VOLÚMEN 16
N°3
DIC 2024

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

ÍNDICE

sochiem

Sociedad Chilena de Educación Matemática

Revista Chilena de Educación Matemática

ISSN 2452-5448 Versión en línea

Chile

https://doi.org/10.46219/rechiem.v16i3.140
Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448

SENDEROS MATEMÁTICOS Y ACTITUDES HACIA LA MATEMÁTICA, EFECTOS DE UNA INTERVENCIÓN EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA DE LA REGIÓN DE ÑUBLE

MATH TRAILS AND ATTITUDES TOWARDS MATHEMATICS, EFFECTS OF AN INTERVENTION IN PRIMARY EDUCATION STUDENTS IN THE ÑUBLE REGION

Jonathan Parra-Muñoz
jonathanparra@unach.cl
https://orcid.org/0009-0000-8129-4693
Magister en Didáctica de la Matemática, Universidad Católica del Maule. Pedagogía en Matemática y Computación, Universidad Adventista de Chile, Chillán, Chile.

Eduardo Gutiérrez-Turner
eduardogutierrez@unach.cl
https://orcid.org/0000-0002-2983-0513
Doctor (c) en estadística, Universidad de Valparaíso.
Facultad de Educación, Universidad Adventista de Chile, Chillán, Chile.

RESUMEN

Este estudio tiene como objetivo comparar las actitudes hacia la matemática de estudiantes de octavo año básico antes y después de la implementación de senderos matemáticos utilizando la aplicación MathCityMap, así como las diferencias entre hombres y mujeres. Se utilizó el instrumento Inventario de Actitudes hacia la Matemática (IAM) sobre una muestra de 91 estudiantes de 13 y 14 años de edad pertenecientes a 4 colegios de la región de Ñuble en Chile. Se observaron mayores niveles de Incapacidad percibida para la matemática, Ansiedad ante las matemáticas y Emociones negativas provocadas por las matemáticas en las mujeres ($p<0.001$) y mayores niveles de Competencia percibida en matemática y Motivación intrínseca hacia las matemáticas en los hombres. Después de participar en la intervención, las mujeres presentaron una disminución significativa en la Orientación motivacional hacia el yo ($p=0.037$) y los hombres en Competencia percibida en Matemática ($p=0.014$).

Palabras clave:
Sendero Matemático, MathCityMap, Actitud, Matemática

ABSTRACT

This study aims to compare the attitudes towards mathematics of eighth-grade students before and after implementing Mathematics Trail using the MathCityMap application and the differences between men and women. The Inventory of Attitudes towards Mathematics (IAM) instrument was used on a sample of 91 students of 13 and 14 years of age belonging to 4 schools in the Ñuble region in Chile. Higher levels of Perceived Math Inability, Math Anxiety and Negative Emotions Provoked by Mathematics were observed in women ($p<0.001$) and higher levels of Perceived Math Competence in Mathematics and Intrinsic Motivation toward Mathematics in men. After participating in the intervention, women presented a significant decrease in Self-Oriented Motivational Orientation ($p=0.037$) and men in Perceived Math Competence in Mathematics ($p=0.014$).

Keywords:
Mathematics trails, MathCityMap, Attitude, Mathematics

Recibido 07 de Septiembre 2023 Aceptado 26 Noviembre 2024

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática es de vital importancia pues fomenta la creatividad, el razonamiento lógico y el pensamiento cognitivo (Sachdeva y Eggen, 2023). Aprender matemática en la escuela proporciona al estudiante las habilidades y capacidades básicas de resolución de problemas que favorecerá la adquisición de conocimientos de otras materias (Schifter, 2001) y se correlaciona con los logros laborales y sociales, influyendo en las oportunidades profesionales futuras (Moustafa et al., 2017). Debido a sus grandes beneficios, la enseñanza de la matemática se incluye como materia básica en el plan de estudios chileno y en casi todos los planes de estudios del mundo (Raza y Reddy, 2021).

Desde los niveles iniciales hasta los más superiores, la matemática es considerada una disciplina difícil de aprender (Farias y Pérez, 2010). A medida que los estudiantes avanzan de nivel académico se observan actitudes más negativas hacia el aprendizaje de las matemáticas, se va perdiendo el interés y la utilidad de las matemáticas presenta un descenso significativo (Núñez et al., 2005).

Respecto a esto, diversos autores señalan que hay muchos estudiantes que experimentan altos niveles de ansiedad y fobia hacia las matemáticas, lo que los lleva a evitar participar en tareas matemáticas (Elbaek et al., 2019; Lee y Johnston-Wilder, 2014). Estas dificultades pueden verse influenciadas por factores cognitivos como el funcionamiento intelectual, la motivación y las habilidades de memoria, así como por factores emocionales (Harskamp, 2014).

Una consecuencia de esto se puede observar en los bajos resultados obtenidos a nivel nacional en las pruebas estandarizadas internacionales, como por ejemplo en el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA) del año 2009: de las 36 preguntas de Matemáticas, el 47% fueron contestadas erróneamente por más del 70% de los estudiantes chilenos, especialmente en la resolución de problemas contextualizados a la vida real (Henríquez et al., 2015), destacando el área de la geometría como una de las más descendidas (Pino-Fan y Cordero, 2015; Rocha, 2020).

Los bajos resultados en matemática se han investigado por años, evidenciando la falta de aplicabilidad en la enseñanza de la matemática y también la relación que existe entre lo afectivo-emocional, motivacional y capacidades frente a la asignatura de Matemática, lo que produce como consecuencia un bajo rendimiento académico (Cueli et al., 2014; Inzunza y Reyes, 2016). Al respecto, Tacilla et al. (2020) afirman que los componentes que influyen directamente en el aprendizaje son: las actitudes, los esfuerzos, las motivaciones, las emociones, las habilidades cognitivas y las expectativas de éxito. De estos componentes, Corredor y Bailey (2020) destacan la motivación intrínseca, extrínseca y social como las más importantes causales del rendimiento académico en matemática, y que también aportan para que los estudiantes puedan afrontar la vida con autonomía y responsabilidad.

Por otra parte, los estudios que han realizado una comparación por sexo reportan que los niños mostraron un autoconcepto de capacidad matemática más alto que las niñas (Casanova et al., 2021; Geary et al., 2019), y que los niños tienen una mayor competencia percibida en matemáticas, están más motivados intrínsecamente y exhiben niveles más bajos de ansiedad (Rodríguez et al., 2020; Yu et al., 2024). Por su parte, las niñas tienden a exhibir actitudes menos positivas hacia las matemáticas que los niños, con menor motivación, peor percepción de competencia y mayores tasas de ansiedad (Leder, 2017; Steinmayr et al., 2019; Valle et al., 2016). La relación entre las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico difiere entre niños y niñas, siendo el poder explicativo de las actitudes hacia las matemáticas más significativo en los niños que en las niñas (Nurlu, 2017; Samuelsson y Samuelsson, 2016).

Si a todo lo anteriormente mencionado se le suman los métodos de enseñanza tradicionales, las clases superpobladas y la falta de materiales de aprendizaje adecuados, nos encontramos con mayores dificultades de los estudiantes para aprender matemáticas (Ramaa, 2014; Waswa y Al-Kassab, 2023). En particular, en Chile se ha generado una tradición en la forma de articular el contenido matemático, reduciendo la enseñanza a un trabajo en algoritmos descontextualizados que no permite a los estudiantes comprender el rol de la matemática en la sociedad, basándose en la repetición de conceptos y algoritmización, donde el docente es el mayor participante del proceso de enseñanza (Aravena, 2001). Esta forma de trabajo, arraigada en los sistemas educativos chilenos, ha tenido como consecuencia que los estudiantes no logren desarrollar capacidades y competencias requeridas para enfrentarse a una sociedad en cambio permanente. Las críticas por esta problemática se han enfocado en la formación inicial del profesorado, carente de resolución de problemas y modelización geométrica (Aravena y Caamaño, 2007).

La Evaluación Nacional Diagnóstica (END) de formación inicial docente en Chile reveló que una proporción significativa de futuros profesores de Matemáticas tienen "una deuda" con el logro de conocimientos disciplinares didácticos, lo que potencialmente conlleva consecuencias negativas en el sistema educativo, siendo en el área de Geometría donde se obtiene el menor porcentaje de logro en los años 2017, 2018 y 2019 con un 9%, 23% y 15% de logro respectivamente en el plan regular de estudios (Gaona et al., 2024).

Blanco y Blanco (2020) señalan que la matemática se debe reconocer en el entorno, para ello se debe mirar la ciudad con ojos matemáticos. De manera muy particular en geometría, es de suma importancia ver la aplicación en el mundo real, ya que está relacionada con la necesidad del ser humano por comprender su mundo. Gamboa y Ballestero (2009) destacan que la aplicación de la geometría en la vida cotidiana muchas veces pasa inadvertida durante la enseñanza de esta disciplina.

Diversas estrategias se han propuesto en la literatura para mejorar el aprendizaje y la comprensión de conceptos matemáticos. Encontramos, por ejemplo, la utilización de diversos enfoques pedagógicos (Bray y Tangney, 2013; Santos, 2022), la integración de la tecnología (Santos, 2022; Santos-Trigo et al., 2015; Serpe y Frassia, 2020) y el modelamiento matemático (Suh, 2021; Kissane, 2020). De entre ellas, una que ha ganado popularidad en el último tiempo para abordar las problemáticas de descontextualización y malas actitudes hacia la matemática, es la implementación de senderos matemáticos (Gurjanow y Ludwig, 2020). Un sendero matemático es un paseo en el que se pueden descubrir y resolver problemas matemáticos sobre objetos reales. Los senderos matemáticos son parte de la educación al aire libre, y se pueden utilizar en el contexto escolar para ofrecer una experiencia en la vida real además de los libros de texto (Mobile Math Trails in Europe [MoMaTrE], s. f.).

Los senderos matemáticos fueron popularizados principalmente por Shoaf et al. (2004), quienes vieron en ellos un potencial para hacer que los estudiantes trabajen cooperativamente y puedan experimentar la matemática en un entorno no amenazante. Además, los senderos matemáticos proponen tareas de modelamiento matemático, caracterizadas por tener una alta demanda cognitiva ya que están completamente ligadas a otras competencias transversales como leer, comunicar, diseñar y aplicar estrategias de resolución de problemas, o de trabajo matemático como razonar, calcular, entre otras (Niss, 2003). También aportan a los estudiantes una comprensión de la matemática presente en el mundo y en la sociedad y, consecuentemente, motivan al estudio de la matemática (Blum, 2007).

Diversos autores alrededor del mundo han corroborado que al realizar un sendero matemático aumenta la motivación y la actitud positiva frente a la asignatura. En Portugal, Barbosa y Vale (2020) señalan que estos pueden promover actitudes positivas hacia las matemáticas y ayudan a tener una visión más amplia de las conexiones del mundo que nos rodea. En Turquía, Fessakis et al. (2018) mencionan que estos tuvieron un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes y contribuyeron a la transferencia del saber escolar a situaciones auténticas. En Indonesia y Alemania, Cahyono y Ludwig (2017; 2019) concluyen que la implementación del sendero matemático utilizando dispositivos móviles forma una combinación exitosa para generar una situación agradable y atractiva para que los estudiantes experimenten en el mundo real con las matemáticas. En Italia, Ariosto et al. (2021) explican que los estudiantes pudieron aplicar modelados en la ciudad y aprender matemática, y que los estudiantes consideran las clases al aire libre como viajes, divirtiéndose con las matemáticas.

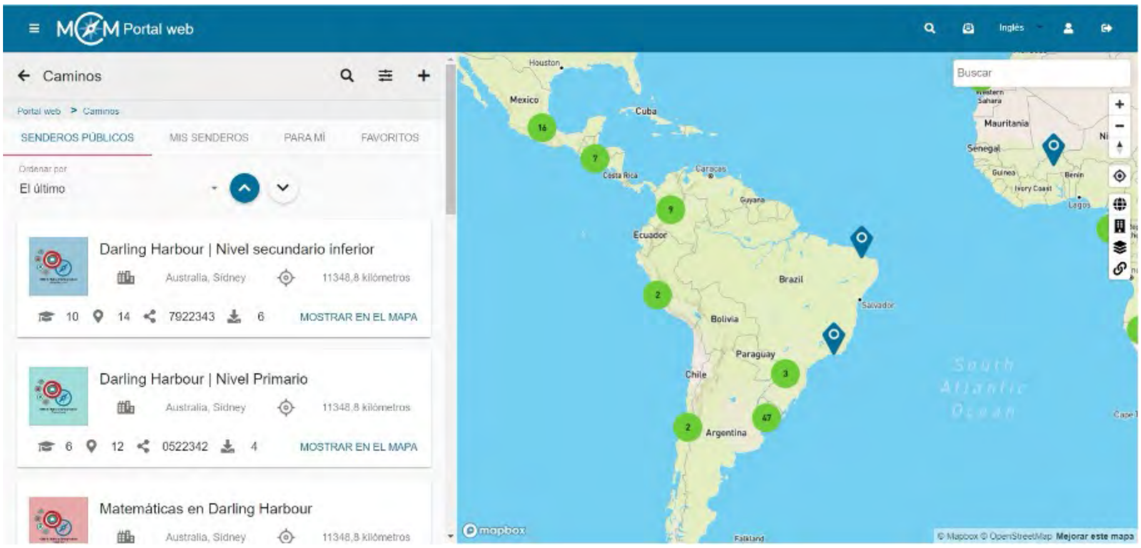
Desde el año 2012 se encuentra disponible el portal web MathCityMap (https://mathcitymap.eu/) que fue presentado por primera vez en el proyecto MCM-Project llevado a cabo por la IDMI Goethe-University Frankfurt, Alemania, por el profesor Dr. Matthias Ludwig, el cual tiene por objetivo que los docentes diseñen senderos matemáticos para sus estudiantes (por medio de la aplicación móvil y portal web), los cuales quedan disponibles para la comunidad en general (ver Figura 1).

A nivel mundial existen alrededor de 1900 senderos matemáticos de acceso abierto y publicados en el portal web, siendo la mayor cantidad de ellos del continente europeo, donde el país que lidera esta lista es Alemania (país fundador), le sigue España y Francia. En América se tiene un total de 95 senderos elaborados, de los cuales solo dos tienen ubicación en Chile, y solo uno en la región de Ñuble.

La ausencia de información regional relacionada con las actitudes hacia la matemática y cómo estas pueden ser afectadas con la metodología de senderos matemáticos ha dado origen al presente estudio, que tiene los siguientes objetivos: 1. Comparar las actitudes hacia la matemática de los estudiantes de educación primaria de la región de Ñuble entre hombres y mujeres, 2. Explorar la influencia de una intervención con senderos matemáticos sobre las actitudes hacia la matemática.

Figura 1

Portal web y app MathCityMap



Nota. Obtenido del portal web MathCityMap

2. METODOLOGÍA

El alcance de esta investigación es de tipo inferencial, con un diseño cuantitativo cuasiexperimental, en el que se aplicó un pre y postest para medir las actitudes hacia la matemática luego de participar en una intervención, utilizándose la metodología de senderos matemáticos con dispositivos móviles y la aplicación MathCityMap. El estudio se realizó de acuerdo con los lineamientos de la Declaración de Helsinki, resguardando la privacidad de los participantes, quienes autorizaron la utilización de sus datos para el estudio. Esta investigación cuenta con la aprobación del Comité de Ética Científico de la Universidad Adventista de Chile.

2.1. Participantes

Los participantes fueron seleccionados a través de un muestreo no probabilístico por conveniencia, de acuerdo a las redes de contacto de los investigadores. La muestra estuvo constituida por 91 estudiantes de cuatro colegios de la región de Ñuble, en Chile. Colegio 1 (24.2%), Colegio 2 (30.8%), Colegio 3 (20.9%) y Colegio 4 (24.2%), de los cuales 50 (54.9%) son damas y 41 (45.1%) son varones. Todos los estudiantes cursaban octavo año de enseñanza básica, con edades de entre 13 y 14 años, quienes accedieron a participar de la investigación firmando el asentimiento informado. Además, se obtuvo el consentimiento de los padres y tutores, quienes autorizaron el uso los datos para la presente investigación.

2.2. Procedimientos e instrumentos

Se realizó una intervención inmersa en la unidad de Geometría, para área y volumen de prismas rectos y cilindros, que consistió en 6 sesiones de acompañamiento al docente. La primera sesión fue para informar sobre el estudio y aplicar el pretest. En la segunda, tercera y cuarta sesión se abordaron los contenidos teóricos necesarios para completar el sendero matemático. En la quinta y sexta sesión, los estudiantes participaron de los senderos matemáticos diseñados exclusivamente para este estudio.

El primer sendero matemático lo realizaron en su propio establecimiento y el segundo fue desarrollado en el campus de la Universidad Adventista de Chile. Los estudiantes fueron organizados en grupos de tres o cuatro estudiantes. Guiados por la aplicación móvil MathCityMap, recorrieron cada una de las tareas georreferenciadas utilizando instrumentos de medición, calculadora y la aplicación móvil para resolver problemas integrando los contenidos del plan de estudio de octavo año básico para Geometría. Al finalizar la sexta sesión se realizó el postest.

Para recopilar la información sobre actitudes hacia la matemática, se utilizaron las subdimensiones de Competencia percibida para las matemáticas, Ansiedad ante las matemáticas, Percepción de utilidad de las matemáticas, Motivación de logro hacia las matemáticas, Motivación intrínseca hacia las matemáticas y Emociones negativas provocadas por las matemáticas del instrumento Inventario de las Actitudes hacia la Matemática (IAM) (Fennema y Sherman, 1976) en su versión en español, validada por González-Pienda et al. (2012). Se consideraron un total de 40 preguntas con escala de Likert de 1 a 5, desde (1) Totalmente falso, (2) Bastante falso, (3) A medias, (4) Bastante cierto, hasta (5) Totalmente cierto. Las preguntas de la encuesta fueron respondidas antes y después de la intervención.

2.3. Análisis de los datos

Se realizó un análisis descriptivo que involucra el cálculo de medias, medianas y desviación estándar para las dimensiones del IAM categorizados por sexo. Se realizaron comparaciones por sexo utilizando el test no paramétrico U de Mann-Whitney, mientras que para comparar las actitudes hacia la matemática entre el pre y el postest se utilizó el test de rango con signo de Wilcoxon para cada dimensión del IAM agrupados por sexo. Todos los análisis fueron realizados con un nivel de significancia de 0.05, utilizando el software R-studio versión 2022.7.1.

3. RESULTADOS

En la Tabla 1 y en la Figura 2 se muestran los resultados para las dimensiones del IAM en el pretest, categorizados por sexo. Las mujeres presentan una mayor Incapacidad percibida (3.26±1.19), mayor nivel de Ansiedad ante las matemáticas (3.48±0.93) y mayores Emociones negativas provocadas por las matemáticas (2.98±1.07) comparadas con las obtenidas por los hombres, de (2.39±0.91), (2.48±0.96) y (2.12±0.91), respectivamente. Por su parte, los hombres presentaron mayor Competencia percibida en matemática (4.18±0.71) y mayor Motivación intrínseca hacia las matemáticas (3.54±0.74) que las mujeres, con (3.44±0.99) y (2.86±0.85), respectivamente. Todas estas diferencias fueron estadísticamente significativas ($p< .001$). No se observaron diferencias significativas en las subdimensiones de Utilidad de las matemáticas para el futuro, Orientación motivacional hacia el yo, Interés por evitar ser el mejor y Atribución del éxito – fracaso a la capacidad del estudiante.

Tabla 1

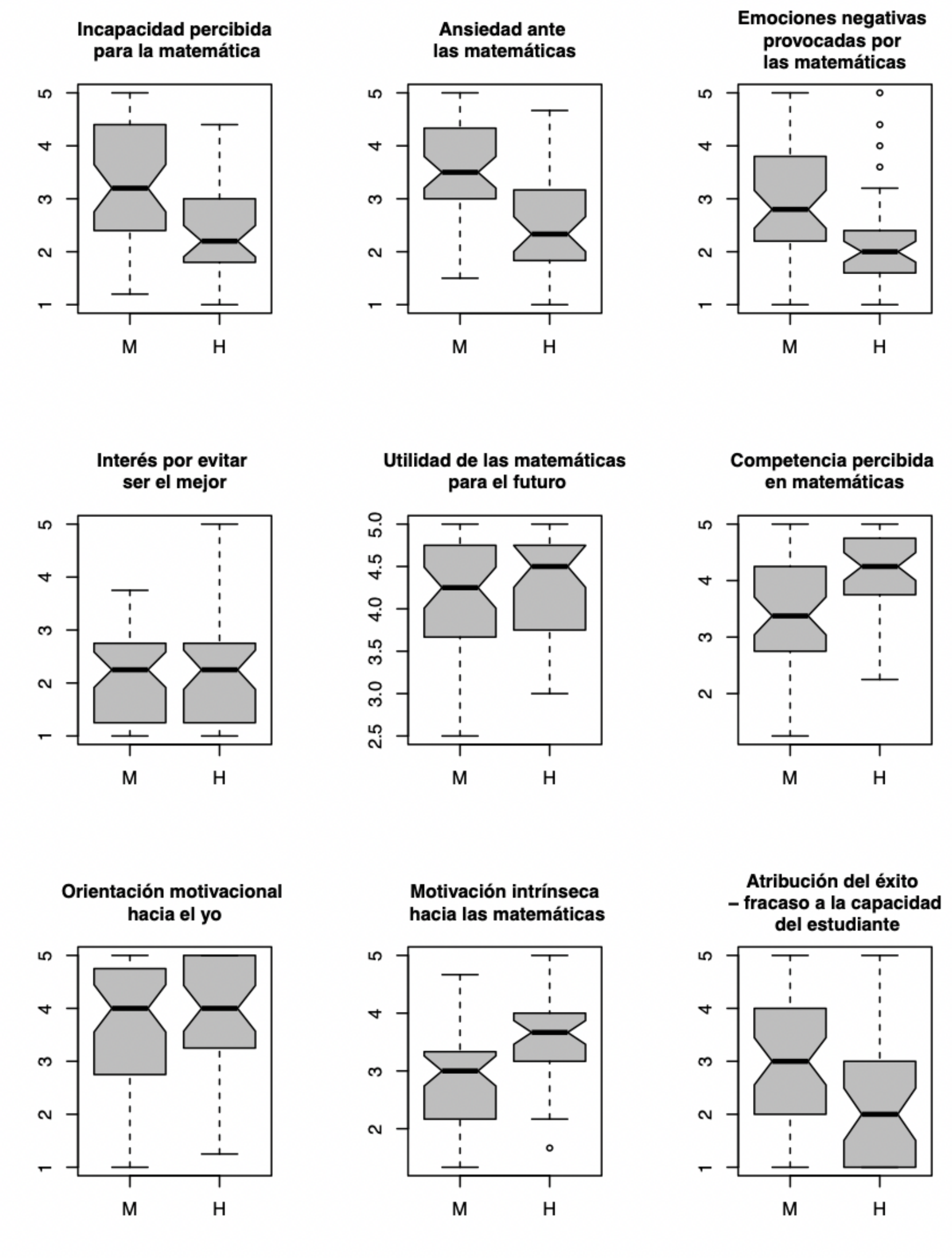
Dimensiones del IAM en el pretest entre hombres y mujeres

	Hombres (n=41)			**Mujeres (n=50)**			**U de Mann-Whitney**	
	Md	Me	DE	Md	Me	DE	U	P
Incapacidad percibida para la matemática	2.20	2.39	0.91	3.20	3.26	1.19	597	< .001
Utilidad de las matemáticas para el futuro	4.50	4.28	0.63	4.25	4.11	0.76	908	0.346
Competencia percibida en matemáticas	4.25	4.18	0.71	3.38	3.44	0.99	577	< .001
Orientación motivacional hacia el yo	4.00	3.93	1.02	4.00	3.63	1.24	898	0.308
Motivación intrínseca hacia las matemáticas	3.67	3.54	0.74	3.00	2.86	0.85	565	< .001
Ansiedad ante las matemáticas	2.33	2.48	0.96	3.50	3.48	0.93	472	< .001
Interés por evitar ser el mejor	2.25	2.24	1.08	2.25	2.17	0.86	987	0.760
Atribución del éxito – fracaso a la capacidad del estudiante	2.00	2.34	1.28	3.00	2.85	1.30	786	0.054
Emociones negativas provocadas por las matemáticas	2.00	2.12	0.91	2.80	2.98	1.07	516	< .001

Nota. Elaboración propia.

Figura 2

Comparación de las dimensiones de IAM entre mujeres y hombres



Nota. Elaboración propia.

En las Tablas 2 y 3 se muestran los resultados del pre y postest para las mujeres y hombres, respectivamente. No se observaron cambios estadísticamente significativos en las dimensiones del IAM para las mujeres, excepto en la subdimensión de Orientación motivacional hacia el yo ($p=0.037$), donde presentaron en una media de 3.63±1.24 puntos en el pretest y 3.39±1.28 en el postest. En el caso de los hombres, solo se observó una disminución significativa en la subdimensión de Competencia percibida en matemática ($p=0.014$), donde obtuvieron una media de 4.18±0.71 puntos en el pretest y 3.96±0.80 puntos en el postest.

Tabla 2

Dimensiones del IAM de las mujeres en el pre y postest

	Pretest (n=50)			**Postest (n=50)**			**Rangos Wilcoxon**	
	Md	Me	DE	Md	Me	DE	W	p
Incapacidad percibida para la matemática	3.20	3.26	1.19	3.20	3.21	1.18	366	0.838
Utilidad de las matemáticas para el futuro	4.25	4.11	0.76	4.00	3.99	0.72	446	0.272
Competencia percibida en matemáticas	3.38	3.44	0.99	3.50	3.29	1.08	579	0.202
Orientación motivacional hacia el yo	4.00	3.63	1.24	3.63	3.39	1.28	514	0.037
Motivación intrínseca hacia las matemáticas	3.00	2.86	0.85	3.00	2.89	0.94	457	0.494
Ansiedad ante las matemáticas	3.50	3.48	0.93	3.33	3.40	0.87	547	0.551
Interés por evitar ser el mejor	2.25	2.17	0.86	2.50	2.42	0.88	320	0.063
Atribución del éxito – fracaso a la capacidad del estudiante	3.00	2.85	1.30	2.50	2.69	1.39	324	0.443
Emociones negativas provocadas por las matemáticas	2.80	2.98	1.06	2.80	2.96	1.04	532	0.926

Nota. *Elaboración propia.*

Tabla 3

Dimensiones del IAM de las mujeres en el pre y postest

	Pretest (n=41)			**Postest (n=41)**			**Rangos Wilcoxon**	
	Md	Me	DE	Md	Me	DE	W	p
Incapacidad percibida para la matemática	2.20	2.39	0.91	2.20	2.38	0.93	332	0.786
Utilidad de las matemáticas para el futuro	4.50	4.28	0.63	4.25	4.18	0.67	276	0.380
Competencia percibida en matemáticas	4.25	4.18	0.71	4.25	3.96	0.80	441	0.014
Orientación motivacional hacia el yo	4.00	3.93	1.02	3.75	3.71	1.06	378	0.168
Motivación intrínseca hacia las matemáticas	3.67	3.54	0.74	3.50	3.46	0.69	433	0.553
Ansiedad ante las matemáticas	2.33	2.48	0.96	2.50	2.58	0.70	270	0.461
Interés por evitar ser el mejor	2.25	2.24	1.07	2.00	2.18	1.07	304	0.459
Atribución del éxito – fracaso a la capacidad del estudiante	2.00	2.34	1.28	2.00	2.16	1.02	307	0.424
Emociones negativas provocadas por las matemáticas	2.00	2.12	0.91	2.20	2.35	0.89	293	0.178

Nota. *Elaboración propia.*

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

El primer objetivo del presente estudio fue comparar las actitudes hacia la matemática entre estudiantes hombres y mujeres. Los resultados evidencian que las mujeres presentan una mayor Incapacidad percibida para la matemática, mayor nivel de Ansiedad ante las matemáticas y mayores Emociones negativas provocadas por las matemáticas que los hombres. Esto concuerda con lo reportado por diversos autores que mencionan que las mujeres tienden a exhibir actitudes menos positivas hacia las matemáticas que los hombres, incluida una menor motivación, una peor percepción de competencia y tasas más altas de ansiedad (Casanova et al., 2021; Rodríguez et al., 2020). Por su parte, Geary et al. (2019) reportan que las mujeres tienden a tener mayor ansiedad matemática ante las evaluaciones que los hombres, y que esta ansiedad se mantiene incluso cuando mostraron avances en el rendimiento en matemática. Las diferencias encontradas en actitudes hacia las matemáticas entre hombres y mujeres ponen de manifiesto la necesidad de contar con estrategias diferenciadas que apunten a disminuir las brechas de ansiedad, Emociones negativas provocadas por las matemáticas y percepción de incapacidad, específicamente en las estudiantes mujeres, ya que afecta el rendimiento futuro en matemática y su desempeño en el ámbito profesional y personal (Rosario et al., 2012; Walshaw y Brown, 2012).

Una de las limitaciones de este estudio es que al diseñar los senderos matemáticos se utilizaron aplicaciones relacionadas a trabajos de construcción, jardinería, pintura de estructuras y limpieza de piscinas, los cuales culturalmente son más asociados a hombres que a mujeres. Esto pudo haber afectado la motivación y las Emociones negativas provocadas por las matemáticas de las mujeres hacia el sendero matemático.

Por otro lado, los estudiantes hombres presentaron mayor Competencia percibida en matemáticas y mayor Motivación intrínseca hacia las matemáticas en comparación con las mujeres. Estos resultados concuerdan con lo reportado por Casanova et al. (2021), donde mencionan que los hombres tienen una mayor competencia percibida en matemáticas, están más motivados intrínsecamente y exhiben niveles más bajos de ansiedad en comparación con las mujeres. Valle et al. (2016) añaden que los hombres perciben las matemáticas como más importantes que las mujeres. Por su parte, Lee y Kim (2014) concluyen que los hombres tienen mayor Motivación intrínseca hacia las matemáticas mientras que las mujeres tienen mayor motivación intrínseca para el inglés. A la luz de estos resultados, se puede evidenciar la importancia de la sensibilización de los docentes con respecto a estas diferencias entre los estudiantes hombres y mujeres, de modo que se conozcan y se consideren a la hora de planificar y aplicar estrategias de enseñanza. Por otro lado, también destacamos la importancia de generar políticas que promuevan la igualdad de oportunidades en el acceso a carreras relacionadas con la matemática, especialmente entre los profesores.

El segundo objetivo fue explorar los efectos de una intervención con senderos matemáticos sobre las actitudes hacia la matemática. No se observó un cambio significativo en la Ansiedad ante las matemáticas para las mujeres excepto en la Orientación motivacional hacia el yo; esta dimensión mide la relación que establece el alumno entre su éxito en matemáticas y la autoestima, lo que implica que luego de esta intervención las mujeres le atribuyen menos importancia a esta relación. En cuanto a los hombres, el único cambio observado fue una disminución significativa en la Competencia percibida en matemática, esta tiene relación con el sentimiento de los estudiantes en ser capaces de superar las dificultades que se les plantea. En este sentido, los hombres se sienten menos capaces que antes en resolver los problemas planteados, esto podría encontrar una explicación en que los problemas de la vida real son más complejos de resolver que los que están en papel con datos exactos, ya que en el contexto de senderos matemáticos se debe interactuar con los objetos, medir, observar, etc. En estos escenarios, la precisión juega un papel fundamental pues, por ejemplo, un error de medición puede llevar a un resultado incorrecto. Gurjanow y Ludwig (2020) destacan la importancia de fomentar la medición de objetos y/o lugares en nuestro entorno, ya que estas habilidades suelen representar un obstáculo en el desarrollo de los senderos matemáticos.

Las demás subdimensiones del IAM no presentan un cambio significativo tanto en hombres como en mujeres, mostrando que las intervenciones no tienen un impacto significativo en las actitudes hacia la matemática de los estudiantes que participaron en el estudio. Esto es contrario a lo encontrado en la literatura. Por ejemplo, Barbosa y Vale (2016) afirman que los senderos matemáticos promueven actitudes positivas hacia la matemática y aportan a que los alumnos puedan entrelazar la vida real con la matemática. Así también, Cahyono y Ludwig (2017) concluyen que los senderos matemáticos influyen en la motivación intrínseca y extrínseca de los estudiantes, y que las actividades realizadas con dispositivos móviles son actividades interesantes y de disfrute para estos. Lo anterior puede deberse a que las intervenciones no fueron suficientes para que se produjera un cambio significativo en las actitudes hacia la matemática. Si bien es cierto que los senderos matemáticos fueron realizados en dos momentos, se evidenció poca seriedad por parte de algunos grupos de estudiantes al momento de realizar las actividades, producto de las arraigadas malas actitudes hacia la matemática que presentan los estudiantes y que van aumentando a medida que se avanza en los niveles escolares (Ramírez et al., 2016) y a la falta de trabajo autónomo, que es precisamente lo que tratan de promover los senderos matemáticos.

En consecuencia, la intervención con dos senderos matemáticos utilizando la aplicación MathCityMap con dispositivos móviles no fue suficiente para producir cambios significativos en las actitudes hacia la matemática. Es necesario introducir el modelamiento matemático de manera sistemática en las salas de clase para que al enfrentarse a un problema del mundo real, los estudiantes estén habituados a esta manera de pensar y tengan desarrolladas las habilidades necesarias para superar con éxito estas tareas.

Aunque no se logró un aumento en las actitudes hacia la matemática, se observó en las intervenciones que la aplicación MathCityMap es una herramienta digital potente para trabajar el modelamiento geométrico, la ubicación espacial y el trabajo en equipo. Destacamos la importancia de seguir investigando sobre las actitudes hacia la matemática en la región de Ñuble para llegar a diseñar intervenciones que logren provocar un aumento significativo en las actitudes hacia la matemática.

AGRADECIMIENTOS

Jonathan Parra-Muñoz recibió financiamiento de la Universidad Adventista de Chile, Proyecto de Iniciación, número 155.

Eduardo Gutiérrez-Turner recibió financiamiento de ANID - Subdirección de Capital Humano/Doctorado Nacional/Año 2022 folio 21221664.

5. REFERENCIAS

Aravena, M. (2001). Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica [Tesis doctoral, Departament de Didáctica de la Matemática i de les Ciències Experimentáis. Universitat de Barcelona]. Redinet. http://hdl.handle.net/11162/16728

Aravena, M., y Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca. Revista Estudios Pedagógicos, 33(2), 7-25. https://doi.org/10.4067/S0718-07052007000200001

Ariosto, A., Ferrarello, D., Mammana, M., y Taranto, E. (2021). Math city map: provide and share outdoor modelling tasks. An experience with children. Nuevos horizontes en la enseñanza de las ciencias, 99(1), A13. https://doi.org/10.1478/AAPP.99S1A13

Barbosa, A., y Vale, I. (2016). Math trails: Meaningful Mathematics Outside the Classroom with Pre-Service Teachers. Journal of the European Teacher Education Network, 11, 63-72.

Barbosa, A., y Vale, I. (2020). Math Trails Through digital technology: an experience with pre-service teachers. Research on Outdoor STEM Education in the Digital Age, 47-54. https://doi.org/10.37626/GA9783959871440.0.06

Blanco, L., y Blanco, B. (2020). Mirar la ciudad con ojos matemáticos. Uno-Revista de Didáctica de las Matemáticas, 87, 7-13.

Blum, G. (2007). Modelling and applications in mathematics education. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

Bray, A., y Tangney, B. (2013). Mathematics, technology interventions and pedagogy seeing the wood from the trees. In CSEDU 2013 - Proceedings of the 5th International Conference on Computer Supported Education (vol. 2, pp. 57-63). SCITEPRESS. https://doi.org/10.5220/0004349100570063

Cahyono, A., y Ludwig, M. (2017). Examining motivation in mobile app-supported math trail environments. CERME 10. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93245-3

Cahyono, A., y Ludwig, M. (2019). Teaching and learning mathematics around the city supported by the use of digital technology. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15(1), em1654. https://doi.org/10.29333/ejmste/99514

Casanova, S., Vukovic, R. K., y Kieffer, M. J. (2021). Do girls pay an unequal price? Black and Latina girls' math attitudes, math anxiety, and mathematics achievement. Journal of Applied Developmental Psychology, 73, 101256. https://doi.org/10.1016/j.appdev.2021.101256

Corredor, M., y Bailey, J. (2020). Motivación y concepciones a las que alumnos de educación básica atribuyen su rendimiento académico en matemáticas. Revista Fuentes, 22(1), 127-141. https://doi.org/10.12795/revistafuentes.2020.v22.i1.10

Cueli, M., González-Castro, P., Álvarez, L., García, T., y González-Pineda, J. A. (2014). Variables afectivo-motivacionales y rendimiento en matemáticas: un análisis bidireccional. Revista Mexicana de Psicología, 31(2), 153-163.

Elbaek, L., Majgaard, G., Valente, A., y Khalid, S. (2019). Proceedings of the 13th International Conference on Game Based Learning, ECGBL 2019. Academic Conferences and Publishing International. https://doi.org/10.34190/GBL.19.073

Farias, D., y Pérez, J. (2010). Motivación en la enseñanza de las matemáticas y la administración. Formación Universitaria, 3(6), 33-40. https://doi.org/10.4067/S0718-50062010000600005

Fennema, E., y Sherman, J. (1976). Brief reports: Fennema-Sherman Mathematics attitudes scales: instruments designed to measure attitudes toward the learning of Mathematics by females and males. Journal for Research in Mathematics Education, 7, 324-326. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.7.5.0324

Fessakis, G., Karta, P., y Kozas, K. (2018). Designing Math Trails for enhanced by mobile learning realistic mathematics education in primary education. International Journal of Engineering Pedagogy, 8(2). https://doi.org/10.3991/ijep.v8i2.8131

Gamboa, R., y Ballestero, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4(5), 113-136.

Gaona, J., Miranda, D. G., Vergara, A., Ramírez, P., y Menares, R. (2024). Evaluación de Estándares Didácticos Disciplinares de Futuros Profesores de Matemáticas en Chile: ¿Construyendo un Profesorado Endeudado? Education Policy Analysis Archives, 32(1). https://doi.org/10.14507/epaa.32.7997

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., Chu, F., Scofield, J. E., y Hibbard, D. F. (2019). Sex differences in mathematics anxiety and attitudes: Concurrent and longitudinal relations to mathematical competence. Journal of Educational Psychology, 111(8), 1447–1461. https://doi.org/10.1037/edu0000355

González-Pienda, J. A., Fernández-Cueli, M., García, T., Suárez, N., Fernández, E., Tuero-Herrero, E., y da Silva, E. H. (2012). Diferencias de género en actitudes hacia las matemáticas en la Enseñanza obligatoria. Revista Iberoamericana de Psicología y Salud, 3(1), 55-73.

Gurjanow, I., y Ludwig, M. (2020). Mathematics Trails and Learning Barriers. In G. A. Stillman, G. Kaiser, y C. Erna Lampen (Eds.), Mathematical modelling education and sense-making (pp. 265-276). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_23

Harskamp, E. (2014). The effects of computer technology on primary school students' mathematics achievement: A meta-analysis. In S. Chinn (Ed.), The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties (pp. 383-392). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315740713-38

Henríquez, V. V., Gómez, C. G., Araneda, R. M., Mandiola, E. A., y Oñate, A. S. (2015). Aprender del error es un acierto. Las dificultades que enfrentan los estudiantes chilenos en la Prueba PISA. Estudios Pedagógicos, 41(1), 293-310. https://doi.org/10.4067/S0718-07052015000100017

Inzunza, M., y Reyes, M. (2016). La enseñanza de la geometría en la escuela media chilena: hacia una reflexión en torno a su impacto en la formación ciudadana. Calidad en la educación, 45, 8-39.

Kissane, B. (2020). Integrating technology into learning mathematics: The special place of the scientific calculator. Journal of Physics: Conference Series, 1581 (p. 012070). IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1581/1/012070

Leder, G. C. (2017). Do girls count in mathematics? In Educating Girls: Practice and Research (Vol. 20, pp. 84-97). https://doi.org/10.4324/9781315168395

Lee, C., y Johnston-Wilder, S. (2014). Mathematical resilience: What is it and why is it important? In S. Chinn (Ed.), The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties (pp. 337-345). Routledge. https://www.routledge.com/books/details/9780415822855/

Lee, H., y Kim, Y. (2014). Korean adolescents' longitudinal change of intrinsic motivation in learning English and mathematics during secondary school years: Focusing on gender difference and school characteristics. Learning and Individual Differences, 36, 131-139. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2014.07.018

Mobile Math Trails in Europe [MoMaTrE]. (s. f.). Math Trails. Recuperado el 17 de julio de 2024, de https://momatre.eu/math-trails/

Moustafa, A., Tindle, R., Ansari, Z., Doyle, M., Hewedi, D., y Eissa, A. (2017). Mathematics, anxiety, and the brain. Reviews in the Neurosciences, 28(4), 417-429. https://doi.org/10.1515/revneuro-2016-0065

Niss, M. (2003). 3rd Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project. Mediterranean Conference on Mathematical Education, 115-124.

Núñez, J., González-Pienda, J. A., Álvarez, L., González-Castro, P., González-Pumariega, S., Roces, C., y Rodrigues, L. S. (2005). Las actitudes hacia las matemáticas: perspectiva evolutiva. En Actas do VIII Congreso Galaico-Portugués de Psicopedagoxía (pp. 2389-2396). Universidade do Minho; Universidade da Corunha.

Nurlu, Ö. (2017). Developing a Teachers' Gender Stereotype Scale toward Mathematics. International Electronic Journal of Elementary Education, 10(2), 287-299. https://doi.org/10.26822/iejee.2017236124

Pino-Fan, L. R., y Cordero, F. (2015). Análisis de la enseñanza de la matemática en Chile: Tendencias y desafíos. En L. R. Pino-Fan, y F. Cordero (Eds.), Investigación educativa en Chile: Tendencias y desafíos (pp. 121-146). LOM Ediciones.

Ramaa, S. (2014). Arithmetic difficulties among socially disadvantaged children and children with dyscalculia. In S. Chinn (Ed.), The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties (pp. 146-165). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315740713-18

Ramirez, G., Chang, H., Maloney, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2016). On the relationship between math anxiety and math achievement in early elementary school: The role of problem solving strategies. Journal of experimental child psychology, 141, 83–100. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.07.014

Raza, S. H., y Reddy, E. (2021). Intentionality and players of effective online courses in mathematics. Frontiers in Applied Mathematics and Statistics, 7. https://doi.org/10.3389/fams.2021.612327

Rocha, R. (2020). Los desafíos de la educación matemática en Chile. Revista chilena de educación matemática, 14(2), 1-8.

Rodríguez, S., Regueiro, B., Piñeiro, I., Estévez, I., y Valle, A. (2020). Gender differences in mathematics motivation: Differential effects on performance in primary education. Frontiers in Psychology, 10. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.03050

Rosario, P., Lourenço, A., Paiva, O., Rodrigues, A., Valle, A., y Tuero-Herrero, E. (2012). Prediction of mathematics achievement: Effect of personal, socioeducational and contextual variables. Psicothema, 24(2), 289-295.

Sachdeva, S., y Eggen, P.-O. (2023). "We learn it [mathematics] at school so one thinks that one will use it …". Acta Didactica Norden, 17(3). https://doi.org/10.5617/adno.10308

Samuelsson, M., y Samuelsson, J. (2016). Gender differences in boys' and girls' perception of teaching and learning mathematics. Open Review of Educational Research, 3(1), 18-34. https://doi.org/10.1080/23265507.2015.1127770

Santos, V. (2022). Mathematics and technology: Does it work? In Proceedings of the Asian Technology Conference in Mathematics (pp. 203-217). Mathematics and Technology, LLC. https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85142427164&partnerID=40&md5=03d3c102fb0cd532a12d705632d3c7ab

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., y Aguilar-Magallón, D. (2015). The use of digital technology in extending mathematical problem-solving reasoning. In Communications in Computer and Information Science (Vol. 533, pp. 298-309). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-22629-3_24

Schifter, D. (2001). Learning to see the invisible. In T. Wood, B. Scott Nelson, y J. Warfield (Eds.), Beyond Classical Pedagogy (pp. 109-134). Taylor & Francis.

Serpe, A., y Frassia, M. G. (2020). Task mathematical modelling design in a dynamic geometry environment: Archimedean spiral's algorithm. In Lecture Notes in Computer Science (Vol. 11973, pp. 478-491). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-39081-5_41

Suh, J., Matson, K., Seshaiyer, P., Jamieson, S., & Tate, H. (2021). Mathematical Modeling as a Catalyst for Equitable Mathematics Instruction: Preparing Teachers and Young Learners with 21st Century Skills. Mathematics, 9(2), 162. https://doi.org/10.3390/math9020162

Shoaf, M., Pollak, H., y Schneider, J. (2004). Math Trails. COMAP.

Steinmayr, R., Weidinger, A. F., Heyder, A., & Bergold, S. (2019). Why do girls rate their mathematical competencies lower than boys? Considering grades, competency tests, teacher- and parent-ratings as potentially explaining factors. Zeitschrift fur Entwicklungspsychologie und Padagogische Psychologie, 51(2), 71-83. https://doi.org/10.1026/0049-8637/a000213

Tacilla, I., Vásquez, S., Verde, E., y Colque, E. (2020). Rendimiento académico: universo muy complejo para el quehacer pedagógico. Muro de la investigación, 5(2), 53-65. https://doi.org/10.17162/rmi.v5i2.1325

Valle, A., Regueiro, B., Piñeiro, I., Sánchez, B., Freire, C., y Ferradás, M. (2016). Attitudes towards math in primary school students: Differences depending on the grade and gender. European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education, 6(2), 119-132. https://doi.org/10.3390/ejihpe6020009

Walshaw, M., y Brown, T. (2012). Affective productions of mathematical experience. Educational Studies in Mathematics, 80, 185-199. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9370-x

Waswa, D. W., y Al-Kassab, M. M. (2023). Mathematics learning challenges and difficulties: A students' perspective. In Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (Vol. 418, pp. 311-323). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-99-0447-1_27

Yu, X., Zhou, H., Sheng, P., Ren, B., Wang, Y., Wang, H., y Zhou, X. (2024). Math anxiety is more closely associated with math performance in female students than in male students. Current Psychology, 43(2), 1381-1394. https://doi.org/10.1007/s12144-023-04349-y

https://doi.org/10.46219/rechiem.v16i3.151
Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448

OBSTÁCULOS DE APRENDIZAJE EN LOS NÚMEROS ENTEROS: ANÁLISIS DE LA EJERCITACIÓN DE ESTUDIANTES DE 7° Y 8° BÁSICO

LEARNING OBSTACLES IN INTEGERS: ANALYSIS OF THE EXERCISE OF 7TH AND 8TH GRADE STUDENTS

Matías Cornejo
matias.cornejo2019@umce.cl
https://orcid.org/0009-0003-6116-3655
Profesor de Matemáticas
Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación Chile, Santiago, Chile

RESUMEN

La enseñanza de la matemática es un proceso complejo, los conocimientos adquiridos por los estudiantes pueden variar dependiendo de las representaciones utilizadas o las decisiones didácticas, el aprendizaje puede ser favorecido, o no. El docente debe atender apropiadamente el proceso de enseñanza-aprendizaje que desarrolla en el aula y anticiparse a las dificultades que pueden surgir. Para esto, es necesario conocer las causas y características de los obstáculos que surgen en los estudiantes al aprender nuevos conocimientos. El objetivo del estudio es identificar y clasificar obstáculos epistemológicos y didácticos que se desarrollan en el aprendizaje de los números enteros durante la enseñanza básica. Para la recopilación de información, considerando el currículo vigente en Chile, se realizaron grupos focales a estudiantes de 7° y 8° básico. Los resultados obtenidos muestran obstáculos epistemológicos y didácticos en los conocimientos de los estudiantes, desarrollados en los algoritmos de la sustracción y multiplicación con números enteros.

Palabras clave:
Obstáculos epistemológicos; Obstáculos didácticos; Números enteros; Educación.

ABSTRACT

The teaching of mathematics is a complex process; the knowledge acquired by students can vary depending on the representations used or the didactic decisions. Just as learning can be facilitated, it can also be hindered. The teacher must appropriately address the teaching-learning process in the classroom and anticipate possible difficulties. For this, it is necessary to understand the causes and characteristics of the obstacles that arise in students when learning new knowledge. The study's objective is to identify and classify epistemological and didactic obstacles that arise in learning integers during basic education. For information collection, focus groups were conducted with 7th and 8th-grade students. The results reveal epistemological and didactic obstacles in the student's knowledge, particularly in the algorithms of subtraction and multiplication with integers.

Keywords:
Epistemological obstacles; Didactic obstacles; Integer numbers; Education.

Recibido 25 de Enero 2024 Aceptado 26 Noviembre 2024

1. INTRODUCCIÓN

El trabajo docente en el aula no se limita a entregar información sobre su área, sino que además debe promover que los estudiantes desarrollen conocimientos significativos y tratar los fenómenos que dificultan su aprendizaje. Orrantia (2006) identifica a la aritmética como el área matemática donde los estudiantes desarrollan más dificultades, y que además afectan a otras áreas matemáticas en el futuro, como lo puede ser la geometría, la estadística, etc. Zapatera (2021) evidencia la existencia de obstáculos epistemológicos en la enseñanza de números enteros, en donde los estudiantes los consideran como si fueran números naturales. Es pertinente conocer las instancias en que surgen estos obstáculos, enfocándose en el nivel donde se empieza a enseñar sobre los números enteros y su operatoria. A partir de ellos, nos preguntamos: ¿Qué problemáticas surgen en el proceso de aprendizaje de operaciones aritméticas de números enteros en la escuela? ¿Qué origen o causa tienen estos problemas? Para esto se busca identificar obstáculos epistemológicos y didácticos que se desarrollan en el aprendizaje de los números enteros durante la enseñanza básica, y se indagará una posible causa en los textos escolares. Por lo tanto, se examinarán problemáticas que se manifiestan en el aprendizaje de las operaciones aritméticas en estudiantes de 7° y 8° básico por medio de los errores que presentan los estudiantes al realizar operaciones de números enteros, y se analizarán las distintas formas de representación utilizadas en los documentos escolares en donde se enseñan.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Obstáculos epistemológicos, didácticos y ontogenéticos

El concepto de obstáculo es acuñado por Bachelard (1993) y es definido como aquellos problemas para el aprendizaje que son propios del acto de conocer, que dificultan la enseñanza, interfiriendo con el aprendizaje de los conocimientos reales. Estos obstáculos se pueden abordar tanto en el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro del aula como en el desarrollo histórico de las matemáticas.

Por otra parte, Brousseau (2007) concibe a los obstáculos como conocimientos, los cuales tuvieron validez en un contexto y tiempo específico, pero cuando el campo de implementación crece o cambia, su efectividad se pierde. Estos obstáculos interfieren en el aprendizaje de nuevos conocimientos, ante esto Brousseau expresa que "el obstáculo no desaparece con el aprendizaje de un nuevo conocimiento. Por el contrario, opone resistencia a su adquisición, a su comprensión, frena su aplicación, subsiste en estado latente y reaparece de forma imprevista" (2007, p. 46). El autor les da relevancia a los obstáculos pues, aunque sean dificultades a futuro, tienen una importancia temporal en el aprendizaje de los estudiantes, a diferencia de lo indicado por Bachelard, quien propone rechazarlos desde el principio porque no son verdaderos a posteriori (Cid, 2016).

En la interpretación de Glaeser (1983) sobre los obstáculos epistemológicos, también se consideran como obstáculos los errores, dificultades y desconocimiento de los conocimientos. Esto se distingue de las definiciones previas, ya que se puede considerar como obstáculo la ausencia de conocimientos.

Brousseau (1983) clasifica los obstáculos según el origen de estos, categorizándolos como obstáculos epistemológicos, didácticos y ontogenéticos. Aquellos obstáculos que se presentan en la enseñanza de las matemáticas, que son propios del trabajo matemático, se consideran obstáculos epistemológicos. Los obstáculos que se desarrollen única y exclusivamente a partir del trabajo docente en el aula serán los didácticos, en palabras Brousseau, "los obstáculos de origen didáctico son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo" (1983, p. 73). Los ontogenéticos son aquellos que derivan del desarrollo cognitivo del estudiante.

Glaeser (1983) desarrolla un listado sobre los obstáculos epistemológicos que han evidenciado dentro de las matemáticas en el desarrollo de los números enteros, los cuales son:

1. Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas. No se aceptan números negativos aislados de manera aislada, como en las soluciones a problemas.
2. Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas. Se aceptan los números negativos de forma aislada, pero no se le da un significado real.

3. Dificultad para unificar la recta real. Se les da un sentido a las cantidades negativas, pero se consideran completamente opuestas a lo positivo. Debido a esto se trabaja como dos semirrectas opuestas y no como solo un sistema unificado (Cid, 2016).
4. La ambigüedad de los dos ceros. Se concibe como la existencia de un cero absoluto y un cero arbitrario, los cuales no coexisten en un mismo espacio. No se puede pensar en una cantidad negativa como algo menor que nada, dado que el cero es absoluto.
5. El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas. Las operaciones realizadas con números negativos se centran únicamente a las cuales se pueda aplicar en un contexto real. No se operan de manera abstracta descontextualizada.
6. Deseo de un modelo unificador. La necesidad de encontrar un modelo concreto que justifique tanto la adición como la multiplicación, lo cual no existe.

2.2 Tipos de representaciones

La enseñanza de las matemáticas se puede emplear de distintas formas según las representaciones utilizadas. Jerome Bruner (1969) define tres tipos de representaciones en las cuales los estudiantes aprenden y reproducen sus conocimientos: representaciones concretas, pictóricas y simbólicas.

2.2.1 Representaciones concretas

Son la representación de conocimientos matemáticos mediante la manipulación de objetos u observaciones sobre algún elemento de la vida real. Esta se puede utilizar mediante movimientos y acciones sensoriales (Vidal y Barra, 2019).

Cid (2002, citado por Cid, 2022) propone dos modelos para las representaciones concretas de los números enteros, basados en la clasificación realizada por Janvier (1983). Estos modelos de representación están basados para la estructura aditiva, pero en determinadas situaciones se pueden trasladar a la estructura multiplicativa. Estos modelos son:

Modelos de neutralización: Modelos que utilizan las acciones que se pueden ejercer sobre las cantidades de una magnitud, que poseen dos sentidos, los que se neutralizan entre sí. En este modelo la adición y sustracción se relacionan con la acción de agregar y quitar, respectivamente. Los problemas que surgen en la multiplicación son debido a que los signos de los factores adquieren distinto significado, el primero se refiere al símbolo del número y el otro al sentido de la magnitud. Ejemplos de este modelo son: deudas y haberes, pérdidas y ganancias, etc.

Modelo de desplazamiento: Utiliza el desplazamiento a lo largo de un camino, cuya posición inicial arbitraria no corresponde al inicio o el final del trayecto. La adición corresponde a un desplazamiento en un sentido aplicado desde la posición inicial, mientras que la resta es el desplazamiento en el sentido contrario. En la multiplicación se trabaja a partir de la repetición de movimientos, donde el sentido del segundo factor define el sentido del movimiento. Ejemplos de este modelo son: temperatura, ascensores, altitud por encima o debajo del nivel del mar, etc.

2.2.2 Representaciones pictóricas

Corresponden a la representación de conocimientos utilizando imágenes o esquemas, donde las imágenes y su tratamiento son el contenido en sí. Hay que tener en cuenta que las imágenes de objetos reales, que se utilicen para justificar un contenido por las acciones que se observen en dicha imagen, se consideran de todos modos representaciones concretas (Vidal y Barra, 2019).

Las representaciones pictóricas son las más escasas para los números enteros. Muñoz Cornejo (2019), en su estudio sobre las representaciones en los recursos educativos entregados por el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc), evidencia como representaciones pictóricas el uso de fichas o tarjetas de diferentes colores para diferenciar entre números positivos o negativos, sin embargo, estas representaciones no son tan relevantes, dado que los ejercicios donde se utilizan requieren un trabajo más abstracto.

2.2.3 Representaciones simbólicas

Los conocimientos se representan utilizando símbolos y lenguaje, dotados de significados. Este tipo de representaciones requiere de un lenguaje más preciso del área en el que se utiliza, debido a que se aplican en un contexto más riguroso, con propiedades, significado y reglas. Se conocen también como representaciones abstractas (Vidal y Barra, 2019).

Cid (2022) realiza una recopilación de las diferentes propuestas para la enseñanza de los números enteros, a partir de las clasificaciones de Arcavi y Bruckheimer (1981) y de Crowley y Dunn (1985). Esta clasificación recopila las diversas opciones que utilizan los docentes a la hora de introducir los números enteros en el aprendizaje, abarcando la estructura aditiva y multiplicativa. La siguiente clasificación es una modificación de la recopilación realizada por Cid (2022), cambiando el enfoque y considerando modelos de enseñanza basados en representaciones simbólicas. Los modelos simbólicos son:

Modelo inductivo: A partir de las regularidades en las operaciones aritméticas, los estudiantes crean y completan el funcionamiento de las operaciones aritméticas, pasando desde las operaciones con números positivos a utilizar números negativos. Por ejemplo, en la multiplicación se puede plantear la siguiente secuencia:

$$\begin{aligned} 2\,x\,3 &= 6 \\ 2\,x\,2 &= 4 \\ 2\,x\,1 &= 2 \\ 2\,x\,0 &= 0 \end{aligned}$$

$$2\,x\,(-1) = ?$$

Al completarla, el estudiante puede analizar cómo el resultado se vuelve negativo si se multiplican dos números de distinto signo, pasando de una regularidad a establecer una regla en la multiplicación.

Modelo deductivo: Consiste en expandir el conjunto de los números naturales, el cual los estudiantes ya conocen, integrando el subconjunto de los números negativos. Al integrar los inversos aditivos para los números naturales, se redefinen las operaciones aritméticas y se mantiene la estructura algebraica previa para generar el conjunto final de los números enteros.

Modelo concreto: Se centra en el uso de situaciones cotidianas para que los estudiantes puedan otorgarles sentido y credibilidad a las reglas establecidas en el nuevo conjunto de números enteros. Lo que lo diferencia de ser una representación concreta es su nivel de abstracción pues, a pesar de utilizar situaciones concretas, como pueden ser ejercicios sobre el nivel del mar, sobre deudas o temperatura, su falta de manejo manual por parte del estudiante o el docente lo limita en ese aspecto.

2.3 Números enteros en el currículo escolar

Muñoz (2019) señala que el Mineduc promueve la enseñanza de las matemáticas a partir de modelos concretos, pictóricos y simbólicos (COPISI), que derivan de la clasificación propuesta por Bruner.

Según los Planes de Estudios presentados por el Mineduc (2016a, b, c), los números enteros se enseñan inicialmente en 7° y 8° básico. En 7° básico se enseña el concepto de número entero, además de cómo sumar y restar entre ellos, mientras que en 8° básico se enseña sobre la multiplicación y división de estos.

El conjunto de números enteros es un conocimiento base para la matemática que se enseña en enseñanza media, donde se extienden a otros conjuntos numéricos como los números racionales o reales.

3. MARCO METODOLÓGICO

Se usa un enfoque cualitativo, de carácter interpretativo, en la que mediante el estudio del caso de estudiantes de 7° y 8° básico en un colegio particular subvencionado de Maipú, Chile, se busca identificar obstáculos epistemológicos y didácticos en los conocimientos de números enteros que poseen los estudiantes. Se mandaron solicitudes de entrevistas a diversos establecimientos, y solo este colegio abrió las puertas para el trabajo investigativo.

Para recoger información, se realizaron grupos focales con los estudiantes en los niveles de 7° y 8° básico por separado, siendo dos grupos para cada nivel. En total participaron 34 estudiantes entre los diferentes grupos. Los grupos focales tienen la intención de identificar obstáculos didácticos o epistemológicos en las respuestas de los estudiantes, asociados a la operatoria en los cursos mencionados.

Las preguntas realizadas a 7° básico tratan sobre adición y sustracción de números enteros, mientras que las preguntas para 8° básico incluyen preguntas sobre multiplicación y división. Las preguntas se crearon considerando los posibles problemas de aritmética que puedan presentar los estudiantes, basados en lo publicado por Herrera y Zapatera (2019) y Cid (2016), y en la identificación de obstáculos epistemológicos de Glaeser (1983).

Se espera que los estudiantes tengan conocimientos adecuados sobre lo que ellos consideran un número entero, que reconozcan diferentes situaciones cotidianas en las que sea fundamental el uso de números enteros positivos y negativos, y diferencien entre números positivos, negativos y el 0. Por otra parte, es esperable que unos pocos estudiantes tengan problemas de aritmética según lo aprendido en su nivel, al no tener completamente internalizados dichos contenidos. Algunas de las preguntas realizadas fueron las siguientes (Tabla 1):

Tabla 1

Preguntas según objetivo específico para los grupos focales de 7° y 8° básico

Objetivo específico	**Pregunta**
Caracterizar los errores que presentan los estudiantes al realizar operaciones de números enteros.	• ¿Qué es un número negativo? • ¿Cuál es la relación entre un número positivo y uno negativo? • ¿El 0 es un número positivo, negativo o ninguno? • ¿Cómo se suman los números enteros? ¿Cómo se restan? • ¿Cómo se multiplica y divide con números enteros? ¿Hay algún método que utilicen para estas operaciones?
Establecer una correlación entre los obstáculos de aprendizaje de los estudiantes y las representaciones utilizadas por los textos escolares.	• ¿Conocen ejemplos de la vida cotidiana donde se utilicen los números enteros? • ¿Se puede sumar y restar en los ejemplos de la vida cotidiana? ¿Y qué sucede con la multiplicación y división? • ¿Su docente utiliza ejemplos de la vida cotidiana para trabajar los números enteros? • ¿El uso de situaciones cotidianas facilita o dificulta la resolución de problemas con números enteros?

Nota. *Elaboración propia.*

Para el análisis de la información recopilada en los grupos focales, se clasificaron las respuestas de los estudiantes según si eran obstáculos didácticos, epistemológicos o si pertenecían al listado creado por Glaeser (1983).

Adicionalmente, se realizó una clasificación y análisis de textos escolares de Matemáticas pertinentes a los niveles educativos. Para la clasificación se consideró a los ejercicios y ejemplos propuestos, según las representaciones y modelos utilizados. El análisis de los textos en cuestión se utilizó para justificar o argumentar en cuanto a los obstáculos observados en el grupo focal, comparando definiciones con los procedimientos y respuestas obtenidas por parte de los estudiantes.

4. RESULTADOS

4.1 Grupos focales

Los grupos focales se realizaron con estudiantes de los niveles 7° y 8° básico. Los grupos 1 y 2 corresponden al nivel 7° básico, mientras que los grupos 3 y 4 se conforman de estudiantes de 8° básico. A cada estudiante se le asignó un código “EX”, de tal modo que E1 es el estudiante 1 de ese grupo, y así sucesivamente.

Al preguntarles a los estudiantes de los diversos grupos sobre qué son los números negativos, las respuestas fueron: “un número a la izquierda del 0”; “un número bajo el 0”; “dibujar una recta numérica para ubicar el 0 y señalar que estos son los que se ubican a la izquierda de este” (respuestas de estudiantes de 7° básico) o “un número menor que 0” (respuesta de estudiantes de 8° básico y E5G2 de 7° básico). En las respuestas se puede apreciar que los estudiantes de 7° básico tienden a percibir los números negativos en función de su posición relativa con respecto al cero en lugar de su valor numérico.

Los modelos concretos, utilizados comúnmente para introducir los números enteros, son de la categoría de desplazamiento, ya sea mediante el uso de rectas numéricas o situaciones cotidianas, como el nivel del mar, temperatura, etc. (Cid, 2022). El usar la posición de los números basadas en una recta numérica, vertical u horizontal, con respecto al 0, quien define el centro de esta, es considerada parte de la etapa inicial del aprendizaje, donde los estudiantes no abstraen del todo el valor de los números y utilizan un modelo para tener una referencia posicional.

En una etapa inicial de aprendizaje, es habitual utilizar estos modelos de desplazamiento por parte de los docentes, debido a su facilidad de aprender dada su naturaleza concreta, pero a futuro es necesaria una transición a definiciones abstractas para los números. Considerando que este problema solo fue identificado en estudiantes de 7° básico, quienes aún están en proceso de enseñanza del contenido, no se considera un obstáculo epistemológico, dado que estas definiciones no se evidenciaron en estudiantes de 8° básico, por lo que se asumirá que no desarrolla permanencia y es una transición habitual en los conocimientos, pero que no interrumpe el aprendizaje. Es necesaria una observación del fenómeno por parte del docente responsable en caso de que esta definición no se transforme adecuadamente.

A continuación, en la tabla 2, se muestra las respuestas de los estudiantes que participaron de esta investigación.

Tabla 2

Respuestas de estudiantes de 7° y 8° básico sobre adición y sustracción de números enteros

Pregunta	Grupo - Nivel	Respuestas
¿Cómo se suman los números negativos?	Grupo 1 - 7° básico Grupo 2 - 7° básico Grupo 3 - 8° básico Grupo 4 - 8° básico	“Sumar negativo con negativo da más” * “Se mantiene el signo del mayor y después se resta” *
¿Cómo se restan los números negativos?	Grupo 1 - 7° básico	“No se pueden restar, se sumaría porque los dos son signos negativos, siempre que son del mismo signo se suman. Por ejemplo (-19) -(-1) = (-20)” (E3G1 y E4G1) “Si los signos son iguales, se suman” (E5G1)
	Grupo 2 - 7° básico	“Si el número es menos menos sale un puro menos. Si sale (-3) - (-2) sería (-3) – 2” (E2G2)
	Grupo 3 - 8° básico	“No se pueden restar, se suman” (E5G3) “Al ser de igual signo se suman” (E3G3) “Se suma y se conserva el signo” (E1G3)
	Grupo 4 - 8° básico	“Se suman y se acercan al 0, si lo pasa es positivo” (E1G4)

Nota. Elaboración propia en base a las respuestas de los estudiantes.
*Nota *. Las respuestas presentadas son una síntesis de los diferentes comentarios de los entrevistados en todos los grupos.*

En las respuestas recibidas, se observa cómo los sujetos informantes dominan el algoritmo para la adición con números enteros, pero enfrentan dificultades con la resta. Para la adición, los participantes de los distintos cursos coincidieron en sus respuestas. Aunque expresan verbalmente una idea errónea, al decir que da "más" se refieren a que el valor absoluto del resultado aumenta en vez de que sea mayor el número. No se presentan obstáculos de ningún tipo en la adición.

Las complicaciones encontradas en la sustracción ocurrieron en las entrevistas de ambos niveles. En las entrevistas de 7° básico, ambos grupos presentan un ejemplo de resta, pero operan como si fuera una adición, es decir, suman los valores absolutos y mantienen el signo negativo. En el grupo 1 el razonamiento utilizado fue que si ambos números eran del mismo signo (negativo en este caso), debía sumarse, mientras que en el grupo 2 el procedimiento utilizado es unir ambos símbolos "-" como si fueran uno solo y operar después. El algoritmo utilizado al resolver consiste en transformar los símbolos de resta y del sustraendo en un único símbolo, resultando entonces en una resta de números naturales. Entonces, se puede categorizar los conocimientos sobre resta de números negativos como obstáculos epistemológicos a priori.

En el nivel 8° básico, en las evidencias del grupo 3 también surgen respuestas con obstáculos similares a los observados en el nivel anterior. Esto confirma el hecho de que estos errores se conciben como obstáculos, dada su persistencia en el tiempo y resistencia al cambio. La solución presentada en el grupo 4 explica el procedimiento de la sustracción de un modo distinto al habitual, pero de manera correcta. Utilizando un modelo de desplazamiento, en este caso se aplica la adición tal como en el texto escolar, cambiando el sustraendo por su inverso aditivo y sumando ambos números, considerando que el resultado puede ser negativo o positivo dependiendo de los valores absolutos.

Para los estudiantes de 8° básico además se incluyeron preguntas relacionadas a cómo resolvían ejercicios de multiplicación y división con números enteros, puesto que curricularmente en este nivel se enseñan estas operaciones (Tabla 3).

Tabla 3

Respuestas de estudiantes de 8° básico sobre multiplicación y división de números enteros

Pregunta	Grupo	Respuestas
¿Cómo se multiplican y dividen los números enteros?	Grupo 3	"Se multiplican y si son de igual signo es positivo, si son de distinto signo son negativos" (E2G3) "Si son de igual signo se conserva el signo" (E4G3)
	Grupo 4	"Más y más, menos y menos da positivos, en caso de que no sean iguales es negativo" (E7G4)

Nota. Elaboración propia en base a las respuestas de los estudiantes.

Los estudiantes de ambos grupos mencionaron el uso de la "regla de los signos" como el método que utilizan para resolver ejercicios con estas operaciones. Además, se destaca el uso de mnemotecnias basadas en situaciones de la vida cotidiana para recordar el funcionamiento por parte de E6G3, quien menciona: "el enemigo de mi enemigo es mi amigo", donde enemigo corresponde a números negativos y amigos a positivos.

A pesar del conocimiento de esta regla, una participante responde con un procedimiento erróneo. La respuesta de E4G3 es correcta únicamente si ambos números son positivos, sin embargo, su respuesta es la misma utilizada para definir el algoritmo de la adición. En este escenario se presenta un obstáculo epistemológico, de acuerdo con las definiciones presentadas por Brousseau (1983), puesto que sus conocimientos sobre la suma interfieren con el aprendizaje de un nuevo conocimiento para otras operaciones.

Las entrevistas finalizaron preguntando sobre los tipos de representaciones utilizados en el aula sobre los números enteros. Los estudiantes de los cuatro grupos respondieron que están familiarizados con representaciones relacionadas con el nivel del mar (desplazamiento) y deudas (neutralización). Los estudiantes de 7° básico expresaron que emplear situaciones de la vida cotidiana los ayuda a visualizar de manera más efectiva el funcionamiento de las operaciones matemáticas, mientras que los estudiantes de 8° básico opinan lo contrario, que los ejercicios con modelos concretos dificultan su trabajo y prefieren trabajar con representaciones simbólicas no contextualizadas. Para Bruner, y en palabras de Vidal y Barra (2019), las representaciones simbólicas son un modo que "constituye la tercera forma de representación a la que se aspira llegar, una vez que se ha propiciado el camino desde lo concreto o enactivo hacia lo abstracto mediado por lo icónico" (pp. 34-35). Por lo tanto, se considera que las representaciones empleadas en la educación son transitorias, y en esta situación los estudiantes cambiaron su preferencia de lo concreto a lo simbólico, tal como se esperaba por parte del autor.

4.2 Textos escolares

4.2.1 Texto 7° básico Editorial SM (2020)

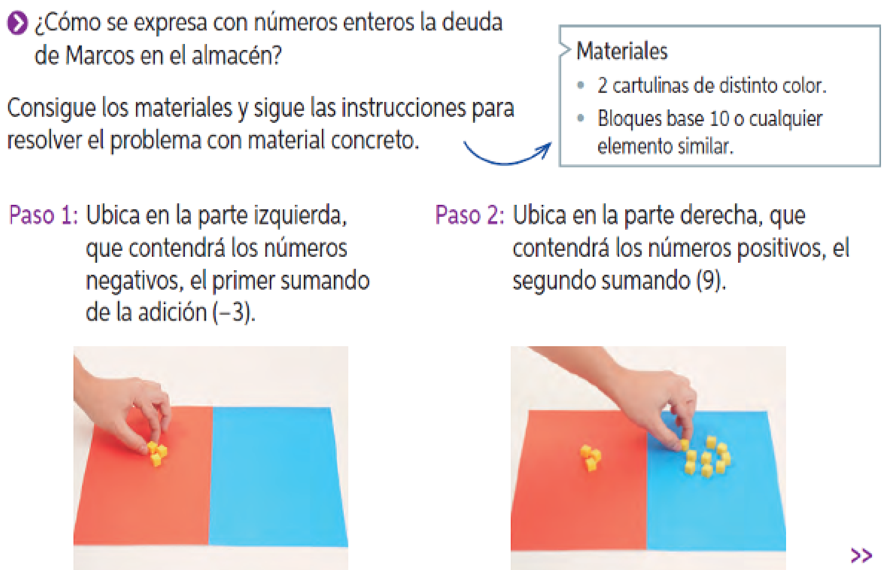
El texto escolar de Matemáticas de la Editorial SM es el documento entregado por parte del Mineduc a establecimientos educativos municipales y particulares subvencionados. Por ende, este libro es el que se encuentra mayoritariamente en las aulas escolares a lo largo del país, atribuyéndose así la relevancia necesaria para su análisis.

Las representaciones que prevalecen en este texto escolar consisten en un 76 % de representaciones simbólicas y un 24 % de representaciones concretas. Entre los modelos más utilizados destaca el uso de situaciones concretas, la operatoria simple y el uso de la recta numérica.

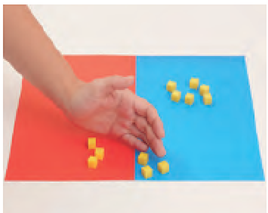
Las actividades de representaciones concretas utilizan fichas bicolor o fichas regulares sobre superficies bicolor. En la siguiente imagen del texto escolar (Figura 1), se muestra una actividad en donde se realizan adiciones de números enteros utilizando el modelo de neutralización. Las cartulinas asignan la positividad o negatividad de las fichas y la cantidad de estas corresponde al valor numérico.

Figura 1

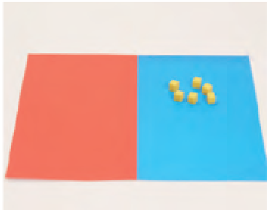
Actividad de adición entre números enteros con material concreto



>> **Paso 3:** Cancela los cubos que puedas asociando uno negativo con uno positivo y retirándolos del tablero, como se muestra en la imagen.



Paso 4: Cuenta los cubos que quedaron en el tablero y asócialos con el signo que corresponda según su ubicación. Así, obtendrás el resultado de la adición.



Por lo tanto, el pedido del almacén fue de 6 sacos, ya que $-3 + 9 = 6$.

2. Resuelve las siguientes adiciones utilizando la estrategia anterior.

a. $9 + (-5)$
b. $-2 + 5$
c. $6 + (-6)$
d. $7 + (-10)$
e. $5 + 4$
f. $-6 + (-3)$

Nota. Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 7° básico (Quijada et al., 2020, pp. 19-20).

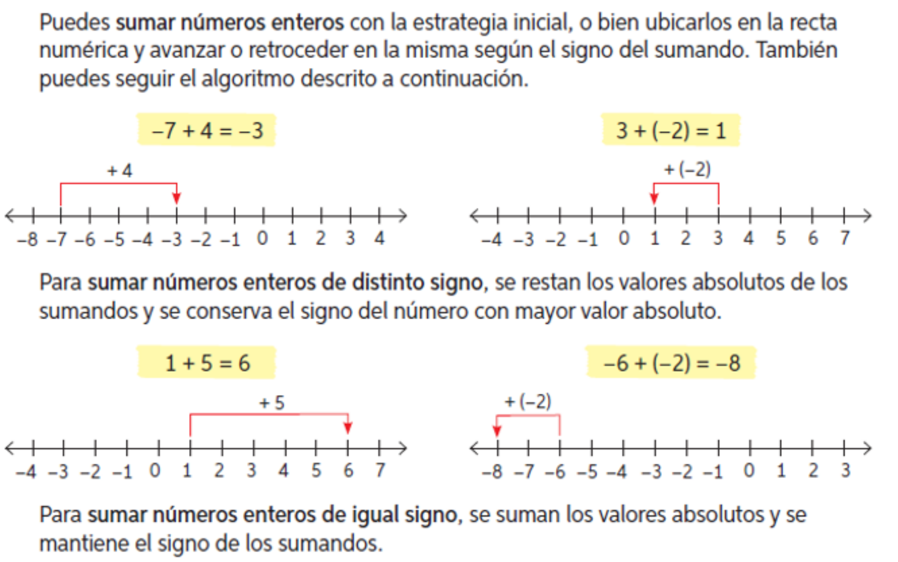
Esta actividad se lleva a cabo al inicio de la unidad y a partir de reglas simples es capaz de presentar los cuatro posibles casos de suma en enteros. Posteriormente se utiliza una actividad similar para explicar la sustracción de enteros, alterando un par de reglas. Considerando que los estudiantes no poseen conocimientos previos sobre los números negativos, el uso de material concreto es recomendable para enseñar algoritmos de adición. Sin embargo, dicha estrategia puede presentar ciertas dificultades.

Los estudiantes no conocen qué es un número negativo ni se les proporciona un contexto adecuado al que se pueda representar con esta actividad. En base a los conocimientos previos que poseen, estos deben realizar una resta (con la definición de "quitar algo" en representaciones concretas de números naturales) cuando lo que se está presentando es una adición. Esto puede generar contradicciones con respecto a lo que pueden interpretar de la actividad, por lo que depende de la implementación docente si es que se logra generar un conflicto cognitivo favorable o no. Esta situación permite el desarrollo de obstáculos didácticos, dado que se encuentra presente en un texto escolar ministerial como una propuesta didáctica y no es un problema nativo del aprendizaje del estudiantado.

Posterior a esta actividad, ya se emplean ejercicios y ejemplos contextualizados para el adecuado aprendizaje. Una vez que se les enseña que la adición no funciona de igual manera que con los números naturales, se generaliza el algoritmo para la suma y se presenta además una representación de cada caso, utilizando la recta numérica (Figura 2).

Figura 2

Explicación del algoritmo de la adición de números enteros mediante rectas numéricas



Puedes **sumar números enteros** con la estrategia inicial, o bien ubicarlos en la recta numérica y avanzar o retroceder en la misma según el signo del sumando. También puedes seguir el algoritmo descrito a continuación.

$-7 + 4 = -3$ $\qquad$ $3 + (-2) = 1$

Para **sumar números enteros de distinto signo,** se restan los valores absolutos de los sumandos y se conserva el signo del número con mayor valor absoluto.

$1 + 5 = 6$ $\qquad$ $-6 + (-2) = -8$

Para **sumar números enteros de igual signo,** se suman los valores absolutos y se mantiene el signo de los sumandos.

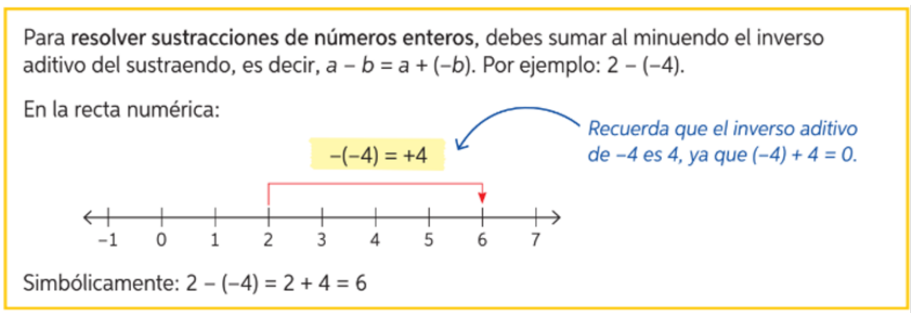
Nota. *Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 7° básico (Quijada et al., 2020, p. 20).*

Esta explicación del texto escolar concuerda con las respuestas obtenidas en los grupos focales. Analizando las respuestas presentadas en la Tabla 3, se observa cómo los participantes de los distintos cursos coinciden en sus respuestas, sumando los valores absolutos y conservando el signo cuando ambos números son negativos. En el caso de sumar números negativos y positivos, restaban los valores absolutos y mantienen el signo del número con mayor valor absoluto.

En la explicación de la sustracción de números enteros, el texto escolar propone cambiar el minuendo por su inverso aditivo y sustituir la operación por una suma. Además, incluye una representación en la recta numérica que evidencia el cambio de sentido al realizar la operación (Figura 3).

Figura 3

Explicación del algoritmo de la sustracción de números enteros



Para **resolver sustracciones de números enteros,** debes sumar al minuendo el inverso aditivo del sustraendo, es decir, $a - b = a + (-b)$. Por ejemplo: $2 - (-4)$.

En la recta numérica:

$-(-4) = +4$

Recuerda que el inverso aditivo de -4 es 4, ya que $(-4) + 4 = 0$.

Simbólicamente: $2 - (-4) = 2 + 4 = 6$

Nota. *Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 7° básico (Quijada et al., 2020, p. 23).*

Las respuestas obtenidas en la Tabla 2 muestra que los estudiantes utilizan un procedimiento contrario al propuesto en el texto escolar (Figura 3). Al contrario de sumar al minuendo el inverso aditivo del sustraendo, los estudiantes de 7° básico restaban el inverso aditivo, reemplazando los dos signos "-" por un único signo "-". Este obstáculo presentado no se puede asociar a los textos escolares. Los grupos del nivel 7° básico poseen al mismo docente de Matemáticas, y dado que los errores son de la misma naturaleza en ambos grupos, se puede atribuir la causa de este tipo de error al trabajo docente en el aula.

4.2.2 Textos 8° básico de editoriales Santillana (2021) y SM (2019)

Para 8° básico, el texto escolar de Matemáticas distribuido por el Mineduc pertenece a la Editorial Santillana, siendo este el texto prioritario para el análisis. Además, se incluye al estudio el libro escolar de SM, dado que se analizó la versión de 7° básico de dicha editorial.

En las representaciones del texto escolar de la Editorial Santillana (2021), de los ejemplos y ejercicios propuestos por el documento 87% son representaciones simbólicas, 13% utilizan representaciones pictóricas y no se evidencian representaciones concretas. Dentro de las representaciones simbólicas, se distribuye principalmente en la operatoria. Se destaca el uso de una introducción inductiva para el aprendizaje de la multiplicación en números enteros (Figura 4). Por otra parte, el texto escolar de la Editorial SM (2019) se destaca por el uso de los tres tipos de representaciones, sobresaliendo en cantidad los ejercicios con representaciones simbólicas de operatoria simple.

Figura 4

Ejemplo de multiplicación entre números enteros

Resuelve las multiplicaciones 3 • (–12) y (–5) • 6.

- Para calcular 3 • (–12), podemos considerar la multiplicación como una **adición de sumandos iguales**, por lo que 3 • (–12) puede interpretarse como 3 veces (–12), es decir:

$$3 \cdot (-12) = (-12) + (-12) + (-12)$$

Luego, 3 • (–12) = –36.

¿Puedes aplicar el mismo procedimiento para calcular (–12) • 3?

- Para resolver la multiplicación (–5) • 6, podemos utilizar la **propiedad conmutativa** de la multiplicación y escribirla como una adición de sumandos iguales.

$$(-5) \cdot 6 = 6 \cdot (-5) \;\blacktriangleright\; 6 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -30$$

Nota. Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 8° básico (Torres Jeldes y Caroca Toro, 2021, p. 12).

El ejemplo realiza la multiplicación considerando el primer factor como la cantidad de veces que se suma el segundo factor. En caso de que el segundo factor sea negativo, se aplica la conmutatividad de la multiplicación, lo cual se transfiere de las propiedades conocidas sobre los números enteros; esto, según Zapatera (2021), puede ser causante de algunos obstáculos epistemológicos.

El ejemplo de multiplicación, mostrado en el texto de la Editorial Santillana, considera al primer factor como aquel valor que define la cantidad de veces que se suma el segundo factor. Se observa en la Figura 4 que, en el ejemplo, el primer factor siempre es positivo, mientras que el segundo toma valores negativos; en caso de que sea al revés se aplica la propiedad conmutativa de la multiplicación. Al realizar esto, el texto transfiere directamente las propiedades conocidas de los números naturales a los enteros, sin una justificación previa. Según Zapatera (2021), esta asimilación de propiedades puede ser causante de obstáculos epistemológicos, puesto que a futuro los estudiantes asumen que todas las reglas, algoritmos o propiedades se pueden traspasar de un conjunto a otro. Sin embargo, como quien asimila dichas propiedades es el texto escolar, la clasificación pasa a ser didáctica en vez de epistemológica.

El segundo problema radica en la utilización exclusiva de dos números, uno positivo y el otro negativo, en un orden específico al momento de resolver el producto. Este ejemplo ignora el caso de que ambos números puedan ser negativos o que el primer factor pueda ser negativo efectivamente. Al enseñar un método que no considera un caso, puede crear el pensamiento en el estudiantado de que eso no es posible o no se puede explicar. Este ejemplo sería un causante de obstáculos didácticos si es que se tratara como un caso aislado, sin embargo, el texto posteriormente entrega los ejemplos y recursos adecuados para evitar dicho problema. Así, posterior a este ejemplo, el texto utiliza una introducción inductiva en donde el estudiante debe analizar y completar la secuencia de multiplicaciones. Al realizar bien la actividad, se puede llegar a la conclusión de que el producto entre dos factores negativos es posible de realizar y tiene un valor positivo (Figura 5).

Figura 5

Ejemplo de multiplicación utilizando el modelo inductivo

Analiza la siguiente secuencia de multiplicaciones y responde.

$$2 \cdot (-2) = -4$$
$$1 \cdot (-2) = -2$$
$$0 \cdot (-2) = 0$$
$$(-1) \cdot (-2) = \boxed{?}$$
$$(-2) \cdot (-2) = \boxed{?}$$

¿Cuáles son los números que podrían continuar los productos de cada multiplicación?

Nota. Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 8° básico (Torres Jeldes y Caroca Toro, 2021, p. 13).

La actividad pictórica para representar la multiplicación, y posteriormente la división, entre números enteros consiste en una actividad utilizando fichas bicolor para distinguir números positivos y negativos. Este ejemplo puede plantearse tanto de forma concreta como pictórica (Figura 6).

Figura 6

Ejemplo y actividad sobre multiplicación con fichas bicolor

1. En parejas, realicen una actividad utilizando fichas de color verde y rojo. Guíense por el siguiente ejemplo:

Consideren que cada ficha de color verde representa 1, y cada ficha roja representa –1.

$3 \cdot 2$ ▶ $\underbrace{1 \; 1}_{2}$ 1 1 1 1 ▶ 3 grupos de 2 ▶ $3 \cdot 2 = 6$

$2 \cdot (-5)$ ▶ $\underbrace{-1 \; -1 \; -1 \; -1 \; -1}_{-5}$ -1 -1 -1 -1 -1 ▶ 2 grupos de (–5) ▶ $2 \cdot (-5) = -10$

Representen con las fichas los productos de las siguientes multiplicaciones.

a. $4 \cdot 4$ b. $6 \cdot (-2)$ c. $(-7) \cdot 3$ d. $(-8) \cdot 4$

Nota. Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 8° básico (Torres Jeldes y Caroca Toro, 2021, p. 14).

Ambas actividades, en las que se utiliza la agrupación de fichas como representación, se ven limitadas debido a ser concretas y no poder mostrar una operación en la que ambos números operados tengan valor negativo. Esto muestra que las actividades concretas y pictóricas de este tipo se ven limitadas por su propia naturaleza, puesto que no se pueden formar "grupos negativos", no representando así todos los casos posibles de la multiplicación y división. Al igual que la Figura 4, este tipo de actividades pudiese desarrollar obstáculos didácticos en los estudiantes, de no ser por los complementos integrados en el texto escolar.

La propuesta destacada en el texto escolar de la Editorial SM (2019) corresponde a representaciones pictóricas utilizando tarjetas rectangulares, cuyo valor depende de su posición, pudiendo ser 1 y (-1). La actividad en cuestión consiste en hacer un arreglo bidimensional, donde los valores absolutos del primer factor hacen referencia a la altura, y del segundo al ancho (Figura 7).

Figura 7

Explicación de la multiplicación utilizando tarjetas rectangulares

¿Cuál es el resultado de la multiplicación $-6 \cdot (-3)$?

Para representar la multiplicación de números negativos usaremos tarjetas rectangulares, cada una con un 1 escrito en una cara y un -1 escrito en la otra. Además, para usar las tarjetas daremos una regla para la multiplicación por el factor 1 y por el factor -1:

- Si hay que multiplicar por 1 un ordenamiento dado de tarjetas, las tarjetas involucradas permanecen tal y como se encuentran sobre la mesa.
- Si hay que multiplicar por -1 un ordenamiento dado de tarjetas, las tarjetas involucradas se invierten dejando a la vista las caras que estaban ocultas.

Paso 1 Aplica la regla de multiplicación obtenida en la situación 1 para establecer que $-6 = -1 \cdot 6$. Por lo tanto, puedes escribir:

$$-6 \cdot (-3) = -1 \cdot 6 \cdot (-3)$$

Paso 2 Represente el producto $6 \cdot (-3)$ construyendo un ordenamiento rectangular de 6 tarjetas por 3 tarjetas, todas con el -1 en su cara superior.

$6 \cdot (-3) \quad \rightarrow$

−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1

Paso 3 Aplica la regla definida para multiplicar por el factor -1. En este caso, se invierten las tarjetas del ordenamiento.

Paso 4 Suma los valores de las caras visibles de las tarjetas.

1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 18$$

Por lo tanto:

R: **El resultado de la multiplicación $-6 \cdot (-3)$ es 18.**

Nota. *Obtenida del Texto del estudiante Matemáticas 8° básico (Catalán et al., 2019, p. 13).*

En esta ocasión, el texto escolar asume multiplicaciones como , mencionando que provienen de la actividad anterior, lo cual en ningún espacio de la actividad se afirma ni corrobora. Además, la regla de invertir las tarjetas al multiplicar por   no se sustenta adecuadamente para el estudiante.

Esta actividad puede ser causante de obstáculos didácticos, puesto que se asumen demasiados conocimientos previos, como la definición de inverso multiplicativo, contexto adecuado que se adapte a lo realizado en la actividad y la regla de signos para el algoritmo de la multiplicación. La actividad no ofrece una justificación de por qué es que funciona el voltear tarjetas como una multiplicación por el inverso multiplicativo de los números enteros, por lo que puede generar vacíos en los aprendizajes esperados del estudiante.

5. CONCLUSIONES

En el marco teórico presentado en el documento, se nombran los obstáculos epistemológicos descritos por Glaeser (1983) que surgieron en la formalización de los números enteros como conjuntos. De esta lista, no se apreció ninguno en los conocimientos de los estudiantes entrevistados; pero, de acuerdo con los resultados obtenidos, se observó que existen obstáculos epistemológicos y didácticos al operar con números enteros en la sustracción, en la multiplicación y en la división. En la resta emergen cuando hay dos signos, aparentemente iguales para los estudiantes, pero que tienen un significado diferente, dado que uno es posicional y el otro operacional, provocando que quieran adaptar esta incongruencia cognitiva a sus conocimientos previos sobre la operación, uniendo ambos como si fueran un único símbolo. Para la multiplicación y división, se observa que los estudiantes, al ver una similitud en el algoritmo de estas operaciones con el de la adición, generalizaron los procedimientos de esta última en todas las situaciones.

Los obstáculos observados consisten en procedimientos erróneos para la resolución de operaciones aritméticas, incluso llegando a contradecir los algoritmos utilizados por los textos. Las causas de los obstáculos presentados en los estudiantes no se relacionan con ningún tipo de representación utilizada en los textos escolares; sin embargo, esto no quiere decir que los textos escolares estén libres de problemas. En el análisis de las actividades presentadas para la enseñanza de números enteros, se logró evidenciar que en varias propuestas didácticas se utilizan como base conocimientos previos que los estudiantes aún no han desarrollado para el momento de la unidad en que se presenta el ejemplo; también se realizan actividades que tan solo logran representar una parte del total de algoritmos necesarios para la adecuada operación de números, ignorando los casos restantes. Estos casos pueden ser el origen de obstáculos didácticos en caso de que se implementen tal cual se propone en el documento ministerial.

En contraparte, los textos escolares también presentan diversos tipos de representaciones que facilitan la comprensión de los contenidos a los estudiantes, como puede ser la recta numérica, aportando una visualización del funcionamiento de las operaciones aritméticas. A mayor nivel educativo, los estudiantes prefieren el uso de representaciones y modelos simbólicos, por lo que se evita un estancamiento en el modelo concreto, tal como uno de los obstáculos definidos por Glaeser (1983).

El campo de estudio es amplio, los resultados presentados en esta ocasión son representativos de los cursos de 7° y 8° básico del establecimiento, pero existen dimensiones del tema que aún no se detallan y merecen atención en el futuro. Los obstáculos en el aprendizaje de los números enteros poseen una variedad y naturaleza diversa, aquellos que se identificaron en los datos recopilados son tan solo una parte. Al asignarles una posible causa a estos obstáculos, no se encontró relación alguna con las diferentes representaciones en las que se enseñan los números enteros. Este trabajo no pretende ser exhaustivo, sino más bien un punto de partida para investigaciones futuras que puedan expandir y enriquecer el conocimiento de los obstáculos en los números enteros, los cuales son necesarios considerar para ejercer adecuadamente la docencia en la asignatura.

6. REFERENCIAS

Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (1981). How Shall We Teach the Multiplication of Negative Numbers? Mathematics in School, 10(5), 31-33. http://www.jstor.org/stable/30214312

Bachelard, G. (1993). La formación del espíritu científico. Siglo XXI.

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2), 165-198.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Libros del Zorzal.

Bruner, J. S. (1969). Hacia una teoría de la instrucción. Unión Tipográfica Editorial HispanoAmericana.

Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C., & Rupin, P. (2019). Texto del estudiante. 8º Básico. Editorial SM. Obtenido de

https://www.colegiocolonos.cl/upload/textos/matematica-8o-basico-642ad51faa492de9795844a2d0c6142f.pdf

Cid, E. (2016). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos [Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza]. Repositorio de la Universidad de Zaragoza. https://zaguan.unizar.es/record/112529/files/TESIS-2022-085.pdf

Cid, E. (2022). La introducción escolar de los números enteros en un entorno algebraico: razones y principios que la sustentan. En R. Martinez, y M. Ruiz (Eds.), Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática. Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros (pp. 105-167). EDUCO. http://170.210.81.141:8080/handle/uncomaid/16638

Crowley y Dunn (1985). On multiplying negative numbers. Mathematics teacher, 78(4), 252-256.

Glaeser, G. (1983). Une science naissante: la didactique expérimentale des mathématiques. Séminaire de Philosophie et Mathématiques, (14), 1-12.

Janvier, C. (1983). The understanding of directed numbers. Proceedings of the 15th Annual Conference of PME-NA, 295-300, Montreal.

Muñoz Cornejo, P. (2019). Análisis de números enteros en textos escolares ministeriales de séptimo y octavo año básico: 2009-2018 [Tesis de magister, Universidad Alberto Hurtado]. Repositorio de la Universidad Alberto Hurtado. https://repositorio.uahurtado.cl/handle/11242/25951

Ministerio de Educación. (2016a). Bases Curriculares Séptimo Básico a Segundo Medio. Gobierno de Chile.

Ministerio de Educación. (2016b). Programa de Estudio Séptimo Básico. Gobierno de Chile.

Ministerio de Educación. (2016c). Programa de Estudio Octavo Básico. Gobierno de Chile.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. Revista Psicopedagogía, 23(71), 158-180. https://www.revistapsicopedagogia.com.br/detalhes/401/dificultades-en-el-aprendizaje-de-las-matematicas--una-perspectiva-evolutiva

Quijada, F., Manosalva, C., Ramírez, M., & Romero, D. (2020). Texto del Estudiante de 7º Básico. Editorial SM. Obtenido de https://www.curriculumnacional.cl/estudiante/621/articles-145593_recurso_pdf.pdf

Torres Jeldes, C. V., y Caroca Toro, M. V. (2021). Texto Escolar del Estudiante de 8° Básico. Editorial Santillana.

Vidal, R., y Barra, M. (2019). Un modelo para caracterizar la justificación de reglas y algoritmos del ámbito numérico–algebraico en libros de texto. Matemáticas, Educación y Sociedad, 2(2), 33-49.

Zapatera, A. (2021). Obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los números enteros. En A. M. Rosas Mendoza (Ed.), Avances en matemáticas educativas teorías diversas no. 8 (pp. 121-135). Editorial Lectorum.

https://doi.org/10.46219/rechiem.v16i3.167
Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448

SITUACIÓN ADIDÁCTICA PARA EL TRÁNSITO DE LA HOMOTECIA EN EL PLANO EUCLIDIANO A LA HOMOTECIA VECTORIAL

ADIDACTICAL SITUATION FOR A HOMOTHETIC TRANSFORMATION IN THE EUCLIDEAN PLANE

Tamara Isis Patricia Siles Vega
tsilesvega@gmail.com
https://orcid.org/0009-0005-7910-1203
Magíster en Didáctica de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso , Valparaíso, Chile

RESUMEN

Diversos estudios demuestran que la enseñanza de la geometría, a pesar de su importancia, queda desplazada en la enseñanza escolar. Este escrito pretende contribuir en su enseñanza proponiendo, desde la Teoría de las Situaciones Didácticas, una situación didáctica para introducir la homotecia vectorial a partir del trabajo de la homotecia en el plano euclidiano, mediante actividades grupales diseñadas para realizar dentro y fuera del aula en dos sesiones de clase. Esta secuencia se implementó en un grupo de estudiantes de entre 14 y 15 años en un establecimiento educacional de la Región Metropolitana de Chile. Durante la sesión 1, los estudiantes construyen una homotecia utilizando herramientas métricas para luego ser desafiados a construirla sin el uso de ellas. Lo anterior manifestó diversas estrategias en los grupos, las cuales se retoman en la sesión 2 para institucionalizar el conocimiento a partir de las producciones de los alumnos. Los resultados muestran que la situación adidáctica propuesta permitió a los estudiantes construir el concepto de homotecia vectorial de manera significativa y contextualizada, con el potencial para hacer emerger el nuevo saber matemático, a partir de los conocimientos previos de los estudiantes y las estrategias que surgen al proponerles una situación desafiante.

Palabras clave:
Homotecia, Teoría de las Situaciones Didácticas, Educación, Geometría.

ABSTRACT

Several studies have shown that the teaching of geometry, despite its importance, has been neglected in school education. This paper aims to contribute to its teaching, proposing from the Theory of Didactic Situations, a didactic situation to introduce vectorial homothecy from the work of homothecy in the Euclidean plane through group activities designed to be carried out both inside and outside the classroom in two class sessions. The research was conducted with second-year high school students in a private subsidized Santiago school. During session 1, the students constructed a homothety using metric tools and were challenged to construct it without using it. The above manifested diverse strategies in the groups, which are retaken in session 2 to institutionalize knowledge from the students' productions. The results of the research show that the proposed didactic situation allowed the students to construct the concept of vectorial homothecy in a meaningful and contextualized way with the potential to make the new mathematical knowledge emerge based on the student's previous knowledge and the strategies that arise when a challenging situation is proposed to them.xt

Keywords:
Homothecy, Theory of Didactic Situations, Education, Geometry.

Recibido 27 de Junio 2024 Aceptado 26 Noviembre 2024
Revista Chilena de Educación Matemática, Volumen 16, N°3

1. ANTECEDENTES

Según la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2017), el entendimiento de los contenidos matemáticos es importante para los ciudadanos del mundo moderno, puesto que las estructuras matemáticas se han desarrollado como un medio para comprender e interpretar fenómenos naturales y sociales. Particularmente, la geometría es una rama de la matemática que estudia los espacios, las figuras y cuerpos geométricos, junto con sus propiedades y relaciones. Sin embargo, es preocupante notar cómo el foco en su enseñanza ha sido “entregar un glosario geométrico ilustrado sobre las figuras o relaciones geométricas con dibujos, nombres y definición” (García y López, 2008, p. 27), además de recaer en la algebrización de esta (Gómez y Andrade-Molina, 2022).

Según la OCDE (2017), la geometría es una base fundamental del espacio y la forma, lo cual incluye una amplia gama de fenómenos que se encuentran en todas partes de nuestro mundo visual y físico: patrones, propiedades de los objetos, posiciones y direcciones, representaciones de los objetos, descodificación y codificación de información visual, y navegación e interacción dinámica con formas reales. Por tanto, su importancia radica en desarrollar el pensamiento geométrico y potenciar la capacidad espacial que permita a los estudiantes comprender matemáticamente el espacio y sus formas, fomentando la visualización y el tránsito entre lo bidimensional y tridimensional (Gómez y Andrade-Molina, 2022), y así tener una mirada crítica y reflexiva sobre el entorno.

En cuanto a esta rama de la matemática, Barrantes y Zapata (2008) señalan que, en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, se fuerzan los tiempos de la conceptualización y se introducen muy pronto los conceptos abstractos obviando la realización de actividades concretas como consecuencia de esa utilización temprana de la nomenclatura definitiva. Esta construcción conceptual a partir de las definiciones produce la incapacidad del alumno de resolver situaciones cotidianas, puesto que es la mera definición la que se activa en la mente del alumno y la que domina el proceso. En lugar de ello, los autores sugieren construir el esquema conceptual a partir de la experiencia del alumno, desde situaciones variadas y sin necesidad de recurrir en un principio a la definición, por ejemplo, vinculando la geometría con el arte, aumentando el número de actividades de laboratorio en las que los conceptos y propiedades de las figuras geométricas se manipulen, o realizando investigaciones y proyectos de estudios de las figuras geométricas.

Del mismo modo, Gamboa y Ballestero (2009) mencionan que para aprender geometría el estudiante debe comprender las relaciones, características y propiedades de los objetos sin importar la representación que se haga de ellas. “No se puede seguir enseñando geometría como un producto acabado, suprimiendo todo el proceso de construcción de dicho conocimiento y aislándola del mundo o de las otras áreas de las matemáticas” (Gamboa y Ballestero, 2009, p. 113). Así, es necesario que el aprendiz tome un papel activo en su aprendizaje y se le exija un poco más que ser un receptor de información, dando espacio a la discusión, la experimentación, la investigación, el ensayo y el error, aprovechando este como una herramienta para el aprendizaje y parte del quehacer matemático en la búsqueda del conocimiento.

Un estudio reciente, realizado por Gómez y Andrade-Molina (2022), señala que uno de los principales problemas que se manifiesta en la enseñanza de la geometría es la simplificación a lo aritmético. Particularmente, el artículo habla acerca de las discordancias del currículo escolar con respecto a la homotecia, donde se espera que los estudiantes muestren una comprensión del concepto (Ministerio de Educación [Mineduc], 2015). Sin embargo, las autoras consideran que las actividades propuestas en el Texto del Estudiante no permiten percibir la homotecia como una transformación geométrica, sino que simplifica su estudio al cálculo de la razón de homotecia basándose en la proporcionalidad, es decir, aritmetizando el contenido, lo que conlleva a la pérdida de su profundidad epistemológica.

Quiroga et al. (2022) estudian el razonamiento geométrico que emplean los estudiantes al desarrollar la unidad de homotecia, donde evidenciaron que la mayoría de ellos no logró comprender ni aplicar el concepto de homotecia en su totalidad, ni tampoco logró cumplir con una argumentación matemática adecuada. Dentro de sus hallazgos, exponen que más de la mitad de los estudiantes alcanzan solamente el nivel 1 de razonamiento geométrico, caracterizado por el uso inadecuado de lenguaje matemático, la poca flexibilización para resolver problemas o ejercicios en distintos contextos y la no aplicación de procedimientos lógicos.

Por su parte, Hoyos (2006) realiza un estudio exploratorio que aporta datos empíricos acerca de la influencia del uso de tecnologías (Cabri II Plus) y el pantógrafo en el aprendizaje y la comprensión de las propiedades básicas de las transformaciones geométricas, siendo una de ellas la homotecia. La autora menciona que es probable que el uso de estos artefactos haya satisfecho funciones complementarias en el desarrollo del aprendizaje del contenido, ya que en las producciones de los estudiantes se muestran inicialmente intuiciones en las descripciones, para luego avanzar hacia una objetivación matemática que quedó expresada en un uso más preciso de los términos. Además, se destaca la utilización de materiales concretos (herramientas comunes o artefactos culturales y materiales educativos o manipulables) en el aula como herramienta para desarrollar habilidades científicas tanto en niños como en niñas, para sentar una base que permita desarrollar el discurso matemático en el aula y para que surjan significados matemáticos adecuados al tópico en cuestión.

En otro estudio reportado recientemente por Labra y Vanegas (2022), los autores exponen su preocupación en relación con los bajos niveles en el desarrollo de procesos de razonamiento geométrico en los estudiantes, conjeturando que lo anterior es causado, en gran medida, "porque se ha privilegiado la memorización de fórmulas, definiciones, teoremas y propiedades apoyadas en construcciones mecánicas y descontextualizadas" (Labra y Vanegas, 2022, p. 95). Para hacer frente a esta problemática, proponen hacer uso de recursos digitales y manipulativos, particularmente del pantógrafo, la cámara oscura y GeoGebra, para estudiar el concepto de homotecia. De la investigación, se concluye que el uso de estos recursos ayudó a iniciar el razonamiento visual en los estudiantes, llevándolos, posteriormente, a explorar, formular, conjeturar y argumentar las propiedades implícitas del concepto, acciones que son fundamentales para desarrollar el razonamiento geométrico (Labra y Vanegas, 2022).

2. PROBLEMÁTICA

El panorama presentado con anterioridad manifiesta la urgente necesidad de hacer presente en el sistema de educación formal los procesos implícitos de construcción y razonamiento del conocimiento, los cuales son dejados en segundo plano al presentar los contenidos como un producto acabado de la actividad matemática (Gamboa y Ballestero, 2009). En particular, este modelo de educación tradicional en Chile ha demostrado no ser satisfactorio en cuanto a los estándares nacionales e internacionales con respecto al nivel que deben alcanzar los estudiantes sobre el aprendizaje de la geometría (Quiroga et al., 2022). Lo anterior se evidencia en los resultados de evaluaciones estandarizadas como TIMSS 2019, donde Chile se sitúa en la categoría más baja con respecto al rendimiento de los estudiantes de octavo básico en el dominio geométrico, siendo significativamente menor al resultado de años anteriores (Agencia de Calidad de la Educación, 2020).

Además de ello, es importante mencionar las problemáticas existentes dentro de los centros educativos para abarcar la amplitud de los contenidos que exige el currículo. Frente a este escenario, los docentes se ven en la obligación de reparar y revertir este escenario, priorizando ciertos contenidos donde, en particular, la enseñanza de la geometría se ve desplazada en la mayoría de los casos, pues es postergada a final de año, o simplemente no se aborda (Gamboa y Ballestero, 2009; Gómez y Andrade-Molina, 2022; Hoyos, 2006).

Por tanto, y poniendo como base de este trabajo la importancia de la enseñanza de la geometría, su abordaje en la escuela y la construcción del conocimiento fomentando la autonomía y razonamiento del alumnado, el objetivo de esta investigación es proponer una secuencia didáctica sustentada en los principios de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), para transitar de la homotecia en el plano euclidiano a la homotecia vectorial.

3. OBJETO MATEMÁTICO

3.1 Dimensión histórica

En la primera parte de los Elementos de Euclides se afirma que dos figuras situadas en el mismo plano son iguales si y solo si es posible hacer que una figura coincida con la otra por medio de traslaciones, rotaciones y reflexiones en rectas. Por consiguiente, en dicha primera parte de los Elementos se estudian aquellas propiedades de las figuras de un plano que son invariantes respecto a las llamadas isometrías del plano (Luna y Álvarez, 2005).

Por su parte, la geometría proyectiva plana es el estudio de aquellas propiedades de las figuras de un plano que permanecen invariantes cuando dichas figuras son sometidas a las transformaciones proyectivas, siendo una transformación de esta naturaleza una composición de perspectividades; por consiguiente, el conjunto de todas las transformaciones proyectivas constituye un grupo de transformaciones. Por lo tanto, la geometría proyectiva plana se puede describir como la teoría de las invariantes de este grupo particular de transformaciones, donde podemos encontrar la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas entre ellas (Luna y Álvarez, 2005).

Esta rama de la geometría tiene sus inicios en el arte pictórico desarrollado durante la época renacentista (siglo XV y XVI), donde uno de los precursores en aplicar la perspectiva geométrica en sus dibujos fue Filippo Brunelleschi (1377-1446), arquitecto y escultor de la época, quien aplicó técnicas como dibujar rectas proyectantes y puntos de fuga para plasmar de manera tridimensional las futuras construcciones y proyectos en mente. Más adelante, Masaccio destaca por ser el primer pintor en aplicar la perspectiva geométrica en su obra conocida como “Trinidad”, donde experimenta sistemas en las que las ortogonales convergían en un punto central único (Corredor y Londoño-Ramos, 2019). De este modo, empieza a cobrar fuerza la relación entre el arte y la geometría, considerando a la perspectiva como una técnica artística para estudiar las relaciones entre tamaño y distancia según una posición relativa del observador, donde surge la necesidad de profundizar en el estudio de la perspectiva geométrica desde la matemática.

Sin embargo, prontamente comenzaron las disputas y polémicas por parte de los artistas defensores de la utilización de métodos y tecnicismos matemáticos y aquellos que no lo veían necesario para expresar sus ideas (Luna y Álvarez, 2005). Había quienes consideraban que, además de ser tedioso y complejo el manejo de la matemática, tanto tecnicismo alejaba el arte del verdadero camino, pues el pintor y su fuerza expresiva no debían depender de reglas geométricas.

Así, la matemática comienza a dominar la perspectiva direccionándose a la formalización de lo que hoy conocemos como geometría proyectiva. En 1639 circuló entre los entendidos un proyecto en borrador firmado por Gerard Desargues, en el que se ensayaba presentar la perspectiva como un medio para hacer geometría. Por entonces, solo Pascal pudo hacer una contribución más, al enunciar, en 1640, el teorema del hexagrama místico. No obstante, ambos trabajos tuvieron poca aceptación durante la época. No fue hasta cerca del 1800 que vuelven a renacer estas ideas por la aparición de la Géometríe descriptive de Gaspard Monge en 1795 y del Traité des propriétés projectives de figures de Jean Víctor Poncelet, quien se le atribuye la resurrección de la geometría proyectiva (Luna y Álvarez, 2005), donde uno de sus preciados aportes fue el de la invarianza de la razón doble, en la cual encontró el argumento para explicar cómo las cónicas en proyección y sección dan objeto a otras cónicas, abriendo nuevas líneas de investigación.

3.2 Dimensión epistemológica

Las homotecias son una familia importante de aplicaciones afines, pues contienen esencialmente el concepto de semejanza de figuras. Se definen, según Ivo rra (s. f), como sigue:

> Sea E un espacio afín sobre un cuerpo K.
>
> La homotecia de centro $\mathrm{O} \in \mathrm{E}$ y razón $\mathrm{k} \in \mathrm{K}^* = \mathrm{K} \setminus \{0\}$ es la aplicación $\mathrm{H}(\mathrm{O}, \mathrm{k}) \in \mathrm{GA}(\mathrm{E})$ dada por
>
> $$\mathrm{H}(\mathrm{O}, \mathrm{k})(\mathrm{P}) = \mathrm{O} + \mathrm{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
>
> Llamaremos $\mathrm{H}(\mathrm{O}, \mathrm{E})$ al grupo de todas las homotecias de centro O en E. Dos conjuntos son homotéticos (mismo aspecto) si uno es la imagen del otro por una homotecia.
>
> Las homotecias se pueden caracterizar por sus aplicaciones lineales asociadas. Llamaremos homotecia lineal de razón $\mathrm{k} \in \mathrm{K}^*$ en un espacio vectorial V sobre un cuerpo K a la aplicación dada por $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{v}}) = \mathrm{k}\vec{\mathrm{v}}$, o bien $\mathrm{H}(\vec{\mathrm{v}}) = \mathrm{k}(\vec{\mathrm{v}}) + (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, donde (a, b) es el centro de homotecia.
>
> Una definición más sencilla, que incluso se acerca a la trabajada en el nivel escolar, es otorgada por Chuaqui y Riera (2011), como sigue:
>
> Sea O un punto en el plano y k un número real. Se llama homotecia de centro O y razón k a la transformación $\mathrm{h}(\mathrm{O}, \mathrm{k})$ que lleva cada punto P a un punto P' tal que $\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = \mathrm{k}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$. Una homotecia lleva un punto P a un punto P' en la misma línea recta por O. Las rectas por O van a sí mismas, y la homotecia inversa es $\mathrm{h}^{-1}(\mathrm{O}, \mathrm{k}) = \mathrm{h}(\mathrm{O}, \mathrm{k}^{-1})$.

4. MARCO TEÓRICO

La secuencia didáctica que se propone en este escrito se sustenta en los principios de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) formulada por Grey Brousseau (2007), quien postula que “el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios (…). Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje” (p. 39). De este modo, el estudiante interactúa con el medio a partir de una problemática, lo cual se conceptualiza desde la teoría como una “situación adidáctica”, que modeliza una actividad de producción de conocimiento por parte del alumno, de manera independiente de la mediación docente, que lo lleva a poner en juego sus propios conocimientos, pero también a modificarlos, rechazarlos o producir otros nuevos a partir de las interpretaciones que hace sobre los resultados de sus acciones (Sadovsky, 2005).

Según la TSD, es posible identificar cuatro fases dentro de una situación didáctica, donde las primeras tres se asocian a la situación adidáctica, las cuales se definen a continuación. En la fase de acción el estudiante interactúa con el medio, experimentando, haciendo y descubriendo y, a su vez, el medio le aporta informaciones y retracciones en retorno a sus acciones (Santos, 2023). En la fase de formulación el medio fuerza al estudiante a compartir informaciones y experiencias con una o varias personas, es decir, intercambia un mensaje comunicando las acciones y explicitando por sí mismo el modelo implícito sobre ellas (Santos, 2023). En la fase de validación el alumno emisor ya no es un informante, sino un proponente, y el receptor, un oponente (Brousseau, 2007). El estudiante debe elaborar pruebas intelectuales y defender sus acciones (Santos, 2023), donde su responsabilidad es validar o probar sus afirmaciones, las cuales serán sometidas a juicio por un interlocutor.

La formalización del conocimiento matemático se denomina proceso de institucionalización. Según Brousseau (1986), en este proceso el maestro “define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones ‘libres’ del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da lectura de esas actividades y les da un estatuto” (p.37). Lo anterior manifiesta que la responsabilidad de cambiar el estado del saber recae en el profesor, sin embargo, Santos (2023) explica que este proceso implica más bien una colaboración entre profesor y estudiantes, es decir, no se reduce a “una fase del trabajo de clase en la que el profesor expone el saber, si lo que se busca es una construcción con sentido” (p. 636).

5. MÉTODO

Para llevar a cabo este estudio de corte cualitativo, se diseñó una propuesta didáctica que consta de dos sesiones de clase de dos horas pedagógicas, o bien, una hora y media cronológica cada una, la cual fue aplicada en un establecimiento educacional de la Región Metropolitana de Chile, en un curso mixto de 40 estudiantes de segundo año de enseñanza media. En ambas sesiones se realizaron grabaciones de audio de las intervenciones de los estudiantes, además de responder en cada sesión un cuestionario abierto que da cuenta de sus producciones, las cuales serán analizadas posteriormente.

5.1 Propuesta didáctica

La propuesta didáctica se divide en dos sesiones de clase, donde se plantea una situación adidáctica desde la TSD, que permita direccionar el tránsito de la homotecia en el plano euclídeo hacia la homotecia en el plano cartesiano, revisada en forma vectorial. Los contenidos previos necesarios se presentan en el Anexo A.

5.1.1 Sesión 1

a. **Previo al inicio de la situación adidáctica**

Se desarrolla una actividad de construcción de homotecias utilizando material concreto (cinta de enmascarar, cartulinas, lana, tijeras y cinta métrica de, mínimo, 3 metros) en el patio del establecimiento. Los estudiantes se reúnen en grupos de dos o tres personas, y a partir de una figura, centro y razón de homotecia dada, deben construir en el piso la homotecia solicitada, midiendo los segmentos con una cinta métrica y registrando tales anotaciones en una guía de trabajo (Anexo B). Los materiales e instrucciones de la actividad se presentan en el Anexo C.

Durante el momento de la construcción, la pareja o grupo de estudiantes interactúa con el medio, centrándose en el hacer. Una vez que los estudiantes han terminado de construir la homotecia en el piso con los materiales solicitados, la docente propone dos actividades, una después de la otra, las cuales se detallarán a continuación, marcando el inicio de la situación adidáctica.

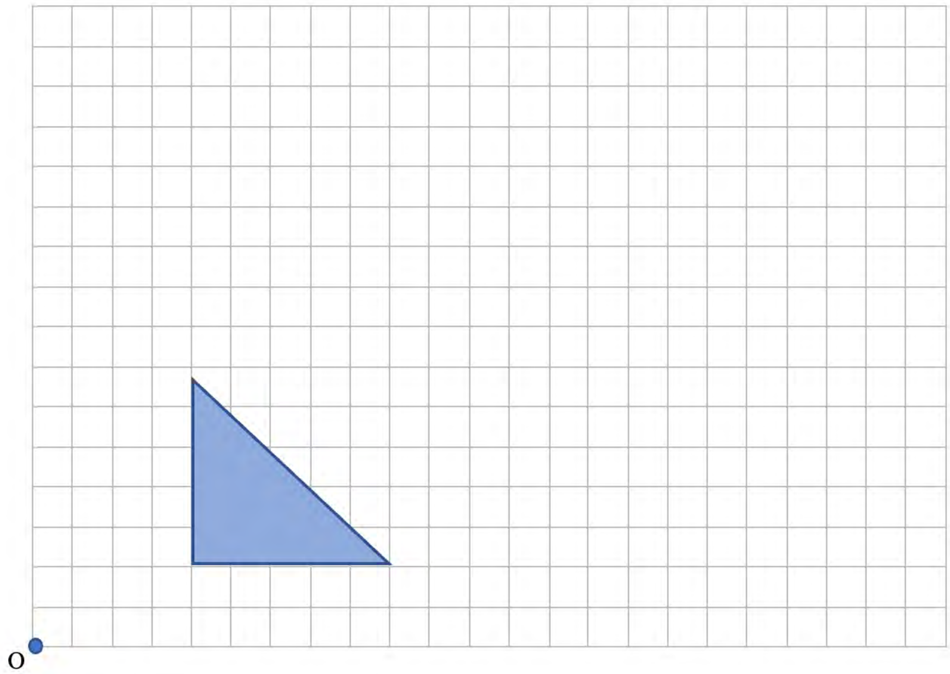
b. **Situación adidáctica**

ACTIVIDAD 1: Supongan que se les encomienda realizar la misma tarea, pero esta vez se les desafía a construir la homotecia sin hacer uso de una cinta métrica. ¿Será posible realizarlo? Si creen que es posible, expliquen cómo lo realizarían, en caso de no ser posible, justifiquen el porqué. Sean lo más detallistas posible.

Con ello, la profesora ha propuesto una situación problemática que “fuerza” al estudiante a poner en juego sus conocimientos, y que le lleva a ejecutar acciones sobre el medio, con tal de organizar las diversas estrategias que emerjan y le ayude a, posteriormente, tomar una decisión. Se movilizan nuevos conocimientos a partir de sus acciones, y el medio les retroalimentará en pos de encontrar la estrategia óptima.

Al ser una actividad grupal, naturalmente surgen los diálogos y la comunicación entre los estudiantes, ya sea cooperantes u oponentes. Lo anterior exige al alumno a usar una formulación que debe involucrar a otro sujeto para comunicarle una información (Brousseau, 2007), donde debe plantear y verbalizar las estrategias o hipótesis de resolución formuladas por cada grupo, es decir, se explicitan las acciones a través de un código lingüístico. En suma, se trata de una última actividad que permitirá a los alumnos explicitar el modelo implícito de sus acciones (Santos, 2023), y que será la que se muestra a continuación:

ACTIVIDAD 2: Sin hacer uso de la regla, construye una homotecia de razón 2. Expliquen cómo lo hicieron y la estrategia que utilizaron.



Con ello, se espera que se consolide la elección de la estrategia o modelo creado por los estudiantes para resolver la situación, además de servir como recurso para la próxima sesión.

5.1.2 Sesión 2

En la sesión siguiente, primero se vuelven a tratar los puntos importantes de la clase anterior, haciendo una síntesis de las actividades realizadas y retomando el problema planteado, para efectuar las situaciones de validación e institucionalización. Luego, se pide a los estudiantes juntarse en parejas y se les proporciona un material impreso con algunas de las respuestas y estrategias de resolución planteadas por los grupos en las actividades 1 y 2 de la sesión anterior, entregando la siguiente instrucción:

Ahora que conocen las estrategias de estos grupos, se pondrán en la posición de la profesora. Deberán evaluar lo que hizo cada grupo y entregar retroalimentación, es decir, otorgar sugerencias o correcciones según estimen necesario. Pueden guiarse con estas preguntas:

- ¿La figura homotética quedó bien construida? ¿Por qué?
- ¿Cuál estrategia me parece la más adecuada para construir una homotecia sin usar un instrumento de medir? ¿Por qué?

Según Brousseau (2007), la acción y formulación conllevan a procesos de corrección, para asegurar la pertinencia, adecuación o conveniencia de los conocimientos movilizados. Apoyado en lo anterior, esta instancia se propone para que los estudiantes prueben tal conocimiento que ha emergido desde sus producciones. El proceso en el cual se realiza esta comprobación o rechazo del conocimiento es la validación, el cual le corresponde directamente al estudiante, puesto que debe defender una postura con pruebas intelectuales que tengan un sustento sólido, para intentar convencer a otro estudiante (Santos, 2023).

Para culminar, la docente “tomará en cuenta oficialmente el objeto de conocimiento por parte del alumno” (Brousseau, 2007, p. 98) con el fin de transformar este saber personal en un saber cultural o saber de referencia. Según Santos (2023), la institucionalización debe implicar una colaboración entre profesor y estudiantes, y no puede reducirse a una fase del trabajo de clase en la que el profesor expone el saber, sino que se busca una construcción con sentido, sustentado en el trabajo de los alumnos. Este saber de referencia que se presentará es la “homotecia vectorial”, la cual se propone como objetivo de aprendizaje en primer año de enseñanza media.

6. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Dado que el objetivo de este trabajo es proponer una situación de aprendizaje adidáctica, fundamentada en la TSD, que permita transitar desde la homotecia en el plano euclidiano a la homotecia vectorial, es que esta sección se enfocará en exponer y analizar los resultados de las sesiones 1 y 2, correspondientes a la situación adidáctica, dado que la parte previa consiste en la revisión de los contenidos necesarios para realizar el tránsito, pero no se detallan en profundidad las actividades realizadas al no ser relevantes para efectos de este escrito. Nuestro interés es identificar las situaciones de acción, formulación y validación llevadas a cabo por los alumnos, y aquellas es posible encontrarlas en las sesiones 1 y 2, tal como se explicó y fundamentó en el apartado anterior.

Por temas de extensión de este escrito, se consideran solamente los diálogos de la sesión 1 de seis de los diez grupos. En el Anexo D se encuentra la transcripción de la grabación de audio de las partes que son de interés para realizar el análisis, omitiendo aquellos diálogos que no tienen mayor relevancia.

6.1 Sesión 1

Frente a la problemática, los estudiantes interactúan con el medio y exploran en la búsqueda de estrategias de resolución al problema. De los diez grupos, a siete se les observa utilizando objetos concretos para aproximar la medida de las distancias del centro de homotecia a los vértices, tales como: lápiz, cuaderno, brazos, manos y pies; es decir, utilizan unidades de medida no estandarizadas en reemplazo de la cinta métrica, lo que se traduce en una fase de acción según la TSD, puesto que “expresan sus elecciones y sus decisiones sin ningún código lingüístico, por medio de acciones sobre el medio” (Brousseau, 1986, p. 41).

Posterior a ello, se observa a los estudiantes intercambiar informaciones que conllevan a asimilaciones y contradicciones; ya no solo ejecutan acciones sobre el medio, sino que explicitan el conocimiento emergente. Lo anterior se observa, por ejemplo, cuando un estudiante del grupo B, en medio de una discusión, interviene diciendo que se puede “inventar un dígito”, refiriéndose a la invención de una unidad de medida no estandarizada, lo cual se entiende como una formulación desde la TSD; este grupo propone el uso de los dedos como una posible medida a utilizar (Grupo B). Lo anterior resulta interesante, puesto que los estudiantes han recurrido a sus conocimientos previos de enseñanza básica para resolver la tarea propuesta, ya que en los cursos de segundo y tercero básico el concepto de medir se realiza a partir de objetos concretos y la comparación a partir de ella, para más tarde introducir las medidas estándares.

Además, nueve de los diez grupos proponen el uso de los “cuadros” como posible estrategia de resolución, sin embargo, llama la atención que, de este grupo, ocho de ellos tendía a fijarse en la componente vertical u horizontal, y solamente un grupo (F) logró integrar ambas durante la formulación. Este grupo manifiesta el proceso de formular según la TSD cuando se entregan instrucciones unos a otros para probar su estrategia, esperando que el medio (homotecia construida) lo retroalimente al verificar si el conocimiento emergente “funciona” o no. A continuación, se muestran algunas de las respuestas otorgadas por los grupos (Figuras 1 y 2), que se interpretan como la consolidación de la fase de formulación de la sesión 1, en respuesta a la actividad 1.

Figura 1

Respuesta otorgada por el grupo B.

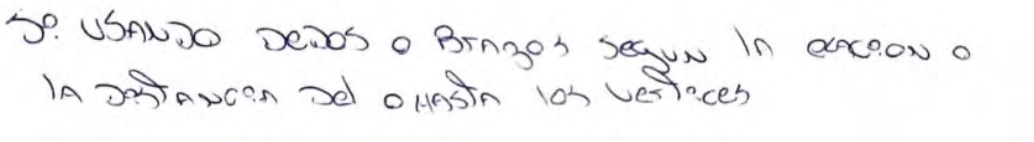
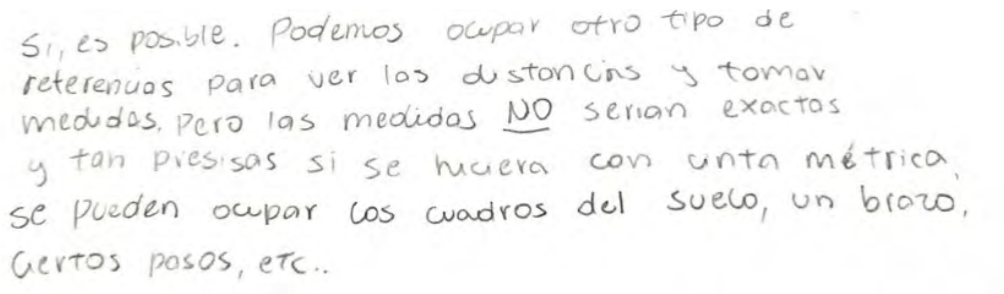


Figura 2

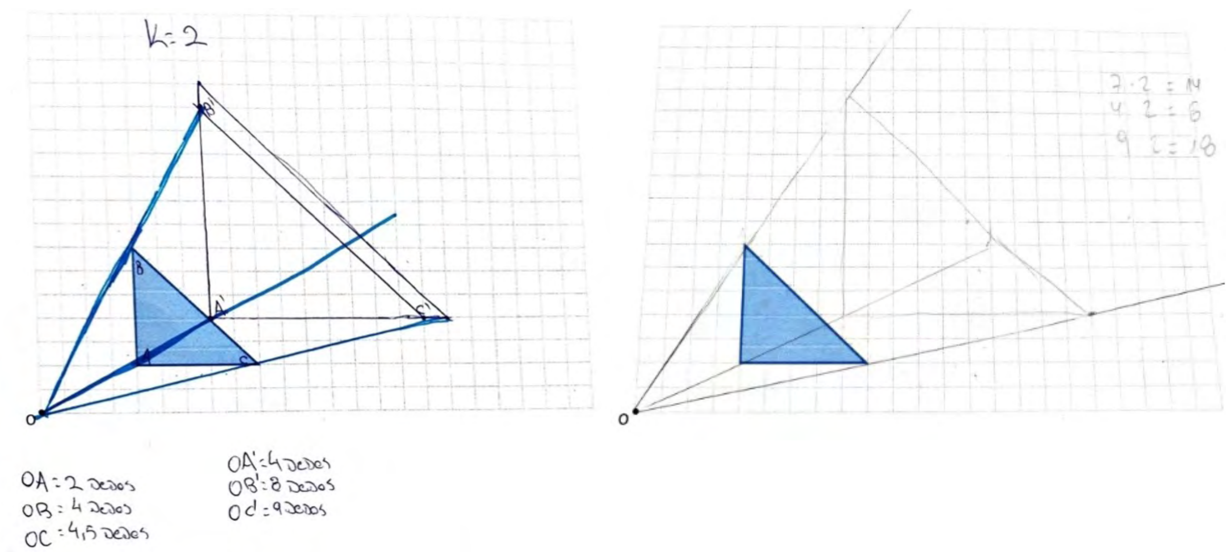
Respuesta otorgada por el grupo A.



Asimismo, las únicas estrategias que surgieron para dar solución al problema planteado esta sesión son: “usar los dedos” y “contar los cuadros”, las cuales denominaremos Estrategia A y B, respectivamente. Estas se consolidan en la actividad 2 propuesta durante la sesión 1, donde las producciones de los estudiantes son las siguientes (Figura 3):

Figura 3

Estrategias A y B producidas por los estudiantes, respectivamente.



Nótese que en la estrategia A el grupo cuenta la cantidad dedos, y las explicita al final de la hoja, a diferencia del grupo B, que solo muestra tres multiplicaciones efectuadas en la esquina superior derecha, todas ellas por dos, al utilizar esa razón de homotecia. Sin embargo, no explicita si aquellos números son los cuadros contados de manera vertical u horizontal.

Estas dos estrategias que han emergido son las que se utilizarán para llevar a cabo la segunda sesión de la secuencia didáctica.

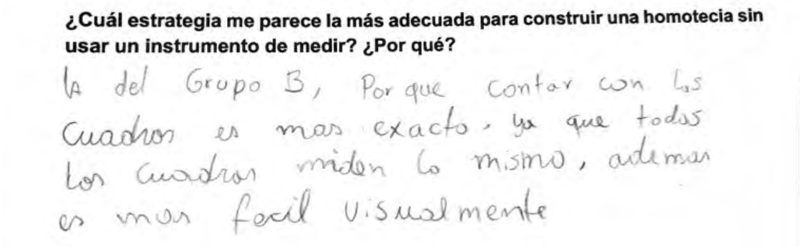
6.2 Sesión 2

Luego de la recapitulación, a los estudiantes se les entrega un material impreso con las dos estrategias consideradas (Anexo E). Se observa a cada pareja discutiendo sobre qué estrategia es más correcta, e incluso algunas utilizan la regla para comprobar las construcciones presentadas en búsqueda de otorgar un veredicto más acertado. Dos grupos manifestaron no entender qué era "medir con los dedos", apelando a que no se entendía qué dedos estaban utilizando, y que tampoco se consideraba la medida de cada dedo, pensamiento que estaba fuertemente arraigado al concepto de medir, pero a partir de una medida estandarizada como los centímetros o metros.

Algunas respuestas son las siguientes (Figuras 4 a 8):

Figura 4

Respuesta otorgada por la pareja 1 en la sesión 2.

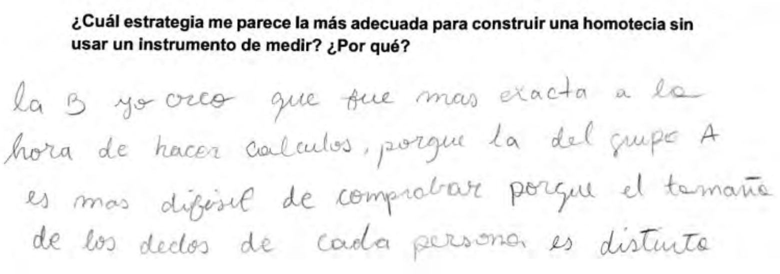


¿Cuál estrategia me parece la más adecuada para construir una homotecia sin usar un instrumento de medir? ¿Por qué?

la del Grupo B, Por que contar con los Cuadros es mas exacto. ya que todos los Cuadros miden lo mismo, ademas es mas facil visualmente

Figura 5

Respuesta otorgada por la pareja 2 en la sesión 2.

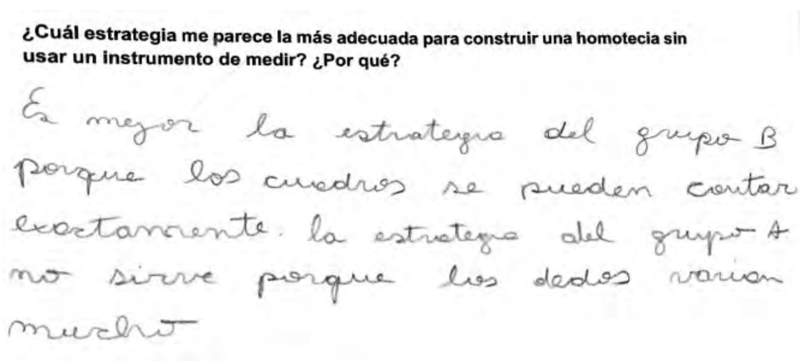


¿Cuál estrategia me parece la más adecuada para construir una homotecia sin usar un instrumento de medir? ¿Por qué?

la B yo creo que fue mas exacta a la hora de hacer calculos, porque la del grupo A es mas difisil de comprobar porque el tamaño de los dedos de cada persona es distinto

Figura 6

Respuesta otorgada por la pareja 3 en la sesión 2.

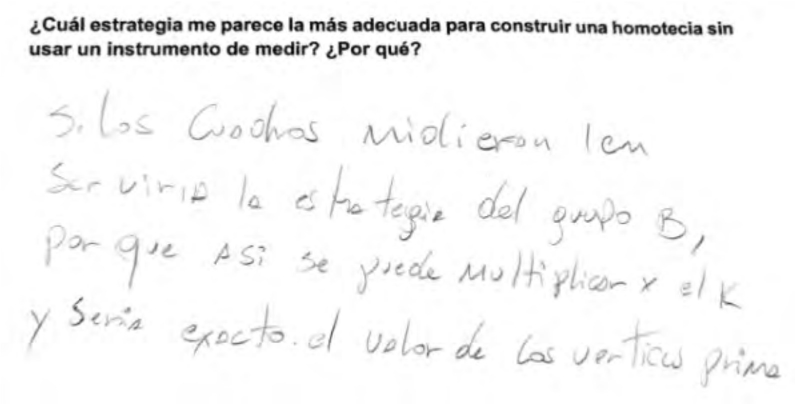


¿Cuál estrategia me parece la más adecuada para construir una homotecia sin usar un instrumento de medir? ¿Por qué?

Es mejor la estrategia del grupo B porque los cuadros se pueden contar exactamente. la estrategia del grupo A no sirve porque los dedos varian mucho

Figura 7

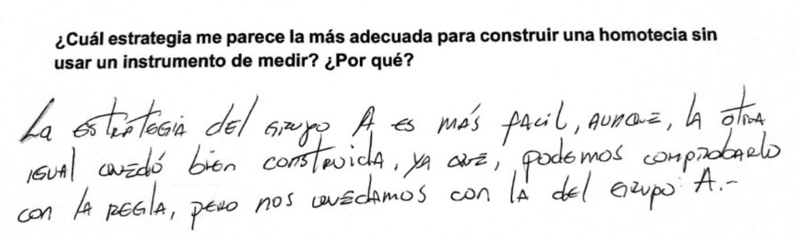
Respuesta otorgada por la pareja 4 en la sesión 2.


¿Cuál estrategia me parece la más adecuada para construir una homotecia sin usar un instrumento de medir? ¿Por qué?

Si los cuadros midieron 1cm serviria la estrategia del grupo B, porque asi se puede multiplicar x el K y seria exacto. el valor de los vertices prima

Figura 8

Respuesta otorgada por la pareja 3 en la sesión 2.


¿Cuál estrategia me parece la más adecuada para construir una homotecia sin usar un instrumento de medir? ¿Por qué?

La estrategia del grupo A es más facil, aunque, la otra igual quedó bien construida, ya que, podemos comprobarlo con la regla, pero nos quedamos con la del grupo A.-

De un total de 16 parejas, solamente se exponen las respuestas de cinco de ellas, debido a que solamente un grupo se inclina por la estrategia A, trece se inclinan por la estrategia B, utilizando argumentos similares, y dos grupos no responden la actividad.

Los estudiantes validan las estrategias y emiten juicios acerca de las dos estrategias presentadas, apelando a la inexactitud y la variabilidad del uso de los dedos para construir una homotecia, inclinándose por la estrategia A, porque "todos los cuadros miden lo mismo", lo cual se considera como un argumento sólido considerando el nivel de los estudiantes, demostrando que comprenden el concepto de homotecia y la construcción del mismo. Ahora bien, fue necesario hacer devoluciones de preguntas a las parejas para que explicasen cómo era el conteo de los cuadrados, de modo que llegaran a identificar las dos componentes, y solo uno de los grupos logró integrarlas sin una intervención de la docente guía. Estas devoluciones se enfocaron en la interpretación de los números presentes en el desarrollo de la estrategia B, donde claramente identificaron que el dos correspondía a la razón de homotecia. Para interpretar el otro número, primero tendían a contar en diagonal, pero se daban cuenta de que ese conteo no era exacto, para luego llegar a contar, mayoritariamente, de modo horizontal, haciendo en algunos casos la comprobación de la componente vertical por "tanteo".

A partir de lo anterior, la docente toma el saber movilizado por los estudiantes y desde allí realiza la institucionalización del saber de referencia, iniciando desde la noción de vector en el conteo horizontal y vertical de los cuadros hasta llegar a la construcción de una homotecia en el plano cartesiano, tal como lo expone Santos (2023): "El saber debería aparecer como resultado de acuerdos de la clase sobre los conocimientos personales de los estudiantes, sus formas de enunciación o formulación y sobre la validez de esos conocimientos y formulaciones" (p. 363).

7. CONCLUSIONES

Como bien se ha expuesto, la TSD postula que los estudiantes aprenden adaptándose a un medio que presenta dificultades y discrepancias en su pensar. En consecuencia, para que ocurra el aprendizaje se debe presentar al estudiante una problemática que lo lleve a poner en juego sus conocimientos. En nuestro caso, esta consistía en la construcción de una homotecia sin hacer uso de un instrumento para medir. Así, durante la situación de aprendizaje, la docente actúa como un guía, y no otorga respuestas inmediatas a los estudiantes, sino que responde a las preguntas con cuestionamientos explícitos e implícitos que le permitan volver al problema y repensarlo, promoviendo la búsqueda de nuevas estrategias de resolución (devolución). Este panorama presentado muestra con claridad la esencia de la teoría desarrollada por Brousseau (2007) en Francia, lo cual nos lleva a reflexionar sobre las discrepancias existentes entre el contexto chileno y el francés. La gran cantidad de estudiantes por sala, los problemas disciplinares y la baja motivación entorpecen el desarrollo de la situación adidáctica, puesto que, según la teoría, son los estudiantes los responsables de llevar a cabo esta parte, sin embargo, al no tener una instrucción mecanizada que replicar (como suele ser), se desligan del problema y esperan que el profesor/a lo resuelva para luego replicarlo. Esto último escapa totalmente de los fundamentos de la TSD, pues es el docente quien expone los saberes de manera descontextualizada y poco significativa para los alumnos, en vez de construir el saber en colaboración.

Lo anterior ya ha sido reportado por Espinoza y Campillay (2011), quienes exponen las diferencias socioculturales significativas en un contexto francés y chileno. Identifican en los estudiantes chilenos un constante rechazo a situaciones de desafío y una resistencia a los cambios en la estructura de la clase de Matemáticas. Es por ello que es necesario reconocer el bagaje cultural de las y los estudiantes, y considerar la tradición de enseñanza que caracteriza a nuestro quehacer docente, donde la instrucción dentro de la clase suele estar condicionada netamente por el profesor/a, y son los estudiantes los que acatan y siguen las actividades propuestas, quienes se acostumbran a recibir de sus profesores las instrucciones de un trabajo perfectamente realizadas y muchas veces no buscan las soluciones por sí mismos. Por ende, es necesario desarrollar un trabajo que apunte y considere las realidades latinoamericanas, es decir, “construir la investigación para Latinoamérica desde Latinoamérica” (Espinoza y Campillay, 2011, p. 887).

Aun así, el presente trabajo de innovación pretende, dentro de lo posible, llevar al estudiante a un nivel superior en la búsqueda y creación de soluciones, fomentando el surgimiento de los saberes matemáticos propuestos en el currículo, pero esta vez a partir de las mentes de los estudiantes, y apuntar hacia la resolución de problemas, ¿no es ese el fin de la matemática y su enseñanza? En nuestro caso, la actividad tiene el potencial para hacer emerger el nuevo saber matemático en juego, puesto que los alumnos hicieron suyo el problema, integrando saberes anteriores y culturales a un elemento intelectual de mayor interés que otros que puedan haber visto en clases, lo que permite que adquieran un conocimiento importante para el currículo matemático del nivel. Además, como Objetivo Transversal, permite que comprendan que la matemática puede resolverse con instrumentos comunes como los expuestos en los anexos, y potencia el trabajo colaborativo, la comunicación y la argumentación, habilidades que se consideran necesarias para el siglo XXI, y que deben trabajarse a la par con los conocimientos y saberes matemáticos.

Podemos decir que, dentro de las posibles mejoras para afinar la secuencia, se puede implementar la plataforma de GeoGebra para potenciar el uso de las TIC, habilidad transversal que se propone dentro del currículo chileno para apuntar al desarrollo integral de los estudiantes. El uso de esta plataforma puede efectuarse al término de la secuencia didáctica, para terminar de consolidar los conocimientos alcanzados, considerando que el software ayuda a integrar de manera dinámica los contenidos, facilitando los cálculos y, en este caso particular, la visualización de las transformaciones geométricas, además de estimular la creatividad en los estudiantes, permitiéndoles explorar, conjeturar y demostrar con mayor libertad (Cenas et al., 2021).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por ANID, a través de su Beca Magíster en Chile para Profesionales de la Educación/2023-50230074

8. REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación. (2020). TIMS 2019 Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias. Presentación Nacional de Resultados. Gobierno de Chile. https://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_TIMSS_2019_version_extendida_final.pdf

Barrantes, M., y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. Campo Abierto, 27(1), 55-71.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 7(2), 33–115. https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/

Cenas, F., Blaz, F., Gamboa, L., y Castro, W. (2021). Geogebra: herramienta tecnológica para el aprendizaje significativo de las matemáticas en universitarios. Horizontes. Revista De Investigación En Ciencias De La Educación, 5(18), 382-390. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v5i18.181

Chuaqui, M., y Riera, G. (2011). Transformaciones en geometría euclidiana y no euclidiana. Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Corredor, M., y Londoño-Ramos, C. (2019). El arte y la historia de la construcción de la geometría proyectiva. Saber, Ciencia y Libertad, 14(2), 295-312. https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2019v14n2.5895

Espinoza, L., y Campillay, W. (2011). La teoría de las situaciones didácticas en Latinoamérica, ¿funciona? En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoameticana de Matemática Educativa (Vol. 4, pp. 881-888). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gamboa, R., y Ballestero, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4(5), 113-136.

García, S., y López, O. (2008). La enseñanza de la geometría. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Gómez, J., y Andrade-Molina, M. (2022). Discordancias del currículo escolar: Homotecia más allá de la proporcionalidad. Revista Chilena de Educación Matemática, 14(1), 31-42. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.105

Hoyos, V. (2006). Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. Enseñanza de las ciencias, 24(1), 31-42. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3812

Ivorra, C. (s. f.). Geometría. https://www.uv.es/ivorra/Libros/G.pdf

Labra, J., y Vanegas, C. (2022). Desarrollo del razonamiento geométrico de estudiantes de enseñanza media cuando abordan el concepto de homotecia. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 25(1), 93-120. https://doi.org/10.12802/relime.22.2514

Luna, J., y Álvarez, Y. (2005). Felix Klein y el estudio de la geometría. En Memorias del XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética (pp. 265-277). Universidad Pedagógica Nacional: Universidad Sergio Arboleda: Sociedad Colombiana de Matemáticas.

Ministerio de Educación. (2015). Bases Curriculares 7º básico a 2º medio. Gobierno de Chile.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2017). Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias (Versión preliminar). https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/ebook%20-%20PISAD%20FrameworkPRELIMINARY%20version_SPANISH.pdf

Quiroga, F., Méndez, C., González, J., y Serrano, P. (2022). Evidencias de razonamiento geométrico en estudiantes de primero medio de enseñanza media en un colegio de la provincia de Concepción. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18(64), 1-16.

Santos, J. (2023). Reivindicando la Teoría de las Situaciones Didácticas: un Paradigma de Investigación Vigente en la Didáctica de las Matemáticas. Boletín de Educación Matemática, 37(76), 625-642. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a12

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En P. Sadovsky, H. Aliaga, y A. Bressan (Eds), Reflexiones teóricas para la educación matemática (pp. 13-66). Libros del Zorzal.

9. ANEXOS

Como bien se ha expuesto, la TSD postula que los estudiantes aprenden adaptándose a un medio que presenta dificultades y discrepancias en su pensar. En consecuencia, para que ocurra el aprendizaje se debe presentar al estudiante una problemática que lo lleve a poner en juego sus conocimientos. En nuestro caso, esta consistía en la construcción de una homotecia sin hacer uso de un instrumento para medir. Así, durante la situación de aprendizaje, la docente actúa como un guía, y no otorga respuestas inmediatas a los estudiantes, sino que responde a las preguntas con cuestionamientos explícitos e implícitos que le permitan volver al problema y repensarlo, promoviendo la búsqueda de nuevas estrategias de resolución (devolución). Este panorama presentado muestra con claridad la esencia de la teoría desarrollada por Brousseau en Francia, lo cual nos lleva a reflexionar sobre las discrepancias existentes entre el contexto chileno y el francés. La gran cantidad de estudiantes por sala, los problemas disciplinares y la baja motivación entorpecen el desarrollo de la situación adidáctica, puesto que, según la teoría, son los estudiantes los responsables de llevar a cabo esta parte, sin embargo, al no tener una instrucción mecanizada que replicar (como suele ser), se desligan del problema y esperan que el profesor/a lo resuelva para luego replicarlo. Esto último escapa totalmente de los fundamentos de la TSD, pues es el docente quien expone los saberes de manera descontextualizada y poco significativa para los alumnos, en vez de construir el saber en colaboración.

a. **Conocimientos previos antes la aplicación de la secuencia didáctica**

Tabla 1

Organización de las sesiones de clases previas a la implementación de la secuencia.

	Objetivo de la clase	**Actividades**
Clase 1	Recordar los conceptos de “razón” y “proporción” y sus aplicaciones, mediante ejercicios que involucren su uso.	• Recordatorio de los conceptos de razón y proporción. • Se realizan ejercicios de cálculo del valor de una razón y ejercicios de determinación del valor de la incógnita en una proporción. • Retroalimentación de actividades.
Clase 2	Desarrollar ejercicios que involucren el uso de razones y proporciones en contextos cotidianos y geométricos.	• Resolución de problemas. • Retroalimentación de actividades.
Clase 3	Conocer el concepto de homotecia e identificar los elementos que la definen.	• Definición del concepto de homotecia como **transformación geométrica**, apoyándose en la proporcionalidad. • Definición de los elementos de la homotecia. • Determinación de la razón de homotecia a través de guía.
Clase 4	Resolver ejercicios de homotecia directa, calculando parámetros y construyendo figuras.	• Construcción de homotecias con razón de homotecia positiva. • Generalización de los casos $0<k<1$ y $k>1$.
Clase 5	Resolver ejercicios de homotecia inversa, calculando parámetros y construyendo figuras.	• Construcción de homotecias con razón de homotecia negativa. • Generalización de los casos $-1<k<0$ y $k<-1$.
Clase 6	Consolidar los aprendizajes en torno al concepto de homotecia.	• Resolución de problemas. • Retroalimentación de actividades.

Nota. Elaboración propia en base a las respuestas de los estudiantes.

b. **Guía de trabajo: Sesión 1**

I. Indique las medidas de la figura original, tanto sus lados como las distancias desde el centro de la homotecia a los vértices.

Segmento	Medida [cms]
OA	

II. Utilizando los datos de la tabla anterior, calcule las medidas de los lados de la figura homotética.

$k =$ _____

Segmento homotético	Cálculo	Medida [cms]
OA'		

III. Dibuje la disposición geométrica de los elementos utilizados para crear la homotecia: centro, vértices, segmento, rectas, figura original y homotética.

c. **Instrucciones previas a la situación adidáctica**

- Formar grupos de dos o cuatro personas.
- Utilizando los materiales, marca en el piso el centro de homotecia y dibuja la figura original entregada por tu profesor/a tal como se muestra en la imagen, es decir, siguiendo los márgenes establecidos. Utiliza la cartulina para indicar los nombres de cada vértice.
- A partir de la razón de homotecia indicada, construye la homotecia midiendo con la huincha cada distancia. Hazlo en colaboración con tus compañeros/as.
- En paralelo, asignen un compañero/a del grupo que anote las medidas desde el centro a los vértices de la figura original, para rellenar el Ítem I.
- Realizar los cálculos correspondientes para obtener las distancias desde el centro hasta los vértices de la figura homotética, para rellenar el Ítem II.
- Una vez terminado, usen la lana para trazar las líneas de proyección. Luego, observen su homotecia, y dibujen la disposición geométrica que obtuvieron en el Ítem III.
- Cuando hayan completado toda la guía de trabajo, llamen al profesor/a para hacer entrega de ella. Cuando se les indique, retiren el material y dejen limpio el lugar.

d. **Extracto de la transcripción de audio de la sesión 1**

Grupo A	Minuto 22:30	A1: ¿Tú crees que sí se puede? A2: Yo siento que sí, pero no sería… exacto. (Discusión inaudible) A1: Vas a poner un brazo… podemos ocupar otro modelo de referencia para la medida. A3: Los cuadrados. A2: ¡Los cuadrados! Eso.
	Minuto 39:11	Minutos más tarde… A1: Retiro todo lo dicho. A3: Sí, no, no es posible, porque como que no da la cosa. Aparte que con la razón de homotecia uno tiene que calcular, entonces uno necesita ciertos valores. Prof: Okey, escríbanlo. A1: Bien, retiramos lo dicho.
Grupo B	Minuto 42:21	Profesora se acerca al grupo para escuchar la discusión de los estudiantes. B1: Profe, hacer esto no es tan difícil tampoco. Profe: ¿Por qué? ¿Tú crees que podrían hacerlo sin regla? B2: Sí, obvio. (Se escucha un estudiante del grupo en desacuerdo) B1: Hermano, si se puede, es cosa de contar… B2: Es diferente medir centímetros a medir metros. Si tú mides con metros es mucho más fácil, porque son así… sin decimales. En cambio, si tú mides con centímetros te va a dar un número muy alto. B1: Pero sin la huincha es lo mismo, te pones acá (señala el centro), y tienes que ir contando no más (señala los cuadros). B2: A ver, dime cuántos centímetros hay de aquí hasta allá (apunta su lugar, hasta el centro O). B1: ¿Centímetros? B2: Sí, centímetros, si con eso estamos midiendo nosotros. B1: Como 50 centímetros, ¿o no? B2: Sí, pero es más o menos. No sabes cuánto. B1: Mmm, sí. Entonces no sé. Profesora (a estudiante B1): Tú habías dicho que se podía, ¿qué estabas pensando? B1: Me iba a poner acá (centro), y tirar como una línea, pero no sé dónde detenerme. Interviene otro estudiante del grupo. B3: ¿Y se puede inventar un dígito? B1 y B2: ¿Cómo? B3: Puedo poner los dedos aquí (en el dibujo de la actividad 2), y de aquí hasta aquí hay 4 dedos. B1: ¡No!

Grupo C	Minuto 46: 41	C1: Esto sí se puede hacer, con el plumón (toma un plumón del estuche). C2 y C3: ¡No! C2: Se puede con los cuadritos, nos ayudan mucho. C1: ¿Cómo los cuadritos? C3: Verificando las líneas de los cuadritos, o sea, contando los cuadritos. C2: Sí po, podemos medir esto, o sea, contar de aquí a allá (camina del centro hasta el vértice de la figura de manera horizontal), y ahí podemos tirar y encontrar el otro vértice. C3: Ah, no, no vamos a poder. No tenemos el k. C2: Sí lo tenemos, nos dan el k. C3: Acá en la hoja (señala actividad 2), no está. C1: Sí, es 2. C3: Ah, entonces sí. C2: Ya, cuenta.
Grupo D	Minuto 45:10	D1: Usé la uña. Profesora: ¿Cómo la uña? D2: Tomé como que cada cuadro era 1 centímetro, y justo coincidía con mi uña. Los conté, y tiré la línea usando un lápiz como regla.
Grupo E	Minuto 47:10	E1: Lo haríamos con pulgadas. E2: Da como tres y medio. E3: Sí, pero son cuartas. Y no es exacto. E2: ¿Y si usamos los pies? E3: O la altura de uno po, como un metro y medio.
Grupo F	Minuto 50:08	F1: Lo podemos hacer como un lápiz (pone un lápiz en las líneas de proyección). F2: No po, midiendo los cuadrados. O sea, no, calculando con los cuadrados. F1: Ah ya, de esquina a esquina, sería uno, dos, tres… F2: Pero no son exactos los cuadrados en ese caso, no se puede así, en diagonal no se puede. F1: Los contamos para allá, así (señala componente vertical). F2: Y después así (señala componente horizontal). Empiezan a probar con uno de los vértices. F3: Acá tenemos tres cuadrados (horizontal), entonces como el k es 3, tendrían que ser 9. F1: Uno, dos, tres, cuatro… (se empieza a mover mientras cuenta).

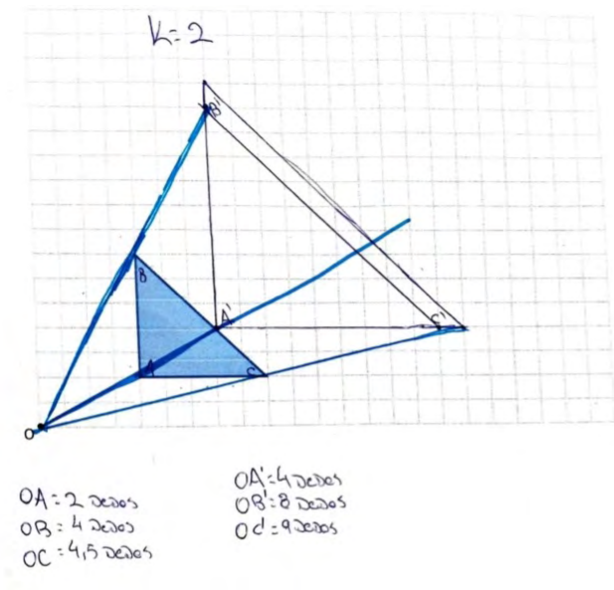
e. **Material utilizado en sesión 2 para efectuar la fase de validación**

Consideren las respuestas de estos grupos y respondan:

¿Cuál estrategia me parece la más adecuada para construir una homotecia sin usar un instrumento de medir? ¿Por qué?

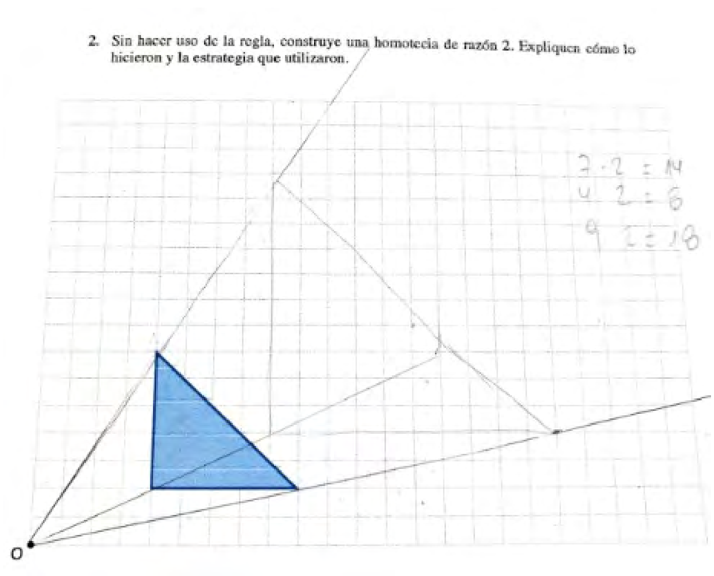
GRUPO A

R: Sí es posible <u>*usando los dedos o brazos*</u>*, según la ocasión. Dependiendo de la distancia del punto O hasta los vértices.*



GRUPO B

R: Sí es posible. Podemos ocupar otro tipo de referencias para ver las distancias, pero no serían exactas. Se pueden <u>*ocupar los cuadros del suelo*</u>*, ciertos pasos, etc.*



VOLÚMEN 16
N°3
DICIEMBRE 2024

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA