VOLÚMEN 17
N°2
AGOSTO 2025

RECH IEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

ÍNDICE

sochiem

Sociedad Chilena de Educación Matemática

Revista Chilena de Educación Matemática

ISSN 2452-5448 Versión en línea

Chile

https://doi.org/10.46219/rechiem.v17i2.207

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448

EDITORIAL

Queridos lectores

Es un honor dirigirme a ustedes por primera vez en mi calidad de Editora en jefe de la Revista Chilena de Educación Matemática. Desde su creación en 2004, la revista ha buscado constituirse como un espacio abierto, plural y riguroso para el intercambio de ideas, resultados de investigación y propuestas didácticas en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Con la transformación al formato digital en 2020, la revista ha ampliado su alcance, acercando el conocimiento a un público cada vez más diverso y global. Agradezco profundamente la confianza depositada en este proyecto colectivo y reitero que nuestra misión sigue siendo contribuir a la difusión del estado del arte de la Didáctica de la Matemática en sus múltiples aproximaciones teóricas y metodológicas. Entre los desafíos que se nos plantean a futuro se encuentran alcanzar nuevas indexaciones y perfeccionar nuestros procesos de gestión editorial, objetivos que abordaremos con el apoyo de la Sociedad Chilena de Educación Matemática y de todas las personas que hacen posible la existencia de esta revista.

En este número, presentamos un conjunto de trabajos que, desde distintos contextos y perspectivas, dialogan en torno a la necesidad de fortalecer prácticas de enseñanza de la Matemática para favorecer una comprensión más profunda de esta disciplina. Ya sea a través de la representación, la resolución de problemas, la interdisciplinariedad o el conocimiento especializado del profesorado, cada artículo nos invita a reflexionar sobre cómo transformar la enseñanza para promover aprendizajes significativos y sostenibles. Estas contribuciones, en su conjunto, ponen de relieve que el desarrollo de habilidades y competencias matemáticas no se reduce a la adquisición de contenidos específicos, sino que constituye un desafío transversal y permanente. Dicho desafío interpela tanto a la investigación como a la práctica educativa, invitándonos a estrechar lazos entre teoría y aula, y a construir colectivamente propuestas que respondan a las demandas actuales y futuras de la Educación Matemática.

En lo específico, el artículo *Representación en la enseñanza de la variable aleatoria en secundaria: un estudio de caso,* de Francisco Guantecura y Hernán Morales, examina prácticas de enseñanza de una profesora en la comuna de Lota, Chile. A partir de entrevistas y análisis de clases, los autores muestran cómo las restricciones de un enfoque tradicional limitan el desarrollo de la habilidad de representación y el uso de recursos tecnológicos, identificando oportunidades de innovación que se alinean con las demandas actuales del currículum escolar chileno.

A continuación, el artículo *Dificultades en el aprendizaje de ecuaciones trigonométricas en estudiantes de primer año de Ingeniería: un estudio en la Universidad de Atacama, Chile,* de Ricardo Guerra, Ismenia Guzmán y Felipe Guevara, aborda los obstáculos que enfrentan jóvenes que ingresan a carreras de Ingeniería al resolver problemas trigonométricos. Los hallazgos revelan carencias en la operatoria algebraica y en la coordinación de registros de representación semiótica, lo que da cuenta de las tensiones que surgen en la transición desde una enseñanza escolar centrada en procedimientos hacia un enfoque universitario más complejo y articulado.

En el artículo *Interdisciplinariedad: ¿Qué hace un docente de matemática en la escuela?,* Nicolás Muñoz, Jonathan Palomera y Matías Toro investigan las posibilidades y limitaciones de integrar el conocimiento matemático en actividades interdisciplinarias. A través de un estudio de caso, caracterizan el quehacer de un docente chileno y evidencian cómo factores estructurales, como la escasa formación interdisciplinaria o la falta de espacios para la planificación conjunta, restringen estas experiencias, que en la práctica tienden a ubicarse más en el marco de una pluridisciplina que en una verdadera interdisciplina.

Por su parte, desde Brasil, Marcelo Proença, Ana Beatriz de Oliveira y Amanda de Sousa, a través del artículo La enseñanza de la distancia entre dos puntos a través de la resolución de problemas: una experiencia en el tercer curso de secundaria, relatan una experiencia de enseñanza sobre la distancia entre dos puntos en secundaria, enmarcada en la Resolución de Problemas. La experiencia muestra cómo el diseño de actividades bien estructuradas permite a los estudiantes movilizar conocimientos previos, explorar diversas estrategias y construir una comprensión significativa del concepto, destacando la relevancia del acompañamiento docente para vincular las estrategias de los alumnos con el nuevo contenido.

Finalmente, este número incluye un artículo que nos conmueve especialmente, *La integral definida desde el conocimiento especializado del docente de matemáticas,* de Jorge Hernández-Tello, Álvaro Cortínez y Blanca Arteaga. El estudio se enmarca en el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge y fue implementado en la Universidad de Tarapacá (UTA), Chile, con estudiantes de Pedagogía en Matemáticas. A partir de una tarea diseñada en tres fases —planteamiento, análisis y reflexión—, los autores muestran cómo futuros profesores comprenden la integral definida como área bajo la curva; concluyendo que la propuesta, apoyada en el uso de GeoGebra, permite a los participantes activar y articular distintos registros de representación semiótica, conectar sus conocimientos previos con nuevas interpretaciones y reconstruir el significado del concepto desde su fenomenología.

Este aporte adquiere una significación especial porque constituye el legado de su autor principal, Jorge Hernández-Tello, joven académico del Departamento de Matemática de la UTA, quien falleció este 2025 a la edad de 35 años. Jorge realizó sus estudios de Pedagogía en Matemática en la UTA, cursó un Magíster en Matemática en la Universidad de Valparaíso y un Magíster en Didáctica de la Matemática en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Al momento de su partida, desarrollaba su tesis doctoral en la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) en España, bajo la dirección de la Dra. Blanca Arteaga.

La Dra. Arteaga, a quién agradecemos su testimonio y contacto con la revista, nos revela la calidez humana y el compromiso de Jorge con la Educación Matemática. La tesis de Jorge comenzó con largas conversaciones en línea en las que, en conjunto con su directora, planificaban, leían, buscaban documentación y diseñaban actividades. El trabajo doctoral fue tomando forma como un diagnóstico cualitativo y cuantitativo de liceos vinculados al Servicio Local de Educación Chinchorro, en el que se involucraron estudiantes de Pedagogía en Matemática de la UTA. Los encuentros virtuales que Jorge compartió con estos futuros profesores le permitieron explorar posibilidades de estudios a la luz de marcos como el Lesson Study y el Noticing, los que investigaba para ayudar a los docentes en formación a desarrollar una mirada profesional capaz de reconocer y valorar el pensamiento matemático de sus alumnos.

Sin duda, Jorge deja un testimonio de dedicación, perseverancia y amor por la enseñanza. Su recorrido académico, iniciado en su propia región y proyectado hacia la colaboración internacional, refleja el compromiso de quienes creen en el poder transformador de la Educación Matemática. Su ejemplo interpela a nuestra comunidad y constituye una inspiración para los jóvenes investigadores que comenzamos a recorrer este camino: trabajar con seriedad científica, pero también con sensibilidad hacia las realidades educativas y con el profundo deseo de contribuir al aprendizaje de los estudiantes. La revista dedica este artículo a su memoria, a su familia, amistades y colegas, confiando en que su legado seguirá vivo en quienes compartieron con él y en quienes, a partir de su trabajo, continuarán construyendo una Educación Matemática más justa y significativa.

Valeria Randolph V.

Editora

https://doi.org/10.46219/rechiem.v17i2.142
Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática,
SSN 2452-5448

REPRESENTACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA VARIABLE ALEATORIA EN SECUNDARIA: UN ESTUDIO DE CASO

REPRESENTATION IN THE TEACHING OF RANDOM VARIABLES IN SECONDARY EDUCATION: A CASE STUDY

Francisco Guantecura Acuña
francisco.guantecura.a@mail.pucv.cl
https://orcid.org/0009-0001-4411-8970
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Hernán Morales Paredes
hmorales@ucsc.cl
https://orcid.org/0000-0002-9683-0927
Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile

RESUMEN

La habilidad de representación constituye un componente fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. No obstante, en el contexto chileno, las clases de matemática continúan estando marcadas por enfoques tradicionales que restringen el desarrollo de esta habilidad. Este estudio tiene como propósito examinar prácticas de enseñanza de una profesora de un establecimiento educativo en la comuna de Lota, Chile, mediante un enfoque cualitativo y un diseño de estudio de caso. El análisis se sustenta en los marcos teóricos de los registros de representación semiótica y del Espacio de Trabajo Matemático. A partir de entrevistas y del análisis de grabaciones de clases, se identificó una comprensión y aplicación limitadas de la habilidad de representación por parte de la docente, junto con un uso restringido de recursos tecnológicos. Se evidencia una tendencia hacia un estilo de enseñanza tradicional y unidireccional, lo que restringe la profundización en esta habilidad. El estudio señala oportunidades de mejora en el dominio del contenido, la integración de software en el aula y el fortalecimiento de estrategias didácticas orientadas al desarrollo de la habilidad de representación, destacando la necesidad de actualizar las prácticas docentes conforme a las exigencias del currículum chileno.

Palabras Clave:
Habilidades matemáticas; práctica pedagógica; Representación en matemática; recursos tecnológicos; Espacio de Trabajo Matemático

ABSTRACT

The ability to represent mathematical ideas is a fundamental component of teaching and learning mathematics. However, in the Chilean context, mathematics classrooms remain largely characterized by traditional approaches that limit the development of this skill. This study aims to examine the teaching practices of a mathematics teacher in a school located in the municipality of Lota, Chile, through a qualitative approach and a case study design. The analysis is grounded in the theoretical frameworks of semiotic representation registers and the Mathematical Working Space. Based on interviews and the analysis of classroom recordings, the findings reveal a limited understanding and application of representational skills by the teacher, as well as minimal use of technological resources. A strong tendency toward a traditional, unidirectional teaching style is observed, which restricts the depth at which this skill is addressed. The study identifies opportunities to enhance content knowledge, incorporate software into teaching practices, and strengthen didactic strategies to promote representational competence, emphasizing the need to update teaching practices in alignment with the demands of the Chilean curriculum.

Keywords:
Mathematical skills; pedagogical practice; mathematical representation; technological resources; Mathematical Working Space

Recibido 14 de octubre 2024, Aceptado 25 de agosto 2025

1. INTRODUCCIÓN

Una de las competencias fundamentales que un profesor de matemática debe dominar es la capacidad de enseñar su disciplina para el logro de aprendizajes significativos. Esta competencia implica tanto el dominio del conocimiento matemático como la familiarización con las teorías de la didáctica (Azocar et al., 2013). Diversos modelos teóricos de enseñanza han sido propuestos en el campo de la didáctica de la matemática (Arteaga y Macías, 2016), de modo que el docente debe mantener un equilibrio entre ambas dimensiones del conocimiento, en lo que Brousseau (1998), citado en Chamorro (2005), denomina “saber matemática”.

En el ámbito de la Educación Matemática, el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2015) establece el desarrollo de cuatro habilidades básicas que deben trabajarse de manera transversal desde la educación primaria hasta la secundaria: resolución de problemas, argumentación y comunicación, modelación y representación (representar). Para lograr este propósito en la práctica, es responsabilidad del docente gestionar un proceso didáctico que contemple actividades y metodologías innovadoras que favorezcan el desarrollo de dichas habilidades, incorporando además el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) (MINEDUC, 2013a). En este sentido, el MINEDUC sugiere la utilización de diversas actividades que integren el uso de recursos tecnológicos para el aprendizaje (MINEDUC, 2015).

La habilidad de representación permite al estudiante alternar entre diferentes formas de registros semióticos para comprender un concepto matemático, transformándolo a uno que sea más conveniente para su análisis y que demuestre el aprendizaje (Duval, 2006). Esta habilidad es esencial en varios currículos internacionales, así como en evaluaciones destacadas como TIMSS o PISA (Kadijevich et al., 2023). Además, las diferentes representaciones ofrecen diversos aspectos de un concepto o relaciones más complejas del mismo, permitiendo una mejor comprensión de este. Por tanto, el trabajo de esta habilidad es fundamental para la correcta comprensión de los conceptos matemáticos y constituye un pilar de las habilidades básicas (Watson y Mason, 2006).

Con los avances y beneficios de las tecnologías en la educación (Grisales, 2018), la integración de estas herramientas en la enseñanza de la matemática plantea tanto un desafío como una oportunidad (Alpízar et al., 2012; Ramírez y Rodríguez, 2023). No obstante, esta tarea exige del docente un dominio simultáneo de tres elementos interconectados: el contenido matemático, la promoción de habilidades matemáticas y el dominio de los recursos tecnológicos (Mishra y Koehler, 2006). La implementación de un examen adecuado sobre el dominio de las habilidades matemáticas con TIC en los docentes es imprescindible para poder diseñar estrategias efectivas que faciliten la transición hacia un modelo de enseñanza más integrador de las tecnologías con el conocimiento matemático (MINEDUC, 2013b).

A pesar de estas orientaciones, las aulas de matemática en Chile continúan caracterizándose por un aprendizaje centrado en el contenido, más que en el estudiante, lo que se traduce en un enfoque tradicional de la enseñanza (Samuel et al., 2021; Videla et al., 2022). Esta situación conlleva un aprendizaje memorístico, en lugar de significativo, y a menudo deriva en una escasez en el desarrollo de las habilidades propuestas en el currículo (Estrada y Gamboa, 2023).

En el contexto específico de la enseñanza de la probabilidad y estadística, y particularmente del concepto de variable aleatoria, las investigaciones en el uso de tecnología en la formación de profesores están en constante crecimiento (Parra-Muñoz y Díaz-Levicoy, 2025). Sin embargo, es necesario profundizar en cómo estas prácticas se concretan en el aula y cómo contribuyen al desarrollo de la habilidad de representación en los estudiantes. En este sentido, este estudio tiene como objetivo examinar prácticas didácticas de una profesora de matemática de educación media respecto a la promoción de la habilidad de representación y el uso de recursos tecnológicos, en particular en la enseñanza del contenido de variable aleatoria del eje de probabilidad y estadística, establecido en el currículo chileno (MINEDUC, 2015). Asociado a este objetivo, se plantea la siguiente pregunta de investigación, ¿cómo son las prácticas didácticas de una profesora de educación secundaria respecto de la promoción de la habilidad de representación y el uso de recursos tecnológicos en la enseñanza del contenido de variable aleatoria?

2. ANTECEDENTES TEÓRICOS Y CONTEXTUALES

2.1 La habilidad de representación a través de los registros de representación semiótica

Los desafíos de la enseñanza y el aprendizaje matemático demandan estrategias efectivas para la transmisión de contenidos abstractos. Según Duval (2006) este proceso implica actividades cognitivas como conceptualización, reflexión, planteamiento y resolución de problemas. La habilidad de representación, por tanto, juega un papel fundamental en el aprendizaje de la matemática, facilitando el acceso y la apropiación de sus objetos, tal como lo señalan Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández (2023) que plantean que esta habilidad no solo es un proceso cognitivo, sino que además una práctica situada. Duval (2017) introduce en su Teoría de Registros de Representación Semiótica los conceptos de semiosis (producción de una representación) y noesis (captura conceptual de objetos matemáticos). Los registros de representación deben soportar tres actividades cognitivas: la formación de una representación identificable, tratamiento y conversión. Estas dos últimas actividades están relacionadas con la transformación de las representaciones en otras representaciones. El tratamiento ocurre internamente en un mismo tipo de registro, mientras que la conversión es una transformación desde un registro particular, hacia otro de otro tipo (Duval, 2017). La conversión permite la articulación entre los registros de representación, siendo esencial para la comprensión de conceptos matemáticos; los autores Páez y Hitt (2003) señalan que esta transformación se manifiesta cuando se contrasta el trabajo con la vida cotidiana y la visualización abstracta desde un punto de vista matemático.

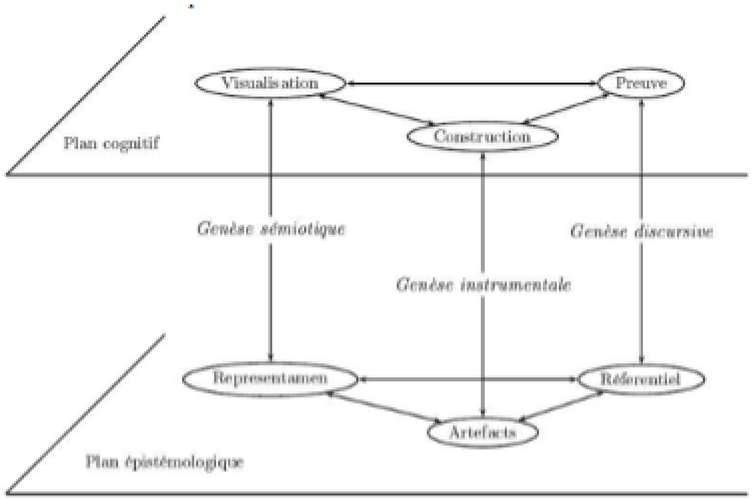
El proceso de aprendizaje de un concepto matemático, por lo tanto, involucra la construcción de diversos registros de representación y la visualización y aprehensión del concepto. De acuerdo con Duval (2017) “no hay noesis sin semiosis” (p.22), lo que indica que un aprendizaje significativo no puede ocurrir sin una apropiada captura y/o asimilación del objeto en sí. Este argumento se vuelve particularmente relevante en la enseñanza de conceptos abstractos como la variable aleatoria, que tiene diversas representaciones semióticas para su comprensión. La enseñanza efectiva de un concepto matemático, según D'Amore (2009), debe incluir la representación en un registro particular, el tratamiento de la representación en registros internos y la conversión de los registros desde uno interno hacia otros. Estos procesos deben ir acompañados de reflexiones, análisis e inferencias.

La labor docente de la enseñanza en matemática, por tanto, debe incluir la propuesta o apropiación de una variedad de representaciones que permitan al estudiante realizar conversiones y tratamientos del contenido. Esto facilitará un aprendizaje más significativo, fomentando el desarrollo de la habilidad señalada, y contrarrestando un paradigma tradicional de enseñanza.

2.2 Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

En la Didáctica de la Matemática, el ETM emerge como una herramienta teórica y conceptual útil para analizar y comprender el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula (Kuzniak, 2011; Kuzniak et al., 2016). El ETM se concibe como un lugar dinámico y abstracto en el que se llevan a cabo y se examinan las situaciones de enseñanza y aprendizaje. Como lo señala Henríquez-Rivas y Vergara (2024), el ETM ha sido utilizado para analizar relaciones teóricas que los profesores de educación secundaria establecen al diseñar e implementar tareas matemáticas, aportando evidencia concreta sobre el uso del ETM en contextos escolares. El ETM comprende dos planos principales: el plano epistemológico, que está vinculado a los conceptos matemáticos, y el plano cognitivo, que se relaciona con el razonamiento del individuo frente a la tarea matemática. No obstante, estos planos no se asignan exclusivamente al profesor o al estudiante, sino que se entienden como componentes de un sistema interrelacionado que da cuenta de un complejo proceso didáctico, en la medida en que se manifiestan las acciones de enseñanza.

Figura 1. Organización del ETM



Nota: Extraído de Kuzniak (2011)

El objetivo de la revisión sistemática es responder las siguientes preguntas, ¿cuál es el objetivo de las investigaciones? ¿qué elementos teóricos y metodológicos se utilizan? ¿qué contenidos o conceptos matemáticos sobre proporcionalidad se han abordado? ¿cuál es el nivel educativo en el que se centran las investigaciones? En la Figura 1 se describe cada fase de la revisión sistemática.

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM) permite analizar de manera organizada el trabajo realizado tanto por el profesor como por el estudiante, considerando los elementos propios de cada campo o contenido matemático. Como se observa en la Figura 1, el plano epistemológico y el plano cognitivo se encuentran interconectados a través de diversos componentes y génesis. El plano epistemológico incluye los componentes de representamen, artefacto y referencial; mientras que el plano cognitivo abarca la visualización, la construcción y la prueba (Kuzniak et al., 2022). El representamen alude a aquello que representa algo en un cierto sentido y capacidad; el artefacto corresponde a cualquier objeto que haya sido transformado, por mínima que sea dicha transformación, por acción humana con un propósito específico; y el referencial se refiere al conjunto de propiedades, definiciones, teoremas y axiomas. Por su parte, la visualización se relaciona con el proceso cognitivo implicado en la identificación y desarrollo de manipulaciones o transformaciones de representaciones o signos; la construcción remite al uso de artefactos en la actividad matemática; y la prueba se sustenta en un discurso deductivo y lógico que debe estructurarse en, o conducir a, afirmaciones con un claro estatus teórico.

2.2.1 Génesis en el ETM

El proceso de relación entre el plano cognitivo y el epistemológico se denomina génesis. En el ETM, se consideran tres tipos de génesis en función de la relación, a saber, génesis semiótica, génesis instrumental y génesis discursiva. Cada génesis tiene un significado diferente dependiendo del plano desde el que se observe u ocurra la relación. La génesis semiótica corresponde al proceso de decodificación e interpretación de signos de una representación; la génesis instrumental describe la acción del uso adecuado de varias técnicas asociadas al artefacto; y la génesis discursiva: Se refiere al proceso deductivo del discurso de prueba apoyado en las propiedades de la estructura del referencial (Kuzniak et al., 2022; Kuzniak, 2011).

Estas relaciones entre los dos planos y sus génesis ayudan a entender la circulación del conocimiento dentro del trabajo matemático, lo que permite observar el progreso del aprendizaje de los estudiantes y de la enseñanza de los profesores. Kuzniak et al., (2022) afirman que las génesis "sirven para precisar las validaciones utilizadas para resolver las tareas, es decir, la manera de definir los elementos comunicativos y heurísticos del trabajo matemático" (p.15). Para describir los diferentes tipos de pruebas en relación con las diferentes génesis y los planos del ETM, Richard et al. (2019) han propuesto varias formas.

2.2.2 La fibración y los movimientos en el plano y las componentes del ETM

Las fibraciones son las que permitirán visualizar las diferentes transiciones y actividades específicas entre las componentes del ETM. Se señalan en particular tres tipos de fibraciones internas que, dependiendo de la componente que se active, recibe un nombre u otro, teniendo así un efecto sobre la génesis semiótica, instrumental y/o discursiva. De acuerdo con Richard et al. (2019) y Kuzniak et al. (2022) la fibración Tipo 1 está asociada a la componente del plano epistemológico artefacto, cumpliendo un rol de operador. Un operador puede ser semiótico, material o conceptual, dependiendo del nivel de conexión o influencia asociado a cada plano. Por su parte, la fibración Tipo 2 se articula desde el plano epistemológico en la componente referencial y cumple un rol de control. De igual modo, dependiendo de intensidad de conexión respecto de cada plano, se muestra un control semiótico, material o gráfico-discursivo. Por último, la fibración Tipo 3 está asociada a la componente representamen, y cumple un rol de representación. La interpretación de este tipo de fibración dependerá de la conexión que se esté realizando, teniendo así una representación semiótica, material o discursiva gráfica.

3. METODOLOGÍA

La presente investigación se enmarca en un enfoque descriptivo e interpretativo (Hernández et al., 2014), a través de un Estudio de Caso como método de investigación predominante, conforme a la definición proporcionada por Araneda et al. (2008). Este método habilita un análisis sistemático y en profundidad de un fenómeno específico. Se busca una comprensión detallada y completa de una situación particular, que es el caso de una profesora de educación media en matemática. La profesora se desempeña en un colegio de la comuna de Lota, en Chile, de un alto nivel de vulnerabilidad y cuenta con 5 años de experiencia en el nivel educativo.

La elección de este caso no responde a criterios de representatividad ni busca ilustrar un problema generalizado, sino que obedece al interés intrínseco que presenta el propio caso (Stake, 2007). El enfoque cualitativo del estudio permite reconocer los factores subjetivos que desempeñan un papel importante en el análisis de datos y en la interpretación de los fenómenos.

Para la obtención de la información se realizó una entrevista semiestructurada, grabación en video de clases, y luego se llevó a cabo el análisis de la información.

Para este estudio, el análisis de la habilidad de representación se centra específicamente en la conversión entre registros de representación semiótica, según lo propuesto por Duval (2006, 2017).

3.1 Entrevista semiestructurada

La entrevista semiestructurada se presenta como la primera técnica de recolección de información en este estudio. Según Hernández et al. (2014), esta técnica se sustenta en una guía de preguntas que posibilita la inclusión de cuestionamientos adicionales dependiendo de las exigencias informativas emergentes durante el desarrollo de la entrevista, fomentando así una profundización exhaustiva en los temas de interés. Tras la validación de la entrevista semiestructurada y considerando los antecedentes de los jueces expertos, se realizaron las modificaciones pertinentes y se procedió con la aplicación. La entrevista semiestructurada constó finalmente de ocho preguntas, las que estuvieron asociadas con una pregunta secundaria en el mismo ítem, formando un hilo conductor que facilitó una conversación fluida con la profesora. Se elaboraron cuatro preguntas para cada una de las siguientes categorías: C1 Comprensión y aplicación de la habilidad de representación en matemática y C2 Uso y conocimiento de recursos tecnológicos para la enseñanza de la matemática.

3.2 Grabación en video de clases

Para concluir el proceso de recolección de información, se grabó una clase presencial de la profesora en un curso de segundo medio con aproximadamente 15 estudiantes. El contenido correspondió a la introducción de variable aleatoria (discreta). La docente presentó el tema mediante una exposición con uso de PowerPoint, enfocándose en el siguiente objetivo de aprendizaje: “mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas: definiendo la variable; determinando los posibles valores de la incógnita; calculando su probabilidad y graficando sus distribuciones” (MINEDUC, 2015, p.154). Finalizada la grabación, la clase fue transcrita íntegramente para su posterior análisis.

4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

4.1 Análisis de entrevista

Para el análisis de la entrevista semiestructurada, primero se realizó su transcripción. Posteriormente, se llevó a cabo un proceso de reducción y codificación de la información obtenida en una matriz de registro, en el que se plasmó la respuesta textual de la profesora a cada una de las preguntas. Luego, se analizó por separado cada una de las respuestas, con el fin de interpretar y clasificar los hallazgos obtenidos por categorías. A continuación, se presenta el análisis de cada entrevista.

Síntesis categoría C1

Pregunta 1: ¿Qué entiende por representación?, ¿cómo se asocia con la matemática? La profesora asocia la representación con una visualización gráfica de conceptos matemáticos, lo que se evidencia en su uso de dibujos y objetos cotidianos, como la pizza, para enseñar fracciones. Si bien esto demuestra un entendimiento básico y práctico de la representación, podría sugerir una falta de conocimiento de representaciones más abstractas o complejas que podrían ser útiles en matemática de nivel superior.

Pregunta 2: ¿Trabaja la representación en el contenido de matemática?, ¿cómo y por qué? La profesora valora la habilidad de representación y la integra en su enseñanza, como se evidencia en el uso de una balanza para enseñar ecuaciones. Sin embargo, también se nota una autocrítica y una conciencia de que hay áreas donde le cuesta implementarla. Esto sugiere que puede haber un espacio para el desarrollo profesional en términos de comprender cómo se puede trabajar la representación en un rango más amplio de contenidos matemáticos.

Pregunta 3: ¿Cuál es su percepción general sobre el uso de representaciones en los contenidos de matemática que enseña? La profesora muestra un sentido de autoreflexión en su práctica y un deseo de mejorar su uso de la representación en su enseñanza. Aunque reconoce sus limitaciones, especialmente en áreas como las potencias y la geometría, parece dispuesta a explorar nuevas formas de incorporar la representación en su enseñanza. Esto sugiere que, con el apoyo y la formación adecuados, podría mejorar y diversificar su uso de la representación en la enseñanza de la matemática.

Pregunta 4: ¿Conoce algún proceso o estrategia por el cual se deba trabajar la habilidad de representación en matemática? La profesora parece tener una estrategia práctica para enseñar la representación a través de la visualización de fracciones. Sin embargo, parece limitada en su capacidad para extender esta estrategia a otros contenidos, lo que sugiere una posible brecha en su conocimiento pedagógico del contenido. Dado que la representación es una habilidad importante en la matemática, sería beneficioso que la profesora tuviera la oportunidad de aprender y desarrollar una gama más amplia de estrategias de representación para diversos contenidos.

Síntesis de la categoría C2

Pregunta 1: ¿Qué softwares o programas utiliza para desarrollar su clase de matemática?, ¿y en probabilidad y estadística? La profesora menciona la utilización de PowerPoint y videos, además de una aplicación de juego online, Quizizz, en un entorno de clase virtual. Sin embargo, no ha utilizado software o programas específicos para la enseñanza de probabilidad y estadística. Este hecho podría indicar una brecha en su habilidad para integrar recursos tecnológicos en la enseñanza de estos temas, lo cual es cada vez más relevante en la educación contemporánea.

Pregunta 2: De la siguiente lista: R- Estudio, GeoGebra, Excel, JASP, SPSS, ¿qué software o programas para el trabajo de la probabilidad y estadística conoce? Aunque la profesora reconoce haber aprendido a usar Excel en la universidad y conocer GeoGebra, parece no tener un dominio práctico de estos programas en la enseñanza de la matemática. Además, no reconoce otros programas importantes de la lista proporcionada, lo que sugiere que puede haber una limitación en su repertorio de recursos tecnológicos para la enseñanza.

Pregunta 3: ¿Cómo conoció los diferentes tipos de software o programas que utiliza (capacitaciones, universidad, etc.) ?, ¿cree que son suficientes? La universidad parece haber sido el principal entorno donde la profesora fue introducida a estos programas, pero no parece haber habido una capacitación posterior que le permitiera desarrollar un dominio más profundo o ampliar su repertorio de programas conocidos. Aunque la profesora no aborda directamente si cree que los programas que utiliza son suficientes, su limitado conocimiento de los programas de la lista proporcionada sugiere que podría beneficiarse de una mayor capacitación o exploración de recursos tecnológicos para la enseñanza de la matemática.

Pregunta 4: ¿Cree que para el trabajo de la matemática son necesarios estos tipos de programas? La profesora ve el valor de estos programas en la enseñanza de la matemática, especialmente en términos de proporcionar diferentes maneras de entender conceptos y verificar resultados. Sin embargo, su uso actual de estos programas parece limitado principalmente a presentaciones y recursos de video, lo que indica un potencial sin explotar para incorporar más plenamente estos recursos en su práctica de enseñanza.

4.2 Análisis de las clases grabadas mediante el ETM

Para el análisis de la sesión de clase grabada, se utilizó el ETM como marco estructural de referencia para verificar si la profesora logra promover la habilidad de representación en el aula de clases, ya sea con recursos tecnológicos o no. Por lo tanto, para el análisis se transcribió la clase completa y se analizaron fragmentos de actividades, diálogos y/o guías que la profesora realice con los estudiantes. Para la interpretación del ETM, se considerará que cualquier tipo de fibración tipo 3 estará promoviendo, en algún grado, la habilidad de representación, y por lo tanto estará justificando la categoría C1. También se tendrá en consideración si dicha actividad conlleva o no el uso de recursos tecnológicos. En ese sentido, se debería producir una fibración tipo 1 como operador semiótico en la componente artefacto, asociada a C2. A modo de ejemplo, y contextualización, presentamos el proceso de análisis de un momento de la clase; el inicio.

Tabla 1. Ejemplo de análisis de clase

Momento	Inicio
Código	IC1
Tipo de fibración	2 (Control gráfico-discursivo)
Evidencia, texto y/o imágenes	PROFESORA: ¿Ya? Cambiamos entonces. Antes de comenzar de lleno con el contenido, vamos a partir con una pregunta, ¿alguien sabe, conoce o cree que es una variable aleatoria, o se le ocurre a través del nombre? Variable aleatoria, ¿la han escuchado alguna vez? ESTUDIANTE 1: Parece que sí. PROFESORA: Alguien, ¿no?, ni con el nombre no se le asocia algo ESTUDIANTE 2: Escoger un valor al azar PROFESORA: Puede ser, muy bien. ESTUDIANTE 1: Algo aleatorio.
Comentario	La profesora inicia un diálogo y discusión sobre el concepto de variable aleatoria a través de una pregunta. Posteriormente, concede tiempo a los estudiantes para que anoten el objetivo.

A continuación, se analizan algunos fragmentos específicos de la clase, de acuerdo al código y momento de la clase.

4.2.1 Análisis específico de la clase IC1

Al inicio de la clase, la profesora plantea la pregunta: “¿Qué es una variable aleatoria?”. Sin el apoyo de una estructura visual que permita a los estudiantes conectar con alguna idea previa, activa el componente referencial del plano epistemológico, generando de forma incipiente una génesis discursiva mediante un operador nocional. Más adelante, durante el desarrollo de la clase, proyecta y verbaliza el ejemplo del experimento de lanzar un dado, reflexionando junto a los estudiantes sobre los posibles valores que pueden aparecer en sus caras. Este procedimiento induce un proceso cognitivo de visualización, en el que los estudiantes representan mentalmente el dado y los posibles resultados de su lanzamiento. De este modo, se activa nuevamente el plano epistemológico, aunque de forma superficial, a través del componente referencial, estableciendo una génesis semiótica de control.

5. RESULTADOS

5.1 Resultados de la entrevista

Categoría 1: Los resultados obtenidos de las entrevistas y análisis en el estudio indican un panorama compuesto en el entendimiento y la aplicación de la habilidad de representación en matemática por parte de la docente.

La docente reconoce la importancia del uso de la representación en matemática como una estrategia esencial para la entrega de contenido. No obstante, su entendimiento del concepto de la habilidad de representación parece limitado a una definición básica, sin explorar su significado y aplicabilidad más profundos. En su práctica docente, utiliza la representación principalmente en contextos concretos y visualizables, como el uso de dibujos y objetos cotidianos para enseñar fracciones.

Categoría 2: Los resultados de las entrevistas y análisis realizados sobre el uso de tecnología en la enseñanza de la matemática por parte de la docente presentan una panorámica mixta en términos de conocimiento, uso y percepción de la utilidad de los recursos tecnológicos.

La docente menciona el uso de PowerPoint y Quizizz, una plataforma de juegos online, en sus clases de matemática, pero parece confundir el concepto de software o programa con la idea general de recurso tecnológico, incluyendo el uso de videos. Además, en el área específica de probabilidad y estadística, la docente no utiliza ni conoce de un software o programa específico para el desarrollo de estos temas.

5.2 Resultados del análisis del ETM

De acuerdo con el análisis del ETM de la profesora durante la clase, se evidencia un enfoque de enseñanza principalmente tradicional. La profesora estableció el contenido de la lección de manera autoritaria, sin dedicar tiempo suficiente a un análisis detallado tanto por parte suya como de los estudiantes. En relación con la promoción de la representación, según los criterios establecidos, esta habilidad no se fomentó adecuadamente. Aunque se observó una presencia dominante del componente referencial, éste no llegó a alcanzar un nivel de fibración significativo. Esto indica que el componente referencial no se activó de manera profunda, lo que coincide con los resultados de la entrevista realizada a la profesora en la categoría C1. La profesora presenta un enfoque pedagógico directo y eficaz, centrado en la presentación de conceptos y ejemplos relevantes. No obstante, a pesar de la claridad de la exposición y el uso de recursos visuales, su estilo de enseñanza es fundamentalmente unidireccional, limitando las oportunidades para que los estudiantes se involucren activamente en el análisis de los temas presentados. En términos de la habilidad de representación, la falta de profundidad en el análisis de las representaciones utilizadas, junto con la escasez de incentivos para que los estudiantes creen sus propias representaciones, sugiere que no se está fomentando esta habilidad de manera efectiva.

6. CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio fue examinar las prácticas didácticas de una profesora de matemática de educación media respecto a la promoción de la habilidad de representación y el uso de recursos tecnológicos en la enseñanza del contenido de variable aleatoria. A partir de este objetivo, se planteó la pregunta de investigación: ¿Cómo son las prácticas didácticas de una profesora de educación secundaria respecto de la promoción de la habilidad de representación y el uso de recursos tecnológicos en la enseñanza del contenido de variable aleatoria?

Los resultados obtenidos a través del análisis de entrevistas y ETM permiten responder a la pregunta de investigación, caracterizando que las prácticas docentes observadas se enmarcan en un enfoque tradicional y unidireccional, con un uso limitado de la habilidad de representación y una integración incipiente de recursos tecnológicos.

En relación con la habilidad de representación, se constató que la profesora reconoce su importancia, pero su comprensión y aplicación respecto del contenido de variable aleatoria se restringe mayormente a representaciones algebraicas, sin una exploración de otros tipos de registros como tablas o graficas ni el uso de tratamientos o conversiones. El análisis de la clase mostró que las oportunidades para que los estudiantes construyan sus propias representaciones son escasas, y que las interacciones en el aula son mayormente expositivas.

Respecto al uso de tecnología, si bien se utilizan herramientas como PowerPoint y plataformas como Quizizz, no se evidencia una integración efectiva de software especializado para la enseñanza de probabilidad y estadística, lo cual limita el potencial de enriquecimiento del aprendizaje mediante recursos digitales.

Los hallazgos sugieren la necesidad de fortalecer la formación docente en dos dimensiones: por un lado, en el desarrollo de estrategias didácticas que promuevan de manera más profunda la habilidad de representación, y por otro, en la integración efectiva de recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Cabe señalar que estos resultados también deben considerarse en el contexto específico del establecimiento educativo, que presenta índices de vulnerabilidad que pueden influir en la dinámica de aula y en las prioridades del trabajo docente (Silva, 2015). Asimismo, la etapa de transición profesional de la docente desde la formación inicial al ejercicio profesional (Solís et al., 2016) podría explicar en parte las limitaciones observadas.

Finalmente, futuras líneas de investigación podrían considerar una ampliación de la muestra, así como estudios longitudinales que evalúen el impacto de intervenciones formativas orientadas a mejorar la enseñanza de la representación y la integración tecnológica en el aula de matemática.

5. REFERENCIAS

Alpízar Vargas, M., Barrantes Quirós, J. P., Bolaños González, H., Céspedes López, M., Delgado Carvajal, E., Freer Paniagua, D., Padilla Mora, E. R., y Víquez Ortiz, M. F. (2012). Aspectos relevantes sobre la formación docente en I y II ciclos en los temas probabilidad y estadística. Revista Electrónica Educare, 16(2), 113–129.

Araneda, A., Parada, M., y Vásquez, A. (2008). Investigación cualitativa en educación y pedagogía. UCSC.

Arteaga, B., y Macías, J. (2016). Didáctica de la matemática en educación infantil. UNIR.

Azocar, K., Bara, M., y León, N. (2013). Planificación de la matemática escolar como elemento clave en la formación del docente. Paradigma, 32(2), 177-200. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/524

Chamorro, M. (2005). Didáctica de las matemáticas. PEARSON.

D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Revista científica, (11),150-164. https://doi.org/10.14483/23448350.419

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática. La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, 9(1). 143-168. http://gaceta.rsme.es/vernumero.php?id=61

Duval, R. (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations. Springer.

Estrada, F., y Gamboa, M. (2023). Evaluación del aprendizaje de matemáticas basada en la reflexión metacognitiva en Educación Media Superior. Didáctica y Educación, 14(3), 259–276. https://revistas.ult.edu.cu/index.php/didascalia/article/view/1718

Grisales, M. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. Entramado, 14(2), 198-214. https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.4751

Henríquez-Rivas, C., y Vergara, A. (2024). Relaciones teóricas en el ETM idóneo efectivo de profesores de educación secundaria. UCMaule, 67, 63-87. https://doi.org/10.29035/ucmaule.67.63

Henríquez-Rivas, C. y Verdugo-Hernández, A. (2023). Diseño de tareas en la formación inicial docente de matemáticas que involucran las representaciones de una función. Educación Matemática, 35(3), 178-208. DOI: https://doi.org/10.24844/em3503.06

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la Investigación. Mc Graw Hill.

Kadijevich, D. M., Stephens, M., Solares-Rojas, A., y Guberman, R. (2023). Impacts of TIMSS and PISA on Mathematics Curriculum Reforms. En Y. Shimizu y R. Vithal (Eds.), Mathematics Curriculum Reforms Around the World (Capítulo 22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_22

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses géneses. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 9-24. https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., y Richard, P.R. (2022). Mathematical Work in Educational Context. Springer.

Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. ZDM Mathematics Education, 48(6), 721–737. https://doi.org/gf74w3

MINEDUC. (2013a). Matriz de Habilidades Tic para el Aprendizaje. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/2165

MINEDUC. (2013b). ¿Qué dice el SIMCE TIC? Desarrollo de habilidades digitales para el siglo XXI en Chile. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/2130

MINEDUC. (2015). Bases Curriculares 7° básico a 2°medio. https://n9.cl/n74mk

Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teachers' knowledge. Teachers College Record, 108 (6), 1017–1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Páez, R.E., y Hitt, F. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, (32), 97-108. https://www.grao.com/es/producto/dificultades-de-aprendizaje-del-concepto-de-limite-de-una-funcion-en-un-punto

Parra-Muñoz, J., y Díaz-Levicoy, D. (2025). El uso de tecnología para la enseñanza de la probabilidad en formación de profesores de matemática: una revisión sistemática. Revista Espacios, 46(02), 259-267. 10.48082/espacios-a25v46n02p20

Richard, P.R., Venant, F., y Gagnon, M. (2019). Issues and challenges about instrumental proof. Springer.

Ramírez, L., y Rodríguez J. (2023). Implementación de herramientas tecnológicas para enseñar probabilidad y estadística: una revisión sistemática. EDU Review, 11(2), 155–171.

Samuel, M., Seckel Santis, M. J., Parra, H., Garrido, R., y Cabezas, C. (2021). Teachers' perceptions of the construction of mathematical concepts in everyday contexts. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 23(3). https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5615

Silva Pino, J.M. (2015). Educación en contextos vulnerables: una crítica al sistema educativo [Tesis de pregrado, Universidad Alberto Hurtado]. https://repositorio.uahurtado.cl/discover

Solís Zañartu, M.C., Núñez Vega, C., Contreras Valenzuela, I., Vásquez Lara, N., y Ritterhaussen Klaunning, S. (2016). Inserción Profesional Docente: problemas y éxitos de los profesores principiante. Estudios Pedagógicos, 42(2), 331-342. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000200019

Stake, R. (2007). Investigación con estudio de casos. Morata

Videla, R., Rossel, S., Muñoz, C., y Aguayo, C. (2022). Online Mathematics Education during the COVID-19 Pandemic: Didactic Strategies, Educational Resources, and Educational Contexts. Education Sciences, 12(7), 492. http://dx.doi.org/10.3390/educsci12070492

Watson, A. y Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: using variation to structure sense-making. Mathematics thinking and learning, 8(2), 91–111. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0802_1

https://doi.org/10.46219/rechiem.v17i2.176
Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE INGENIERÍA: UN ESTUDIO EN LA UNIVERSIDAD DE ATACAMA, CHILE

DIFFICULTIES IN LEARNING TRIGONOMETRIC EQUATIONS AMONG FIRST-YEAR ENGINEERING STUDENTS: A STUDY AT THE UNIVERSITY OF ATACAMA, CHILE

Ricardo Guerra Iriarte
ricardo.guerra@uda.cl
https://orcid.org/0009-0001-2125-0602
Universidad de Atacama, Chile

Ismenia Guzmán Retamal
ismenia.guzman@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0002-2881-989X
Universidad de Los Lagos, Chile

Felipe Guevara Morales
felipe.guevara@uda.cl
https://orcid.org/0000-0002-9473-9548
Universidad de Atacama, Chile

RESUMEN

Esta investigación surge a partir de los conocimientos insuficientes evidenciados por estudiantes del curso inicial de Álgebra I de Ingeniería Civil en la Universidad de Atacama. Su propósito principal es indagar en las dificultades y errores que enfrentan al resolver ejercicios de trigonometría. Se adoptó una metodología cualitativa descriptiva, con validación interna, utilizando como instrumentos dos problemas extraídos de una evaluación. Mediante el análisis didáctico, se examinaron los objetivos de cada problema y las respuestas textuales de los estudiantes, lo que permitió determinar el conocimiento matemático requerido y las habilidades cognitivas necesarias para su resolución. Los resultados evidencian que las prácticas docentes presentan limitaciones en el refuerzo del cambio entre registros semióticos, aspecto que incide en la comprensión de los estudiantes. Asimismo, el análisis de las producciones escritas permitió identificar deficiencias en la operatoria con fracciones algebraicas y en la resolución de ecuaciones trigonométricas. Finalmente, se observó que los estudiantes presentan dificultades en la transición desde un álgebra escolar, centrada en procedimientos, hacia un enfoque universitario que integra múltiples registros semióticos.

Palabras clave:
Álgebra, Trigonometría, Dificultades, Duval

ABSTRACT

This study originates from the insufficient knowledge exhibited by first-year Civil Engineering students enrolled in Algebra I at the University of Atacama. Its main objective is to investigate the difficulties and errors encountered by students when solving trigonometry exercises. A qualitative descriptive methodology with internal validation was adopted, using two problems from an assessment as research instruments. Through didactical analysis, the goals of each problem and the students' written responses were examined, which made it possible to identify the required mathematical knowledge and the cognitive skills needed for their resolution. The findings reveal that teaching practices show shortcomings in reinforcing the transition between semiotic registers, which limits students' understanding. Moreover, the analysis of students' written productions identified deficiencies in operating with algebraic fractions and in solving trigonometric equations. Finally, it was observed that students face difficulties in the transition from a school-level algebra focused on procedures to a university-level approach that integrates multiple semiotic registers.

Keywords:
Algebra, Trigonometry, Difficulties, Duval

Recibido 10 de noviembre 2025, Aceptado 17 de julio 2025
Revista Chilena de Educación Matemática, Volumen 17, N°2

1. INTRODUCCIÓN

La problemática de esta investigación tiene que ver con las dificultades que encuentran los estudiantes del primer año del curso de Álgebra I, del plan común de las carreras de Ingeniería Civil, de la Universidad de Atacama de Chile. Las evaluaciones muestran una insuficiencia de conocimientos del Álgebra escolar en los diferentes temas que aborda el programa del curso, en particular en el dominio de la operatoria con expresiones algebraicas y en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

La Universidad de Atacama es una universidad pública del Estado de Chile, su sede central se encuentra ubicada en el norte del país, en la ciudad de Copiapó, región de Atacama. Además de las Facultades de Ingeniería, Humanidades y Educación, Ciencias Jurídicas y Sociales, Ciencias Naturales, Ciencias de la Salud y Facultad de Medicina, la universidad cuenta con un Instituto Tecnológico y un Centro de Formación Técnica.

La región de Atacama basa su economía en la actividad minera, y debido a ello, las carreras de pregrado que imparte la Universidad de Atacama tienen en su mayoría relación con el desarrollo de dicha actividad. En este sentido, la Facultad de Ingeniería dicta las carreras de pregrado en Ingeniería Civil en Minas, Ingeniería Civil en Metalurgia, Ingeniería Civil en Computación e Informática, Ingeniería Civil Industrial, Geología e Ingeniería Comercial.

Las carreras de Ingeniería Civil, mencionadas anteriormente, tienen en sus dos primeros años un programa común en ciencias básicas, donde el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Atacama es el encargado de dictar los cursos correspondientes a su área. Este estudio concentra su atención en el curso Álgebra I del plan común de Ingeniería Civil, se imparte en el primer semestre del primer año académico del estudiante. Los contenidos declarados en el programa del curso son concentrados en cuatro unidades, y que resumidamente son: sumatoria y progresiones, trigonometría, geometría analítica y sistemas de ecuaciones.

La Universidad de Atacama, aunque localizada en una región específica, enfrenta desafíos similares a los de otras universidades con programas de ingeniería en Latinoamérica. Estos desafíos incluyen la alta tasa de deserción en materias fundamentales y las dificultades en la transición desde la educación secundaria a la universitaria en áreas STEM. En concreto, la deserción universitaria se refiere al fenómeno en el cual los estudiantes abandonan sus estudios antes de completar su carrera universitaria, ya sea de manera voluntaria o forzosa. Según estudios, la deserción en la educación superior chilena fluctúa entre el 20% y el 30%, con algunas variaciones dependiendo del tipo de carrera y la institución (Barahona et al., 2016; González y Uribe, 2018). Indicando, además, que las tasas de deserción son más altas en áreas como matemáticas, ingeniería y ciencias. A esta realidad la Universidad de Atacama no es ajena, teniendo una tasa de deserción general del 24% y la facultad de ingeniería de la misma universidad con una tasa de deserción del 25%.

Un estudio realizado sobre la deserción en la Universidad de Atacama (Barahona, Veres y Aliaga, 2016) manifestó que “las variables explicativas del rendimiento académico están relacionadas con las notas de ingreso a la Universidad, la asistencia a clase y el tipo de tipología del establecimiento de procedencia”. Esta realidad es coincidente con los factores que inciden en la retención de estudiantes de universidades chilenas y de Latinoamérica (Bedregal-Alpaca et al., 2020).

Ahora bien, centrado en la formación específica de un ingeniero, no cabe duda de que las matemáticas son una disciplina relevante (Sancho-Vinuesa et al., 2018) y aprenderlas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, algoritmos, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios (Santos, 2011). Este estudio se preocupa, concretamente, en el aprendizaje de la trigonometría que se desarrolla en el curso denominado Álgebra 1. En este caso nos centramos en la trigonometría debido a que es considerada una herramienta esencial en diversas ramas de la ingeniería (Colombo et al., 2017).

En relación con esta problemática, se han realizado investigaciones sobre las dificultades en álgebra, por ejemplo, Aray et al. (2020) afirman: “La enseñanza de la trigonometría requiere de una apropiación conceptual y el emprendimiento de nuevos procesos que tomen en cuenta la innovación por parte del docente para mejorar la enseñanza y el dominio de contenidos básicos. [...] Se trata de un propósito complejo que requiere de algunas cuestiones fundamentales como el hecho de la práctica constante de los recursos tecnológicos actuales que existen en esta rama". Por otro lado, debemos considerar lo que mencionan Castro y Cárcamo (2023) sobre errores en la resolución de ecuaciones trigonométricas, ellos citan a Riccominni (2005) quién señala que la enseñanza está enfocada en la aplicación de reglas y estrategias irrelevantes debido a la ausencia de información sobre patrones y errores que cometen los estudiantes, finalmente Guerra (2009) realizó un análisis sobre cómo los estudiantes entienden las expresiones algebraicas cuando comienzan a aprender álgebra relata que una de las principales dificultades radica en la comprensión y manipulación de expresiones algebraicas. Los estudiantes normalmente enfrentan obstáculos en la interpretación de las letras y símbolos utilizados en el álgebra.

Ya enfocado específicamente en la trigonometría, Scholz y Montiel (2017) dan cuenta de la escasez de investigaciones que aborden el pensamiento geométrico relacionado con el estudio de lo trigonométrico, mencionando que a lo más se resalta la visualización en su enseñanza y aprendizaje, pero en cuanto al pensamiento variacional, una de las pocas propuestas que abordan un poco el tema es la de Moore et al. (2012) la cual menciona el razonamiento covariacional.

Otro estudio, sobre el tema del pensamiento matemático, sostiene que ahora podemos hablar del desarrollo del pensamiento matemático y de la construcción del conocimiento a través de prácticas, y no solo basándonos en las secuencias lógicas y estructuradas que han sido tradicionales en la enseñanza de los conceptos. (Beltran y Montiel., 2016).

En general, el énfasis en la enseñanza de la trigonometría se encuentra en el aprendizaje de propiedades y operatoria algebraica, dejando de lado otras propiedades inherentes a los conceptos trigonométricos. Ahora, si consideramos las expresiones trigonométricas, que requieren un registro de representación diferente al registro de los números, Duval (2004) señala: "Veremos que la conversión de representaciones es para el aprendizaje, una actividad tan fundamental como las actividades de conversión o de tratamiento. Ya que, sólo la conversión puede favorecer la comprensión a través de la coordinación de los registros de representaciones en juego". En esta investigación sobre ecuaciones trigonométricas identificamos dos registros de representación en juego, el registro de las expresiones algebraicas y el registro de las funciones trigonométricas, en cada registro semiótico es necesario reconocer las notaciones utilizadas en cada uno de ellos para no confundirlas y poder coordinarlas.

En esta investigación sobre ecuaciones trigonométricas identificamos dos registros de representación en juego, el registro de las expresiones algebraicas y el registro de las funciones trigonométricas, en cada registro semiótico es necesario reconocer las notaciones utilizadas en cada uno de ellos para no confundirlas y poder coordinarlas.

También es importante distinguir entre el marco matemático del álgebra, que incluye sus objetos (expresiones algebraicas), propiedades y reglas operatorias, y el marco matemático de la trigonometría, que abarca sus objetos (funciones trigonométricas), notaciones, identidades trigonométricas y reglas operatorias.

Para el desarrollo del estudio nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

¿De qué naturaleza son los errores cometidos por los estudiantes del curso de álgebra I de Ingeniería del plan común de la UDA? ¿Estos estudiantes aplican a las actividades de la trigonometría las reglas matemáticas correctas?

2. MARCO TEÓRICO

El Marco teórico se inscribe por una parte, tanto en el marco del Álgebra como el de la Trigonometría, basados en la identificación de los objetos de cada marco, las definiciones y propiedades que permiten operar los objetos, considerando las diferentes representaciones semióticas involucradas.

La Teoría de Registros de Representación Semiótica sostiene que para entender las matemáticas es necesario ser capaz de diferenciar entre un objeto matemático y la manera en que lo representamos. Si no se puede hacer esta separación, no se alcanza una verdadera comprensión de los conceptos (Aguilar Terrones et al., 2022). Desde la perspectiva de esta teoría, se considera cómo los diferentes registros de representación (simbólico, gráfico, numérico, entre otros) intervienen en la comprensión de los conceptos matemáticos y en la resolución de ejercicios y/o problemas. Esta teoría permite analizar cómo los estudiantes interpretan, transforman y conectan las representaciones para construir significado y resolver tareas matemáticas.

Por otra parte, el análisis a priori de los ejercicios propuestos para dejar en evidencia el objetivo de cada uno, los conocimientos matemáticos requeridos y la actividad cognitiva necesaria para resolverlos con éxito. El análisis a priori permite dejar explícitas tanto la respuesta esperada y las posibles respuestas de los y las estudiantes además de los eventuales errores que se pudieran cometer.

Según lo anterior, es necesario detallar con mayor claridad algunos conceptos que serán utilizados en esta investigación para tener una interpretación común de los significados y aclaraciones.

2.1 Teoría de Registros de Representación Semiótica

Esta teoría destaca la importancia de las representaciones en los procesos de aprendizaje y en la construcción del conocimiento. Según Duval (1999), no se puede analizar el conocimiento sin considerar el concepto de representación. Además, Duval enfatiza que el papel crucial de la semiosis —entendida como el proceso mediante el cual se producen, interpretan y transforman significados a través de representaciones semióticas— radica no solo en el uso de un tipo específico de signos, sino en la diversidad de signos que pueden emplearse.

Un aspecto central señalado por Duval es la dificultad que implica cambiar de una representación semiótica a otra. Este cambio, que es fundamental en el aprendizaje matemático, representa un desafío significativo para muchos estudiantes en distintos niveles educativos. De hecho, las observaciones en el aprendizaje de las matemáticas han mostrado que para algunos estudiantes esta operación puede resultar extremadamente difícil, e incluso, en ciertos casos, imposible (Marchetti et al., 2019; Bejarano Segura, 2023).

Según esta teoría, el aprendizaje de matemáticas debe enfocarse en los cambios de representación, ya que esto puede ser difícil para los estudiantes. Lo anterior, es importante en esta investigación porque muestra cómo los alumnos, al no reconocer una función trigonométrica, responden con la aritmética que conocen. Esto se confirma, ya que Duval explica que el pensamiento matemático implica transformar y convertir representaciones.

Así, de esta manera los conceptos que utilizaremos son definidos por Duval (1999) como:

Tratamiento de las representaciones semióticas: Este concepto menciona las transformaciones que ocurren dentro de un mismo sistema de representación, sin cambiar el tipo de representación utilizada. Un tratamiento ocurre cuando utilizamos una expresión trigonométrica sin cambiar su naturaleza simbólica, por ejemplo: 2(sen(x)+1) se puede escribir 2sen(x)+2. Aquí, se realiza una transformación algebraica dentro del mismo sistema de representación (algebraico) por lo que es un tratamiento.

La conversión de representaciones: es la transformación de un objeto de un sistema de representación semiótica a otro, sin que cambie su significado matemático. A diferencia del tratamiento, que opera dentro del mismo sistema de representación, la conversión implica un cambio entre sistemas diferentes. Por ejemplo:

- Registro de lenguaje natural: "El seno de un ángulo de 30 grados es igual a 0.5."
- Registro numérico: sen (30°) = $\frac{1}{2}$
- Registro de escritura simbólica sen(β)=cateto opuesto/ cateto adyacente, donde para β=30° se tiene que sen (30°) = $\frac{1}{2}$

Guerra (2009), sobre el papel de la conversión en la enseñanza, Duval (1999) señala que: “La enseñanza privilegia el aprendizaje de las reglas que conciernen la formación de las representaciones semióticas y las que conciernen su tratamiento. Y esto principalmente para el registro de los discursos en lengua natural, para los registros numéricos y para el registro de la escritura simbólica”. Esta idea muestra que los estudiantes tienen dificultades porque no se les enseña con suficiente importancia a cambiar entre diferentes formas de representar un mismo concepto. En el caso de las funciones trigonométricas, esto es clave, ya que pueden expresarse de varias maneras.

Algunos de los motivos por los cuales no se trabaja la conversión de representaciones son:

- En muchos casos no existen reglas claras para realizar la conversión o su aplicación es muy limitada.
- Algunas veces se cambia de representación

solo para simplificar el trabajo, pero luego se sigue operando en un único registro

- Existe la creencia de que cambiar entre registros es algo inmediato y sencillo, por lo que dedicar tiempo a esta actividad podría verse como una pérdida de tiempo

Fenómenos del cambio de registro: son procesos cognitivos fundamentales que ocurren cuando se realiza una conversión de un objeto matemático representado en un registro semiótico a otro. Estos fenómenos son esenciales en el aprendizaje de las matemáticas, ya que el conocimiento matemático no se puede aprender sin la mediación de diferentes sistemas de representación. Estos fenómenos se clasifican en dos grandes tipos: "la congruencia" y la "no congruencia".

Congruencia: Un cambio de representación es congruente cuando "no altera el significado del objeto representado" Duval (1999), aunque modifique la forma de representación. En este caso, la información contenida en el registro inicial se mantiene intacta tras la conversión a otro registro. Por ejemplo, y=sen(x) representado como ecuación se puede realizar su conversión a su representación en el plano cartesiano. Las dos representaciones (algebraica y gráfica) expresan la misma función sin pérdida de información

La no congruencia: En estos casos, la conversión entre representaciones implica una pérdida o simplificación de la información. Por ejemplo, si el estudiante se enfrenta a una ecuación sen(x)=1/2 y lo transforma a un registro gráfico en el plano cartesiano como y=1/2. Aunque la ecuación tiene soluciones específicas para como x=30° o x= 150°, la gráfica sólo muestra una línea horizontal en y=1/2 y no proporciona directamente las soluciones exactas para la ecuación inicial. Esta conversión pierde la precisión de los valores, por lo que es un ejemplo de no congruencia.

En esta investigación, lo que nos aporta la teoría de Duval es el concepto de representación, esto es que los estudiantes usan lo que ya saben sobre números y expresiones algebraicas para aprender cosas nuevas. Esto es especialmente importante cuando se estudian las funciones trigonométricas, un tema relativamente nuevo para los alumnos, que trae consigo varias dificultades en su aprendizaje.

Por lo tanto, en nuestro estudio observamos las dificultades del aprendizaje de un nuevo objeto que es una función trigonométrica y sus propiedades, estas actividades son diferentes a los marcos matemáticos vistos por los estudiantes.

2.2 Consideraciones matemáticas de las funciones trigonométricas

Para este análisis, usaremos como texto guía de conceptos el libro de Pre-cálculo de James Stewart (2016), inicialmente el autor define a las funciones trigonométricas en la circunferencia de radio 1 (pg. 377) más adelante se enseña a evaluar una función trigonométrica, se define el dominio de una función trigonométrica (pg. 380) posteriormente se enseñan los signos de las funciones trigonométricas, propiedades de la gráfica de la función trigonométrica par e impar y posteriormente las identidades trigonométricas (pg. 382)

En relación con nuestro estudio, es posible considerar los siguientes puntos: Primero, en matemáticas, usualmente los objetos se definen primero, y posteriormente se desarrollan sus propiedades. Este enfoque puede observarse en sistemas axiomáticos y teorías formales donde las definiciones de los conceptos fundamentales preceden a la formulación de teoremas y propiedades derivadas (Giovannini, 2014; Contreras, 2017). Segundo, las propiedades de las identidades tienden a presentarse después de haber establecido otras definiciones básicas. Esto podría deberse a que las identidades requieren previamente una estructura o contexto definido para ser interpretadas y aplicadas correctamente.

2.3 Relación entre ejercicio y problema

Un ejercicio se entiende como una tarea que implica la aplicación de procedimientos o técnicas previamente aprendidas, con una solución directa y sin requerir una comprensión profunda del contexto. En contraste, un problema se considera una situación que presenta una dificultad o desafío, donde la solución no es evidente y requiere de una reflexión profunda, análisis y, a menudo, la aplicación de múltiples estrategias. (Zaldívar y Mayo, 2005).

En el contexto del curso de álgebra I utilizado en esta investigación, la utilización de ejercicios en lugar de problemas en las evaluaciones parciales se debe a que el curso tiene una finalidad de nivelar conocimientos para los cursos posteriores, siendo las competencias desarrolladas y esperadas declaradas en el programa de la asignatura (Facultad de Ingeniería, 2021), competencias de niveles básicos según la taxonomía de Bloom.

3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

El diseño metodológico se estructuró en dos etapas. La primera correspondió al análisis a priori de los ejercicios, mientras que la segunda se centró en el análisis de las respuestas escritas proporcionadas por los estudiantes.

3.1. Análisis a priori de los ejercicios

El presente análisis se enmarca en un enfoque cualitativo descriptivo, orientado a la validación interna según el modelo de Ingeniería Didáctica propuesto por Artigue (1995). Este modelo de investigación en educación matemática ofrece un esquema estructurado para abordar de manera sistemática tanto la indagación científica como la innovación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Consta de cuatro fases principales: la concepción de la ingeniería o propuesta didáctica, los análisis preliminares, el análisis a priori de la experiencia y el análisis a posteriori. La validez de la investigación se establece mediante la confrontación entre las respuestas esperadas, formuladas en el análisis a priori, y las respuestas efectivamente obtenidas en el análisis a posteriori. En nuestro caso, la propuesta corresponde al estudio de dos ejercicios seleccionados de una prueba del curso Álgebra I del plan común de Ingeniería Civil de la Universidad de Atacama, y la experiencia se concreta en la resolución de dichos problemas durante las clases.

3.1.1 Participantes

Los participantes de este estudio fueron 20 estudiantes de primer año del plan común de Ingeniería Civil de la Universidad de Atacama, Chile. Estos estudiantes se inscribieron en el curso de Álgebra 1, una asignatura fundamental dentro de su plan de estudios. El grupo incluyó una diversidad de perfiles académicos y antecedentes educativos, lo que permitió analizar las dificultades comunes y específicas que enfrentan al abordar los contenidos del curso.

3.1.2 Instrumento

El instrumento metodológico utilizado en este estudio estuvo compuesto por dos ejercicios seleccionados de la primera prueba del curso de Álgebra I, centrados específicamente en el tema de trigonometría.

El ejercicio 1 tuvo como objetivo evaluar la aplicación de técnicas para resolver ecuaciones trigonométricas, mientras que el ejercicio 2 buscó medir la capacidad de los estudiantes para demostrar una identidad trigonométrica. En explicitar objetivos del ejercicio, los conocimientos necesarios poner en juego, la respuesta esperada o experta y las posibles respuestas que se supone a priori darían los estudiantes.

Ejercicio 1: Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica, sabiendo que x [0,2π]:

$$cos^2(x) - 3sen(x) = 0$$

Objetivo: Conocer la técnica para resolver una ecuación trigonométrica de segundo grado con una incógnita y dos variables.

La solución esperada: Notar que la ecuación tiene dos funciones diferentes: el cos2(x) y sen(x) por lo tanto, es necesario dejar una sola función en la ecuación, para ello, en este caso conviene reemplazar cos2(x) en función de sen(x), para dejar la ecuación en sen(x), así obtenemos la ecuación trigonométrica:

1. Se aplicará la técnica de resolución de una ecuación de segundo grado.

   Se distribuye:
   $$2 - 2sen^2(x) - 3sen(x) = 0$$
   Se ordena la ecuación:
   $$-2sen^2(x) - 3sen(x) + 2 = 0$$

2. Se obtienen dos valores sen(x)= 1/2 y sen(x)= -2, pero se descarta sen(x) = -2, por recorrido de la función seno.
3. Si sen(x) es 1/2, la solución debe estar en el primer y segundo cuadrante según la gráfica de la función seno.
4. Entonces x es π/6 o también 5π/6
5. Finalmente, la solución de la ecuación trigonométrica dada es π/6 o 5π/6 .

Conocimientos necesarios para resolver el ejercicio 1

1. Reconocer una ecuación trigonométrica con dos variables, y se debe sólo dejar una.

2. Conocer la identidad trigonométrica de $\cos^2(x)$

3. Hacer cambio de variables pertinentes

4. Conocer reglas de operatorias (técnica) para la resolución de ecuaciones trigonométricas

5. Reconocer la forma de una ecuación de 2º grado

6. Resolver una ecuación de esta forma.

7. Reconocer que las funciones trigonométricas no son expresiones algebraicas

8. Resolver una ecuación trigonométrica necesita otro procedimiento distinto de la operatoria algebraica

9. Recurrir a las identidades trigonométricas que ponen en juego las funciones trigonométricas

10. Conocer las representaciones gráficas de las funciones trigonométricas.

Posibles errores en el ejercicio 1

En este ejercicio es posible que los alumnos no elijan la identidad trigonométrica pertinente o no la conozcan, otro posible error es que no recurren al cambio de variable que convierta la ecuación dada en una ecuación de segundo grado, o se equivoquen en el procedimiento de resolución de una ecuación de segundo grado.

Ejercicio 2: Demuestre la siguiente identidad:

$$\frac{sen(2x)}{sen(x)} - \frac{cos(2x)}{cos(x)} = sec(x)$$

Objetivo: Demostrar una identidad trigonométrica.

La solución esperada

1. Hacer los siguientes reemplazos:

$$sen(2x) = 2sen(x) \cdot cos(x);$$
$$cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$$

2. Desarrollando, se tiene:

$$\frac{sen(2x)}{sen(x)} - \frac{cos(2x)}{cos(x)}$$
$$= \frac{2\,sen(x) \cdot cos(x)}{sen(x)} - \frac{cos^2(x) - sen^2(x)}{cos(x)}$$
$$= 2\,cos(x) - \frac{cos^2(x) - 1 + cos^2(x)}{cos(x)}$$

3. Reduciendo términos del paréntesis y simplificando por coseno, se obtiene:

$$2\,cos(x) - \frac{cos^2(x) - 1 + cos^2(x)}{cos(x)}$$
$$= 2\,cos(x) - \frac{2cos^2(x)}{cos(x)} + \frac{1}{cos(x)}$$
$$= 2\,cos(x) - 2\,cos(x) + \frac{1}{cos(x)}$$
$$= \frac{1}{cos(x)}$$
$$= sec(x)$$

Obteniéndose la igualdad con la ecuación inicial. Por lo tanto, queda demostrada la identidad.

Conocimientos necesarios poner en juego para demostrar la identidad

1. Identidades trigonométricas

2. Operatoria con las fracciones y funciones trigonométricas

3. Igualación de expresiones trigonométricas.

Posibles errores del ejercicio 2

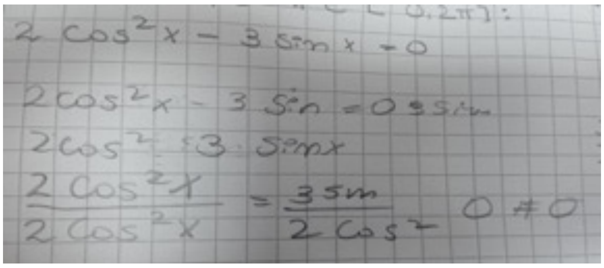
En este ejercicio puede que los estudiantes no recurran a las identidades trigonométricas adecuadas, no comprendan el significado de una demostración o evidencian una carencia del dominio de la operatoria algebraica.

4. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

Esta etapa consistió en el análisis de las respuestas de los estudiantes, considerando para ello sus producciones escritas. El propósito fue evidenciar los conocimientos efectivamente movilizados, identificar las falencias presentes, comprender la naturaleza de las dificultades manifestadas y establecer la distancia existente entre los saberes puestos en práctica por los estudiantes y los saberes matemáticos requeridos para la resolución de las tareas propuestas.

Hemos seleccionado las respuestas de los estudiantes que nos entregaron información sobre dificultades en la resolución de los problemas. No consideramos los estudiantes que resolvieron correctamente el problema ni aquellos cuyas resoluciones eran confusas. Los estudiantes los designamos por Ai, con i igual a 1, …, 20.

Figura 1. Tratamiento de una ecuación trigonométrica como una ecuación sencilla

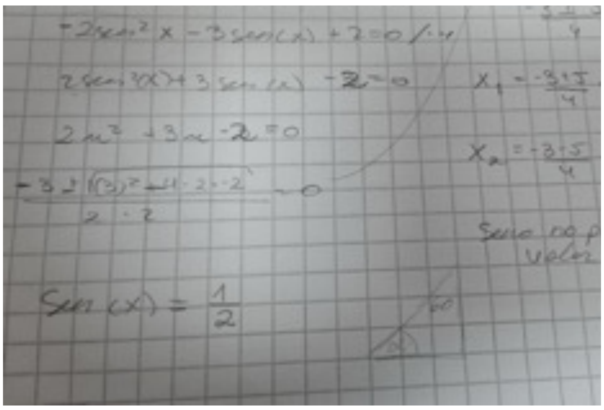


Nota. Respuesta del alumno A_1

A_1 abordó la ecuación como si se tratara de una sencilla ecuación algebraica, donde solo era necesario despejar. Sin embargo, A_1 resolvió una función trigonométrica en términos de otra como si fueran expresiones puramente algebraicas, para luego concluir que eran diferentes (escribió 0≠0). Además, trata las funciones trigonométricas como si fueran expresiones algebraicas y no se da cuenta que las funciones trigonométricas se operan con otros procedimientos, en este caso debe escribir una función trigonométrica en función de la otra mediante la aplicación de una identidad.

La respuesta de A_2 se puede observar en la Figura 2.

Figura 2. El alumno no recuerda la incógnita inicial al usar un cambio de variable

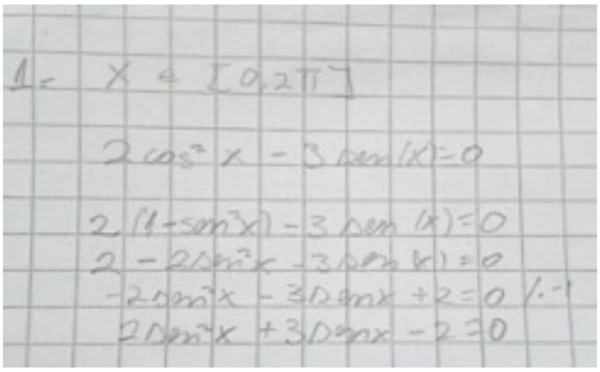


Nota. Respuesta del alumno A_2

A_2 utiliza la identidad $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, y aplica procedimiento necesario, es decir recurre a un cambio de variables para obtener la ecuación de segundo grado y resolverla. Sin embargo, A2 no determina el valor de "x", ya que olvidó el cambio de variables que realizó. El procedimiento de A_2 se repite con el alumno A_5.

La respuesta del estudiante A_3 se observa en la Figura 3.

Figura 3. Un caso en que no aplica el cambio de variable

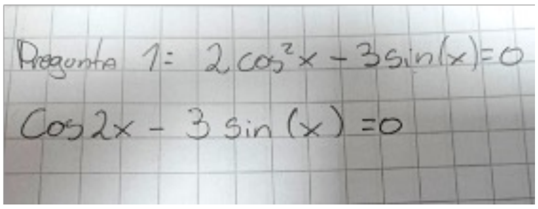


Nota. Respuesta del alumno A_3

A_3, identifica que el problema tiene dos variables que son funciones trigonométricas y aplica una identidad trigonométrica para reducir a una variable, pero el alumno no realiza el cambio de variable necesario para terminar de resolver este problema. Esto se observó también en el alumno A_4.

La respuesta de A_6 se puede observar en la Figura 4.

Figura 4. Caso en que confunde la potencia con la multiplicación



Nota. Respuesta del alumno A_6

A_6 confunde el exponente 2 con el coeficiente 2, lo que cambia totalmente el problema inicial. Este error no fue previsto, este error solamente A_6 lo cometió. No resuelve la ecuación trigonométrica dada.

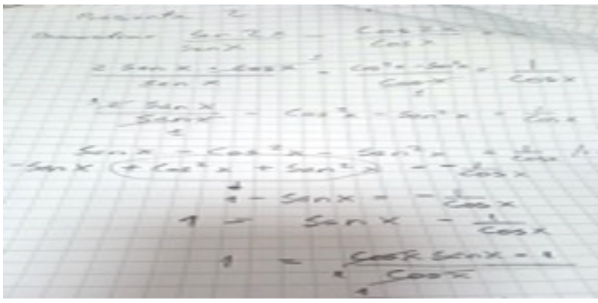
En síntesis, los errores identificados en el problema 1 están relacionados con el tratamiento de las funciones trigonométricas como si fueran expresiones algebraicas. En este análisis, se observa que las identidades trigonométricas no han sido consideradas. Desde la perspectiva de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval, esto indica que los estudiantes no logran distinguir entre los objetos propios del registro de las funciones trigonométricas y los del registro algebraico.

Además, A_2 no termina de resolver la ecuación realiza un cambio de variable, pero no vuelve a la variable inicial. Los errores de A_2 también lo repitió A_5. También se evidencia que el alumno A_2 utiliza correctamente la identidad cos2 x = 1 – sen2 x evidenciando un dominio en la operatoria algebraica pero no realiza el cambio de variable necesario para resolver el problema planteado, esto se observó en 2 casos.

Finalmente, se debe destacar que el alumno A_6 comete un error conceptual en álgebra, al confundir el exponente 2 como coeficientes, este error solo lo cometió A_6.

Con relación al ejercicio 2, la respuesta de A_7 se pude observar en la Figura 5.

Figura 5. Caso de tratamiento erróneo de una función trigonométrica

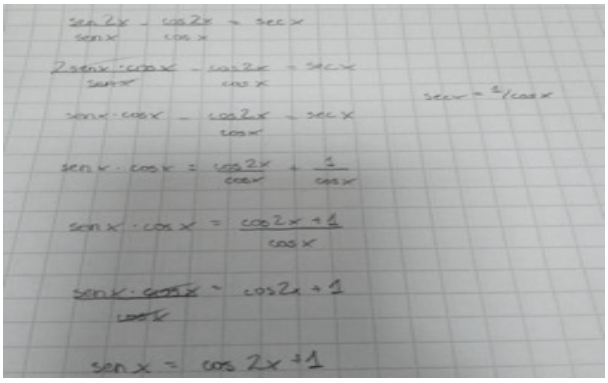


Nota. Respuesta del alumno A_7

El estudiante A_7 comete un error en la simplificación, esto es frecuente, los estudiantes simplifican funciones trigonométricas que aparecen en un numerador y denominador de otra fracción. Nuevamente se encuentra el tratamiento erróneo de las funciones trigonométricas, en este caso simplifican las funciones como números, esto es $\frac{2sen(x)}{sen(x)} = sen(x)$.

Este procedimiento lo evidencian los estudiantes A_7, A_8, A_9 y A_{10}. Nuevamente encontramos la no distinción de los objetos de cada registro. La respuesta de A_8 se puede observar en la Figura 6.

Figura 6. Trabajo en ámbito numérico con las funciones trigonométricas



Nota. Respuesta del alumno A_8

El problema 2 fue el de menor logro, solo un 4 de 20 respondieron correctamente. Esta actividad de demostración de identidades en Trigonometría no ha sido comprendida por los estudiantes.

En síntesis, los siguientes errores fueron detectados en el problema 2:

Se identifican errores al simplificar fracciones algebraicas, lo que evidencia una falta de dominio en la operatoria algebraica. Además, los estudiantes no comprenden el significado de demostrar una identidad, lo que afecta su capacidad para abordar este tipo de problemas con éxito.

Se ha constatado que, para los estudiantes participantes, el problema de demostración de una identidad resultó de un grado de dificultad superior al de resolver una ecuación trigonométrica.

5. CONCLUSIONES

Se han identificado dificultades fundamentales en la operatoria de las fracciones algebraicas, evidenciando que los estudiantes no distinguen que el operar con expresiones algebraicas requiere el uso de propiedades diferentes a las utilizadas en la operatoria numérica. Asimismo, no logran distinguir que la resolución de ecuaciones trigonométricas requiere procedimientos y propiedades diferentes en la resolución de ecuaciones algebraicas.

El ejercicio 2 (demostración de una identidad) presentó un grado de dificultad mayor en comparación con la resolución de una ecuación trigonométrica (ejercicio 1). Los estudiantes demuestran que no han comprendido que operar con expresiones algebraicas difiere significativamente de la operatoria con números, ya que tienden a aplicar propiedades de simplificación propias de fracciones numéricas al trabajar con fracciones algebraicas. Esto podría deberse a que, en la introducción de las expresiones algebraicas, no se enfatizó suficientemente el paso del marco numérico-aritmético al algebraico. Como resultado, no han entendido que las expresiones algebraicas, al incluir letras y números, constituyen objetos distintos a los números y que deben manipularse de acuerdo con propiedades específicas del álgebra, muy diferentes de las propiedades aritméticas.

Las representaciones semióticas tienen una importancia crucial en el proceso de enseñanza de la matemática, ya que permiten la comprensión, la comunicación y el desarrollo de las actividades matemáticas (Duval, 2006; D'Amore, 2006) sin embargo, existen estudios que señalan que, en la enseñanza de las matemáticas, en general, no se utiliza con importancia los cambios entre diferentes registros de representación semiótica. Por ejemplo, Chico y Montes (2023) afirman que "el uso limitado de las representaciones semióticas en los materiales educativos y en las prácticas pedagógicas afecta negativamente la comprensión y el aprendizaje de conceptos matemáticos fundamentales". Además, Bejarano Segura (2023) señala que "esto revela la necesidad de mejorar la aplicación de los procesos cognitivos de representación en la enseñanza de la trigonometría para lograr una comprensión más profunda de los conceptos".

Lo anterior sugiere que, en la enseñanza de las matemáticas, no se aborda adecuadamente el cambio de representación y, en particular, en esta investigación se refleja lo mencionado anteriormente en las respuestas entregadas por los estudiantes, siendo necesario que los docentes sean capaces de reconocer su importancia y fomentar dichas transiciones. Un ejemplo es el caso del ejercicio 1 estudiante A2 quién transforma la expresión trigonometría en una expresión algebraica, pero al entregar su resultado no vuelve a la expresión trigonometría asumiendo que el ejercicio estaba finalizado, siendo necesario que el docente refuerce el articular el registro de las expresiones algebraicas con el registro de las expresiones trigonométricas. Esta práctica permite profundizar en el significado de las expresiones algebraicas y trigonométricas, con el fin de que el estudiante pueda dar sentido y significado a estas expresiones.

Además, se observa que la transición entre expresiones algebraicas y trigonométricas también requiere respetar operatorias algebraicas elementales. Por ejemplo, podemos observar en el estudiante A7 que al resolver el ejercicio 2 simplifica una expresión en la que el numerador contiene una suma como operación principal. Lo anterior evidencia que hay estudiantes que no relacionan que las expresiones algebraicas y trigonométricas representan variables numéricas con un cierto dominio específico según la expresión dada. Esto también se refleja en el ejercicio 1 estudiante A6 quién pasa de una razón trigonométrica con una potencia de 2 a una razón trigonométrica con un ángulo doble.

Este fenómeno refleja la falta de distinción entre los objetos y las notaciones correspondientes a los registros de representación involucrados, lo que parece ser la causa principal de los errores observados, debido a un insuficiente conocimiento matemático y una comprensión limitada de las notaciones y sus propiedades.

El análisis de los enunciados de los ejercicios y sus resoluciones exigen, principalmente, la memorización de fórmulas (sin contar conceptos algebraicos previos). Este tipo de situaciones no permiten razonar, al estudiante, sobre los objetos en juego ni su manipulación lo que conlleva un costo significativo en su aprendizaje. Practicar este tipo de ejercicios no permite al estudiante comprender que las expresiones algebraicas y numéricas representan funciones o valores. Además, la valoración del conocimiento se reduce a recordar fórmulas, lo que implica que, si un estudiante no conoce una fórmula, no podrá resolver el problema.

Por lo tanto, es necesario que los docentes revisen el tipo de ejercicios que se utilizan, según los resultados de aprendizaje esperados. Es decir, es necesario plantear problemas, en lugar de ejercicios, que exijan al estudiante buscar caminos o estrategias de solución en base a sus conocimientos adquiridos. Cabe señalar que los estudiantes son alumnos de ingeniería y requieren problemas relacionados con contextos que presenten desafíos a sus capacidades y que vayan más allá de la aplicación de fórmulas.

A modo de conclusión, en relación con la primera pregunta de investigación, sobre la naturaleza de los errores cometidos por los estudiantes en el curso de álgebra 1 del plan común de ingeniería civil de la UDA, la investigación revela que los estudiantes no logran distinguir entre los procedimientos algebraicos y numéricos. Se identificó que, al operar con fracciones algebraicas y trigonométricas, los estudiantes aplican incorrectamente propiedades numéricas.

Respecto a la segunda pregunta, en relación con el uso de las reglas matemáticas en las actividades de trigonometría, el estudio revela que los estudiantes, en su mayoría, no aplican correctamente los procedimientos correspondientes. Aunque algunos conocen ciertas identidades trigonométricas, no las utilizan adecuadamente o no las reconocen como herramientas necesarias para resolver los problemas planteados. En los ejercicios de demostración, por ejemplo, los estudiantes tienden a simplificar incorrectamente las expresiones, como si fueran fracciones numéricas, lo que evidencia una falta de comprensión de los objetos y propiedades del álgebra y la trigonometría. Asimismo, se identificaron casos en que se inicia correctamente un cambio de variable, pero no se regresa a la variable original, dejando incompleto el procedimiento. Estas situaciones demuestran que las reglas matemáticas de la trigonometría no están siendo aplicadas con propiedad, probablemente porque no se ha logrado aún una apropiación significativa de sus conceptos ni de las representaciones que los sustentan.

Entendemos que la falta de énfasis, en un marco matemático determinado al no precisar que los objetos matemáticos que lo constituyen tienen sus notaciones y propiedades. Por ejemplo, el marco aritmético está constituido básicamente por los números y fracciones numéricas, con sus notaciones, propiedades y operaciones propias. Al pasar al marco algebraico los objetos ya no son números ni fracciones numéricas, sino que los objetos son las expresiones algebraicas compuestas que se anotan con números y letras, que se operan de acuerdo con sus operaciones propias y muy distintas a las del marco aritmético. Si el docente no pone énfasis en clases en estas distinciones los estudiantes no tomarán conciencia de ellas, y seguirán aplicando sus conocimientos aritméticos aprendidos en la escuela básica, lo que los lleva a utilizar el tratamiento aritmético que dan a la operatoria con expresiones algebraicas, puesto que, no han tomado conciencia que son objetos nuevos de otro dominio que tienen otras notaciones y reglas nuevas, siendo necesario aprender a operarlos en forma pertinente.

Se espera que con esta investigación se pueda continuar con estudios de casos que propongan transiciones de representaciones que permitan al estudiante asegurar un aprendizaje significativo de la trigonometría.

6. REFERENCIAS

Aguilar Terrones , D., Sánchez Ruiz, J. G., & Salgado Suárez, G. D. (2022). Aprendizaje de números racionales a partir de representaciones semióticas. Revista Chilena De Educación Matemática, 14(2), 69–99. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i2.102

Aray, C., Guerrero, Y., Montenegro, L., & Navarrete, S. (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. Rehuso, 5(2), 62-69.

Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 33–59). Grupo Editorial Iberoamérica.

Barahona Urbina, P., Veres Ferrer, E., & Aliaga Prieto, V. (2016). Deserción académica en la Universidad de Atacama, Chile. Comuni@cción: Revista de Investigación en Comunicación y Desarrollo, 7(2), 27-37.

Bedregal-Alpaca, N., Tupacyupanqui-Jaén, D., & Cornejo-Aparicio, V. (2020). Análisis del rendimiento académico de los estudiantes de Ingeniería de Sistemas, posibilidades de deserción y propuestas para su retención. Ingeniare. Revista chilena de ingeniería, 28(4), 668-683.

Bejarano Segura, D. (2023). Representaciones semióticas en el aprendizaje del objeto matemático resolución de triángulos con múltiples lenguajes (Tesis de licenciatura). Universidad de Caldas.

Beltrán Soria, M. del P., & Montiel Espinosa, G. (2016). La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional - trigonométrico en estudiantes mexicanas del nivel medio superior. Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa, 19(3), 255–286. https://doi.org/10.12802/relime.13.1931

Castro, T., & Cárcamo, A. (2023). Errores en la resolución de ecuaciones trigonométricas: Un estudio exploratorio con estudiantes de primer año de ingeniería. Revista de Investigación en Educación y Humanidades, 37(75), 1-12. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a16

Chico, J., & Montes, M. Á. (2023). Representaciones semióticas de la multiplicación y división en libros de texto de educación primaria. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 37(75), 296–316.

Colombo, K. F., Torres, I., & Meza, W. G. (2017). La trigonometría como factor de aprendizaje en los contenidos prácticos de la topografía. Opuntia Brava, 9(1), 1-10.

Contreras Oré, F. A. (2017). La axiomática. Horizonte de La Ciencia, 7(12), 111–121.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentidos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial, 177–195.

Duval, R. (1999). El concepto de semiosis: Perspectivas y enfoques en la educación. Peter Lang.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (2.ª ed.). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Facultad de Ingeniería. (2021). Programa de álgebra I [Programa de asignatura]. Departamento de Matemática, UDA.

Giovannini, E. N. (2014). Geometría, formalismo e intuición: David Hilbert y el método axiomático formal (1891–1905). Revista de Filosofía, 39(2), 121-146. https://doi.org/10.5209/rev_RESF.2014.v39.n2.47307

González, L., & Uribe, D. (2018). Estimaciones sobre la "repitencia" y deserción en la educación superior chilena. Revista Calidad en la Educación, 75-90.

Marchetti, D., Cabeza, M. C., & Olmedo, A. (2019). Dificultades en las conversiones entre registros de representación semiótica: Un análisis en estudiantes de matemática. Revista Iberoamericana de Educación en Ciencia y Tecnología, 18(1).

Moore, J., Smith, A., & Johnson, R. (2012). Educational challenges in higher learning: A global perspective. Journal of Higher Education Studies, 35(4), 125-142.

Riccomini, P. J. (2005). Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction. Learning Disability Quarterly, 28(3), 233-242.

Sancho-Vinuesa, T., Masià, R., Fuertes-Alpiste, M. & Molas-Castells, N. (2018). Exploring the effectiveness of continuous activity with automatic feedback in online calculus. Computer Applications in Engineering Education, 26(1), 62-74. https://doi.org/10.1002/cae.21861

Santos, M. (2011). La Educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8, 35-54.

Scholz, M., & Montiel, L. (2017). Innovación e investigación en matemática educativa. Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC, 2, 232-233. ISSN: 2594-1046.

Stewart, J. (2016). Precalculus (7a ed.). Cengage Learning

Zaldívar Carrillo, M. E., & Mayo Parra, I. (2005). Apuntes necesarios acerca de la relación entre ejercicios, problemas y tareas. Revista Iberoamericana de Educación, 37(5), 1-10.

https://doi.org/10.46219/rechiem.v17i2.186

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448

INTERDISCIPLINARIEDAD: ¿QUÉ HACE UN DOCENTE DE MATEMÁTICA EN LA ESCUELA?

INTERDISCIPLINARITY: WHAT DOES A MATH TEACHER DO IN SCHOOL?

Nicolás Muñoz Díaz
nicolas.munoz2019@umce.cl
https://orcid.org/0009-0001-6220-3175
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile

Jonathan Palomera Berríos
jonathan.palomera2019@umce.cl
https://orcid.org/0009-0006-7885-6206
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile

Matías Toro López
matias.toro2019@umce.cl
https://orcid.org/0009-0007-6397-6050
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile

RESUMEN

Esta investigación tuvo como propósito caracterizar el quehacer de un docente de matemáticas en relación con la interdisciplina, evaluando la influencia de factores como el currículum, la formación docente, los estamentos administrativos escolares y el ambiente laboral sobre la calidad de la interdisciplinariedad. Se adoptó un enfoque cualitativo mediante un estudio de caso único, que recuperó información a través de la observación de clases interdisciplinarias, una entrevista semiestructurada y la revisión de materiales proporcionados por el docente, tales como la planificación de la actividad, el instrumento de evaluación y las guías trabajadas durante el proyecto. Los resultados, analizados a la luz de referentes teóricos, evidencian limitaciones que afectan la calidad de la interdisciplinariedad esperada, entre ellas la escasa preparación interdisciplinaria formal y la falta de espacios otorgados por la administración escolar para la planificación conjunta entre asignaturas. Estas condiciones derivan en actividades y evaluaciones que no integran plenamente los enfoques de otras disciplinas, restringiendo su alcance y ubicándolas más bien en el marco de una práctica pluridisciplinar.

Palabras clave:
Aprendizaje profundo, quehacer docente, interdisciplina, aprendizaje basado en proyecto

ABSTRACT

This study aimed to characterize the work of a mathematics teacher in relation to interdisciplinarity, assessing the influence of factors such as curriculum, teacher education, school administrative structures, and the work environment on the quality of interdisciplinary practice. A qualitative approach was adopted through a single case study, which collected data from the observation of interdisciplinary lessons, a semi-structured interview, and teaching materials provided by the teacher, including lesson plans, assessment instruments, and worksheets used during the project. The findings, analyzed considering relevant theoretical frameworks, reveal limitations that hinder the expected quality of interdisciplinarity. Among these are the lack of formal interdisciplinary training and the limited opportunities provided by school administration for joint planning across subjects. These constraints result in activities and assessments that fail to integrate the perspectives and methods of other disciplines, thereby confining the practice to a pluridisciplinary rather than a truly interdisciplinary approach.

Keywords:
Deep learning, teaching practices, interdisciplinarity, project-based learning

Recibido 20 de diciembre 2024, Aceptado 22 de agosto 2025
Revista Chilena de Educación Matemática, Volumen 17, N°2

1. INTRODUCCIÓN

El Ministerio de Educación de Chile (de aquí en adelante, MINEDUC) reconoce las limitaciones del sistema tradicional de educación para enfrentar los desafíos actuales, como el cambio climático, la pérdida de biodiversidad, la profundización de desigualdades, crisis humanitaria, entre otros (UNESCO, 2022). Reynaldo et al. (2015) plantean que la interdisciplinariedad es una de las estrategias clave para revertir esta situación e incrementar la calidad de la enseñanza, dadas las actuales condiciones de desarrollo social. Esta propuesta toma fuerza en la solución de problemas, y se proyecta como base para una educación general integral. En este contexto, la Unidad de Desarrollo Curricular se encuentra trabajando en una comisión para potenciar la interdisciplinariedad en el currículum chileno, con el propósito de levantar un informe que incluya recomendaciones curriculares y estrategias para desarrollar actividades interdisciplinarias (MINEDUC, 2022).

Según Andonegui (2004) se entiende la interdisciplinariedad como el estudio que se realiza con la cooperación de diversas disciplinas, transfiriendo métodos de estudio de una disciplina a otra. El autor la define a partir de la generalidad, es decir, todas las relaciones posibles entre las distintas áreas disciplinares para comprender y dar sentido a un contenido. A pesar de la valoración teórica que se hace de la interdisciplina, tanto nuestra experiencia con el sistema educativo como los testimonios de docentes y estudiantes nos hace notar que estas prácticas no se realizan con frecuencia en las aulas. Carvajal (2010) describe diversas dificultades en la implementación de este tipo de actividades, entre ellas el uso de un lenguaje excesivamente científico, el egocentrismo intelectual entre disciplinas y las rigideces de las estructuras institucionales, entre otras.

Así mismo, Reynaldo et al. (2015) advierten sobre la insuficiente preparación de docentes al momento de abordar propuestas interdisciplinarias, situación que puede compararse con el contexto chileno. En esta misma línea, Huincahue (2022) plantea que para el profesorado es desafiante la creación de situaciones pedagógicas interdisciplinarias en las que se integre el conocimiento matemático, debido a la falta de documentos que orienten el diseño de una propuesta interdisciplinaria significativa con la cual fundamentarla. A partir de lo especificado en estos antecedentes, cabe preguntarse, ¿qué prácticas docentes se llevan a cabo en la enseñanza de las matemáticas vinculadas con otras disciplinas? Para responder esta interrogante, en este estudio nos proponemos observar la acción de un docente en una actividad interdisciplinaria, considerando el panorama educativo actual, es decir, el espacio escolar, el currículum, la formación docente y el ambiente laboral. En el análisis nos enfocamos en la preparación interdisciplinaria del docente, el proceso de planificación, el rol que cumple en el desarrollo de la actividad y su percepción acerca de esta.

2. REVISIÓN TEÓRICA

Esta problemática se encuentra enmarcada en el área de estudio de las disciplinariedades, por esto, empezamos investigando sobre sus conceptos y el rol que toman en el contexto, como, por ejemplo, intradisciplina, multidisciplina, pluridisciplina, interdisciplina y transdisciplina. En primera instancia, definimos dos de las disciplinariedades, ya que, una es la que se estudió en la investigación y la otra es la que observamos en el caso de estudio, luego construimos la Tabla 1 que resume la relación entre las asignaturas en cada disciplinariedad y finalmente destacamos la interdisciplinariedad sobre el resto como herramienta para el contexto educativo. Posteriormente, nos referimos a las directrices curriculares vigentes en Chile sobre el tema, para comprender cuánto y cómo el currículum aborda nuestra temática de interés. Finalmente, para concluir este apartado, se investiga sobre el quehacer docente con relación a cómo se trabaja la interdisciplinariedad en diversos contextos, tanto nacionales como internacionales.

2.1 Disciplinariedades

Al hablar de disciplinariedades se debe tener en consideración la existencia de los diversos conceptos que se desprenden de esta, tales como, intradisciplina, multidisciplina, pluridisciplina, interdisciplina y transdisciplina. A continuación, nos centramos en dos de ellas, las cuales tuvieron relación con nuestra investigación.

La pluridisciplinariedad se encuentra en un nivel un poco más alto de integración entre disciplinas, pero sin alcanzar una verdadera articulación. Es decir, no existe un intercambio de culturas de cada área como los propios métodos y suposiciones. Significa la cooperación entre disciplinas, sin coordinación y suele ocurrir entre disciplinas de un mismo nivel jerárquico. Existe colaboración entre las áreas, complementariedad y objetivos comunes, pero sin sistematización ni integración (Carvajal, 2010).

Un ejemplo de pluridisciplina puede ser un proyecto escolar sobre el cultivo. En ciencias naturales se aborda el ciclo de las plantas, nutrientes del suelo y las condiciones necesarias para el crecimiento. En Matemáticas se estiman los espacios del terreno, calculando el perímetro y área destinado para que cada grupo tenga un espacio para su propio huerto y en Artes crear las etiquetas para identificar las plantas, su nombre científico y el registro de intervenciones en la planta como el riego, horas de sol recibidas y otros.

Respecto a la interdisciplinariedad, Carvajal (2010) la ubica en el segundo nivel de integración disciplinar e implica la interacción de varias ciencias. Esta interacción se caracteriza por la colaboración y diálogo, con el fin de alcanzar saberes que, de forma aislada, cada disciplina no podría obtener. Así, se logra un enriquecimiento mutuo y una transformación de metodologías de investigación y de enseñanza. La interdisciplina implica la definición de marcos conceptuales más generales que permiten la permeabilidad de saberes entre disciplinas. Nicolescu (2013), distingue tres niveles de interdisciplina, a saber, de aplicación (los métodos de una disciplina se transfieren a otra para producir nuevos resultados), epistemológico (los métodos transferidos generan análisis interesantes en el campo epistemológico de otra disciplina) y de engendramiento de nuevas disciplinas más complejas a través de otras más simples. Para Suasnabas-Pacheco y Fernández (2020) la interdisciplinariedad permite cimentar una educación transversal, donde los diversos sectores se conectan de manera armónica para desarrollar actividades que beneficien la comunidad escolar.

Por su parte la interdisciplinariedad escolar, bajo la mirada de los autores de esta investigación, consiste en estudiar un contenido, tema y/o problemática a través de dos o más áreas disciplinares. Esta busca la colaboración y el complemento entre metodologías de cada ciencia para abordar y entender profundamente el contenido y/o problemática, utilizando situaciones interesantes, llamativas y/o desafiantes para el estudiantado que necesitan un estudio con cooperación de dos o más asignaturas, para superar la lógica fragmentada del enfoque por asignaturas. Un ejemplo de ello se evidencia en fiestas patrias, específicamente en la preparación de la danza folclórica “la Diablada”. Para el trabajo interdisciplinario se vinculan las asignaturas de Educación Física con Artes Visuales. Los docentes se reúnen para planificar conjuntamente cómo integrar ambas disciplinas y ejecutar una evaluación interdisciplinar en que el estudiantado realiza la construcción de las máscaras y antifaces en la asignatura de Artes Visuales, los cuales serán utilizados el día de la presentación de la coreografía coordinada en la asignatura de Educación Física. Producto de esta colaboración surge la rubrica de evaluación consensuada entre ambas disciplinas que permite valorar tanto la expresión artística como el desempeño en la danza.

Tabla 1. Jerarquización de las disciplinariedades

Disciplinariedades	¿El tema es estudiado desde dos o más ciencias?	¿Colabora activamente con otras áreas?	¿Posee un enfoque holístico?	¿Se integran las ciencias entre sí?
Transdisciplinariedad Integración de diversas perspectivas, métodos y conocimientos generando su propio marco referencial para desarrollar problemas.	Sí	Sí	Sí	Sí
Interdisciplinariedad Colaboración e integración entre disciplinas para desarrollar un problema común.	Sí	Sí	Sí	Sí
Pluridisciplinariedad Interacción entre disciplinas con distintos enfoques.	Sí	Sí	No	No
Multidisciplinariedad Conexión entre disciplinas, sin interacción.	Sí	No	No	No
Intradisciplinariedad Estudio dentro de la misma disciplina.	Sí	No	No	No

Nota. Elaboración propia.

Al revisar la Tabla 1 junto con los conceptos relacionados a cada tipo de disciplinariedad, se podría decir que todas pueden usarse como estrategias didácticas, ya que, comparadas con el sistema tradicional de enseñanza, permiten alcanzar un mayor nivel de comprensión y dominio del contenido. Para nuestra investigación nos enfocamos en el uso de la interdisciplina, por encontrase en uno de los niveles más altos de integración, en que se trabaja de manera colaborativa, armónica y conectando las disciplinas sin mayores dificultades. En contraste, aunque el caso de la transdisciplinariedad representa un nivel superior de integración, dado que para su ejecución necesita un dominio amplio de cada disciplina para transferir metodologías entre ellas, creemos que sería muy pretencioso trabajar a nivel escolar y no es pertinente en el marco de nuestro trabajo.

2.2 Currículum

Es fundamental reconocer la importancia de la constante revisión del currículum, entendido como el componente central del sistema educativo. Por una parte, este debe mantenerse actualizado y pertinente, adaptándose a los avances y transformaciones a nivel global; por otra, ha de responder a las necesidades culturales, políticas, económicas y sociales del país (Suasnabas-Pacheco y Fernández, 2020). El currículum cumple un rol esencial en la definición de los contenidos que se abordan en el aula, por lo que resulta imprescindible comprender cómo está estructurado y en qué medida favorece el estudio interdisciplinar de los contenidos en concordancia con los objetivos de aprendizaje.

En el contexto chileno, Huincahue (2022) plantea que el Ministerio de Educación de Chile tiene la necesidad de entregar mayores recursos para la educación interdisciplinaria. Esto permitiría desafiar positivamente a la comunidad educativa en la generación de propuestas pedagógicas y a su vez promover una valoración más natural de este enfoque en el aula.

Según el Ministerio de Educación (2022), la Unidad de Currículum y Evaluación (UCE) reconoce la importancia del desarrollo de un enfoque interdisciplinario creando una comisión encargada del levantamiento de un informe con recomendaciones curriculares, la sistematización de experiencias interdisciplinares y la exploración de estrategias para el desarrollo de propuestas curriculares interdisciplinarias. Una revisión de los programas de estudio de las distintas disciplinas de los niveles de primero y segundo medio, muestran el esfuerzo que se ha hecho por promover las actividades interdisciplinarias, al sugerir en determinados objetivos de aprendizaje (OAs) el trabajo colaborativo con docentes de otras asignaturas, indicando el o los OAs de las otras asignaturas que son compatibles para realizar trabajo interdisciplinario.

También, en 2019 la Unidad de Currículum y Evaluación publicó el Manual: Metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos (en adelante ABP) en el que se dan directrices para el diseño de una actividad interdisciplinaria. En documento incluye plantillas para el instrumento evaluativo y un listado de 32 ejemplos de actividades interdisciplinarias para tercero y cuarto medio. Sin embargo, estas propuestas no son detalladas y no se aprecia el intercambio de culturas entre asignaturas, además, la evaluación sugerida en esta no incluye un instrumento evaluativo como rúbrica o lista de cotejo, etcétera, sólo se reduce a dar una breve descripción del producto esperado.

2.3 Quehacer docente

El currículo educativo puede entenderse como un mapa que guía el proceso educativo, estableciendo lineamientos, objetivos y competencias para cada etapa escolar. Su finalidad es proporcionar una estructura común que facilite al profesorado la planificación, implementación y evaluación de las clases. Sin embargo, no se trata de una estructura rígida que los docentes deben seguir estrictamente, sino como un marco flexible que puede adaptarse a las necesidades de los estudiantes, promoviendo un aprendizaje significativo mediante estrategias diversas. De esta forma, el currículo y la labor docente se complementan, asegurando una educación coherente y pertinente para el desarrollo integral de los/as estudiantes.

En este sentido, Lázaro (2023) define el quehacer docente como las acciones pedagógicas basadas en la interacción entre conocimiento y estudiantes, influenciadas por valores socioculturales y prácticas reflexivas. Este quehacer también incluye el compromiso con la investigación educativa, promoviendo estrategias pedagógicas contextualizadas, flexibles y de calidad. Sin embargo, para desarrollar actividades interdisciplinarias, el/la docente requiere desarrollar una visión interdisciplinaria del conocimiento. Según Araya et al. (2019), cualquiera de los fenómenos que podamos observar del entorno están interrelacionados, lo que requiere una formación docente que promueva la superación de la fragmentación disciplinar.

En Chile, el Marco Para la Buena Enseñanza (MINEDUC, 2021) destaca el aprendizaje profundo como objetivo para el desarrollo de habilidades del siglo XXI. Este tipo de aprendizaje implica el diseño de actividades desafiantes que permitan aplicar los conocimientos para resolver problemas reales en contextos interdisciplinarios. En particular, el Dominio C, Enseñanza para el aprendizaje de todos/as los/as estudiantes, se encuentra el estándar 7: Estrategias de enseñanza para el logro de aprendizajes profundos, se propone equilibrar los aprendizajes individuales y colaborativos mediante actividades reflexivas, la elaboración de productos creativos y el desarrollo de trabajo interdisciplinario en diversos contextos, como laboratorios y salidas a terreno. Todo ello se vincula con un enfoque en el que el docente fomente ambientes de aprendizaje diversos e inclusivos.

2.4 Experiencias internacionales

En Colombia, Lugo y Pérez (2021) estudiaron estrategias pedagógicas interdisciplinarias (EPI) en el ámbito escolar. Encontraron que, aunque docentes y directivos reconocen la importancia de la interdisciplinariedad, hay desinterés en aplicarla debido a la falta de tiempo y apoyo institucional. Esto genera sobrecarga laboral y desmotivación. Además, el rol pasivo de los directivos limita la implementación efectiva de EPI.

En Argentina, Corica (2021) investigó el estudio interdisciplinario de las matemáticas en secundaria. Identificó que las actividades interdisciplinarias no integran la matemática como un saber esencial, sino como una herramienta para cálculos. Esto se atribuye a la formación disciplinar de los docentes, que dificulta diseñar actividades con un enfoque holístico. Aunque el Ministerio de Educación promueve la interdisciplinariedad, las prácticas docentes reflejan la fragmentación disciplinar.

En Chile, Araya et al. (2019) analizaron cómo los/as docentes de biología entienden la interdisciplinariedad. Descubrieron que la integración entre disciplinas es superficial, y la colaboración entre profesores es escasa debido a la falta de espacios formales para trabajar juntos y la resistencia a cambiar paradigmas educativos.

Estos tres estudios nos muestran que el escenario en Chile y en países vecinos es similar, en los que la implementación de propuestas interdisciplinares se ve limitada por factores como la formación docente centrada en disciplinas aisladas, la falta de tiempo y apoyo por parte de organismos del colegio y un paradigma disciplinar que los docentes se resisten a cambiar.

2.5 Limitaciones del asignaturismo

La enseñanza tradicional, especialmente en Matemáticas, se centra en aspectos procedimentales sin conectar con otras disciplinas o fenómenos de la vida real. Parra (2020) destaca que, en el ámbito laboral, los problemas complejos requieren equipos interdisciplinarios, lo que evidencia las limitaciones del asignaturismo. Contreras (2018) señala que el currículo en Chile y otros países sigue enfocado en asignaturas separadas, aunque existen intentos recientes por promover la interdisciplinariedad.

En general, tanto en Latinoamérica como en países anglosajones, se valora la interdisciplina por sus beneficios para comprender fenómenos complejos. Sin embargo, en la práctica, las actividades interdisciplinarias son escasas debido a barreras estructurales y culturales. Esto plantea la necesidad de investigar más sobre las prácticas docentes que vinculan las matemáticas con otras disciplinas.

En este contexto, surge la necesidad de indagar la manera en que se manifiesta la interdisciplinariedad en la práctica docente, en especifico en el área de matemáticas. Por ello, nos propusimos responder a la siguiente pregunta, ¿qué prácticas docentes se llevan a cabo en la enseñanza de las matemáticas vinculadas con otras disciplinas? a través del objetivo general de caracterizar la interdisciplinariedad del quehacer de un docente de matemática. Esto implicó describir cómo el profesorado en ejercicio aplica herramientas, métodos y enfoques específicos que relacionan un contenido con la matemática y dos o más áreas disciplinares, y, además, identificar las oportunidades, beneficios y obstáculos que ofrece el contexto educativo para la aplicación de propuestas interdisciplinares en el aula de matemáticas

3. MÉTODO

Este estudio empleó una metodología de corte cualitativa, destacando la relación entre el investigador y el participante, y centrado en los valores morales que guían el análisis e interpretación del fenómeno (Espinoza, 2020). Se usó como método el estudio de caso único, también conocido como holístico, que permite confirmar, contrastar o ampliar la teoría existente. El enfoque descriptivo del estudio se manifestó por medio del análisis de las respuestas del sujeto en estudio, permitiendo identificar los conocimientos, percepciones y acciones de un docente de enseñanza media sobre la interdisciplinariedad, desde la planificación hasta la ejecución de actividades.

3.1 Contexto y participantes

La elección del sujeto en estudio se debe a un proceso basado en criterios específicos que aseguran la relevancia y representatividad respecto a los objetivos de la investigación, entre estos podemos mencionar poseer título universitario, ejercer docencia en enseñanza media, específicamente en el área de la matemática y el factor más importante, realizar trabajo interdisciplinario, logrando posibilitar el fenómeno a investigar. Dado lo anterior, el docente a estudiar fue etiquetado como “profesor”, quien se desempeña en un establecimiento municipal ubicado en la comuna de Recoleta, Santiago de Chile.

3.2 Recogida de datos

Para la recolección de datos, se contactaron a distintos profesores de matemáticas de distintos establecimientos educacionales que se encuentran ejerciendo la profesión docente en los niveles de séptimo básico a cuarto medio; y se les preguntó si para la enseñanza de algún contenido matemático tenían planificado el uso de la interdisciplina a través de un proyecto (bajo su propio criterio y definición de interdisciplina). Una vez identificado un caso que cumpliera con los criterios, tras una búsqueda extensa para conseguir el docente de matemática que trabaja de forma interdisciplinar, se le solicitó firmar el consentimiento informado pertinente para la investigación.

Se aplicó una entrevista semiestructurada cuya duración fue de aproximadamente media hora, la cual fue validada por expertos antes de su aplicación. Además, esta entrevista cuenta con una sección para organizar las preguntas en dimensiones, seguidas de las interrogantes correspondientes y finalizando con el objetivo al que contribuyen. Las dimensiones que hemos definido son: formación docente, experiencias con la interdisciplina, qué dice el curriculum, beneficios, desafíos y oportunidades de la interdisciplinariedad e impacto en el estudiantado. Estas dimensiones fueron definidas a partir de la lectura hecha a los diferentes autores referenciados donde notamos que estos aspectos tienen impacto en todas las etapas de la actividad interdisciplinaria.

También, en un total de tres oportunidades se hicieron visitas al curso en el cual este docente implementó la actividad, donde dos de ellas fueron de implementación de la actividad interdisciplinaria y una fue tradicional en la que se abordó el OA que precede al que se trabaja en el proyecto. En las observaciones se adoptó un rol no participativo, centrado en el registro de notas de campo acerca de la actitud del grupo, el nivel de motivación evidenciado, los tipos de preguntas formuladas por el estudiantado y la forma en que el docente gestionó la planificación.

3.3 Análisis de datos

Para el análisis de la información recolectada se hizo uso de la triangulación de fuentes, con los siguientes vértices en consideración: docente, interdisciplina y autores.

En primer lugar, para el análisis de la entrevista semiestructurada, se transcribieron las respuestas recogidas como audio para facilitar su análisis. En segundo lugar, se analizó cada respuesta de manera individual y luego por dimensión, relacionando las respuestas dadas por el profesor con los aportes hechos por otras investigaciones que se han incluido en nuestro marco teórico.

Con respecto a las observaciones de clases hechas por los investigadores en tres sesiones del proyecto interdisciplinario. Estas observaciones complementaron la contextualización del curso en el cual se implementó en términos de actitudes, motivación, interés, clima de clase y momentos críticos al igual que la forma en la cual el docente guio la actividad planificada.

4. RESULTADOS

4.1 Análisis de la entrevista

Se realizó un análisis detallado por pregunta, en la que cada una de estas correspondió a una dimensión en específico. A continuación, mostramos el análisis general de cada dimensión.

Dimensión 1: Formación docente

Las respuestas del docente en relación con nuestro marco teórico se evidencian en que el docente entrevistado tiene un concepto de la interdisciplinariedad de acuerdo con los referentes teóricos revisados, como Carvajal (2010), Nicolescu (2013) y Suasnabas-Pacheco y Fernández (2020). No obstante, el docente afirma no haber recibido preparación formal en este sentido en su formación docente, por lo tanto, su idea de interdisciplinariedad proviene de la propia experiencia en el ejercicio docente y además realiza la siguiente crítica: No hay mucha capacitación de eso pal profe, entonces por ejemplo yo que igual soy un profe que lleva 6 años solamente en el ejercicio docente me cuesta [...] creo que ahí es donde estamos fallando como sistema y bueno, esperemos que en algún momento se hagan políticas que vayan a apuntar a que eso mejore.

Esto muestra que no existe una capacitación formal en la carrera docente que prepare al profesorado para el desarrollo de estos proyectos que como sabemos, la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación de Chile, reconoce como importante.

Dimensión 2: Experiencias con la interdisciplina

Las respuestas del profesor en esta dimensión nos muestran que, claramente tiene experiencias con el trabajo interdisciplinario; estas vivencias son de diversa índole y con factores que no se pensarían ser considerados para realizar trabajos interdisciplinarios, tales como la relación de la Unidad Técnica Pedagógica (UTP) del establecimiento; específicamente, en experiencias anteriores, UTP generó motivación, compañía y acompañamiento, condiciones que motivan al profesorado a innovar en el aula. En un trabajo interdisciplinario se debe utilizar pocas asignaturas, puesto que al comentar sus experiencias recalca que los trabajos interdisciplinarios con muchas disciplinas han resultado más engorrosos, extensos y difíciles de planificar y concretar; al contrario, al tener una cantidad reducida de disciplinas en un determinado trabajo interdisciplinario, se genera mayor armonía y facilidad considerando los diversos tiempos que se tienen a la hora de planificar y concretar las actividades. Este punto resalta la importancia de la coordinación y el manejo del tiempo para garantizar el éxito de las propuestas.

Además, desde estas experiencias anteriores nos presenta su motivación por este tipo de trabajos, comentando que, la vida es interdisciplinaria, en el sentido de la mezcla de disciplinas para desarrollar problemas o simplemente vivir la vida. Esta visión refuerza la idea de que el trabajo interdisciplinario en el aula no solo es necesario y deseable desde al ámbito curricular, sino también desde una perspectiva integral del conocimiento y el aprendizaje

Dimensión 3: Qué dice el curriculum

El docente destaca que tanto el texto del estudiante entregado por el Ministerio de Educación de Chile, como el cuadernillo de actividades, ofrecen una estructura útil para organizar el conocimiento, por ende, se utiliza para generar conocimientos previos que son solo de la disciplina, para posteriormente hacer la conexión de las distintas áreas del proyecto interdisciplinar fomentando la integración de contenidos. Sin embargo, por un lado, el profesor hace una crítica hacia el diseño del curriculum, particularmente a la posibilidad de generar actividades interdisciplinarias, dado que no todos los objetivos de aprendizaje (OAs) se prestan para este tipo de trabajo, limitando su uso. Por otro lado, el docente sabe de la existencia de material que ofrece el Ministerio de Educación, pero señala que en este existe una desactualización en términos de lo interdisciplinar.

Dimensión 4: Experiencias entre pares

El trabajo interdisciplinario no es una novedad para el profesor, al relatar diferentes instancias en las que ha trabajado de esta forma. UTP plantea como una necesidad el trabajo de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), sin embargo, no propicia el espacio formal para la correcta gestión, planificación o retroalimentación, lo cual repercute en la calidad del trabajo; además, no entrega material que oriente el diseño de esta actividad, limitándose a exigir la relación entre objetivos de aprendizaje del currículum. Luego, el docente menciona que sí recomendaría realizar este tipo de actividad, motivado por los beneficios que él reconoce tanto en el aprendizaje de los estudiantes como en el de los docentes.

Dimensión 5: Beneficios, desafíos y oportunidades en la implementación de trabajo interdisciplinario

Mediante las respuestas del docente, queda en evidencia que en los trabajos interdisciplinarios existen tanto oportunidades como desafíos y beneficios, estos inciden totalmente en la calidad del aprendizaje y las experiencias educativas para estudiantes y docentes. En primer lugar, el docente destacó que el enfoque interdisciplinario genera una oportunidad de motivar a estudiantes que no son participativos o que presentan desinterés por la asignatura, facilitando la conexión y promoviendo aprendizajes profundos. En segundo lugar, existe un intercambio de saberes que beneficia tanto a estudiantes como a docentes, es decir, aprender unos de los otros y obtener una visión mucho más completa y cohesionada de los temas a trabajar; con esto, el trabajo interdisciplinario, además de la motivación estudiantil, el docente declara que fomenta el desarrollo de objetivos transversales y habilidades esenciales para el siglo XXI. Finalmente, no todo es beneficio y oportunidad, dados los desafíos que limitan la implementación efectiva de un trabajo interdisciplinario. En este aspecto el docente comenta que la dificultad es planificar actividades que capten la atención e interés del estudiantado, principalmente debido a las restricciones curriculares. Además, las limitaciones de horarios son otra barrera en la que el docente recalca que la falta de espacios específicos, de reuniones, entre otros aspectos resulta un cargo adicional para el profesorado.

Dimensión 6: Impacto en el estudiantado

Se observa una mejora en las actitudes de los estudiantes, especialmente en la motivación, disposición y entusiasmo hacia el aprendizaje. Para el docente trabajar con proyectos más tangibles permite generar una mejor conexión entre el curso y el contenido, y en consecuencia mayor motivación y participación. Además, existe una mejora en la comprensión de los temas involucrados del proyecto, el análisis lo hace a partir de clases realizadas con su respectivo instrumento de evaluación. Sin embargo, una limitación importante que menciona fue el hecho de no poder concretar una evaluación final que integre todas las disciplinas del proyecto, debido a la falta de tiempo y coordinación entre docentes y escuela.

Análisis de la planificación

Como planificación el docente nos proporcionó una "ficha de proyecto interdisciplinario" donde se describe el proyecto titulado Recopoly en su totalidad. La planificación del proyecto incluye preguntas problematizadoras, nombre del proyecto, descripción del proyecto, modalidad, asignaturas participantes, habilidades a desarrollar, objetivos de aprendizaje por disciplina, actividades, evaluación y un calendario en que se declaran las fechas en las que cada asignatura trabaja en el proyecto. Las preguntas problematizadoras abordan temas como los lugares de interés de la comuna a la cual pertenece el colegio, la relación entre el sistema capitalista y el desarrollo de la comuna, probabilidades del experimento de lanzar dos dados y sumar el número que aparece en la cara superior y la forma en que esta probabilidad se puede incorporar al juego que se trabaja en este ABP. Estas preguntas si bien levantan temas que tienen relación con matemáticas o historia, no incluyen preguntas problematizadoras que se relacionen con el resto de las asignaturas participantes como Educación Tecnológica o Artes Visuales, por lo tanto, en este momento no existe una conexión entre las asignaturas. Luego la descripción del proyecto es la que sigue:

> Los equipos de trabajo diseñan, planifican y crean una versión propia del popular juego "Monopoly" con lugares emblemáticos, de servicios básicos o de interés de la comuna de Recoleta, con tarjetas de propiedad y cartas de suerte con su versión en español y en inglés, con el fin de explicar su ubicación y utilidad a una persona de habla inglesa en forma lúdica.
>
> Para lograrlo, diseñarán el tablero de juego y los billetes en Artes Visuales; construirán la caja y las fichas de propiedades en Educación Tecnológica; organizarán y valorizarán los lugares emblemáticos que incorporarán como "propiedades" del juego en Historia. Además, discutirán si mantener o modificar las reglas de juego y crearán "cartas de suerte" entendiendo el comportamiento de las probabilidades en dos dados, en Matemática.
>
> Se espera que en la presentación del proyecto los y las estudiantes sean capaces de jugar con su propio tablero y/o jugar con el que creó otro equipo, aplicando lo aprendido en las distintas asignaturas.

Como se puede apreciar en esta descripción, cada asignatura está encargada de realizar actividades que contribuyen al logro del producto final (el juego adaptado) que es una versión propia del juego de mesa chileno Gran Santiago.

Tabla 2. Objetivos de Aprendizaje por asignatura (Recopoly)

Disciplinas involucradas	**Objetivos de aprendizaje según disciplina**
Artes Visuales	Objetivo de aprendizaje 1: Crear proyectos visuales con diversos propósitos, basados en la apreciación y reflexión acerca de la arquitectura, los espacios y el diseño urbano, en diferentes medios y contextos, también mediante cuatro actividades.
Educación Tecnológica	Objetivo de aprendizaje 2: Desarrollar un servicio que implique la utilización de recursos digitales u otros medios, considerando aspectos éticos, sus potenciales impactos y normas de cuidado y seguridad, a través de cuatro actividades.
Historia y Ciencias Sociales	Objetivo de aprendizaje 12: Describir los procesos de exploración y reconocimiento del territorio que impulsó el Estado para caracterizar su población, desarrollar sus recursos, organizar su administración y delimitar sus fronteras, entre otros, considerando el rol que cumplieron las ciencias (misiones científicas, censos, entre otros) e instituciones como la Universidad de Chile. Objetivo de aprendizaje 20: Explicar el funcionamiento del mercado (cómo se determinan los precios y la relación entre oferta y demanda) y los factores que pueden alterarlo: por ejemplo, el monopolio, la colusión, la inflación y la deflación, la fijación de precios y de aranceles, entre otros a través de cuatro actividades.
Matemática	Objetivo de aprendizaje 15: Mostrar que comprenden el concepto de azar.

Nota. Elaboración propia.

En los objetivos planteados en relación con cada asignatura ocurre lo que la descripción del proyecto nos ha advertido, cada asignatura realiza actividades que independientemente permiten el cumplimiento del producto esperado. Otro aspecto importante es la evaluación, que en este caso si bien el producto es un juego que solo se puede concretar con el apoyo de las cuatro asignaturas participantes, es evaluado mediante tres evaluaciones formativas y una sumativa, pero de manera independiente por asignatura.

Análisis del instrumento evaluativo

Tal como se mencionó en apartados anteriores, aunque el proyecto Recoploly involucra diversas asignaturas no existe evidencia de un enfoque interdisciplinar, puesto que, cada una de ellas participa de forma individual, considerando sus propias actividades y evaluaciones. Dado lo anterior, el análisis de este apartado considerará las evaluaciones individuales de la asignatura de matemáticas, siendo esta asignatura el enfoque de interés de los autores de este escrito.

En la disciplina de matemáticas, este ABP "interdisciplinario" observado tiene diversas formas de ser evaluado contemplando los siguientes recursos con su breve descripción; una lista de cotejo de seis indicadores, dos tablas de especificaciones; una con ocho indicadores y otra con seis indicadores, en ambas tablas dichos niveles de logro tienen sus categorías desde "No observado" correspondiente al puntaje mínimo (cero puntos) hasta cinco puntos correspondientes al puntaje máximo y finalmente una rúbrica que contiene siete indicadores y cuatro niveles de desempeño; desde "No observado" correspondiente al puntaje mínimo (cero puntos) hasta tres puntos correspondientes al puntaje máximo. Originalmente el docente comentaba que debería existir una rúbrica que integrara las disciplinas para evaluar el proyecto final, pero esta no se logró generar.

5. CONCLUSIONES

Llevar a cabo una actividad interdisciplinaria de calidad enfrenta múltiples obstáculos, sin embargo, también ofrece variados beneficios tanto para docentes como para estudiantes. Por un lado, los obstáculos comienzan desde la educación escolar de los docentes, quienes han recibido una educación segmentada en asignaturas debido al enfoque curricular presente hasta la fecha (Contreras, 2018); lo que dificulta una visión holística del conocimiento, donde todas las disciplinas sirvan para explicar un mismo fenómeno. Así mismo, durante la formación docente tampoco existe una preparación para el diseño de actividades interdisciplinarias, aspecto confirmado desde nuestra experiencia, la revisión de las mallas curriculares de diferentes universidades y el testimonio del docente entrevistado. Esto significa que incluso en esta etapa de preparación de un docente aún no se ha roto el panorama asignaturista necesario para aplicar una actividad interdisciplinaria. Otro obstáculo percibido en este estudio es el poco espacio horario que entrega la Unidad Técnico Pedagógica para llevar a cabo la planificación de la actividad y luego durante esta realizar la retroalimentación para ajustar y mejorar el proyecto, tal cual ocurre en la investigación de Lugo y Pérez (2021) en Colombia. Esta limitación, en el tiempo dedicado exclusivamente para la planificación del proyecto, significa en los profesores una carga extra, teniendo que hacer esta etapa del ABP en conversaciones de pasillo, fuera del horario de trabajo y/o por medios de comunicación informales, generando un sentimiento de sobrecarga. Tampoco existe suficiente material de apoyo formal para la elaboración de proyectos interdisciplinarios, lo que implica que los docentes deben crear estos desde su experiencia y entendimiento de lo que es una actividad de este tipo y que, por consecuencia de los obstáculos mencionados antes, no suelen ser realmente interdisciplinarios. El currículum también representa un obstáculo al estar diseñado para el cumplimiento de objetivos por asignatura, lo que luego limita los proyectos que se pueden realizar teniendo que identificar en primer lugar los objetivos que se están trabajando en cada asignatura y en segundo lugar el proyecto que puede combinar estos objetivos. Esto significa que la actividad suele ser pensada y planificada por docentes y no por los mismos estudiantes, disminuyendo la participación de estos últimos en esta importante etapa que es la elección del proyecto interdisciplinario, alejando la actividad de los intereses de los estudiantes desde el inicio, como ha señalado el docente en la entrevista.

Por otro lado, los beneficios de este tipo de actividad comienzan principalmente con la motivación que se puede generar en los estudiantes al realizar un trabajo diferente a uno tradicional. Esta motivación logra que los estudiantes se relacionen con la actividad con una actitud diferente a la que se ve cuando la motivación principal es la calificación. Con esta motivación, además, se pueden realizar actividades desafiantes que permiten que los estudiantes resuelvan problemas reales para cumplir con el objetivo declarado en el Marco Para la Buena Enseñanza (MINEDUC, 2021) de lograr un aprendizaje profundo. También, considerando que con la educación esperamos preparar a los estudiantes para enfrentar los desafíos de este mundo y que el Ministerio de Educación de Chile reconoce que el sistema tradicional no logra este objetivo, es que una actividad interdisciplinaria tiene el beneficio de cambiar la visión asignaturista en los estudiantes en una etapa temprana de su formación, logrando que entiendan el mundo de forma holística. Otro beneficio que se puede declarar en base a las experiencias del profesor entrevistado es que, al abordar un contenido desde una actividad como un juego de mesa, en este caso, los contenidos previos necesarios para interactuar con la actividad se disminuyen, logrando que cualquier estudiante motivado con el juego o el proyecto, en general, sienta desde un comienzo que es capaz de cumplir con el objetivo del ABP. Además, trabajar el mismo proyecto en diferentes asignaturas da mayor continuidad al desarrollo del aprendizaje, a diferencia del sistema tradicional donde al terminar una clase y entrar a otra los contenidos de una asignatura se dejan en espera ya que solo son usados durante el bloque de esa disciplina. Realizar una actividad donde las metas de cada clase son pensadas para cumplir objetivos en todas las asignaturas participantes permite el desarrollo de múltiples habilidades y actitudes de cada asignatura al igual que aprendizajes transversales. Finalmente, la formación profesional de los docentes se ve beneficiada con la implementación de una actividad interdisciplinaria, ya que, el profesorado puede aprender de la especialidad de los demás, en términos del contenido enseñado, la didáctica y los métodos de evaluación formativa y sumativa.

Además, hemos logrado describir cómo el docente aplica herramientas, métodos y enfoques en un ABP, que él llamó interdisciplinar, sin embargo, la relación del contenido con la matemática y otras asignaturas no se percibe como tal, por lo que, el objetivo no se logró cumplir por completo. La idea del ABP Recopoly surge a partir del profesor de matemática y profesora de inglés, buscando estrategias para motivar el aprendizaje de los estudiantes, fomentando el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la capacidad de transferir conocimientos a partir de diferentes contextos. En este proyecto se buscó, por un lado, que los estudiantes interactuaran colaborativamente (en equipos), y, por otro lado, que las asignaturas trabajaran en conjunto para desarrollar este nuevo juego. Las disciplinas involucradas en un inicio fueron Matemática, Historia, Geografía y Ciencias Sociales, Educación Tecnológica, Artes Visuales e Inglés, sin embargo, esta última a pesar de ser propulsora de la idea abandonó el proyecto. Para lograr el proyecto cada disciplina tiene como objetivo realizar 4 actividades, sin embargo, estas no presentan integración cultural entre las disciplinas, es decir, trabajan de manera independiente. Se debe tener en cuenta que, al trabajar en un ABP, uno de sus objetivos es poder transferir conocimientos de diferentes contextos y para ello es necesario generar espacios de integración entre las disciplinas. Como el proyecto es declarado interdisciplinario, dada la definición que tenemos de este concepto es esperable que exista coordinación y transferencia de culturas entre asignaturas. El diseño de este ABP, considerando la observación recién hecha nos permite caracterizar esta actividad como un ABP pluridisciplinar (Carvajal, 2010), ya que, existe un objetivo en común, que es la construcción de una versión propia del juego de mesa chileno Gran Santiago Recopoly, existe colaboración entre las áreas disciplinares y además estas se complementan, sin embargo, como hemos mencionado no existe sistematización ni integración de asignaturas. En el caso de las evaluaciones (en matemáticas), estás corresponden a tres formativas y una sumativa, y en ellas tampoco existe un enfoque interdisciplinar, de hecho, el docente comentó que en un principio se iba a construir una evaluación final donde se pudiese integrar todas las disciplinas y evaluar el proyecto terminado, sin embargo, no se logró llevar a cabo. Esto principalmente creemos que se debe a la falta de espacios y tiempos que no brindó el establecimiento para poder realizar una reunión en conjunto entre el resto del profesorado involucrado para poder crear la evaluación. Es sumamente importante que, al momento de planificar este tipo de proyecto, se pueda contar con los espacios y tiempo exclusivos para su desarrollo, ya que, en caso contrario, se ve afectada la calidad de la interdisciplina y, en consecuencia, el logro del aprendizaje profundo del estudiantado y la motivación ya sea del estudiante o docente para seguir trabajando con este tipo de actividad.

Dando respuesta a nuestra pregunta de investigación ¿qué prácticas docentes se llevan a cabo en la enseñanza de las matemáticas relacionadas con otras disciplinas?, podemos concluir que, en el contexto del caso estudiado, las prácticas docentes en la enseñanza de un contenido en matemática vinculadas con otras disciplinas tienden a ser limitadas en su nivel integración. A pesar de que se han intentado desarrollar actividades interdisciplinarias, como el proyecto ABP Recopoly o en otros estudios nacionales e internacionales, estas no llegan a lograr una verdadera integración entre las disciplinas involucradas.

La práctica docente observada refleja un enfoque en el cual se busca fomentar el trabajo colaborativo entre distintas áreas, pero sin un proceso de planificación que permita una integración profunda entre las disciplinas. Las actividades y evaluaciones tienden a mantenerse dentro de los límites de cada asignatura, y no se generan espacios de coordinación entre los docentes de las distintas áreas. Esto da lugar a una aproximación más bien pluridisciplinar, donde las disciplinas coexisten para lograr el producto del proyecto sin intercambiar sus metodologías y enfoques pedagógicos.

En términos generales, estas prácticas docentes que involucran las matemáticas en actividades interdisciplinares se ven influenciadas por factores negativos como la falta de preparación docente, la escasez de tiempo, recursos para la planificación conjunta, y la organización curricular tradicional. Estas limitaciones inciden en la implementación efectiva de actividades que, más allá de conectar los contenidos de las matemáticas con otras asignaturas, también promuevan una transferencia de conocimientos y metodologías entre ellas.

Por lo tanto, pese a la existencia de esfuerzos por incluir las matemáticas en contextos interdisciplinarios, las prácticas observadas no logran consolidarse como un verdadero enfoque interdisciplinario debido a la falta de integración curricular y la escasez de espacios de colaboración entre docentes. Lo anterior deja en evidencia la necesidad de una preparación más robusta, mayor tiempo de coordinación entre docentes y una visión más flexible del currículo escolar que favorezca la integración real de las matemáticas con otras áreas del conocimiento.

6. REFLEXIÓN FINAL

En primera instancia, la interdisciplina cada vez toma mayor peso en las aulas dada la necesidad de resolver los problemas modernos a través de diferentes disciplinas, por ende, es necesario que los docentes nos encontremos preparados para cambiar la visión asignaturista que crea este currículum actual en los estudiantes. Esta preparación necesita lograr que los docentes consideren varios factores que influyen en la calidad de la actividad, tales como: tiempo de planificación y retroalimentación, tiempo para que los estudiantes desarrollen la actividad, recursos concretos y de información, gustos del estudiantado, espacios, cantidad de disciplinas, motivación, currículum y administración escolar para que realmente sea de carácter interdisciplinar.

En segunda instancia, el trabajo interdisciplinar tiene variados beneficios tanto en estudiantes como en docentes. En estudiantes principalmente se encuentra el beneficio de la motivación que abre muchas puertas para presentar trabajos desafiantes que logran un aprendizaje profundo y desarrollan objetivos transversales. Además, se encuentran beneficios para los docentes, quienes crecen profesionalmente aprendiendo de otras disciplinas, sus contenidos, métodos didácticos y de evaluación.

Creemos que estos beneficios se ven opacados en el sistema educativo actual, al existir una gran cantidad de obstáculos que limitan la calidad de la actividad interdisciplinaria. Estos obstáculos son: la poca preparación de los/as docentes, el escaso material de apoyo para el diseño de las actividades, la distribución de los objetivos de aprendizaje y la exigencia de cumplir con ellos en cada asignatura y principalmente, el poco o nulo tiempo y espacio dedicado exclusivamente para la planificación de la actividad. Estas barreras explican tanto la baja frecuencia de actividades interdisciplinarias en sentido estricto, como la dificultad de consolidarlas con calidad.

7. REFERENCIAS

Andonegui, M. (2004). Interdisciplinariedad y educación matemática en las dos primeras etapas de la educación básica. Educere: Revista Venezolana de Educación, 8(26), 301-308.

Araya Crisóstomo, S., Monzón Godoy, V., & Infante Malachias, M. E. (2019). Interdisciplinariedad en palabras del profesor de Biología: de la comprensión teórica a la práctica educativa. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 24(81), 403-429. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-66662019000200403&lng=es&tlng=es

Carvajal, Y. (2010). Interdisciplinariedad: desafío para la educación superior y la investigación. Revista Luna azul, (31), 156-159.

Contreras López, G. (2018). Hablando del currículo integrado de James Beane. Revista Enfoques Educacionales, 1(2), 151–160. https://enfoqueseducacionales.uchile.cl/index.php/REE/article/view/48636

Corica, A. (2021). El estudio interdisciplinar de la matemática en la escuela secundaria y la formación de profesores. Revista de Educación, (25.1), 269-292. http://fh.mdp.edu.ar/revistas/index.php/r_educ/article/view/5846/6025

Espinoza Freire, E. (2020). La investigación cualitativa, una herramienta ética en el ámbito pedagógico. Revista Conrado, 16(75), 103-110.

Huincahue, J. (2022). Interdisciplina en Educación Matemática: Características genuinas de la práctica interdisciplinar académica. Revista Chilena de Educación Matemática, 14(2), 59–68. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i2.104

Lázaro Pineda, C. A. (2023). Quehacer docente: una reflexión desde la racionalidad del currículo práctico. Revista Honoris Causa, 15(1), 145–161. https://revista.uny.edu.ve/ojs/index.php/honoris-causa/article/view/287

Lugo-López, N., & Pérez-Almagro, M. (2021). La interdisciplinariedad en el aula de clase: factores que influyen en su construcción y uso. Revista Boletín Redipe, 10(11), 33-46. https://doi.org/10.36260/rbr.v10i11.1516

Ministerio de Educación (2022). Nuevas coordinaciones para el desarrollo de un enfoque interdisciplinar. Unidad de Currículum y Evaluación https://www.curriculumnacional.cl/portal/Noticias/Noticias-2022/295828:Nuevas-coordinaciones-para-el-desarrollo-de-un-enfoque-interdisciplinar

Ministerio de Educación (2021). Marco para la buena enseñanza. Unidad de Currículum y Evaluación. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2021/08/MBE-2.pdf

Nicolescu, B. (2013). La evolución transdisciplinaria del aprendizaje. Trans-pasando Fronteras, (4), 39-50. https://doi.org/10.18046/retf.i4.1779

Parra, H. (2020). La interdisciplinariedad como espacio para el desarrollo del horizonte matemático en profesores en ejercicio. En F. González, M. Iglesias, & L. A. Castillo (Comps.), Memorias del I Congreso Virtual Iberoamericano de Formación de Profesores (COVIBE). Aprender en Red.

Reynaldo, R., Rodríguez, A., & González, G. (2015). El alcance social del tratamiento interdisciplinario de la matemática y las ciencias naturales en el segundo ciclo de la educación primaria. Didáctica Y Educación, 6(3), 37–50. https://revistas.ult.edu.cu/index.php/didascalia/article/view/380

Suasnabas-Pacheco, L., & Fernández, B. (2020). La transversalidad. La interdisciplinariedad. El currículo global. Las competencias y las tecnologías de la información y la comunicación elementos de reflexión en el diseño curricular. Dominio de las Ciencias, 6(2), 158-180. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7398445

UNESCO (2022). Reimaginar juntos nuestros futuros: un nuevo contrato social para la educación. Fundación SM. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000381560

Unidad de Currículum y Evaluación. (2019). Manual: Metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos. Ministerio de Educación de Chile. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-222855_recurso_pdf.pdf

https://doi.org/ 10.46219/rechiem.v17i2.175

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática,
SSN 2452-5448

LA INTEGRAL DEFINIDA DESDE EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS

THE DEFINITE INTEGRAL FROM THE PERSPECTIVE OF MATHEMATICS TEACHER SPECIALISED KNOWLEDGE

Jorge Hernández-Tello
jhernandez@academicos.uta.cl
https://orcid.org/0000-0002-4564-100X
Universidad Nacional de Educación a Distancia, España

Álvaro Cortínez Pontoni
acortinezp@academicos.uta.cl
https://orcid.org/0000-0002-9377-9476
Universidad de Tarapacá, Chile

Blanca Arteaga-Martínez
blanca.arteaga@edu.uned.es
https://orcid.org/0000-0002-1079-1526
Universidad Nacional de Educación a Distancia, España

RESUMEN

Este artículo presenta el análisis de una tarea orientada a describir la integral definida como área bajo la curva, apoyada en el uso de GeoGebra. El marco teórico corresponde al modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). Se llevó a cabo un estudio de caso con enfoque cualitativo descriptivo, organizado en tres fases —planteamiento, análisis y reflexión—, en el contexto de una tarea desarrollada durante el año 2023 con estudiantes de Pedagogía en Matemática en la asignatura Didáctica del Cálculo de la Universidad de Tarapacá (Chile). Los resultados evidencian las producciones de los futuros docentes en cada fase: activación del conocimiento disciplinar, análisis e interpretación de procedimientos y reconstrucción del significado de la integral definida desde su fenomenología. Se concluye que el uso del modelo analítico MTSK facilitó el estudio de la tarea en la formación inicial docente, involucrando categorías del conocimiento de los temas (KoT) para describir la integral definida como área bajo la curva, y promoviendo la articulación entre registros de representación pictórica mediante el uso de tecnología.

Palabras clave:
conocimiento de los temas; integral definida; formación de profesores; MTSK; representación pictórica

ABSTRACT

This article presents the analysis of a task designed to describe the definite integral as the area under the curve, supported by the use of GeoGebra. The theoretical framework adopted is the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. A descriptive qualitative case study was conducted, organized into three phases—design, analysis, and reflection—in the context of a task carried out in 2023 with preservice mathematics teachers enrolled in the Didactics of Calculus course at the University of Tarapacá (Chile). The findings highlight the students' productions in each phase: activation of disciplinary knowledge, analysis and interpretation of procedures, and reconstruction of the meaning of the definite integral from its phenomenology. It is concluded that the use of the MTSK analytical model facilitated the study of the task within teacher education, involving categories of Knowledge of Topics (KoT) to describe the definite integral as the area under the curve, and fostering the articulation between pictorial representations supported by technology.

Keywords:
knowledge of topics; definite integral; teacher training; MTSK; concrete-pictorial representation

Recibido 13 de septiembre 2024, Aceptado 11 de agosto 2025
Revista Chilena de Educación Matemática, Volumen 17, N°2

1. INTRODUCCIÓN

La integral definida es un concepto importante para los estudiantes de las disciplinas científicas, dado que está presente en distintos contextos donde será necesario resolver problemas que requieren su conocimiento, comprensión y aplicación. Por lo tanto, "es necesario identificar las dificultades que los estudiantes encuentran al aprenderlo para diseñar actividades de enseñanza que logren en el estudiante un aprendizaje más sólido" (Camacho et al., 2008, p. 34).

La literatura especializada en Educación Matemática recoge investigaciones centradas en las dificultades en la comprensión de la integral definida por parte de estudiantes universitarios. Por ejemplo, se han identificado limitaciones por parte de los estudiantes para interpretar la integral definida como área bajo la curva (Bezuidenhout & Olivier, 2000), para representar la integral definida de diferentes formas (Dreyfus et al., 2021; Serhan, 2015), e incluso referidas a la comprensión de la definición de integral definida y la interpretación de problemas de cálculo de áreas en contextos más amplios (Rasslan & Tall, 2002).

Sari et al. (2019) señalan que algunos estudiantes tienen una comprensión no idónea de la definición de la integral definida, dado que se desvían del concepto formal y garantizan la existencia de la integral definida sin una razón lógica. En otros casos, los estudiantes comprenden algunos conceptos asociados a la integral definida, pero a pesar de ello, son incapaces de usarlos para definir dicha integral, probablemente porque el trabajo basado en "conceptos comunes de área bajo una curva y antiderivada son insuficientes para la comprensión integral" (Lehmann, 2024, p. 1).

Otras dificultades se ponen de manifiesto en el momento de interpretar la integral definida desde una perspectiva gráfica (Domínguez et al., 2019), o al mostrar falta de coordinación entre los procesos de partición, sumas y límites con sus respectivas representaciones tanto algebraica, gráfica y numérica (Tatar & Zengin, 2016), lo que ocasiona un obstáculo en el conocimiento de la integral definida.

Cuando cuestionamos a los estudiantes sobre las razones que les dificultan la resolución de problemas que involucren el cálculo integral, lo justifican desde el empleo de los libros de texto como material casi único por parte de los docentes (Quiroz et al., 2022). Y es que una de las claves es la interpretación gráfica de la integral definida, de la que se ha recogido su importancia y trascendencia en la representación en los libros de texto (Jones, 2018) y con ello, la necesidad de generar actividades que partan de problemas contextualizados donde se exprese el rol que juegan las sumas de Riemann en este proceso (Serhan, 2015) o se haga uso de la descomposición de las regiones irregulares en figuras regulares (rectángulos), con el fin de tener una aproximación lo bastante cercana al valor del área de la región delimitada (Peña et al., 2019). Sin embargo, estos libros de texto brindan oportunidades limitantes para que el estudiante pueda visualizar la integral definida desde la suma de pequeñas partes (Hong & Kwaka, 2024).

Otras investigaciones más recientes sobre el análisis del currículo del cálculo en educación media y superior señalan que los diseños curriculares están fuertemente arraigados en las experiencias, las creencias y los puntos de vista de los responsables del diseño curricular, más que en el desarrollo de nociones fundamentales del cálculo. Por ejemplo Bustos y Ramos (2022) afirman que tras el cambio curricular chileno, los profesores se ven enfrentados a la enseñanza de temas que habían tratado en su forma inicial, pero que no habían tenido oportunidad de impartirlos en la enseñanza media. Así, la actividad pedagógica actual no tiene muchas posibilidades para una aplicación con el apoyo de la tecnología informática en Chile como recurso de enseñanza, por lo que puede ser más complejo el hecho de adaptar el contenido de la educación a las necesidades de una sociedad en rápido desarrollo, sabiendo que la tecnología se ha convertido en infraestructural en relación al descubrimiento matemático y a las interacciones en el escenario de aprendizaje (Kaput et al., 2020), y que supone de manera específica rapidez en la resolución de diversos problemas que involucren la aplicación de la integral definida como el área bajo la curva (Duriš, 2020).

Las necesidades de la formación inicial para los profesores en matemática están descritas en los Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media en Chile (EOCP). Un documento oficial dirigido a las Facultades y Escuelas de Educación del país ofrece "una orientación acerca de los conocimientos y habilidades necesarias que debería manejar de pedagogía para enseñar estas disciplinas, sobre la base del criterio de expertos” (MINEDUC, 2021, p. 8). Los estándares disciplinarios correspondientes al área de Matemática se organizan en seis subáreas: a) Números y álgebra, b) Geometría, c) Probabilidades y estadística, d) Límites, derivadas e integrales, e) Pensamiento computacional y programación y f) Habilidades y actitudes matemáticas. En la subárea d) nos insta necesidad de que los futuros profesores de matemáticas chilenos se preparen para “modelar fenómenos que requieren conocimientos de límites, derivadas e integrales y de los otros estándares como, por ejemplo, fenómenos que requieran del uso de probabilidades, cálculo de integrales y tecnología” (MINEDUC, 2021, p. 23).

El presente estudio tiene como propósito analizar, a partir del modelo Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge (MTSK; Carrillo et al., 2018), los conocimientos que reflejan las producciones generadas por un grupo de estudiantes de pedagogía matemática, considerados como futuros docentes, al abordar una tarea centrada en los contenidos intra-conceptuales involucrados en la descripción de la integral definida como área bajo la curva. La pregunta de investigación que guiará nuestro trabajo para dar respuesta al objetivo es: ¿Cómo construyen y desarrollan su comprensión de la noción de integral definida los docentes en formación?.

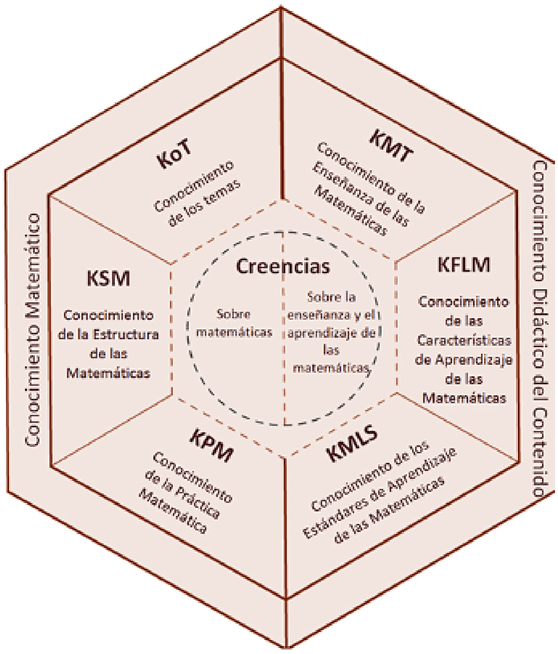
2. MARCO TEÓRICO

El MTSK es un modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de tipo descriptivo. El modelo permite analizar el conocimiento del profesor desde un punto de vista global, considerando tanto el dominio matemático como el dominio didáctico específico, donde se destacan las diferentes dimensiones en las que el profesor utiliza el contenido matemático. Se configura como una “como herramienta teórica y analítica con la cual ofrecer una serie de evidencias e indicios del conocimiento didáctico del contenido” (Escudero et al., 2021, p.192) del profesor durante su práctica pedagógica.

El MTSK está conformado por dos dominios relacionados con el Conocimiento Matemático MK (Mathematical Knowledge) y el Conocimiento Didáctico del Contenido PCK (Pedagogical Content Knowledge), y uno más de Creencias (Beliefs) vinculado con los dos anteriores. Los dos primeros se desglosan en tres subdominios cada uno de ellos. El MK contempla el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica, mientras que el análisis del conocimiento de aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje se realiza a través del PCK. Podemos ver en su representación sintética (Figura 1) como el MTSK considera las concepciones que tiene el profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, a las que se denomina creencias y se encuentran en el centro del modelo, delimitada con líneas punteadas para reflejar que ellas permean a cada uno de los subdominios de este, y que es pertinente el estudio de las relaciones entre dichas creencias y los conocimientos por formar parte, respectivamente, de la estructura afectiva y cognitiva del profesor (Sánchez et al., 2025).

El MTSK facilita un inventario de categorías de análisis de este conocimiento especializado, exclusivo del docente para el desarrollo de su labor. Este modelo, lejos de pretender realizar una evaluación, se enmarca de alguna manera en un modo constructivista de observación de la tarea del docente de matemáticas (Arteaga-Martínez & Arnal-Palacián, 2022), que se caracteriza como aquel que el profesor necesita y utiliza para explicar el contenido (Hitt, 2003).

Figura 1. Subdominios del modelo MTSK



Nota. Extraído de Sosa et al. (2016, p. 154)

Las conexiones intraconceptuales son el foco de este trabajo, así nos centraremos en el subdominio "conocimiento de los temas" (KoT), por lo que se siguen las pautas de uso del modelo focalizando la atención en "el tipo de problema a los que se puede aplicar el contenido, con sus contextos y significados asociados; las propiedades y sus principios subyacentes, las definiciones y procedimientos, incluyendo las conexiones dentro del mismo tema" (Carrillo et al, 2018, p. 7). La categoría "definiciones y propiedades" se concibe como una unidad integrada, debido a la dificultad de establecer con precisión la frontera entre las definiciones y las propiedades (Liñán et al., 2014). En el caso de las definiciones, se alude al conocimiento que posee el profesorado sobre definiciones parciales o alternativas, así como sobre las diversas formas en que estas pueden expresarse, ya sea de manera oral, escrita, mediante lenguaje natural o a través del lenguaje matemático. Por su parte, las propiedades y sus fundamentos remiten al saber docente acerca de las propiedades atribuidas a un tema, objeto matemático o procedimiento, las cuales aportan significado y sentido a dichos contenidos. Carrillo et al. (2014) hacen referencia a que el profesor le da sentido a este tipo de conocimientos, desde la necesidad de contar con un conocimiento disciplinar profundo (en nuestro caso del cálculo integral y sus aplicaciones), además de conocer el contenido matemático que se desea enseñar, junto con sus significados, propiedades y procedimientos de manera fundamentada (Carrillo et al., 2018). Se incluye así el conocimiento del docente de los fenómenos que puedan dar lugar a la creación del concepto y la aplicación en un contexto.

De acuerdo a la investigación previa con este modelo, podemos considerar dentro de este subdominio KoT "el conocimiento del profesor sobre distintas formas de representar el contenido matemático" (Vasco & Climent, 2018, p. 138), considerando el conocimiento de las diferentes formas (numérica, analítica gráfica, verbal, entre otras) en las que se puede representar un concepto matemático. En relación con la investigación que recoge la importancia de los registros de representación referidos a nuestro objeto de estudio, Delice y Sevimli (2010) analizan los beneficios del uso de diferentes representaciones para la resolución de problemas de la integral definida. Por otro lado, la utilización de herramientas digitales como GeoGebra en la enseñanza de la integral definida se ha reportado favorable, en particular para la comprensión del área bajo la curva y la relación entre integral definida y las sumas de Riemann (Bricio-Barrios et al., 2020).

De acuerdo con el enfoque de nuestra investigación, planteamos un análisis desde el KoT en relación con el contenido del concepto de "integral definida" en un espacio de formación de futuros docentes, en un entorno formativo donde "lo que significa enseñar, lo que significa aprender, e incluso lo que significa que algo sea matemático, comienzan a formar una identidad de quiénes son como profesor, y qué es lo que enseñan como asignatura" (Liljedahl et al., 2009, p. 29).

3. METODOLOGÍA

Para diseñar la investigación se utiliza el estudio de caso, ya que nos facilita dar respuesta de manera ordenada al qué, cómo y por qué analizar este escenario formativo en su contexto (Yin, 2018). El estudio de caso ayuda a analizar, apoyándonos en un modelo como el MTSK, una tarea guiada realizada en distintas fases.

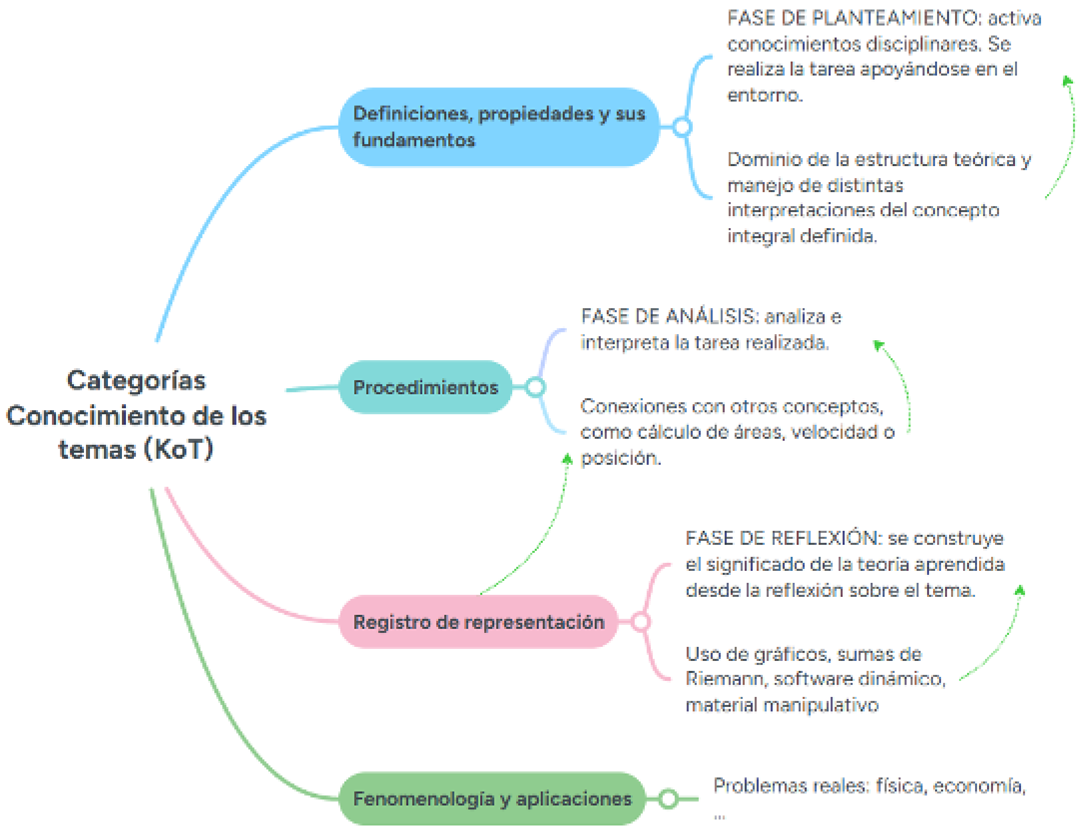
Los participantes fueron siete estudiantes de cuarto año de Pedagogía en Matemática (E1, E2, …, E7) que integraban la totalidad del grupo de la asignatura Didáctica del Cálculo en la Universidad de Tarapacá (Chile), durante el año académico 2023/24. La participación fue voluntaria. Las actividades se prepararon específicamente para este trabajo de investigación, y todos los participantes habían cursado de manera previa una asignatura de contenido denominada “Cálculo integral”.

El grupo de estudiantes realizó una tarea guiada en el tiempo formativo en la universidad cuyo objetivo era describir la integral definida como área bajo la curva, donde se les facilita información acerca del conocimiento matemático de este concepto, desde el proceso de cálculo de áreas. El proceso metodológico se organizó en tres fases: planteamiento, análisis y reflexión.

El diseño de la tarea se fundamenta en la propuesta de Liñán et al. (2014) donde establecen la observación e interpretación de los participantes en una realidad en su entorno, interactuando con el objeto matemático y conllevando a una reconstrucción del significado, en nuestro caso desde las categorías del KoT (Figura 2), de una manera similar a como hacen Pérez-Montilla y Cardeñoso (2020) con futuros profesores cuando realizan una tarea centrada en el concepto de límite.

Este estudio fue aprobado por el comité de ética de la Universidad de Tarapacá, bajo el código c25-2024.

Figura 2. Diseño del proceso metodológico a partir del planteamiento del KoT



Nota. Elaboración propia

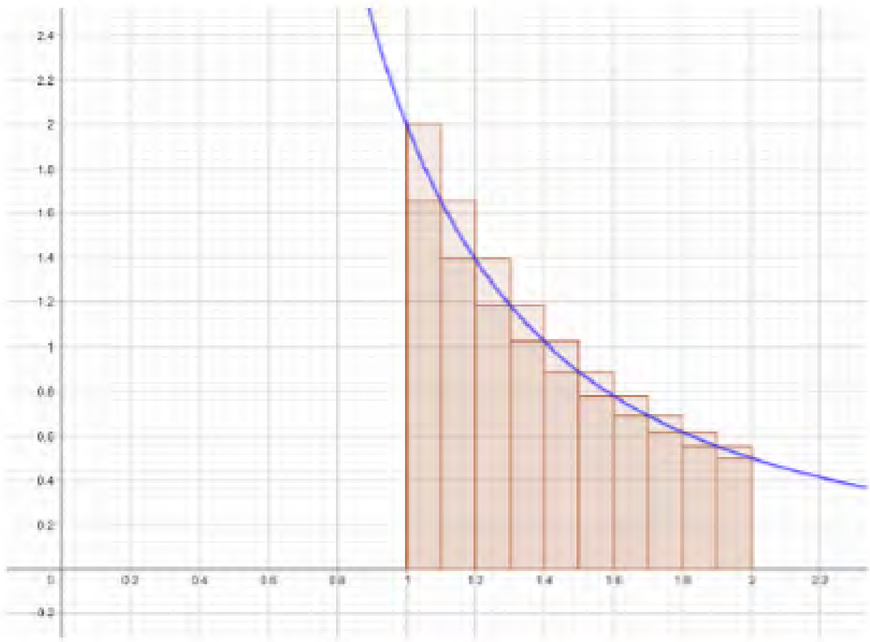
Cabe señalar que este trabajo no incluye una de las categorías KoT, la fenomenología desde la aplicación a problemas reales, dado que pese a que sí que se trabajó durante la experiencia y que se inicia en la fase de reflexión, el análisis de las tareas implicadas hubiese constituido por sí solo otra investigación.

La fase planteamiento buscó la activación de conocimientos que los estudiantes habían trabajado el curso anterior de cálculo integral. En consecuencia, se plantea que los estudiantes son reacios a utilizar su compresión sobre lo que es una suma de Riemann para interpretar lo que hace una integral (Wagner, 2017), con lo que se da inicio con la definición de conceptos tales como partición de un intervalo, sumas de Riemann, finalizando con integral definida, para posteriormente plantear los fundamentos y propiedades matemáticas involucradas.

Después los estudiantes trabajaron en grupo con un problema (Figura 3) que involucraba el descubrimiento a partir del límite de una serie de rectángulos inscritos y circunscritos el área debajo una curva. Se considerarán así algunos de los significados de la integral definida. La elección de este problema recae en el conocimiento que debe tener un profesor del curriculum, adoptando una postura crítica y reflexiva de los objetivos de aprendizaje al nivel de enseñanza y desarrollo conceptual (Carrillo et al., 2014).

Figura 3. Problema realizado por los futuros docentes como cierre de la fase de planteamiento

1. Se considera la función l con $l(x) = \frac{2}{x^2}$, cuyo gráfico se muestra, junto con una aproximación superior e inferior del área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[1;\ 2]$.



Función l

   a. Calculen una aproximación inferior y superior del área marcada, sumando las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
   b. Conjeturen acerca del límite de la serie de áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
   c. Apliquen la regularidad encontrada en 5 y determinen la ecuación funcional de la función L para la función l con $l(x) = \frac{2}{x^2}$.
   d. Verifiquen que el límite conjeturado se puede obtener mediante la función L (resultado de G en 5), determinando la diferencia $L(2) - L(1)$.

Nota. *UCE (2021, p. 151)*

Consideramos así dentro del MTSK, únicamente algunas categorías KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos), ya que la experiencia del futuro profesor de matemáticas debe partir del conocimiento de la materia que enseñará, en nuestro caso el objeto matemático es integral definida, a un nivel de profundidad, organización y estructura más allá de lo que los estudiantes aprenderán (Liñán et al., 2014).

Posteriormente, en la fase de análisis se presentaron los procedimientos necesarios para la utilización de la integral definida en el cálculo de áreas de regiones planas desde el problema realizado a partir de preguntas (Tabla 1), que orientan a la justificación al conocimiento matemático formuladas como subcategorías KoT (Carrillo et al., 2018).

Tabla 1. Preguntas orientadas al análisis de KoT (procedimientos)

Pregunta	Respuesta
¿Cómo se hace?	Sea f(x) una función continua en el intervalo [a,b], ubicado en el primer cuadrante. La región limitada por la función, el eje X con las rectas x=a y x=b. El intervalo [a,b] es particionado en n partes de igual longitud, posteriormente a cada extremo de estos subintervalos se le asocia la imagen a través de la función y=f(x), esto conlleva a que el área de región limitada pueda aproximarse por la suma de las áreas de los n rectángulos generados.
¿Cuándo puede hacerse?	Cuando la función es continua en un intervalo entonces es integrable. Esto es, si una función f es continua en un intervalo [a,b] su integral definida en [a,b] existe.
¿Por qué se hace así?	Para precisar la noción de área de una región con frontera curva, para aquello se define de forma rigurosamente el área que está debajo de la gráfica de una función y=f(x) continua como la integral definida.

Nota. Elaboración propia

Las preguntas recogidas en la Tabla 1 actúan como base para que los futuros profesores realicen una tarea que describe la integral definida como área bajo la curva, la tarea se desarrolló por medio de cinco procedimientos ejecutados a lo largo de tres etapas (Tabla 2). Las etapas 1 y 2 distribuidas en dos sesiones cada una se consideraron dentro de la fase de análisis. La etapa 3 fue considerada en la fase de reflexión. Cada etapa tuvo una duración de 90 minutos.

Tabla 2. Resumen de los procedimientos en cada una de las etapas para la realización de la tarea

	Fase de Análisis		Fase de Reflexión
Tarea	**Etapa 1**	**Etapa 2**	**Etapa 3**
Descripción de la integral definida como área bajo la curva.	P1: Elegir una función y=f(x), definida en un intervalo cerrado [a,b] perteneciente al primer cuadrante. Construir la gráfica de la función escogida debe estar limitada por el eje X y las rectas verticales x=a y x=b.	P2: Aproximar el valor del área de la superficie limitada para una partición de n=10. P3: Determinar el valor de la superficie limitada a través del uso del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). P4: Determinar el valor de la superficie limitada a través del uso del software Geogebra. Utilizar las particiones realizadas en P2.	P5: Representar de manera concreta-pictórica el gráfico realizado en P4 en una superficie de 40x40 cm (en cartón piedra).

Nota. Elaboración propia

Para la realización de la tarea se utilizaron los registros de representación algebraico, gráfico y concreto-pictórico en la elaboración de los procedimientos. En la etapa 1, los estudiantes comenzaron con el desarrollo del procedimiento P1, que consiste en proponer una función y=f(x) definida en un intervalo cerrado [a,b] localizada en el primer cuadrante; esto facilitó contar con una relación a escala con los reales positivos y la medición de la unidad de centímetro, necesaria para la representación concreto-pictórica de la tarea. En la etapa 2, en el procedimiento P2 se realiza 10 particiones de igual medida al intervalo [a,b], para aproximar el valor del área de la superficie limitada por medio de rectángulos inferiores y superiores. Con el valor estimado de la aproximación del área se procede con P3, con el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) para calcular el valor exacto del área debajo de la curva. Para la interpretación del problema realizado la consigna que se les dio fue cuestionarles sobre el interés que puede tener el uso del cambio de registro para la comprensión de la integral definida. En la fase de reflexión, los futuros profesores aplicaron lo aprendido en las fases anteriores haciendo uso de fenomenología y aplicaciones del concepto de integral definida para describir el área bajo la curva, esta categoría engloba los conceptos, procesos y procedimientos analizados desde dos perspectivas. Así, desde el planteamiento de análisis con el MTSK, la etapa 1 detectaría evidencias de los elementos del contenido movilizado, mientras que la etapa 2 incluye "un detonante para relacionar los conocimientos puestos en juego en clase (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), generando el caso de nuestra tarea" (Barrera et al., 2019, p. 114).

En la etapa 3 se realizó el procedimiento P5 consistente en representar de forma figural la gráfica realizada en P4, tomando como unidad de medida el centímetro. Para P5 el modelo de área bajo la curva se encuentra en relación con la representación concreto-pictórico de la misma. Así, la utilización de material fue necesaria para su ejecución. Los materiales facilitados para que los estudiantes utilizasen fueron: unidades de cartón piedra, regla de 30 cm, tijera, lápices de colores, lana, cartulinas de color y pegamento. El diseño de la representación quedó a libre elección de cada estudiante, siempre que se adapte a las medidas del cartón piedra con dimensión 40x40 cm.

Para finalizar la tarea, los futuros profesores respondieron a preguntas que involucraban el contenido en que estaban trabajando, el nivel educativo (enseñanza media) donde tiene cabida esta tarea, los conocimientos previos necesarios para la elaboración de la tarea y qué posibles cambios se podrían realizar a la tarea para facilitar la comprensión del concepto de integral definida (Tabla 3).

Estas cuestiones buscan la reflexión del grupo de futuros docentes ante la tarea realizada, como un paso previo a una fase posterior (no objeto de este trabajo) que trabajará la fenomenología y sus aplicaciones.

Tabla 3. Preguntas para la fase de reflexión

Pregunta
1. ¿Qué contenido matemático estamos trabajando?
2. ¿Por qué se estudia ese contenido?
3. ¿Qué cambios deberían introducirse en la tarea para incrementar la calidad del proceso de aprendizaje de la integral definida?

Nota. Elaboración propia

4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Para el análisis y aporte de resultados se recogen evidencias de las producciones de los futuros docentes en cada una de las fases de realización de la tarea, donde se espera que los resultados tengan un carácter reflexivo, que nos permita entrar en la discusión del conocimiento disciplinar que se tiene con respecto al objeto matemático integral definida y su relación con el concepto de área bajo la curva. Utilizaremos aquellas evidencias de las tareas que muestran aspectos concretos, para dar respuesta a la pregunta de investigación planteada. Se cuenta con el consentimiento informado de todos los participantes.

Para garantizar la fiabilidad en el análisis de las producciones, se empleó una metodología basada en la triangulación de investigadores. Tres especialistas realizaron un análisis inicial de manera individual e independiente, lo que permitió recoger diversas interpretaciones y minimizar sesgos personales. Posteriormente, se llevó a cabo una puesta en común de los resultados obtenidos por cada investigador, con el objetivo de discutir y consensuar los hallazgos, fortaleciendo así la validez del análisis mediante una reflexión crítica compartida. Este enfoque es coherente con los principios que avalan el análisis temático cualitativo (Nowell et al., 2017).

Dentro de la fase de planteamiento, los estudiantes E2 y E4 (Figura 4) desarrollan los apartados a) y b) del problema de UCE (2021, p. 151) donde se muestra la aproximación inferior y superior del área marcada, para posteriormente realizar una conjetura de lo realizado en el apartado b). En este caso, las fases a) y b) se relacionan con KoT definiciones, mientras que c) podríamos enmarcarlo en KoT propiedades, y d) KoT fundamentos.

Figura 4. Desarrollo de a) y b) por parte de E2 y E4

a. Calculen una aproximación inferior y superior del área marcada, sumando las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.

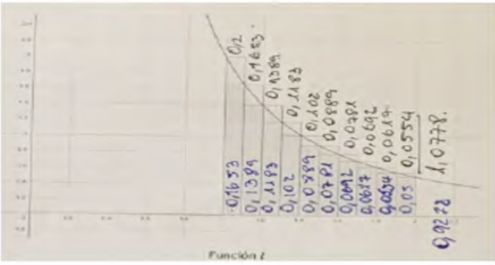


Gráfico de la función l(x) hecho en geogebra

Recordando que la Δx es 0.1 y $10\Delta x=2$

RECTÁNGULO INFERIOR	RECTÁNGULO SUPERIOR
$f(1.1)\Delta x = 0.1653$	$f(1)\Delta x = 0.12$
$f(1.2)\Delta x = 0.1389$	$f(1.1)\Delta x = 0.1653$
$f(1.3)\Delta x = 0.1183$	$f(1.2)\Delta x = 0.1389$
$f(1.4)\Delta x = 0.102$	$f(1.3)\Delta x = 0.1183$
$f(1.5)\Delta x = 0.0889$	$f(1.4)\Delta x = 0.102$
$f(1.6)\Delta x = 0.0781$	$f(1.5)\Delta x = 0.0889$
$f(1.7)\Delta x = 0.0692$	$f(1.6)\Delta x = 0.0781$
$f(1.8)\Delta x = 0.0617$	$f(1.7)\Delta x = 0.0692$
$f(1.9)\Delta x = 0.0554$	$f(1.8)\Delta x = 0.0617$
$f(2)\Delta x = 0.05$	$f(1.9)\Delta x = 0.0554$
Suma de los rectángulos inferiores = 0.9278	Suma de los rectángulos superiores = 1.0778

b. Conjeturen acerca del límite de la serie de áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.

El área de los rectángulos inferiores con los superiores se relacionaban de una manera particular. El área de un rectángulo inferior son iguales a el área del siguiente rectángulo del área superior.

Además que la diferencia de las áreas del triángulo superior con el área inferior, es de 0.15.

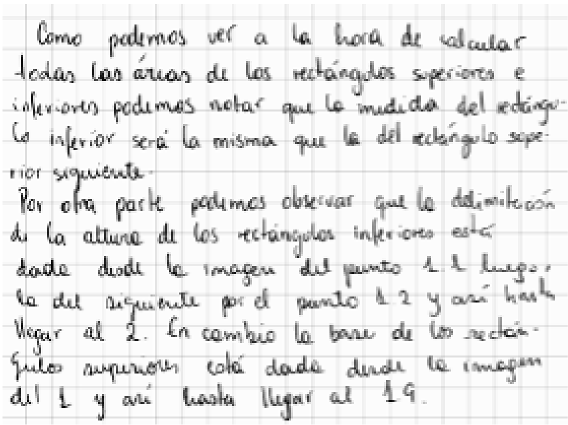
Ambas cantidades son muy cercanas al área calculada de la curva que sería 1.

Nota. UCE (2021, p. 151)

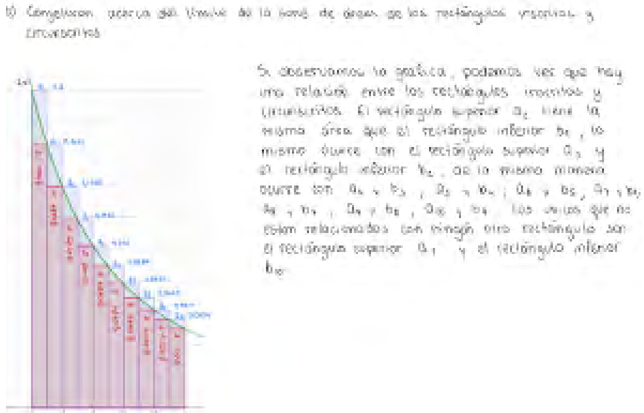
En este caso, podemos ver la exactitud y pertinencia de relación entre las definiciones (como parte del KoT) de la integral bajo la curva en sentido geométrico o de manera analítica como suma de Riemann. En todos los casos, los estudiantes realizan los apartados a), c) y d) de manera similar, dado que se realiza un desarrollo algebraico teniendo la particularidad de que los procesos son estructurados, destacando la relación que existe entre la aproximación de un área a través de rectángulos y la aplicación de la integral definida en el Teorema Fundamental del Cálculo, considerando como parte del KoT las propiedades y teoremas relevantes, en este caso considerando las propiedades de la función. Para el caso de b) resulta conveniente analizar la argumentación de los estudiantes al conjeturar lo realizado, en la Figura 5 se muestra la argumentación de E3 y E5, que infieren que el valor de área del rectángulo A1 inferior es igual a la del área superior posterior A2, además de describir que la altura de cada rectángulo se encuentra asociado a la imagen del punto en la partición del intervalo. De manera análoga la estudiante E7 muestra la relación entre los valores de las áreas de los rectángulos inferiores y superiores a través del gráfico.

Figura 5. Argumentación de b), realizado por E3-E5 (i) y E7 (ii) respectivamente

(i)



(ii)



Dentro de la fase de análisis, la elección de la función es un aspecto a destacar porque condicionará los procedimientos (KoT). Los estudiantes eligen funciones que involucran aspectos trigonométricos (57%), raíces (28.8%) y logaritmos (14.3%), casos que delimitan la elección del estudiante sin promover la interpretación más allá del cálculo, sin ahondar en contextos donde la integral tiene sentido (KoT fenómenos y aplicaciones). El desarrollo para todos los casos se realiza en un registro algebraico, donde se establece la descripción utilizada y su representación se pone en manifiesto la respuesta de E1 y E6, por el sentido al definir una función trigonométrica $f(x)=40\sin(x/12)$ en el intervalo $[0,12\pi]$ y una función raíz $f(x)=3\sqrt{(4x+8)}$ en intervalo $[0,40]$ respectivamente. En la Figura 6 (i) se muestra los procedimientos P1, P2 y P3 realizados por E1 en relación la etapa 1 y 2 respectivamente. De manera análoga la Figura 6 (ii) muestra los procedimientos de E6.

Figura 6. Procedimiento de P1, P2 y P3 en registro algebraico por parte de E1 (i) y E6 (ii)

(i)

Descripción	Representación
Definir una función de variable real $y = f(x)$ mostrando su dominio y recorrido	$F(x) = 40\sin\left(\frac{x}{12}\right)$ DOM R
Establecer parámetros a y b dentro del dominio para limitar un subconjunto [a, b]	$[0, 12\pi]$
Determinar Δx entre cada elemento [a, b] para 10 particiones $\Delta x = \frac{b-a}{10}$	$\Delta x = \frac{12\pi - 0}{10}$ $\Delta x = 3.77$
Conjunto de particiones P	$P = \{0, 0 + \Delta x, 0 + 2\Delta x, 0 + 3\Delta x, 0 + \ldots 0 + 10\Delta x = 12\pi\}$ $P = \{0, 3.77, 7.54, 11.31, \ldots, 12\pi\}$
Determinar el área de los rectángulos inferiores	$= 797.92$
Determinar el área de los rectángulos superiores	$= 1105.72$
Por medio de la cantidad de particiones de [a, b], determinar la suma: $S_n = \sum_{i=1}^{10} f(c_i)\Delta x$ Donde c_i es punto medio en cada partición	$S_n = \sum_{i=1}^{10} f(c_i)\Delta x$ $S_{10} = f(1.89)3.77 + f(5.66)3.77 + f(9.43)3.77 + \cdots + f(35.82)3.77$ $= 963.91$
Expresar el área de la región, por medio de la definición de integral definida $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$	$\int_0^{12\pi} 40\sin\left(\frac{x}{12}\right) =$ $\lim \sum_{i=1}^{10} \left(40\sin\left(\frac{\frac{12\pi i}{n}}{12}\right)\right)3.77$
Por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), determina el valor de la superficie limitada por la función $y = f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. $A(S) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	$= \int_0^{12\pi} 40\sin\left(\frac{x}{12}\right)$ $= -480\cos\left(\frac{x}{12}\right) + c$ $= -480\cos\left(\frac{12\pi}{12}\right) - \left(-480\cos\left(\frac{0}{12}\right)\right)$ $= 480 + 480 = 960$

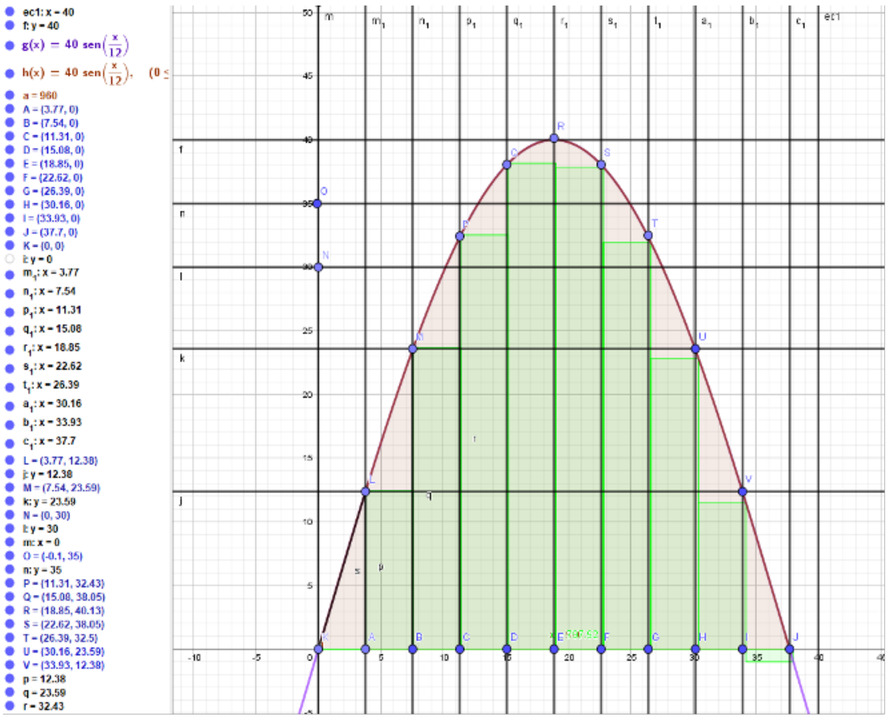
(ii)

Descripción	Representación
Definir una función de variable real $y = f(x)$, mostrando su dominio y recorrido.	$y = 3\sqrt{4x + 8}$ Dom: $[-2, \infty+]$ Rec: $[0, \infty+]$
Establecer a y b dentro del dominio para limitar un subconjunto [a, b]	$[0,40]$
Determinar Δ entre cada elemento [a, b] para 10 particiones $\Delta x = \frac{b-a}{n}$	$\Delta x = \frac{40-0}{10} = 4$
Conjunto de particiones P	$P = \{0, 0 + \Delta x, 0 + 2\Delta x, 0 + 3\Delta x, 0 + \cdots + 10\Delta x, 0 = 40\}$ $P = \{0,4,8,12,16,20,24,28,32,36,40\}$
Determinar el área de los rectángulos inferiores	$980{,}59\ cm^2$
Determinar el área de los rectángulos superiores	$1136{,}13\ cm^2$
Por medio de la cantidad de particiones de [a, b], determinar la suma $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$ Donde c_i es punto medio de cada partición	$S_{10} = \sum_{i=1}^{10} 3\sqrt{4c_i + 8} \times 4$ $S_{10} = (f(2) \times 4 + f(6) \times 4 + f(10) \times 4 + \cdots + f(38) \times 4) =$ $4093{,}2598\ cm^2$
Expresar el área de la región, por medio de la definición de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$	$\int_0^{40} 3\sqrt{4x + 8} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{10} 3\sqrt{4c_i + 8} \times 4$
Por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), determina el valor de la superficie limitada por la función $y = f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x=a$, $x=b$ $A(S) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	$\int_0^{40} 3\sqrt{4x + 8} = \frac{\sqrt[2]{(4x+8)^3}}{2}\Big\vert_0^{40}$ $= \frac{\sqrt[2]{(168)^3}}{2} - \frac{\sqrt[2]{(8)^3}}{2} =$ $= 1088{,}7644 - 11{,}313708499$ $= 1077{,}450691501\ cm^2$

Nota. Elaboración de E1 y E6.

Profundizando en la elaboración de E1, se tiene que en P1 se define la función $f(x)=40\sin\left(\frac{x}{12}\right)$ en el intervalo $[0,12\pi]$, generando que la base de cada rectángulo sea de 3.77 unidades aproximadamente. Posteriormente en P2 se determina que la suma de las áreas de los rectángulos inferiores es de 797.92 unidades y para las áreas superiores de 1105.72 unidades, luego utilizando el TFC se obtiene que el valor del área bajo la curva es 960 unidades cuadradas. En el procedimiento P4 correspondiente a la etapa 2, como se muestra en la Figura 7, E1 elabora el gráfico en GeoGebra del área bajo la curva $y=40\sin\left(\frac{x}{12}\right)$ utilizando la información de los procedimientos P1, P2 y P3. Este uso de la tecnología para representar el concepto puede considerarse una subcategoría dentro del KoT.

Figura 7. Desarrollo de P4 en GeoGebra por parte de E1



Nota. Elaboración de E1 y E6.

En la fase de análisis, se pretendía que interpretasen lo realizado en la fase de planteamiento, para tal caso se facilitó una consigna para guiar el trabajo de los estudiantes en forma de pregunta que involucraba la importancia de hacer uso de registros de representación (KoT registros): ¿Qué interés tiene el uso del cambio de registro para la comprensión de la integral definida?, en respuesta a lo anterior, destacamos las respuestas de los futuros profesores E4, E5 y E7.

> E4: "Lograr determinar en un caso como la integral es utilizada para determinar el valor de las áreas delimitadas por una gráfica dentro de un intervalo [a, b] y el eje horizontal, por medio de rectángulos superiores e inferiores''.

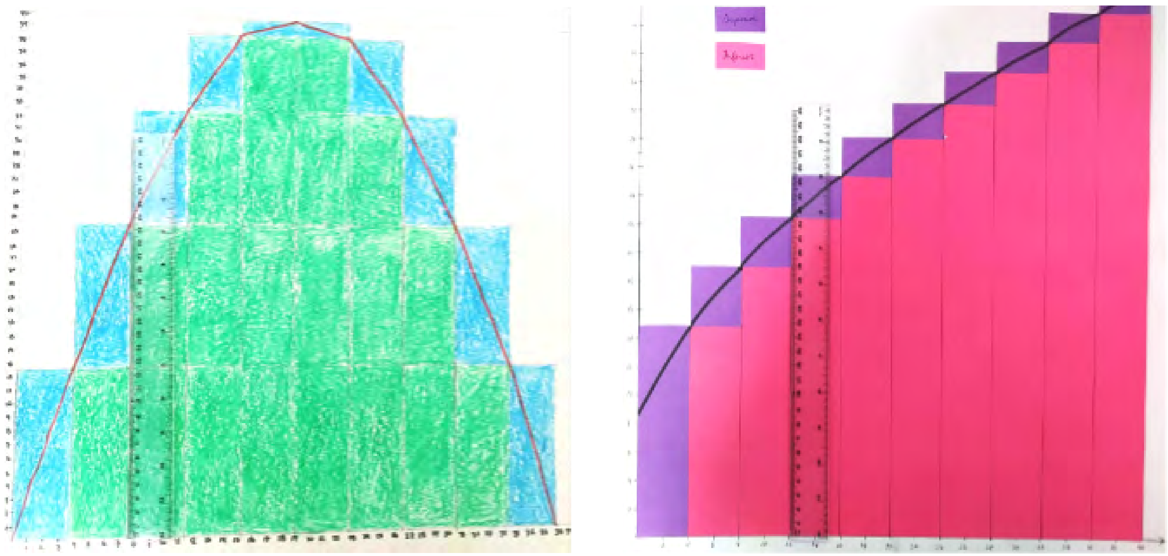
> E5: "Realizar una comparación de áreas, entre la obtenida mediante la aplicación de integral definida y mediante la suma de Riemann''.

> E7: "En mostrar cómo vamos aproximándonos mejor al área exacta bajo los conocimientos básicos que ya traemos de matemáticas y así ir modelando la definición de integral definida''.

En la fase de reflexión, los futuros profesores reconstruyen el significado de integral definida desde lo aprendido en la tarea durante la etapa 3. Nuestro objetivo desde el análisis KoT se refiere a los registros de representación utilizados y las conversiones dentro de los mismos. E1 representa de manera concreta-pictórica el gráfico realizado en Geogebra utilizando un cartón piedra de dimensiones 40x40 cm, marcando cada unidad (1 cm) en los ejes con marcador negro, la conversión que cada unidad en el gráfico es una unidad de centímetro en el modelo (Figura 8i), con esto se acota la posibilidad de que el gráfico quede en el primer cuadrante, no excediendo en 40 unidades de eje horizontal y 40 unidades de eje vertical. Posteriormente haciendo medidas con una regla establece los rectángulos superiores e inferiores, coloreándolos con pinturas de color azul (superior) y verde (inferior). La altura de cada rectángulo tiene que estar en concordancia con el gráfico en Geogebra, es por ello la necesidad de medir con la regla para posterior marcar esos puntos y con una lana de color rojo marcar la curva estimada de la función $f(x)=40 \sin(x/12)$ definida en el intervalo [0, 37.7] cm. Para el caso de E6 (Figura 8 ii) utiliza cartulina de color rosa para establecer los rectángulos inferiores y color púrpura para los rectángulos superiores, se forman diez rectángulos inscritos, cada uno con base de 4 cm. Se coloca de manera aleatoria la regla sobre la altura de los rectángulos inscritos, comprobando por ejemplo en el cuarto rectángulo una aproximación de 22.4 centímetros, verificando el valor de f(12)=22.44 unidades.

Figura 8. Representación concreta-pictórica del área bajo la curva realizada por E1 i) y E6 ii)

(i) (ii)



En la fase de reflexión, se realizaron una serie de preguntas que respondían a la reconstrucción del significado de la teoría aprendida, para tener una visión del estado del conocimiento disciplinar del contenido y para que así los futuros profesores se apropien de estas actividades y puedan ser replicadas en enseñanza media, además de considerar que en esta fase los participantes desarrollan conocimiento de modelación de situaciones reales (Fuentes, 2020).

- ¿Qué contenido matemático estamos trabajando?

Seis de los siete participantes identificaron la integral definida como el contenido matemático principal implicado en la actividad. De forma complementaria, las expresiones “área bajo la curva” y “sumatorias de Riemann” fueron mencionadas por tres y cuatro participantes, respectivamente. Todos estos elementos corresponden a contenidos intra-conceptuales asociados a la integral definida, enmarcados en la categoría Definiciones y propiedades del KoT.

- ¿Por qué se estudia ese contenido?

La mayoría de las respuestas señalan que este contenido debe ser estudiado debido a que el Ministerio de Educación lo incluye en el programa de estudio de 3.º y 4.º medio, diferenciando entre “límite, derivadas e integrales”. Otros argumentos apuntan a que dichos contenidos resultan necesarios para los estudiantes que deseen ingresar a carreras de educación superior que impliquen el uso de las matemáticas. Solo un participante mencionó que este contenido se estudia con el propósito de comprender la aplicación y definición de la integral definida, lo cual se vincula directamente con el conocimiento del contenido en la categoría Fenómenos y aplicaciones del KoT.

- ¿Qué cambios deberían introducirse en la tarea para incrementar la calidad del proceso de aprendizaje de la integral definida?

Se debe dar relevancia necesaria la definición de la integral definida (KoT definiciones y propiedades). En este sentido, se subraya la importancia de abordar qué sucede cuando un límite tiende a infinito y cómo se vincula el cálculo del área bajo la curva con las sumas de Riemann (KoT relaciones intra-matemáticas). Otras intervenciones hacen mención que el principal obstáculo que se origina al enseñar este contenido es el enfoque algebraico y algorítmico, donde no se incorpora el uso de ningún aspecto geométrico (KoT representaciones).

Estas reflexiones permean con otras categorías del MTSK vinculadas al conocimiento didáctico del contenido. Hemos considerado importante hacerlas de esta manera, y recoger aquellos aspectos que están vinculados con procedimientos (KoT).

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En esta sección discutimos sobre la producción de los estudiantes para posteriormente concluir con la respuesta a la pregunta de investigación. A través del conocimiento de los temas se propone una tarea que desarrolle las categorías asociadas a este conocimiento, es así que en el todo proceso de ejecución se alinea con los procedimientos para describir la integral definida como área bajo la curva con preguntas como ¿cuándo se hace?, ¿cuándo puede hacerse?, ¿por qué se hace así? y características de los resultados obtenidos elaborados por futuros profesores escogidos de forma intencionada.

La fase de planteamiento actúa como la instancia en donde las categorías del KoT se ponen en juego, en particular al mostrar las definiciones y propiedades, donde se caracteriza el concepto de integral definida, así como el conocimiento de las propiedades necesarias para llevar a cabo el proceso de aproximación de área (Vasco et al., 2017), para posteriormente utilizar los fundamentos necesarios en la obtención del área bajo la curva utilizando rectángulos, y su relación con la integral definida de un problema propuesto del programa de estudio del Ministerio de Educación chileno, en concordancia con la actualización en enseñanza de temas del cálculo para secundaria (Bustos & Ramos, 2022).

En la fase de análisis, E1 y E6 describen los procedimientos P1, P2 y P3 en relación con lo planteado en la tabla 1, destacando las condiciones necesarias y suficientes para asociar los algoritmos desarrollados (Vasco et al., 2017) permitiendo establecer comparaciones entre las formas para aproximar el valor del área bajo la curva, los cálculos fueron realizados con calculadoras científicas, dando el protagonismo a los valores y el sentido que implican estos y no al procedimiento algebraico, en consistencia con las pautas de Mateus-Nieves y Montañez (2020) que muestran la persistencia de enseñar la integral para estudiantes universitarios con una excesiva orientación algebraica, impidiendo la articulación global del significado.

Las aproximaciones realizadas por los estudiantes en las diferentes áreas tienen fundamento en las funciones escogidas, pues ello conduce a que el signo del valor del área sea positivo descartando posibilidades de un valor negativo (Kontorovich, 2023), una situación que podría provocar obstáculos porque ninguna de las funciones cambia de signo en el intervalo asignado. Por otro lado, se puede apreciar que, al momento de expresar el área de la región, por medio de la definición de integral definida, en su representación algebraica hace que el sumatorio solo llegue hasta n=10, descartando la noción de partición infinita. Para la realización de P4 se utiliza GeoGebra para realizar el gráfico de la función y limitar el área de esta en el intervalo [a,b], su uso actúa como mediador desde un desarrollo algebraico al gráfico y posteriormente al concreto-pictórico. Estos resultados han sido reportados de manera previa (Martínez-Miraval & García-Cuéllar, 2020; López-Leyton et al., 2019), donde el uso de GeoGebra favorece que los estudiantes generen nociones intuitivas sobre la integral definida y la intervención mediada por la aplicación móvil de GeoGebra en las aulas (Ballesteros et al., 2020).

En la fase de reflexión, en la etapa 3, se elabora el procedimiento P5, donde E1 y E6 hacen representación concreta-pictórica del área bajo la curva, haciendo la conversión de unidad en GeoGebra por centímetro en el cartón piedra, esto permite situar la regla de forma aleatoria, generando la acción de "medir", estableciendo valores que estén en relación con la altura de cada rectángulo y la imagen del punto por medio de la función, considerando en esta etapa el conocimiento de una situación asociada a los significados del tema matemático estudiado (Freudenthal, 1983).

La percepción visual es importante para los estudiantes en la comprensión del concepto, desde la relación entre los pensamientos matemáticos y las preferencias de representación en un problema de la integral (Sevimli & Delice, 2012). Se evidencia la movilización de elementos y conceptos del registro algebraico y gráfico, y viceversa. Es importante señalar el rol que juegan las representaciones y el uso de los registros para el aprendizaje de un concepto, en particular el cálculo del área de una región limitada por una curva y=f(x). Domínguez et al. (2019) y McGee y Martínez-Planell (2014) recomiendan fomentar la perspectiva gráfica de estos conceptos de cálculo. En la misma línea estas representaciones del área nos permiten identificar el intervalo donde se define la función y con ello establecer la integral definida involucrada (Kontorovich & Li, 2022).

En la fase de reflexión, donde se realiza un conjunto de preguntas guiadas sobre la tarea, podemos ver que los futuros profesores coinciden en que el tema matemático estudiado es el área bajo la curva, integral definida y las sumas de Riemann, resulta pertinente este uso de las sumas de Riemann, al brindar la oportunidad de articular esquemas preexistentes, tales como medidas de áreas, intervalos, funciones, sumatorias y límites (Martínez-Miraval & García-Cuéllar, 2020).

En respuesta a la pregunta de investigación, el desarrollo de las distintas fases del estudio evidencia cómo el futuro profesor debe construir progresivamente el conocimiento del tema matemático que pretende enseñar, enmarcado en el subdominio KoT del MTSK. El proceso seguido en la resolución de las tareas ha implicado una profundización en las categorías clave del conocimiento matemático (procedimientos, definiciones, propiedades y registros de representación) que resultan fundamentales para comprender el contenido desde una perspectiva didáctica. La exploración y aplicación de estas categorías no solo fortalece el conocimiento disciplinar del docente en formación, sino que puede orientar el diseño de tareas para una enseñanza más articulada con los demás subdominios del MTSK, favoreciendo una práctica reflexiva y fundamentada.

La tarea propuesta permite al estudiante visualizar y comprender la relación que existe entre el área de una figura plana irregular con el concepto de integral definida, y cómo esta puede estar conectada a un ámbito concreto. Por otro lado, las preguntas realizadas nos permiten que los futuros profesores puedan argumentar de manera matemática, una actividad fundamental y compleja, considerada una de las principales razones de dificultades en su formación (Nagel et al., 2018), con ello inferimos que los futuros profesores requieren del dominio conceptual de las definiciones de los contenidos que enseña, para así poder aplicar propiedades y saber desarrollar procedimientos relacionados (Padilla-Escorcia & Acevedo-Rincón, 2022).

Podemos concluir, por tanto, que el uso del modelo analítico MTSK nos facilita analizar tareas que involucren las categorías del conocimiento de los temas (KoT) para describir la integral definida como área bajo la curva, lo cual amplía el espectro de la aplicación de la integral definida en diferentes contextos, así aportando a la discusión entre diferentes tipos de conexiones para caracterizar el MTSK (Vasco et al., 2017). Por otro lado, destacamos el uso de GeoGebra para el desarrollo de la tarea, dado que permitió la movilidad de la representación gráfica y algebraica del concepto integral definida, esto reafirma que el uso de la tecnología en la educación matemática puede desarrollar resultados positivos junto a procesos manipulativos (Belbase, 2015). Como prospectiva se plantea la inclusión de la categoría KoT fenomenología, que puede promover problemas donde los estudiantes puedan aplicar estos conceptos a situaciones de la vida real, y no sólo a un desarrollo en el ámbito matemático puro (Nedaei et al., 2021).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es parte del proyecto de investigación en Educación Superior–UTA 2023, código 4775-23, financiado por la Dirección de Investigación, Postgrado y Transferencia Tecnológica de la Universidad de Tarapacá (Arica, Chile).

6. REFERENCIAS

Arteaga-Martínez, B., & Arnal-Palacián, M. (2022). Análisis del conocimiento especializado en matemáticas con maestros en formación: una experiencia con la representación de fracciones. Educatio Siglo XXI, 40(1), 107-130. https://doi.org/10.6018/educatio.436461

Ballesteros, V. A., Lozano, S., & Rodríguez, Ó. I. (2020). Noción de aproximación del área bajo la curva utilizando la aplicación Calculadora Gráfica de GeoGebra. Praxis & Saber, 11(26). https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.9989

Barrera, V. J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., & Contreras, L. C. (2019). El uso de MTSK en el diseño de tareas formativas para estudiantes para profesor de educación primaria. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (pp. 110-118). Universidad de Huelva.

Belbase, S. (2015). A preservice mathematics teacher's beliefs about teaching mathematics with technology. Online Submission, 1(1), 31-44. https://doi.org/10.21890/ijres.36926

Bezuidenhout, J., & Olivier, A. (2000). Students' conceptions of the integral. Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), 2, 73-81.

Bricio-Barrios, E. E., Arceo-Díaz, S., & Maravillas, J. A. (2020). Proposal of an algorithmic methodology in Geogebra for the teaching of the Riemann sum a tool for approximating definite integrals. Journal of Physics: Conference Series, 1702, 012021. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1702/1/012021

Bustos, C., & Ramos, E. (2022). Una mirada sobre conceptos del cálculo desde el conocimiento de los temas del profesorado de matemática de secundaria. Innovaciones educativas, 24(36), 86-100. https://doi.org/10.22458/ie.v24i36.3893

Camacho, M., Depool, R., & Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos: Un estudio de casos. Educación Matemática, 20(3), 33-57.

Carrillo, J., Escudero, D. I., & Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores, 1, 16-26.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education, 20(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Delice, A., & Sevimli, E. (2010). An investigation of the pre-services teachers' ability of using multiple representations in problem-solving success: the case of definite integral. Educational Sciences: Theory and Practice, 10(1), 137-149.

Dominguez, A., Barniol, P., & Zavala, G. (2019). Evaluación del entendimiento gráfico de derivada e integral definida mediante un examen en castellano de Opción Múltiple. Formación Universitaria, 12(6), 41-56. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062019000600041

Dreyfus, T., Kouropatov, A., & Ron, G. (2021). Research as a resource in a high-school calculus curriculum. ZDM-Mathematics Education, 53, 679-693. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01236-3

Ďuriš, V. (2020). Geometric applications of measure as a definite integral in mathematics education. Journal of Interdisciplinary Mathematics, 23(3), 739-753. https://doi.org/10.1080/09720502.2020.1743507

Escudero, A. M., Muñoz-Catalán, C., & Montes, M. A. (2021). Conocimiento didáctico del contenido de un professor de infantile para la enseñanza de cuerpos geométricos. En J. G. Moriel-Junior (Ed.), Actas de CIMTSK, V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (pp. 192-199). Instituto Federal de Mato Grosso, Brasil.

Fuentes, C. (2020). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas asociado al concepto de proporcionalidad: un estudio de caso a través del modelo MTSK. Épsilon, 104, 25-43.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematics Structures. Reidel.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. Boletín de La Asociación Matemática Venezolana, X(2), 213–223.

Hong, D. S., & Kwaka, D. (2024). How do widely-used calculus textbooks introduce the concepts of definite integrals? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 55, 1–21. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2348145

Jones, S. R. (2018). Prototype images in mathematics education: The case of the graphical representation of the definite integral. Educational Studies in Mathematics, 97(3), 215-234. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9794-z

Kaput, J., Hegedus, S., & Lesh, R. (2020). Technology becoming infrastructural in mathematics education. En R.A. Lesh, E. Hamilton, & J.J. Kaput (Eds.), Foundations for the future in mathematics education (pp. 173-191). Routledge.

Kontorovich, I. (2023). “Find the area enclosed by...” Parceling an especially robust model of reasoning among first-year students. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 9, 149-172. https://doi.org/10.1007/s40753-023-00213-3

Kontorovich, I., & Li, T. (2022). Not as straightforward as it appears: undergraduates leverage areas to find definite integrals. International Journal of Science and Mathematics Education, 21, 2027-2044. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10339-6

Lehmann, T. H. (2024). Sustaining quantitatively-grounded meanings for definite integrals in high school calculus. Mathematical Thinking and Learning, 256, 1-30. https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2384689

Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winsløw, C., Bloch, I., Huckstep, P., Rowland, T., Thwaites, A., Grevholm, B., Bergsten, C., Adler, J., Davis, Z., Garcia, M., Sánchez, V., Proulx, J., Flowers, J., Rubenstein, R., Grant, T., Kline, K., … Chapman, O. (2009). Components of Mathematics Teacher Training. In R. Even & D. Ball (Eds.), The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. New ICMI Study Series, 11 (pp. 25-33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8_4

Liñán, M. M., Barrera, V., & Infante, J. M. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones. Escuela Abierta, 17, 41-63. https://doi.org/10.29257/ea17.2014.04

López-Leyton, C., Aldana, E., & Erazo, J. D. (2019). El papel de la resolución de problemas para la enseñanza del Cálculo Integral: un estudio de caso. Espacios, 40(17), 12-19.

Martínez-Miraval, M. A., & García-Cuéllar, D. J. (2020). Estudio de las aprehensiones en el registro gráfico y génesis instrumental de la integral definida. Formación universitaria, 13(5), 177-190. https://doi.org/10.4067/s0718-50062020000500177

Mateus-Nieves, E., & Montañez, W. H. (2020). Significado global de la integral articulando su complejidad epistémica. UNIÓN-Revista iberoamericana de educación matemática, 16(60), 196-211.

McGee, D. L., & Martinez-Planell, R. (2014). A study of semiotic registers in the development of the definite integral of functions of two and three variables. International Journal of Science and Mathematics Education, 12, 883-916. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9437-5

MINEDUC (2021). Estándares de la profesión docente carreras de pedagogía en matemática educación media. Ministerio de Educación Chile.

Nagel, K., Schyma, S., Cardona, A., & Reiss, K. (2018). Análisis de la argumentación matemática de estudiantes de primer año. Pensamiento Educativo (PEL), 55(1), 1-12. https://doi.org/10.7764/PEL.55.1.2018.10

Nedaei, M., Radmehr, F., & Drake, M. (2021). Exploring undergraduate engineering students’ mathematical problem-posing: the case of integral-area relationships in integral calculus. Mathematical Thinking and Learning, 24(2), 149-175. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1858516

Nowell, L. S., Norris, J. M., White, D. E., & Moules, N. J. (2017). Thematic analysis: striving to meet the trustworthiness criteria. International Journal of Qualitative Methods, 16(1). https://doi.org/10.1177/1609406917733847

Padilla-Escorcia, I. A., & Acevedo-Rincón, J. P. (2022). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de la modelación de la elipse a través de recursos tecnológicos. Revista Lasallista de Investigación, 19(1), 67-83. https://doi.org/10.22507/rli.v19n1a4

Peña, C. A., Ramírez-Sánchez, M., & Rivas-Trujillo, E. (2019). La integración numérica en la integral definida: caso de estudio. Espacios, 40(19), 23-30.

Pérez-Montilla, A., & Cardeñoso, J. M. (2020). Explorando el conocimiento de los temas (KoT) sobre el límite desde la perspectiva del MTSK. En AA.VV., Avances en Matemática Educativa. Teorías Diversas (pp. 99-120). Editorial Lectorum.

Quiroz, C., Vásquez, C. R., González, F., Torres, J., & González, I. (2022). Estudio socioeducativo de los principales errores que realizan los alumnos en el tema de la integral definida como factor que impide la competencia requerida. RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 13(25), e421. https://doi.org/10.23913/ride.v13i25.1347

Rasslan, S., & Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. En A.D. Cokburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4 (pp. 89-96). Norwich, England.

Sánchez, N., Espinoza, G., Segura, C., Contreras, L. C., & Sosa, L. (2025). Conocimiento especializado de una profesora de matemática en la ejemplificación de la ecuación cuadrática. El caso de la descomposición de radicales. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 18(1), 201-215.

Sari, C., Machromah, I., Utami, N., & Zakiyyah, Z. (2019). The existence of the definite integral: students' understanding. En N. Ishartono, N. Adhantoro, Y. Sidiq, & Y. Sulistyono (Eds.), Proceedings of the 4th Progressive and Fun Education International Conference. Makassar, Indonesia. http://dx.doi.org/10.4108/eai.7-8-2019.2289033

Serhan, D. (2015). Students' understanding of the definite integral concept. International Journal of Research in Education and Science, 1(1), 84-88. https://doi.org/10.21890/ijres.00515

Sevimli, E., & Delice, A. (2012). The relationship between students' mathematical thinking types and representation preferences in definite integral problems. Research in Mathematics Education, 14(3), 295-296. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.734988

Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. Educación Matemática, 28(2), 151-174. https://doi.org/10.24844/EM2802.06

Tatar, E., & Zengin, Y. (2016). Conceptual understanding of definite integral with geogebra. Computers in the Schools, 33, 120-132. https://doi.org/10.1080/07380569.2016.1177480

UCE, Unidad de Curriculum y Evaluación (2021). Programa de estudio Limites, Derivadas e Integrales para formación diferenciada 3° y 4° medio. Ministerio de Educación de Chile. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140143_programa.pdf

Vasco, D., & Climent, N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 12(3), 129-146. https://doi.org/10.30827/pna.v12i3.6454

Vasco, D., Moriel, J. G., & Contreras, L. C. (2017). Subdominios del Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). KoT y KSM: definición, categorías y ejemplos. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (pp. 29-37). CGSE

Yin, R. K. (2018). Case Study Research and Applications Design and Methods (6th ed.). CA Sage.

Wagner, J. F. (2017). Students' obstacles to using Riemann sum interpretations of the definite integral. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4(3), 327-356.

https://doi.org/10.46219/rechiem.v17i1.184
Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448

LA ENSEÑANZA DE LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UNA EXPERIENCIA EN EL TERCER CURSO DE SECUNDARIA

TEACHING THE DISTANCE BETWEEN TWO POINTS THROUGH PROBLEM SOLVING: AN EXPERIENCE IN THE THIRD GRADE OF HIGH SCHOOL

Ana Beatriz de Oliveira
anaboliveirac@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4362-9111
Universidade Estadual de Maringá, Brasil

Amanda Cristina de Sousa
amanda.sa.pr@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7668-4996
Universidade Estadual de Maringá, Brasil

Marcelo Carlos de Proença
mcproenca@uem.br
https://orcid.org/0000-0002-6496-4912
Universidade Estadual de Maringá, Brasil

RESUMO

Este artigo apresenta uma experiência de ensino fundamentada nas cinco ações da abordagem de Ensino e Aprendizagem da Matemática por meio da Resolução de Problemas (EAMvRP), voltada para favorecer a compreensão do conceito de distância entre dois pontos. Para isso, foi elaborada e aplicada uma proposta didática em uma turma de 27 estudantes do terceiro ano do ensino médio. Os resultados indicam que os alunos mobilizaram diferentes conhecimentos matemáticos e participaram ativamente da resolução da tarefa. Foram identificadas três estratégias de resolução: duas levaram à resposta esperada e uma não. Além disso, constatou-se que a intervenção docente foi fundamental para articular os conhecimentos prévios dos alunos com os novos conteúdos. Conclui-se que a implementação das cinco ações do EAMvRP constituiu um recurso eficaz para promover a compreensão do conteúdo matemático relativo à distância entre dois pontos.

Palavras-chave:
Abordagem de ensino; Resolução de Problemas; Distância entre dois pontos

RESUMEN

Este artículo presenta una experiencia de enseñanza fundamentada en las cinco acciones del enfoque de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas a través de la Resolución de Problemas (EAMvRP), orientada a favorecer la comprensión del concepto de distancia entre dos puntos. Para ello, se diseñó y aplicó una propuesta didáctica a una clase de 27 estudiantes de tercer grado de secundaria. Los resultados muestran que los estudiantes movilizaron diversos conocimientos matemáticos y participaron activamente en la resolución de la tarea. Se identificaron tres estrategias de resolución: dos condujeron a la respuesta esperada y una no. Asimismo, se constató que la intervención docente desempeñó un papel clave al vincular los saberes previos de los estudiantes con los nuevos contenidos. En conclusión, la implementación de las cinco acciones del EAMvRP constituyó un recurso eficaz para favorecer la comprensión del contenido matemático relativo a la distancia entre dos puntos.

Palabras clave:
Enfoque didáctico; Resolución de problemas; Distancia entre dos puntos

ABSTRACT

This article reports on a teaching experience based on the five actions of the Mathematics Teaching and Learning through Problem Solving (MTLPS) approach, aimed at fostering students' understanding of the concept of distance between two points. A didactic proposal was designed and implemented in a class of 27 third-year secondary students. The findings show that students activated various mathematical knowledge and engaged actively in the problem-solving activity. Three solution strategies were identified: two led to the expected answer, while one did not. Furthermore, it was observed that teacher support played a crucial role in connecting students' prior knowledge with the new content. In conclusion, the implementation of the five actions of the MTLPS approach proved to be an effective means to foster students' comprehension of the mathematical content related to the distance between two points.

Keywords:
Teaching Approach; Problem Solving; Distance between two points

Recibido 23 de febrero 2024, Aceptado 06 de junio 2025

1. INTRODUÇÃO

Na Educação Básica[1] do Brasil, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018)[2] indica que se deve realizar na etapa do Ensino Médio (1ª à 3ª séries) um trabalho com resolução de problemas. Nesse documento que norteia o currículo, aponta-se que os alunos devem consolidar os conteúdos aprendidos anteriormente e agregar novos, permitindo a resolução de problemas mais complexos que exigem maior reflexão e abstração, e ter uma visão da Matemática mais integrada às outras áreas de conhecimento, bem como à realidade.

Autores como Schroeder y Lester (1989), Lester y Cai (2016) e Liljedahl y Cai (2021) compreendem e defendem que a resolução de problemas deve fazer parte do currículo escolar. Para esses autores, tratar a resolução de problemas no ensino ajuda a direcionar os alunos a compreenderem matemática, a aprenderem a resolver problemas e a relacionarem, assim, suas ideias a outras ideias matemáticas. Na visão de Schoenfeld (2020), quando os alunos se envolvem na resolução de problemas, podem desenvolver a generalização e a abstração.

Uma possibilidade de relacionar conteúdos prévios a novos conteúdos e trabalhar com a matemática em diferentes contextos é a proposta da abordagem do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP), a qual foi desenvolvida por Proença (2018). Essa abordagem é constituída de cinco ações, cuja essência é partir de uma situação de Matemática para que os alunos desenvolvam suas estratégias de resolução com base no que o já conhecem de Matemática. Além desse potencial, busca-se levar os alunos a construírem ideias matemáticas presentes em suas estratégias para relacionar ao conteúdo a ser introduzido.

As cinco ações de Proença (2018) constituem-se em: escolha do problema, introdução do problema, auxílio aos alunos durante a resolução, discussão das estratégias dos alunos e articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo. Por meio de tais ações, os professores podem se orientar para conduzir seus alunos na resolução de problemas, em sala de aula, visando um ensino de matemática que valorize os conhecimentos prévios. Para Mendes, Proença e Moreira (2022), seguir as cinco ações do EAMvRP valoriza a aprendizagem significativa crítica e reflexiva, uma vez que foca justamente nos conhecimentos prévios dos alunos.

Estudos como os de Sousa y Proença (2019), Oliveira y Proença (2020), Akamine y Proença (2022), Rozario y Proença (2022; 2023), Pereira y Proença (2023) e Santos, Campelo y Proença (2023) utilizaram o EAMvRP para abordar os conteúdos de equação polinomial de primeiro grau, matemática financeira, frações, área de triângulo, equação do 2º grau e logaritmo, respectivamente, e mostraram que os alunos conseguem apresentar suas estratégias de resolução. De forma geral, esses estudos revelaram que realizar aulas no EAMvRP permitiu uma maior participação dos alunos, a discussão de ideias, o uso e revisão de conhecimentos matemáticos anteriores e a validação de suas estratégias e das respostas obtidas, favorecendo uma compreensão que permitiu articular as ideias a esses conteúdos.

Neste trabalho, temos como objetivo relatar uma experiência de ensino baseada nas cinco ações do EAMvRP para favorecer a compreensão de alunos sobre o conteúdo de distância entre dois pontos. O trabalho apresenta uma seção sobre a teoria da resolução de problemas e as cinco ações do EAMvRP, depois apresenta a seção referente à experiência de ensino em sala de aula e, por fim, apontamos as considerações finais.

[1] No Brasil, a Educação Básica compreende três etapas: Educação Infantil (0 a 5 anos), o Ensino Fundamental (9 anos) que se divide em Ensino Fundamental – Anos Iniciais (1º ao 5º anos) e Ensino Fundamental – Anos Finais (6º ao 9º anos), e o Ensino Médio (1ª a 3ª séries).

[2] A BNCC (Brasil, 2018) é um documento brasileiro que estabelece as habilidades, competências e conhecimentos nas diversas áreas de conteúdos que os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica.

2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E AS CINCO AÇÕES DO EAMvRP

Segundo Polya (1994), a resolução de problemas possibilita ao aluno descobrir um caminho para alcançar a resposta, entendê-la e desperta o interesse pelo significado dessa resposta. Nesse sentido, é importante entender o que é um problema. Echeverría (1998) aponta que uma tarefa se torna um problema quando aparecem obstáculos que dificultam e levam o indivíduo a raciocinar, diferentemente dos chamados exercícios. De forma análoga, Proença (2018) aponta que uma situação de Matemática passa a ser um problema “[...] quando a pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente para chegar a uma resposta” (Proença, 2018, p. 17).

Também devemos compreender o que é resolver um problema, que consiste em perpassar por etapas/fases de resolução. Polya (1994) apresentou quatro fases de resolução de problemas (compreensão, estratégia, execução e retrospecto). Proença (2018), baseado em autores da psicologia cognitiva, assume quatro etapas. A primeira etapa, a representação, consiste na interpretação e compreensão do problema a partir da leitura do enunciado, o que envolve uso de conhecimento linguístico (ações envolvidas, no contexto da língua materna) e conhecimento semântico (expressões/termos matemáticos). Em seguida, ocorre o planejamento, no qual elabora-se uma estratégia de resolução como tentativa e erro, diagrama, desenho, equação, montar uma tabela e obter um padrão, o que corresponde ao conhecimento estratégico de uma pessoa. Assim, essa estratégia passa pela etapa de execução, que consiste em colocá-la em prática, realizando os cálculos e desenhos e demais procedimentos necessários, constituindo o conhecimento procedimental. Por fim, na etapa de monitoramento a pessoa deve realizar a avaliação e validação da resposta encontrada, bem como buscar rever sua resolução.

A partir disso, compreende-se que a resolução de problemas desempenha papel importante, pois tratá-la em sala de aula favorece a mobilização de conhecimentos dos alunos. No ensino, a abordagem da resolução de problemas pode seguir pelo uso do problema como ponto de partida, antes de introduzir o conteúdo (Schroeder y Lester, 1989; Fi y Degner, 2012; Proença, 2018, 2021). Pode seguir em conjunto ou de forma isolada pela abordagem da proposição de problemas (problem posing), a qual busca ampliar a compreensão de matemática dos alunos ao resolverem e proporem seus problemas (English, 2020; Koichu, 2020; Liljedahl y Cai, 2021).

Neste estudo, utilizamos a abordagem do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP) de Proença (2018), que coloca um problema como ponto de partida para o ensino de um novo conteúdo. Essa abordagem é contrária à forma tradicional de ensino que preza por inicialmente realizar a definição do conteúdo em sua forma matemática, depois apresenta um exemplo de uso dessa definição, para depois trazer exercícios de mera aplicação. O EAMvRP apresenta as seguintes cinco ações:

A escolha do problema é a primeira ação e se refere ao planejamento do professor que deve elaborar ou reelaborar uma situação de matemática (possível problema) ou até mesmo retirá-la na íntegra de algum material didático. Nessa escolha, o professor precisa organizar/reorganizar o enunciado, de modo a ser possível articular uma estratégia ao novo conteúdo a ser ensinado aos alunos. Nesse sentido, é importante que o professor preveja possíveis estratégias de resolução para ter clareza daquelas que podem surgir em sala de aula e mesmo as que os alunos seguiriam. Com isso, prever estratégias também é uma forma de auxiliá-los posteriormente.

A introdução do problema é a ação que ocorre em sala de aula, onde o professor organiza a turma, preferencialmente em grupos, e apresenta a situação de Matemática aos alunos que irão ter o primeiro contato de interpretação e compreensão. O professor deve orientá-los a resolverem de acordo com seus conhecimentos matemáticos e da forma como quiserem. Neste momento, a situação pode se tornar um problema aos alunos caso se configure como um desafio.

No auxílio aos alunos durante a resolução, conforme os grupos vão desenvolvendo suas estratégias a partir de suas compreensões do problema, o professor deve acompanhá-los, atuando, segundo Proença (2018), como observador, incentivador e direcionador das ideias que surgirem. Como observador, esse momento permite avaliar as dificuldades e as potencialidades dos alunos em mobilizar conceitos, criar estratégias e realizar procedimentos, o que corresponde a avaliar os grupos na resolução de problemas, conforme as fases de Polya (1994) e as etapas de Proença (2018). Como incentivador, o professor pode fazer questionamentos que ajudem os grupos a pensarem, pedir para que expliquem o que pensaram, mas sem dar respostas prontas. Por fim, como direcionador, ao identificar que algum grupo não conseguiu propor uma estratégia, o professor pode se valer das estratégias previstas na primeira ação e, assim, sugerir ao grupo. Seria por exemplo sugerir que pensem em montar uma tabela ou mesmo buscar organizar algum desenho etc., o que corresponde a auxiliar com uma iniciativa e não apresentar a estratégia de forma pronta.

Na discussão das estratégias dos alunos, é feita a socialização, a qual consiste de cada grupo ir ao quadro para expor suas estratégias de resolução e explicá-las aos colegas. Caso haja algum equívoco na resolução, este é o momento de analisar, de modo coletivo, as estratégias utilizadas, bem como revisar e validar as respostas. Trata-se de um olhar do professor para o processo de resolução do problema seguido pelos grupos, com foco em levar os alunos a compreenderem os tipos de estratégias utilizadas e a essência matemática que compartilham.

Por fim, na articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo, o professor escolhe uma estratégia (ou mais estratégias) desenvolvidas pelos grupos e a articula ao novo conteúdo a ser ensinado. Isso implica em associar as representações dessa estratégia à fórmula ou ao conceito matemático. Neste caso, pontos centrais da estratégia devem ser tomados como foco para essa associação ao formato do novo conteúdo.

3. A EXPERIÊNCIA DE ENSINO NA ABORDAGEM DO EAMvRP

A nossa experiência de ensino derivou de uma atividade proposta na disciplina de “Tópicos Específicos em Ensino de Matemática e sua Didática”, cursada no segundo semestre de 2022, de um Programa de Pós-Graduação na área de Ensino de Ciências e Matemática de uma universidade estadual pública do estado do Paraná, no Brasil. Nessa disciplina, solicitaram que fizéssemos uma implementação em sala de aula com a abordagem de um conteúdo matemático e pautados em uma tendência da Educação Matemática. Optamos pela tendência da resolução de problemas por ser nossa área de pesquisa e pelas contribuições para nossa formação.

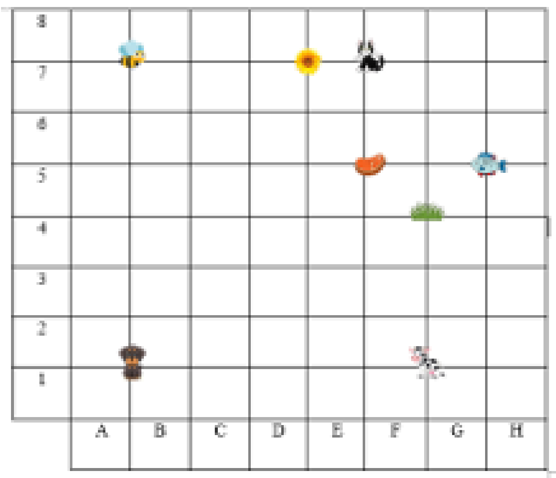
Assim, elaboramos uma proposta de EAMvRP para introduzir, na área da geometria analítica, o conteúdo de distância entre dois pontos. As aulas foram implementadas a 27 alunos de uma turma da terceira série do Ensino Médio de uma escola pública do noroeste do Estado do Paraná, no Brasil. Para obter esses participantes e definir o conteúdo, fizemos uma visita à escola e apresentamos nosso objetivo a uma professora de Matemática que cedeu sete horas-aulas. A professora disponibilizou essa turma porque era a turma mais participativa com atividades interativas. Já o conteúdo de distância entre dois pontos nos foi apresentado pela professora porque seria o próximo a ser tratado, segundo o documento de Registro de Classe Online (RCO) que contém os conteúdos a serem cumpridos.

Ao longo da experiência, buscamos coletar dados sobre o que os alunos fizeram, que se deu por meio de seus registros de resolução na folha que continha o problema e na lousa, de gravações de áudio e de anotações no diário de campo. Dessa forma, apresentamos nossa experiência de ensino para o contéudo de distância entre dois pontos na abordagem do EAMvRP e que foi implementada em sala de aula pelas duas autoras deste estudo.

1ª ação - Escolha do Problema: Nesta ação, reunimo-nos para dialogar sobre qual seria a situação de Matemática a ser utilizada para que os alunos utilizassem seus conhecimentos prévios de conceitos, princípios e procedimentos matemáticos, principalmente em geometria e chegassem a uma generalização, obtendo uma fórmula matemática, como propõe Proença (2018). Após várias tentativas de elaboração e várias discussões, formulamos a seguinte situação:

Pedro está brincando com um jogo que tem como objetivo calcular o caminho para que os animais possam chegar a sua respectiva comida, podendo andar em qualquer sentido, sem passar por outros animais em seu trajeto. Considere que cada quadrado possui a área de $1m^2$

Figura 1. Situação de matemática (Possível problema)

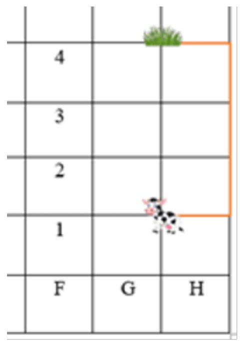
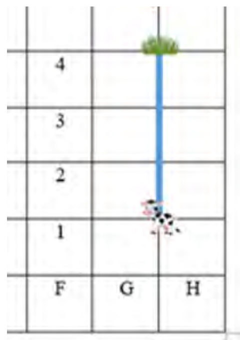


Fonte. Elaborado pelos autores

De acordo com a ilustração: a) Qual a menor distância (em metros) entre a vaca e o capim? b) Qual a menor distância (em metros) entre a abelha e a flor? c) Qual a menor distância (em metros) entre o cachorro e a carne? d) Qual a menor distância (em metros) entre o gato e o peixe?

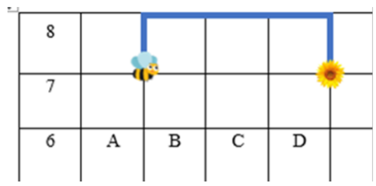
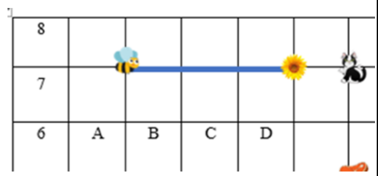
A escolha da situação de Matemática (possível problema) deve levar em consideração a atenção ao fato de que “a situação de Matemática escolhida deve permitir uma resolução pelos alunos baseada em mais de um caminho, mais de uma estratégia” (Proença, 2018, p. 46). Dessa forma, a situação escolhida admite alguns caminhos para se chegar a uma resposta. Nos quadros a seguir, apresentamos algumas das estratégias que previmos antes de apresentar a situação de Matemática em sala de aula.

Quadro 1. Estratégias da situação referentes ao item a

Estratégias para resolução do item a)	
Descrição	**Ilustração**
A vaca seguirá esta sequência para chegar ao capim: H1-H2-H3-H4-G4 O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 6x1= 6 metros ou somar 1+1+1+1+1+1=6 metros Este não é o caminho mais curto	
A vaca seguirá está sequência para chegar ao capim: G2-G3-G4. O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 3x1= 3 metros ou somar 1+1+1= 3 metros	

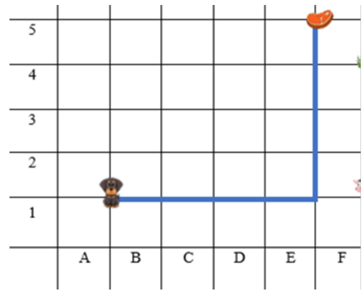
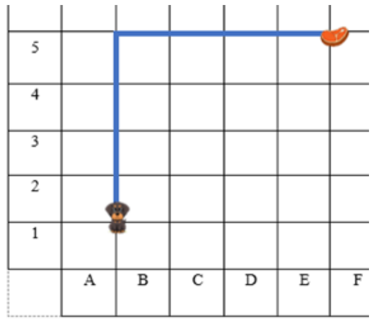
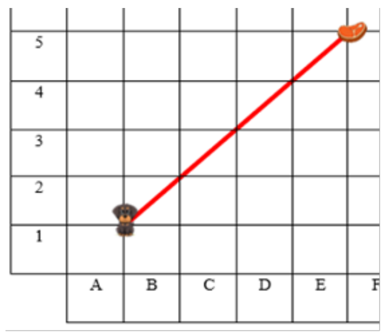
Fonte. Elaborado pelos autores

Quadro 2. Estratégias da situação referentes ao item b

Estratégias para resolução do item b)	
Descrição	**Ilustração**
A abelha seguirá está sequência para chegar a flor: A8-B8-C8-D8-D7 O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 5x1= 5 metros ou somar 1+1+1+1+1= 5 metros Este não é o caminho mais curto.	
A abelha seguirá esta sequência para chegar a flor: B7-C7-D7 O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 3x1= 3 metros ou somar 1+1+1= 3 metros	

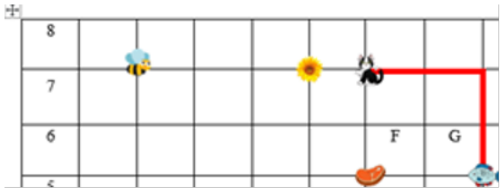
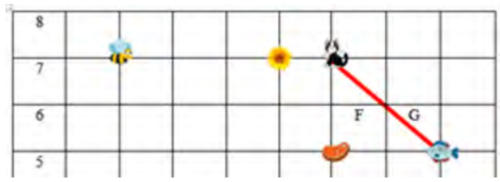
Fonte. Elaborado pelos autores

Quadro 3. Estratégias da situação referentes ao item c

Estratégias para resolução do item c)	
Descrição	**Ilustração**
O cachorro seguirá esta sequência para chegar a carne: B1-C1-D1-E1-E2-E3-E4-E5 O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 8x1= 8 metros ou somar 1+1+1+1+1+1+1+1= 8 metros Este não é o caminho mais curto.	
O cachorro seguirá esta sequência para chegar à carne: A2-A3-A4-A5-B5-C5-D5-E5 O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 8x1= 8 metros ou somar 1+1+1+1+1+1+1+1= 8 metros Este não é o caminho mais curto.	
O cachorro seguirá esta sequência para chegar à carne: B2-C3-D4-E5 Aqui o aluno poderá utilizar seus conhecimentos de geometria e aplicar Pitágoras de duas maneiras: 1- O aluno poderá encontrar a diagonal de cada triângulo e depois multiplicá-las pelo número que aparece: $h^2=1^2+1^2 \rightarrow h=\sqrt{2}$ $\sqrt{2}x4=4\sqrt{2}$ 2- O aluno poderá olhar a diagonal do triângulo dos vértices A1, E1 e E5. $h^2=4^2+4^2 \rightarrow h=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$	

Fonte. Elaborado pelos autores

Quadro 4. Estratégias da situação referentes ao item d

Estratégias para resolução do item d)	
Descrição	**Ilustração**
O gato seguirá esta sequência para chegar ao peixe: F7-G7-G6-G5 Este não é o caminho mais curto. O aluno poderá calcular a distância em metros, multiplicando 4x1= 4 metros ou somar 1+1+1+1= 4 metros	
O gato seguirá esta sequência para chegar ao capim: F6-G5 Aqui o aluno poderá utilizar seus conhecimentos de geometria e aplicar Pitágoras de duas maneiras: 1- O aluno poderá encontrar a hipotenusa de cada triângulo retângulo e depois multiplicá-las pelo número que aparece: $h^2 = 1^2+1^2 \rightarrow h = \sqrt{2}$ $\sqrt{2}x2 = 2\sqrt{2}$ 2- O aluno poderá olhar a hipotenusa do triângulo dos vértices E7, G7 e G5. $h^2 = 2^2 + 2^2 \rightarrow h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	

Fonte. Elaborado pelos autores

Essas estratégias previstas ajudaram as professoras a observar se os alunos seguiriam alguma delas, quando da resolução do problema, em sala de aula. Além disso, utilizamos a estratégia que possibilitou realizar a articulação ao novo conteúdo: a expressão que envolve o conteúdo de distância entre dois pontos.

2ª ação - Introdução do Problema: Nesta ação, iniciamos o contato direto, em sala de aula, com os alunos, de modo que fizemos a divisão da turma em grupos (formaram-se sete grupos) e apresentamos-lhes a situação de Matemática para que começassem a resolver. Orientamos os alunos para resolverem como quisessem.

Figura 2. Apresentação da situação de matemática aos alunos em grupos

Fonte. Dados da pesquisa

3ª ação - Auxílio aos alunos durante a resolução: Nesta ação, auxiliamos os alunos nas dúvidas que foram surgindo no decorrer da resolução da situação. Conforme indica Proença (2018), atuamos no papel de observadoras de suas dificuldades e compreensões. Como incentivadoras, isso ocorreu por meio de questionamentos para ajudar nas ideias. Como direcionadoras, nossa postura ocorreu no sentido de possibilitar aos alunos estruturar suas estratégias. No quadro a seguir, trouxemos os principais auxílios aos alunos.

Quadro 5. Auxílio aos alunos durante a resolução

Dificuldades observadas	Incentivo aos alunos	Direcionamento
Traçaram o caminho, mas não sabiam calcular a distância.	Questionamos o que eles viam quando traçaram a linha entre o cachorro e a carne (hipotenusa do triângulo).	Permitir que pudessem perceber e utilizar como estratégia a relação entre o triângulo e o teorema de Pitágoras.
Confundiram área do quadrado com comprimento da distância.	Questionamos a eles o que era área e o que eles queriam calcular.	Fazer eles perceberem que a área é a região delimitada pelo quadrado que eles visualizaram e que o cachorro andaria apenas na diagonal.
Concluíram que a diagonal de cada quadradinho media 1 metro.	Questionamos se realmente a diagonal media o mesmo que as laterais e pedimos para observarem melhor a figura formada ao traçar a diagonal do quadrado.	Que os alunos associassem o triângulo com o teorema de Pitágoras e identificassem que o resultado do cálculo da hipotenusa é diferente de 1.
Os alunos ainda estavam confusos com alguns conceitos a serem usados na resolução.	Planejamos aumentar o tempo de auxílio aos alunos.	Possibilitar que as ideias dos alunos fossem esclarecidas.

Fonte. Elaborado pelos autores

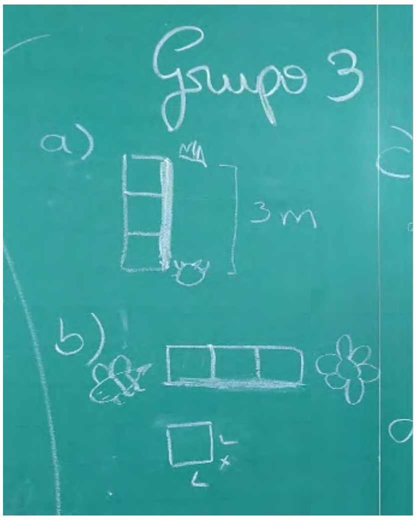
Proença (2018) explica que é a partir do contato dos alunos com a situação que vai revelar se se tornou difícil para eles. No caso da nossa situação de Matemática, verificamos que na terceira ação as dificuldades observadas (Quadro 5) evidenciam dificuldades de encontrar de imediato uma resposta, o que neste caso podemos apontar que se tornou um problema aos grupos, podendo utilizar o termo problema a partir de agora.

Dessas dificuldades mostradas no Quadro 5, percebemos que a maioria, três delas, foram sobre dificuldades na etapa de representação/compreensão do problema (Polya, 1994; Proença, 2018). Na visão de Proença (2018), são dificuldades de uso de conhecimento semântico devido confundirem ou não saberem conteúdos matemáticos como a diferença entre área e comprimento, e que a medida da diagonal do quadradrinho é maior que seus lados. Estudos como os de Kunene e Sepeng (2017), Proença et al. (2020) e Proença et al. (2022) corroboram que a maior dificuldade de alunos é justamente na etapa de compreensão de problemas. Além disso, o Quadro 5 mostra que outra dificuldade foi na etapa de execução, no uso de conhecimento procedimental, relativo à não conseguirem calcular a distância.

4ª ação - Discussão das estratégias dos alunos: Quando os alunos conseguiram elaborar suas estratégias na resolução do problema, encaminhamos a aula para a discussão delas. Convidamos cada um dos grupos para exporem suas ideias na lousa, a fim de fazer com que percebessem os conhecimentos utilizados e conseguissem estabelecer conexões entre as estratégias.

Em geral, todos os grupos realizaram a resolução dos itens a) e b) com a mesma estratégia, considerando o caminho do respectivo animal à sua comida como uma linha reta, conforme ilustramos a seguir:

Figura 3. Estratégia do Grupo 3

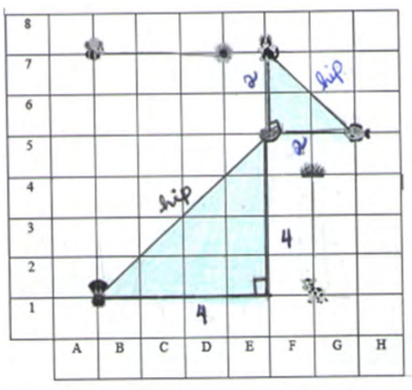


Fonte. Dados da pesquisa

Para os itens c) e d), a resolução dos grupos revelou três estratégias, que descrevemos a seguir:

Estratégia 1: Relacionar o caminho que leva o cachorro ao bife com a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos de 4 metros.

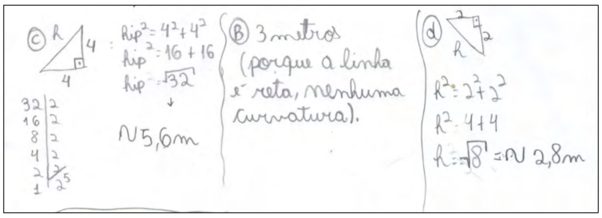
Figura 4. Estratégia 1



Fonte. Dados da pesquisa

Nesta estratégia, os alunos traçaram uma hipotenusa, o que correspondeu a um caminho mais curto, porém, estavam também considerando que essa hipotenusa valia 1metro, igual as laterais do quadrado, o que revelou a dificuldade mostrada no Quadro 5, referente ao uso de conhecimento semântico (Proença, 2018). Então, questionamos: Será que essa hipotenusa mede o mesmo que as laterais? Não sabendo justificar, procuraram outros meios de tentar calcular o seu comprimento, e visualizaram que ela poderia ser de um triângulo retângulo e, a partir disso, utilizaram o Teorema de Pitágoras para calcular o valor da hipotenusa (h), como mostra-se a seguir:

Figura 5. Execução da Estratégia 1

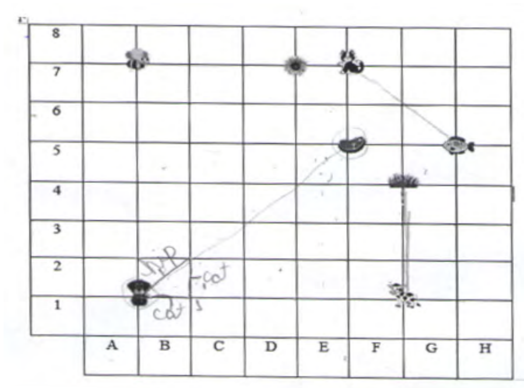


Fonte. Dados da pesquisa

Percebemos que a dificuldade em diferenciar o comprimento da hipotenusa com o lado do quadrinho esteve na direção do uso de conhecimento matemático, envolvendo o que Proença (2018) chama de conhecimento semântico. Possivelmente, os alunos que tiveram essa dificuldade pouco tiveram oportunidade de vivenciar uma comparação entre um lado de um triângulo retângulo (cateto) e a sua hipotenusa por meio de uma medição a partir de um dado segmento de reta, por exemplo. No entanto, identificamos que a execução dessa estratégia 1 mostra que sabiam operar com a resolução desse teorema, ou seja sabiam fazer uso do conhecimento procedimental (Proença, 2018). Isso foi possível pelo auxílio aos alunos dados pelas professoras, o que é da terceira ação do EAMvRP. Enfim, a dificuldade esteve já na primeira etapa de resolução de problemas, a de representação do problema, ou seja, da compreensão (Proença, 2018).

Estratégia 2: Calcular a diagonal de um quadrado e multiplicar pela quantidade de diagonais cortadas pelo caminho que leva o cachorro ao bife.

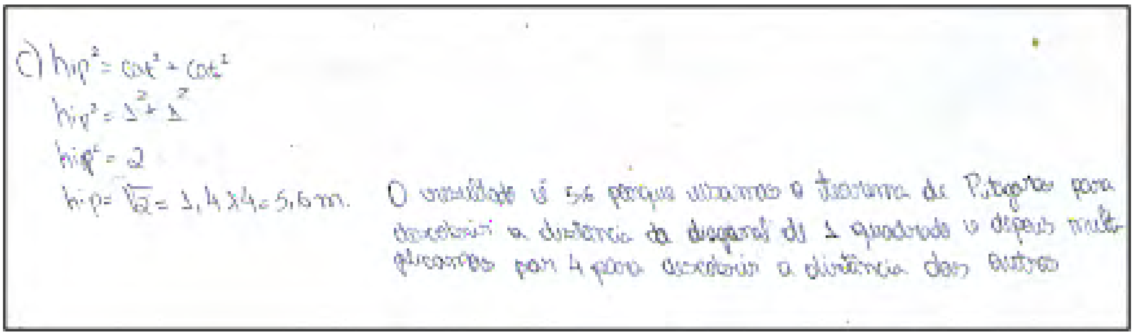
Figura 6. Estratégia 2



Fonte. Dados da pesquisa

Conforme a imagem acima, os grupos utilizaram o Teorema de Pitágoras para calcular o comprimento da diagonal de um quadradinho, o qual tomaram como referência na estratégia, chegando ao valor de raiz de 2, e, com o uso da calculadora, aproximaram para 1,4. Concluíram que se cada diagonal vale 1,4, e se têm 4 diagonais, bastava multiplicar 1,4 por 4 para obter a distância entre o cachorro e o bife, que era de 5,6m. A Figura 7 a seguir mostra a execução da estratégia feita pelo grupo e as explicações dadas.

Figura 7. Execução e explicação da Estratégia 2



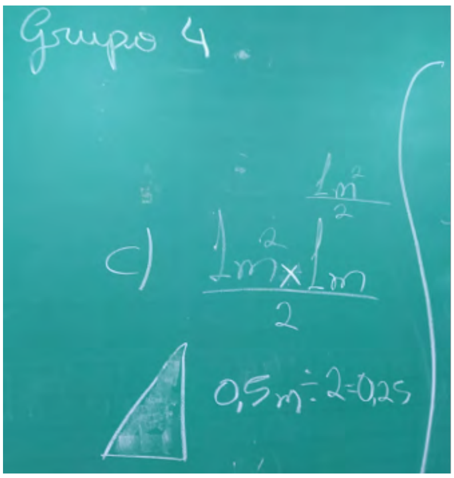
Fonte. Dados da pesquisa

Essa estratégia 2 e sua execução mostram que os grupos que a seguiram pensaram em um caminho de resolução baseado no uso do Teorema de Pitágoras, revelando uso de conhecimento estratégico ao multiplicar por 4 o comprimento da hipotenusa encontrado (Proença, 2018). Na visão de Polya (1994), isso mostra que envolver os alunos em um ambiente de resolução de problemas favorece desenvolver caminhos para atingir a resposta, pois também tivemos a estratégia 1 (Figura 5). Além disso, uma vez que pretendemos na quinta ação do EAMvRP articular a estratégia à fórmula da distância entre dois pontos (novo conteúdo a ser introduzido), o uso do Teorema de Pitágoras foi utilizado como conhecimento prévio bem compreendido pelos alunos, revelando saberem fazer uso do conhecimento semântico (Proença, 2018). No caso da resposta, não mantiveram o número raiz de 2 e sim obtiveram a sua forma decimal aproximada (1,4), o que mostra uma preocupação, possivelmente, para apresentar uma resposta mais clara, revelando a etapa de monitoramento (Proença, 2018). Dessa forma, em termos das etapas de resolução de problemas, os grupos que resolveram dessa forma mostraram que conseguiram resolver o problema, sucesso esse que, na visão de Proença (2018), mostraram que conseguiram mobilizar seus conhecimentos conceituais e procedimentais de forma condizentes.

Estratégia 3: Considerar a diagonal de um quadrado e calcular a área dos triângulos formados.

Apenas o grupo 4 utilizou essa estratégia. Durante a terceira ação do EAMvRP (de auxílio aos alunos durante a resolução), quando lhes oferecemos apoio, os alunos não quiseram expor suas compreensões. Ao insistirmos, observamos que não expressavam de forma clara como tinham resolvido. Assim, na quarta ação (de discussão das estratégias dos alunos), ao irem para a lousa socializar sua estratégia, apresentaram uma ideia equivocada, que foi calcular a área do triângulo formado por um quadradinho, conforme mostra a Figura 8.

Figura 8. Estratégia equivocada do Grupo 4



Fonte. Dados da pesquisa

Nesta quarta ação, tivemos um momento de muita troca de conhecimento com os alunos, os quais demonstraram que entenderam seus equívocos e semelhanças de ideias. Por exemplo, na exposição da estratégia 2 pelo grupo 1, um dos participantes do grupo durante a exposição relata:

> **G1:** Tivemos o mesmo pensamento delas ali (Grupo 6), a diferença é que a gente usou dois triângulos, aí a gente teve que descobrir as distâncias dos dois, (...) descobrimos a raiz e multiplicamos por dois.

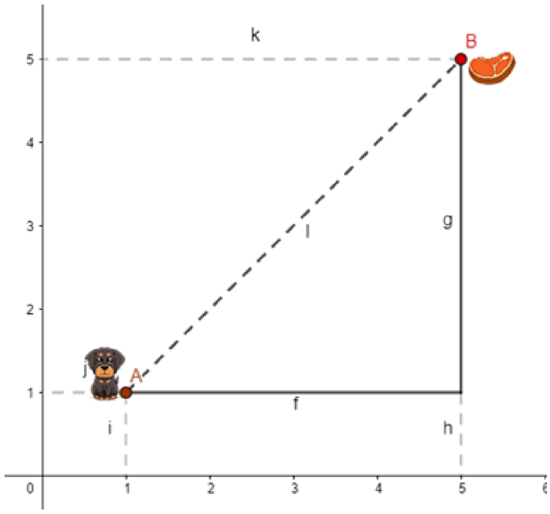
Em outro caso, o grupo 4 mostrou que compreendeu que a área total do triângulo era diferente de calcular a distância do cachorro ao bife, conforme mostra o diálogo seguinte:

> **P:** Qual fórmula vocês utilizaram?
>
> **G4:** Base vezes a altura dividido por 2.
>
> **P:** Vocês sabem para que ela serve?
>
> **G4:** (risos) (...). Calcula a área do triângulo.
>
> **P:** O que acontece pessoal é que quando a gente usa a fórmula da área, calculamos a região interna delimitada pelo triângulo. Sendo assim, pergunto: o cachorro vai andar a área, essa região interna do triângulo, para chegar ao bife ou ele andará apenas na diagonal?
>
> **G4:** Só na diagonal! Verdade!

Socializar as estratégias nessa quarta ação possibilitou levar os alunos do nosso estudo a compreenderem suas dificuldades no uso de conhecimentos matemáticos, tanto conceituais quanto procedimentais, conforme ocorreu nos estudos de Rozario y Proença (2023) de área de triângulo e Pereira y Proença (2023) de equação de 2º grau, os quais também se pautaram no EAMvRP. Puderam, assim, compreender que o comprimento da hipotenusa é sempre maior do que o lado do triângulo e que o cálculo de área é diferente de obter o comprimento da diagonal do quadradinho. Dessa forma, essa compreensão de matemática pode levar os alunos a terem maior domínio desses conteúdos, o que favorece o desenvolvimento de habilidades matemáticas na resolução de problemas, conforme explicaram Triana (2005) e Proença (2022).

5ª ação - Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo: Nesta ação, como proposto por Proença (2018), após a socialização das estratégias, a partir de uma estratégia que tomamos como referência, levamos os alunos a compreenderam a articulação que fizemos junto à forma matemática do conteúdo que foi a fórmula de distância entre dois pontos. Assim, perguntamos aos alunos se o tabuleiro do jogo lembrava algum conteúdo de matemática, e eles responderam "plano cartesiano". Enfatizamos que essa era a ideia inicial que queríamos debater com eles. Posteriormente, perguntamos aos alunos: se o cachorro e o bife estivessem em um plano cartesiano, o que eles seriam considerados na geometria? Um dos integrantes do grupo 3 respondeu "pontos", o que desencadeou a compreensão dos demais alunos dessa relação. Deste modo, expomos na lousa a estratégia 2, utilizada para resolver o item c), que era baseado em relacionar a distância entre o cachorro e o bife à hipotenusa (h) de um triângulo retângulo com catetos de 4m, o que se deu pelo uso do Teorema de Pitágoras por parte de um grupo como estratégia para encontrar a resposta. A Figura 9 a seguir mostra o desenho que retomamos dessa estratégia 2 como início para conduzir os alunos à articulação da estratégia do Teorema de Pitágoras à fórmula da distância entre dois pontos.

Figura 9. Retomada da estratégia 2 para articular ao conteúdo



Fonte. Elaborado pelos autores

Ao fazermos esse desenho na lousa, pedimos a manifestação dos alunos sobre como encontraram essa distância, de forma que um grupo comentou que utilizou o Teorema de Pitágoras. Dessa forma, os demais alunos compartilharam seus conhecimentos e puderam relembrar naquele momento esse teorema, evidenciando que envolve um triângulo retângulo (contendo um ângulo de 90 graus), conforme se identifica nas estratégias que os grupos utilizaram. Logo, os alunos mencionaram os dois catetos e a hipotenusa (h) e explicaram a execução do teorema, obtendo:

$$h^2 = 4^2 + 4^2$$
$$h^2 = 16 + 16$$
$$h^2 = 32$$
$$h = \sqrt{32}$$

Perguntamos a eles quais seriam as coordenadas se o cachorro e o bife fossem respectivamente os pontos A e B no Plano Cartesiano. Desta forma, um dos alunos do grupo 3 falou que "seria na forma x e y". Então, expomos na lousa esses dois pontos na forma A(x, y) e B(x, y). Em seguida, pedimos para eles localizarem onde estariam o cachorro e o bife no plano cartesiano que desenhamos.

Os alunos conseguiram perceber que o cachorro seria o par ordenado A(1,1) e o bife, B(5,5). Questionamo-los como haviam pensado, e um deles falou: "olhei para o eixo x e depois para o eixo y". Diante disso, os outros alunos concordaram com a mesma relação, revelando que pensaram igual. Feito isso, obtidos os valores dos catetos com a subtração dos valores de xb e xa, e de yb e ya, relacionamos o comprimento da hipotenusa (h) com a distância (d) entre os dois pontos, articulando o Teorema de Pitágoras à fórmula da distância entre dois pontos. Portanto, considerando os pontos A(1,1) e B(5,5), obtivemos:

Quadro 6. Auxílio aos alunos durante a resolução

Teorema de Pitágoras	**Distância entre dois pontos**
$h^2 = a^2+b^2$ $h^2 = (4)^2 + (4)^2$ $h^2 = 16 + 16$ $h^2 = 32$ $h = \sqrt{32}$	$d^2 = (X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2$ $d^2 = (5-1)^2 + (5-1)^2$ $d^2 = (4)^2 + (4)^2$ $d^2 = 16+16$ $d^2 = 32$ $d = \sqrt{32}$

Fonte. Elaborado pelos autores

Retomamos que o Teorema de Pitágoras implica que em um triângulo retângulo a hipotenusa (h) ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos catetos (a e b). Diante disso, explicamos que o $h^2 = d^2$, o $a^2 = (xb – xa)^2$ e o $b^2 = (yb – ya)^2$. Com isso, aproveitamos esses pontos centrais do referido teorema para articular ao novo conteúdo, conforme sugere Proença (2018). Deste modo, concluímos que a fórmula da distância entre esses dois pontos é a seguinte:

$$d^2 = (X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2$$

Após chegarmos à fórmula acima, alguns alunos relataram que gostaram do jeito que chegaram ao novo conteúdo, conforme um dos alunos do grupo 3 relatou: "Nossa, que legal, gostei, eu precisei pensar, mas foi divertido". Outro aluno do grupo 2 falou: "foi difícil, mas eu gostei desse jeito, fez a gente pensar". Posteriormente, escrevemos a definição matemática, na lousa, evidenciando o aspecto formal da fórmula: Dados dois pontos A(xa, ya) e B(xb, yb), a distância entre eles no plano cartesiano é a fórmula: $d2 = (xb – xa)^2 + (yb – ya)^2$.

Nesta quinta ação de articulação da estratégia à fórmula do conteúdo de distância entre dois pontos, podemos apontar que a compreensão dos alunos dos dois pontos no plano cartesiano e a identificação e uso do conhecimento prévio do Teorema de Pitágoras a partir do direcionamento dado em sala de aula revelaram a importância de o professor buscar fazer a articulação. Isso porque, segundo Proença (2018), se valorizou o que os alunos fizeram para depois relacionar à ideia e à simbologia matemáticas. Para Mendes, Proença e Moreira (2022), essa valorização na ação de articulação do EAMvRP se direciona a favorecer a aprendizagem significativa. Com isso, foi possível despertar o gosto dos alunos pela aprendizagem, o que possivelmente ocorreu pelas compreensões que tiveram. Isso também foi mostrado nos estudos de Akamine y Proença (2022) e Santos, Campelo y Proença (2023) na articulação, respectivamente, ao algoritmo da adição de frações e ao conceito de logaritmo, o que revela ser promissor no processo ensino-aprendizagem.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tivemos como objetivo relatar uma experiência de ensino baseada nas cinco ações do EAMvRP para favorecer a compreensão de alunos sobre o conteúdo de distância entre dois pontos. Para tal, seguimos as cinco ações de ensino de Proença (2018) e desenvolvemos a proposta em sala de aula para 27 alunos brasileiros da terceira série do Ensino Médio de uma escola pública, do estado do Paraná, no Brasil.

Durante o auxílio aos alunos, identificamos que as maiores dificuldades estão relacionadas a noções básicas de geometria, tais como saber que os catetos de um triângulo retângulo não possuem o mesmo tamanho da hipotenusa e diferenciar os conceitos de área e perímetro. Devido essas dificuldades, os alunos demoraram a desenvolver alguma estratégia que levasse a uma resposta correta, o que demonstra dificuldades de compreensão do problema, relacionadas ao uso de conhecimentos semânticos para conseguirem propor uma estratégia.

Ao longo das demais ações do EAMvRP, essas dificuldades foram abordadas de acordo com o papel que coube às duas professoras-pesquisadoras de observar, incentivar e direcionar o que os alunos fizeram para comporem estratégias que atingissem uma resposta. Esse auxílio prestado contribuiu para que as dificuldades dos alunos fossem superadas e não desistissem de tentar encontrar a resposta. Além disso, a socialização das estratégias ajudou a rever conhecimentos ligados ao plano cartesiano, de modo que na articulação da estratégia tomada como referência foi possível levar os alunos a perceberem a relação entre as estratégias e o novo conteúdo, relacionado à fórmula da distância entre dois pontos. Para realizar esse estudo, não nos deparamos com algum limite, tanto pedagógico quanto de pesquisa, uma vez que já realizamos abordagens de EAMvRP com outros conteúdos e com discussões no nosso grupo de pesquisa (Grupo de Estudos em Resolução de Problemas na Educação Matemática - ERPEM)[3] que trata da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da Matemática.

Contudo, podemos apontar que a abordagem de ensino via resolução de problemas que elaboramos e implementamos em sala de aula, estruturada conforme as cinco ações de Proença (2018), teve potencial para favorecer a compreensão do conteúdo de distância entre dois pontos pelos alunos participantes do estudo. Portanto, podemos apontar que nosso estudo sobre a experiência na abordagem das cinco ações o EAMvRP, em sala de aula, contribui para abrir espaço para novas pesquisas a serem feitas na escola.

[3]https://dma.uem.br/pesquisa/grupos-de-pesquisa/gerpem

6. REFERÊNCIAS

Akamine, C. S., y Proença, M. C. (2022). Ensino-aprendizagem de adição de frações via resolução de problemas. Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (52), 303-322. https://doi.org/10.17227/ted.num52-15590

Brasil (2018). Base Nacional Comum Curricular. Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Brasília: MEC. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

Echeverria, M, D. P. P. (1998). A solução de problemas em matemática. Em J. I. Pozo (Ed.). A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender (pp. 43-65). ArtMed.

English, L. D. (2020). Teaching and learning through mathematical problem posing: commentary. International Journal of Educational Research, 102, 1-5. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.06.014

Fi, C. D., y Degner, K. M. (2012). Teaching through problem solving. Mathematics Teacher, 105(6), 455-459. https://doi.org/10.5951/mathteacher.105.6.0455

Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. International Journal of Educational Research, 102, 1-13. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.05.001

Kunene, N., y Sepeng, P. (2017). Rural Learners' views and perceptions about their experiences in word problem solving. Journal of Social Sciences, 50(1-3), 133-140. https://doi.org/10.1080/09718923.2017.1311728

Lester, F. K., y Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen, y J. Kilpatrick (Eds.). Posing and solving mathematical problems (pp. 117-135). Springer: Cham.

Liljedahl, P., y Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 53(4), 723-735. : https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-021-01291-w

Mendes, L. O. R., Proença, M. C., y Moreira, M. A. (2022). Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas: reflexões sob o enfoque da aprendizagem significativa crítica. Ensino da Matemática em Debate, 9(2), 17–36. https://doi.org/10.23925/2358-4122.2022v9i255547

Pereira, F. F., y Proença, M. C. de (2023). Ensino-aprendizagem de equações de 2º grau via resolução de problemas: uma experiência a partir de uma trajetória hipotética de aprendizagem. Revista Paranaense de Educação Matemática, 12(28), 427-446. https://doi.org/10.33871/22385800.2023.12.28.427-446

Proença, M. C. de (2022). Habilidades Matemáticas na Resolução de Problemas: análise da compreensão de futuros professores. Bolema – Boletim de Educação Matemática, 36(74), 1135–1157. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a09

Proença, M. C. de; Maia-Afonso, É. J., Mendes, L. O. R., y Travassos, W. B. (2022). Dificuldades de Alunos na Resolução de Problemas: análise a partir de propostas de ensino em dissertações. Bolema – Boletim de Educação Matemática, 36(72), 262-285. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a12

Proença, M. C. (2021). Resolução de Problemas: uma proposta de organização do ensino para a aprendizagem de conceitos matemáticos. Revista de Educação Matemática, 18(1), 1-14. https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id359

Proença, M. C. de, Maia-Afonso, É. J., Travassos, W. B., y Castilho, G. R. (2020). Resolução de Problemas de Matemática: análise das dificuldades de alunos do 9º ano do ensino fundamental. Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, 16(36), 224-243. http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v16i36.8639

Proença, M. C. (2018). Resolução de Problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula. Maringá: Eduem. https://livraria.eduem.uem.br/loja/resolucao-de-problemas-encaminhamentos-para-o-ensino-e-a-aprendizagem-de-matematica-em-sala-de-aula/

Polya, G. (1994). A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático. Interciência.

Rozario, T. A., y Proença, M. C. (2023). Ensino de área de triângulo via resolução de problemas: uma experiência baseada nas cinco ações do EAMvRP. Educação Matemática em Revista, 28(80), 01-15. https://doi.org/10.37001/emr.v28i80.3311

Rozario, T. A., y Proença, M. C. (2022). Resolução de problemas e área de triângulo: análise dos conhecimentos de alunos do 6º ano o ensino fundamental. Revista Paranaense de Educação Matemática, 11(26), 492–517. https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.26.492-517

Santos, R. R. dos, Campelo, C. da S. A., y Proença, M. C. de (2023). O ensino de logaritmos via resolução de problemas no ensino médio. ACTIO – Docência em Ciências, 8(3), 1-22. http://dx.doi.org/10.3895/actio.v8n3.17577

Schroeder, T. L., y Lester, F. K. (1989). Developing understanding in Mathematics via problem solving. En P. R. Trafton, y A. P. Shulte (Eds.). New directions for elementary school mathematics (pp. 31-42), Reston: NCTM.

Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 52(4), 1163–1175. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01162-w

Sousa, A. C., y Proença, M. C. (2019). Uma proposta de ensino de equação de 1º grau com uma incógnita via resolução de problemas. Revista Prática Docente, 4(2), 431-451. https://periodicos.cfs.ifmt.edu.br/periodicos/index.php/rpd/article/view/512

Triana, I. M. (2005). La formación de la habilidad para resolver problemas de matemáticas: una experiencia investigativa sustentada en el enfoque histórico cultural. Tecné, Episteme y Didaxis - TED, (18), 17-33. https://doi.org/10.17227/ted.num18-457

VOLÚMEN 17
N°2
AGOSTO 2025

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA