

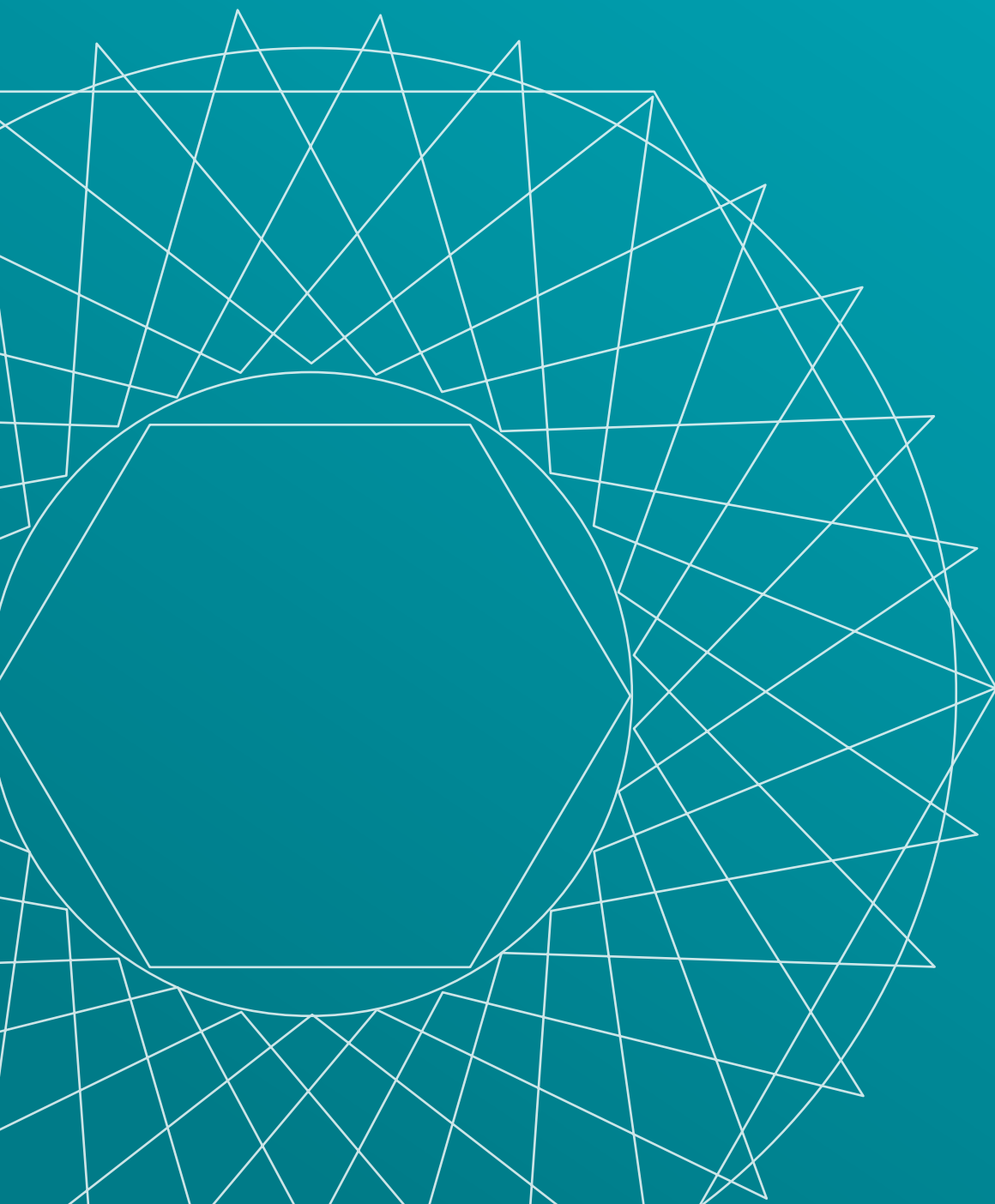
VOLÚMEN 18

Nº1

ABRIL 2026

RECH IEM

REVISTA
CHILENA DE
EDUCACIÓN
MATEMÁTICA



ÍNDICE

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

3

DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LA HOMOTECIA

PAULA RABANEDO, VIVIANA LLANOS

24

MOTIVACIÓN DOCENTE PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CONTEXTOS INDÍGENAS WIXÁRIKA: CONFIGURACIONES SITUADAS DE VALORES, EXPECTATIVAS Y COSTOS DESDE EL MODELO SEVT

MISAEL OMAR GARCÍA, MARÍA INÉS ORTEGA ARCEGA, JOSÉ TRINIDAD ULLOA IBARRA

38

LA PELOTA, ¿DEJARÁ DE REBOTAR? MODELACIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

NICOLÁS GAETE SILVA

55

MODELACIÓN MATEMÁTICA ESCOLAR DE LA ELIPSE EN CONTEXTO ASTRONÓMICO

KARLA PACHECO LÓPEZ, IVÁN PÉREZ-VERA



Sociedad Chilena de Educación Matemática

Revista Chilena de Educación Matemática

ISSN 2452-5448 Versión en línea

Chile



ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LA HOMOTECIA

DESIGN AND A PRIORI ANALYSIS OF A STUDY AND RESEARCH PATH FOR TEACHING HOMOTHETY

Paula Rabanedo

prabanedo@alumnos.exa.unicen.edu.ar

<https://orcid.org/0009-0001-1531-5959>

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Viviana Llanos

vcllanos@niecyt.exa.unicen.edu.ar

<https://orcid.org/0000-0003-0433-2654>

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

RESUMEN

Diseñamos y analizamos un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI), inspirado en el funcionamiento de una fotocopidora, para ser utilizado como recurso didáctico para enseñar geometría dentro de lo que en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard se conoce como Paradigma de la Investigación y del cuestionamiento del Mundo. Presentamos el análisis a priori del REI y un conjunto de tareas vinculadas al funcionamiento de la fotocopidora, enfocadas en el estudio de la homotecia y otras nociones de geometría. Ponemos a disposición un recurso que promueve una enseñanza basada en el cuestionamiento y el tránsito hacia un nuevo paradigma en la formación de los futuros profesores de matemática.

Palabras Clave:

Geometría; Homotecia; Recorridos de Estudio y de Investigación; Formación de profesores

ABSTRACT

We designed and analyzed a Study and Research Path (SRP), inspired by the functioning of a photocopier, to be used as a learning resource for teaching geometry within what Chevallard's Anthropological Theory of the Didactic (ATD) refers to as the Paradigm of Research and Questioning of the World. We present the a priori analysis of the SRP and a set of tasks related to the functioning of the photocopier, focused on the study of homothety and other geometry concepts. We make available a resource that promotes inquiry-based teaching and the transition toward a new paradigm in the training of future mathematics teachers.

Keywords:

Geometry; Homothetic; Study and Research Path; Teacher training

1. INTRODUCCIÓN

La geometría es un área de la matemática que, si bien se contempla en la propuesta de los diseños curriculares, podríamos decir que se encuentra en extinción dado que ha sido progresivamente desplazada del aula del nivel secundario. En ocasiones los profesores deciden posicionarla al final del programa y no logran abordarla en la clase, o si lo hacen, la reducen al estudio de figuras planas, específicamente triángulos y trigonometría (Bravo y Riofrío, 2024). Otras investigaciones, como por ejemplo Pérez y Guillén (2007), sostienen que se prioriza la medida y el cálculo de áreas antes que la descripción y clasificación de figuras. La investigación de Eugui (2023) confirma que la desaparición de la geometría en la escuela secundaria, no se identifica en la propuesta de diseños curriculares de referencia, dado que desde la creación de la primera escuela secundaria en Argentina, esta disciplina ocupa un lugar importante, como otros contenidos matemáticos (números, funciones y álgebra). Sin embargo, es un hecho que la desaparición a la que se hace referencia ocurre en el aula. En particular la homotecia es un tema que corresponde estudiar en el tercer año del nivel secundario de la provincia de Buenos Aires en Argentina, y que consideramos que se encuentra abandonada en este nivel (Rabanedo y Llanos, 2024). ¿Por qué será que los profesores no priorizan la enseñanza de la geometría y directamente eliminan la homotecia como un tema importante dentro de ésta? ¿por qué priorizarán otros temas? Frente a esto pensamos que el fenómeno de la eliminación escolar de lo geométrico podría deberse a que tal vez los profesores en su formación no tuvieron oportunidad de estudiarla lo suficiente, o si lo hicieron, no le encontraron utilidad (Chevallard, 2017) y tampoco pudieron otorgarle sentido.

Hay ciertos conocimientos que no son enseñados y que los profesores suelen reconocer que es por falta de tiempo o porque no le encuentran sentido. En este contexto, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2013), identifica un paradigma vigente denominado paradigma monumental, que lleva ese nombre porque el autor compara metafóricamente la actividad del profesor en el aula con la de un guía de un museo que invita a visitar un monumento. Esta analogía de los estudiantes como visitantes del museo, y del profesor, en este caso de matemática, que muestra las obras, hace notar que en el paradigma monumental vigente no hay posibilidad de reconstruir el saber ni cuestionarlo. Como alternativa, la TAD introduce el paradigma de la investigación y cuestionamiento del mundo (Chevallard y Strømskag,

2022, 2025) que implica un cambio sustancial en la enseñanza habitual. En este marco, los Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) se presentan como dispositivos teóricos y didácticos que permiten repensar el rol del profesor y los estudiantes.

Un REI comienza con una pregunta generatriz Q_0 , que no admite respuesta inmediata, lo que moviliza un proceso de estudio que requiere reconstruir los saberes para generar dicha respuesta. En esta investigación diseñamos, analizamos e implementamos un REI que lo denominamos de la fotocopiadora y que inicia con la pregunta generatriz Q_0 : ¿Por qué una fotocopiadora puede realizar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma? Como parte del análisis a priori del REI antes de llevarlo al aula, se realiza el Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) (Chevallard, 2013), que incluye las posibilidades del estudio y, específicamente, nos interesa desarrollar aquí las que permitirían abordar saberes de geometría, y la fase de adaptación del REI para ser utilizado como recurso e implementarlo en la formación de profesores de Matemática. Nos proponemos responder las preguntas ¿en qué medida el REI propuesto contribuye a la formación inicial de los profesores en Matemática? ¿cómo podríamos adaptar el REI para utilizarlo como un recurso para la enseñanza de la geometría en la formación de profesores?

Se reconocen varias investigaciones que han desarrollado REI para la enseñanza de la geometría. Algunas se han centrado en el diseño y análisis a priori de un REI que integra nociones de geometría sintética y analítica (Gaud y Minet, 2019; Nicasso y Bosch, 2021), mientras que otras han documentado experiencias de implementación de REI en contextos de formación docente (García, 2021; Lobo y Almouloud, 2023; Rojas y Sierra, 2020). Otros han avanzado en el desarrollo de REI para otras áreas de la matemática como el álgebra o el análisis (Cid et al., 2020; Laplace et al., 2024). Dada la complejidad de los REI y la inminente necesidad de un cambio en la enseñanza habitual que contemple la geometría, en el marco de la enseñanza basada en el cuestionamiento se desarrollan las Actividades de Estudio e Investigación (AEI) (Barachet et al., 2007; Ferreyra, 2021; Reymonet, 2004), que en el marco de la TAD es una alternativa más viable para reencontrar obligatoriamente determinados saberes. Un REI permite una diversidad de recorridos, que entre estos logran una cobertura de un programa completo y más allá de este. Por tal motivo, esta propuesta se diferencia de los antecedentes mencionados

en varios aspectos. Por un lado, porque el REI diseñado permite cubrir los contenidos de una cátedra completa, que es geometría métrica del profesorado, incluyendo vínculos con los saberes de otras cátedras. Por otro lado, la elección de un dispositivo real, como es la fotocopidora, permitiendo la generación del cuestionamiento.

Nos proponemos entonces como objetivo de este trabajo presentar las características del diseño y análisis a priori de un REI, centrado en el estudio de la homotecia, con el fin de utilizarlo como recurso para la enseñanza de la geometría en la formación inicial de profesores de Matemática.

2. TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO Y RECORRIDOS DE ESTUDIO Y DE INVESTIGACIÓN

El referencial teórico adoptado es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (2013). En la TAD se identifican dos paradigmas antagónicos: el monumental que concibe a la enseñanza de saberes que se presentan, admiran y no se deconstruyen como si fueran monumentos, y en oposición un Paradigma emergente el de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM), que pone como punto de partida el cuestionamiento y el estudio profundo de dichas preguntas (Chevallard y Strømskag, 2022). El correlato de este último paradigma en el aula son los Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) (Chevallard, 2013) que son un dispositivo didáctico que permite generar procesos de estudio y de investigación a partir de una pregunta que se denomina generatriz Q_0 . Se dice que Q_0 es una pregunta en sentido fuerte porque como su nombre lo indica genera nuevos cuestionamientos y la investigación de los mismos, es decir el estudio en profundidad de las preguntas que derivan de ella. Según Chevallard (2009, 2013) un REI se define sintéticamente a partir del esquema herbartiano $[S(X;Y;Q_0) \rightarrow M] \rightarrow R^v$; donde S representa al sistema didáctico formado por: los estudiantes X, los profesores Y y la Q_0 . S construye y organiza ($\rightarrow$) el medio $M = \{R_n^\phi, Q_i, O_k, D_q\}$; donde R_n^ϕ son las respuestas hechas, disponibles en un libro, en internet, por ejemplo; Q_i son las preguntas que se derivan de Q_0 , O_k son las obras matemáticas o de otra disciplina que dan sentido a las respuestas R_n^ϕ y D_q algún conjunto de datos o trabajos empíricos útiles al medio M. Como resultado del estudio se espera generar ($\rightarrow$) una respuesta R^v que será la más acertada para el sistema, y que no se encuentra elaborada antes del estudio, es el resultado del mismo.

Como instrumento teórico el REI requiere de un diseño y un análisis a priori exhaustivo para que pueda ser implementado en un aula. El análisis a priori del REI se realiza mediante la construcción de lo que Chevallard (2013) denomina un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR), a partir del estudio de la pregunta generatriz Q_0 que es propuesta por los investigadores y analizada primero por éstos, a fin de considerar la pertinencia y los alcances del mismo. El MPR además permite a los investigadores anticipar las Organizaciones Matemáticas (OM) que podrían reconstruirse a partir de la identificación de posibles preguntas derivadas que llevarían al estudio y la reconstrucción de los saberes matemáticos que interesa reencontrar y reconstruir. En este trabajo, el MPR orienta tanto la identificación de las preguntas Q_i relevantes como el diseño de tareas potenciales, concebidas como dispositivos para hacer emerger determinadas técnicas y conocimientos vinculados al estudio de la homotecia. De este modo, la TAD no sólo fundamenta el marco teórico del estudio, sino que estructura el análisis a priori y justifica las decisiones de diseño del REI y de las tareas propuestas.

3. METODOLOGÍA

Se trata de una investigación cualitativa (Moreira y Rosa, 2009) desarrollada desde el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El objetivo de la investigación es presentar el diseño y el análisis a priori del REI que se origina con Q_0 : *¿Por qué una fotocopidora puede realizar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma?*, centrado en el estudio de la homotecia, con el fin de adaptarlo como recurso para la enseñanza de la geometría en la formación inicial de profesores de Matemática. El interés de esta investigación radica en el análisis de las condiciones que hacen posible la reconstrucción de determinadas OM a partir del REI. Por tal motivo el foco está puesto en el análisis a priori del mismo, mediante la reconstrucción del MPR y en la elaboración de un conjunto de tareas que permitan hacerlo funcionar en el aula, cuando se realicen las implementaciones del mismo. La investigación se centra en lo que se denomina la ingeniería didáctica del REI, que es propia de los estudios desarrollados en la TAD, motivo por el cual sintetizamos las fases que siguen:

1. Diseño de la pregunta generatriz Q_0 , considerando que deberá ser una pregunta en sentido fuerte que genere diferentes recorridos de estudio e investigación, y permita reconstruir

diferentes OM's del programa del profesorado, en particular la homotecia; una pregunta que no admita una respuesta inmediata, es decir que dé lugar a un estudio prolongado y que se vincule con un dispositivo real y no escolar, susceptible de ser problematizado matemáticamente (Rabanedo et. al, 2024). Con base en estos criterios, se seleccionó el funcionamiento de una fotocopidora como contexto problematizador, por su potencial para articular nociones de proporcionalidad, semejanza y profundizar en la homotecia, lo que dio lugar a la pregunta generatriz Q_0 para dar inicio al REI, para ser utilizado como desarrollo de producto didáctico (ingeniería del REI) y posteriormente implantarlo con profesores de formación inicial en la enseñanza de la geometría.

2. Elaboración del MPR y análisis didáctico *a priori* de las preguntas y saberes matemáticos, principalmente geométricos, que podrían reconstruirse con el REI. Diseño de tareas que podrían derivarse de las preguntas antes mencionadas para reencontrar dichos saberes. Este análisis permite anticipar las OM's que podrían emerger durante el desarrollo del REI, con especial énfasis en la homotecia como objeto matemático central. En esta fase se realiza, además, el diseño de un conjunto de tareas potenciales, entendidas como dispositivos didácticos que podrían introducirse en el estudio para favorecer la reconstrucción de las OM's identificadas en el MPR, en función de las necesidades que surjan del desarrollo del recorrido.
3. Corresponde en esta fase realizar la implementación del REI en el contexto de la formación de profesores de Matemática, específicamente en un Instituto Superior de Formación Docente (ISFD) de la provincia de Buenos Aires, donde la investigadora es la profesora.
4. Esta fase contempla el análisis *a posteriori* del REI. Sin embargo, este análisis, no forma parte del presente trabajo, ya que el artículo se centra exclusivamente en el diseño, el análisis *a priori* y la elaboración de las tareas que permitirían adaptar el REI al contexto.

Las fases 3 y 4 son las que motorizan este estudio porque el fin es llevar un REI al aula para estudiar homotecia y otros saberes de geometría en la formación de profesores. Los investigadores, como parte de la ingeniería, analizan el MPR para la cátedra de geometría métrica que es el contexto en el que se piensa implementar. La selección del contexto de implementación del REI (fase 3) y el análisis *a posteriori* (fase 4) se realizan con base en la fase 2, conforme avanza el estudio. En este artículo desarrollamos el análisis *a priori* del REI y el diseño y la justificación de las tareas para utilizarlo como recurso para enseñar geometría y, específicamente, homotecia en la formación de profesores en el contexto mencionado.

4. ANÁLISIS A PRIORI Y MPR DEL REI

El REI de la fotocopidora inicia con la pregunta generatriz Q_0 y se acompaña del panel frontal de una fotocopidora, como se muestra en la Figura 1.

Q_0 : ¿Por qué una fotocopidora puede realizar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma?

Figura 1. Panel frontal de la fotocopidora y funciones para ampliar o reducir una copia



Nota: Elaboración propia. Adaptado de información para el usuario de una fotocopidora.

Inicialmente consideramos cuatro preguntas que pensamos determinan algunos cuestionamientos posibles a la fotocopidora a partir de Q_0 :

- Q_1 : ¿Cuáles son las condiciones para que pueda ampliarse o reducirse una imagen sobre una hoja cualquiera?, teniendo en cuenta que según el tamaño de las hojas sobre las que la fotocopidora realiza la copia, serán las posibilidades para ampliar o reducir una imagen, conservando sus características, identificando que:
 - » Si las hojas poseen igual tamaño, el porcentaje de ampliación que se selecciona en la fotocopidora no debe superar la razón entre el lado menor de la hoja y el lado correspondiente de la imagen, mientras que para reducirla el porcentaje debe estar entre 0 y 100 %.
 - » Si las hojas poseen diferente tamaño y las imágenes conservan la misma superficie en ambas hojas, el porcentaje de ampliación o reducción será igual a la razón entre el lado menor de la hoja y el lado correspondiente de la imagen.
 - » Si las hojas tienen distinto tamaño y las imágenes no ocupan la misma superficie en las hojas, el porcentaje de ampliación o reducción cumple las mismas características que las mencionadas para ampliar y reducir una imagen sobre un papel de igual tamaño.
- Q_2 : ¿Cuáles son las condiciones de la hoja que debe considerarse para poder ampliar o reducir sobre ella una imagen, ocupando la mis-

Con Q_1 es posible reencontrar algunas cuestiones numéricas tales como porcentaje y proporcionalidad.

ma superficie que en la hoja original? En este caso, cambia el tamaño de la hoja sobre la que se amplía o reduce la imagen. Cada lado de la hoja puede expresarse mediante una función de variable real que puede ser afín o racional, y representa la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales. Considerar los distintos parámetros permitiría estudiar diferentes funciones.

- Q_3 : ¿Cómo justificar geoméricamente las condiciones de la hoja que debe considerarse para poder ampliar o reducir sobre ella una imagen, ocupando la misma superficie que en la hoja original? Los cambios en el tamaño de papel pueden explicarse y generalizarse considerando una homotecia de razón $k > 0$, donde k es la razón entre los lados de la hoja “de partida”. Las hojas homotéticas no sólo tendrán los lados correspondientes proporcionales, sino que el lado mayor de la nueva hoja se obtiene multiplicando el lado menor de la hoja original por la razón de homotecia al cuadrado, esto es: $|A'C'| = k^2 \cdot |AB|$; y el lado menor de la nueva hoja equivale al lado mayor de la hoja original, esto es: $|A'B'| = |AC|$. Este estudio reconstruiría la OM homotecia y otras, como teorema de Thales, proporcionalidad, segmentos, semirrectas y polígonos.

Las relaciones entre las hojas con las características antes mencionadas se verifican para cualquier sucesión de hojas, en particular para las hojas que son utilizadas por la fotocopidora: las hojas de las normas A, B y C de la serie DIN. Esta serie, denominada formalmente DIN 476, responde al sistema estandarizado ISO 216 que domina actualmente el rubro del papel en casi todo el mundo (Fraustro, 2014). Las hojas DIN se caracterizan por ser un rectángulo de proporción $\sqrt{2}$, donde cada una de las normas, comienza con la hoja A_0 , B_0 y C_0 , respectivamente y tienen la particularidad de que cada nueva hoja A_1 , A_2 , A_3 , ... por ejemplo para la serie A, se obtiene de la anterior al dividirla a la mitad o duplicarla, y tendrá la misma proporción.

También hay que considerar la relación entre dos hojas cualesquiera dentro de las series DIN, mediante una homotecia o composición de homotecias, según los casos:

- » Entre dos hojas dentro de una misma serie se tiene que: si son consecutivas resultan ser homotéticas de razón $k = \sqrt{2}$ (para refe-

rir a la anterior en la serie) o $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (para

referir a la posterior). Sin por ejemplo dos hojas equidistan dos posiciones (de A_3 a A_5) resultan ser homotéticas de razón $k^2 = \frac{1}{2}$, y también sería el caso de la A_4 a

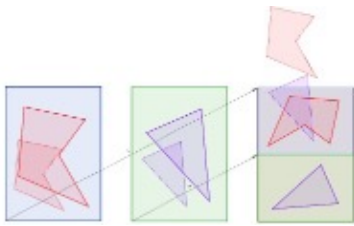
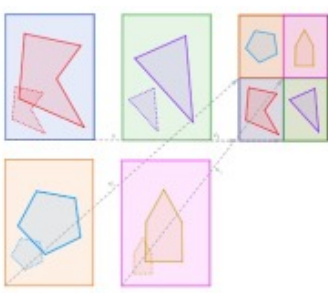
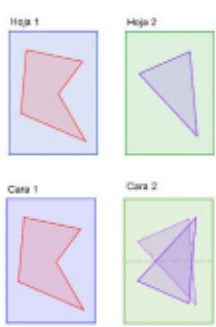
A_2 la razón es $k^2 = 2$. Entonces, dos hojas que equidistan i lugares resultan ser homotéticas de razón k^i .

- » Entre dos hojas de distinta serie se obtiene: la hoja B_n de la serie DIN-B calculando la media geométrica entre las medidas de las hojas A_n y A_{n+1} , con n la posición dentro de la serie. De manera análoga la hoja C_n se obtienen de calcular la media geométrica entre las medidas de las hojas A_n y B_n . De este modo, dos hojas A_n y B_n resultan ser homotéticas de razón $\sqrt[4]{2}$ y dos hojas A_n y C_n resultan ser homotéticas de razón $\sqrt[8]{2}$.

Esto da lugar al estudio de la composición de homotecias, media geométrica y diferentes construcciones a realizar con regla y compás. En todos los casos, los rectángulos que representan las hojas poseen proporción $\sqrt{2}$ y son un caso particular de la OM rectángulo dinámico. Si nos preguntamos ¿qué características tienen los rectángulos dinámicos?, estudiaríamos propiedades de números racionales e irracionales y la representación de $\sqrt{n}$ en la recta numérica, por ejemplo.

El análisis geométrico de Q_0 que hemos realizado hasta aquí prioriza la función de la fotocopidora que permite ampliar o reducir una imagen, conservando las características de la misma. Sin embargo, existen otras funciones en la fotocopidora, que permiten realizar otros tipos de copia (Tabla 1) que incluyen reducir dos o más originales a una hoja, y la impresión a doble cara.

Tabla 1. Otras funciones de la fotocopidora

Reduce y orienta los originales y los imprime en una hoja	Reduce los originales y los ajusta para copiar 4 en una hoja	Impresión a dos caras
		
Imágenes de dos hojas de igual tamaño se imprimen en una hoja del mismo tamaño (reducción de razón $\frac{1}{\sqrt{2}}$, seguida de una traslación y rotación de 90° en sentido horario).	Imágenes dadas en cuatro hojas de igual tamaño se imprimen en una hoja del mismo tamaño. Hay una reducción de razón $\frac{1}{(\sqrt{2})^2}$ seguida de una traslación.	Imágenes en dos hojas de igual tamaño, se imprimen a doble cara. La cara uno no cambiará, y la cara 2 tendrá una imagen simétrica respecto a la mediatriz al lado mayor.

Nota. Elaboración propia

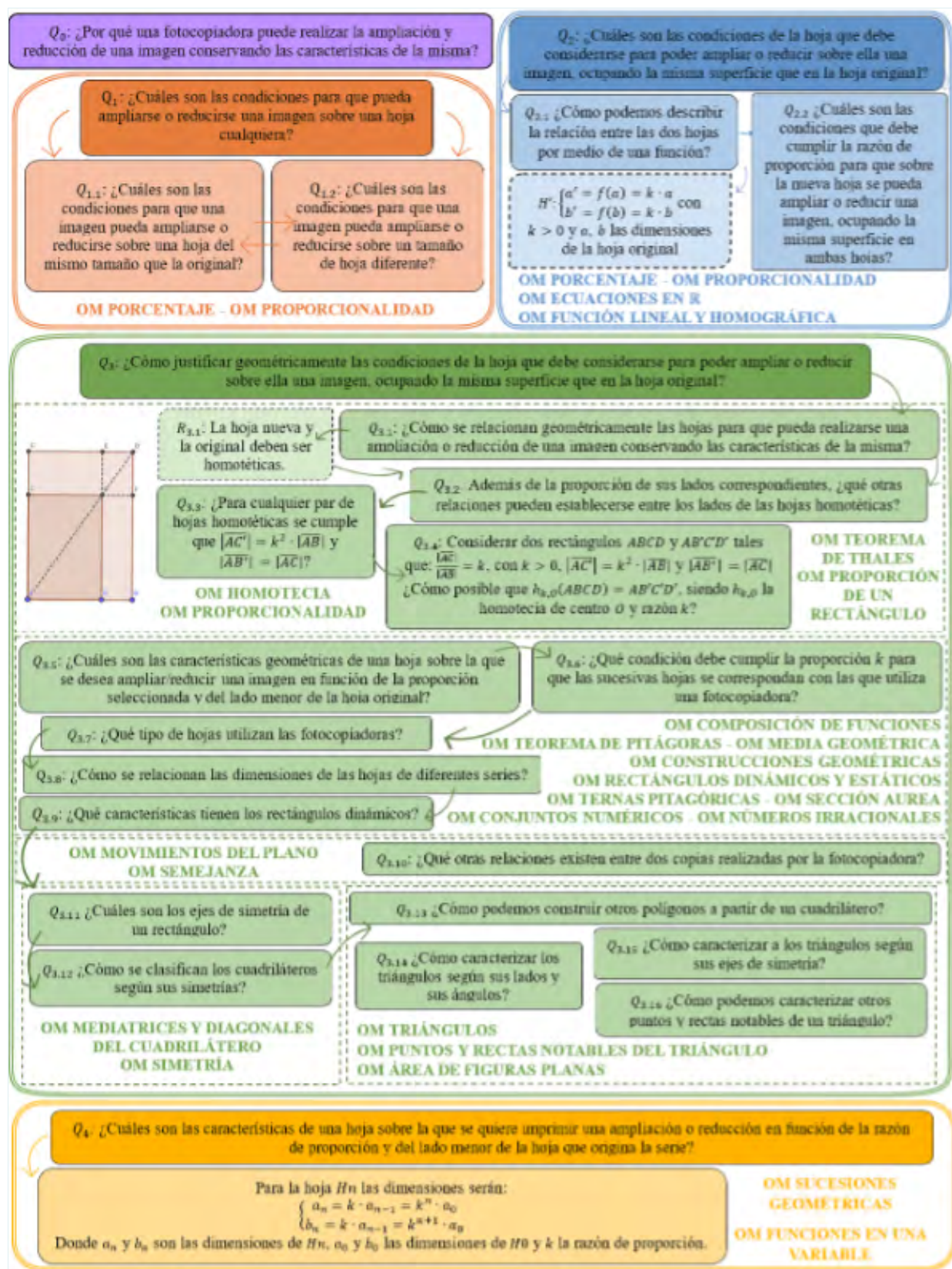
Las transformaciones geométricas que se combinan para cada una de las opciones de impresión permiten estudiar composición de isometrías y homotecia, lo que equivale a estudiar la semejanza entre las imágenes correspondientes.

De Q_3 , podrían derivarse otras preguntas como, por ejemplo, ¿cuáles son los ejes de simetría de un rectángulo? ¿cómo se clasifican los cuadriláteros según sus simetrías? ¿cómo caracterizar a los triángulos según sus ejes de simetría?, entre otras, que permitirían reconstruir otras OM (diagonales de un cuadrilátero, simetría, triángulos y rectas notables) que por una cuestión de espacio no desarrollamos aquí, pero se incluye el análisis en el MPR. Considerando las hojas sucesivas de las series estudiadas, con Q_2 y Q_3 también es posible ingresar en el estudio de las sucesiones geométricas, que pensamos se origina con Q_4 .

- Q_4 : ¿Cuáles son las características de una hoja sobre la que se quiere imprimir una ampliación o reducción en función de la razón de proporción y del lado menor de la hoja que origina la serie? Si la razón k entre los lados resulta ser $k > 1$, podrá imprimirse la ampliación de la imagen sobre las hojas sucesivas, y si $k < 1$ podrá reducirse la imagen. Es necesario para este análisis ingresar en el estudio de sucesiones

geométricas y funciones de variable real, tales como las polinómicas, exponenciales y logarítmicas.

Una síntesis de las cuatro preguntas que mencionamos que derivan de Q_0 (Q_1 , Q_2 , Q_3 y Q_4) y otras que se pueden desprender de éstas junto con las OM que podrían reconstruirse, se muestran en la Figura 2. Esto correspondería a una síntesis del MPR que contiene algunas OM que podrían reconstruirse con el REI, pero que de ninguna forma es definitivo, pues el alcance está determinado por las cuestiones que se puedan reencontrar.

Figura 2. Esquema que orienta el estudio de Q_0 

Nota: Elaboración propia.

5. ADAPTACIÓN DEL REI COMO RECURSO PARA ENSEÑAR

El REI propuesto, que denominamos de la fotocopiadora se origina y estructura a partir de la pregunta generatriz Q_0 : *¿Por qué una fotocopiadora puede realizar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma?* En el marco del PICM esta pregunta no se concibe como un problema a resolver de inmediato, sino como el punto de partida de un estudio prolongado. El estudio se inicia con la problematización del dispositivo real que es la fotocopiadora y las funciones de ampliación y reducción. A partir de la exploración del panel digital y de los porcentajes disponibles, emergen preguntas relativas a la proporcionalidad entre los lados de las hojas, la relación entre los diferentes formatos y también la conservación de la forma de la imagen, etc. Estas primeras indagaciones dan lugar a lo que denominamos las preguntas derivadas, que amplían el campo de estudio hacia las OM de interés: homotecia, semejanza, composición de transformaciones y las construcciones sintéticas con regla y compás, entre otras que puedan aparecer en el contexto. Aquí la homotecia constituye la OM central del REI, sin embargo, el REI no se reduce al estudio aislado de este objeto, sino que articula otras OM como hemos mencionado antes.

El funcionamiento del REI no es lineal ni predeterminado: las preguntas derivadas pueden aparecer en distinto orden según el desarrollo del estudio. En este proceso, el profesor asume el rol del director del estudio, orientando la formalización de los saberes cuando las condiciones lo requieren, y promoviendo la reconstrucción progresiva de las OM identificadas en el MPR. En este sentido, el REI se concibe como un dispositivo abierto, cuya trayectoria efectiva dependerá de las preguntas que se formulen y de las decisiones didácticas que se adopten en el aula. El conjunto de tareas diseñadas no define el recorrido, sino que constituye un repertorio potencial para sostener el estudio cuando ciertas organizaciones matemáticas deban ser reconstruidas o institucionalizadas.

Adaptamos el REI para implementarlo en un curso de Didáctica de la Matemática con Profesores de Matemática en Formación, donde el investigador es el profesor. Se selecciona este contexto con el objetivo de dar a los futuros profesores la oportunidad de vivir una enseñanza en el nuevo paradigma, que incluya los conocimientos matemáticos de la carrera, a la vez que otorga sentido a la geometría de la formación y específicamente al estudio de la homotecia, que ha sido un proble-

ma identificado en la enseñanza en el nivel para el que se están formando estos estudiantes del profesorado.

Agregamos que las tareas diseñadas no constituyen el REI en sí mismo, sino que éstas se derivan de las preguntas contextualizadas identificadas en el MPR. Éstas se conciben como dispositivos didácticos potenciales que podrían incorporarse al estudio cuando la reconstrucción de determinadas OM lo requiera. De este modo, su función es sostener el medio del REI, sin determinar de manera lineal su desarrollo. Cada tarea elaborada entonces, es una primera aproximación al estudio de las preguntas del REI, y la inserción de las mismas en la clase dependerá de la forma que adopte el estudio por los diferentes recorridos que se desprendan de Q_0 . Diseñamos 11 tareas, que potencialmente serán útiles a la ecología del REI en el contexto de la formación de profesores.

Tarea 1

Tenemos una imagen que ocupa toda la superficie de una hoja y se desea ampliarla o reducirla sobre otra hoja, de manera tal que también ocupe el total de la superficie de ésta. Para ello, disponemos de una fotocopidora que sólo trabaja con las hojas A3, A4 y A5 de la serie DIN-A y con las hojas B3 y B4 de la serie DIN-B. Como se observa en la imagen, en el panel frontal la fotocopidora muestra diferentes porcentajes para pasar de una hoja a otra. ¿Cómo podemos justificar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma?

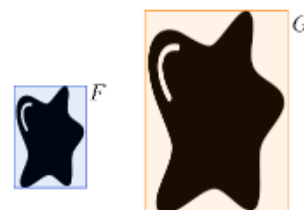


Nota: Elaboración propia

Es posible y deseable que aparezcan otras preguntas que son relevantes para el estudio como, por ejemplo: ¿qué significa que la imagen conserve sus características? ¿cómo es posible justificar la ampliación o la reducción de una figura? ¿qué características tienen las hojas DIN-A y DIN-B? ¿cuál es la relación entre A3, A4, A5, B3 y B4? Con la tarea 2 se espera que los futuros profesores identifiquen los porcentajes que permiten ampliar o reducir una imagen y consideren valores de proporción que no estén expresados en porcentaje.

Tarea 2

Dadas dos hojas F y G , tales que la imagen de G se corresponde con una ampliación realizada de la imagen en F , en otro tamaño de hoja por la fotocopidora. ¿Cuáles de los porcentajes que se muestran en la fotocopidora permiten realizar la ampliación de esta imagen? ¿Y los que permitirían realizar ahora la reducción de la imagen de G nuevamente a la imagen de F ? ¿Qué otras funciones de la fotocopidora permiten ampliar una imagen de manera tal que se imprima sobre una hoja cuyas dimensiones se obtienen al multiplicar cada lado de la hoja original por $\sqrt{2}$? ¿Cuáles de las hojas utilizadas por la fotocopidora permiten realizar una ampliación empleando dicha función?



Nota: Elaboración propia

Con la Tarea 2 se establece la relación entre los lados de las hojas y el porcentaje utilizado por la fotocopidora: para ampliar una imagen sobre una hoja cuyas dimensiones se obtienen al multiplicar cada lado de la hoja original por $\sqrt{2} \cong 1,41 \dots$ el botón a utilizar es el de 141%. Al preguntar por las hojas necesarias para realizar una ampliación con dicho botón aparece explícitamente en el panel que las hojas deben ser $A4 \rightarrow A3$ o $A5 \rightarrow A4$. Sin embargo, también sería posible realizar una ampliación de $B4$ a $B3$, lo cual no aparece en el panel frontal de la fotocopidora, pero podría surgir este cuestionamiento. Esta tarea, involucra algunas OM que se estudian en el tramo de formación, como por ejemplo porcentaje y proporcionalidad.

El objetivo de las tareas 3 y 4 es investigar las características de las hojas DIN, estableciendo las relaciones entre dos de ellas.

Tarea 3

Si consideramos que la fotocopidora sólo trabaja con las hojas A3, A4 y A5 de la serie DIN-A y con las B3 y B4 de la serie DIN-B. ¿Cómo podemos relacionar las dimensiones de dos hojas consecutivas cualesquiera de las series DIN-A y DIN-B respectivamente?

Nota: Elaboración propia

En el panel frontal de la fotocopidora aparecen funciones que relacionan dos hojas DIN-A consecutivas: los porcentajes 71% ($A3 \rightarrow A4$ o $A4 \rightarrow A5$) y 141% ($A4 \rightarrow A3$ o $A5 \rightarrow A4$). Sin embargo, para generalizar esta relación, es necesario considerar las dimensiones de dos hojas cualesquiera y la forma en que cada hoja se relaciona con la anterior. Así, las dimensiones de las hojas A_{n+1} serán:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{b_n}{2} \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}, \text{ con } \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \sqrt{2} \text{ y } a_n \text{ y } b_n \text{ son las di-}$$

mensiones de A_n .

Este análisis requiere ser recuperado en la tarea 4, que aparece a continuación, con la cual sería posible reconstruir y vincular cuestiones numéricas y de geometría, como proporcionalidad, semejanza y punto medio de un segmento.

Tarea 4

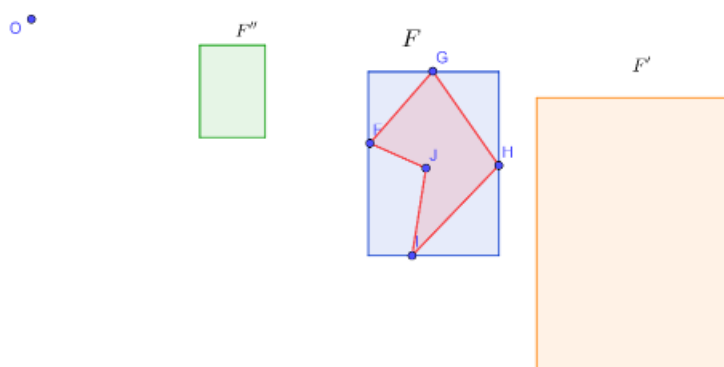
Dadas dos hojas A_n y A_{n+1} , y una imagen que ocupa la totalidad de la A_{n+1} ¿por qué y cómo la fotocopidora permite realizar una ampliación de una imagen dada en la hoja A_{n+1} a otra en la hoja A_n ? ¿y una reducción entre A_n y A_{n+1} ? ¿qué ocurre con dos hojas consecutivas de la serie DIN-B? ¿Qué función de la fotocopidora permitiría realizar una ampliación o reducción de una imagen entre dos hojas A_n y B_n ?



Nota: Elaboración propia

En esta tarea hay que tener en cuenta que los lados correspondientes de dos hojas consecutivas de la misma serie son proporcionales, y lo mismo ocurre con los lados correspondientes de dos hojas A_n y B_n que ocupan la posición n en ambas series. Como las hojas además de tener los lados proporcionales poseen los ángulos congruentes, entonces geométricamente se corresponderían con figuras que son homotéticas. Se espera entonces un primer estudio en profundidad de la OM homotecia, lo que seguramente requiera de una salida del tema de la fotocopidora para estudiar homotecia y luego continuar con las preguntas vinculadas a Q_0 . Esta acción es un gesto reconocido en el PICM y en el contexto para el que se piensa el REI implicaría reencontrar también diferentes OM de otra cátedra, Geometría métrica que en el programa incluye el trazado de rectas y semirrectas, circunferencias, rectas paralelas, dirección de una semirrecta, entre otras vinculadas al estudio de los aspectos centrales de la homotecia. Además, este estudio de la homotecia requerirá ingresar en construcciones geométricas sintéticas en lápiz y papel, que justifiquen lo antes analizado con el teclado visible de la fotocopidora y que serán esenciales para estudiar con la tarea que sigue.

Tarea 5

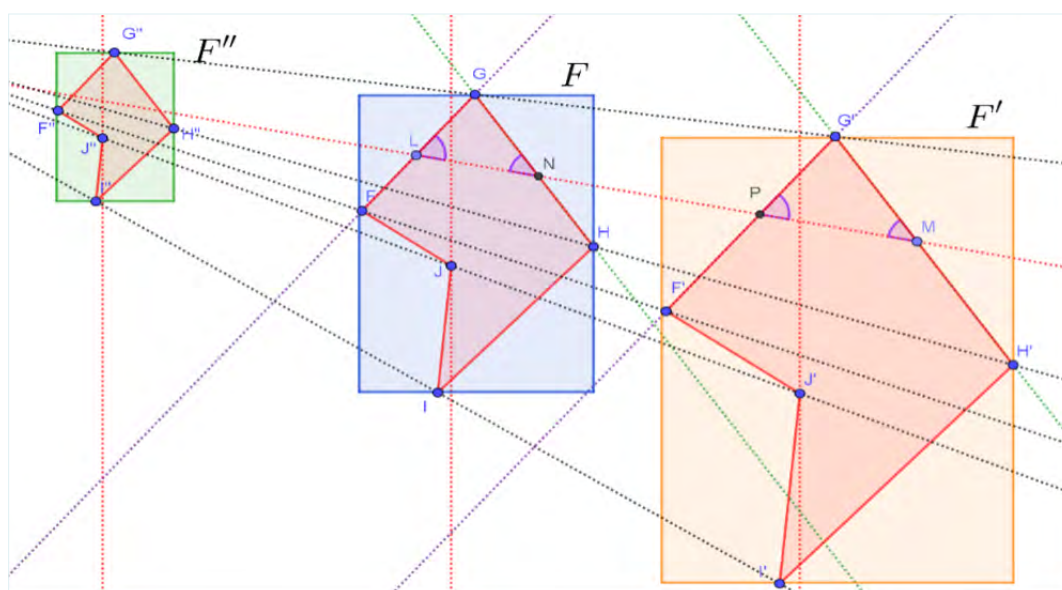


Dado un polígono sobre la hoja F , el centro de homotecia O y la hoja F' . ¿Cuáles son las construcciones geométricas que justifican la figura ampliada de la hoja F por la fotocopidora sobre la hoja F' ? ¿Y si la Fotocopiadora realiza una reducción del polígono de la hoja F a la otra hoja F'' ?

Nota: Elaboración propia

En la Figura 3 hay un esbozo de las propiedades geométricas para construir el polígono ampliado y el reducido. Con relación a los lados, sería posible demostrar que sus lados correspondientes son proporcionales utilizando el teorema de Tales y el paralelismo de las rectas; y con relación a los ángulos también podría demostrarse que todos los pares de ángulos homólogos son congruentes; por ejemplo, si se considera la recta que pasa por los puntos L y M que es transversal a las rectas $\overline{LG}$ y $\overline{PG'}$ (figura 3), las cuales son paralelas, y entonces los ángulos $\widehat{GLN}$ y $\widehat{G'PM}$ son congruentes. También la recta $\overline{LM}$ es transversal a las rectas $\overline{GN}$ y $\overline{G'M}$, que son paralelas, y entonces los ángulos $\widehat{LNG}$ y $\widehat{PMG'}$ son congruentes. Los puntos L, G y N y P, G' y M forman dos triángulos con dos pares de lados congruentes, entonces también son congruentes los ángulos del polígono $\widehat{LNG}$ y $\widehat{PMG'}$. De esta manera, es posible reconstruir además las OM's congruencia entre ángulos, paralelismo y transversalidad entre rectas, y con ello sectores angulares determinados por dos paralelas y una transversal, e incluso otros polígonos que no son rectángulos.

Figura 3. Representación de hojas y figuras homotéticas.

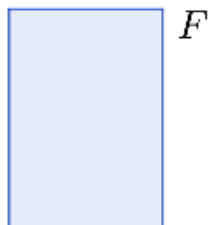


Nota: Elaboración propia.

Con la tarea 6 sería posible ingresar en el estudio de la razón de homotecia, homotecias directas e inversas. A la vez se relaciona la razón de homotecia con las funciones de la fotocopidora.

Tarea 6

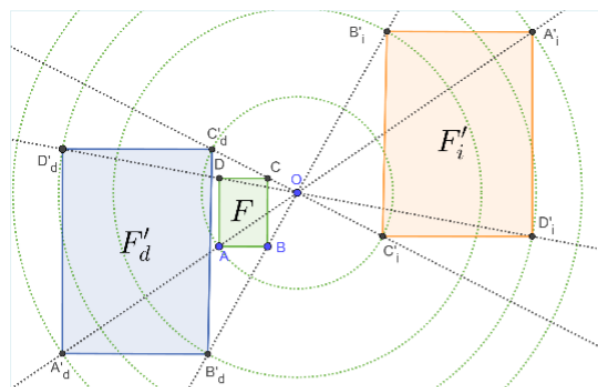
Teniendo en cuenta que la razón de homotecia se relaciona con los porcentajes del panel de la fotocopidora y dada una hoja cualquiera F , ¿cómo podemos construir con regla y compás una hoja homotética $F' = h_{k,O}(F)$? ¿Cómo es posible realizar con la fotocopidora una ampliación de una imagen que ocupa la hoja completa, de razón $k = \sqrt[4]{2}$ a partir de una hoja A4? ¿Y una reducción de razón $k = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$ sobre una hoja A4?



Nota: Elaboración propia

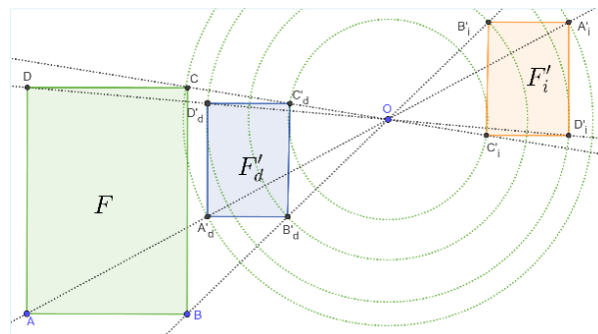
La construcción con regla y compás de la figura F' requiere considerar diferentes posibilidades para el centro O y para k , de manera que la homotecia resulte inversa o directa. En la Figura 4 se muestra la figura original F y dos imágenes homotéticas F' directa (F'_d) e inversa (F'_i) para $|k| > 1$. La construcción de los vértices del rectángulo de F' (que nombramos X en general) se obtienen de reproducir k veces el segmento $\overline{OX}$ sobre la semirrecta $\overline{OX'}$ con origen en O y sentido positivo o sentido negativo. Sin embargo, cuando $|k| < 1$ debemos considerar un segmento $\overline{OX'}$ que puede obtenerse al dividir en k partes iguales el segmento $\overline{OX}$ y para ello será necesario utilizar el teorema de Tales. Una representación de la reducción se muestra en la Figura 5.

Figura 4. Ampliación



Nota: Elaboración propia

Figura 5. Reducción



Nota: Elaboración propia

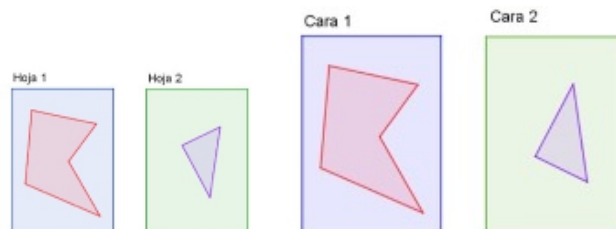
Si se considera una razón $k = \sqrt[4]{2}$ ($k \cong 1,189 \dots$), se tiene una homotecia directa que permite ampliar la hoja, pues el porcentaje que debe seleccionarse en la fotocopidora es 119% y la hoja que debe utilizarse para imprimir dicha imagen ampliada es una B4. Además, si $k = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$ ($k \cong 0,594 \dots$)

y la hoja sobre la que se imprime es A4, entonces la hoja original será B3, y se aplicará una reducción al 59% de la imagen original en el panel de la fotocopidora.

La tarea 7 también requiere considerar casos de razones positivas y negativas, más allá de los porcentajes de la fotocopidora, pues en el concepto de homotecia se involucran ambas posibilidades y la fotocopidora no queda exenta.

Tarea 7

Dadas dos hojas de tamaño A5, se desea ampliar cada una de ellas y colocarlas en una única hoja doble faz tamaño A4 ¿Cómo es posible que en la fotocopidora se pueda obtener la Cara 1 y la Cara 2 como se muestra a continuación, a partir de la Hoja 1 y la Hoja 2, respectivamente?

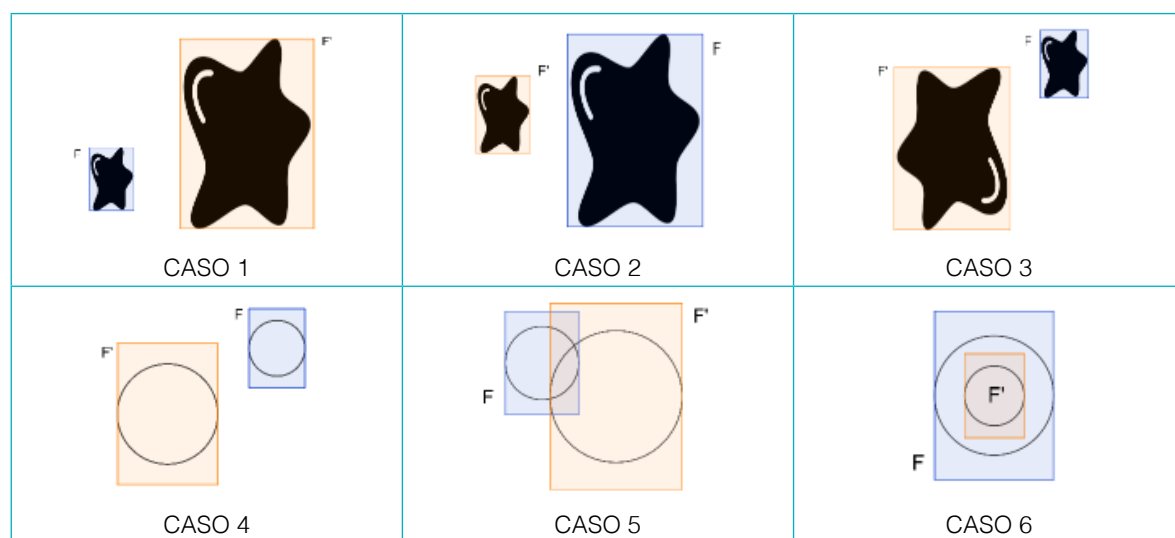


Nota: Elaboración propia

En esta tarea es necesario considerar el signo de la razón de homotecia y también la composición entre una homotecia y una simetría, lo que permitiría estudiar la homotecia vinculada a los movimientos del plano, y a la semejanza. Con la tarea 8 agregamos el caso del estudio del centro de una homotecia, y se pide obtener la razón; describiendo las funciones de la fotocopidora que permitirían realizar cada tipo de impresión.

Tarea 8

Suponga que F y F' representan dos hojas tales que F' posee la imagen ampliada o reducida de la imagen original F . ¿Cómo podemos hallar el centro O y cuál sería la expresión para la razón k de homotecia tal que $F' = h_{k,O}(F)$? ¿Cómo podemos justificar cada una de estas impresiones utilizando las funciones de la fotocopidora?



Nota: Elaboración propia

La orientación de la imagen impresa sobre la hoja determina si las homotecias son directas o inversas. Trazando las rectas que pasan por los vértices homólogos, podrá hallarse el punto de intersección entre ellas O que corresponde al centro de la homotecia y la razón

$$|k| = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|C'B'|}{|CB|} = \frac{|D'C'|}{|DC|} = \frac{|A'D'|}{|AD|}$$

En el caso 1 (Figura 6) se tiene una homotecia directa que amplía ($k > 1$) y que, en la fotocopidora, corresponde a porcentajes mayores al 100%. En el caso 3, hay homotecia inversa que amplía el tamaño de la imagen ($k < -1$) (Figura 7). En la fotocopidora, esta ampliación sólo es posible si consideramos porcentajes mayores al 100% y alguna de las hojas se coloca "al revés". Entonces, se tendría una homotecia compuesta con una simetría.

Figura 6. Homotecia directa con ampliación

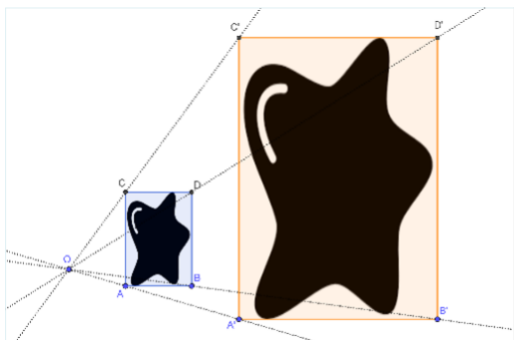
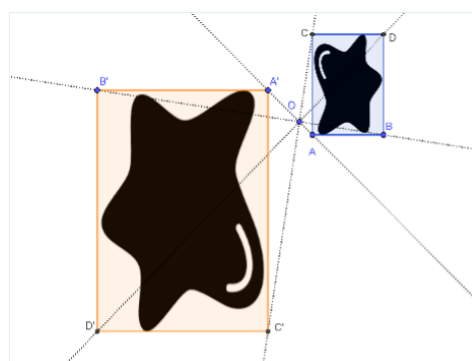


Figura 7. Homotecia inversa con ampliación



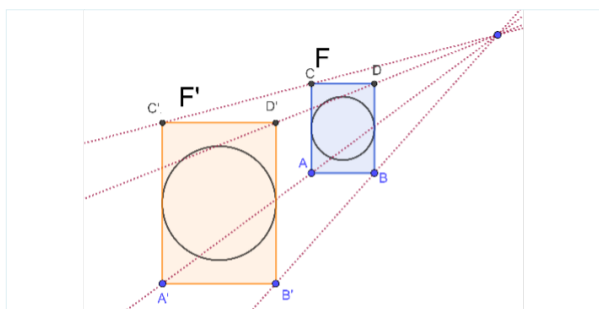
Nota: Elaboración propia

En el caso 4 la imagen en F' es la ampliación ($|k| > 1$) de la imagen en F , y puede ser directa o inversa, pues la circunferencia será la misma sin importar cómo se tomen los vértices. En la Figura 8 vemos que para la homotecia directa geoméricamente los puntos homotéticos se encuentran al mismo lado respecto al centro de homotecia y en la inversa dichos puntos están situados en los lados opuestos al centro de homotecia; sin embargo, en la fotocopidora dependerá de la orientación que se dé a las hojas. A diferencia del caso 4, en el caso 6 como las figuras son concéntricas el centro de homotecia coincide y la homotecia es única.

Figura 8. Homotecias directa e inversa

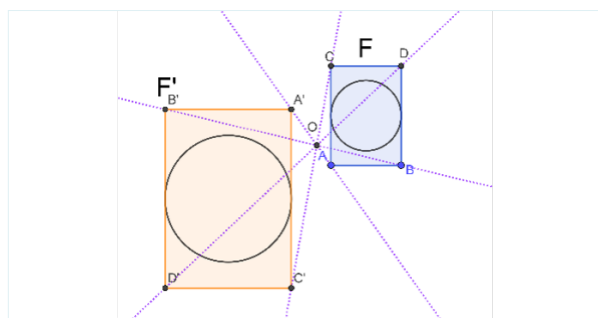
Homotecia directa

$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|C'B'|}{|CB|} = \frac{|D'C'|}{|DC|} = \frac{|A'D'|}{|AD|}$$



Homotecia inversa

$$k = -\frac{|A'B'|}{|AB|} = -\frac{|C'B'|}{|CB|} = -\frac{|D'C'|}{|DC|} = -\frac{|A'D'|}{|AD|}$$



Nota: Elaboración propia

Con las tareas que siguen, introducimos el problema de analizar las acciones de la fotocopidora desde el punto de vista geométrico, para determinar cómo se pasaría a la selección de cualquier hoja de la serie DIN cuando se solicita una ampliación o reducción de una imagen. La composición de homotecias y el valor de la razón de dicha composición son conceptos centrales para este estudio.

Tarea 9

¿Cómo podemos obtener el porcentaje que utiliza la fotocopidora para realizar las siguientes ampliaciones o reducciones: $A4 \rightarrow A5$, $B4 \rightarrow A4$, $A5 \rightarrow A3$, $B4 \rightarrow A3$, $B4 \rightarrow A5$, $A2 \rightarrow B3$? ¿Cuáles son las hojas de las series DIN-A y DIN-B que podrían utilizarse con cada uno de los siguientes porcentajes 25%, 59%, 119%, 141%, 400%?

Nota: Elaboración propia

Esta tarea permite estudiar los porcentajes del panel frontal de la fotocopidora en términos de potencias de $\sqrt{2}$ y calcularlos considerando la razón de una composición de homotecias. Por ejemplo, para pasar de $A2 \rightarrow B3$, hay que considerar una hoja intermedia, como puede ser $A3$, entonces la razón de $A2 \rightarrow A3 \rightarrow B3$ será $k = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{2} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ($k \cong 0,84\dots$); y por lo tanto el porcentaje que debe seleccionarse en el panel

de la fotocopidora es 84%. Además, si se quiere averiguar qué hojas involucran la reducción de una imagen utilizando, por ejemplo, el 25% podemos considerar que la razón será $k = 0,25 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$ y per-

mitiría pasar de $A_n \rightarrow A_{n+4}$, y análogamente $B_n \rightarrow B_{n+4}$.

A diferencia de la tarea anterior, con la 10 proponemos estudiar geoméricamente la composición de homotecias y las diferentes posibilidades que se obtienen al componer dos homotecias, según la posición de las imágenes.

Tarea 10

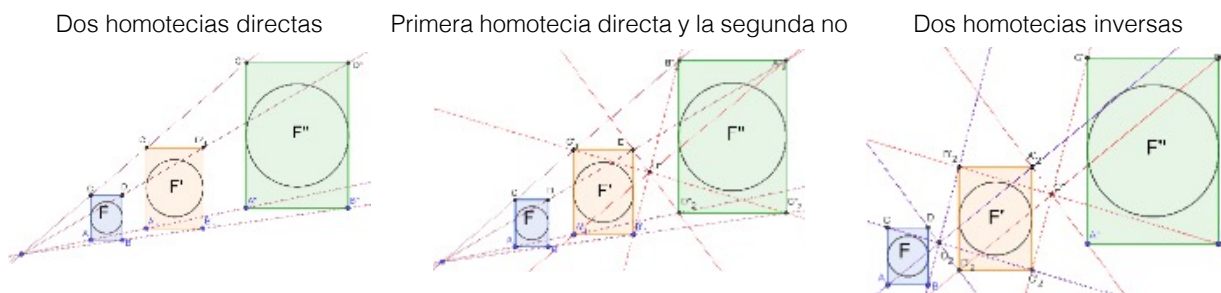
Dadas las hojas F , F' y F'' tales que $F' = h_{k,O'}(F)$ y $F'' = h_{k'',O''}(F')$ ¿Cómo podemos encontrar las diferentes posiciones de los centros O , O' y O'' y cuáles serían los respectivos valores de k , k' y k'' , si las homotecias también verifican que $F'' = h_{k'',O''}(F)$? ¿Cómo podemos justificar cada una de estas impresiones utilizando las funciones de la fotocopidora?



Nota: Elaboración propia

Para el caso 3, se observan tres posibilidades (Figura 9). La primera corresponde a dos homotecias directas e iguales, es decir, coinciden el centro y el valor de la razón, y por lo tanto los puntos homotéticos se encuentran al mismo lado respecto al centro de homotecia. Otra posibilidad es que una de las homotecias sea directa y la otra inversa, en cuyo caso los centros serán colineales y uno de ellos quedará en el centro de ambas hojas, y una de las hojas que se corresponde con la homotecia inversa fue colocada en la fotocopidora al revés. Finalmente, si ambas homotecias son inversas, ambos centros son colineales y se encuentran en el centro de cada una de las hojas homotéticas; en la fotocopidora, la hoja de partida y la hoja de salida poseen igual orientación, mientras que la que se utilizó entre ellas fue orientada diferente.

Figura 6. Posibilidades de las homotecias



Nota: Elaboración propia

La tarea 11 profundiza el estudio de las hojas de la serie DIN vinculadas a la composición de homotecias y considera otro tipo de hoja, que utilizan las fotocopadoras y hasta ahora no se había contemplado, como es el caso de la hoja oficio.

Tarea 11

Suponiendo que se dispone de una fotocopadora que permite utilizar cualquier tipo de hoja, ¿cómo es posible ampliar o reducir una imagen en la fotocopadora utilizando un porcentaje distinto al que se muestra en el panel? ¿Cómo es posible ampliar o reducir una imagen en la fotocopadora sobre un formato de hoja oficio?

Nota: Elaboración propia

En esta tarea se estudia la composición de homotecias, combinando los distintos botones de la fotocopadora, es decir las distintas razones de homotecia, para obtener la ampliación o reducción deseada. Es posible considerar las siguientes posibilidades, algunas de las cuales ya fueron estudiadas en las tareas previas:

- $A_n \rightarrow A_{n+1}$ y $B_n \rightarrow B_{n+1}$: $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $A_{n+1} \rightarrow A_n$ y $B_{n+1} \rightarrow B_n$: $k = \sqrt{2}$
- $B_n \rightarrow A_n$: $k = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ y $A_n \rightarrow B_n$: $k = \sqrt[4]{2}$
- $A_n \rightarrow A_{n+i}$ y $B_n \rightarrow B_{n+i}$: $k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^i$, con i los lugares que equidistan en la serie.
- $A_{n+i} \rightarrow A_n$ y $B_{n+i} \rightarrow B_n$: $k = (\sqrt{2})^i$, con i los lugares que equidistan en la serie.
- $A_n \rightarrow B_{n+i}$: Considerando la composición $A_n \rightarrow B_n \rightarrow B_{n+i}$, se tiene $k = \frac{1}{\sqrt[4]{2^{2i-1}}}$.

Específicamente, se verifica para $A_3 \rightarrow B_4$ con $k = \frac{1}{\sqrt[4]{2^{2-1}}} \cong 84\%$

- $B_{n+i} \rightarrow A_n$: $k = \sqrt[4]{2^{2i-1}}$, y se verifica para $B_4 \rightarrow A_3$
- $B_n \rightarrow A_{n+i}$: $k = \frac{1}{\sqrt[4]{2^{1+2i}}}$ y se verifica para $B_3 \rightarrow A_4$
- $A_{n+i} \rightarrow B_n$: $k = \sqrt[4]{2^{1+2i}}$ y se verifica para $A_4 \rightarrow B_3$

Para pasar, por ejemplo, de una hoja A4 a una oficina, seleccionamos el porcentaje que surge al considerar la razón entre los dos lados menores de ambas hojas, esto es 93%, que es la función de la fotocopidora que hasta ahora no se había indagado. Si la imagen está en otro tamaño, bastará ampliar o reducir sobre una A4 y luego sobre la hoja oficina e ingresar manualmente el porcentaje en la fotocopidora.

6. DISCUSIONES

Los REI vienen a resolver el problema de la pérdida de sentido y razón de ser de los saberes de matemática a reencontrar que, en general o habitualmente, los profesores muestran a sus alumnos en el aula, y éstos practican y reproducen lo que les fue mostrado en otros casos, pero se desconoce el por qué y para qué habría que estudiar un tal saber matemático. Como parte del proceso de ingeniería del REI, nos hemos propuesto una pregunta generatriz relativa al funcionamiento de la fotocopidora, y no sólo basta con analizar los alcances y la pertinencia al contexto para el que el REI se piensa, sino que es necesario analizar qué saberes podrían reencontrarse y cuáles serían posible estudiar. Para garantizar un estudio en profundidad de geometría y específicamente homotecia, pensamos un conjunto de tareas que hemos diseñado para implementar el REI en la formación de profesores de Matemática de un ISFD de la provincia de Buenos Aires, con una doble intención: por un lado acercar a los futuros profesores a una enseñanza en el marco del PICM en un curso de Didáctica de la Matemática, y por otro dar la oportunidad de reencontrar los saberes de geometría desde otro lugar, en dicho curso. Las tareas son relativas a las posibles preguntas que consideramos podrían desarrollarse según el MPR del REI, que derivan del estudio geométrico del problema (Q_3 : ¿Cómo justificar geoméricamente las condiciones de la hoja que debe considerarse para poder ampliar o reducir sobre ella una imagen, ocupando la misma superficie que en la hoja original?) y de otras preguntas que están vinculadas y corresponden al análisis de Q_1 : ¿Cuáles son las condiciones para que pueda ampliarse o reducirse una imagen sobre una hoja cualquiera? y Q_2 : ¿Cuáles son las condiciones de la hoja que debe considerarse para poder ampliar o reducir sobre ella una imagen, ocupando la misma superficie que en la hoja original?

- Derivadas de Q_1 y Q_2 :
 - » $Q_{1.2.1}$: ¿Cuáles son las condiciones para que una imagen pueda ampliarse o reducirse sobre un tamaño de hoja diferente, si la imagen ocupa toda la hoja?
 - » $Q_{2.2}$: ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir la razón de proporción para que sobre la nueva hoja se pueda ampliar o reducir una imagen, ocupando la misma superficie en ambas hojas?
- Derivadas de Q_3 :
 - » $Q_{3.1}$: ¿Cómo se relacionan geoméricamente las hojas para que pueda realizarse una ampliación o reducción de una imagen conservando las características de la misma?
 - » $Q_{3.2}$: Además de la proporción de sus lados correspondientes, ¿qué otras relaciones pueden establecerse entre los lados de las hojas homotéticas?
 - » $Q_{3.7}$: ¿Qué tipo de hojas utilizan las fotocopadoras?
 - » $Q_{3.8}$: ¿Cómo se relacionan las dimensiones de las hojas de las diferentes series?
 - » $Q_{3.10}$: ¿Qué otras relaciones existen entre dos copias realizadas por la fotocopidora?

En la Tabla 2 se presenta un análisis que contrasta las preguntas Q_i y las obras O_k que pueden reencontrarse en cada tarea.

Tabla 2. OMs que podrían reencontrarse en cada tarea y preguntas Q_i que responden

Q_0: ¿Por qué una fotocopidora puede realizar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma?			
Tarea	Preguntas Q_i que responde		Obras O_k
	Derivadas de Q_3	Derivadas de Q_1 y Q_2	
1	$Q_{3.7}$	$Q_{1.2.1}$	Porcentaje
2	$Q_{3.7}$ y $Q_{3.1}$	$Q_{1.2.1}$ y $Q_{2.2}$	Proporcionalidad. Porcentaje
3	$Q_{3.1}$, $Q_{3.2}$, $Q_{3.7}$ y $Q_{3.8}$		Proporcionalidad. Semejanza
4	$Q_{3.7}$ y $Q_{3.8}$		Proporcionalidad. Cálculo de media geométrica
5			Construcción con regla y compás de puntos y segmentos homotéticos, teorema de Thales, paralelismo entre rectas homotéticas, congruencia de ángulos internos de dos figuras homotéticas.
6	$Q_{3.1}$ y $Q_{3.8}$		Cálculo de la razón de homotecia, construcción con regla y compás de segmentos homotéticos.
7	$Q_{3.10}$		Homotecia directa e inversa. Simetría.
8	$Q_{3.1}$ y $Q_{3.10}$		Construcción del centro de homotecia. Homotecia directa e inversa. Razón de homotecia.
9	$Q_{3.8}$		Razones y porcentaje. Composición de homotecias y cálculo de su razón
10	$Q_{3.1}$ y $Q_{3.8}$		Construcción del centro de una composición de homotecias. Relación entre los tres centros de homotecia
11	$Q_{3.7}$ y $Q_{3.8}$		Composición de homotecia. Razón entre los lados homotéticos

Nota. Elaboración propia

El análisis de las tareas muestra la posibilidad de adaptar el REI para implementarlo en un curso de Didáctica de la Matemática para profesores en formación en un ISFD de la provincia de Buenos Aires, Argentina.

Además, dicho análisis permite sostener que el REI diseñado presenta características diferenciales respecto de otros previamente documentados (Nicasso y Bosch, 2021; Gaud y Minet, 2019; Rojas y Sierra, 2020; García, 2021; Lobo y Almouloud, 2023). En particular en este caso, poner el uso de un dispositivo real como es la fotocopidora como generador del estudio a partir de Q_0 configura un

medio con fuerte potencial problematizador que no sólo permitiría la cobertura integral de las OMs correspondientes a la cátedra de geometría métrica del profesorado, sino que podría incorporar vínculos con otras asignaturas que es el espíritu del PICM. Pero además los resultados se pueden poner en diálogo con otras investigaciones que evidencian una reducción de los saberes de geometría en la escuela secundaria (Bravo y Riofrío, 2024; Pérez y Guillén, 2007), e incluso su progresiva desaparición en el aula (Eugui, 2023). En este sentido, el REI propuesto se constituye como una alternativa que permite reintroducir la homotecia no como objeto aislado o monumentalizado, sino

como respuesta a preguntas que exigen la reconstrucción de este saber junto con otras nociones de geometría y de otras áreas si se quisiera avanzar.

Por otro lado, introducir un REI en la formación de profesores, podría contribuir a transformar su concepción de la enseñanza por estar sometidos a un nuevo paradigma escolar y vivir esa experiencia en primera persona a la vez que podría contribuir a transformar la relación institucional con la geometría, dado que consideramos que el hecho de reducir y hasta eliminar la geometría de las clases de matemática responde a una decisión deliberada de los profesores, tal vez sea porque no han tenido oportunidad de que sea parte de su formación. El REI de la fotocopidora en la formación de profesores permitiría reivindicar el estudio completo de la homotecia, articulado con otros saberes geométricos, a fin de que los futuros profesores puedan superar la idea de que los temas de geometría, y de otras áreas de la matemática, están descontextualizados, aislados y desarticulados entre sí. Así mismo, las 11 tareas que diseñamos muestran que sería posible utilizar el REI como recurso para desarrollar una enseñanza basada en preguntas y cuestionamientos en la formación de los profesores, reencontrando la OM homotecia y otras OM de geometría que permiten justificar geoméricamente cómo es posible que la fotocopidora realice la ampliación o reducción de una imagen. Se espera ampliar las tareas que hemos diseñado para adaptar el REI a fin de estudiar con ellas una mayor cantidad de OM y cubrir otros saberes del profesorado a la vez que se daría respuesta a otras Q_i que forman parte del MPR del REI.

7. CONCLUSIONES

En términos teóricos implementar un REI implica llevar una pregunta al aula, y generar procesos de estudio y de investigación a partir de la misma que permitan una cobertura lo más completa posible de las obras de un programa. Aquí sin embargo hemos diseñado un conjunto de tareas que harían funcionar el REI, pero que sólo podrán considerarse para ser utilizadas si la pregunta generatriz Q_0 da lugar a las preguntas derivadas para las cuáles específicamente se propone una tarea que “saca a la luz” la matemática implicada en el funcionamiento de la fotocopidora. Este estudio a priori del REI, y el diseño de potenciales tareas a incluir en el aula, permite identificar los diferentes saberes matemáticos, y de geometría, que se podrían reconstruir con base en el cuestionamiento de la fotocopidora.

Por otro lado, implementar un REI como el que proponemos en los cursos de formación de profesores permitiría a los estudiantes vivenciar una enseñanza por REI, “rompiendo” con la habitual y acercándolos a un nuevo paradigma, el PICM. Además, se espera que los futuros profesores adopten gestos de una enseñanza por investigación, invitándolos a cuestionarse sobre la matemática, particularmente la geometría que deben enseñar, y brindándoles herramientas para incorporar a sus futuras prácticas. La implementación de este REI permitirá generar resultados sobre su funcionamiento, y poner el recurso a disposición de profesores para utilizarlo tanto para enseñar geometría en el nivel medio o superior, como para dar a conocer en la formación de profesores las características del paradigma emergente en oposición al habitual.

8. REFERENCIAS

- Barachet, F., Demichel, Y. & Noirfalise, R. (2007). Activités d'étude et de recherche (AER) pour dynamiser l'étude de la géométrie dans l'espace en classe de seconde. *Petit x*, (75), 34-49.
- Bravo, F. & Riofrio, E. (2024). Clases constructivistas de Geometría. *UISRAEL*, 11(2), 159-172. <https://doi.org/10.35290/rcui.v11n2.2024.1082>
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad del mañana: alegato a favor de un contraparádigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161-182. <http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2013.26>
- Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta*, 20(1), 159-169.
- Chevallard, Y. & Strømskag, H. (2022). Condições de uma transição para o paradigma do questionamento do mundo. *Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático*, 1, 27-58.
- Chevallard, Y. & Strømskag, H. (2025). Institutional and epistemological conditions for a transition to the paradigm of questioning the world. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC)*, 20(NE), 1-17. <https://doi.org/10.54343/reiec.v20iEspecial.514>.
- Cid, E., Muñoz, J. & Ruiz, N. (2020). La introducción de los REI en la formación de profesores: un ejemplo de REI-FP. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4), 646-660. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p.646-660>
- Eugui, N. (2023). Enseñanza de la geometría en la escuela secundaria: análisis de los diseños curriculares de los últimos 160 años [Tesis de Licenciatura]. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. <https://www.ridaa.unicen.edu.ar/handle/123456789/4087>
- Ferreira, M. (2021). La construcción de fórmulas: una articulación entre geometría y álgebra. *Quintaesencia*, 12(1), 103-114. <https://doi.org/10.54943/rq.v12i1.41>
- Fraustro, G. (2014). Evolución en las medidas de los papeles y su estandarización. *Revista Brasileira de Design da Informação*, 11(2), 166-184. <https://doi.org/10.51358/id.v11i2.321>
- García, D. (2021). Um percurso de estudo e pesquisa a distância em uma formação continuada de professores de matemática para o ensino de quadriláteros [Tesis de Doctorado]. Pontificia Universidade Católica de São Paulo. <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/23674>
- Gaud, D. & Minet, N. (2019). Parcours d'étude et de recherche en Géométrie pour la classe de seconde. *Petit x*, (79), 49-70.
- Laplace, E., Otero, M. & Llanos, V. (2024). El álgebra escolar y la modelización en la escuela secundaria a partir de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI). *RevIn*, 5, 1-25.
- Lobo, R. & Almouloud, S. (2023). Percurso de estudo e pesquisa: um dispositivo de pesquisa e formação profissional. *Educação Matemática Pesquisa*, 25(2), 278-328. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i2p278-328>
- Moreira, M & Rosa, P. (2009). Subsidios Metodológicos para el Profesor Investigador en Enseñanza de las Ciencias. <http://moreira.if.ufrgs.br/Subsidios12.pdf>
- Nicasso, R. & Bosch, M. (2021). Descripción y análisis de un Recorrido de Estudio e Investigación en geometría. *Caminhos da educação matemática em revista*, 11(1).
- Pérez, S. & Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. En M. Camacho Machín, P. Flores Martínez, y P. Bolea Catalán (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 295-305). SEIEM.
- Rabanedo, P. & Llanos, V. (2024). La homotecia en el tiempo: Transformaciones de este saber. VIII Jornadas de Educación Matemática y V Jornadas de Investigación en Educación Matemática.
- Rabanedo, P., Llanos, V., Otero, M. & Gazzola, M. (2024). El REI "de la fotocopidora" como propuesta para enseñar geometría: diseño y análisis a priori. V Congresso Paulista de Ensino de Ciências.
- Reymonet, C. (2004). Un cadre experimental pour l'étude de la géométrie Au cycle 3 : le cas du parallélisme. *Grand N*, (73), 33-48.
- Rojas, C. & Sierra, T. (2020). Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación. *Educación Matemática*, 33(1), 208-239. <https://doi.org/10.24844/EM3301.08>



ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

MOTIVACIÓN DOCENTE PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CONTEXTOS INDÍGENAS WIXÁRIKA: CONFIGURACIONES SITUADAS DE VALORES, EXPECTATIVAS Y COSTOS DESDE EL MODELO SEVT

TEACHER MOTIVATION IN MATHEMATICS TEACHING IN WIXÁRIKA INDIGENOUS CONTEXTS: SITUATED CONFIGURATIONS OF VALUES, EXPECTATIONS AND COSTS THROUGH THE SEVT FRAMEWORK

Misael Omar García

garciamisaelomar98@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0005-3982-5901>

Universidad Autónoma de Nayarit

María Inés Ortega Arcega

maria.arcega@uan.edu.mx

<https://orcid.org/0000-0002-1058-8106>

Universidad Autónoma de Nayarit

José Trinidad Ulloa Ibarra

jtulloa@uan.edu.mx

<https://orcid.org/0000-0002-6382-7588>

Universidad Autónoma de Nayarit

RESUMEN

Este artículo examina la motivación docente para enseñar matemáticas en una comunidad wixárika serrana de San Miguel Huaixtita (Mezquitic, Jalisco), marcada por bilingüismo sin materiales, multigrado con apoyos limitados y baja contextualización curricular. Se realizó un estudio cualitativo interpretativo de caso múltiple con 10 docentes de primaria y telesecundaria –modalidad mexicana de educación secundaria orientada principalmente a contextos rurales y comunidades de difícil acceso–. Los datos se recopilaban mediante entrevistas semiestructuradas, orientadas por la Situated Expectancy-Value Theory (SEVT) y se analizaron a través de un enfoque de análisis temático que permitió la codificación y construcción de patrones. Los resultados muestran que la motivación opera como un sistema situado de expectativas, valores y costos: la mediación lingüística condiciona el acceso conceptual y eleva la carga de preparación; el valor de utilidad y el valor de logro/identidad sostienen el sentido de la tarea al conectarla con prácticas comunitarias y el futuro escolar; y los costos estructurales (recursos, conectividad, reforma, trayectos y vida familiar) reconfiguran decisiones didácticas. Se identificaron repertorios de regulación docente para mantener la enseñanza bajo restricciones y diferencias por nivel educativo. Se discuten implicaciones para políticas de materiales bilingües, formación situada y apoyos institucionales.

Palabras Clave:

motivación docente; educación indígena; enseñanza de las matemáticas; SEVT; costos

ABSTRACT

This article examines teacher motivation for teaching mathematics in a Wixárika mountain community in San Miguel Huaixtita (Mezquitic, Jalisco, Mexico), characterized by bilingual instruction without adequate materials, multigrade teaching with limited support, and low curricular contextualization. A qualitative interpretive multiple-case study was conducted with 10 teachers from primary education and telesecundaria –a Mexican lower-secondary modality mainly oriented toward rural contexts and hard-to-access communities–. Data were collected through semi-structured interviews informed by Situated Expectancy-Value Theory (SEVT) and were analyzed using thematic analysis to identify codes and patterns. The findings show that motivation operates as a situated system of expectations, values, and costs: linguistic mediation shapes conceptual access and increases preparation demands; utility value and attainment/identity value sustain the meaning of the task by linking it to community practices and students' educational futures; and structural costs (resources, connectivity, reform demands, travel, and family life) reconfigure instructional decisions. Repertoires of teacher regulation used to sustain teaching under constraints, as well as differences across educational levels, were identified. Implications are discussed for bilingual materials policies, context-responsive teacher education, and institutional support.

Keywords:

teacher motivation; Indigenous education; mathematics teaching; SEVT; costs

1. INTRODUCCIÓN

En regiones indígenas de México, la escolarización se desarrolla en un marco de desigualdades persistentes que impactan la disponibilidad de recursos, la organización escolar y las oportunidades de aprendizaje, particularmente en localidades serranas y de difícil acceso (Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social [CONEVAL], 2022; Instituto de Información Estadística y Geográfica de Jalisco [IIEG], 2019; Plan Estatal Jalisco, 2021). En el norte de Jalisco, el municipio de Mezquitic concentra población wixárika y una geografía que intensifica los desafíos de la vida escolar por la dispersión territorial, las vías de comunicación y la provisión irregular de servicios, condiciones que repercuten en las trayectorias educativas y en la continuidad de los procesos de enseñanza (IIEG, 2019; Plan Estatal Jalisco, 2021). En ese escenario, la enseñanza de las matemáticas queda atravesada por tensiones estructurales que, combinadas, delimitan las posibilidades reales de una enseñanza con sentido y sostenibilidad: (a) bilingüismo sin materiales ni dispositivos didácticos suficientes en lengua originaria, lo que desplaza hacia el profesorado el trabajo de traducción y mediación entre registros lingüísticos y matemáticos, y puede limitar el acceso conceptual cuando el currículo opera predominantemente en español (Despagne, 2013; Romo-Vázquez, 2025; Santibáñez, 2016); (b) multigrado con apoyos limitados, donde la simultaneidad de grados y la carga de preparación reducen el tiempo disponible para planificar tareas retadoras y diferenciadas, y tienden a aumentar el esfuerzo fuera de aula para adaptar materiales diseñados para lógica monogrado (Ares-Ferreirós et al., 2025; Carrete-Marín et al., 2024; Little, 1995); y (c) un currículo con baja contextualización, que con frecuencia ofrece escaso margen para reconocer prácticas comunitarias y saberes locales como recursos formativos, pese a su potencial para anclar significado, participación y pertinencia cultural en el aprendizaje matemático (Nigh y González Cabañas, 2018; Toribio Rodríguez et al., 2021).

Aunque estas condiciones han sido descritas como “problemas del sistema” (recursos, organización escolar, política lingüística), existe menor evidencia sobre cómo se traducen en un sistema motivacional situado del profesorado cuando enseña matemáticas en contextos indígenas específicos; en particular, sobre cómo se configuran, en interacción, las expectativas, los valores y los costos en situaciones reales de aula, y cómo esa configuración sostiene o erosiona la continuidad de

la práctica docente (Eccles y Wigfield, 2020; Day, 2020; Jud et al., 2023). Desde la Situated Expectancy-Value Theory (SEVT), la motivación se comprende como un sistema dinámico y contextual en el que las expectativas de éxito, la valoración de la tarea y los costos anticipados o experimentados se organizan y reconfiguran ante restricciones institucionales, demandas profesionales y condiciones socioculturales del entorno (Eccles y Wigfield, 2020). Estudios recientes han subrayado que el costo no es un componente residual, sino un eje que interactúa con expectativas y valores para explicar la sostenibilidad del esfuerzo docente, especialmente en escenarios de alta exigencia y cambio instruccional en matemáticas (Day, 2020; Jud et al., 2023). Sin embargo, gran parte de estos desarrollos proviene de contextos no indígenas, y rara vez se articula empíricamente cómo lo lingüístico, lo organizativo (multigrado) y lo curricular se expresan como configuraciones motivacionales al enseñar matemáticas en comunidades wixárika (Despagne, 2013; Eccles y Wigfield, 2020).

En consecuencia, este artículo analiza la configuración de la motivación docente para la enseñanza de las matemáticas en docentes wixárika de primaria y de telesecundaria (modalidad mexicana de educación secundaria implementada principalmente en zonas rurales y de difícil acceso) de una comunidad serrana de San Miguel Huaixtita (Mezquitic, Jalisco), atendiendo a: (1) qué expectativas de éxito reportan para distintos contenidos y situaciones de enseñanza; (2) qué valores (de utilidad, de logro/identidad e interés) sostienen su práctica y cómo se conectan con propósitos profesionales y comunitarios; y (3) qué costos (de preparación, emocionales, de tiempo y estructurales) reconocen como determinantes al sostener la enseñanza en condiciones de restricción (Eccles y Wigfield, 2020; Day, 2020; Jud et al., 2023). Metodológicamente, se realizó un estudio cualitativo interpretativo con base en 10 entrevistas semiestructuradas a docentes; el análisis se organizó mediante matrices por caso y una síntesis transversal, recurriendo al análisis temático para la codificación y construcción de patrones (Braun y Clarke, 2006). Las preguntas que orientan el estudio son: ¿cómo describen las y los docentes sus expectativas de éxito para enseñar matemáticas en condiciones de bilingüismo, multigrado y baja disponibilidad de materiales?, ¿qué valores atribuyen a enseñar matemáticas y cómo se enlazan con trayectorias escolares y fines comunitarios?, ¿qué costos identifican como más determinantes y cómo impactan su agencia pedagógica?, y ¿qué estrategias despliegan para sostener la enseñan-

za y proteger el aprendizaje en un entorno de restricciones? (Day, 2020; Jud et al., 2023).

La contribución principal del artículo consiste en interpretar la evidencia empírica en términos de configuraciones SEVT: patrones situados en los que expectativas, valores y costos se articulan como un sistema coherente que se activa ante tensiones del contexto, en lugar de aparecer como componentes aislados o como un suplemento periférico del trabajo docente (Eccles y Wigfield, 2020). Esta perspectiva permite precisar cómo el bilingüismo sin materiales, el multigrado sin apoyo y el currículo no contextualizado operan simultáneamente como condiciones y como mecanismos motivacionales: elevan costos, modulan expectativas, reordenan valores y, a la vez, delimitan márgenes de decisión pedagógica. Con ello, el artículo aporta un lenguaje analítico para discutir qué significa “apoyo” en términos concretos, materiales pertinentes, condiciones de trabajo, acompañamiento pedagógico y reconocimiento de la dimensión lingüística y cultural como parte del núcleo de la enseñanza de matemáticas y no únicamente como expectativa normativa o apelación a la “vocación” individual (Eccles y Wigfield, 2020; Santibáñez, 2016).

2. MARCO TEÓRICO

La comprensión de la motivación docente para enseñar matemáticas en contextos indígenas requiere un marco teórico que permita analizar, de manera integrada, lo que el profesorado cree que puede lograr, lo que valora de su tarea y los costos que anticipa o experimenta al sostener su práctica. En este trabajo, el referente central es la Teoría de la Expectativa-Valor en su formulación contemporánea como Situated Expectancy-Value Theory (SEVT), propuesta por Eccles y Wigfield, que concibe la motivación como un sistema dinámico y situado: las expectativas, los valores y los costos se configuran en interacción con condiciones institucionales, culturales y sociolingüísticas del contexto (Eccles y Wigfield, 2020; Wigfield y Eccles, 2000). Esta perspectiva resulta particularmente pertinente para estudiar la docencia en matemáticas en entornos serranos wixárika, en los que enseñar implica negociar tensiones recurrentes asociadas al bilingüismo sin materiales, el multigrado sin apoyos consistentes y un currículo frecuentemente distante de las prácticas comunitarias.

Desde SEVT, la expectativa de éxito alude a la creencia del sujeto sobre su probabilidad de rea-

lizar con eficacia una tarea específica (Eccles y Wigfield, 2020). Trasladada al ámbito docente, esta dimensión se expresa en juicios sobre la propia capacidad para planear, explicar, adaptar y evaluar contenidos matemáticos en condiciones reales de aula, incluyendo escenarios de heterogeneidad por grados, ritmos y lenguas. En contextos de reforma o de alta presión por resultados, la expectativa de éxito se vincula con percepciones de autoeficacia y competencia profesional, pero también con la lectura que el profesorado hace de lo que el sistema considera “enseñanza efectiva” y de los recursos disponibles para alcanzarla. En estudios aplicados a la enseñanza de matemáticas, se ha mostrado que EVT/SEVT permite identificar cómo las creencias docentes y las demandas del entorno instruccional se traducen en decisiones pedagógicas, especialmente cuando el profesorado percibe que sus aspiraciones de enseñanza chocan con restricciones externas (Day, 2020).

El segundo componente es el valor de la tarea, que en SEVT se desagrega en al menos tres facetas con alto rendimiento analítico para la docencia: valor intrínseco, valor de logro (o de identidad/importe personal) y valor de utilidad (Eccles y Wigfield, 2020; Wigfield y Eccles, 2000). El valor intrínseco refiere al interés, disfrute o satisfacción inherente a enseñar matemáticas: el gusto por el razonamiento, por “hacer comprender” o por proponer desafíos significativos. El valor de logro se relaciona con la importancia de hacerlo bien porque expresa quién soy como docente; se conecta con identidad profesional, estándares personales y compromiso moral. En contextos indígenas, esta faceta puede integrarse con responsabilidades comunitarias y con la obligación ética de sostener la escolaridad como bien colectivo. El valor de utilidad, por su parte, se refiere a la relevancia percibida de enseñar matemáticas para metas futuras del estudiantado y de la comunidad (por ejemplo, acceso a oportunidades educativas, manejo de recursos, lectura del mundo material). En investigaciones recientes con profesorado y con formación docente, SEVT también ha mostrado su potencia para distinguir objetos de valoración (matemáticas como disciplina, enseñar matemáticas, o el tipo de matemáticas que se enseña) y para reconstruir cómo estos valores cambian cuando el profesorado enfrenta exigencias curriculares, evaluativas y contextuales (Gildehaus et al., 2024; Rach et al., 2024).

Un aporte decisivo de la literatura contemporánea es la centralidad del componente costos percibidos, que ya no se trata como un “residuo” del

modelo, sino como un elemento estructurante de la motivación, especialmente en escenarios de alta demanda (Eccles y Wigfield, 2020). Los costos abarcan, al menos, costo de esfuerzo (tiempo, energía, preparación), costo de oportunidad (lo que se deja de hacer por sostener la tarea) y costo psicológico o emocional (estrés, desgaste, frustración, temor a no cumplir expectativas institucionales) (Flake et al., 2015; Jiang et al., 2018). En la docencia de matemáticas, estos costos pueden emerger cuando el profesorado anticipa que innovar o contextualizar implica mayor carga de planeación; cuando el multigrado exige simultaneizar niveles; o cuando el bilingüismo sin materiales obliga a traducir, adaptar y mediar significados matemáticos sin apoyos. La evidencia empírica con docentes sugiere que, aun cuando existan valores altos hacia una práctica (por ejemplo, enseñanza reformada o centrada en el razonamiento), los costos anticipados pueden inhibir su implementación y reordenar prioridades pedagógicas (Day, 2020). En la misma línea, investigaciones con profesorado muestran que expectativas, valores y costos se asocian de manera sistemática con conductas profesionales deseadas (por ejemplo, promover autorregulación del aprendizaje), subrayando que el análisis motivacional requiere contemplar simultáneamente los tres componentes y sus interacciones (Jud et al., 2023).

Un aspecto medular en SEVT es su énfasis en el carácter situado de la motivación: el sistema de expectativas-valores-costos se forma y transforma mediante procesos de socialización, experiencias previas, normas institucionales, disponibilidad de recursos y marcos culturales que definen qué cuenta como “buena enseñanza” y qué se considera valioso aprender (Eccles y Wigfield, 2020). Por ello, para abordar la enseñanza de matemáticas en contexto wixárika, resulta pertinente incorporar elementos del enfoque sociocultural que permitan describir cómo la motivación docente se entrelaza con prácticas lingüísticas, pertenencia comunitaria y criterios de pertinencia cultural. En particular, la discusión sobre pertinencia cultural en educación ha resaltado que la enseñanza de calidad, en contextos históricamente marginados, no puede reducirse a la transmisión eficiente de contenidos: requiere reconocer identidades, lenguajes, historias y formas de participación que sostienen el aprendizaje y la dignidad del estudiantado (Ladson-Billings, 1995; Paris, 2012). En matemáticas, esta pertinencia se concreta en decisiones sobre ejemplos, contextos, explicaciones y formas de argumentación que hagan inteligibles los conceptos sin deslegitimar los saberes locales.

De manera complementaria, la literatura sobre lenguaje y educación matemática ha mostrado que el aula es un espacio donde el lenguaje opera como recurso epistémico y como frontera de inclusión/exclusión. En contextos multilingües, no se trata solo de “traducir términos”, sino de sostener el acceso a significados matemáticos mediante repertorios lingüísticos y semióticos múltiples, con atención a relaciones de poder entre lenguas y a las políticas escolares que regulan su uso (Barwell et al., 2007; Planas, 2018). En esta línea, se ha argumentado que asumir el lenguaje como recurso en lugar de déficit permite comprender cómo docentes y estudiantes movilizan prácticas bilingües para construir sentido matemático, aunque dichas prácticas estén tensionadas por currículos y evaluaciones monolingües (Planas y Setati-Phakeng, 2014). Asimismo, trabajos recientes discuten cómo el significado matemático se produce en interacción con las posibilidades lingüísticas del aula y con los marcos institucionales que autorizan o restringen ciertas formas de decir y participar (Barwell, 2018). Para este estudio, tales aportes ayudan a conceptualizar el bilingüismo didáctico como un campo de decisiones profesionales que impacta directamente expectativas (qué tan posible es enseñar), valores (por qué vale la pena) y costos (qué implica sostenerlo).

3. MARCO METODOLÓGICO

El estudio se desarrolló bajo un enfoque cualitativo de orientación interpretativa, pertinente para comprender en profundidad los significados, valoraciones y tensiones que el profesorado construye en torno a la enseñanza de las matemáticas en un contexto indígena wixárika. Desde esta perspectiva, el interés no es estimar magnitudes ni generalizar estadísticamente, sino reconstruir cómo las y los docentes interpretan su práctica y qué sentidos atribuyen a sus decisiones y experiencias en interacción con condiciones situadas de trabajo (Braun y Clarke, 2006). En congruencia con ello, se adoptó un diseño de estudio de caso múltiple, que permitió analizar comparativamente un conjunto de casos (10 docentes) que comparten un mismo contexto comunitario serrano y, a la vez, presentan variaciones relevantes para el fenómeno estudiado (nivel educativo, modalidad de atención y prácticas de mediación lingüística), favoreciendo la identificación de patrones comunes y contrastes entre casos.

El caso se delimitó en la comunidad de San Miguel Huaixtita (Mezquitic, Jalisco) y la unidad de análisis fue la motivación docente para la enseñanza de las matemáticas, conceptualizada desde

la Situated Expectancy-Value Theory (SEVT). En SEVT, la motivación se comprende como un sistema situado de expectativas de éxito, valores de la tarea (valor intrínseco, valor de utilidad y valor de logro/identidad) y costos percibidos, configurado por condiciones socioculturales e institucionales del contexto (Eccles y Wigfield, 2020). Esta decisión teórica orientó tanto el diseño del instrumento como la estrategia analítica, al permitir articular, en un mismo marco, dimensiones profesionales, valorativas y estructurales que intervienen en el sostenimiento de la enseñanza en condiciones de bilingüismo, multigrado y disponibilidad limitada de materiales.

Como técnica principal de producción de datos se utilizó una entrevista semiestructurada, diseñada con base en las dimensiones de la SEVT (Eccles y Wigfield, 2020). El guion incluyó preguntas para explorar: (a) creencias sobre la posibilidad de lograr aprendizajes matemáticos (expectativas); (b) valores atribuidos a enseñar matemáticas (intrínseco, utilidad y logro/identidad); (c) costos anticipados o experimentados (esfuerzo, tiempo,

costos de oportunidad y tensiones emocionales/familiares); y (d) condiciones situadas que modelan dichas dimensiones (bilingüismo y prácticas lingüísticas de aula, organización multigrado, apoyos institucionales, disponibilidad de materiales y pertinencia cultural). El carácter semiestructurado aseguró comparabilidad temática entre entrevistas sin restringir la emergencia de matices propios de cada trayectoria docente y de cada experiencia de aula.

El guion de entrevista semiestructurada estuvo conformado por 25 preguntas principales, organizadas en bloques temáticos vinculados con las dimensiones analíticas del estudio. En correspondencia con la SEVT, se consideraron preguntas orientadas a explorar expectativas de éxito, valores de la tarea y costos percibidos; adicionalmente, se incluyeron preguntas sobre condiciones situadas del contexto wixárika y sobre la práctica didáctica de matemáticas, con el fin de comprender la motivación docente en su configuración concreta. La Tabla 1 presenta la organización general del guion.

Tabla 1. Dimensiones analíticas, propósitos de indagación y preguntas de la entrevista semiestructurada

Dimensión analítica	Propósito de indagación	Preguntas
Datos contextuales y condiciones situadas	Caracterizar el contexto escolar, la organización del servicio, las condiciones de trabajo y el entorno institucional en que se desarrolla la enseñanza de las matemáticas.	P1. ¿Cuántos alumnos atiende por grado y cómo se organiza su aula: monogrado, multigrado o telesecundaria? P2. Describa un día típico desde que sale de casa hasta que termina la jornada escolar. P17. ¿Qué apoyos recibe de colegas, directivos o autoridades para la enseñanza de matemáticas? P18. ¿Ha sentido discriminación o falta de reconocimiento por trabajar en la sierra? ¿Cómo lo maneja?
Expectativas de éxito	Explorar las creencias docentes sobre su capacidad para enseñar matemáticas, anticipar desempeños y favorecer aprendizajes en su alumnado.	P3. Al planear una clase de matemáticas, ¿cómo anticipa usted el desempeño de sus estudiantes? ¿Qué indicadores usa? P4. ¿Qué temas de matemáticas le generan más confianza al enseñar y cuáles le preocupan? ¿Por qué? P5. Cuando un alumno no entiende un concepto, ¿hasta dónde cree que puede intervenir para que lo logre? P6. Piense en un logro reciente de sus estudiantes en matemáticas. ¿Qué factores atribuye a ese éxito? P24. ¿Qué formación o actualización considere indispensable para mejorar su enseñanza de matemáticas aquí?
Valor intrínseco	Indagar el interés, disfrute, satisfacción o desgaste asociados con la enseñanza de las matemáticas.	P7. ¿Qué emociones surgen en usted durante una clase que avanza bien? Relate una anécdota positiva. P8. ¿Hay momentos en que enseñar matemáticas le resulte aburrido o desgastante? ¿En qué circunstancias?
Valor de logro / identidad	Analizar la importancia personal, profesional y cultural que el profesorado atribuye a enseñar matemáticas.	P9. ¿Cómo conecta la enseñanza de matemáticas con su identidad personal o profesional? P10. ¿Qué significado tiene para usted que sus alumnos aprendan matemáticas en su lengua materna: wixárika o español?

Valor de utilidad	Explorar la relevancia atribuida a la enseñanza de las matemáticas para la vida comunitaria, el futuro del alumnado y la trayectoria profesional docente.	P11. ¿De qué manera cree que las matemáticas aportan al futuro de sus alumnos en su comunidad? P12. ¿Qué beneficios profesionales o académicos percibe al trabajar en esta región?
Costos percibidos	Identificar costos de esfuerzo, tiempo, oportunidad y desgaste emocional asociados con la enseñanza en contexto serrano.	P13. ¿Qué impacto tiene la distancia o el trayecto diario en su preparación y energía durante las clases? P14. ¿Cómo afecta su labor aquí a su vida familiar o proyectos personales? P15. ¿Ha enfrentado riesgos de salud, seguridad o clima que condicionen su enseñanza?
Condiciones socioculturales y lingüísticas	Comprender cómo el contexto wixárika, la lengua y la cultura intervienen en la enseñanza de las matemáticas.	P16. ¿Cómo integran usted y sus alumnos las tradiciones wixárikas en los ejemplos o problemas matemáticos? P21. ¿Qué papel juega la lengua wixárika/español al explicar conceptos como fracciones o área?
Práctica didáctica de matemáticas	Explorar estrategias de enseñanza, resolución de problemas, evaluación y relación con el currículo oficial.	P19. Describa una actividad de matemáticas que le haya funcionado especialmente bien con su grupo. P20. ¿Cómo aborda usted la resolución de problemas cuando el material concreto o tecnológico es limitado? P22. ¿Cómo evalúa el aprendizaje matemático de sus alumnos? Instrumentos, frecuencia y retroalimentación. P23. ¿Qué retos enfrenta para cubrir el plan y programas oficiales de matemáticas en este contexto?
Cierre reflexivo	Sintetizar los principales motivos de persistencia y desmotivación en la enseñanza de las matemáticas.	P25. En una frase, ¿qué es lo que más le motiva a continuar enseñando matemáticas en la sierra y qué le desmotiva?

Nota. El guion de entrevista estuvo integrado por 25 preguntas principales organizadas en bloques temáticos vinculados con la SEVT: expectativas de éxito, valores de la tarea y costos percibidos, además de condiciones situadas del contexto y aspectos de la práctica didáctica de matemáticas. Esta organización permitió analizar la motivación docente como una configuración situada. Elaboración propia

El guion de entrevista semiestructurada se validó en dos momentos. Primero, se realizó un juicio de expertos con especialistas en investigación cualitativa y educación matemática, quienes revisaron la pertinencia, claridad, coherencia y suficiencia de las preguntas en función de los objetivos del estudio y de las dimensiones analíticas derivadas de la Situated Expectancy-Value Theory (SEVT). A partir de esta revisión, se ajustaron la redacción, secuencia y precisión conceptual de diversos reactivos. En un segundo momento, se llevó a cabo un pilotaje del guion para valorar su comprensibilidad, fluidez y adecuación al contexto de aplicación; este proceso permitió realizar ajustes finales orientados a mejorar la claridad de las preguntas y la consistencia del instrumento antes de su aplicación a la muestra definitiva.

Participaron 10 docentes wixárika que enseñan matemáticas en primaria y secundaria/telesecundaria, incluyendo servicios con organización multigrado. Para resguardar el anonimato, en el reporte se emplean identificadores alfanuméricos (E1–E10) y se omiten datos que permitan identi-

cación indirecta. El perfil de las y los participantes se describe únicamente mediante rasgos pertinentes para el estudio: nivel educativo (primaria o secundaria/telesecundaria), uso funcional de wixárika y español en la enseñanza (mediación bilingüe) y modalidad organizativa del servicio (multigrado o monogrado, según corresponda). La selección fue intencional, orientada por criterios de diversidad de casos (nivel y modalidad) dentro de la misma comunidad, con el propósito de fortalecer la comparación intra-contextual.

Para el análisis de los datos se empleó el análisis temático (Braun y Clarke, 2006), debido a su utilidad para identificar, analizar e interpretar patrones de significado en datos cualitativos, particularmente cuando se busca comprender fenómenos complejos en contextos específicos. La codificación se realizó principalmente de forma deductiva, guiada por las categorías centrales de SEVT (expectativas, valores y costos) e incorporando explícitamente las condiciones situadas como dimensión transversal de contextualización (Eccles y Wigfield, 2020). No obstante, se mantu-

vo apertura a categorías emergentes cuando los relatos docentes aportaron matices no previstos en el esquema inicial, con el fin de preservar una interpretación situada y evitar forzar el discurso a etiquetas predefinidas (Braun y Clarke, 2006).

El proceso se organizó en tres fases articuladas. Primero, una lectura exploratoria y de familiarización con las transcripciones, registrando notas analíticas iniciales. Segundo, una codificación temática orientada por SEVT, en la que se identificaron unidades de significado vinculadas con expectativas, valores, costos y condiciones situadas, incorporando códigos emergentes cuando fue necesario. Tercero, la construcción de matrices por entrevista para organizar la evidencia de cada caso y la posterior elaboración de una tabla transversal comparativa, que permitió sintetizar patrones comunes y contrastes entre docentes y entre niveles (primaria vs. secundaria/telesecundaria). Para transparentar la relación entre marco teórico, instrumento y análisis, el guion de entrevista se organizó en correspondencia con las dimensiones analíticas del estudio, como se muestra en la Tabla 1.

En este estudio, las categorías centrales de SEVT (expectativas de éxito, valores y costos) se utilizaron como ejes deductivos de codificación y comparación transversal. Adicionalmente, se incorporaron dos categorías analíticas complementarias para captar mecanismos de sostenimiento de la práctica en condiciones adversas: regulación docente (REG), entendida como el repertorio de acciones y decisiones didácticas que el profesorado despliega para sostener el avance del aprendizaje bajo restricciones, e interpretaciones del aprendizaje (INT), referidas a los criterios con los que las y los docentes explican evidencias de comprensión, estancamiento o progreso. Ambas categorías no se asumen como componentes “canónicos” de SEVT, sino como dimensiones situadas que permiten observar cómo expectativas, valores y costos se articulan en la práctica cotidiana (Braun y Clarke, 2006; Eccles y Wigfield, 2020).

4. RESULTADOS

Los resultados se presentan como un análisis transversal de los diez casos, organizado por temas que emergieron de la codificación deductiva basada en SEVT y de la comparación entre matrices por entrevista. La estructura responde al propósito del estudio: comprender cómo se configuran expectativas, valores y costos de la enseñanza de las matemáticas en una comunidad

wixárika serrana, atendiendo a tensiones estructurales asociadas con bilingüismo sin materiales, multigrado sin apoyos y currículo poco contextualizado. En cada apartado se integran fragmentos ilustrativos de entrevistas, conservando el anonimato mediante identificadores (E1–E10) y nivel educativo.

4.1 Lengua, identidad y acceso conceptual: mediación bilingüe y tensiones del registro matemático

El bilingüismo emerge como una condición situada que incide de manera directa en el acceso conceptual a la matemática escolar y, por tanto, en las expectativas de éxito. En primaria, el wixárika aparece frecuentemente como recurso de mediación didáctica: permite mantener la participación y sostener explicaciones cuando el material oficial está disponible principalmente en español. En estos casos, la alternancia lingüística se describe como un puente para la comprensión, aunque conlleva un esfuerzo adicional del docente para traducir, reformular y volver inteligibles términos y procedimientos matemáticos.

“Lo que más se entiende... suma y la resta... problemas básicos... se lee en español y después en wixárika...” (E8, primaria)

En secundaria y telesecundaria, la tensión se intensifica debido a dos factores concurrentes. Por un lado, el paso del español cotidiano al registro matemático técnico introduce barreras adicionales para la comprensión conceptual. Por otro, se reportan prácticas institucionales que desincentivan el uso de la lengua originaria, lo que reduce márgenes de mediación y aumenta la fricción entre lengua, significado y aprendizaje. Estas condiciones tienden a restringir expectativas de logro, particularmente cuando el docente observa que el alumnado “no logra nombrar” o “no logra comprender” conceptos clave en el lenguaje escolar.

“Muy complejo... se les dificulta el español... lenguaje matemático... no podemos decir ‘fracción’... no lo entienden...” (E10, telesecundaria)

“Aquí... casi no se habla... lengua materna... no permitimos... nada más hablamos... español.” (E6, telesecundaria)

Este patrón sugiere que la lengua no opera solo como “medio de comunicación”, sino como condición estructurante del acceso al significado matemático: cuando la mediación bilingüe es posible, se amplían vías de comprensión; cuando se restringe, aumentan las barreras y se reordenan expectativas de éxito.

4.2 Sentidos de la matemática: utilidad comunitaria y futuro escolar como motores de valor (VU/VL/VI)

En los diez casos, el valor de utilidad (VU) aparece como el motor más robusto del sistema motivacional. La matemática se valora por su potencial para resolver problemas cotidianos vinculados con prácticas comunitarias (producción, comercio, medición, construcción) y por su papel como soporte para trayectorias educativas posteriores. Cuando el docente logra conectar contenidos con experiencias cercanas, reporta incremento de interés (VI) y una percepción más favorable del aprendizaje posible (expectativas), lo que sugiere una relación funcional entre valor atribuido y condiciones didácticas de contextualización.

“Invernadero... medición... cálculo de áreas... a qué distancia plantar las hortalizas...” (E9, primaria)

“Variación lineal... se ve a diario... les gustó porque lograron entender y aterrizar la matemática en su contexto... venden tamales... panes...” (E10, telesecundaria)

“Construimos los corrales... a base de... áreas y perímetros... ángulos... quedaron bien hechos.” (E10, telesecundaria)

De manera complementaria, el valor de logro/identidad (VL) se expresa como compromiso profesional y ético con la enseñanza de la matemática, especialmente cuando se articula con la responsabilidad de “no minimizar” la formación matemática del estudiantado. Si bien no siempre se verbaliza en términos de identidad explícita, se observa en la insistencia por sostener la enseñanza y buscar que la matemática sea significativa y no meramente procedimental. El sistema de valores se ancla en dos horizontes: la utilidad inmediata en la vida comunitaria y el futuro escolar como promesa de continuidad y movilidad educativa.

4.3 Tensiones y costos (C): recursos, conectividad, trayecto, reforma y vida familiar

Los costos percibidos se presentan como predominantemente estructurales y se concentran en: (a) escasez de materiales (por ejemplo, falta de libros o recursos didácticos), (b) conectividad y electricidad intermitentes, (c) trayectos extensos y gastos asociados al traslado, y (d) falta de capacitación o actualización reciente. Estos costos afectan tanto la preparación como la implementación de las clases, incrementan la carga de trabajo y obligan al docente a invertir tiempo extra en búsqueda de recursos o en elaboración de materiales alternativos.

“Ya no contamos con libros... tiene que buscarle... internet, libros extras... se ocupa más tiempo para preparar.” (E1, primaria)

“A veces no hay luz e internet y debes tener algo bajo la manga... cálculo mental... materiales recortables... tener... varias actividades.” (E1, primaria)

“Si se nos hace tarde... contratar a alguien... pagar... 500 pesos... a pie... ir antes y regresar más tarde... llegas cansado.” (E3, primaria)

A estos costos se suman costos emocionales y familiares, asociados con aislamiento geográfico, distancia con redes de apoyo y tensión entre trabajo y vida personal. En algunos relatos, el costo emocional aparece como preocupación persistente o tristeza por la separación familiar, lo que evidencia que el sostenimiento de la docencia en localidad serrana no es solo una cuestión logística, sino también afectiva.

“Me siento preocupada... no me dejan hacer otras actividades... me siento triste porque no veo a toda mi familia.” (E8, primaria)

Finalmente, la falta de capacitación aparece como costo que incide en expectativas de eficacia didáctica, particularmente en el uso de materiales o enfoques que el sistema presume disponibles, pero que en la práctica no llegan o no se acompañan con formación.

"Hace falta... capacitación... curso... material didáctico... no sabemos cómo se usa... fui... a un taller... hace como cinco años." (E6, telesecundaria)

Los costos se configuran como un componente que condiciona y, en ocasiones, limita la posibilidad de sostener prácticas de enseñanza deseables, a menos que el docente active repertorios de compensación.

4.4 Regulación docente (REG): repertorios para sostener expectativas bajo restricciones

La regulación docente se constituye como un conjunto de prácticas situadas que compensan costos y sostienen expectativas de avance. A través de los casos, la regulación se manifiesta en: elaboración de materiales propios, diseño de actividades alternativas ante contingencias (falta de luz o internet), ajuste de estrategias según ritmos del grupo y coordinación entre colegas. Estas acciones se describen como respuestas pragmáticas, pero también como expresiones de agencia profesional: decisiones orientadas a preservar el acceso al aprendizaje matemático en un contexto de restricciones.

"Explicarle bien... hacer varios ejemplos... que él mismo lo haga... multiplicación... se puede hacer haciendo sumas." (E3, primaria)

"Pongo actividades de acuerdo con el grupo... conozco cómo son sus ritmos de aprendizaje... en cada actividad pongo lo que voy a revisar, de qué manera lo voy a revisar." (E4, primaria)

"Entre compañeros nos apoyamos en alguna duda que tengamos..." (E6, telesecundaria)

"Realizo mi material didáctico... así también no estar batallando..." (E7, telesecundaria)

Este repertorio regulatorio cumple dos funciones en el sistema SEVT: mitiga costos (tiempo, recursos, contingencias) y protege expectativas de éxito al sostener condiciones mínimas para el aprendizaje, aun cuando el contexto no las garantiza.

4.5 Expectativas e interpretaciones del aprendizaje: evidencias visibles y evaluación ajustada (E/INT)

Las expectativas de éxito se hacen observables en la manera en que el profesorado identifica evidencias visibles de comprensión (participación, verbalizaciones, procedimientos, representaciones) y ajusta la evaluación a las condiciones reales del grupo. En varios casos, la interpretación del aprendizaje se vincula con la secuenciación didáctica: "partir de cero", iniciar con antecedentes y avanzar gradualmente hacia la práctica, como estrategia para construir comprensión en trayectorias escolares discontinuas o con rezagos.

"Yo cuando planeo matemáticas, siempre he tomado en cuenta que hay que partir desde que los alumnos no saben nada... Preferentemente yo empiezo con un contenido teórico..., primero para que entiendan un poquito un antecedente y luego ya ir a la práctica." (E2, telesecundaria)

Asimismo, se reporta que el progreso se sostiene incluso sin apoyos familiares constantes, aunque el docente deba realizar ajustes individualizados por diferencias en escolarización previa, habilidades de lectoescritura o nociones numéricas básicas. Esta lectura "situada" del aprendizaje se traduce en expectativas realistas: se valora el avance gradual y se interpretan estancamientos en relación con barreras lingüísticas, falta de recursos o discontinuidades en la trayectoria escolar.

"Algunos todavía no cursan preescolar, entonces tengo que empezar desde cero... Cada día que vienen los niños aprenden, aunque algunos no tengan apoyo del tutor..." (E8, primaria)

"Algunos escriben al revés... confunden el 6 con el 9, entonces a cada uno le tengo que decir cuáles son los números para que el alumno lo pueda comprender." (E8, primaria)

Las expectativas no se expresan únicamente como "confianza" o "desconfianza" general, sino como un criterio práctico de evaluación del aprendizaje posible, construido a partir de evidencias observables y de la experiencia docente en condiciones estructuralmente restrictivas.

4.6 Comparación por nivel: patrones comunes y contrastes (primaria vs. secundaria/telesecundaria)

El análisis transversal muestra patrones compartidos en ambos niveles: altos costos estructurales (materiales, conectividad, trayecto), centralidad del valor de utilidad de las matemáticas y compromiso ético con la comunidad escolar. En primaria y en secundaria/telesecundaria, la motivación se sostiene mediante regulación situada que permite adaptar la enseñanza ante condiciones adversas, especialmente cuando fallan recursos básicos o cuando la organización escolar exige flexibilidad.

No obstante, emergen contrastes relevantes. En primaria, la mediación en wixárika aparece más frecuente y aceptada, y los contenidos básicos permiten apoyarse en recursos visuales, ejemplos del entorno y traducciones inmediatas para sostener la comprensión. En secundaria/telesecundaria, la demanda curricular y el peso del registro técnico incrementan la complejidad de la mediación y amplifican tensiones lingüísticas, lo que puede restringir expectativas de logro si el aula no permite movilizar repertorios bilingües. Además, la complejidad de contenidos en secundaria exige planificación más estructurada y mayor esfuerzo de traducción conceptual, especialmente cuando coexisten restricciones institucionales sobre el uso de la lengua originaria.

5. DISCUSIÓN

Los hallazgos respaldan la pertinencia de la Situated Expectancy-Value Theory (SEVT) para comprender la motivación docente en San Miguel Huaixtita como una configuración situada: expectativas, valores y costos se entrelazan y se reordenan en función de condiciones sociolingüísticas e institucionales, influyendo directamente en decisiones didácticas. En este estudio, las tensiones estructurales del contexto, enseñanza bilingüe sin materiales pertinentes, multigrado con apoyos limitados y baja contextualización curricular, operan como mecanismos que elevan costos, acotan expectativas realistas de logro y, al mismo tiempo, reorientan el sentido de enseñar hacia finalidades comunitarias y de continuidad escolar (Eccles y Wigfield, 2020; Wigfield y Eccles, 2000).

En el plano lingüístico, la mediación en wixárika se confirma como condición estructurante del acceso conceptual y como factor que moldea expectativas sobre lo posible. En primaria, el repertorio bilingüe sostiene participación y comprensión; en

secundaria/telesecundaria, el aumento del registro matemático técnico y la menor autorización institucional del uso de la lengua originaria intensifican barreras para explicar y comprender. Esto coincide con la literatura que entiende el multilingüismo en matemáticas como un problema de repertorios semióticos y de participación, no de simple traducción: cuando dichos repertorios no se legitiman, se estrechan las vías de construcción de significado (Barwell et al., 2007; Planas, 2018; Planas y Setati-Phakeng, 2014). En consecuencia, la mediación lingüística se vincula con costos de esfuerzo y carga emocional, al exigir preparación e interpretación sostenidas sin apoyos suficientes (Eccles y Wigfield, 2020; Flake et al., 2015).

En términos de valor, el predominio del valor de utilidad emerge como el motor más consistente. La matemática se legitima cuando se vincula con prácticas comunitarias y con el horizonte de continuidad escolar, lo que ayuda a explicar la persistencia docente incluso bajo restricciones. Esta articulación entre valor, sentido de tarea y persistencia es coherente con SEVT, que subraya el anclaje sociocultural de los valores y su capacidad para sostener el esfuerzo cuando se alinean con metas profesional-morales (Eccles y Wigfield, 2020; Wigfield y Eccles, 2000). Además, los datos sugieren que la visibilización de la utilidad mediante tareas contextualizadas favorece el interés y fortalece expectativas de aprendizaje, reforzando que la pertinencia curricular actúa como mecanismo motivacional y no como adorno.

Los costos aparecen predominantemente como estructurales y territorializados, con un componente emocional asociado a aislamiento y distanciamiento familiar. Lejos de ser marginal, el costo organiza la viabilidad de sostener prácticas demandantes: condiciona cuánto es posible innovar, cuánto puede sostenerse la mediación lingüística y cómo se ajustan metas y evaluación. Esta centralidad del costo converge con la literatura contemporánea que lo reconoce como modulador de prácticas aun cuando existan valores altos hacia la enseñanza (Flake et al., 2015; Jud et al., 2023).

Un aporte clave del artículo es mostrar que, en esa intersección entre costos y expectativas, la regulación docente opera como mecanismo práctico. Repertorios de adaptación —como elaboración de materiales propios y ajuste de actividades a ritmos reales del grupo— permiten sostener el avance del aprendizaje bajo restricciones, conectando la motivación con acciones didácticas observables. Aunque la regulación no sea un componente canónico de SEVT, aquí funciona como

puente interpretativo: evidencia cómo la agencia docente traduce valores (especialmente utilidad) y expectativas realistas en prácticas de persistencia y ajuste (Jud et al., 2023). De forma complementaria, las “evidencias visibles” de aprendizaje muestran que las expectativas se construyen situadamente a partir de señales observables de comprensión y orientan decisiones de secuenciación y evaluación, reforzando la coherencia entre creencias motivacionales y práctica cotidiana (Eccles y Wigfield, 2020).

La comparación por nivel añade un matiz sustantivo: el contexto indígena no es homogéneo. La transición a secundaria/telesecundaria concentra nudos del lenguaje matemático especializado y de la complejidad conceptual, reconfigurando expectativas y costos. Por ello, la propuesta de describir “configuraciones SEVT” (por ejemplo, utilidad alta con costos altos sostenidos por regulación) resulta útil para explicar variaciones por nivel sin caer en lecturas psicologizantes o meramente deficitarias: ilumina simultáneamente tensiones estructurales y agencia docente.

En términos de implicaciones, los resultados sugieren que fortalecer la enseñanza de matemáticas en contextos wixárika requiere actuar sobre condiciones que elevan costos y estrechan oportunidades. Apoyos como materiales cultural y lingüísticamente pertinentes y el fortalecimiento del bilingüismo didáctico podrían ampliar expectativas de logro y potenciar el valor de utilidad ya presente en la práctica (Eccles y Wigfield, 2020; Flake et al., 2015). Asimismo, el multigrado demanda soporte específico para evitar que su viabilidad dependa principalmente del sobreesfuerzo docente, en línea con la evidencia internacional sobre la necesidad de recursos y organización adecuados (Little, 1995; Ares-Ferreirós et al., 2025; Carrete-Marín et al., 2024). En conjunto, la discusión muestra que la motivación docente situada se sostiene por valores y agencia profesional, pero se vuelve frágil cuando los costos estructurales se acumulan sin apoyos consistentes, especialmente donde la mediación lingüística es condición de acceso conceptual y la contextualización es clave para sostener el sentido de enseñar matemáticas.

6. CONCLUSIONES

Este estudio analizó la motivación docente para la enseñanza de las matemáticas en una comunidad wixárika serrana (San Miguel Huaixtita, Mezquitic, Jalisco) mediante un enfoque cualitativo interpretativo y un estudio de caso múltiple con diez do-

centes. A partir de entrevistas semiestructuradas y un análisis temático con codificación deductiva basada en SEVT, los hallazgos muestran que la motivación docente se configura como un sistema situado de expectativas, valores y costos, profundamente condicionado por tensiones estructurales del contexto escolar (Braun y Clarke, 2006; Eccles y Wigfield, 2020). En conjunto, los resultados respaldan el argumento central del artículo: en contextos indígenas serranos, la enseñanza de las matemáticas se sostiene por una combinación dinámica de sentido atribuido a la tarea, costos persistentes y agencia docente expresada en prácticas de regulación y adaptación.

En términos de SEVT, el valor de utilidad emergió como eje robusto de sostén motivacional: la matemática adquiere relevancia cuando se vincula con prácticas comunitarias y con la continuidad escolar, lo que tiende a fortalecer el interés y a sostener expectativas de aprendizaje aun en condiciones adversas (Eccles y Wigfield, 2020; Wigfield y Eccles, 2000). Al mismo tiempo, los costos se manifestaron principalmente como estructurales (escasez de materiales, conectividad intermitente, trayectos extensos, falta de capacitación) y se articularon con costos emocionales asociados al aislamiento y tensiones familiares; estos costos no operan como elementos periféricos, sino como factores que delimitan la viabilidad de ciertas prácticas de enseñanza y que pueden erosionar expectativas de éxito si se acumulan sin apoyos institucionales (Flake et al., 2015; Jud et al., 2023). La dimensión lingüística resultó especialmente crítica: la mediación bilingüe en primaria amplía el acceso conceptual, mientras que en secundaria/telesecundaria las exigencias del registro matemático técnico y restricciones institucionales al uso de la lengua originaria intensifican barreras, lo que afecta la comprensión y reconfigura expectativas.

La principal contribución conceptual del estudio es la propuesta de leer los hallazgos como “configuraciones SEVT”, es decir, patrones situados en los que expectativas, valores y costos se articulan en arreglos relativamente estables, modulados por el nivel educativo, las políticas lingüísticas escolares, la organización del servicio y la disponibilidad de recursos. Esta perspectiva evita interpretaciones reductoras que atribuyen la sostenibilidad de la docencia a rasgos individuales (p. ej., “vocación”) y permite comprender la resiliencia profesional como resultado de una agencia situada: repertorios de regulación (elaboración de materiales, ajuste por ritmos, actividades alternativas ante contingencias, colaboración entre colegas) que

compensan restricciones y sostienen el aprendizaje. En consecuencia, el aporte empírico del artículo consiste en visibilizar cómo, en un contexto wixárika serrano, lo estructural “entra” en la motivación docente a través de costos y condiciones situadas, mientras que los valores especialmente de utilidad y compromiso profesional sostienen la persistencia y el esfuerzo pedagógico.

En términos de implicaciones, los resultados sugieren que fortalecer la enseñanza de matemáticas en escuelas indígenas serranas requiere intervenir simultáneamente en dos planos: reducir costos estructurales que se acumulan sobre el trabajo docente (materiales pertinentes, conectividad, apoyos a la movilidad y formación continua) y ampliar condiciones para la mediación lingüística y la contextualización didáctica, de manera que el bilingüismo funcione como recurso y no como barrera. Asimismo, los hallazgos refuerzan la necesidad de apoyos específicos para el multigrado, dado que la evidencia indica que su viabilidad depende del soporte organizacional y material y no puede sostenerse únicamente por sobreesfuerzo docente (Ares-Ferreirós et al., 2025; Carrete-Marín et al., 2024; Little, 1995). Finalmente, se recomienda que futuras investigaciones profundicen en comparaciones por nivel y modalidad (primaria vs. secundaria/telesecundaria; multigrado vs. monogrado) y en el análisis de políticas lingüísticas escolares, dado su impacto directo en el acceso conceptual y en las expectativas de logro.

7. LIMITACIONES

Este estudio se centró en una sola comunidad wixárika serrana y se apoyó principalmente en entrevistas semiestructuradas, por lo que los hallazgos deben leerse en función de la profundidad contextual del caso analizado. Más que aspirar a generalización estadística, el estudio busca aportar comprensión situada y transferibilidad analítica hacia contextos con características comparables. Entre los alcances susceptibles de fortalecerse en futuras investigaciones se encuentra la incorporación de otras fuentes de información, como observación de aula, análisis de planeaciones o materiales didácticos, así como la ampliación comparativa a otras comunidades, niveles educativos o modalidades escolares.

8. RECOMENDACIONES E IMPLICACIONES PRÁCTICAS

A partir de los hallazgos, se recomienda priorizar acciones que reduzcan costos estructurales que recaen de forma recurrente en el profesorado: dotación de materiales pertinentes (incluyendo recursos para matemáticas), estrategias de conectividad funcional y apoyos para condiciones de traslado y permanencia. En segundo lugar, es crucial fortalecer la mediación bilingüe como recurso didáctico, evitando prácticas institucionales que desincentiven el uso de la lengua originaria y promoviendo apoyos para la traducción conceptual y el trabajo con el registro matemático técnico, especialmente en secundaria/telesecundaria. En tercer lugar, se requiere apoyo específico para aulas multigrado, con formación situada, materiales adaptados y acompañamiento pedagógico, ya que la regulación docente observada opera como mecanismo de compensación, pero no debería depender únicamente del sobreesfuerzo individual. Finalmente, se sugiere que programas de formación continua y acompañamiento incorporen explícitamente el marco SEVT para reconocer y atender el sistema de expectativas-valores-costos del profesorado: reducir costos, fortalecer valores de utilidad/identidad y ampliar expectativas realistas puede contribuir a sostener la agencia y la resiliencia docente en contextos indígenas serranos.

DECLARACIÓN DE USO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Durante la preparación del manuscrito se utilizó una herramienta de inteligencia artificial generativa como apoyo para mejorar la fluidez, claridad y coherencia de la redacción, así como para apoyar la revisión inicial de literatura. Su uso se limitó a funciones de asistencia en la escritura y organización del texto; no se empleó para generar datos, analizarlos, interpretarlos ni para elaborar de manera autónoma los resultados o conclusiones del estudio. La selección, verificación e integración de las fuentes, así como la responsabilidad académica e intelectual del contenido final del manuscrito, corresponden exclusivamente a las personas autoras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ares-Ferreirós, M., Álvarez Martínez-Iglesias, J. M., y Bernárdez-Gómez, A. (2025). Challenges and opportunities of multi-grade teaching: A systematic review of recent international studies. *Education Sciences*, 15(8), Article 1052. <https://doi.org/10.3390/educsci15081052>
- Barwell, R. (2018). From language as a resource to sources of meaning in multilingual mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 50, 155–168. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.02.007>
- Barwell, R., Barton, B., y Setati, M. (2007). Multilingual issues in mathematics education: Introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 64(2), 113–119. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9065-x>
- Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77–101. <https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>
- Carrete-Marín, N., Domingo-Peñafiel, L., y Simó-Gil, N. (2024). Teaching materials in multigrade classrooms: A descriptive study in Spanish rural schools. *Social Sciences & Humanities Open*, 10, Article 100969. <https://doi.org/10.1016/j.ssaho.2024.100969>
- Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social. (2022). Educación para la población indígena en México: El derecho a una educación intercultural bilingüe. https://www.coneval.org.mx/Informes-Publicaciones/Documents/Educacion_poblacion_indigena.pdf
- Day, C. T. (2020). Expectancy value theory as a tool to explore teacher beliefs and motivations in elementary mathematics instruction. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 13(2), 199–209. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1285561.pdf>
- Despaigne, C. (2013). Indigenous education in Mexico: Indigenous students' voices. *Diaspora, Indigenism, and Minority Education*, 7(1), 57–72. <https://doi.org/10.1080/15595692.2013.763789>
- Eccles, J. S., y Wigfield, A. (2020). From expectancy-value theory to situated expectancy-value theory: A developmental, social cognitive, and sociocultural perspective on motivation. *Contemporary Educational Psychology*, 61, Article 101859. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101859>
- Flake, J. K., Barron, K. E., Hulleman, C., McCoach, D. B., y Welsh, M. E. (2015). Measuring cost: The forgotten component of expectancy-value theory. *Contemporary Educational Psychology*, 41, 232–244. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.03.002>
- Gildehaus, L., Rach, S., y Liebendörfer, M. (2024). Mathematikspezifische Motivation im Lehramtsstudium – Operationalisierung und Bedeutung für Studienprozesse [Mathematics-specific motivation in teacher education]. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 45, Article 24. <https://doi.org/10.1007/s13138-024-00250-8>
- Instituto de Información Estadística y Geográfica de Jalisco. (2019). Mezquitic, Jalisco: Carta municipal [PDF]. <https://iieg.gob.mx/contenido/Municipios/Mezquitic19.pdf>
- Jiang, Y., Rosenzweig, E. Q., y Gaspard, H. (2018). An expectancy-value-cost approach in predicting adolescent students' academic motivation and achievement. *Contemporary Educational Psychology*, 54, 139–152. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2018.06.005>
- Jud, J., Hirt, C. N., Rosenthal, A., y Karlen, Y. (2023). Teachers' motivation: Exploring the success expectancies, values and costs of the promotion of self-regulated learning. *Teaching and Teacher Education*, 127, Article 104093. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2023.104093>
- Ladson-Billings, G. (1995). Toward a theory of culturally relevant pedagogy. *American Educational Research Journal*, 32(3), 465–491. <https://doi.org/10.3102/00028312032003465>
- Little, A. W. (1995). Multi-grade teaching: A review of research and practice (Education Research Paper No. 12). Department for International Development. <https://doi.org/10.22004/ag.econ.12832>
- Nigh, R., y González Cabañas, A. A. (2018). Indigenous knowledge and education in Chiapas, Mexico. *Desacatos*, (56), 38–59. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S2007-21712018000100003&script=sci_arttext
- Paris, D. (2012). Culturally sustaining pedagogy: A needed change in stance, terminology, and practice. *Educational Researcher*, 41(3), 93–97. <https://doi.org/10.3102/0013189X12441244>
- Planas, N. (2018). Language as resource: A key concept for understanding the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 98(3), 215–229. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9810-y>
- Planas, N., y Setati-Phakeng, M. (2014). On the process of gaining language as a resource in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 46(6), 883–893. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0610-2>
- Plan Estatal Jalisco. (2021). Mezquitic: Plan de Desarrollo Municipal 2021–2024 [PDF]. <https://plan.jalisco.gob.mx/wp-content/uploads/2022/09/mapa/pdf2021/61.pdf>
- Rach, S., y Schukajlow, S. (2024). Affecting task values, costs, and effort in university mathematics courses: The role of profession-related tasks on motivational and behavioral states. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22, 1013–1035. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10413-7>
- Romo-Vázquez, A., Poisard, C., y Sandoval, I. (2025). Multilingual Mathematics Education: An analysis of a Mexican research-based Master's degree course developed in the Questioning the World Paradigm. *ZDM – Mathematics Education*, 57, 1425–1438. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01752-6>
- Santibañez, L. (2016). The indigenous achievement gap in Mexico: The role of teacher policy under intercultural bilingual education. *International Journal of Educational*

Development, 47, 63–75. <https://doi.org/10.1016/j.ijedu-dev.2015.11.015>

Toribio Rodríguez, M. I., Uribe Olivares, N. D., Flores Robles, J. F., y Viramontes Acuña, I. D. (2021). Análisis de las prácticas de la cultura Wixárika desde la perspectiva etnomatemática. *Matemáticas, Ingeniería y Ciencias Ambientales*, 3(6). <https://doi.org/10.58299/mica.v3i6.37>

Wigfield, A., y Eccles, J. S. (2000). Expectancy–value theory of achievement motivation. *Contemporary Educational Psychology*, 25(1), 68–81. <https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1015>



ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

LA PELOTA, ¿DEJARÁ DE REBOTAR? MODELACIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

WILL THE BALL STOP BOUNCING? MODELING THE EXPONENTIAL FUNCTION

Nicolás Gaete Silva

nicolas.gaete.silva@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0002-9198-2232>

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es describir el ciclo de modelación efectuado por estudiantes de educación media en una tarea que involucró experimentación y tecnología para la construcción del concepto de función exponencial. La metodología adoptada fue de enfoque cualitativo descriptivo, utilizando como método un estudio de caso instrumental. Se construyó una situación de enseñanza con preguntas asociadas a las fases del ciclo de modelación de Blum-Borromeo Ferri, las que buscaban estudiar el fenómeno de dejar caer una pelota. Lo anterior contrasta con el método tradicional de enseñanza de la función exponencial, siguiendo el orden de definición, propiedades y ejemplos. La propuesta fue implementada en estudiantes de enseñanza media (16-17 años) de un colegio de dependencia municipal en Chile, en el momento que se comenzaba con la enseñanza de este contenido. Los resultados muestran que los estudiantes logran construir un modelo del fenómeno e interpretarlo a partir de una progresión en sus procesos de validación, sustentados en conocimientos y reflexiones desarrollados durante la tarea. Esto contrasta con sus validaciones intuitivas iniciales y favorece un aprendizaje significativo, al tiempo que permite reconocer las limitaciones del modelo construido para fundamentar afirmaciones sobre las características del fenómeno en el mundo real.

Palabras Clave:*Modelación; función exponencial; situación de enseñanza*

ABSTRACT

The aim of this study is to describe the modeling cycle carried out by secondary school students in a task that involved experimentation and technology for the construction of the concept of the exponential function. The methodology adopted was a qualitative descriptive approach, using an instrumental case study as the research method. A teaching situation was designed with questions aligned to the phases of the Blum-Borromeo Ferri modeling cycle, aimed at studying the phenomenon of a bouncing ball. This approach contrasts with the traditional method of teaching the exponential function, which typically follows the sequence of definition, properties, and examples. The proposal was implemented with secondary school students (aged 16–17) from a public school in Chile at the point when this content was first introduced. The results show that students can construct a model of the phenomenon and interpret it through a progression in their validation processes, supported by knowledge and reflections developed during the task. This contrasts with their initial intuitive validations and promotes meaningful learning, while also enabling them to recognize the limitations of the constructed model when making claims about the characteristics of the phenomenon in the real world.

Keywords:*Mathematical modeling; exponential function; teaching situation*

1. INTRODUCCIÓN

La Matemática es una ciencia que, en gran parte, se ha ido construyendo desde la necesidad de dar respuestas a problemas o fenómenos del diario vivir. Es en el proceso de búsqueda de estas respuestas que conceptos, operatorias, representaciones y relaciones convergen en el quehacer matemático. Desde esta base, la Matemática se ha establecido como una disciplina fundamental en la formación de cualquier persona, de modo que esta tenga la oportunidad de desarrollar competencias matemáticas en distintos aspectos de su vida (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Uno de los contenidos que es trascendental conocer y entender para cualquier ciudadano es la Función Exponencial (FE), ya que los ciudadanos deben tener claridad del funcionamiento de tasas financieras, crecimientos poblacionales acelerados, y distintas situaciones de crecimiento o decrecimiento exponencial. Durante la pandemia por COVID-19, diversos medios de información intentaban comunicar el comportamiento de los contagios desde modelos matemáticos y representaciones en los que para su comprensión es clave tener conocimiento de este concepto. En este periodo, ante la falta de conocimientos matemáticos para comprender el fenómeno que se vivía, diversas personas no eran conscientes de la velocidad con la que este virus se podía propagar (Heyd-Metzuyanim et al., 2021), lo que terminó en lamentables consecuencias.

El desconocimiento de la FE en ciudadanos se debe en muchos casos a dificultades específicas en el proceso de aprendizaje del concepto, lo que ha sido objeto de estudio en diversas partes del mundo. Confrey y Smith (1995) señalan dificultades en los estudiantes para determinar valores de potencias, tanto con exponentes naturales como no naturales. Realpe Vidal (2022), retomando a Rico (1995), señala que algunos docentes diseñan tareas en las que queda de manifiesto concepciones deficientes en cuanto a la construcción del conocimiento matemático de la FE. Así, los estudiantes sólo memorizan fórmulas, gráficas y procedimientos, dejando de lado la evolución histórica del concepto. Del mismo modo, Brucki (2011), al relatar su experiencia en la enseñanza de la FE, identifica como obstáculo el hecho de considerar el exponente como variable, y señala además un desinterés por parte de los estudiantes cuando el concepto no se vincula con aplicaciones reales. En consecuencia, la expresión matemática del modelo exponencial tiende a carecer de significado para ellos en relación con los fenómenos que representa.

En el ámbito chileno, la FE no ha estado ajena a dificultades en su aprendizaje. Pezoa y Morales (2016) plantean que su enseñanza está centrada en el proceder algebraico, muchas veces descontextualizada de situaciones reales, de modo que recién luego de trabajar en la definición y propiedades del concepto se señalan ejemplos de situaciones en las que se aplica. Actualmente, el tratamiento de la FE en los textos escolares (Barrera et al., 2019; Ministerio de Educación de Chile, 2024) se centra predominantemente en la presentación de sus propiedades algebraicas y gráficas, así como en la exposición de diversos ejemplos de aplicación. Este enfoque deja en un segundo plano el análisis variacional, lo que limita oportunidades para que los estudiantes establezcan, desde procesos investigativos y todas las instancias que este actuar conlleva, conexiones entre sus experiencias previas con variaciones multiplicativas, porcentuales y la estructura propia del crecimiento exponencial. Al respecto, estudios realizados por el Depósito Central de Valores y Cadem (2022) reportaron que solo un 66 % de la población chilena afirma comprender las tasas de interés, quedando en evidencia dificultades en temas que involucran a la FE.

Desde una perspectiva epistemológica, Katz (1998) señala que el surgimiento de la FE se relaciona con estudios astronómicos, donde en la búsqueda de ciertos valores, se transformaron multiplicaciones en sumas y restas mediante identidades trigonométricas. Posteriormente, mediante ideas de Chuquet, Stifel, Napier y Bürgi se construyeron tablas que relacionaban potencias de 2 con sus exponentes. Este nuevo concepto fue presentado, desde los logaritmos, por John Napier en su obra póstuma *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, en la que enfatiza la utilidad del método encontrado para calcular cantidades que, en ese entonces, requería bastantes procedimientos. Finalmente, Euler (trad. en 1998) es quien sienta las bases para lo que hoy conocemos como funciones, en particular, también lo hace para la FE.

Si bien el surgimiento del concepto tratado tomó largos periodos de elaboración, en el ámbito educativo resulta pertinente promover situaciones que permitan a los estudiantes aproximarse a formas de trabajo similares a las desarrolladas por los matemáticos en la construcción del conocimiento. En este sentido, Godino et al. (2004, p. 67) plantean que el rol de los estudiantes en la clase de matemáticas debiese ser similar al de un matemático, vale decir, proceder una serie de acciones como el de investigar y resolver problemas, pre-

decir soluciones, formular conjeturas, comprobar estas soluciones, construir modelos matemáticos, usar lenguaje y conceptos matemáticos, intercambiar y comunicar ideas, filtrar las ideas correctas y determinar cuáles de ellas son de utilidad.

Flores y Vigo (2019) desarrollan un estado del arte, analizando tesis de maestría de distintas universidades de América Latina. En él concluyen que hay una marcada influencia de la modelación matemática como herramienta para introducir la FE. Por medio de esta se construye el modelo, teniendo como base una progresión geométrica. Sin embargo, no se profundiza más en el descubrimiento y comprensión de las propiedades de la función. Así mismo, la mayoría de estas investigaciones no considera la tecnología como una herramienta para el aprendizaje de esta, salvo para fines de cálculo. Un punto importante en estas te-

sis analizadas es que los estudiantes trabajan con datos entregados o que se construyen desde el modelo.

Confrey y Smith (1995) desarrollan las ideas relacionadas a la enseñanza de la FE, poniendo énfasis en problemas contextuales y el uso de variadas representaciones, profundizando en los conceptos de partición y covariación. Para ello, plantean la construcción de un mundo particionado y otro contable (Tabla 1), donde "su yuxtaposición por medio de la covariación provee la base de la construcción de la función exponencial" (Confrey y Smith, 1995, p.80). Desde esta perspectiva, analizan distintas propuestas que buscan dar a los estudiantes actividades en las que desarrollen las nociones multiplicativas y la conexión entre estos dos mundos.

Tabla 1. Características del Mundo contable y particionado

Contar	División
Cero es el origen	Uno es el origen
Sumar uno es la acción sucesora	Dividir por n es la acción sucesora
La unidad básica es uno	La unidad (de crecimiento) es n o $\frac{1}{n}$
La suma y la resta son las operaciones básicas	La multiplicación y la división son operaciones básicas
Cero es el elemento identidad	Uno es el elemento identidad
Reinicialización a cero	Reinicialización a uno
La conmutatividad se aplica a la suma	La conmutatividad se aplica a la multiplicación
La diferencia se utiliza para describir el intervalo entre dos números "enteros" sucesivos	La razón se utiliza para describir el intervalo entre dos números "enteros" sucesivos
Las unidades compuestas se forman agregando conteos en grupos más grandes	Las unidades compuestas se forman elevando las "unidades de división" a una potencia mayor
Las partes (aditivas) se crean mediante la división en n	Las partes (multiplicativas) se crean mediante el cálculo de la raíz n -ésima
La multiplicación se construye como una suma repetida	La exponenciación se crea como una multiplicación repetida
La distributividad se aplica a la multiplicación sobre la suma	La distributividad se aplica a la exponenciación sobre la multiplicación
La tasa es la diferencia por unidad de tiempo	La tasa es la razón por unidad de tiempo

Nota. Traducido de Confrey y Smith (1995, p. 75)

Alarcón Relmucao (2024), enmarcado en la teoría de las nociones básicas (Vom Hofe, 1995), aborda la FE planteando las nociones de crecimiento porcentual y de crecimiento por un factor constante, desde donde se desprenden las funciones de la forma $f(n) = a \cdot (1 + p)^n$ y $f(n) = a \cdot b^n$, respectivamente. En particular, el crecimiento porcentual presenta mayores dificultades al tratarse de un traspaso de un proceso aditivo en uno multiplicativo, lo que también se refleja en el aumento de la posibilidad del error en el cálculo. Entre sus conclusiones se evidencia la dificultad que lleva a error al resolverse situaciones exponenciales debido a la sobregeneralización de los modelos lineales. Además, se releva la necesidad de abordar el crecimiento porcentual a través del factor porcentual siendo este la estrategia central para la construcción de la FE, dado que el entendimiento del factor está arraigado en la profunda comprensión de los porcentajes y, al entenderlo, se podría construir de manera natural y sencilla la FE, además de permanecer siempre en una estructura multiplicativa (Alarcón Relmucao, 2024, p. 221).

2. PROBLEMÁTICA Y OBJETIVO DE ESTUDIO

A partir de lo planteado anteriormente podemos notar que existe una problemática en la enseñanza y aprendizaje de la FE, debido a que el orden en que se presenta su enseñanza – procedimental/algebraico, propiedades, gráfico, y luego una aplicación– no permite en el estudiantado una consolidación de una real comprensión de la FE, estableciéndose falencias en su interpretación y vinculación con los fenómenos a los que se puede asociar, debido a la omisión de una situación real como vía de entrada al concepto que permita en los estudiantes, desde el cuestionamiento, construir conocimiento y contrastarlo con el fenómeno en estudio. Además, si bien las nuevas propuestas de su enseñanza plantean iniciar el contenido intencionando la modelación matemática con situaciones de la vida diaria, en la mayoría de los casos sus datos a estudiar se ajustan perfectamente al modelo buscado, lo que dista del estudio real de fenómenos en los cuales suelen haber márgenes de errores de precisión en la recolección de datos o en cómo se ajustan los datos al modelo (en ocasiones saltándose la etapa de recolección de datos); y de este modo, quitando la posibilidad a los estudiantes de cuestionarse la dificultad de la recolección precisa de datos y las limitaciones que un modelo construido conlleva ante los distintos factores presentes en la realidad y su continua variabilidad. Así, el objetivo que sigue esta investigación es: describir el ciclo de modelación

matemática efectuado por estudiantes de educación media en una tarea matemática que involucra experimentación y tecnología para la construcción del concepto de FE.

3. MARCO TEÓRICO

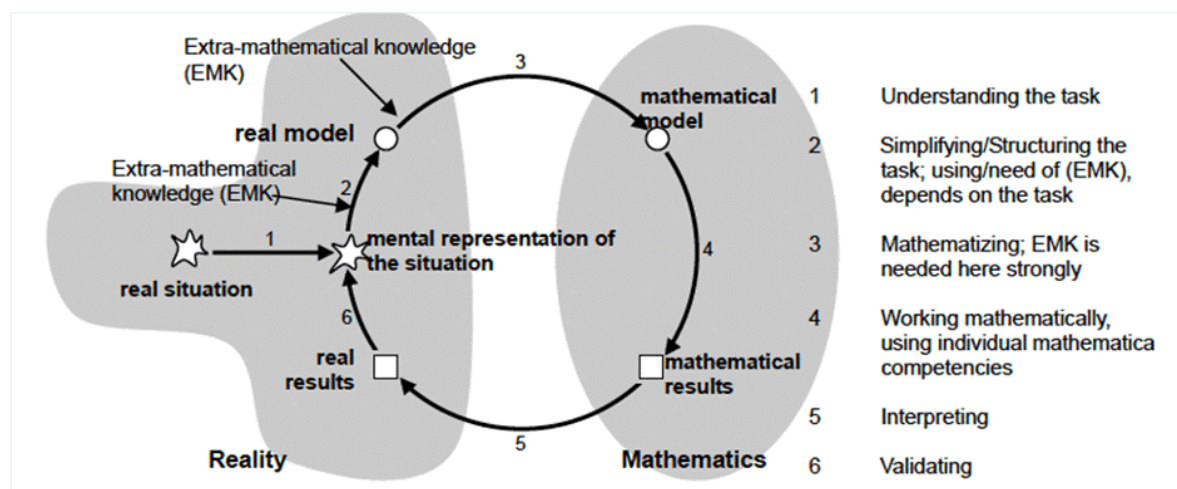
La investigación se realizó desde la mirada de la Modelación Matemática. Blum y Borromeo Ferri (2009) describen la Modelación Matemática como una habilidad del quehacer matemático cuyo principal enfoque es la traducción entre el mundo real y el mundo matemático. Este proceso involucra la representación de la realidad a partir de un modelo matemático (entendiendo la realidad como situaciones en contextos no matemáticos que pueden llegar a ser reales en la imaginación de los estudiantes). En Chile, la enseñanza de la matemática a nivel escolar establece el Modelar como una de las habilidades matemáticas pilares en su currículo, junto a las de Argumentar y Comunicar, Representar y Resolver problemas. Se suele distinguir entre dos enfoques en relación con la modelación matemática. Por un lado, se encuentran las aplicaciones y la modelación orientadas al aprendizaje de las matemáticas; por otro, el aprendizaje de las matemáticas con el propósito de desarrollar competencias en la construcción de modelos. El primer enfoque concibe las actividades de modelación como un medio para favorecer la comprensión de conceptos matemáticos, mientras que el segundo se centra en la utilización de las matemáticas para elaborar modelos (Niss et al., 2007). Aunque ambos enfoques no son excluyentes, difieren en el énfasis que otorgan al tipo de actividades que se promueven en el aula. Es importante aclarar la concepción de modelo que se utilizará durante este estudio, la que se relaciona con lo señalado por Borromeo Ferri (2010), quien la establece como un conjunto de relaciones y símbolos matemáticos que, de alguna manera, representan el fenómeno en cuestión (de manera numérica, tabular, gráfica o algebraica).

Existen distintos ciclos de estudio de la modelación matemática, pero nos enfocaremos en el de Blum-Borromeo Ferri (Borromeo Ferri, 2010) el que identifica ciertas etapas en el proceso de modelación matemática, profundizando en el análisis de procesos cognitivos. En este ciclo se distinguen las siguientes fases: (RS) Situación Real, (MRS) Representación Mental de la Situación, (RM) Modelo Real, (MM) Modelo Matemático, Resultados Matemáticos y Resultados Reales. A diferencia de los demás ciclos, en los que se identifican en general aspectos procedimentales entre mundo

real y mundo matemático, Borromeo Ferri enfatiza en el tránsito entre estas fases buscando describir lo que ocurre en la mente de una persona al enfrentarse a tipos de tareas que demanden esta habilidad: la RS apunta a la situación presente en el problema. En el tránsito de la RS a la MRS la persona entiende más o menos el problema, y puede trabajar en él, aunque aún no lo comprenda del todo. La MRS puede ser distinta en cada individuo. Dependerá de su estilo de pensamiento, experiencias previas, o podrá construirse desde los datos numéricos y relaciones que existan en el problema, lo que dependerá del conocimiento que tenga y asociaciones que logre la persona en el problema. En el paso de la MRS al RM se realizan simplificaciones, se filtra la información relacionándola con conocimiento extramatemático dependiendo de la tarea. Existe un vínculo estrecho entre la MRS y la RM, ya que la primera está construida a nivel interno, y desde allí se buscan transmitir representaciones externas que representen el RM. La MM es la fase que consiste de representaciones externas, dibujos o expresiones matemáticas. En esta fase las expresiones de la persona se relacionan más con relaciones ma-

temáticas que con la realidad. En este punto, se completa la transición hacia las matemáticas. En el proceso de transición entre el MM a los resultados matemáticos (etiquetado 4 en la Figura 1) influyen las competencias matemáticas que tenga una persona, tales como recursos matemáticos, estrategias procedimentales y de cálculo para obtener resultados y conclusiones. La fase de resultados matemáticos se compone del registro de los resultados desde el modelo. El tránsito de los resultados matemáticos a los resultados reales (etiquetado 5 en la Figura 1) se hace a través de la reinterpretación de los resultados obtenidos a partir del problema original y sus condiciones. Borromeo Ferri (2006) plantea que esta transición muchas veces las personas la realizan de manera inconsciente. Finalmente, en la fase de resultados reales se ponen a prueba estos con la situación. En el proceso de validación, la persona busca relaciones entre los resultados obtenidos y su MRS, desde una validación intuitiva o validación basada en los conocimientos. La Figura 1 muestra las partes, fases y transiciones del ciclo que se han descrito.

Figura 1. Ciclo de modelación de Blum-Borromeo Ferri



Nota: Elaboración propia

4. METODOLOGÍA

4.1 Método y participantes

Esta investigación es de tipo cualitativa y consideró como método el estudio de caso instrumental (Stake, 2007; Yin, 2018), cuya finalidad es describir cómo los estudiantes escogidos desarrollan el ciclo de modelación durante la situación de enseñanza de la FE propuesta.

Los participantes fueron estudiantes de enseñanza media (16-17 años) de un colegio municipal de la comuna de Las Condes de la ciudad de Santiago de Chile. Se identificó a cada estudiante como $E_{(i,j)}$, donde i representa el grupo al que perteneció el estudiante. Para el desarrollo de las sesiones implementadas, se formaron 4 grupos de 3 integrantes, siendo en total 12 participantes. Cada grupo utilizó un tipo de pelota distinto para realizar el experimento (Tabla 2).

Tabla 2. Grupos y estudiantes clase 1 y 2

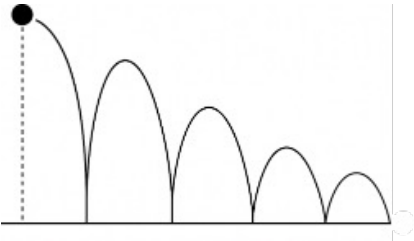
Grupos	G ₁ (Básquetbol)	G ₂ (Vóleybol)	G ₃ (Tenis)	G ₄ (Fútbol)
Estudiantes	$E_{1,1}$	$E_{2,1}$	$E_{3,1}$	$E_{4,1}$
	$E_{1,2}$	$E_{2,2}$	$E_{3,2}$	$E_{4,2}$
	$E_{1,3}$	$E_{2,3}$	$E_{3,3}$	$E_{4,3}$

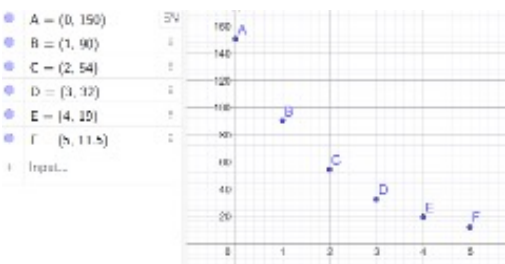
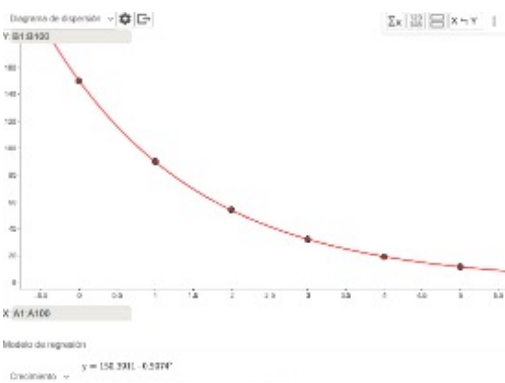
Estos estudiantes abordaron por primera vez la FE, aunque sí habían visto los contenidos previos necesarios para su enseñanza (crecimiento y decrecimiento exponencial, función lineal y cuadrática, variación porcentual, operatoria y orden de números reales). Se les entregó una carta en la que dieron sus consentimientos sobre la investigación, donde se señalaba el resguardo de los datos.

4.2 Situación de enseñanza y técnica de recogida de datos

La situación de enseñanza propuesta a partir de la cual se recogieron los datos consideró uso de tecnología, en particular del Software GeoGebra. La tarea fue elaborada en el marco de un Estudio de Clases en el contexto de estudios de posgrado de Didáctica de la Matemática, en donde colaboraron compañeros y docentes. El fenómeno que se estudió en la tarea fueron las alturas sucesivas que alcanza una pelota luego de cada rebote consecutivo al dejarla caer desde cierta altura inicial, cuya relación se modela mediante una FE. La tarea se estructuró en 3 partes (hipótesis-experimentación-discusión) y se implementó en dos clases de 70 minutos cada una. La modalidad de trabajo fue en grupo de tres personas (salvo las dos primeras preguntas). Cada grupo poseía un computador para usar GeoGebra. Los instrumentos de recolección de datos fueron las producciones escritas, grabación de audio por grupo y grabación de video en el momento de los plenarios y durante el uso del software GeoGebra. Las preguntas de la tarea se construyeron intencionando asociarlas a las fases del ciclo de modelación de Blum-Borrromeo Ferri (2010), con la finalidad de hacer emerger en los estudiantes su habilidad de modelar, describiendo este proceso bajo este ciclo. En la Tabla 3, se presenta el análisis a priori de las preguntas de la tarea.

Tabla 2. Análisis a priori de la tarea matemática

Fases del Ciclo de Modelación	Preguntas/situación de la tarea	Respuesta experta
Situación real	Analizar el comportamiento de las alturas sucesivas que alcanza una pelota luego de cada rebote consecutivo al dejarla caer desde cierta altura.	
Representación mental de la situación	Si dejan caer una pelota desde cierta altura sobre algún piso ¿cómo creen que será la altura que alcance la pelota después de cada rebote? Representen la situación de manera visual y descríbanla con sus palabras.	 La razón entre la altura de la pelota luego de cada rebote y la altura que alcanza la pelota luego del bote anterior es constante.
Modelo real	¿Qué aspectos creen que influyen en la situación anterior?	La pelota (su forma, material, tamaño y presión), el tipo de suelo y la velocidad del viento.

Modelo matemático	Imaginen que sueltan una pelota desde la altura que ustedes quieran sobre la cancha de cemento del colegio. Representen y describan las alturas que alcanzaría la pelota luego de cada rebote. Se realiza el experimento y se representan los resultados obtenidos. Si los datos obtenidos se relacionaran por medio de una función, ¿cómo podríamos describir esta función? Procuren detallar lo que más puedan su descripción. Registren los datos del experimento en la hoja de cálculo de GeoGebra, y observen los modelos de regresión que aparecen. Si tuvieran que escoger el que mejor se ajusta al fenómeno estudiado y mejor pueden interpretar, ¿cuál escogerían? ¿Por qué? Justifiquen. ¿Cuál es el patrón que pueden evidenciar en las alturas de la pelota?	Tabla de observación <table><thead><tr><th>N° de bote</th><th>Altura (cm)</th></tr></thead><tbody><tr><td>0</td><td>150</td></tr><tr><td>1</td><td>90</td></tr><tr><td>2</td><td>54</td></tr><tr><td>3</td><td>32</td></tr><tr><td>4</td><td>19</td></tr><tr><td>5</td><td>11,5</td></tr></tbody></table>  La función es un decrecimiento exponencial, cuya representación algebraica es de la forma $f(x)=a \cdot b^x$, con $0 < b < 1$, a representa la altura inicial, y b la razón entre los valores consecutivos de las imágenes de la función. La representación gráfica es una serie de puntos que siguen la tendencia de una curva asíntota al eje X, cuya intersección al eje Y es en el punto $(0,a)$.  El modelo de crecimiento y exponencial son los que mejor se ajustan a la situación, desde su coeficiente de determinación. La representación algebraica del modelo de crecimiento es más fácil de interpretar a nivel escolar. La altura de la pelota alcanzada luego de cada rebote es aproximadamente el 60% de la altura que alcanzó la pelota luego del rebote anterior.	N° de bote	Altura (cm)	0	150	1	90	2	54	3	32	4	19	5	11,5
	N° de bote	Altura (cm)														
0	150															
1	90															
2	54															
3	32															
4	19															
5	11,5															

Resultados matemáticos	A partir de la observación del experimento y representaciones de los datos obtenidos ¿podrían estimar la altura que alcanzaría la pelota luego del sexto rebote? Justifica. A partir del modelo escogido y de los datos graficados, ¿podrían estimar con mayor precisión la altura que habría alcanzado la pelota luego del sexto rebote? Se hace una institucionalización del contenido.	Se puede predecir gracias al patrón presente en la situación. Así, su altura al sexto rebote sería 6,8 cm. El modelo escogido de GeoGebra indica el mismo valor.
Resultados reales	Si un estudiante les cuenta que realizará el mismo experimento, con el mismo tipo de pelota que escogiste en la actividad (fútbol, básquetbol, tenis o vóleybol) y desde la misma altura inicial, pero en su casa ¿podrían predecir exactamente lo que ocurrirá con sus alturas luego de cada rebote a partir de lo hecho en esta actividad? Argumenten su respuesta. La pelota, ¿dejará de rebotar alguna vez? ¿Por qué? ¿Crees que otra situación contenga ciertas variables con un comportamiento de decrecimiento (o crecimiento) en el que se presente un patrón similar? ¿Cuál? ¿Por qué?	No, ya que las condiciones iniciales no son las mismas (tipo de suelo, presión de la pelota y condiciones del viento). De todos modos, se podría establecer una predicción en cierto rango, garantizando la mayoría de las condiciones iniciales. La pelota dejará de rebotar. La expresión del modelo es 0 cuando la cantidad de rebotes tiende a infinito. El crecimiento bacteriano, los créditos financieros, la depreciación de la tasación de autos, etc.

Nota. Elaboración propia

En la segunda clase, se consideraron los resultados del experimento obtenidos por el grupo que más se asemejaban a un comportamiento exponencial y los declarados como respuesta experta.

4.3 Técnica de análisis de datos

Para analizar las producciones de los estudiantes se establecieron como unidades de análisis las respuestas a la tarea, las transcripciones de las discusiones entre los grupos y de los plenarios como grupo curso. Considerando el propósito descriptivo de la investigación, en la Tabla 4 se proponen categorías, como técnica de un análisis del contenido (Mayring, 2015), para analizar e interpretar cómo los estudiantes modelan matemáticamente en cada fase del ciclo de modelación que la situación de enseñanza consideró para el concepto de FE.

Tabla 3. Análisis a priori de la tarea matemática

Categorías	Descripción	Ejemplo
Representación mental de la situación	Externalizan alguna hipótesis sobre el fenómeno a partir de experiencias previas por medio de representaciones o descripciones, identificando características de las variables relacionadas (altura- rebotes), tales como sus comportamientos, sus rangos, posibles valores y especifican qué tipo de variables son (discretas/continuas).	Los estudiantes representan la trayectoria de la pelota luego de cada rebote al dejarla caer desde cierta altura. Escriben además las características de esta trayectoria, estimando valores o alguna idea de cómo estos se relacionan.
Modelo real	Mencionan condiciones iniciales que influyen en el comportamiento de la variable altura, y se expresa alguna idea del cómo influyen.	"Influye el tipo de pelota, su presión, tamaño, material, el tipo de suelo, el viento, ya que estas condiciones determinarán que la pelota rebote más o menos luego de cada rebote"
Modelo matemático	Representan la relación entre las variables alturas-rebotes a través de secuencias numéricas, tablas, gráficos o expresiones algebraicas. Interpretan las representaciones del Software GeoGebra.	Proponen alguna función como representante del fenómeno, representándola a través de tablas, gráficos o expresiones algebraicas. Utilizan el Software GeoGebra para determinar la función que modela el fenómeno a partir de los datos entregados, asociando los componentes del modelo a las características del fenómeno.
Resultados matemáticos	Utilizan el modelo encontrado para determinar valores que permitan estudiar las características del fenómeno.	Determinan la altura de la pelota en el rebote consecutivo al último registrado en la experimentación justificándolo desde de la deducción de un patrón en la representación de las variables relacionadas y/o desde una interpretación de las representaciones del Software GeoGebra.
Resultados reales	Argumentan el alcance y las limitaciones del modelo encontrado para su aplicación en contextos reales.	Señalan la relevancia de las condiciones iniciales para poder predecir exactamente el comportamiento del fenómeno a partir de la experiencia vivida. Mencionan ejemplos de otros fenómenos en los que sus variables presenten un comportamiento similar. Afirman si la pelota dejará de rebotar o no alguna vez al dejarla caer.

Nota. Elaboración propia

5. RESULTADOS

Los resultados que se presentan consideran los datos obtenidos más relevantes en cuanto a la manifestación por parte de los estudiantes de cada fase del ciclo de modelación durante la situación de enseñanza.

5.1 Análisis categoría Representación mental de la situación

En esta categoría, en general las representaciones coinciden con la respuesta experta. Las des-

cripciones varían bastante, ya que algunos estudiantes no agregan descripción de la situación, otros solo señalan la característica decreciente de la altura luego de cada rebote señalando además la característica discreta de esta última variable (Figura 2) y algunos agregan además que en algún momento la pelota dejará de rebotar. Solo E_{4.1} detalla en su descripción cómo es el comportamiento decreciente de las alturas, relatando una disminución constante de la altura de la pelota en razón 1:4 luego de cada rebote (Figura 3).

Figura 2. Producción de $E_{1,3}$ fase Representación mental de la situación

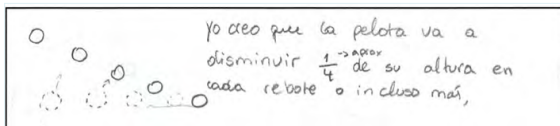
Si dejan caer una pelota desde cierta altura sobre algún piso ¿cómo creen que será la altura que alcance la pelota después de cada rebote? Representen la situación de manera visual y descríbanla con sus palabras.



Nota: "La altura que alcanza la pelota luego de rebotar disminuye luego de cada rebote"

Figura 3. Producción de $E_{4,1}$ fase Representación mental de la situación

Si dejan caer una pelota desde cierta altura sobre algún piso ¿cómo creen que será la altura que alcance la pelota después de cada rebote? Representen la situación de manera visual y descríbanla con sus palabras.



Nota: "yo creo que la pelota va a disminuir $\frac{1}{4}$ aprox de su altura en cada rebote o incluso más,"

5.2 Análisis categoría Modelo real

Todos los estudiantes identifican las variables en estudio (altura-rebotes), lo que se evidencia en las figuras anteriores y en que todos los aspectos señalados en la pregunta de esta sección son condiciones que sí influyen en el comportamiento de las alturas de la pelota. Ningún estudiante por sí solo menciona todos los aspectos considerados en la respuesta experta, aunque luego de discutirlo como grupo pueden complementar los aspectos propuestos por cada uno y se acercan bastante a lo planteado a priori.

Se generan conversaciones entre los participantes de G_2 , que evidencian una conciencia de lo

relevante que son las experiencias previas y el conocimiento de cada persona para considerar aspectos en el estudio de ciertos fenómenos. La Figura 4 y Figura 5 muestran el diálogo de los estudiantes y sus aspectos considerados en la situación, respectivamente.

Figura 4. Conversación de G_2 en fase Modelo real

[11:41 - 12:12] Audio 1 G_2

$E_{2,1}$: "Va a depender de qué tan inflada esté la pelota, el material de la pelota, la altura y la fuerza"

$E_{2,3}$: "Yo puse la altura desde la que cae la pelota, la fuerza peso, fuerza de roce e inclinación de la caída".

$E_{2,1}$: "Ella la física".

$E_{2,3}$: "Me gustó mucho lo que dijiste de qué tan inflada está la pelota, porque es que porque, siento que ahí se ve como bueno, si se supone que esto es para como pensar en cómo pensamos nosotros las cosas y eso de qué tan inflada está la pelota, es algo que diría una persona que solamente haga cosas con pelota cachay, como tu juegas vóley y todas esas cosas, entonces igual como que muestra una forma distinta de cómo lo relaciona ella con lo que ha visto".

Nota: Transcripción de audio

Figura 5. Producción de G_2 fase Modelo real

¿Qué aspectos creen que influyen en la situación anterior?

- Altura desde que cae la pelota
- Fuerza de peso
- Fuerza de roce
- Inclinación de la caída
- Inflación de la pelota
- Material de la pelota
- Factores externos como viento

Nota: "-Altura desde que cae la pelota -Fuerza peso -Fuerza de roce -Inclinación de la caída -Inflación de la pelota -Material de la pelota -Factores externos como viento"

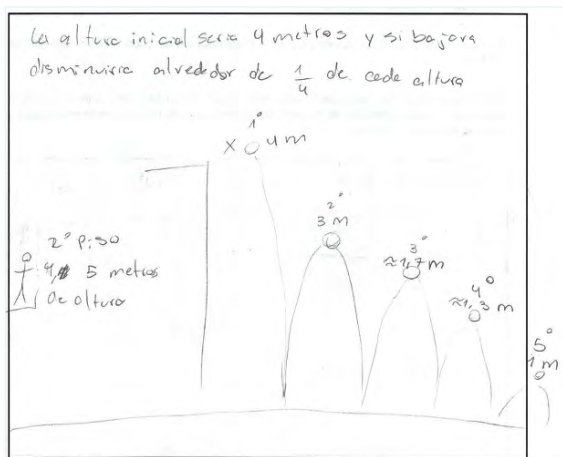
5.3 Análisis categoría Modelo matemático

Previo a realizar el experimento cada grupo manifiesta inquietud e inseguridad en cómo predecir los valores de la altura en cada rebote. Discuten las propuestas, en donde G_1 , luego de dibujar una trayectoria, criticarla, borrarla y volver a dibujar la plantea el objeto matemático de fracción como medio para abordar la pregunta. Comienzan planteando un decrecimiento en razón 1:2 de la altura que alcanza la pelota luego de cierto rebote con respecto a la altura alcanzada por la pelota luego del rebote anterior, la cuestionan y luego estable-

cen la razón 3:4, aclarando en su conversación la diferencia de reducción en 3:4 de una reducción a 3:4. La Figura 6 muestra los valores estimados a partir de esta razón (en la representación se saltan el valor de la altura luego del segundo rebote, aunque en su conversación si señalan que sería 2,25).

Figura 6. Producción de G_1 previo a la experimentación fase Modelo matemático

Imaginen que sueltan una pelota desde la altura que ustedes quieran sobre la cancha de cemento del colegio. Representen y describan las alturas que alcanzaría la pelota luego de cada rebote (al menos 5 rebotes).

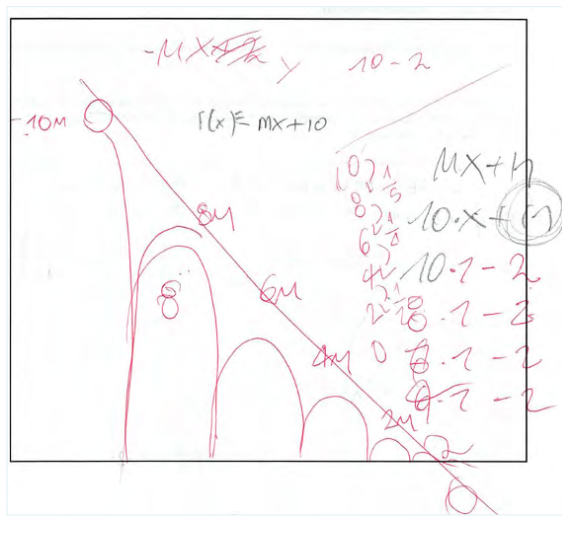


Nota: "la altura inicial sería 4 metros y si bajara disminuiría alrededor de $\frac{1}{4}$ de cada altura. 2° Piso 4, 5 metros de altura"

G_4 discute las condiciones iniciales en casi la totalidad del tiempo destinado a esta sección. Al final plantean una razón de decrecimiento de 1:3, pero por tiempo no alcanzan a calcular los valores. G_2 plantea que, lo solicitado en esta pregunta, según $E_{2,2}$ "es modelarlo". Primero indican que existe una razón de 1:2 entre la altura de la pelota luego de cierto rebote y la altura de la pelota luego del rebote anterior. Cuestionan esta razón. $E_{2,1}$ plantea "quizás se podría partir al revés, quizás podríamos partir de una ecuación". "Todo nos lleva a una ecuación" señala $E_{2,2}$. Plantean una función lineal como modelo de la situación, lo cuestionan y luego señalan que debiese ser afín. La Figura 7 muestra lo desarrollado por este grupo en la guía.

Figura 7. Producción de G_2 previo a la experimentación fase Modelo matemático

Imaginen que sueltan una pelota desde la altura que ustedes quieran sobre la cancha de cemento del colegio. Representen y describan las alturas que alcanzaría la pelota luego de cada rebote (al menos 5 rebotes).



Posterior a la realización del experimento y recolección de los datos, la Figura 8 y Figura 9 muestran los diálogos de G_1 y G_4 respectivamente, en donde se evidencia que ya infieren características de la función que modela el fenómeno. En el plenario ambos grupos manifiestan incapacidad de encontrar la expresión algebraica que represente la situación.

Figura 8. Conversación de G_1 post experimentación fase Modelo matemático

[11:45 - 12:46] Audio 2 G_1

$E_{1,2}$: "Es afín porque no pasa por el origen".

$E_{1,1}$: "Tampoco sería una línea recta, yo siento que tomaría una curva que se va acercando a x , pero que no la toca".

$E_{1,3}$: "Es como un tobogán".

$E_{1,1}$: "Mientras más grande es el número x , se va achicando la diferencia de las alturas".

Nota: Transcripción de audio

Figura 9. Conversación de G_4 post experimentación en fase Modelo matemático

[10:40 - 11:16] Audio 2 G_4

$E_{4,1}$: "Cada vez se reduce menos".

$E_{4,2}$: "Cada vez que rebote reduce más exponencialmente su altura".

$E_{4,1}$: "¿Qué significa exponencialmente?"

$E_{4,2}$: "Por ejemplo, la curva en que disminuye es más alta, o sea, por ejemplo, puede que va así, pero igual es una gran cantidad para su cantidad de altura que tiene en ese momento".

Nota: Transcripción de audio

La Figura 10 muestra los datos obtenidos por G_3 en el experimento, los que serán analizados en la clase 2. Por último G_2 señala que, a partir de los datos obtenidos, la relación se asemeja mucho a una función afín. En la Figura 11 se ve como escriben (con ayuda de GeoGebra) dos funciones, una que interseca el primer y el segundo punto de la representación gráfica de los datos obtenidos, y otra que interseca el primer y último punto. En el plenario, señalan que la expresión algebraica que modela la situación sería un promedio de esas dos rectas. Aquí finaliza la clase 1.

En la clase 2, los grupos comienzan ingresando los datos entregados en GeoGebra y analizan qué modelo de regresión se ajusta más a los datos. G_1 y G_4 escogen el modelo de regresión "crecimiento", señalando que su lectura e interpretación es más fácil, mientras G_2 y G_3 escogen el modelo de regresión "exponencial". Ambos modelos son equivalentes en su representación gráfica, pero se representan de distinta manera algebraicamente. La Figura 12 y Figura 13 muestran las representaciones gráficas y algebraicas de los modelos escogidos. En la Figura 14, G_4 justifica la elección de su modelo.

Figura 10. Producción de G_3 experimentación fase Modelo matemático

Tabla de observación	
N° de bote	Altura (cm)
1	110 cm
2	75 cm
3	45 cm
4	30 cm
5	20 cm
6	10 cm

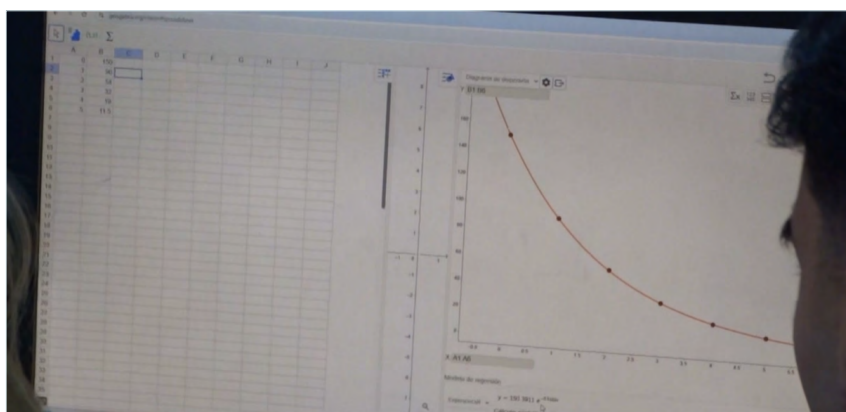
Figura 11. Producción de G_2 post experimentación fase Modelo matemático

b. Si los datos obtenidos se relacionaran por medio de una función ¿cómo podríamos describir esta función? Procuren detallar lo más que puedan su descripción.

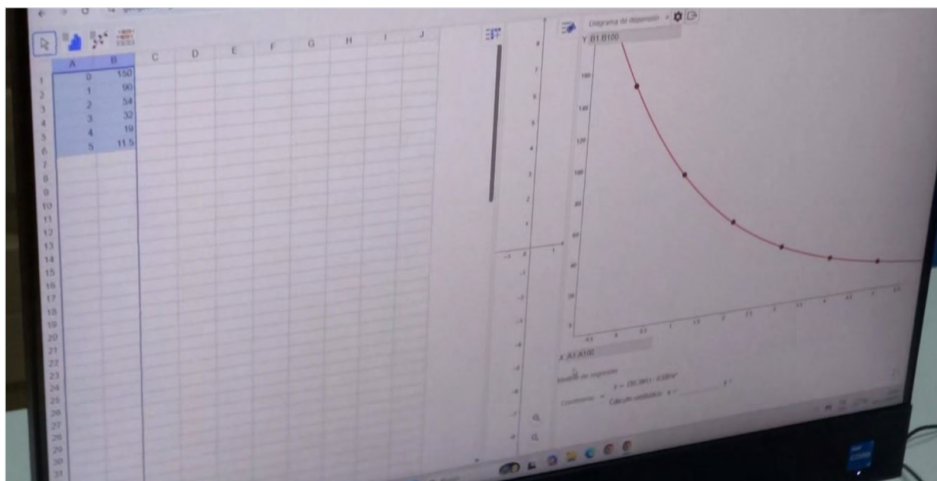
$$25x + 2y = 218$$

$$59x + 3.04y = 395.22$$

Figura 12. Modelo de regresión de GeoGebra escogido por G_3 a partir de datos entregados



Nota. "Modelo de regresión exponencial $y = 150.3911 \cdot e^{-0.5152x}$ "

Figura 13. Modelo de regresión de GeoGebra escogido por G_4 a partir de datos entregados

Nota. "Modelo de regresión crecimiento $y = 150.3911 \cdot 0.5974^x$ "

Figura 14. Producción de G_4 post análisis de los modelos de regresión entregados por GeoGebra

Registren los datos del experimento en la hoja de cálculo de GeoGebra, y observen los modelos de regresión que aparecen. Si tuvieran que escoger el que se ajusta mejor al fenómeno estudiado y mejor pueden interpretar, ¿cuál escogerían? ¿Por qué? Justifiquen.

La de crecimiento, porque la fórmula es más conocida o más fácil de interpretar, la curva que genera pasa por todos los puntos

Nota. "La de crecimiento, porque la fórmula es más conocida o más fácil de interpretar, la curva que genera pasa por todos los puntos"

En el plenario de esta pregunta, G_4 expone su producción escrita, y complementa que el modelo de regresión exponencial arrojado por GeoGebra es más difícil de interpretar al estar presente el número de Euler, el que, según sus palabras, es desconocido por muchas personas. Respecto al patrón presente en las alturas, G_1 , G_3 y G_4 solo mencionan la característica decreciente. G_2 complementa en el plenario que logran identificar el patrón en los datos de las alturas entregadas luego de cada rebote en la respuesta experta, señalando que existe un decrecimiento muy cercano a un 40%.

5.4 Análisis categoría Resultados matemáticos

Dado que los datos recolectados en la experimentación de G_3 entregan la altura de la pelota luego del sexto rebote, los grupos responden la pregunta de esta sección respecto a los datos brindados de la respuesta experta. Todos los grupos logran estimar el valor de la altura solicitada. Algunos lo hacen desde la interpretación del modelo entre-

gado por GeoGebra, y luego calculando su valor reemplazando el valor de la incógnita x en el modelo por 6. Algunos grupos, además, notan que en GeoGebra pueden ingresar algún valor en una de las variables del fenómeno, y el programa les arroja el valor de la otra variable relacionado al valor previamente ingresado. G_1 y G_3 realizan esta acción para comprobar lo hecho anteriormente con calculadora. La Figura 15 muestra la respuesta de G_1 en esta sección.

Figura 15. Producción de G_4 post análisis de los modelos de regresión entregados por GeoGebra

A partir del modelo escogido y de los datos graficados, ¿podrían estimar con mayor precisión la altura que habría alcanzado la pelota luego del sexto rebote? ¿Cuál es el patrón que pueden evidenciar en las alturas de la pelota? Describanlo.

creemos que si se podría estimar, en que el geogebra al utilizar el modulo de regresión de crecimiento en el 6to rebote nos dio un aproximado a 6,8 y nosotros habíamos dicho que sería 7 por lo que si se podría estimar.

Nota. "creemos que si se podría estimar, en que el geogebra al utilizar el modelo de regresión en crecimiento en el 6to rebote nos dio un aproximado a 6,8 y nosotros habíamos dicho que sería 7 por lo que si se podría estimar"

5.5 Análisis categoría Resultados reales

Todos los grupos plantean que en caso de repetir el experimento en otro lugar no se puede predecir exactamente el comportamiento de las alturas de la pelota, ya que dependerá de las condiciones iniciales, y que en caso de que se garanticen estas, se pueden hacer estimaciones bastante

cercanas de lo que pasaría. G_1 es quien relata de manera más amplia esta idea, lo que se muestra en la Figura 16.

Figura 16. Producción de G_1 pregunta predicción al volver a repetir el experimento en otro lugar

Si un estudiante les cuenta que realizará el mismo experimento, con el mismo tipo de pelota que escogiste en la actividad (fútbol, básquetbol, tenis o voleibol) y desde la misma altura inicial, pero en su casa ¿podrían predecir exactamente lo que ocurrirá con sus alturas luego de cada rebote a partir de lo hecho en esta actividad? Argumenten su respuesta.

No podría predecir exactamente, pero si habrían coincidencias por que afectaría si los rebotes lo hiciera en el patio y el suelo fuera pasto, o si está inclinado, también al ser medido al ojo puede que los resultados se parezcan, pero no sean los mismos

Nota. “No podría predecir exactamente, pero si habrían coincidencias porque afectaría si los rebotes lo hiciera en el patio y el suelo fuera pasto, o si está inclinado, también al ser medido al ojo puede que los resultados se parezcan, pero no sean los mismos”

Respecto a los ejemplos de situaciones cuyo comportamiento variacional sea similar, los grupos plantean ejemplos relacionados a tasas de crecimiento poblacional y de intereses en bancos.

Con respecto a la pregunta de si la pelota dejará de rebotar, la Figura 17 muestra el diálogo que se genera respecto a esta en el plenario.

Figura 17. Diálogo plenario final

[02:46 - 07:20] Video 4

$E_{2,1}$: “Sí, porque parte de una base, y va rebotando, se hace más chico, y así así y en algún momento llega a cero, porque no puede pasar a los números negativos tampoco”.

$E_{1,2}$: “Yo puse que sí, porque en realidad es conocimiento que ya sabemos, la gravedad y por todo, y en algún punto se va a quedar quieta”.

Docente: “Quizás la pregunta no fue la adecuada. ¿A los cuántos rebotes deja de rebotar la pelota?”

$E_{1,2}$: “Nosotros buscamos y en el 29 exactamente”.

$E_{1,1}$: “Al menos al comprobar en GeoGebra, en 29 llegaba a cero”.

$E_{1,2}$: “En 28 era 0,00001”.

$E_{4,2}$: “Yo creo que en realidad nunca llega a cero. Quizás en el GeoGebra llega a cero, pero porque pone una cantidad exacta de decimales. Y como tiene una cantidad infinita de decimales, nunca va a llegar a cero”.

Docente: “Jóvenes, lo que dice el $E_{4,2}$ es cierto. El GeoGebra, cuando tienes muchos ceros, y al final un número, coloca que eso es cero. Pero, en términos de cálculo, eso no es cero, es cero coma cero cero cero cero cero y algún otro número después”.

$E_{2,3}$: “Pero”.

$E_{1,1}$: “Tiende a cero”.

$E_{2,3}$: “Sí pero como”.

Docente: “Me encantó esa palabra”.

$E_{2,3}$: “Eso es como matemáticamente, pero, nosotros ¿no llega a cero? Es que igual a mí me dijeron en esta clase eso no es matemática, es más como física. No se la ley, hay una ley, no recuerdo en este momento, la ley de inercia creo, con lo cual no se puede decir que va a llegar a cero... La matemática no es real, debería tener... no debería existir”.

(todos ríen)

Docente: “¿cómo surge la matemática?”

$E_{2,3}$: “no es real no es real”.

Nota: Transcripción de audio

6. DISCUSIÓN

En relación a las fases del ciclo de modelación de Blum-Borromeo Ferri, podemos observar en los resultados agrupados en las categorías de análisis Representación mental de la situación y Modelo real, lo importante que son las experiencias previas de los estudiantes en términos de qué aspectos considerar en el estudio de algún fenómeno. Por otro lado, en la categoría de análisis Modelo matemático se da cuenta de lo relevante que son las competencias matemáticas para poder construir e interpretar modelos, lo que se evidencia en las distintas propuestas de funciones por parte de los estudiantes que relacionaban los datos obtenidos después de realizar el experimento, en cómo consideran un abordamiento porcentual en la comparación de cantidades para establecer un patrón, y cómo conectan estos conceptos para manifestar el comportamiento variacional del fenómeno desde las nociones señaladas por Alarcón Relmucao (2024).

En línea con lo anterior, podemos ver cómo el uso de GeoGebra permitió representar, utilizar e interpretar el modelo del fenómeno al punto que los estudiantes cuestionaron sus características aún más de lo que se solicitaba, lo que se evidencia cuando averiguan de manera autónoma a los cuántos rebotes la pelota dejará de hacerlo. Esto complementa el uso de la tecnología solo para fines de cálculo declarados en el estado del arte de Flores y Vigo (2019) para la enseñanza de la FE. Se confirma además cómo el análisis covariacional, estudiado en este caso a través de un Software, es la base para la construcción del modelo buscado tal y como lo plantean Confrey y Smith (1995).

Los diálogos presentados en los resultados de la propuesta son bastante interesantes, ya que manifiestan, en las reflexiones de los estudiantes, cómo las conexiones entre el mundo real y el mundo matemático que plantea el marco teórico, sumados a los conocimientos que se tengan de cada uno de ellos, son trascendentales en el proceso de aprendizaje-enseñanza de la matemática. En particular, las respuestas a la pregunta de si la pelota dejará de caer muestra cómo los estudiantes, al igual que en la anterior implementación, logran a partir del fenómeno estudiado considerar los dos mundos, y son capaces de interpretar el modelo desde la mirada de ambos, articulando lo conceptual y teórico del mundo matemático con los alcances y limitaciones que tienen estas ideas con el mundo real, tal y como apunta Borromeo Ferri (2010).

7. CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos podemos concluir que tareas de modelación que estudien algún fenómeno conocido y busquen transitar por las distintas fases del ciclo de modelación, permiten describir cómo los estudiantes modelan y aprenden en el contexto de aprendizaje de la FE. La combinación de todos los elementos de la tarea dio pie a los estudiantes a utilizar la matemática como herramienta para cuestionarse el fenómeno en estudio durante todo el proceso de enseñanza, y lograr además aprender un nuevo concepto matemático. Se evidencia una progresión en sus validaciones, basadas en conocimientos obtenidos en el transcurso de la tarea, a diferencia de las validaciones intuitivas originales.

Respecto a las fases del ciclo de modelación, en las preguntas de la tarea agrupadas en las fases Representación mental y Modelo real, hubo respuestas de todos los estudiantes, lo que recalca la importancia de contextualizar la enseñanza en situaciones que sean conocidas, de modo que tengan la capacidad de proponer ciertas hipótesis y argumentarlas basadas en experiencias previas y conceptos matemáticos conocidos, comunicándolas a través de una combinación entre ellas. En este sentido, el fenómeno escogido para la situación fue un acierto. En las fases Modelo matemático y Resultados matemáticos fue trascendental la conexión en los estudiantes de sus contenidos previos en matemática con el uso del Software GeoGebra para la interpretación del modelo que este les entregaba, el cuál era desconocido para la mayoría de ellos (el manejo que tenían del concepto función acá fue clave para sus interpretaciones). Lo anterior es importante tenerlo en consideración ante el creciente protagonismo de la inteligencia artificial en la enseñanza de la matemática, ya que su presencia y uso para un aprendizaje significativo debe idealmente estar articulado con las fases anteriores y las características que se buscaron en ellas para enseñar nuevos conocimientos. Finalmente, la fase de Resultados reales se configuró como un momento decisivo en la consolidación del aprendizaje del concepto de FE. Esta etapa representa el cierre del proceso de modelación, en el cual, tras la integración de los distintos conceptos matemáticos abordados durante las clases, se evidenció cómo el modelo construido permitió, mediante su interpretación del fenómeno estudiado, establecer los alcances y limitaciones del mismo en relación con las características del mundo real. La culminación del ciclo de modelación se constituyó, así, en una instancia valiosa para que los estudiantes reconocie-

ran, más allá de la adquisición de un nuevo concepto matemático, la relevancia de esta disciplina en la vida cotidiana, su potencial de aplicación en diversas situaciones y su papel en la comprensión de los fenómenos que los rodean.

Esta investigación abre diversas posibilidades para profundizar en la comprensión de los procesos de modelación matemática en el aula. Los resultados obtenidos evidencian la necesidad de seguir indagando cómo los estudiantes transitan entre los mundos real y matemático, donde están involucradas habilidades de interpretación, argumentación y generalización que no siempre se explicitan, sino que muchas veces se realizan de manera inconsciente. Futuras investigaciones podrían centrarse en caracterizar los distintos tránsitos efectuados por cada estudiante en el ciclo de modelación, considerando los obstáculos epistemológicos y didácticos que surgen durante la construcción de modelos.

DECLARACIÓN DE USO ÉTICO DE HERRAMIENTAS DE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Para apoyar la búsqueda de referencias bibliográficas se utilizó la herramienta Consensus. Para apoyar la revisión de la escritura se utilizó la herramienta ScholarGPT (basada en el modelo GPT-5 de OpenAI).

6. REFERENCIAS

- Alarcón Relmucao, N. (2024). Nociones básicas como base de la comprensión de la función exponencial en la educación secundaria: Un estudio comparativo entre Chile y Alemania [Tesis doctoral, Universidad de Bielefeld]. PUB – Publications at Bielefeld University.
- Barrera, R., Morales, K., Norambuena, P., y Ortiz, N. (2019). Texto de Matemática 3° Medio del Proyecto SAVIA. SM Chile S. A.
- Blum, W., y Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*. 1(1), 45-58.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/BF02655883>
- Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behaviour. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 99-118. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>
- Brucki, C. M. (2011). O uso de modelagem no ensino de função exponencial [Disertación de maestría, Pontificia Universidade Católica de São Paulo]. Pontificia Universidade Católica de São Paulo.
- Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66-86.
- Depósito Central de Valores y Cadem. (2022). Estudio de educación financiera 2022. <https://www.dcv.cl>
- Euler, L. (1998). Introduction to analysis of the infinite. Book 1 (J. Blanton, Trad.). Springer-Verlag. (Trabajo original publicado ca. 1748).
- Flores, R., y Vigo, K. (2019). La función exponencial en la enseñanza media: un estado del arte. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, 8(2), 27-47.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada. <https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/>
- Heyd-Metzuyanim, E., Sharon, A. J., Baram-Tsabari, A., y Golan, D. (2021). Mathematical media literacy in the COVID-19 pandemic and its relation to school mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 108(1-2), 201-225. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10075-8>
- Katz, V. J. (1998). A history of mathematics: An introduction. Addison-Wesley.
- Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. In A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 365-380). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13
- Medina, V., Vallejos, M., y Gutiérrez, D. (2020). El sentido de las matemáticas. Cuaderno de Investigaciones: Semilleros Andina, 13(13), 223-231.
- Ministerio de Educación de Chile. (2024). Matemática 3° y 4° medio: Texto del estudiante.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. NCTM.
- Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 3-32). Springer.
- Pezoa, M., y Morales, A. (2016). El rol de la modelación en una situación que resignifica el concepto de función. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 11(2), 52-64.
- Realpe Vidal, C. L. (2022). La enseñanza de la función exponencial, apoyada en la teoría del aprendizaje significativo crítico, en los estudiantes del grado 9 de la IER Botero [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional Universidad Nacional de Colombia.
- https://redcol.minciencias.gov.co/Record/UNACIONAL2_16e4b5e84c6883c8aa4d0add106dccb1/Details
- Stake, R. E. (2007). Investigación con estudio de casos (4.ª ed.). Morata.
- Vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Springer Spektrum.
- Yin, R. K. (2018). Case study research and applications: Design and methods (6th ed.). SAGE Publications.



ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

MODELACIÓN MATEMÁTICA ESCOLAR DE LA ELIPSE EN CONTEXTO ASTRONÓMICO

SCHOOL MATHEMATICAL MODELING OF THE ELLIPSE IN AN ASTRONOMICAL CONTEXT

Karla Pacheco López

karla.pacheco2020@umce.cl

<https://orcid.org/0009-0007-0422-2929>

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Iván Pérez-Vera

ivan.perez@umce.cl

<https://orcid.org/0000-0003-2636-6521>

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

RESUMEN

Esta investigación presenta el diseño e implementación de una situación de aprendizaje para la enseñanza de la elipse, desarrollada desde un enfoque interdisciplinario que articula la matemática escolar con fenómenos astronómicos fundamentados en las leyes de Kepler. La propuesta se sustenta en una perspectiva de modelación matemática entendida como una práctica social de construcción de conocimiento y se desarrolla mediante una metodología cualitativa, a través de un estudio de casos en un contexto escolar. El objetivo es analizar cómo los estudiantes construyen significados sobre la elipse al vincularla con el movimiento planetario y cómo una situación de aprendizaje interdisciplinaria favorece aprendizajes significativos y una comprensión más profunda de este objeto matemático. El análisis de las producciones estudiantiles permite reflexionar sobre las estrategias de enseñanza implementadas y su aporte a los procesos de discusión, reflexión y resignificación conceptual. Finalmente, el estudio propone una alternativa contextualizada para la enseñanza de las cónicas y ofrece una experiencia didáctica replicable en otros contextos escolares.

Palabras Clave:*elipse, modelación matemática escolar, leyes de Kepler, interdisciplinariedad, astronomía*

ABSTRACT

This study presents the design and implementation of a learning situation for teaching the ellipse, developed through an interdisciplinary approach that connects school mathematics with astronomical phenomena grounded in Kepler's laws. The proposal is based on a perspective of mathematical modeling understood as a social practice of knowledge construction and is carried out using a qualitative case study in a school context. This study aims to analyze how students develop an understanding of the ellipse when it is linked to planetary motion, and how an interdisciplinary learning situation fosters meaningful learning and a deeper understanding of this mathematical object. The analysis of students' work enables reflection on the teaching strategies implemented and their contribution to processes of discussion, reflection, and conceptual reinterpretation. Finally, the study proposes a contextualized alternative for teaching conic sections and offers a didactic experience that can be replicated in other school contexts.

Keywords:*ellipse, school mathematical modeling, Kepler's laws, interdisciplinarity, astronomy*

1. ANTECEDENTES

La elipse constituye uno de los objetos fundamentales del estudio de las secciones cónicas en la matemática escolar y posee una relevancia significativa tanto desde el punto de vista geométrico como en su aplicación a diversos fenómenos científicos. En el currículum escolar chileno, la elipse es abordada junto con la circunferencia, la parábola y la hipérbola, y se presenta en distintos niveles y asignaturas como un objeto matemático clave para la comprensión de modelos geométricos y analíticos. Materiales oficiales del Ministerio de Educación de Chile y de la Unidad de Currículum y Evaluación (UCE) destacan, por ejemplo, que la elipse surge como la intersección de un cono recto con un plano inclinado, y promueven su estudio mediante el uso de ecuaciones cartesianas, modelos gráficos y contextos aplicados (UCE, s. f., p. 125). Asimismo, programas de estudio de tercer y cuarto año medio incorporan el análisis de órbitas elípticas de planetas como la Tierra y Marte, integrando herramientas de modelación y programación para representar dichos movimientos (UCE, 2021). En este sentido, el currículum escolar reconoce explícitamente la pertinencia de articular el estudio de la elipse con contextos astronómicos, como las leyes de Kepler y la explicación de fenómenos asociados a órbitas planetarias y eclipses.

Desde la literatura científica y didáctica, la enseñanza de la elipse ha sido ampliamente estudiada debido a las dificultades que presenta su aprendizaje cuando se aborda desde enfoques tradicionales centrados casi exclusivamente en su definición algebraica. En esta línea, diversas investigaciones han evidenciado que el tratamiento escolar de las cónicas tiende a privilegiar aspectos formales y procedimentales por sobre su comprensión conceptual y contextualizada. Por ejemplo, Bonilla y Parraguez (2012) muestran que la enseñanza de las cónicas suele reducirse a la manipulación de ecuaciones sin conexión con su significado geométrico o físico, mientras que Del Castillo (2004) identifica dificultades en la comprensión de sus propiedades cuando estas no se articulan con contextos significativos. Desde una perspectiva sociocultural, Pérez y Salazar (2025) señalan que el discurso matemático escolar presenta los objetos matemáticos como conocimientos acabados y centrados en procedimientos, lo que limita las posibilidades del estudiantado de construir, utilizar y resignificar el saber matemático. En consecuencia, este tipo de aproximaciones puede restringir la comprensión profunda del objeto matemático “elipse”, especialmente cuando se desvincula de contextos que le otorgan sentido.

Diversos autores advierten que esta aproximación limita la comprensión conceptual del objeto matemático al relegar otras representaciones relevantes, como la gráfica o la contextual. En respuesta a ello, se han propuesto estrategias didácticas que incorporan la resolución de problemas, el uso de software dinámico —como GeoGebra— y actividades contextualizadas, con el fin de favorecer aprendizajes significativos. Por ejemplo, Del Castillo (2004) destaca el uso de múltiples representaciones para favorecer la comprensión de las propiedades de la elipse, mientras que Osorio (2017) propone actividades mediadas por tecnología para su enseñanza. En la misma línea, Méndez et al. (2023) evidencian el potencial de herramientas digitales para la exploración de objetos geométricos, y Pérez y Salazar (2025) muestran cómo la modelación en contextos situados permite resignificar los objetos matemáticos más allá de su tratamiento procedimental. En esta línea, Del Castillo (2004) destaca la importancia de trabajar con múltiples registros de representación —gráfico, algebraico y contextual—, ya que estos favorecen la exploración de propiedades de la elipse y permiten avanzar hacia una comprensión más integral del objeto matemático. Asimismo, Osorio (2017) propone actividades orientadas a que los estudiantes comprendan propiedades como la suma constante de distancias a los focos, la excentricidad y los semiejes, mediante procesos de exploración guiada y uso de tecnología. Desde una perspectiva de modelación, Arrieta y Díaz (2015) sostienen que los objetos matemáticos adquieren sentido cuando son puestos en uso para intervenir fenómenos, mientras que Pérez y Salazar (2025) muestran que la modelación en contextos situados permite resignificar saberes matemáticos que habitualmente son enseñados de forma procedimental. En conjunto, estas investigaciones permiten sostener que la enseñanza de la elipse se ve fortalecida cuando se integra a contextos significativos y se articula con prácticas de modelación matemática escolar. Estas investigaciones coinciden en señalar que la enseñanza de la elipse se ve fortalecida cuando se integra a contextos significativos y se articula con prácticas de modelación matemática escolar.

Históricamente, la relación entre matemática y astronomía ha sido central para la construcción de modelos explicativos del movimiento planetario. Las leyes formuladas por Johannes Kepler a comienzos del siglo XVII marcaron un quiebre con la concepción circular del universo, al establecer que los planetas describen órbitas elípticas con el Sol situado en uno de sus focos. Este descubrimiento no solo consolidó la elipse como un objeto

matemático de gran relevancia científica, sino que también abrió la posibilidad de utilizar el contexto astronómico como un recurso pedagógico para introducir sus propiedades y definiciones. Desde una perspectiva educativa, trabajos como los de Murillo Silva (2012), Barrios (2016) y Ramírez y Reyes (2017) muestran que el estudio de las órbitas planetarias y de las leyes de Kepler puede constituirse en un contexto fértil para la enseñanza de la elipse y de las secciones cónicas. En particular, Ramírez y Reyes (2017) proponen abordar la primera ley de Kepler a partir de los elementos de la elipse, favoreciendo la articulación entre matemática y astronomía. Asimismo, Barrios (2016) presenta el uso de las leyes de Kepler como alternativa pedagógica para la enseñanza de las secciones cónicas, evidenciando su potencial en contextos educativos. En esta misma línea, Aguilera y Bolívar (2004) destacan que la práctica astronómica permite establecer relaciones entre contenidos matemáticos y fenómenos científicos, promoviendo una comprensión más contextualizada del aprendizaje.

En este escenario, la modelación matemática y la interdisciplina emergen como ejes articuladores para la enseñanza de la elipse. La modelación matemática es reconocida no solo como una herramienta para resolver problemas científicos, sino como un proceso que permite identificar variables relevantes, formular preguntas, traducir fenómenos al lenguaje matemático y construir modelos con sentido. Estudios recientes evidencian que las tareas de modelación en contextos interdisciplinarios promueven aprendizajes significativos y el desarrollo de habilidades críticas, al tiempo que permiten integrar la matemática con otras disciplinas como la física, la astronomía o la tecnología (Cabrera-Baquedano et al., 2022; Nakakoji y Wilson, 2020; Valdés, 2021). No obstante, la literatura también advierte que el diseño de estas tareas requiere preguntas claras y contextos cuidadosamente seleccionados para evitar una integración superficial entre disciplinas. En este sentido, Huincahue (2022) señala que la interdisciplina en educación matemática exige condiciones específicas de articulación entre saberes, ya que, de lo contrario, puede reducirse a una simple yuxtaposición de contenidos sin una integración conceptual real.

A partir de estos antecedentes, el objetivo de este artículo es reportar el diseño e implementación de una situación de aprendizaje orientada a la enseñanza de la elipse, utilizando las leyes de Kepler como contexto interdisciplinario para favorecer procesos de modelación matemática escolar y la articulación entre distintos modelos de repre-

sentación. En particular, se busca responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo contribuye la modelación matemática, en un contexto astronómico, a que los estudiantes construyan significados más profundos sobre la elipse y sus propiedades?

2. POSTURA TEÓRICA

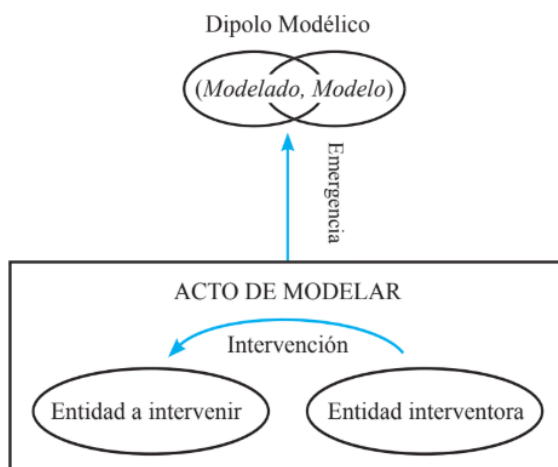
Para configurar los antecedentes y postura teórica, organizamos este apartado desde cuatro ejes que nos permitirán comprender de qué forma la modelación matemática escolar puede, en un contexto astronómico, contribuir a que los estudiantes construyan significados más profundos sobre la elipse y sus propiedades. Se presentan profundizaciones sobre entendimientos sobre la modelación desde la perspectiva sociocultural de la matemática educativa, la articulación entre matemática e interdisciplina, una profundización sobre la elipse en el contexto de las leyes de Kepler y finalmente una propuesta de estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje.

2.1 Modelación desde una perspectiva sociocultural

En este trabajo nos posicionamos desde la perspectiva de modelación propuesta por Arrieta y Díaz (2015), quienes conciben la modelación como una práctica de articulación intencionada entre dos entes: el modelo y lo modelado, con el propósito de intervenir un fenómeno. Desde esta mirada, la modelación no se reduce a la aplicación de técnicas matemáticas, sino que se configura como una práctica situada que permite describir, interpretar, predecir o evaluar fenómenos en contextos específicos.

En este marco, el modelo no existe de manera independiente, sino que adquiere dicho estatus cuando es puesto en uso por un sujeto para intervenir el fenómeno. Así, un objeto matemático se transforma en modelo en la medida en que es utilizado con una intencionalidad de intervención, y el fenómeno, a su vez, aporta significados particulares al objeto matemático en su nuevo rol. Esta relación se representa mediante el dipolo modélico, que articula modelo, fenómeno y acción de modelar, tal como se esquematiza en la Figura 1.

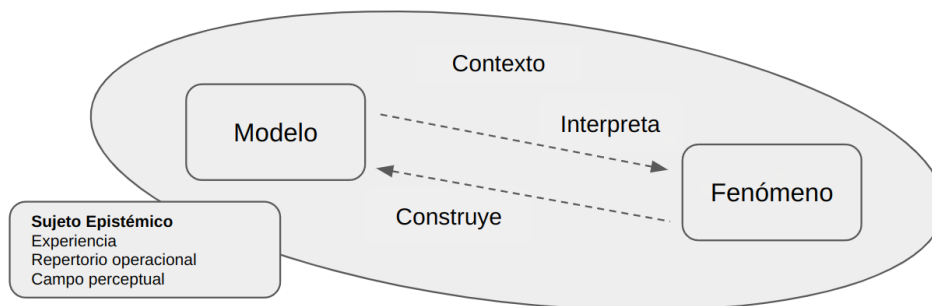
Figura 1. La modelación: El acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico



Nota. Arrieta y Díaz (2015, p.36)

Desde esta perspectiva, el acto de modelar implica necesariamente la participación de quien modela. En este sentido, retomamos la noción de sujeto epistémico propuesta por Carrasco et al. (2014), entendida como aquel que interviene el fenómeno a partir de la articulación entre el propio fenómeno, los modelos construidos y su experiencia. Estos autores sitúan dicha articulación en un espacio epistémico de figuración, caracterizado por dimensiones operacionales, experienciales y perceptuales, noción que en este trabajo ampliamos hacia un espacio epistémico de modelación, como se representa en la Figura 2.

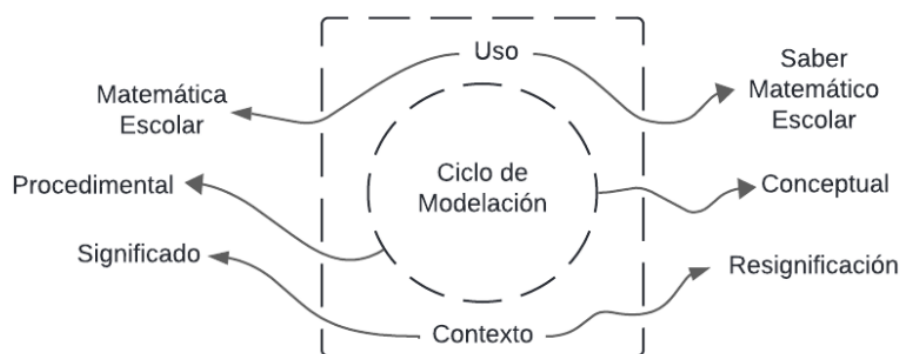
Figura 2. Espacio epistémico de modelación



Nota. Adaptado de Carrasco et al. (2014, p.368)

Desde una perspectiva sociocultural, entendemos que matemática y realidad no se presentan como dominios separados, sino que se articulan en un mismo proceso de construcción de significados. En este sentido, los contextos socioculturales aportan sentidos a los objetos matemáticos cuando estos son puestos en uso para intervenir fenómenos relevantes. Siguiendo a Pérez y Salazar (2024), sostenemos que la vivencia de un ciclo de modelación matemática escolar posibilita la reconfiguración de las herramientas matemáticas del estudiante, transformando lo procedimental en conceptual y resignificando los saberes escolares en función del contexto, tal como se sintetiza en la Figura 3.

Figura 3. Transformaciones al vivenciar un ciclo de modelación matemática escolar



Nota. Pérez y Salazar (2024, p.17)

En síntesis, en este trabajo asumimos la modelación matemática como una práctica social y cultural, en la que el sujeto epistémico, al intervenir un fenómeno mediante la articulación de diversos modelos, construye y resignifica significados matemáticos. Esta postura teórica orienta el diseño de la situación de aprendizaje y el análisis de las producciones estudiantiles, permitiendo comprender cómo la elipse adquiere nuevos sentidos al ser trabajada en un contexto astronómico interdisciplinario.

2.2 Interdisciplina en la enseñanza de la matemática

La interdisciplina, en el contexto de esta investigación, se concibe como una herramienta pedagógica clave para la enseñanza de la matemática. Según Morin (1997), el conocimiento escolar suele organizarse de manera fragmentada, producto de un aislamiento disciplinar que dificulta comprender el mundo en su complejidad, ya que cada disciplina se limita a su propio lenguaje y marcos teóricos. Esta fragmentación se refleja particularmente en la enseñanza tradicional de la matemática, frecuentemente presentada como un conjunto de verdades incuestionables y descontextualizadas (Valencia et al., 2008). Frente a ello, la interdisciplina abre un espacio que permite integrar saberes, establecer relaciones entre disciplinas y promover una formación con una mirada crítica y reflexiva.

En esta línea, Aguilera y Bolívar (2004) destacan la relación permanente entre la matemática y la astronomía, señalando que la elipse constituye un concepto fundamental para comprender fenómenos astronómicos y leyes físicas, como las leyes de Kepler, que explican el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Desde esta perspectiva, la matemática no solo actúa como una herramienta para formalizar y justificar predicciones científicas, sino que también contribuye a la construcción de aprendizajes significativos sobre fenómenos naturales. Esta articulación entre disci-

plinas no se limita a la astronomía, sino que históricamente también se ha manifestado en campos como la física, la química y la biología, donde los modelos matemáticos han sido esenciales para construir, explicar y validar conocimientos, ofreciendo diversos contextos para la enseñanza de contenidos matemáticos.

Asimismo, Falatoozadeh (2012) señala que la investigación y la enseñanza científica se han visto enriquecidas por nuevos conocimientos, destacando que el potencial de la interdisciplina radica en su capacidad para superar la fragmentación de las disciplinas científicas y del currículum escolar. En consecuencia, la literatura coincide en que la interdisciplina no solo enriquece el aprendizaje de la matemática, sino que también promueve el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo, así como la construcción activa del conocimiento por parte de los estudiantes. Esto se logra al situarlos en contextos que favorecen la articulación entre disciplinas, contribuyendo a una educación matemática más contextualizada, significativa y coherente con la complejidad de los fenómenos estudiados.

2.3 La elipse en el contexto de las leyes de Kepler

La elipse ha tenido un valor histórico fundamental en la astronomía, pues en este contexto el matemático y científico Johannes Kepler, a inicios del siglo XVII formuló tres leyes que describen el mo-

vimiento planetario. De Bernardini (2017) y Angulo (2018) destacan que la primera ley descubierta tiene como enfoque el que los planetas giran alrededor del sol en forma de elipse, donde uno de sus focos es el sol, mientras que el otro foco permanece vacío, asimismo esta primera ley define a la elipse como una curva plana en la que la suma de las distancias desde cualquiera de sus puntos a los focos es constantes e igual a la longitud mayor de la elipse. Este descubrimiento no solo significó un cambio en la concepción del universo, sino que le otorgó a la elipse un papel central como herramienta matemática capaz de describir el movimiento planetario.

Desde una perspectiva pedagógica, Del Castillo (2004) identificó que la comprensión de la elipse requiere utilizar múltiples representaciones las cuáles permiten que los estudiantes puedan experimentar con el objeto matemático, este tipo de actividades adquieren gran importancia porque permiten conectar un objeto matemático con un contexto real para los estudiantes, de esta forma la elipse cobra un nuevo sentido para los estudiantes más que una simple figura geométrica dentro de las secciones cónicas. Notemos que, esta experimentación de la elipse por medio del contexto astronómico es una vinculación directa entre la matemática y la astronomía, además que abre la posibilidad de ser aplicada en un contexto escolar por medio de las representaciones que menciona Del Castillo (2004); de esta forma vemos que se abre una posibilidad de presentar un enfoque interdisciplinario a los estudiantes lo que enriquece la comprensión de conceptos matemáticos más complejos como se mencionó en el apartado anterior.

Por ende, la elección del contexto astronómico para el diseño de esta propuesta de aprendizaje resulta ser acertada, pues es aplicable al contexto escolar y no solo otorga profundidad al estudio de la elipse, sino que también promueve aprendizajes significados al despertar la curiosidad del estudiante cuando se sitúa a la matemática en un escenario científico y culturalmente relevante.

3. ANTECEDENTES METODOLÓGICOS

3.1 Enfoque y diseño de investigación

La presente investigación se basa en un estudio de carácter cualitativo utilizando la metodología de estudio de casos como método investigativo. Este tipo de método responde al objetivo general de este trabajo de estudio, pues según Sampieri et

al. (1991) esta metodología es pertinente cuando se busca una comprensión general del estudio, es decir que busca analizar lo que comprenden los estudiantes cuando, en este caso, se someten a una situación didáctica en torno a la articulación que existe entre la matemática y la astronomía.

3.2 Instrumentos de recolección de datos

Para la recolección de datos se diseñó un cuestionario estructurado como situación de aprendizaje, siguiendo la propuesta metodológica de Balda (2022). Previo a la implementación reportada en este estudio, dicho instrumento fue sometido a un proceso de pilotaje con un grupo de 10 estudiantes de una escuela de la comuna de Pichilemu, quienes participaron en una actividad desarrollada en dependencias de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE). Este pilotaje permitió identificar dificultades en la comprensión de las consignas, así como ajustar la redacción de las preguntas y la secuencia de actividades.

De manera complementaria, la investigadora principal mantuvo un diario de campo (Sampieri et al., 1991), en el que consignó observaciones y reflexiones sobre el proceso de implementación, aportando una perspectiva interpretativa que permitió contextualizar y enriquecer el análisis de las producciones estudiantiles.

El análisis se realizó mediante un enfoque interpretativo de las producciones estudiantiles, atendiendo a la emergencia de significados, al tránsito entre modelos (tabular, gráfico y algebraico) y a los momentos del ciclo de modelación matemática escolar que se evidencian en las respuestas y construcciones desarrolladas por los estudiantes.

3.3 Diseño de la situación de aprendizaje

La situación de aprendizaje fue diseñada siguiendo la estructura de cinco fases propuesta por Balda (2022): introducción, exploración, procedimental, consolidación y ejercitación. Esta estructura permitió organizar las actividades de manera progresiva, situando la elipse en un contexto astronómico y favoreciendo el tránsito entre distintos modelos matemáticos en un proceso de modelación escolar.

Cada fase se operacionaliza a través de actividades específicas que articulan objetivos, descripciones y preguntas orientadoras, tal como se pre-

senta en la Tabla 1. En conjunto, las actividades buscan activar el interés inicial mediante el contexto de las leyes de Kepler, promover la exploración de datos astronómicos, construir modelos tabulares, gráficos y algebraicos de la elipse, validar propiedades fundamentales del objeto matemático y, finalmente, aplicar los conocimientos construidos en ejercicios escolarizados.

De este modo, la situación de aprendizaje favorece aprendizajes significativos sobre la elipse, integrando la matemática escolar con un fenómeno científico relevante y promoviendo la articulación entre distintos modelos en un contexto interdisciplinario.

Tabla 1. Diseño de la situación de aprendizaje

Actividades	Objetivo de la actividad	Descripción de la actividad	Pregunta planteada en el cuestionario
1. Introducción	Activar el interés del estudiante para introducir la elipse en su contexto astronómico.	Se les presenta a los estudiantes quién fue Johannes Kepler y su aporte a la astronomía con las 3 grandes leyes que él planteó en la ciencia.	¿Qué crees que permiten describir estas trayectorias propuestas por Kepler?
2. Exploración	Guiar al estudiante en la observación e interpretación de información entregada sobre las órbitas planetarias.	Se les enseña a los estudiantes las herramientas que posee la página web, por ejemplo, cómo calcular distancias desde el planeta al sol en ciertos días, para así extraer datos.	¿Qué crees que podríamos necesitar para representar la trayectoria que observaste en las imágenes o simulador?
3. Procedimental	Analizar y construir diferentes modelos de representación de la elipse.	Se le entregan datos a los estudiantes para que puedan analizar un modelo tabular y construir un modelo gráfico y algebraico de la elipse.	¿Qué sentido tiene organizar estos datos en una tabla antes de graficarlos? ¿Qué puedes entender mejor así? ¿Qué puedes inferir sobre la forma de la órbita si los focos están muy cerca uno del otro? ¿Qué aprendiste sobre la relación entre la forma de la figura y los números que aparecen en la ecuación?
4. Consolidación	Fomentar la discusión colectiva para validar los modelos construidos.	Comparar los distintos modelos creados por los estudiantes para observar similitudes.	¿La suma se mantuvo constante en todos los puntos que se midieron? ¿Por qué crees que ocurre eso? ¿Qué indica que la figura trazada sí es una elipse?
5. Ejercitación	Aplicar el conocimiento construido en ejercicios escolarizados.	Aplicar las propiedades de la elipse en ejercicios escolarizados.	¿Qué información de la órbita puedes obtener a partir de la ecuación? Menciona al menos dos elementos. Sabiendo que la distancia focal es de 11,9 millones de km, ¿Cuál es la excentricidad estimada? ¿Qué diferencias puedes ver entre la excentricidad de Mercurio y la Tierra? ¿Qué error observas que cometió el estudiante? ¿A qué crees que se debe?

3.4 Participantes y contexto

Este estudio contó con la participación de estudiantes del sistema educativo regular chileno, correspondientes a tercero y cuarto año medio de un establecimiento educacional de la comuna de San Ramón, en la Región Metropolitana. La muestra estuvo conformada por 15 participantes, quienes se organizaron en 3 grupos de trabajo de entre 2 y 4 integrantes para resolver el cuestionario diseñado. Para el análisis se consideraron las producciones de aquellos grupos que avanzaron hasta la actividad 3.3 de la guía de implementación, ya que estas evidenciaban un desarrollo suficiente del proceso de modelación propuesto.

4. RESULTADOS

En este apartado se presentan los resultados correspondientes a los grupos que participaron en la implementación y que avanzaron hasta la actividad 3.3 de la guía. Asimismo, se desarrolla un análisis descriptivo y teórico de sus producciones, con base en las respuestas elaboradas por los participantes.

4.1 Resultado y análisis de la actividad N°1

En la primera actividad se presentó a los estudiantes la figura de Johannes Kepler y su aporte a la astronomía y la matemática. A partir de este contexto, se les planteó la pregunta: ¿Qué crees que permite predecir las trayectorias descubiertas por Johannes Kepler? Las respuestas evidencian diversas aproximaciones al fenómeno, predominantemente desde una perspectiva física.

El Grupo 1 relacionó la distancia entre el Sol y la Tierra con la temperatura del planeta, destacando consecuencias climáticas del movimiento orbital. El Grupo 2 asoció las trayectorias con la posibilidad de anticipar eventos futuros, como choques de meteoritos, reconociendo implícitamente la noción de predicción, aunque sin referirse a la forma de la trayectoria. Por su parte, el Grupo 3 mencionó fenómenos como la hora y el clima, vinculándolos de manera indirecta con la posición de la Tierra, sin aludir explícitamente a la órbita ni a la elipse (Tabla 2).

Tabla 2. Respuestas transcritas de los estudiantes de la actividad N°1

Grupo	Respuesta
Grupo 1	"Saber la temperatura del planeta, entre más lejos más frío y entre más cerca del sol más temperatura"
Grupo 2	"Podemos predecir el choque con los meteoritos"
Grupo 3	"El ciclo de la hora y el clima"

En conjunto, las respuestas muestran dificultades para vincular el fenómeno astronómico con el objeto matemático central del estudio. Predomina una interpretación centrada en explicaciones físicas, sin referencias a la forma geométrica de las trayectorias. Estos resultados permiten identificar el conocimiento previo de los estudiantes y evidencian la necesidad de articular explícitamente, desde el inicio, el contexto astronómico con la matemática escolar, como base para el posterior tránsito hacia la comprensión de la elipse.

4.2 Resultado y análisis de la actividad N°2

En la segunda actividad se utilizó el simulador de la NASA Eyes on the Solar System para explorar datos de planetas y satélites. A partir de ello, se preguntó: ¿Qué crees que podríamos necesitar para representar la trayectoria que observaste en las imágenes o en el simulador?

El Grupo 1 señaló la necesidad de conocer todas las distancias entre la Tierra y el Sol, reconociendo que estas varían y que tal información sería esencial para graficar la órbita. Esta respuesta evidencia un avance hacia la comprensión de la trayectoria elíptica, pues introduce el concepto de distancia como variable matemática y plantea la recolección de datos como requisito para representar el movimiento. En contraste, los Grupos 2 y 3 respondieron apelando a la gravedad del Sol y a la fuerza de atracción, centrando su explicación en aspectos físicos más que en elementos matemáticos de la trayectoria.

Tabla 3. Respuestas transcritas de los estudiantes de la actividad N°2

Grupo	Respuesta
Grupo 1	"Habría que conocer todas las distancias de la tierra al sol, por si disminuye o aumenta"
Grupo 2	"La gravedad del sol"
Grupo 3	"La fuerza de atracción"

El aporte del Grupo 1 constituye un indicio temprano de modelación matemática: como destacan Cabrera-Baquedano et al. (2022), los ciclos de modelación promueven aprendizajes significativos al integrar herramientas tecnológicas con la identificación de variables relevantes. En este caso, el simulador permitió visualizar la variación de distancias y conectar la astronomía con el análisis matemático.

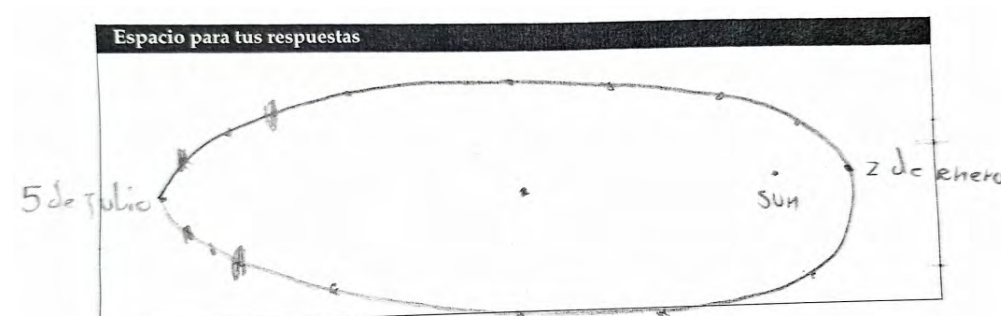
En síntesis, mientras la mayoría de los estudiantes mantuvo un enfoque físico, el Grupo 1 logró articular nociones matemáticas en torno a la variación de la distancia, mostrando una progresión inesperada en el tránsito hacia aprendizajes significativos sobre la elipse y su representación.

4.3 Resultado y análisis de la actividad N°3

En la primera parte de la Actividad 3 se entregaron datos extraídos del simulador de la NASA para organizar en tablas, graficar puntos de la órbita y analizar el modelo algebraico de la elipse. Ante la pregunta ¿Qué sentido tiene organizar estos datos en una tabla antes de graficarlos?, los grupos respondieron de manera diversa.

El Grupo 1 no lo expresó de forma escrita, pero representó gráficamente la órbita a partir de los datos, mostrando que comprendieron cómo los valores tabulares permitían ubicar puntos y construir la curva. El Grupo 2 explicó que ordenar los datos les ayudaba a ubicar la Tierra en su órbita y reconocer en qué meses estaba más cerca o más lejos del Sol, evidenciando noción de variación de distancias. El Grupo 3 no entregó respuesta.

Tabla 4. Respuestas de los estudiantes de la actividad N°3.1

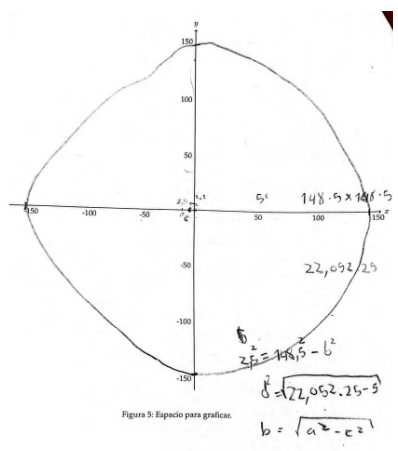
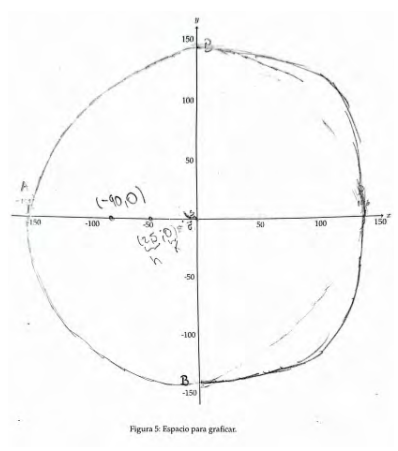
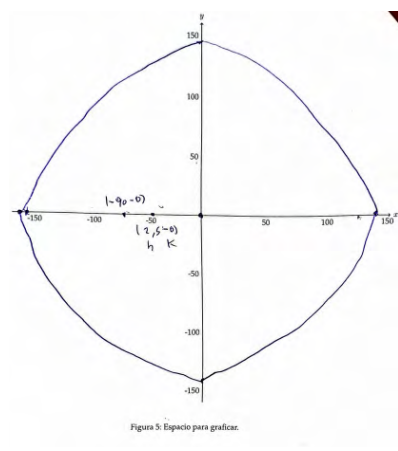
Grupo	Respuesta
Grupo 1	
Grupo 2	“Me sirve tenerlos ordenados para poder ubicar la tierra y en donde va orbitando, en que meses está más cerca o más lejos del sol”

Estos resultados muestran progresos en la transición entre datos tabulares y representaciones gráficas. En el caso del Grupo 1, su gráfica permitió vincular fechas específicas de perihelio y afelio, ejemplificando que las gráficas no solo representan fenómenos sino que también resignifican conceptos matemáticos (Cordero y Suárez, 2010). Tal conexión fortalece la relación entre matemática y astronomía (Aguilera y Bolívar, 2004). El Grupo 2, por su parte, articuló explícitamente el vínculo entre tabla y fenómeno, mostrando que las tablas actuaban como “dipolos modélicos” que median entre fenómeno y representación en línea con lo propuesto por Arrieta y Díaz (2015).

En síntesis, los Grupos 1 y 2 avanzaron hacia una comprensión con herramientas matemáticas de la órbita, mientras que el Grupo 3 no logró reconocer la utilidad de los datos para construir significados en torno a la elipse.

En la segunda parte de la actividad, los estudiantes recibieron instrucciones para construir la órbita de la Tierra en torno al Sol. A partir de ellas elaboraron sus gráficas, que se presentan a continuación.

Tabla 5. Gráficos de los estudiantes

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
		

Luego se les preguntó: ¿Qué puedes inferir sobre la forma de la órbita si los focos están muy cerca uno del otro? Las respuestas textuales se recogen en la Tabla 6.

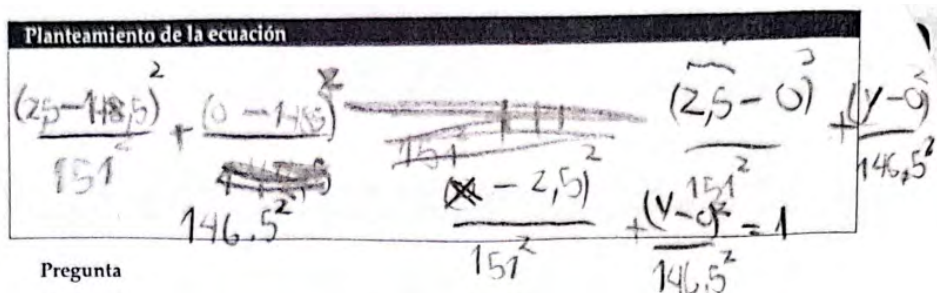
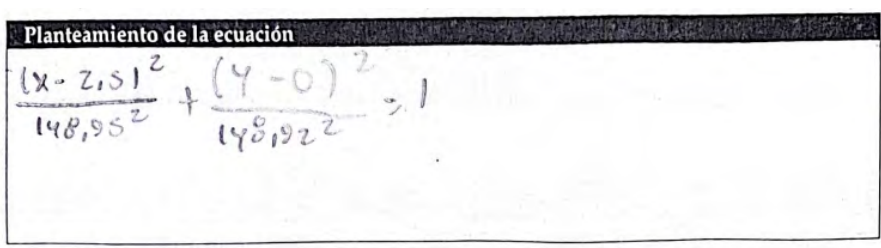
Tabla 6. Respuestas transcritas de los estudiantes de la actividad 3.2

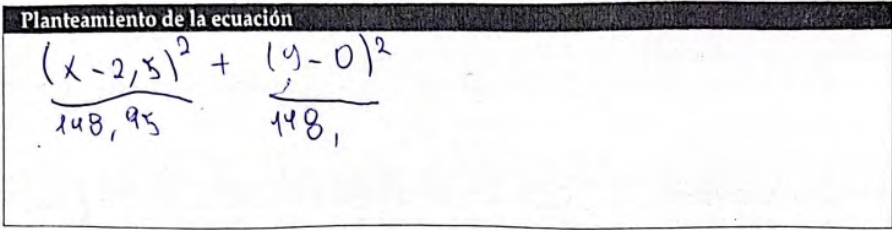
Grupo	Respuesta
Grupo 1	"Parece un círculo al tener los focos muy cercanos"
Grupo 2	"Según la distancia cambiaría la forma de la órbita, en la imagen de ejemplo los puntos estaban más lejos y la órbita era ovalada y en el plano cartesiano los puntos están más juntos y hacen una forma más circular"
Grupo 3	"Si están más cerca los focos es círculo y si están más lejos es ovalado"

Los tres grupos coincidieron en que, a medida que los focos se aproximan, la órbita adquiere una forma más cercana a la de un círculo. El Grupo 1 expresó esta idea de manera breve, señalando directamente la semejanza con una circunferencia. El Grupo 2 elaboró una explicación más detallada, indicando que la distancia entre los focos determina la forma de la órbita: cuando están próximos, la curva parece circular y, al separarse, adopta una forma más ovalada, apoyándose en ejemplos trabajados previamente en la guía. Por su parte, el Grupo 3 sostuvo que, si los focos están cerca, la trayectoria es un círculo, aunque sin distinguir que el círculo no posee focos, sino un único centro.

Estos resultados evidencian avances en la construcción de significados sobre la elipse. En el Grupo 1 se observa un tránsito desde los datos hacia la representación gráfica, proceso que fortalece la comprensión conceptual en contextos dinámicos (Arrieta y Díaz, 2015). El Grupo 2 logró una articulación más elaborada entre fenómeno y representación, configurando un espacio epistémico de figuración que permite resignificar el fenómeno astronómico mediante la gráfica (Carrasco, Díaz y Buendía, 2014). En la última parte de la Actividad 3, los estudiantes plantearon el modelo algebraico de la órbita terrestre a partir de la ecuación general de la elipse, cuyos resultados se presentan en la Tabla 7.

Tabla 7. Modelos algebraicos de los estudiantes

Grupo	Respuesta
Grupo 1	 Planteamiento de la ecuación $\frac{(x-12.5)^2}{151^2} + \frac{(y-148.5)^2}{146.5^2} = 1$ Pregunta
Grupo 2	 Planteamiento de la ecuación $\frac{(x-2.5)^2}{148.95^2} + \frac{(y-0)^2}{148.92^2} = 1$

Grupo 3	 Planteamiento de la ecuación $\frac{(x-2,5)^2}{148,95} + \frac{(y-0)^2}{148,}$
---------	--

Posteriormente, se les preguntó: ¿Qué aprendiste sobre la relación entre la forma de la figura y los números que aparecen en la ecuación? Las respuestas se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8. Respuestas transcritas de los estudiantes de la actividad N°3.3

Grupo	Respuesta
Grupo 1	“Con los datos de la distancia mayor y menor pude sacar el centro y eso me ayudó a sacar la fórmula para entender la elipse”
Grupo 2	“Los datos y el plano cartesiano están relacionados de forma que ambos ayudan a la ubicación en el plano, si los números ya están ubicados ayudan a hacer el plano y si solo el plano está ayuda a los números”

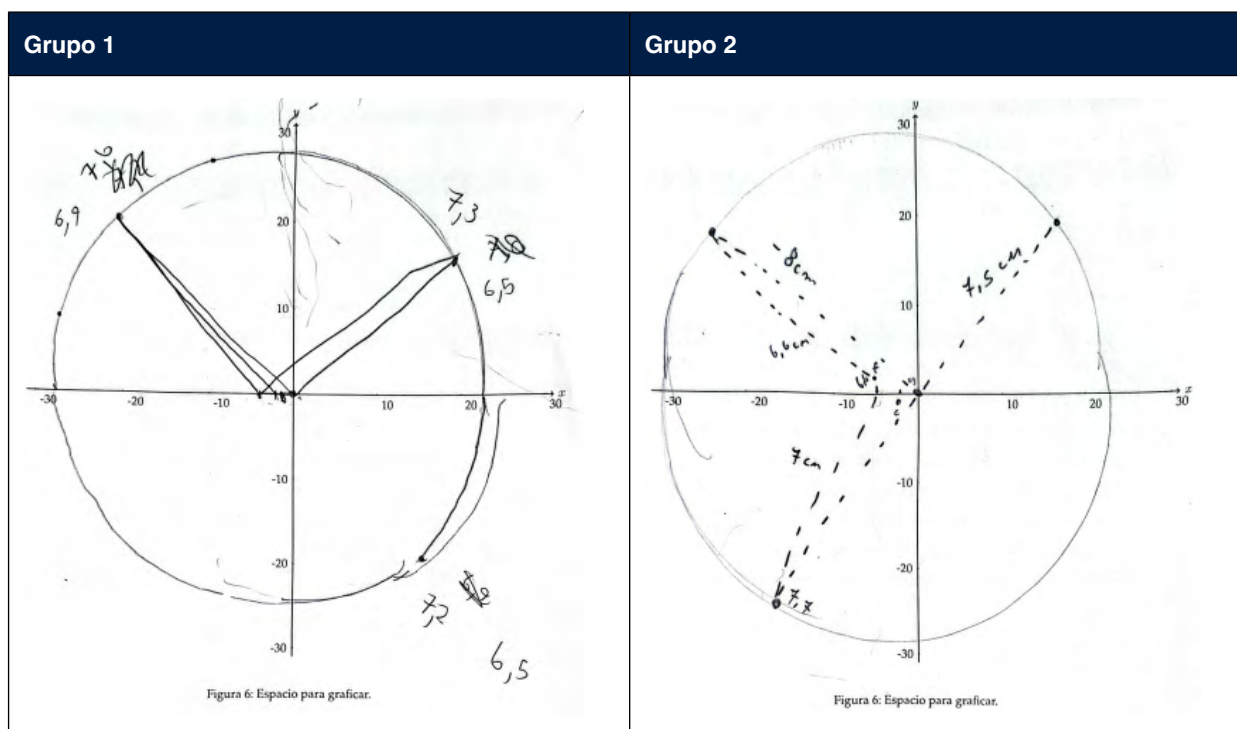
El Grupo 1 indicó que, a partir de las distancias mayor y menor, lograron ubicar el centro y comprender la fórmula de la elipse. El Grupo 2 destacó la relación bidireccional entre el plano cartesiano y los datos, señalando que ambos se apoyan mutuamente. El Grupo 3 no entregó una respuesta.

Estos resultados muestran que los Grupos 1 y 2 fueron capaces de transitar entre los modelos gráfico y algebraico, estableciendo vínculos significativos. Tal relación refleja lo señalado por Valdés (2021), quien plantea que la modelación permite traducir fenómenos reales al lenguaje matemático, y por Cordero y Suárez (2010), quienes subrayan que las gráficas actúan como conocimientos en sí mismos, facilitando conexiones entre teoría y práctica. En cambio, el Grupo 3 avanzó parcialmente, sin consolidar la bidireccionalidad entre representaciones, lo que confirma un ritmo más lento en la construcción de significados respecto a los demás grupos.

4.4 Resultado y análisis de la actividad N°4

En esta actividad, los estudiantes validaron la construcción de la elipse utilizando dos alfileres y un hilo. Los modelos obtenidos por los Grupos 1 y 2 se presentan en la Tabla 9. El Grupo 3 no presentó respuesta.

Tabla 9. Gráficos de los estudiantes



Posteriormente, midieron segmentos desde diferentes puntos de la elipse hasta los focos y respondieron a las siguientes preguntas: ¿Esa suma se mantuvo constante en todos los puntos que mediste? ¿Por qué crees que ocurre eso? y ¿Qué indica que la figura trazada sí es una elipse? Las respuestas textuales se presentan en la Tabla 10.

Tabla 10. Respuestas transcritas de los estudiantes de la actividad N°4

Grupo	Respuesta
Grupo 1	“Los puntos de foco, el círculo tiene uno que es el centro mientras que en la elipse tiene 2, ocurre porque la distancia de los focos son iguales y cuando ponemos un punto forma un triángulo lo que hace que siempre da el mismo resultado”
Grupo 2	“1. La suma es parecida, no es tanta diferencia y esto es debido a la elipse, que es simétrico el círculo 2. Debido a que la suma de F y S es constante”

El Grupo 1 señaló que, a diferencia del círculo, la elipse posee dos focos y que al unirlos con un punto se forma un triángulo que siempre da el mismo resultado. Aunque no formularon explícitamente la propiedad de la suma constante, su razonamiento geométrico muestra una comprensión en desarrollo de este concepto fundamental. El Grupo 2 reconoció directamente dicha propiedad, aunque la describió como “parecida” debido a imprecisiones de la construcción manual. Su respuesta, aunque ambigua al mezclar nociones de simetría, refleja un avance hacia la justificación geométrica. El Grupo 3 no entregó respuesta.

Estos hallazgos evidencian un momento clave de aprendizaje: la validación de un modelo geométrico a partir de una propiedad matemática. Tal como señalan Pérez (2020) y Cordero y Suárez (2010), el diálogo entre modelos tabulares, gráficos y algebraicos enriquece la construcción social del conocimiento matemático. Además, la propiedad de la suma constante conecta el objeto matemático con fenómenos astronómicos, en línea con Valencia et al. (2008) y Ramírez y Reyes (2017), favoreciendo aprendizajes significativos y un puente interdisciplinario entre matemática y astronomía.

4.5 Resultado y análisis de la actividad N°5

La última actividad tuvo como propósito integrar los aprendizajes construidos en las fases previas mediante tres ejercicios: algebraico, tabular y gráfico. El objetivo fue evaluar si los estudiantes eran capaces de movilizar representaciones múltiples para comprender la elipse.

Análisis algebraico: Se presentó la ecuación $\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ y se solicitó identificar información de la órbita. Las respuestas se muestran en la Tabla 11.

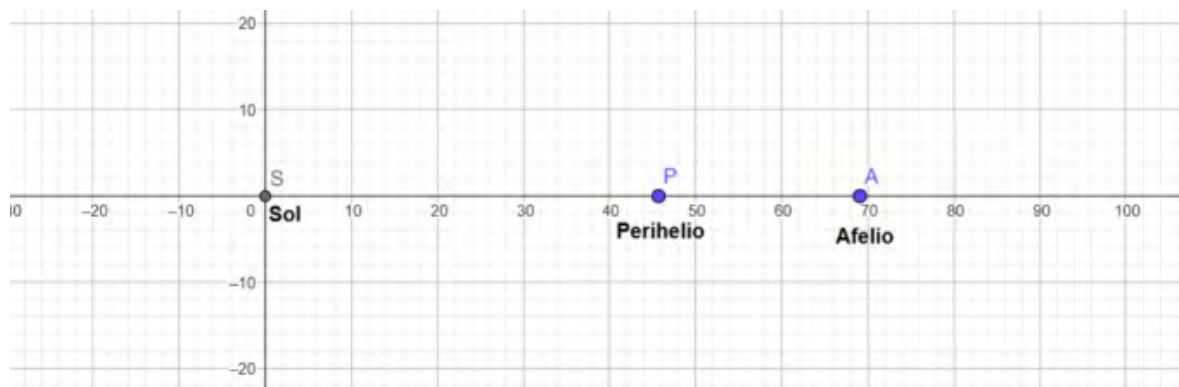
Tabla 11. Respuestas transcritas de los estudiantes de la actividad N°4

Grupo	Respuesta
Grupo 1	"x=5, eje menor = 5 y=-2, eje mayor = 4"
Grupo 2	"El semieje mayor (6) El menor (5) El centro (5,-2)"

El Grupo 1 identificó correctamente el centro, aunque presentó errores en el cálculo de los semiejes. El Grupo 2 logró determinar centro y semiejes de manera más formal y precisa, mostrando un tránsito hacia un lenguaje matemático más elaborado. El Grupo 3 no entregó respuesta. Estos resultados ponen en evidencia distintos niveles de avance en la relación entre ecuación y elementos geométricos: algunos estudiantes permanecen en una etapa inicial de conexión, mientras que otros alcanzan mayor formalización.

Análisis tabular y gráfico: En estos apartados no se registraron respuestas escritas, lo que limitó la posibilidad de análisis. Sin embargo, este hecho constituye un hallazgo en sí mismo, pues revela que los estudiantes avanzaron con mayor seguridad en el modelo algebraico, mientras que las tareas que exigían articular datos numéricos y representaciones gráficas resultaron más complejas. No obstante, un estudiante logró representar la órbita de Mercurio utilizando los datos de la tabla, obteniendo la gráfica que se muestra en la Figura 4.

Figura 4. Representación la órbita de Mercurio utilizando los datos de la tabla



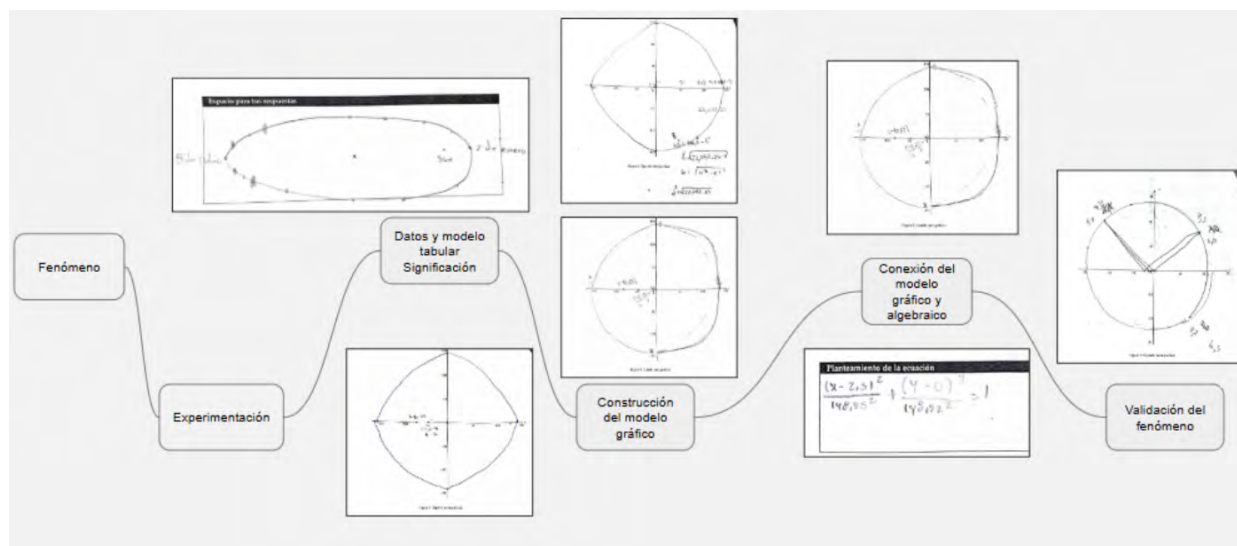
Nota. Producciones de estudiantes

En síntesis, la actividad 5 evidenció progresos relevantes en el análisis algebraico, aunque acompañados de errores de cálculo, y dificultades en el tránsito hacia lo tabular y gráfico. Estos resultados confirman la importancia de trabajar con variedad de modelos para favorecer la resignificación del concepto de elipse (Arrieta y Díaz, 2015) y muestran que los estudiantes requieren apoyos adicionales para articularlos en un mismo proceso de modelación.

4.6 Análisis de los hallazgos

En este apartado se presenta una síntesis de los resultados obtenidos en la implementación, integrando tanto los aspectos descriptivos como los teóricos. Con este fin, se incluye la Figura 5, que resume la ruta de modelación vivido por los estudiantes durante la guía, mostrando cómo progresaron desde la observación del fenómeno astronómico hasta la validación geométrica y algebraica de la elipse.

Figura 5. Ruta de construcción del ciclo de modelación de la elipse en contexto astronómico



Nota. Elaboración Propia

El proceso de implementación se inició con la presentación del fenómeno astronómico a partir de las leyes de Kepler, utilizando el simulador Eyes on the Solar System (NASA), lo que permitió a los estudiantes explorar distintas órbitas planetarias. En las primeras actividades, las respuestas se centraron principalmente en explicaciones de carácter físico —como temperatura, gravedad o clima—, con escasas referencias a trayectorias o propiedades geométricas de la elipse. Esta dificultad inicial resulta coherente con lo señalado por Morin (1997), quien advierte que la enseñanza escolar tiende a presentar los saberes de manera fragmentada, limitando la articulación entre disciplinas.

A medida que avanzó la implementación, algunos grupos comenzaron a reconocer la variación de la distancia entre la Tierra y el Sol como un elemento relevante para representar la trayectoria orbital, evidenciando un tránsito desde explicaciones causales hacia una aproximación propia de la modelación matemática. En este sentido, el uso de datos para construir gráficos permitió extraer propiedades de la elipse, en concordancia con lo planteado por Cabrera-Baquedano et al. (2022) sobre el potencial formativo de los ciclos de modelación.

En particular, la Actividad 3 favoreció el tránsito entre modelos tabulares, gráficos y algebraicos, estableciendo relaciones bidireccionales entre representaciones. Este proceso puede interpretarse a la luz de los dipolos modélicos (Arrieta y Díaz, 2015), donde las tablas operaron como entidades mediadoras entre fenómeno y modelo. Asimismo, en la Actividad 4, la construcción empírica de la elipse con hilo y alfileres permitió validar la propiedad de la suma constante, fortaleciendo el vínculo entre matemática escolar y contexto astronómico.

Finalmente, la Actividad 5 mostró distintos niveles de formalización algebraica, evidenciando un tránsito progresivo hacia una comprensión integrada y significativa de la elipse, donde la modelación y la interdisciplinariedad se consolidan como ejes del aprendizaje.

5. DISCUSIONES

La implementación de la situación de aprendizaje evidenció una progresión en la construcción de significados asociados a la elipse y su articulación con el contexto astronómico fundamentado en las leyes de Kepler. En las primeras actividades, particularmente en la Actividad 1, las respuestas de los estudiantes se centraron en explicaciones de carácter físico, asociando las trayectorias planetarias con factores como la temperatura, la gravedad o el clima. Si bien estas interpretaciones no son incorrectas, carecen de un sentido geométrico explícito, lo que pone de manifiesto una ausencia inicial de vínculo entre el fenómeno astronómico y el objeto matemático de estudio. Esta fragmentación resulta coherente con lo planteado por Morin (1997), quien advierte que la enseñanza escolar tiende a presentar los saberes de manera aislada, dificultando la construcción de relaciones entre disciplinas.

En la Actividad 2 se observa un primer indicio de articulación con la matemática, cuando algunos estudiantes comienzan a reconocer la variación de la distancia entre la Tierra y el Sol como un elemento relevante del fenómeno. Esta identificación permitió comprender que dicha variación puede registrarse y representarse, abriendo paso a la construcción de la trayectoria orbital. Sin embargo, este avance fue logrado solo por uno de los grupos, mientras que los demás mantuvieron explicaciones centradas en lo físico, evidenciando distintos ritmos en la construcción del conocimiento.

La Actividad 3 marcó un punto de inflexión en el proceso, ya que los estudiantes debieron organizar datos en un modelo tabular y establecer relaciones con representaciones gráficas y algebraicas. En esta etapa, algunos grupos lograron articular estos modelos y reconocer la órbita planetaria como una elipse, mientras que otros se limitaron a construir representaciones gráficas sin consolidar su vínculo con el modelo algebraico. Este tránsito entre modelos puede interpretarse desde la perspectiva de la modelación propuesta por Arrieta y Díaz (2015), en la que los modelos no operan de manera aislada, sino que se articulan en dipolos modélicos que configuran una red de modelos para intervenir el fenómeno. En este sentido, las tablas funcionaron como entidades mediadoras que permitieron articular fenómeno y modelo, favoreciendo la interpretación y validación de la trayectoria orbital.

Desde una perspectiva interdisciplinaria, los re-

sultados muestran que la articulación entre matemática y astronomía permitió ampliar la comprensión del fenómeno estudiado. En coherencia con Valencia et al. (2008), la interdisciplina posibilitó una visión más integrada al vincular el objeto matemático con su aplicación en un contexto real. Asimismo, el diseño de la guía, con preguntas claras y progresivas, favoreció el tránsito entre distintos modelos, condición que Huincahue (2022) identifica como central en tareas interdisciplinarias efectivas.

En las Actividades 4 y 5, los estudiantes alcanzaron un mayor nivel de formalización al validar empíricamente la propiedad de la suma constante de distancias y al identificar elementos característicos de la elipse a partir de su ecuación. Este proceso evidencia, en términos de Pérez y Salazar (2024), cómo la matemática escolar se pone en uso en un contexto de alfabetización científico-matemática e interdisciplinariedad, resignificando lo procedimental y favoreciendo la construcción de significados tanto del objeto matemático como del fenómeno astronómico. La validación concreta mediante construcciones con hilo y alfileres reforzó este proceso, permitiendo comprender la elipse más allá de una definición formal.

Finalmente, si bien la propuesta mostró avances significativos, se identifican algunas limitaciones: el tiempo reducido para la exploración autónoma del simulador, el foco exclusivo en la órbita terrestre, el carácter guiado de la etapa de modelación y la ausencia de una discusión colectiva en la Actividad 4. Estas limitaciones abren proyecciones para futuras implementaciones, particularmente en la ampliación de espacios de exploración, comparación y discusión colectiva.

6. CONCLUSIONES

El presente estudio permitió analizar cómo la modelación matemática, situada en un contexto astronómico fundamentado en las leyes de Kepler, contribuye a la construcción de significados más profundos sobre la elipse en estudiantes de enseñanza media. En coherencia con los antecedentes curriculares revisados, el currículum escolar chileno propone explícitamente el uso de contextos astronómicos para abordar la enseñanza de las cónicas, lo que justifica y respalda la elección del escenario de trabajo desarrollado en esta investigación. La incorporación de este contexto permitió articular contenidos matemáticos con fenómenos científicamente relevantes, favoreciendo una enseñanza más contextualizada y alineada con los propósitos formativos del currículum.

Los resultados obtenidos muestran que, si bien los estudiantes inician la experiencia con explicaciones predominantemente físicas del fenómeno astronómico, progresivamente logran establecer vínculos entre dicho fenómeno y el objeto matemático de estudio. Esta evolución confirma lo señalado por Morin (1997) respecto al aislamiento disciplinar presente en la enseñanza escolar, pero también evidencia que dicho aislamiento puede ser superado mediante propuestas didácticas que promuevan la interdisciplina. En particular, el tránsito desde interpretaciones físicas hacia la identificación de propiedades geométricas de la elipse se vio favorecido por el diseño de actividades que exigían organizar datos, construir representaciones y validar propiedades matemáticas.

Desde la literatura científica, diversos autores destacan la necesidad de trabajar con múltiples representaciones para favorecer la comprensión de la elipse (Del Castillo, 2004). En este sentido, la situación de aprendizaje diseñada permitió que los estudiantes transitaran entre modelos tabulares, gráficos y algebraicos, estableciendo relaciones entre ellos y utilizando cada uno como fuente de información para construir nuevos modelos. Este tránsito fue especialmente visible en la Actividad 3, donde algunos grupos lograron articular datos, gráficos y ecuaciones para interpretar la órbita planetaria como una elipse. No obstante, también se evidenció que no todos los estudiantes alcanzaron el mismo nivel de articulación, lo que reafirma la necesidad de generar más instancias de discusión colectiva y validación compartida.

El uso del contexto astronómico, particularmente a través de las leyes de Kepler, resultó ser un recurso potente para otorgar sentido al estudio de la

elipse. Tal como señalan Ramírez y Reyes (2017), preguntas vinculadas al movimiento planetario favorecen la interdisciplina y la motivación estudiantil. Aunque las primeras actividades no lograron inmediatamente el vínculo esperado entre matemática y astronomía, el desarrollo progresivo de la guía permitió que los estudiantes reconocieran la trayectoria planetaria como una elipse y comprendieran propiedades fundamentales como la suma constante de distancias a los focos, especialmente a través de experiencias de validación concreta.

Desde una perspectiva de modelación matemática, los resultados confirman que la modelación no operó únicamente como una técnica de resolución, sino como una práctica que permitió poner en uso la matemática escolar en un contexto significativo. En coherencia con Arrieta y Díaz (2015), los distintos modelos construidos por los estudiantes se articularon en una red de modelos que permitió intervenir el fenómeno, describirlo y validarlo. Asimismo, siguiendo a Valdés (2021), la modelación favoreció el desarrollo de habilidades críticas, como la identificación de variables relevantes y la interpretación de representaciones, contribuyendo a una comprensión más profunda del objeto matemático.

En respuesta a la problemática de investigación, se concluye que la modelación matemática en un contexto astronómico contribuye significativamente a que los estudiantes construyan significados más profundos sobre la elipse y sus propiedades. A pesar de las limitaciones asociadas al tiempo de implementación y a la ausencia de instancias sistemáticas de discusión colectiva, los estudiantes lograron articular matemática y astronomía mediante el tránsito entre diversos modelos, avanzando desde explicaciones fragmentadas hacia comprensiones más integradas. En este sentido, la experiencia desarrollada se configura como una propuesta didáctica con potencial de ser replicada y adaptada en otros contextos escolares, aportando a una enseñanza de la matemática más contextualizada, interdisciplinaria y significativa.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se elaboró en el marco del proyecto de Vinculación con el Medio “Red FerMat: Modelación Matemática y Tecnologías en el Aula Escolar” (Proyecto V-25-4), cuyo apoyo hizo posible la implementación de la experiencia en el establecimiento escolar.

6. REFERENCIAS

- Aguilera, A., y Bolívar, A. (2004). Enseñanza de las matemáticas apoyada en la práctica de la astronomía: Una revisión teórica. *Prospectiva científica*, 18(18), 15 - 32.
- Angulo, M. (2018). Análisis histórico Epistemológico del concepto de la Elipse como objeto matemático. Universidad nacional abierta y a distancia UNAD.
- Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(1), 19 - 48.
- Balda, P. (2022). Estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje desde un enfoque socioepistemológico. *Investigación e innovación en matemática educativa*, 7, 1 - 22.
- Barrios, H. (2016). Aplicación de las leyes de Kepler como alternativa pedagógica para la enseñanza de las Secciones Cónicas: Estudio de casos I. E. Ismael Perdomo Borrero. Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales.
- Bonilla, D., y Parraguez, M. (2012). La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento. *Comité latinoamericano de Matemática Educativa*, 26, 617 - 624.
- Cabrera - Baquedano, A., Huincahue, J. y Gaete - Peralta, C. (2022). Tránsitos al ajustar modelos matemáticos interdisciplinarios: el caso de la alfabetización financiera. *Uniciencia*, 36(1), 1 - 20.
- Carrasco, E., Díaz, L., y Buendía, G. (2014). Figuración de lo que varía. *Enseñanza de las ciencias*, 32(3), 365 - 384.
- Cordero, F., y Suárez, L. (2010). Modelación - graficación, una categoría para la matemática escolar. *Resultados de un estudio socioepistemológico. Relime*, 13(4), 319 - 333.
- De Bernardini, E. (2017). Leyes de Kepler. *Astronomía Sur*. <http://astrosurf.com/astronosur/planetas1.html>
- Del Castillo, A. (2004). Geometría dinámica y sistemas de cómputo simbólico en la enseñanza de la geometría analítica: El caso de la elipse. *Memorias de la XIV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*, 14, 45 - 51.
- Falatoonzadeh, A. (2012). La construcción del conocimiento como problema paradigmático para alcanzar la interdisciplinariedad y la transdisciplinariedad. *Revista Sophia: Colección de Filosofía de la Educación*, 13, 350 - 365.
- Huincahue, J. (2022). Interdisciplina en Educación Matemática—Características genuinas de la práctica interdisciplinar académica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 14(2), 59 - 68.
- Méndez, A., Brenes, L. y Delgado, I. (2023). Mediación pedagógica de las figuras geométricas tridimensionales: la esfera, el cilindro y el cono circular recto, por medio de un taller utilizando el software GeoGebra. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, 114, 97 - 115.
- Morin, E. (1997). Sobre la interdisciplinariedad. *Publicaciones ICESI*, 62, 9 - 15.
- Murillo Silva, J. A. (2012). Contribución a la enseñanza de las cónicas mediante el uso de la astronomía. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
- Nakakoji, Y., y Wilson, R. (2020). Interdisciplinary learning in mathematics and science: Transfer of learning for 21st century problem solving at university. *Journal of Intelligence*, 8(3), 1 - 22.
- Osorio, H. (2017). Actividades para la enseñanza del concepto elipse utilizando tecnología. *Memorias X CIE-MAC*, 334 - 357. ISBN 978-9930-541-09-8.
- Pérez, I. (2020). Una significación de los coeficientes de una función cuadrática: una experiencia de modelación en formación de profesores. *Paulo Freire, Revista de pedagogía crítica*, 23, 176 - 193.
- Pérez, I., y Salazar, P. (2024). Modelación matemática como propuesta de trabajo para superar obstáculos y dificultades en el cálculo escolar. Una experiencia en formación inicial docente. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 37(1), 1 - 20. <https://alme.org.mx/revista/index.php/alme/article/view/100>
- Pérez, I., y Salazar, P. (2025). Resignificación colectiva de lo cuadrático en el estudio del plano inclinado: Una experiencia de modelación y tecnologías en formación inicial docente. *El cálculo y su enseñanza*, 21(2), 7-36. <https://doi.org/10.61174/recacym.v21i2.235>
- Ramírez, D., y Reyes, R. (2017). Propuesta de enseñanza de la primera ley de Kepler a partir de los elementos de la elipse. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, Número extraordinario, 787 - 794.
- Sampieri, R., Collado, C., y Lucio, P. (1991). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Interamericana.
- Unidad de Currículum y Evaluación. (s. f.). *Matemática 3° medio: Unidad 2, clase N° 43. Aprendo en línea: Orientaciones para el trabajo con el texto escolar*. Ministerio de Educación de Chile.
- Unidad de Currículum y Evaluación. (2021). *Programa de estudio: Pensamiento computacional y programación - 3° o 4° medio*. Ministerio de Educación de Chile.
- Valdés, E. (2021). Procesando imágenes de descarga eléctrica: hacia la modelación matemática e interdisciplinariedad. *Educare*, 25(2), 368 - 382.
- Valencia, S., Méndez, O., y Jiménez, G. (2008). ¿Enseñanza de las ciencias por disciplina o interdisciplinariedad en las escuelas? *Técne, Episteme y Didaxis*, 23, 78 - 88.

VOLÚMEN 18
Nº1
ABRIL 2026

R	
E	
C	REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
H	I
	E
	M

