (2012a). Bases Curriculares Primero a Sexto Básico. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

Ministerio de Educación. (2012b). Programa de Estudio Matemática 5° Básico. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18980_programa.pdf

Ramírez, C., Oktaç, A., y García, C. (2006). Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19, 413-418.

Randolph, V. N., y Parraguez, M. C. (2019). Comprensión del sistema de los números complejos: Un estudio de caso a nivel escolar y universitario. Formación universitaria, 12(6), 57-82. https://doi.org/10.4067/S0718-50062019000600057

Rueda, K. L., y Parraguez, M. (2014). La compuesta de dos simetrías con ejes secantes, ¿es una rotación?: Una reflexión desde la teoría de los modos de pensamiento. En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 309-319). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), The Teaching of Linear Algebra in Question (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

VOLÚMEN 16
N°2
AGOSTO 2024

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA