VOLÚMEN 12
N°1
ABRIL 2020

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

ÍNDICE

sochiem

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448 Versión en línea
Chile

EDITORIAL

La *Revista Chilena de Educación Matemática –RECHIEM–* conocida por sus lectores desde los inicios del año 2004, como una publicación de la Sociedad Chilena de Educación Matemática –SOCHIEM– fue pensada por sus creadores para un público interesado en el área de la Educación Matemática y preocupado por la conceptualización de los fenómenos de la didáctica de la matemática y la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en distintos niveles educativos. Dada la trayectoria y la contribución al área de la Educación Matemática, de parte del nuevo equipo editorial y de los lectores de la revista, queremos agradecer a todas las personas que han estado liderando las versiones anteriores de la revista, y reconocer especialmente, a la profesora Ismenia Guzmán, quien inició este proyecto, asimismo a Pierina Zanocco, quien durante varios años dirigió la RECHIEM.

La revista tiene una larga historia y con este primer número en formato digital, comienza una nueva etapa en su desarrollo y realización, reafirmando su compromiso por el intercambio y difusión de investigaciones e ideas en el ámbito de la Educación Matemática, abordadas desde distintas corrientes y diferentes perspectivas teóricas y metodológicas. Asimismo, con el anhelo de reanimar la interacción y el diálogo con sus lectores, la revista recibe diversos tipos de contribuciones, tales como *propuestas didácticas* para el aula, *artículos de investigación, empíricos, teórico-filosóficos y de revisión*, entre otros.

RECHIEM se proyecta como una fuente de inspiración para los investigadores y un medio y apoyo valioso para los profesores de matemáticas, creando instancias de difusión de indagaciones y experiencias nacionales e internacionales de calidad, traspasando de esta manera los límites geográficos e ideológicos, y facilitando el acceso a la información a toda la comunidad académica y docente.

De este modo, este primer número reúne tres artículos que ofrecen reflexiones sobre temas contingentes de nuestra área: el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas para álgebra temprana y representación de datos en estadística, para los niveles iniciales; y la argumentación en la clase de matemática en el nivel secundario.

Ángel Alsina comparte un artículo teórico sobre el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas, que trata de ser respetuoso con las necesidades reales de los estudiantes para aprender matemáticas. En la primera parte, el autor presenta la fundamentación del enfoque, que se sustenta en tres pilares interrelacionados: la perspectiva sociocultural del aprendizaje humano, el modelo de formación realista-reflexivo y la educación matemática realista. En la segunda parte, el lector podrá familiarizarse con una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres niveles: enseñanza en contextos informales, en contextos intermedios y en contextos formales. Por último, se presenta un valioso aporte que se traduce en ejemplificación de dicho enfoque con un itinerario de enseñanza del álgebra temprana para estudiantes de 3 a 12 años.

Las autoras *Soledad Estrella y Patricia Estrella* presentan un estudio que indaga en la organización de datos y en la diversidad de representaciones que construyen estudiantes de tercer año de enseñanza básica, enfrentados a una situación con datos auténticos. Las autoras concluyen que las listas y tablas de frecuencia, como herramientas representacionales, requieren de una enseñanza explícita en su diversidad de modos, en su forma y contenido, para que realmente puedan ofrecer a los niños y niñas la oportunidad de obtener comprensión de los datos con los que interactúan. Esta conclusión conlleva a una serie de sugerencias para conformar trayectorias de aprendizaje que involucren listar y tabular, invitando al lector a reflexionar al respecto.

El artículo de *Jorge Toro y Walter Castro* plantea explicitar las condiciones que activan la argumentación del profesor de Matemáticas durante la discusión de tareas en clase, partiendo del papel principal del profesor a la hora de brindar oportunidades para generar la argumentación en el aula. Los autores presentan a la comunidad de Educación Matemática otra forma de analizar la argumentación matemática que despliega un profesor en una clase. El lector podrá apreciar distintos aspectos que intervienen en el proceso de argumentación, tales como comunicativos, interaccionales y epistémicos, además de intenciones, propósitos educativos, y aspectos asociados a condiciones contextuales.

Esperamos que este primer número digital sea la continuidad de un largo y grato camino que hemos ido recorriendo con nuestros lectores y toda la comunidad académica y docente para seguir contribuyendo a la reflexión en nuestra área.

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.16

ITINERARIO DE ENSEÑANZA PARA EL ÁLGEBRA TEMPRANA

TEACHING ITINERARY FOR EARLY ALGEBRA

Ángel Alsina, angel.alsina@udg.edu
Universidad de Girona, Girona, España

RESUMEN

En este artículo se presenta el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas, un enfoque que trata de ser respetuoso con las necesidades reales de los estudiantes para aprender matemáticas. En la primera parte se presenta la fundamentación del enfoque, que se sustenta en tres pilares interrelacionados: la perspectiva sociocultural del aprendizaje humano, el modelo de formación realista-reflexivo y la educación matemática realista; en la segunda parte se describe el enfoque, que se refiere a una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres niveles: 1) enseñanza en contextos informales (el entorno inmediato, los materiales manipulativos y los juegos); 2) enseñanza en contextos intermedios (recursos literarios y tecnológicos), y 3) enseñanza en contextos formales (recursos gráficos); finalmente, en la tercera parte se ejemplifica dicho enfoque con un itinerario de enseñanza del álgebra temprana para estudiantes de 3 a 12 años. Se concluye que la implementación de este enfoque requiere un amplio dominio de conocimientos didáctico-disciplinares, lo que implica un esfuerzo importante por parte de todos los agentes implicados en la formación del profesorado para que así, todo aquel profesional preocupado por mejorar su práctica docente y adaptarla a las exigencias del siglo XXI, pueda tener acceso a estos conocimientos.

PALABRAS CLAVE:
Didáctica de las matemáticas; itinerario de enseñanza; álgebra temprana.

ABSTRACT

This article presents the Mathematics Teaching Itinerary Approach, which tries to be respectful of the students' real needs to learn mathematics. The first part presents the foundation of the approach, which is based on three interrelated pillars: the Sociocultural Perspective of Human Learning, the Realistic-Reflective Training Model and Realistic Mathematical Education; The second part describes the approach, which refers to a sequence of intentional teaching that includes three levels: 1) teaching in informal contexts (the immediate environment, manipulatives and games); 2) teaching in intermediate contexts (literary and technological resources); 3) teaching in formal contexts (graphic resources); Finally, this approach is exemplified in the third part with an itinerary for teaching early algebra for students aged 3 to 12 years. It is concluded that the implementation of this approach requires a broad mastery of didactic-disciplinary knowledge, which requires an important effort from all agents involved in teacher training so all professionals concerned with improving their teaching practice and adapting it to the S. XXI requirements may have access to this knowledge.

KEYWORDS:
Mathematics education; teaching itinerary; early algebra.

Recibido: 10 de enero 2020, Aceptado: 28 de febrero 2020

1. Introducción

Todos los que de alguna forma u otra estamos vinculados a la Didáctica de las Matemáticas (maestros, estudiantes para maestro, formadores de maestros, investigadores, etc.) sabemos que el libro de texto es un recurso que ha ejercido una influencia notable en la educación matemática que reciben los estudiantes en las escuelas. Este hecho es la consecuencia de muchos factores de distinta naturaleza en los que aquí no vamos a profundizar, pero sí enumerar: la concepción tradicional de la enseñanza de las matemáticas; el recubrimiento curricular "garantizado"; la medición del aprendizaje en el contexto familiar con base en el volumen de páginas completadas; los intereses económicos de las editoriales, entre otros.

La toma de consciencia de estos factores debería desencadenar una profunda reflexión acerca del papel de este recurso en las aulas. Dicha reflexión debería sustentarse también en los resultados de numerosos estudios centrados en el rendimiento de los estudiantes, que han puesto de manifiesto que el uso exclusivo del libro de texto conlleva descontextualización de los aprendizajes y, en consecuencia, genera desmotivación en los estudiantes (Alsina, 2010; Olmos y Alsina, 2010); o bien otros estudios centrados en el análisis de los libros de texto de matemáticas en distintas etapas educativas y en relación a distintos contenidos, que evidencian falencias y errores conceptuales (Azcarate y Serradó, 2006; Gómez, 2001; Vásquez y Alsina, 2015, 2017; entre muchos otros).

Para subsanar esta realidad y transformarla, diversos ámbitos de investigación en educación matemática y sus respectivas agendas de investigación (Alsina, 2019a; Llinares, 2008) han puesto el foco tanto en el análisis didáctico como en la construcción del conocimiento matemático.

En este artículo nos centraremos en la agenda de investigación sobre "análisis de contextos de enseñanza y/o recursos didácticos: situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos, juegos, recursos tecnológicos y gráficos", que corresponde a una de las agendas del ámbito de investigación sobre análisis didáctico (Alsina, 2019, p. 188). En concreto, presentaremos un enfoque de enseñanza que intenta ser más respetuoso con las necesidades reales para aprender matemáticas: el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas. Desde este prisma, el artículo se organiza en tres secciones: en la primera se presenta la fundamentación de este enfoque; en la segunda se describe qué es un itinerario de enseñanza de las matemáticas; y, finalmente, en la tercera se ejemplifica un itinerario de enseñanza para el álgebra temprana de 3 a 12 años.

2. Fundamentación del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas

Tal como se muestra en la figura 1, este enfoque se fundamenta en tres pilares interrelacionados: la perspectiva sociocultural del aprendizaje humano (Vygostsky, 1978); el modelo de formación realista-reflexivo (Melief, Tigchelaar y Korthagen, 2010; Tigchelaar, Melief, Van Rijswijk y Korthagen, 2010), adaptado a la formación del profesorado de matemáticas (Alsina, 2019b); y la Educación Matemática Realista (EMR) de Freudenthal (1991).

De la perspectiva sociocultural del aprendizaje humano, que se fundamenta en las aportaciones de Vygotsky (1978) y en las reinterpretaciones de su obra que han hecho otros autores tanto desde el ámbito de la psicología del aprendizaje (Ivic, 1994; Wertsch, 1985, 1991) como desde el campo de la educación matemática (Lerman, 2000, 2001; Schmittau, 2004; entre otros), interesa principalmente destacar que la educación se concibe como un fenómeno social y cultural que es posible gracias a la interacción, la negociación y el diálogo, junto con la idea de que el pensamiento intelectual depende de la construcción autorregulada del conocimiento, que va de un proceso interpsicológico a un proceso intrapsicológico (Alsina y Domingo, 2010).

Del modelo de formación realista-reflexivo, que ha sido desarrollado en la Universidad de Utrecht (Países Bajos) por Korthagen (2001), Melief et al. (2010), entre otros, por un lado interesa destacar que pretende, a través de la reflexión sistemática, impulsar la integración de la persona con sus experiencias personales y como aprendices, con sus conocimientos teóricos y con sus representaciones sobre lo que es enseñar y aprender, razón por la cual se usa el término "realista-reflexivo" (Esteve y Alsina, 2010). Desde este prisma, se asume que los educadores deberían llegar a conocer muchas maneras de actuar y ejercitarlas en la práctica, es decir, deberían disponer de criterios para saber cuándo, qué y por qué algo es conveniente y reflexionar sobre ello sistemáticamente (Korthagen, 2001); y por otro lado interesa la aplicación de este modelo en la formación de maestros de Matemáticas. En este sentido, Alsina (2019b) presenta desde una perspectiva analítica, interpretativa y crítica los resultados de diversos estudios que muestran los avances en investigación sobre la formación de maestros de Matemáticas desde el modelo realista-reflexivo. En concreto, se presentan cuatro estudios sobre diseño, aplicación y análisis de episodios desde este modelo de formación que incluyen un ciclo formativo; diversos recursos y estrategias didácticas para promover la deconstrucción de los conocimientos cotidianos (CC) de los maestros de Matemáticas que pueden ser un obstáculo para su desarrollo profesional; la identificación de las marcas de autorregulación que permiten deconstruir CC y coconstruir y reconstruir conocimientos profesionales (CP); y, como síntesis de los estudios preliminares, la descripción de un modelo transformador de la competencia profesional de los futuros maestros de Matemáticas.

Finalmente, de la EMR (Freudenthal, 1991), que nace en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática de la Universidad de Utrecht, hoy conocido como *Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education*, interesan sobre todo sus seis principios: de actividad, de realidad, de reinvención guiada, de niveles, de interacción y de interconexión. En síntesis, en la EMR se utilizan situaciones de la vida cotidiana o problemas contextualizados como punto de partida para aprender matemáticas. Progresivamente, estas situaciones son matematizadas a través de modelos, mediadores entre lo abstracto y lo concreto, para formar relaciones más formales y estructuras abstractas (Heuvel-Panhuizen, 2002). Además, se apoya en la interacción en el aula entre los estudiantes y entre el profesor y los estudiantes (Fauzan, Plomp y Slettenhaar, 2002), junto con la idea de que a los estudiantes se les debería dar la oportunidad de reinventar las matemáticas bajo la guía de un adulto en lugar de intentar transmitirles una matemática preconstruida (De Corte, Greer y Verschaffel, 1996).

A partir de este conjunto de planteamientos se ha diseñado el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas, que se describe en la próxima sección.

3. El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas

Hace ya varios años, y con el propósito de buscar maneras ajustadas a las necesidades reales de los niños y niñas tanto para aprender matemáticas como para aprender a usarlas de forma comprensiva y eficaz en todas las situaciones –escolares y no escolares– en las que dichos conocimientos son necesarios, Alsina (2010) planteó un diagrama piramidal en el que se comunicaba de forma sencilla y muy visual el tipo de contextos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su "frecuencia de uso" más recomendable, en función de la posición que ocupa cada contexto: de más o menos frecuencia desde la base hacia la cúspide (figura 1). En este diagrama piramidal, más conocido como Pirámide de la Educación Matemática al hacer un símil con la Pirámide de la Alimentación, no se descartaba ningún recurso, sino que solo se pretendía informar sobre la conveniencia de restringir algunos de ellos a un uso ocasional y, por eso, se consideró que podía ser una herramienta útil para el profesorado preocupado por hacer de su metodología una garantía de educación matemática.

Figura 1. Pirámide de la Educación Matemática
Fuente: Alsina (2010, p. 14)

En la base se situaban los contextos que necesitan todos los estudiantes y que, por lo tanto, se podrían y deberían "consumir" diariamente para aprender matemáticas: las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana de cada día, la observación y el análisis de los elementos matemáticos del entorno, la manipulación con materiales diversos y los juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después seguían los que deben "tomarse" alternativamente varias veces a la semana, como los recursos literarios y los recursos tecnológicos. Y, por último, en la cúspide, se ubicaban los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los libros de texto, por las razones que ya se han expuesto en la introducción.

Con los años, este planteamiento ha evolucionado hacia el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza (Alsina, 2019c), asumiendo que la palabra "itinerario" se refiere a una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres fases:

1. Enseñanza en contextos informales: la enseñanza del contenido matemático se inicia

en situaciones reales o realistas de los niños, como por ejemplo su entorno inmediato, o bien materiales manipulativos y juegos, en los que el conocimiento de la situación y las estrategias se utilizan en el contexto de la situación misma, apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.

2. Enseñanza en contextos intermedios: la enseñanza del contenido prosigue en contextos que hacen de puente entre los contextos reales o realistas de la fase previa y los contextos formales de la fase posterior, como por ejemplo algunos recursos literarios (cuentos y canciones) y tecnológicos (applets, robots educativos programables, etc.), que a través de la exploración y la reflexión conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático.

3. Enseñanza en contextos formales: la enseñanza del contenido finaliza en contextos gráficos y simbólicos, como por ejemplo el lápiz y el papel, en los que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales para completar de esta forma el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico.

Este enfoque, pues, se aleja de una visión de la enseñanza de las matemáticas basada en la repetición y la práctica de ejercicios que presentan los libros de texto como principales estrategias didácticas para "aprender" matemáticas, y en su lugar, plantea que es necesario fomentar la comprensión más que la mera memorización, la actividad heurística más que la pura ejercitación, o el pensamiento matemático crítico más que la simple repetición.

La comprensión, la actividad heurística y el pensamiento matemático crítico, como indica Alsina (2019c), son algunos de los principales pilares sobre los que se sustenta la educación matemática del siglo XXI. Necesitamos, más que nunca, formar a ciudadanos que comprendan en profundidad el conocimiento matemático para que puedan aplicarlo en todas las situaciones a lo largo de la vida en las que, de una forma u otra, están implicadas las matemáticas. Necesitamos también formar a ciudadanos que descubran por sí mismos las ideas matemáticas a través de una planificación y gestión adecuadas de las prácticas matemáticas basadas en la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, la argumentación, las conexiones, la modelización y la representación, más que transmitirles un conocimiento matemático ya construido previamente. Y, por supuesto, necesitamos formar a ciudadanos que procesen e interpreten críticamente la gran cantidad de datos que recibimos constantemente a través de diferentes medios (prensa escrita, televisión, internet, etc.). En definitiva, necesitamos formar a ciudadanos que sean capaces de plantear problemas y preguntas vitales con claridad y precisión; que evalúen información relevante; que lleguen a conclusiones y soluciones, probándolas con criterios relevantes, y que se comuniquen con eficacia a la hora de idear soluciones.

Esta visión contemporánea de la educación matemática requiere, primero, de un amplio dominio profesional de los conocimientos matemáticos a enseñar, puesto que no se puede enseñar bien lo que no se sabe y, segundo, un amplio dominio profesional acerca de las formas de enseñar dichos conocimientos, puesto que los estudiantes de hoy no tienen las mismas necesidades para aprender matemáticas que los estudiantes de años atrás, por lo que no tiene ningún sentido enseñar lo mismo que hace décadas y menos aún enseñarlo de la misma forma. Por esta razón, en la última sección de este artículo se presenta una ejemplificación de un itinerario de enseñanza focalizado en un bloque de contenidos relativamente nuevo en los planteamientos curriculares de las primeras edades: el álgebra temprana.

4. Itinerario de enseñanza del álgebra temprana

En esta sección se describe, en primer lugar, la presencia del álgebra en el currículo de matemáticas de las primeras edades, y en segundo lugar se presenta un ejemplo de itinerario para una enseñanza eficaz del álgebra temprana, ajustada a las necesidades reales de aprendizaje de los estudiantes.

4.1. El álgebra en el currículo de matemáticas de las primeras edades

El álgebra es un bloque de contenidos matemáticos que tradicionalmente se ha asociado a niveles de escolarización posteriores, para tratar conocimientos vinculados a la generalización y al simbolismo principalmente. Sin embargo, hay que considerar que existe también una larga tradición de otros conocimientos de naturaleza algebraica previos a la generalización y el simbolismo en edades inferiores, ya desde la etapa de Educación Infantil y, por supuesto, también en la etapa de Educación Primaria: los distintos tipos de relaciones (clasificaciones y ordenaciones, por ejemplo), los patrones o bien los cambios forman parte del cuerpo de conocimientos algebraicos que se aprenden desde edades tempranas, y que de hecho son la base para la adquisición de otros conocimientos matemáticos.

Autores de prestigio como Montessori, Piaget o Dienes situaron estos conocimientos dentro de "la lógica", "la lógica matemática" o bien "el razonamiento lógico-matemático". Sus planteamientos tuvieron una gran repercusión en la escuela, y lograron introducir la idea de que en las primeras edades estos conocimientos se adquirían a partir de situaciones concretas con materiales manipulativos, pero no los vincularon explícitamente al álgebra, sino que los consideraban parte de la educación sensorial o bien de la inteligencia lógico-matemática, respectivamente (Alsina, 2019d).
Sin embargo, los currículos de matemáticas de las primeras edades más avanzados han empezado a sustituir paulatinamente estos términos por el término "álgebra temprana" (Early Algebra) al considerarse como una puerta de entrada a las matemáticas superiores, entre otras cosas porque aporta un lenguaje enriquecido capaz de crear la base con que se enseñan las matemáticas (Stacey y Chick, 2004). Así, por ejemplo, en las orientaciones curriculares de Estados Unidos, desde que el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) avanzara el trabajo sistemático del álgebra temprana a partir de los 3 años, se han ido concretando los puntos focales curriculares en los que se debería centrar el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra temprana desde Pre-Kindergarten hasta Kindergarten (3 a 6 años aproximadamente). Estos puntos se centran en ordenar y clasificar objetos atendiendo a determinadas propiedades, reconocer y ampliar patrones tanto de secuencias sonoras como numéricas y analizar el comportamiento de los patrones utilizando representaciones concretas, pictóricas y verbales, entre otros aspectos (NCTM, 2006). En el Nurturing Early Learners (NEL), que es la versión revisada del currículo vigente del Ministerio de Educación de la República de Singapur, se indica que uno de los objetivos para los estudiantes de 4 a 6 años es "reconocer y usar relaciones y patrones simples" (Ministry of Education of Singapore, 2013, p. 22). En la guía para docentes que despliega de manera más detallada este objetivo, se sugiere crear patrones repetidos usando objetos, palabras, dibujos, símbolos o acciones, así como reconocer y extender patrones simples. En Australia, el Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA, 2015) aboga por un desarrollo del sentido de número, del orden, la secuencia, el patrón y la posición haciendo uso del contexto del estudiante. Concretamente, en relación con el álgebra y los patrones, plantea que los estudiantes de 4 años ordenen, clasifiquen objetos familiares, expliquen la base de la clasificación ejecutada, copien, creen y extiendan patrones con objetos, dibujos o material manipulable, además de reforzar la capacidad de observar e identificar los patrones naturales del entorno. Y en Nueva Zelanda, uno de los intereses y capacidades crecientes de los estudiantes de las primeras edades que se expone en Te Whāriki: Early Childhood Curriculum (Ministry of Education of New Zealand, 2017) es, precisamente, ser capaz de desarrollar conceptos matemáticos tempranos como la clasificación y la percepción de patrones que inciten a la indagación, exploración y evaluación de todo aquello que resulte inesperado. De esta forma, se asegura establecer una base permeable que permita a los estudiantes de etapas posteriores explorar el uso de los patrones y las relaciones que se pueden establecer con aspectos de cantidad, conjuntos de datos, espacio y tiempo.

4.2. Ejemplificación de un itinerario de enseñanza del álgebra temprana de 3 a 12 años

El planteamiento de un itinerario de enseñanza para desarrollar el pensamiento algebraico en las primeras edades, como se ha señalado, responde al firme convencimiento de que para garantizar un aprendizaje sólido es imprescindible llevar a cabo una enseñanza eficaz, fundamentada en un amplio conocimiento de contextos, recursos y estrategias didácticas. Junto con estos conocimientos, es necesario también disponer de criterios para secuenciar la enseñanza de manera que sea respetuosa con las necesidades y las posibilidades de los estudiantes (Alsina, 2019c, 2019d).

Con base en estas consideraciones, se propone una secuenciación que se inicia en los contextos de enseñanza-aprendizaje del álgebra temprana más reales y realistas y culmina en los contextos más abstractos, de acuerdo con el Principio de Niveles planteado por Freudenthal (1991), que sugiere que la matematización es progresiva, nace totalmente ligada al contexto que la requiere, a partir del cual se esquematiza, se abstrae, se sale de la situación misma, se generaliza, se formaliza… todo progresivamente, paso a paso en esos distintos niveles de comprensión.

4.2.1. Contextos informales: situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos y juego para la enseñanza del álgebra temprana de 3 a 12 años

En este primer nivel del itinerario para la enseñanza del álgebra temprana se consideran, como se ha señalado, los contextos de enseñanza-aprendizaje más reales o realistas en las mentes de los estudiantes. El criterio general es que los estudiantes deberían empezar a identificar conocimientos algebraicos en su entorno y, a través de sus experiencias en la escuela con materiales manipulativos y juegos, deberían llegar a tener más habilidad para descubrir dichos conocimientos y avanzar de esta forma en habilidades como la generalización.

Desde esta perspectiva, a continuación, se describe una experiencia de vida cotidiana y se presenta una selección de recursos lúdico-manipulativos para enseñar contenidos de álgebra temprana, teniendo en cuenta que en la planificación y gestión de estas actividades se deberían considerar los procesos o habilidades matemáticas de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, argumentación, conexiones, modelización y representación.

4.2.1.1. Una experiencia a partir de un contexto real: una visita por la ciudad

La experiencia que se describe, denominada "Redescubriendo la calle Mayor de Palencia con ojos matemáticos" (Alsina, Novo y Moreno, 2016), consiste en observar patrones en el entorno.

Lugar de implementación: Escuela Pública "Sofía Tartilán" (Palencia, España)
Nivel: 5-6 años
Maestra responsable de la implementación: Asunción Moreno
Asesoramiento pedagógico: Ángel Alsina y Mª Luisa Novo
Contenidos matemáticos:

- Concepto de patrón como secuencia que se repite.
- Identificación de patrones, de dos o más elementos, y de dos o más criterios.
- Realización de seriaciones con objetos, siguiendo un determinado patrón.
- Representación de patrones.

Descripción de la actividad: En primer lugar, en la clase los estudiantes hacen seriaciones siguiendo un determinado patrón de repetición con material no estructurado (tapones de diversos tamaños, formas y colores) y con material estructurado (bloques lógicos, tarjetas de conceptos gráficos, formas figurativas o abstractas…). A continuación, manipulan libremente regletas, hacen seriaciones y las representan en un papel cuadriculado. Los estudiantes van describiendo los patrones: *"regleta blanca, regleta roja tumbada, regleta blanca, regleta roja tumbada…"; "regleta roja de pie, regleta verde tumbada, regleta roja de pie, regleta verde tumbada…"; "regleta verde para abajo, regleta blanca tumbada…".*

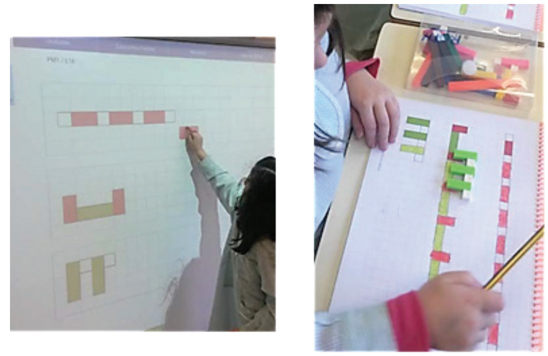


Figura 2. Seriaciones con regletas en la pizarra digital y en el papel cuadriculado
Fuente: Alsina et al. (2016, p. 14)

Ya en la calle Mayor de Palencia pueden evidenciar patrones en elementos urbanísticos. Les resulta más fácil descubrir patrones en áreas cercanas a ellos, como por ejemplo el suelo… áreas que abarcan fácilmente por estar en su entorno corporal. Y si, además, hay un contraste marcado entre los elementos, lo perciben mejor. Es el caso de un embaldosado:

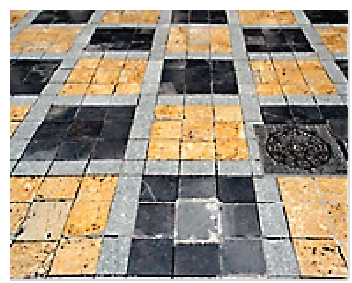


Figura 3. Series con baldosas
Fuente: Alsina et al. (2016, p. 14)

- Niños: ¡Hay una serie! Sí, cuadrado negro, cuadrado amarillo, cuadrado negro, cuadrado amarillo…

Sobre la pizarra digital se trabajan algunas fotografías, donde reconocen la calle Mayor. Se plantea el reto de que descubran qué patrones hay:

Figura 4. Columnas en la calle
Fuente: Alsina et al. (2016, p. 15)

- Niño: Me sé una serie yo
- Niña: Y yo otra.
- Niña: Balcón, balcón y ¿esto?
- Maestra: Eso es un mirador.
- Niña: Balcón, balcón, mirador, balcón, balcón, mirador...
- Niño: Yo sé otra... Con lo que sujeta...
- Maestra: ¿Cómo se llama?
- Niño: ¿Columna?
- Maestra: Sí. Y sigue...
- Niño: Columna, no hay nada, columna, no hay nada, columna, no hay nada...
- Maestra: Mira un poco hacia arriba, ¿qué ves?
- Niño: ¿Una farola?
- Maestra: Es un farol porque no se apoya en el suelo.
- Niño: Columna, farol, columna, farol, columna, farol...

Finalmente, ante la fotografía del portón rápidamente un niño descubre un patrón:

Figura 5. Portón
Fuente: Alsina et al. (2016, p. 15)

- Niño: Tiene una serie que me la sé. Y señala: Dibujo, raya, dibujo, raya, dibujo, raya...

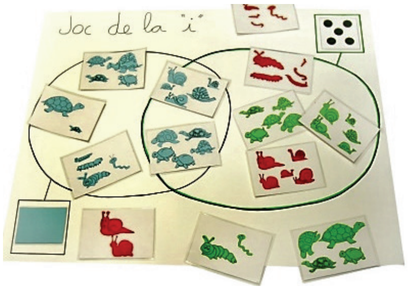
4.2.1.2. Materiales manipulativos y juegos

Se presenta una selección de materiales lúdico-manipulativos para trabajar contenidos de álgebra temprana de forma concreta. Los materiales se han seleccionado con el propósito de que sirvan, por una parte, para trabajar algunos conocimientos indispensables para facilitar la introducción al álgebra temprana, como por ejemplo materiales lógicos estructurados para trabajar las agrupaciones de elementos o bien relaciones de equivalencia (clasificaciones) y correspondencias por distintos criterios, tanto cualitativos como cuantitativos. Por otra, se pone mucho énfasis en los materiales que sirven para trabajar patrones numéricos y geométricos, tanto de repetición como de crecimiento (y decrecimiento), y se han seleccionado también algunos materiales manipulativos y juegos para el análisis de cambios, en un sentido amplio: situaciones en las que los cambios se mantienen constantes (como por ejemplo el dominó de las diferencias, donde se determina previamente el número de cambios entre una pieza y la otra, y esta cantidad de cambios se mantiene constante) o bien situaciones en las que la tasa de cambio aumenta o disminuye, como por ejemplo analizar cuántos triángulos se generan con diferentes cantidades de garbanzos, desde 3 hasta la cantidad que se desee (Cardet, 2009).

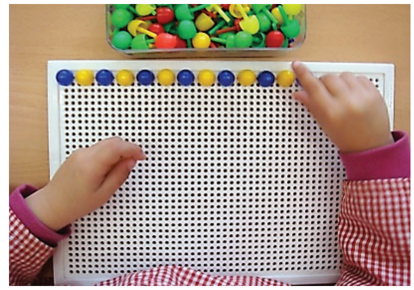
Bloques lógicos de Dienes para realizar agrupaciones, clasificaciones, correspondencias cualitativas, etc. (según el color, la forma, el tamaño o el grosor).

Otros materiales lógicos para realizar también agrupaciones, clasificaciones, correspondencias cualitativas, etc. (según el color, la cantidad de ojos, el estado de ánimo, etc.).

Ejemplo de agrupación a partir de etiquetas negativas.



Ejemplo de agrupación con dos cualidades: "ser de color azul" y "tener cinco elementos". Se generan cuatro espacios: "los azules", "los que hay cinco", "los que son azules y hay cinco" y "los que no son azules ni hay cinco".



Pinchos de colores para construir series (patrón de repetición AB).

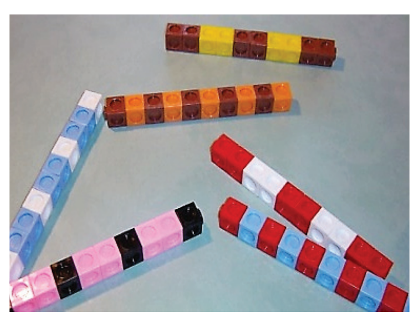
Ejemplo de clasificación (relación de equivalencia) por un criterio de forma: cubos, pirámides y esferas.

Pinzas para construir series (patrón de repetición ABC).

Ejemplo de correspondencia cualitativa a partir de un cuadro de doble entrada (producto cartesiano).

Pinzas para construir series circulares (patrón de repetición ABC).

Cápsulas de café para construir series (patrón de repetición AB).

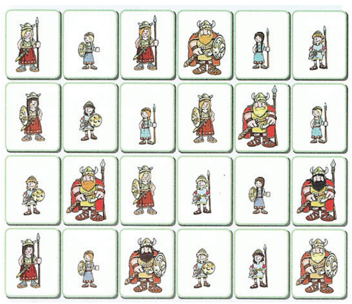


Policubos para construir series y clasificarlas según el patrón de repetición (AB, ABB, AABB).

Máquina de cambios constantes: entra un círculo amarillo, el operador indica el cambio y deben pensar qué pieza sale.

Piezas para construir series según un patrón de repetición más complejo y representarlo (por ejemplo: aBbA, donde las piezas verdes se representan con "a/A" según si son triángulos o cuadrados, respectivamente, y las piezas rojas se representan con "b/B" siguiendo el mismo criterio).

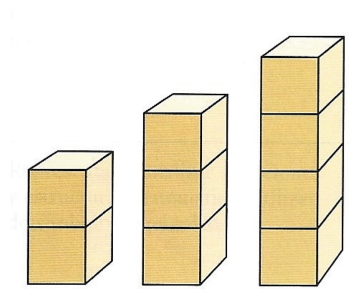
Figura 6. Algunos recursos lúdico-manipulativos para estudiantes de 3 a 8 años
Fuente: Alsina (2019c, p. 129)



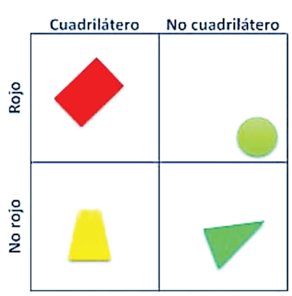
Cartas de vikingos (Alsina, 2004) para realizar agrupaciones, clasificaciones, correspondencias, etc. Tienen las cualidades siguientes: cuatro miembros de la familia; tres colores del pelo y dos instrumentos (escudo o lanza).

Policubos para construir series y clasificarlas según el patrón de repetición (ABB y AB, respectivamente), para luego analizar su regularidad mediante tablas y construir una primera idea intuitiva de función afín en los números naturales.

Juego "Quarto" para realizar agrupaciones, clasificaciones, correspondencias cualitativas, etc. Se trata de torres con las cualidades siguientes: dos colores, dos alturas, dos formas, vacío o lleno.

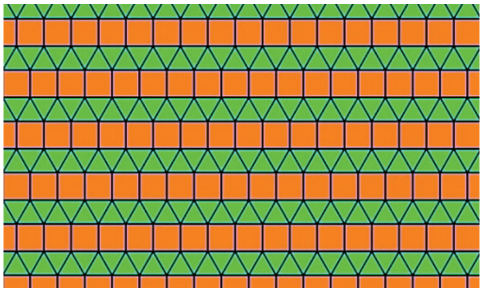


Cubos de madera para construir y analizar series según un patrón de crecimiento: observar cómo aumenta la altura a medida que se van añadiendo cubos.

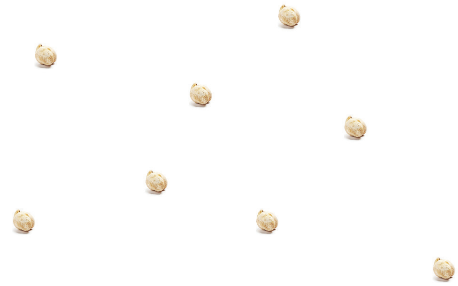


Figuras geométricas y diagramas de Caroll para representar dos o más conjuntos.

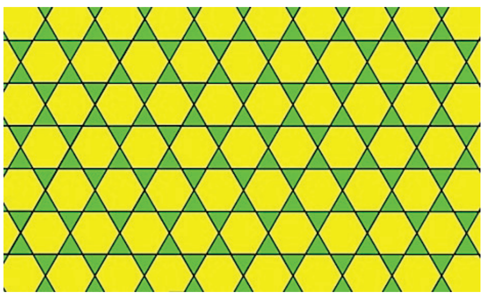
Geomosaico para realizar patrones geométricos.



Ejemplo de mosaico (triangular alargado) a partir de un patrón con triángulos verdes y cuadrados naranjas del geomosaico.

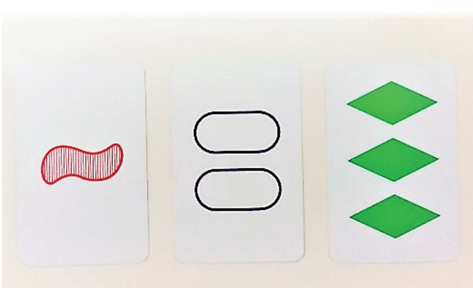


Garbanzos para analizar situaciones con tasas de cambio crecientes (Cardet, 2009): analizar cuántos triángulos se generan con 3, 4, 5, 6, 7, 8... garbanzos y generalizar, escribiendo los datos en una tabla y representándolos en un gráfico, como conocimiento precursor de las funciones (es decir, para comprender más adelante lo que representa la pendiente de una recta).



Ejemplo de mosaico (trihexagonal chato) a partir de un patrón con hexágonos amarillos y triángulos verdes del geomosaico.

Dominó de las diferencias con tres cambios: se inicia el juego con una pieza y para colocar la siguiente deben cambiar tres cualidades, por ejemplo: rectángulo amarillo, grande y delgado; rectángulo rojo, pequeño y grueso (cambia el color, el tamaño y el grosor); rectángulo azul, grande y delgado (cambia el color, el tamaño y el grosor); etc.



Observación de cambios con las cartas SET: tres cartas forman un SET si, respecto a cada una de las cuatro características (forma, color, número y fondo), evaluadas una a una, las tres cartas son iguales o las tres son diferentes.

Figura 7. Algunos recursos lúdico-manipulativos para estudiantes de 8 a 12 años
Fuente: Alsina (2019c, p. 130-131)

4.2.2. Contextos intermedios: recursos literarios y tecnológicos para la enseñanza del álgebra de 3 a 12 años

Una vez que los estudiantes de las primeras edades hayan tenido la oportunidad de empezar a comprender conocimientos algebraicos ligados a contextos reales o realistas, es recomendable seguir el itinerario de enseñanza de estos conocimientos ofreciendo otros contextos que permitan ir avanzando de manera progresiva en la formalización o institucionalización de los aprendizajes. En este sentido, los recursos literarios y tecnológicos pueden ser contextos ideales para hacer de puente entre las matemáticas concretas y las abstractas.

4.2.2.1. Recursos literarios

Para trabajar los contenidos de álgebra temprana durante las primeras edades se pueden utilizar distintos géneros literarios como cuentos y novelas.
Estos recursos, en especial los cuentos, habitualmente se han usado para trabajar contenidos de numeración y cálculo, geometría, etc. Sin embargo, como señala Torra (2012), la aportación que hacen los cuentos al aprendizaje de las matemáticas va más lejos de lo que a primera vista se acostumbra a captar y, si bien es cierto que muchos de ellos inciden en aspectos vinculados a la numeración o a la geometría, la verdadera aportación es la presencia de patrones que, como se ha indicado, abren la posibilidad de predecir, de anticipar lo que va a suceder, de buscar regularidades y de generalizar.

En los cuentos se pueden encontrar patrones de repetición, patrones de crecimiento/decrecimiento e incluso estructuras de correspondencia entre elementos de dos conjuntos:

- Los patrones de repetición se encuentran en cuentos clásicos, adecuados principalmente para los estudiantes de los primeros niveles, como por ejemplo "La ratita presumida" en el que la estructura del cuento sigue siempre el mismo patrón, pero con un cambio al final que advierte que, aunque los patrones sirven para predecir o anticipar lo que va a suceder, hay que estar atentos a los cambios y comprobar si las predicciones se cumplen o no.
- Los patrones de crecimiento/decrecimiento se encuentran en cuentos con una estructura que se caracteriza por una sucesión de personajes o eventos que se presentan en orden ascendente o descendente, respectivamente, y no lineal, como en el caso de los patrones de repetición. La suma de estos personajes o eventos es lo que permite, al final, conseguir el objetivo. Es el caso de cuentos como por ejemplo "A qué sabe la luna", que presenta un patrón de crecimiento ya que la estructura se basa en una secuencia de personajes que, juntos, alcanzan la luna; o bien el cuento "Cien hormigas hambrientas", que presenta un patrón de decrecimiento ya que la estructura se basa en una secuencia de sucesos centrados en la descomposición del 100 en sumandos cada vez menores (dos grupos de 50; cuatro grupos de 25; cinco grupos de 20; diez grupos de 10).
- Finalmente, la correspondencia entre elementos de dos conjuntos se encuentra en cuentos cuya estructura se basa en un personaje que tiene una misión por cumplir, se presentan obstáculos y debe buscar estrategias para superarlos, estableciendo así una correspondencia "obstáculo-solución", como por ejemplo "El sastrecillo valiente" o bien otras narraciones de héroes.

Es importante, pues, impulsar que los estudiantes miren más allá del número de personajes que contiene un cuento o bien la trayectoria que hacen los personajes o las formas geométricas que aparecen en él. Hay que fomentar el análisis de la estructura interna y descubrir los patrones, similares en todas las culturas, para que los estudiantes avancen en habilidades tan importantes como predecir y generalizar, que son algunos de los principales objetivos científicos.

A continuación, se describe una posible gestión para facilitar que los estudiantes descubran las regularidades que se esconden en la estructura interna de un cuento:

1. Explicar, visualizar o bien leer todo el cuento o media parte del cuento.

2. Plantear algunas buenas preguntas vinculadas a la estructura (además de cuestiones asociadas a los elementos observables a simple vista), como, por ejemplo: ¿en cuántas partes se divide la historia?; ¿ocurre lo mismo en cada parte?; ¿qué ocurre después de la primera parte?; ¿qué ocurre antes de la tercera parte?; ¿qué piensan que va a ocurrir al final?, ¿por qué?; etc.

3. Finalmente, sugerir a los estudiantes que representen la historia: en los primeros niveles las representaciones pueden ser concretas (con dibujos, por ejemplo) y, progresivamente, se puede invitar a los estudiantes a hacer representaciones más abstractas de los patrones o correspondencias observadas (usando letras, signos, etc.). A modo de ejemplo, en la figura 8 se muestran tres representaciones posibles de los tres tipos de cuentos expuestos:

Figura 8. Representaciones de los patrones
Fuente: Alsina (2019c, p. 134)

4.2.2.2. Recursos tecnológicos: calculadora, applets y lenguajes de programación visuales

Estos recursos, asociados a una metodología en la que el estudiante es el protagonista de su aprendizaje, pueden ser muy útiles para facilitar la adquisición de conocimientos algebraicos. A continuación, pues, se ofrece una selección de actividades para seguir trabajando conocimientos algebraicos en este nivel del itinerario didáctico, más próximo ya a la abstracción.

a) Calculadora

En Educación Primaria, más que en Educación Infantil, la calculadora puede ser un buen recurso sobre todo para trabajar conocimientos algebraicos asociados a los patrones. En concreto, los estudiantes pueden explorar patrones numéricos y hacer conjeturas acerca de estos patrones:

- Exploración de patrones numéricos: muchas calculadoras básicas, al teclear un número cualquiera (por ejemplo, el 2), el signo más (+) y a continuación el signo igual (=) de manera repetida, van presentando una progresión o sucesión aritmética: 2, 4, 6, 8, 10, … En el caso de que la calculadora no tenga esta función, se puede construir sumando repetidamente un mismo dígito: 2 + 2 = 4; 4 + 2 = 6; … Lógicamente, la exploración de patrones numéricos con la calculadora se puede complicar con números mayores (por ejemplo, con un patrón + 5; + 10; + 25; etc.) o bien también se pueden construir y analizar progresiones o sucesiones geométricas, donde el patrón se basa en un producto. En este caso, al multiplicar un número (por ejemplo, el 2), por un mismo producto de forma repetida (x 2), se obtiene una serie de números que progresa de forma geométrica: 2, 4, 8, 16, 32, …
- Realización de conjeturas a partir de patrones: tomando como base las progresiones aritméticas o geométricas construidas, se pueden realizar predicciones, como por ejemplo estimar qué número saldrá al teclear 10 veces el mismo sumando (+ 2) en las progresiones aritméticas o el mismo producto (x 2) en las progresiones geométricas; así mismo, en los niveles superiores se puede plantear a los estudiantes que generalicen a "n" casos y lo representen algebraicamente: en los dos ejemplos presentados, sería n + 2 y 2 n, respectivamente.

b) *Applets*

Se pueden encontrar diversos *applets* muy interesantes para trabajar contenidos algebraicos en las distintas webs:
- NRICH (https://nrich.maths.org)
- Illuminations (https://illuminations.nctm.org)
- Math Playground (http://www.mathplayground.com)
- Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales (http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html)

Aparte de estos recursos, existen también otras páginas web específicas para trabajar conocimientos algebraicos, como por ejemplo Visual Patterns (http://www.visualpatterns.org), en la que hay centenares de propuestas de patrones visuales para trabajar aspectos numéricos y de introducción al álgebra temprana.

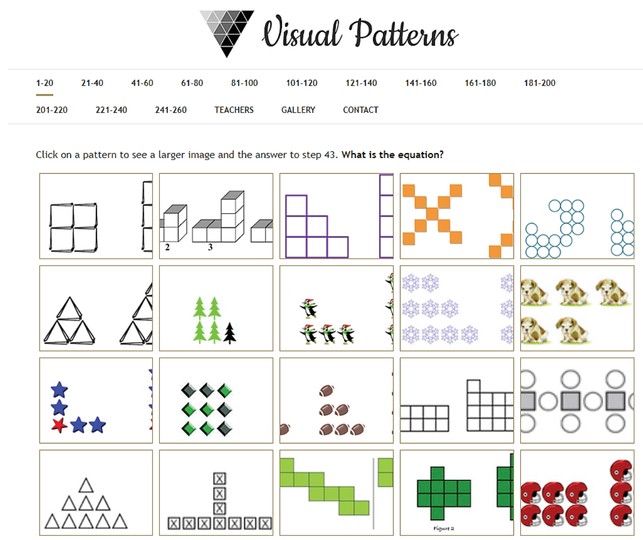


Figura 9. Página de inicio de "Visual Patterns"
Fuente: http://www.visualpatterns.org/

c) Lenguajes de programación visuales

Scratch es un recurso válido tanto para crear proyectos focalizados en conocimientos algebraicos a partir de las funciones de los bloques de este lenguaje de programación, como para practicar contenidos a partir de proyectos previamente diseñados, simplemente buscando el término que interesa: "álgebra", "patrones", "expresiones algebraicas", etc.

En la secuencia de la figura 10, por ejemplo, se muestra una forma sencilla de programar un patrón de repetición a través de un ciclo que consiste en repetir 5 veces la secuencia "mover 50 pasos" y "girar 72º a la derecha", lo que daría lugar a la construcción de un pentágono regular.

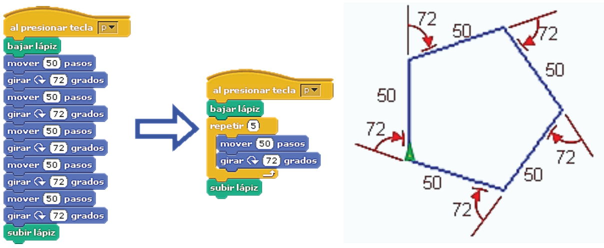


Figura 10. Ejemplo de un patrón de repetición usando la función "repetir" para construir un pentágono regular
Fuente: Alsina (2019c, p. 138)

4.2.3. Contextos formales: recursos gráficos para la enseñanza del álgebra de 3 a 12 años

En la recta final del itinerario de enseñanza, es importante incidir principalmente en la formalización de los conocimientos aprendidos en los contextos preliminares, y más tratándose de conocimientos algebraicos. De hecho, como se ha indicado, una de las finalidades del álgebra es poder expresar mediante lenguaje simbólico las ideas matemáticas, usando expresiones algebraicas que combinan números, signos y letras siguiendo ciertas reglas.

Desde esta perspectiva, además de usar materiales como libros de texto y fichas previamente seleccionados para apoyar este tipo de aprendizaje, se pueden también usar otros recursos que permitan avanzar hacia la formalización. En este apartado destacamos por su novedad, pero sobre todo por su potencial, recursos como: *Which One Doesn't Belong?* (WODB), creado por el profesor de matemáticas estadounidense Christopher Danielson (https://wodb.ca/), que consiste en presentar a los estudiantes varias situaciones distintas, habitualmente cuatro (figura 11), con el objeto de que comuniquen y argumenten cuál de ellas no pertenece al grupo, lo que fomenta la presencia de procesos matemáticos como el razonamiento y la prueba (que se fundamenta en la argumentación y la comprobación) y la comunicación (que se fundamenta en la interacción, la negociación, el diálogo y el uso adecuado de lenguaje matemático).

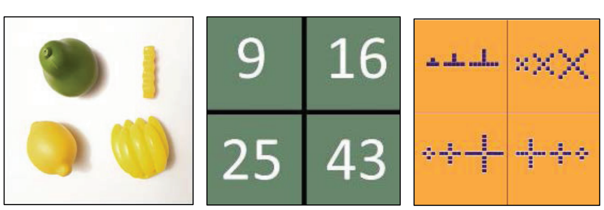


Figura 11. Distintos ejemplos de WODB
Fuente: https://wodb.ca/

Otro recurso parecido es *"Same but different"*, de *Looney Math Consulting*, disponible en https://www.samebutdifferentmath.com/about/, en el que se presentan dos situaciones en lugar de cuatro, pero igualmente los estudiantes deben argumentar críticamente en qué son iguales y en qué son diferentes. La sección de álgebra de este recurso presenta parejas mayoritariamente para los niveles superiores de la etapa de Educación Primaria y para etapas posteriores (figura 12):

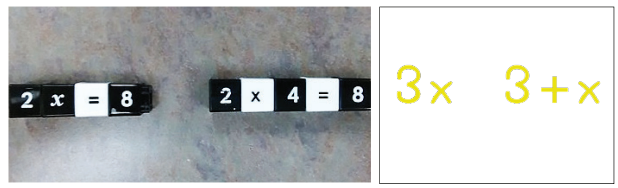


Figura 12. Ejemplos de parejas de la sección de álgebra de Same but different
Fuente: Alsina (2019c, p. 139)

5. Consideraciones finales

En este artículo se ha fundamentado, descrito y ejemplificado el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (Alsina, 2018, 2019c) que, como se ha argumentado, pretende contribuir a romper con la visión tradicional de la enseñanza de las matemáticas asociada al uso del libro de texto como único recurso, para avanzar hacia una visión más respetuosa con las necesidades reales de los estudiantes de las primeras edades para aprender matemáticas. Para ello, como se indicado, este enfoque considera diversos contextos organizados en tres niveles (contextos informales, intermedios y formales). Además, se plantea la necesidad de llevar a cabo una planificación y gestión de la práctica matemática que se fundamente en la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, la argumentación, las conexiones, la modelización y la representación, y todo ello basado en el principio fundamental de que el conocimiento debe ser siempre construido por el aprendiz a través de la mediación de un adulto, en lugar de transmitir un conocimiento ya creado con anterioridad.

En esta sección final, pues, queremos destacar el hecho de que en el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza se asume que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no es una labor sencilla, puesto que implica dominar una serie de conocimientos tanto disciplinares (sobre las matemáticas) como didácticos (sobre formas de enseñar matemáticas y evaluarlas). Ello implica un esfuerzo importante por parte de todos (Administración Educativa, instituciones de Educación Superior, organismos y expertos en materia de educación en general y de educación matemática en particular, etc.) para que el profesorado preocupado por mejorar sus prácticas y adaptarlas a las exigencias del siglo XXI pueda tener acceso a estos conocimientos. Este acceso debe promover, por un lado, que puedan reflexionar sobre la necesidad de transformar su práctica docente –dejando de focalizar la enseñanza de las matemáticas exclusivamente en un libro de texto– para mejorarla usando diversos contextos de enseñanza y, por otro, que se les facilite la labor aportando recursos que sean factibles de ser usados, ya que como indican Hargreaves, Earl, Moore y Manning (2001), "si el profesor no está dispuesto a hacerlo, no se puede hacer" (p. 128); "si el profesor no sabe cómo hacerlo o a la hora de la verdad no se siente seguro haciéndolo, no se puede hacer" (p. 129); "si un docente no está dispuesto a hacerlo, no se puede hacer" (p. 132), y "si el profesor tiene que hacer demasiadas cosas, no las hará bien" (p. 134). Esperamos que la ejemplificación de un itinerario focalizado en la enseñanza del álgebra temprana haya contribuido a esta labor, e invitamos al lector a consultar otros itinerarios referentes a otros bloques de contenido en Alsina (2019c) y, sobre todo, a lanzarse a diseñar sus propios itinerarios con el propósito de mejorar la formación matemática de los estudiantes de las primeras edades.

Referencias

Alsina, Á. (2004). *Barrinem? Matemàtiques amb jocs i problemes. Lògica 3*. Barcelona: Edicions l'Àlber, S.L.

Alsina, Á. (2010). La "pirámide de la educación matemática", una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.

Alsina, Á. (2018). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio: itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros,* 376, 13-20.

Alsina, Á. (2019a). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 100, 85-108.

Alsina, Á. (2019b). Hacia una formación transformadora de futuros maestros de matemáticas: avances de investigación desde el modelo realista-reflexivo. *Uni-pluriversidad, 19*(2), 60-79.

Alsina, Á. (2019c). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Editorial Graó.

Alsina, Á. (2019d). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8*(1), 1-19.

Alsina, Á., y Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 7-32.

Alsina, Á., Novo, M. L., y Moreno, A. (2016). Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5*(1), 1-20.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority. (2015). *The Australian Curriculum: Mathematics*. Recuperado desde http://v7-5.australiancurriculum.edu.au/Curriculum/Overview

Azcarate, P., y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación,* 340, 341-378.

Cardet, N. (2009). Els cigrons i la matemàtica. *Suplement Guixdos*, 156, 1-15.

De Corte, E., Greer, B., y Verschaffel, L. (1996): Mathematics Teaching and Learning. En D. Berliner, y C. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 491-549). Nueva York: Simon & Schuster Macmillan.

Esteve, O., y Alsina, Á. (2010). Hacia el desarrollo de la competencia profesional del profesorado. En O. Esteve, K. Melief, y Á. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado* (pp. 7-18). Barcelona: Editorial Octaedro.

Fauzan, A., Plomp, T., y Slettenhaar, D. (2002). Traditional mathematics education vs. realistic mathematics education: Hoping for Changes. En *Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 1-4). Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrectht: Kluwer Academic Publishers.

Gómez, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿por qué menos por menos es más? En P. Gómez, y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 257-275). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Hargreaves, A., Earl, L., Moore, S., y Manning, S. (2001). *Aprender a cambiar. La enseñanza más allá de las materias y los niveles*. Barcelona: Editorial Octaedro.

Heuvel- Panhuizen, M. (2002). Realistic mathematics education as work in progress. En F. L. Lin (Ed.), *Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education* (pp. 1-43). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Ivic, I. (1994). Lev Semionovick Vygotsky (1896-1934). *Perspectivas: Revista Internacional de Educación Comparada, 34*(3-4), 773-799.

Korthagen, F. A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19-44), Westport, CT: Ablex.

Lerman, S. (2001). The function of discourse in teaching and learning mathematics: a research perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1-3), 87-113.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-54). Badajoz: SEIEM.

Melief, K., Tigchelaar, A., y Korthagen, K. (2010). Aprender de la práctica. En O. Esteve, K. Melief, y Á. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado* (pp. 19-38). Barcelona: Octaedro.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: a quest for coherence.* Reston, V.A.: Autor.

Ministry of Education of New Zealand (2017). *Te Whāriki: Early Childhood Curriculum*. Wellington: Autor.

Ministry of Education of Singapore. (2013). *Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore: Numeracy: Volume 6.* Singapore: Autor.

Olmos, G., y Alsina, Á. (2010). El uso de cuadernos de actividades para aprender matemáticas en educación infantil. *Aula de Infantil*, 53, 38-41.

Schmittau, J. (2004). Vygostkian theory and mathematics education: Resolving the conceptual-procedural dichotomy. *European Journal of Psychology of Education, 29*(1), 19-43.

Stacey, K., y Chick, H. (2004). Solving the problem with algebra. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The Future of Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 1-20). Boston: Kluwer.

Tigchelaar, A., Melief, K., Van Rijswijk, M., y Korthagen, K. (2010). Elementos de una posible estructura del aprendizaje realista en la formación inicial y permanente del profesorado. En O. Esteve, K. Melief, y Á. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado* (pp. 39-64). Barcelona: Octaedro.

Torra, M. (2012). Patrones matemáticos en los cuentos. *Cuadernos de Pedagogía*, 421, 56-58.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado, Revista de currículum y formación del profesorado*, *19*(2), 441-462.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2017). Proposiciones, procedimientos y argumentos sobre probabilidad en libros de texto chilenos de educación primaria. *Profesorado, Revista de currículum y formación del profesorado, 21*(1), 433-457.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós.

Wertsch, J. V. (1991). *Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada.* Madrid: Aprendizaje Visor.

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.20

REPRESENTACIONES DE DATOS EN ESTADÍSTICA: DE LISTAS A TABLAS

STATISTICAL DATA REPRESENTATIONS: FROM LISTS TO TABLES

Soledad Estrella, soledad.estrella@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Patricia Estrella, patricia.estrella@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

RESUMEN

Con el propósito de estudiar la organización de datos e identificar la diversidad de representaciones construidas en situación de exploración de datos auténticos, en un grupo de 56 estudiantes chilenos de tercer grado de primaria, se diseñó e implementó un plan de clases de estadística, en el que se solicitó a los estudiantes ordenar y organizar los datos para responder a un problema. Este artículo se centra en el estudio cualitativo de las representaciones de datos producidas por los estudiantes durante la implementación del plan de clases. La exploración de los datos realizada por los estudiantes sobre los alimentos que consumían en la escuela ("colaciones"), los llevó a elaborar representaciones de datos (listas, estado intermedio de esquema tabular y tabla de frecuencias). Se concluye que el contexto auténtico y la construcción de representaciones propias promovieron que los estudiantes construyeran preponderantemente listas (77%), aplicando con sentido la partición, la clase y el cardinal. Se sugiere incorporar explícitamente en la enseñanza el formato lista, como herramienta representacional y unidad básica de la tabla.

PALABRAS CLAVE:
Lista; tabla de frecuencia; representaciones de datos; estadística temprana; análisis exploratorio de datos.

ABSTRACT

With the purpose of studying the organization of data and identifying the diversity of representations constructed in a situation of data exploration, a statistical lesson plan was designed and implemented in 56 Chilean students in the third grade of primary school, in which students were asked to sort and organize data to answer a problem. This article focuses on the qualitative study of the data representations produced by students during the implementation of the lesson plan. The exploration of the data of the snacks eaten by students at school led them to elaborate data representations (lists, intermediate state of tabular scheme and frequency table). It is concluded that the authentic context and the construction of their own representations promoted that the students predominantly built lists (77%), meaningfully applying the partition, the class and the cardinal. It is suggested to explicitly incorporate the list format in teaching, as a representational tool and basic unit of the table.

KEYWORDS:
List; frequency table; data representations; early statistics; exploratory data analysis.

Recibido: 7 de febrero 2020, Aceptado: 2 de abril 2020

1. Introducción

Listas y tablas aparecen en la vida cotidiana de los ciudadanos. Estas representaciones externas actúan como herramientas de aprendizaje (Pérez-Echeverría y Scheuer, 2009), pues movilizan varios procesos de orden superior que los seres humanos participantes en los entornos sociales y culturales complejos llevan regularmente a cabo, como la comunicación, la externalización de memoria, el aprendizaje y la transmisión, la explicitación del conocimiento, entre otras. Sin embargo, en educación estadística existe escasa investigación sobre el aprendizaje de las representaciones de datos, como las listas y tablas, en estudiantes de los primeros grados.

Este estudio indaga en la organización de datos y en la diversidad de representaciones que construyen los estudiantes enfrentados a una situación con datos auténticos. Específicamente, se analizan las distintas representaciones de datos creadas por estudiantes de tercer grado de primaria, enfrentados a una misma situación de análisis exploratorio de datos.

Si bien las tablas y gráficos ocupan un papel central en la práctica científica y se usan ampliamente en las aulas y en textos escolares de diversas materias, su construcción e interpretación no es fácil, y la adquisición de la habilidad de representar posee ciertas complejidades (Estrella, Olfos, Morales y Vidal-Szabó, 2017; Estrella, Olfos, Vidal-Szabó, Morales y Estrella, 2018). Investigaciones previas han señalado la especificidad de las tablas y la forma en que tanto estudiantes como profesores las comprenden (Brizuela y Alvarado, 2010; Brizuela y Lara-Roth, 2002; Dibble, 1997; Duval, 2003; Estrella, Mena-Lorca y Olfos, 2017; Friel, Curcio y Bright, 2001; Gabucio, Martí, Enfedaque, Gilabert y Konstantinidou, 2010; Martí, García-Mila, Gabucio y Konstantinidou, 2010; Martí, Pérez y De la Cerda, 2010; Martínez y Brizuela, 2006; Wu y Krajcik, 2006).

Respecto al tratamiento de los datos, se ha investigado que tanto la ordenación desde un conjunto de datos a una tabla, como la interpretación de las tablas, resultan ser complejas para los estudiantes de edad escolar (Estrella et al., 2017, 2018; Sepúlveda, Díaz-Levicoy y Jara, 2018). Lehrer y Schauble (2000) investigaron la invención y la convención de estructuras de datos para matematizar actividades de clasificación en estudiantes de primer a quinto grado. Estos autores encontraron un sesgo en la organización de datos en categorías disjuntas, y dificultades de los estudiantes con una categoría que entrega información para cada celda en una misma columna de una tabla. También, encontraron que no es fácil para los estudiantes reconocer, desarrollar e implementar criterios para un efectivo proceso de clasificación.

El proceso de reorganizar datos numéricos en frecuencias no es un proceso intuitivo en los niños de primer a tercer grado (Nisbet, Jones, Thornton, Langrall y Mooney, 2003), e insertar datos en una tabla provoca una reorganización mental más allá de la simple enumeración oral (Coutanson, 2010). En cuanto a la habilidad de tabular datos, Pfannkuch y Rubick (2002) señalan que “esta era una habilidad que se estaba desarrollando por todos los estudiantes, aunque parece ser una habilidad más sofisticada de lo que habíamos pensado” (p. 13). Estas autoras consideran que el proceso de comprensión en el tránsito de los datos a las tablas, abarca una abstracción de variables cuantitativas y cualitativas a partir del contexto y, además, observan que la tabulación de datos es una habilidad que requiere determinar la forma de presentar esos datos con claridad y sin ambigüedad, lo que implica alguna pérdida de información y el uso de descriptores de la variable (entendida como cualquier característica medible de un conjunto de datos que puede tomar distintos valores).

En este escenario, y considerando la complejidad del aprendizaje de distintas representaciones de datos, se propone analizar las formas tempranas de representar los datos en estudiantes chilenos de tercer grado de primaria, que reflexionan en torno a los alimentos que consumen en la escuela, en adelante “colaciones”, e infieren desde el comportamiento de los datos.

2. Marco conceptual

El paradigma del análisis exploratorio de datos (Tukey, 1977) considera la exploración sin restricciones de los datos en busca de regularidades interesantes, en que las conclusiones son informales y se basan en lo que se ve en los datos, aplicándose solo a los sujetos y a las circunstancias para las cuales se obtuvieron dichos datos (Moore y Cobb, 2000).

Estrella y colaboradores (2017, 2018) presentan un enfoque que valora la variedad de representaciones que dan sentido a descubrir, comunicar y razonar las relaciones entre datos desde los primeros grados, precisando algunas de las componentes de una representación gráfica de datos (variable, frecuencia, base-lineal y linealidad-gráfica), componentes que permiten la comparación y visualización de las relaciones entre los datos.

Para estudiar los recursos que exhiben los estudiantes, en esta sección describimos algunas representaciones de datos y sistemas de representación.

2.1. Representaciones de datos (lista, tabla y cuasitabla)

a) Listas. Consideramos las listas de datos como aquellos conjuntos de datos organizados sucesivamente en una dimensión (horizontal o vertical), caracterizadas por una sucesión de datos (icónico o textual) uno tras otro, desplegados en una sola dirección y separados por espacios y/o puntuación, que eventualmente pueden presentar o no el cardinal. Además, las listas están constituidas por unidades escritas más breves que las frases.

b) Tablas. Consideramos las tablas simples de datos como aquellas que poseen dos dimensiones (horizontal y vertical) para almacenar unidades de datos. Estrella (2014) especifica en la representación tabular que la variable cualitativa está claramente separada de la variable cuantitativa, y eventualmente puede presentar el trazado de filas y columnas. Además, los datos de cada fila o columna son una categoría de la variable, cuyo nombre de la categoría suele aparecer explícito mediante una rotulación verbal escrita, gráfica o simbólica específica, en las filas o columnas. Consideramos una tabla de frecuencia como aquella en que se expresan –al menos– una categoría de la variable categórica (por ejemplo, colaciones sanas) y sus subcategorías (por ejemplo, manzana), la cardinalidad de cada subcategoría1 (frecuencia) y, eventualmente, el cardinal de la categoría de la variable (total marginal).

Es posible distinguir un proceso entre listar y tabular. La figura 1 ejemplifica, desde una situación de colaciones, las acciones requeridas al representar datos, como clasificar, listar, categorizar, tabular y contar los datos de la variable en juego.

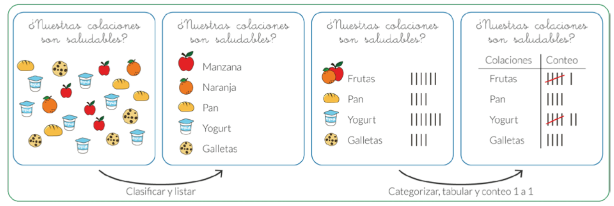


Figura 1. Representaciones de datos en estadística, de listas a tablas.
Fuente: Elaboración propia.

Las listas y tablas, como representaciones de datos, han sido estudiadas y definidas por varios autores (por ejemplo, Estrella, 2014; Martí, 2009); adicionalmente a estas precisamos una nueva representación, a la que denominamos "cuasitabla".

Entenderemos una cuasitabla como una representación parecida a la tabla de datos, aunque sin llegar a tener todas sus características; por ejemplo, muestra segmentos separadores, pero presenta el ordinal en vez del cardinal. Asimismo, aunque posee más características que las establecidas para una lista, no alcanza a tener las características propias de una tabla de frecuencia (ver ejemplos, más adelante, en figura 4).

2.2. Sistemas de representación

Desde la diversidad de formas en que se pueden representar los datos, es posible establecer categorías de acuerdo a si la representación presenta preponderantemente aspectos icónicos, textos escritos y/o numéricos. Así, entenderemos tres sistemas de representación: numérico, aquel referido a cálculos con números explícitos, como también a cálculos implícitos mediante subitización[2] o estimación visual de la cantidad; icónico, aquel referido a las formas icónicas; y textual, aquel referido a las formas lingüísticas escritas.

Es posible distinguir entre representar, sin y con la frecuencia de la categoría de la variable, desde la transición entre representaciones. La figura 2 ejemplifica, desde una situación de caramelos que

[1] *Para este artículo se ha elegido la palabra subcategoría en vez de clase, debido a que clase se ha ocupado para curso de estudiantes, o clase en que se implementa una lección planificada.*

[2] *Kaufman, Lord, Reese y Volkmann (1949) propusieron el término subitización para referirse a la determinación de manera rápida, precisa y confiada de la cantidad de elementos de un grupo de seis o menos elementos presentados simultáneamente. Dichos autores consideran a la estimación como un juicio de cantidad sobre un conjunto de más de seis elementos sin realizar un conteo de los mismos.*

poseen niñas y niños, la transición a representaciones sin escala (primer pictograma) a representaciones con escala (los siguientes pictogramas, diagramas de puntos –enmarcados a propósito– y gráficos de barra), junto a los cambios de registro de lo icónico, numérico y textual, asociados a las categorías de la variable en juego.

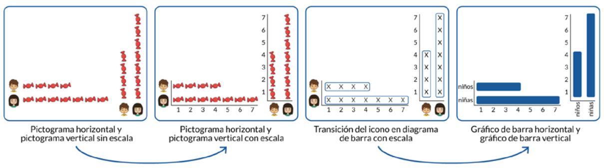


Figura 2. Representaciones de datos en estadística, tránsito entre registros icónicos, numéricos y textuales.
Fuente: Elaboración propia.

En este estudio, se considera que el sistema de representación numérico incluye la frecuencia de los datos, esto es, el cardinal correspondiente a cada subcategoría de la variable que, al componer una representación, está separado de la variable cualitativa. Además, la frecuencia puede construirse desde los recursos de conteo, o de la subitización o estimación de cantidad sobre los datos icónicos o escritos presentados repetidamente (por ejemplo, en una lista). Por tanto, se ha considerado pertinente categorizar la frecuencia, como el cardinal y la repetición de íconos o textos que daban respuesta por conteo y subitización, respectivamente, en contraposición al ordinal, que no provee respuesta a la situación. Asimismo, se usa el concepto cardinal de manera profusa, ya que el concepto frecuencia no está asociado a listas sino a tablas.

Puesto que estudiamos la diversidad de representaciones que construyen los estudiantes de tercer grado, enfrentados a una situación de exploración de datos auténticos, nos preguntamos: ¿Qué representaciones producen los estudiantes cuando se enfrentan a una situación de análisis exploratorio de datos? Con el fin de responder a esta pregunta, hemos llevado a cabo un estudio cualitativo descriptivo.

3. Metodología

Este estudio adopta un enfoque cualitativo para analizar las representaciones de los estudiantes, al enfrentarse a una situación de organización de datos.

3.1. Participantes

Participaron un total de 56 estudiantes de tercer grado, cuyas edades fluctuaban entre 7 y 9 años, de dos escuelas chilenas, una ubicada en la ciudad de Quilpué y otra en la ciudad de Viña del Mar. Los participantes pertenecían a dos cursos de tercer grado de primaria, quienes se encontraban cursando su primer semestre en dos escuelas urbanas; estos fueron elegidos por la accesibilidad a sus profesores. Un curso se componía de 32 estudiantes de edades entre 7 y 8 años. El otro tenía 24 estudiantes, cuyas edades fluctuaban entre 7 y 9 años. El estudio además contó con el consentimiento escrito de los directores de ambos establecimientos, de los profesores, apoderados y estudiantes.

3.2. Recogida de datos

Se implementó una situación de análisis de datos con papel y lápiz. La tarea diseñada se enmarca en el eje Estadística y Probabilidades de la asignatura de Matemática de tercer grado del currículo chileno (Ministerio de Educación de Chile, 2018), que solicita clasificar y organizar los datos mediante tablas y visualizarlos en gráficos. Los datos recabados surgen de las representaciones creadas libremente por los estudiantes, enfrentados a la situación de exploración de datos.

La recogida de datos consideró la videograbación de ambas lecciones y de las representaciones de los estudiantes enfrentados a la situación; también se registraron fotográficamente todas las representaciones finales desde los cuadernos de los estudiantes.

3.3. La lección

El objetivo del plan de clases implementado fue ordenar y organizar datos para obtener información. En torno a este objetivo, un grupo de profesores ideó un contexto de interés para los estudiantes relativo a sus colaciones, y construyó un plan de clases (Estrella, Zakaryan, Olfos y Espinoza, 2020). En base a las propias colaciones llevadas por los estudiantes el día anterior a la lección, los profesores diseñaron una lámina de íconos relativos a los datos entregados por sus estudiantes (figura 3), esto es, cada ícono representa la colación llevada a la escuela previamente por cada estudiante (por tanto, se diseñaron dos láminas según sus datos para cada curso).

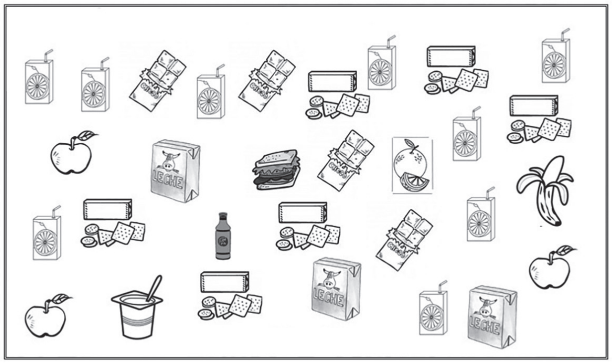


Figura 3. Lámina con las 30 colaciones preferidas de uno de los cursos de tercer grado.
Fuente: Elaborado por la profesora del curso de tercer grado

Después de motivar el tema de la necesidad de una alimentación saludable y las posibles enfermedades por exceso de comida o de comida no sana, la profesora que implementa la lección planificada propone el problema mediante una pregunta y la escribe en la pizarra: ¿De qué manera podemos ordenar y organizar los datos de nuestras colaciones para saber si estamos en riesgo de contraer alguna enfermedad? Luego entrega la lámina de las colaciones del grupo curso a cada estudiante, quienes debían trabajar con los datos y representarlos.

3.4. Análisis

Los investigadores y dos ayudantes de investigación analizaron separadamente las representaciones creadas por los estudiantes, según las categorías establecidas (listas y tablas) y otras levantadas en este proceso (sistemas de representación y cuasitabla). A partir de la videograbación y las representaciones fotografiadas, se construyó y completó una matriz con los formatos representacionales y sistemas de representación.

Al efectuar el análisis de los datos, se clasificaron las producciones en formatos representacionales: lista, tabla y cuasitabla (esta última emergió desde las producciones de los estudiantes). En cada producción se identificó la representación y el sistema de representación predominante (numérico, icónico, textual). Recogidos los datos, el análisis se llevó a cabo, primeramente, con la identificación y clasificación de la representación de datos de cada estudiante, y luego, por el sistema de representación y aspectos de frecuencia que presentaba la misma, y que daban respuesta a la situación.

La triangulación de datos se realizó en el análisis consensuado entre investigadores de la representación de cada estudiante, las videograbaciones de cada una de las lecciones en que los estudiantes representaron, y las notas de campo de los investigadores y ayudantes de investigación.

4. Resultados

En la resolución, los estudiantes usaron registros numéricos, icónicos y textuales. En la figura 4 se ejemplifican los tipos de representación, listas y cuasitablas de íconos o de textos (nótese que los numerales de las cuasitablas indican números ordinales y no cardinales).

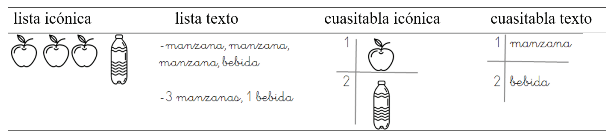


Figura 4. Ejemplos reproducidos de listas y cuasitablas de íconos y de texto creados por estudiantes de tercer grado.
Fuente: Elaboración propia.

4.1. Análisis de las representaciones

De los 56 estudiantes, solo 2 de ellos (3,6%) construyeron una tabla de frecuencia que permitía responder a la pregunta de la situación presentada; 27 de ellos (48,2%) crearon representaciones que no servían para responder a la situación, pues no permitían comparar numéricamente entre las categorías de la variable, y los restantes 27 (48,2%) crearon representaciones que eventualmente podrían dar respuesta, mediante comparación visual (Tabla 1).

Tabla 1
Porcentajes de las representaciones de 56 estudiantes según tipo de formato representacional y aspectos de la frecuencia (cantidad de estudiantes entre paréntesis)

lista ícono		lista texto		cuasitabla icónica		cuasitabla texto		tabla frec.
sin repetición	*con repetición*	*sin repetición*	*con repetición*	*sin repetición*	*con repetición*	*sin cardinal*	*con cardinal*	*con cardinal*
17,8 (10)	35,7 (20)	16,07 (9)	7 (4)	7 (4)	3,6 (2)	7 (4)	1,8 (1)	3,6 (2)
53,6 (30)		23,2 (13)		10,7 (6)		8,9 (5)		
76,8 (43)				19,6 (11)				3,6 (2)

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se presentan las categorías de análisis consideradas: (1) formato representacional (lista, cuasitabla, tabla) y sistema de representación (numérico, icónico, textual), y (2) aspectos asociados a la frecuencia (cardinal, ordinal, repetición) empleados por los estudiantes, para dar respuestas a la situación.

(1) Según el formato representacional y sistemas de representación

De las 56 representaciones producidas, 43 son listas (77%), 11 son cuasitablas (20%) y 2 son tablas de frecuencia (3%).

a) Listas. De las 43 listas, 30 correspondían a listas icónicas (con íconos) y 13, a listas de texto (sin íconos). Estas se han clasificado según presenten repetición o no del ícono o del texto escrito, ya que aun sin el cardinal explícito, ayudan a dar respuesta a la situación mediante estimación de la cantidad. Sin embargo, las listas icónicas sin repetición no permiten obtener información alguna de los datos, por tanto, no hay interpretación de la misma al no dar cuenta del cardinal de la subcategoría (por ejemplo, utilizar una manzana en una representación, difiere de aquella que repite el ícono tantas veces como manzanas existían).

b) Cuasitablas. De las 11 cuasitablas, 6 eran icónicas y 5 de texto. Las cuasitablas icónicas se clasificaron según tuviesen repetición o no del ícono y las cuasitablas de texto se clasificaron según presentaban o no el cardinal, aunque ninguna de estas presentó repetición del texto como identificador del ícono. De las 5 cuasitablas de texto, 4 no presentaban cardinal y 1 sí. Estas cuasitablas no fueron categorizadas como tablas, debido a que utilizaban el ordinal o respondían a la situación omitiendo el cardinal e imposibilitando dar una interpretación desde el conjunto de los datos (ver ejemplo en figura 4).

c) Tablas. Solo hubo dos tablas de frecuencia, con texto y con cardinal (frecuencia), aunque solo una de estas tablas incluía el total marginal (cardinal de la categoría). Estas tablas de frecuencia resumieron todos los datos y entregaron respuesta al problema (figuras 7 y 9).

Ya que la situación presentaba los datos en una lámina con imágenes, era presumible que muchos de los estudiantes ocuparan los íconos representantes de sus colaciones, dibujados o recortados.
Para la misma situación, las representaciones de los estudiantes son a veces listas, a veces tablas. Aun cuando el estudiante solo estaba en posesión de la representación tipo lista, al repetir el ícono y/o utilizar el cardinal, los usaba coherentemente para dar respuesta al problema inicial.

(2) Según aspectos de la frecuencia que permiten dar respuesta a la situación

El 48% de las representaciones sin repetición, tanto en las listas icónicas (17,8%), listas de texto (16,07%), cuasitablas icónicas (7%), así como en las cuasitablas de texto sin cardinal (7%), los estudiantes han ordenado y organizado en forma resumida los datos, pero la ausencia del cardinal o la ausencia de repetición –de íconos o de texto– ha llevado a tal pérdida de información, que estas representaciones no permiten comparar ni dar respuesta a la situación.

En cambio, en las representaciones con repetición de los datos (listas icónicas, listas de texto y cuasitablas icónicas) es posible dar una respuesta al problema en términos de estimación numérica, mediante estimación de la cantidad de *"repeticiones"*, a modo de subitización.

4.2. Análisis de las representaciones involucradas según sistemas de representación

Cada representación se ha clasificado según los tres formatos representacionales, sus sistemas de representación y sus aspectos de la frecuencia: (i) las listas (listas con íconos y sin cardinal; listas con texto y sin cardinal; listas de íconos, con o sin repetición de elementos ordenada; y listas con íconos y con cardinal; listas con texto y con cardinal), (ii) las cuasitablas (tablas con íconos y sin cardinal; tablas con texto y sin cardinal; tablas con íconos y con ordinal; tablas con texto y con ordinal), y (iii) las tablas de frecuencias (tablas con íconos y con cardinal; tablas con texto y con cardinal).

A continuación, se describen cinco representaciones que resultan representativas de lo que se ha venido argumentando: una lista, dos cuasitablas y dos tablas de frecuencias (ver Apéndice, con ejemplos de los registros reales). El análisis ha versado sobre los sistemas: uno referido al conteo con números; otro icónico, referido a la representación con signos semejantes, y un último textual, referido al texto escrito.

4.2.1. Lista con texto y sin cardinal

La figura 5 muestra la representación tipo lista para la variable (tipos de colaciones) y sus categorías –cosas saludables y cosas no saludables–, con datos presentados a través de texto escrito horizontalmente y sin cardinal. Esta representación es muy básica y no permite dar respuesta a la situación, pues al presentar una secuencia de palabras sin cardinal ni repeticiones (de la palabra representante del dato) pierde elementos fundamentales para comparar subconjuntos.

Por tanto, al no asumir un sistema de representación numérico implícito, que le permitiese comparar que un conjunto es subconjunto de otro mayor, debido a que no puede ser corroborado por la inexistencia del cardinal (o por la ausencia de repetición de texto escrito de cada elemento de dicha subcategoría), no puede comparar por subitización o numerosidad, respecto de un conjunto mayor versus un conjunto menor de elementos escritos.

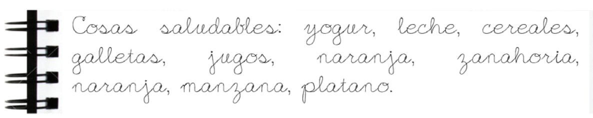


Figura 5. Reproducción de formato lista, con texto y sin cardinal, del cuaderno de un estudiante.
Fuente: Reproducción de representación real de la Figura A1 (ver Apéndice)

Para construir esta lista (figura 5), el estudiante debió particionar el conjunto de los datos icónicos, establecer las categorías de la variable y representar cada ícono por la palabra escrita equivalente. El estudiante reconoce implícitamente la variable "tipo de colaciones" y, dada la situación, determina las dos categorías de la variable, escritas como "cosas saludables" y "cosas no saludables", y en cada una de ellas solo lista por extensión los elementos.

4.2.2. Cuasitabla con texto y sin cardinal

La Figura 6 muestra una cuasitabla con las categorías de la variable y subcategorías, los datos están presentados a través de texto con número ordinal a la izquierda de cada elemento de la subcategoría. En este tipo de representación visualmente con orden y clasificación y aparentes totales marginales, se listan los elementos de las subcategorías, pero no se cardinalizan.

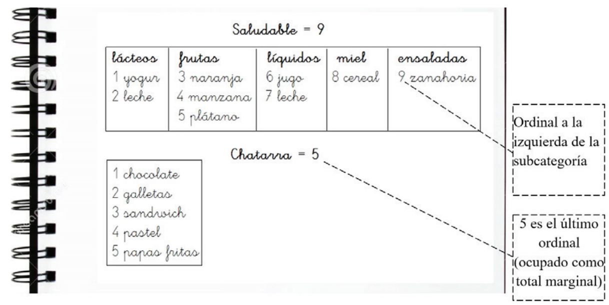


Figura 6. Reproducción de formato cuasitabla, con texto y sin cardinal, del cuaderno de un estudiante.
Fuente: Reproducción de representación real de la Figura A2 (ver Apéndice)

El estudiante escribe cada categoría y subcategorías en una representación que exhibe título, encabezados, filas, columnas y celdas sin cardinalidad (sin frecuencia). Para la categoría "chatarra" de la variable, presenta un formato cercano a la lista vertical, lo que podría ser un indicador del estado intermedio de su esquema tabular, que transita entre lista y tabla.

En esta cuasitabla, algunos subconjuntos no son disjuntos (lácteos y líquidos), por tanto, el cardinal de la categoría resulta erróneo. Además, en el sistema de representación numérico, al escribir el ordinal como el cardinal de la categoría "saludable" (aparente total marginal), el estudiante pierde información de los elementos de cada subcategoría, al no considerar el cardinal respectivo, lo que no le permite responder con mayor exactitud a la situación, pues compara solo los ordinales finales de cada categoría.

4.2.3. Tabla con texto y cardinal

La figura 7 muestra una tabla con las categorías de la variable, datos representados a través de texto, cardinal de cada subcategoría, total marginal de cada categoría y trazado no explícito de segmentos separadores.

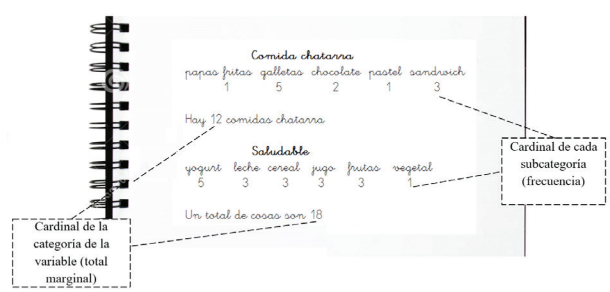


Figura 7. Reproducción de tabla con texto y cardinal del cuaderno de un estudiante.
Fuente: Reproducción de representación real de la Figura A4 (ver Apéndice)

Desde la videograbación, se observa que el estudiante ha unido los elementos de la subcategoría y luego los ha contado todos, lo que equivale a contar los elementos de la subcategoría y luego hacer la adición de los cardinales obtenidos con el conteo.

La ausencia de líneas delimitadoras no es impedimento para una lectura fluida de la representación de datos usada: el orden espacial y el alineamiento de textos y números permite inferir que utiliza título, encabezados, filas, columnas y celdas del formato tabla, en la que explicita los cardinales de la subcategoría (frecuencia) y, en forma de texto lineal, presenta el cardinal de la categoría de la variable (total marginal).

4.2.4. Cuasitabla con ícono y con cardinal

La figura 8 presenta una cuasitabla con categorías de la variable escrita "no saludable" y "saludable", cada subcategoría es representada por íconos y con cardinal a la derecha, y un segmento trazado separa las categorías.

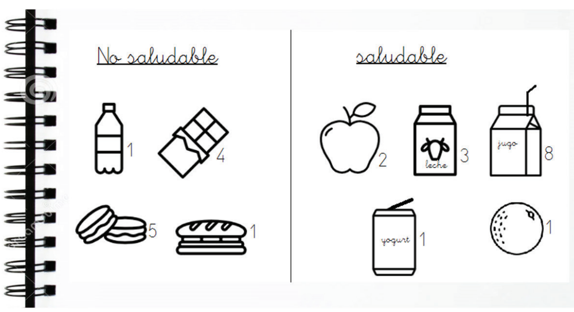
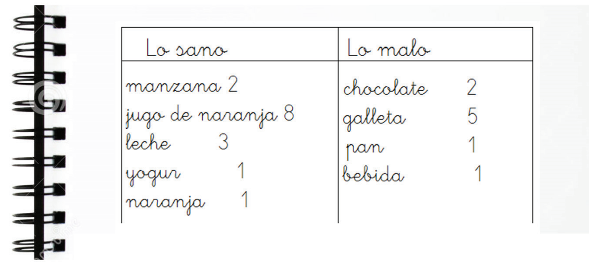


Figura 8. Reproducción de formato cuasitabla, con ícono y cardinal, del cuaderno de un estudiante.
Fuente: Reproducción de representación real de la Figura A3 (ver Apéndice)

Aunque existe cardinal para cada subcategoría, un segmento que delimita y texto escrito en el encabezado, no se considera una tabla de frecuencia, pues no existe un ordenamiento espacial que permita una lectura secuencial vertical u horizontal, al no delimitarse las filas o columnas, o celdas. Aunque se observa que el ícono representa la subcategoría correctamente cardinada, y ocupa un segmento que separa categorías, no lo ocupa para separar entre subcategorías de la categoría de la variable.

4.2.5. Tabla con texto y con cardinal



Lo sano	Lo malo
manzana 2	chocolate 2
jugo de naranja 8	galleta 5
leche 3	pan 1
yogur 1	bebida 1
naranja 1	

Figura 9. Reproducción de tabla, con texto y cardinal, de registro de cuaderno de una estudiante.
Fuente: Reproducción de representación real de un estudiante

La figura 9 presenta en los encabezados de cada columna el nombre escrito de las categorías de la variable, y en el cuerpo de datos de la tabla asocia el nombre de la subcategoría y el cardinal correspondiente (frecuencia). Los nombres de las categorías de la variable están claramente delimitados por segmentos, al igual que la separación entre las subcategorías respectivas (el segmento de la base no fue trazado por la estudiante). Cabe notar que en la categoría "lo malo" la estudiante ha separado espacialmente cada frecuencia de la categoría, mostrando un cambio en lo que venía construyendo en la primera columna (verificar la desalineación de las frecuencias entre la primera columna y la alineación de la segunda).

La representación tabular de esta estudiante presenta las dos categorías de la variable ("lo sano" y "lo malo"), las subcategorías mediante las palabras escritas asociadas a cada dato icónico, y el cardinal correcto en cada una de las subcategorías (frecuencia).

Aunque no hay demarcación entre cada subcategoría (aspecto cualitativo nominal) y su frecuencia (aspecto cuantitativo), al parecer la estudiante que construye la tabla realiza una segmentación espacial interna, pues presenta primero el texto escrito y luego el número (a la derecha) y también realiza una separación física alineada entre texto escrito y número.

5. Discusión

En las representaciones creadas por los estudiantes se observa que realizan una partición del conjunto de elementos (datos icónicos dados), aunque no determinan explícitamente la variable "tipos de colaciones", sino más bien su categorización "sanas" y "no sanas", o similares. La mayoría de estos estudiantes recurren a su repertorio de procedimientos, entre los cuales no está el tabular; al parecer, ni la tabla ni el cardinal son herramientas cognitivas que permiten resumir y comparar, para resolver la situación propuesta.

Los niños que presentaron un concepto más acabado de cómo ordenar y organizar datos, se desempeñaron mejor para responder correctamente al problema que aquellos que no lo poseían. Solo dos sujetos de los 56 estudiantes de tercer grado entregaron una respuesta numérica y tabular a la situación planteada, los restantes estudiantes, o no dieron este tipo de respuesta, o quizás utilizaron la percepción de numerosidad mediante subitización o estimación, para determinar la mayor o menor cardinalidad del conjunto. Nótese que las respuestas presentaron diferentes cardinales, tanto por las diferentes categorizaciones de la variable como por la inexactitud del cardinal, y por tanto de la frecuencia, ello sugiere que los niños requieren más oportunidades de aprendizaje para comprender en profundidad y conexión el principio de cardinalidad, las ideas de conteo, la comparación de elementos de conjuntos, el sucesor y antecesor, el orden en los naturales, junto a las operaciones lógicas de clasificación (Estrella e Isoda, 2020).

El proceso de socialización de los significados de listas y tablas, mediante sistemas colectivos de signos, comienza antes de la entrada al sistema escolar, por tanto, es natural asumir que los participantes de este estudio que tienen al menos tres años de escolaridad, para representar datos, ya debiesen reconocer el concepto lista o tabla, aunque presumiblemente con significados diferentes. El desempeño de los estudiantes en la resolución de la situación fue diverso, lo que podría deberse al dominio previo de algunas representaciones semióticas y las situaciones similares a las que se habían enfrentado con anterioridad. Debido a que casi el 96% de los estudiantes no tiene apropiada la tabla de frecuencia como una herramienta representacional, consideramos que el uso, significado y representación tabular requiere explicitarse, para ser socializado y consolidado de acuerdo al sistema de signos que los niños aprenden en el aula escolar.

Los datos del estudio han permitido identificar aspectos relacionados a representaciones asociadas a frecuencias, que incluyen desde los formatos de listas icónicas, listas textuales sin cardinal, hasta las tablas con cardinal y tablas de frecuencias con totales marginales. Sin embargo, no es posible afirmar que el proceso de organización de datos de cada estudiante transite por cada uno de estos formatos descritos, aunque es presumible que el dominio previo de situaciones de organización de datos incide en los progresos, retrocesos y conexiones del conocimiento que se producen durante el proceso de adquisición de representaciones de datos.

La situación de análisis exploratorio de datos permitió examinar los datos para indagar en el comportamiento de ellos y sus relaciones, y obtener más comprensión de los mismos. Como formato representacional, la tabla no solo se usa para registrar, sino para buscar y comparar datos, encontrar y mostrar relaciones en ellos. Para la situación propuesta, la construcción de significados desde los datos solo puede resultar pertinente si la categorización es adecuada y disjunta, y es la cardinalidad de elementos de la subcategoría –como de la categoría– la que permite responder a la pregunta del problema inicial, esto es, el cálculo y comparación de las frecuencias.

Las representaciones creadas para organizar datos muestran diversidad, como las listas de texto sin cardinal, las listas de texto con cardinal, tablas con íconos y con o sin cardinal, tablas con texto con cardinal y sin él, y las tablas con texto y sin cardinal individual, pero con totales marginales. Concordamos con Martí (2009) en que las listas involucran identificar, segmentar y disponer los datos pertinentes, permitiendo una percepción más directa de las diferentes categorías de los datos.

El uso de la tabla en este grupo de estudiantes permite vislumbrar un conjunto de tareas en la tabla (registro, conteo, listado de elementos pertenecientes a una subcategoría), las operaciones para obtener la frecuencia de la clase (partición, establecimiento de clases, cardinación), y un conjunto de elementos de las representaciones, como segmentos, segmentación física, filas, columnas, celdas, encabezados, lenguaje escrito, icónico y numerales. La tabla, como sistema de signos, integra la forma gráfica con la reducción de espacio y de texto, permitiendo establecer relaciones entre los objetos tratados, activando los esquemas clasificatorios y los sistemas simbólicos. Ello comporta un modo de pensamiento de mayor complejidad, que repercute en los procesos cognitivos involucrados en su uso y en dificultades en el aprendizaje de las tablas. Específicamente, la tabla, aunque familiar, es un objeto complejo, y su enseñanza la ha limitado a completarlas e interpretarlas; falta una enseñanza que involucre las listas, que los estudiantes valoren el número como cardinal y se les confronte con la utilidad y limitaciones del número ordinal, proveyendo situaciones de construcción global de una lista o de una tabla, más que algunas compleciones obvias.

La lista y la tabla, como representaciones externas, se las reconoce visual y simbólicamente a través de las propiedades y relaciones espaciales que ostentan. El análisis realizado nos lleva a conjeturar que los niños podrían desarrollar progresivamente diferentes esquemas para el concepto tabla, dependiendo de las experiencias de aprendizaje con las que se hayan enfrentado inicialmente, por ejemplo, construcción de listas icónicas sin cardinal y con repetición evidente de elementos, y lecturas puntuales y secuenciales asociadas a dichas listas. Confrontar a los niños a este tipo de experiencias, les permitiría apreciar las ventajas de las tablas de frecuencias (demarcadas o no con líneas), en las que sea evidente la diferenciación y el orden, para que activen procesos de búsqueda o procesos comparativos a través de lecturas secuenciales (en filas y columnas), y el cardinal sea una herramienta que ayude a resolver el problema.

6. Conclusiones

Para conocer las representaciones que producen los estudiantes cuando se enfrentan a una situación de análisis exploratorio de datos, este estudio indagó en la organización de datos y en la diversidad de representaciones que construyen estudiantes de tercer grado, enfrentados a una situación de exploración de datos en el marco de la estadística temprana. De modo similar a otras investigaciones (Nisbet et al., 2003), constatamos que no es fácil para los estudiantes reconocer e implementar criterios para un efectivo proceso de clasificación y, al parecer, les es poco intuitivo el proceso de reorganizar datos numéricos en frecuencias. Sin embargo, debido a que en el proceso de organización de datos se identifican diferentes representaciones, al observar los formatos creados por los dos grupos de estudiantes de diferentes escuelas y ciudades, se observa que no varía la organización de la actividad, pues se identifican regularidades entre las representaciones de un mismo grado, en la manera que abordan y desarrollan la resolución de una misma situación, utilizan la partición, la clase y el cardinal.

Un factor recurrente en las representaciones de estos estudiantes fue la repetición con orden o sin orden de los elementos de la subcategoría, ello hace presumir que el ordenamiento de los elementos repetidos facilitaría la estimación cuantitativa visual y, en consecuencia, facilitaría el conteo (o estrategias de conteo), luego la cardinalidad y la eficiencia en los procesos de búsqueda visual.

Consideramos, bajo los hallazgos de este estudio, que es pertinente proponer una introducción curricular de las listas y luego de las tablas, como secuencia en el desarrollo de la habilidad de representar, que podría considerarse por los desarrolladores curriculares, de textos y profesores. Estas representaciones de datos son la parte visible de la conceptualización de la organización de datos de los estudiantes de primaria, y reconocer los distintos estados permite distinguir las comprensiones diferentes de los estudiantes.

El análisis realizado sugiere que, para conformar trayectorias de aprendizaje que involucren listar y tabular, se requiere: (1) consolidar las capacidades de asociación y diferenciación, estrategias de ordenamiento y conteo (puesto que se revelan errores en el conteo que no permitieron dar el cardinal exacto); (2) proveer experiencias con el concepto lista, considerándola como unidad básica de la tabla, y sus disposiciones verticales u horizontales que permiten lecturas espaciales diferentes; (3) explicitar, confrontar y valorar los componentes comunicativos, creados en forma reducida (encabezados con nombre de la variable, sus categorías y subcategorías); (4) considerar situaciones variadas que provoquen la necesidad de construcción de representaciones, que permitan diferentes sistemas de representación (numérico, icónico, textual); (5) admitir representaciones tabulares con y sin demarcaciones físicas, considerando que las segmentaciones mentales facilitan lecturas puntuales (celdas), secuenciales (filas –horizontalmente– y/o columnas –verticalmente–) o globales (tabla completa o partes de la tabla); y (6) diversificar y especificar las situaciones de lectura y escritura de listas y tablas, de modo de proveer situaciones de construcción de representaciones diferenciadas de aquellas de compleción, y situaciones de interpretación diferenciadas de las de evaluación.

Listas y tablas son un tipo de recodificación lingüística que activa procesos de pensamiento, ello facilita ampliamente la clasificación de los datos. Nuestro estudio en el tercer grado, al igual que el de Martí (2009) en segundo y quinto grado, encuentra que, en situación de organización de datos, los estudiantes producen más listas que tablas. La lista escrita puede ser leída en distintas direcciones, tiene comienzo y final precisos, un límite. Al listar, los datos son sustraídos de su contexto inmediato y se posibilita su reorganización y ordenamiento, incrementando la visibilidad y definición de clases.

Las listas y tablas de frecuencia, como herramientas representacionales, requieren de una enseñanza explícita en su diversidad de modos, en su forma y contenido, para que realmente puedan ofrecer a los niños la oportunidad de obtener comprensión de los datos con los que interactúan.

Puesto que los estudiantes han utilizado profusamente la lista como una herramienta para responder a una situación de análisis de datos, una de las proyecciones de este estudio es investigar sobre su uso, aprendizaje y enseñanza, y su significación en la conceptualización de la organización de datos en la iniciación temprana al pensamiento estadístico.

Agradecimientos

Esta investigación se ha realizado dentro del proyecto subvencionado por Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) / FONDECYT 1200346 y Proyecto VRIE-PUCV 039.439/2020.

Referencias

Brizuela, B., y Alvarado, M. (2010). First graders' work on additive problems with the use of different notational tools. *Revista IRICE*, 21, 37-43.

Brizuela, B., y Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 309-319. doi:10.1016/S0732-3123(02)00076-7

Coutanson, B. (2010). La question de l'éducation statistique et de la form*ation de l'esprit statistique à l'école primaire en France. Étude exploratoire de quelques caractéristiques de situations inductrices d'un enseignement de la statistique au cycle III* (Tesis doctoral). Université de Lyon, Francia. Recuperado desde https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00494338/

Dibble, E. (1997). *The Interpretation of Tables and Graphs*. Seattle, WA: University of Washington.

Duval, R. (2003). Comment Analyser le Fonctionnement Representationnel des Tableaux et leur Diversite? *Spirale -Revue de Recherches en Éducation-, 32*, 7-31. Recuperado desde http://spirale-edu-revue.fr/IMG/pdf/1_Duval_Spi32F.pdf

Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación, 14*(2), 1-23.

Estrella, S., e Isoda, M. (2020). *Suma Primero: manual del docente*, *1° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Estrella, S., Mena-Lorca, A., y Olfos, R. (2017). Naturaleza del objeto matemático "Tabla". *Magis: Revista Internacional de Investigación en Educación, 10(*20), 105-122.

Estrella, S., Olfos, R., Morales, S., y Vidal-Szabó, P. (2017). Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20*(3), 345-370.

Estrella, S., Olfos, R., Vidal-Szabó, P., Morales, S., y Estrella, P. (2018). Competencia meta-representacional en los primeros grados: representaciones externas de datos y sus componentes. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 143-163.

Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R., y Espinoza, G. (2020). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. J*ournal of Mathematics Teacher Education*, https://doi.org/10.1007/s10857-018-09423-y

Friel, S. N., Curcio, F. R., y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. J*ournal for Research in Mathematics Education*, 124-158.

Gabucio, F., Martí, E., Enfedaque, J., Gilabert, S., y Konstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en estudiantes de primaria y secundaria. *Cultura y Educación, 22*(2), 183-197.

Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W., y Volkmann, J. (1949). The discrimination of visual number. *The American journal of psychology, 62*(4), 498-525.

Lehrer, R., y Schauble, L. (2000). Inventing data structures for representational purposes: Elementary grade students' classification models. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1-2), 51-74.

Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. Pérez Echeverría, y E.V. Teubal (Coord.), *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 133-148). Rotterdam: Sense Publishers.

Martí, E., García-Mila, M., Gabucio, F., y Konstantinidou, K. (2010). The construction of a double-entry table: a study of primary and secondary school students' difficulties. *European Journal of Psychology of Education, 26*(2), 215-234.

Martí, E., Pérez, E., y De la Cerda, C. (2010). Alfabetización gráfica. La apropiación de las tablas como instrumentos cognitivos. *Contextos, 10*, 65-78.

Martínez, M., y Brizuela, B. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *Journal of Mathematical Behavior,* 25, 285-298.

Ministerio de Educación de Chile. (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación, Ministerio de Educación de Chile. Recuperado desde https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

Moore, D. S., y Cobb, G. W. (2000). Statistics and mathematics: Tension and cooperation. *The American Mathematical Monthly, 107*(7), 615-630.

Nisbet, S., Jones, G., Thornton, C., Langrall, C., y Mooney, E. (2003). Children's Representation and Organisation of Data. *Mathematics Education Research Journal, 15*(1), 42-58.

Pérez-Echeverría, M., y Scheuer, N. (2009). External Representations as Learning Tools: An Introduction. En C. Andersen, N. Scheuer, M. Pérez-Echeverría, y E. Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 1-17). Rotterdam: Sense Publishers.

Pfannkuch, M., y Rubick, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal*, *1*(2), 4-21.

Sepúlveda, A., Díaz-Levicoy, D., y Jara, D. (2018). Evaluación de la comprensión sobre Tablas Estadísticas en estudiantes de Educación Primaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(62), 869-886.

Tukey, J. (1977). *Exploratory data analysis.* Reading, MA: Addison-Wesley.

Wu, H., y Krajcik, J. (2006). Inscriptional Practices in Two Inquiry-Based Classrooms: A Case Study of Seventh Graders' Use of Data Tables and Graphs. *Journal of Research in Science Teaching, 43*(1), 63-95.

Apéndice: Registros reales de cuadernos

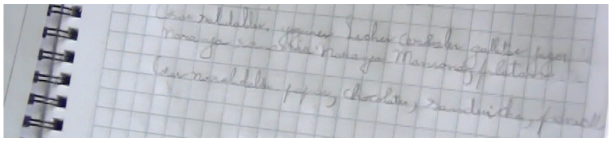


Figura A1. Registro de cuaderno de formato lista, con texto y sin cardinal.

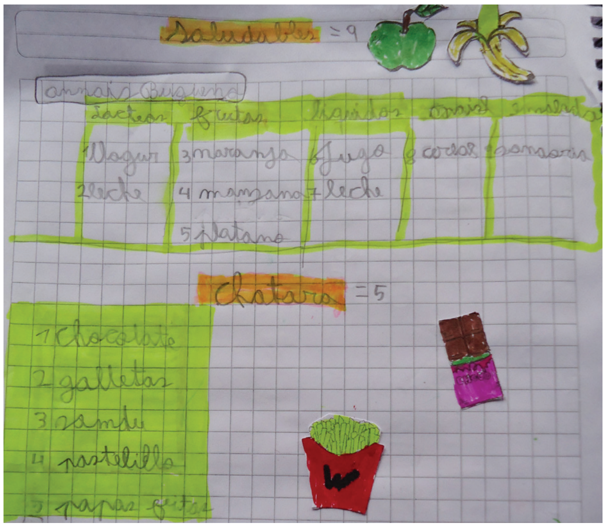


Figura A2. Registro de cuaderno de formato cuasitabla, con texto y sin cardinal.

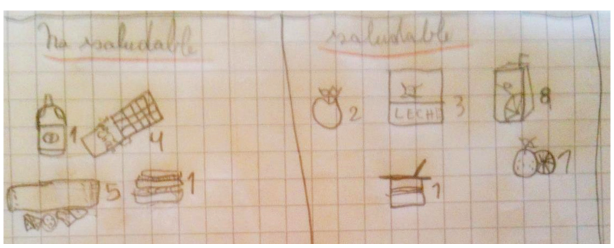


Figura A3. Registro de cuaderno de formato cuasitabla, con ícono y cardinal.

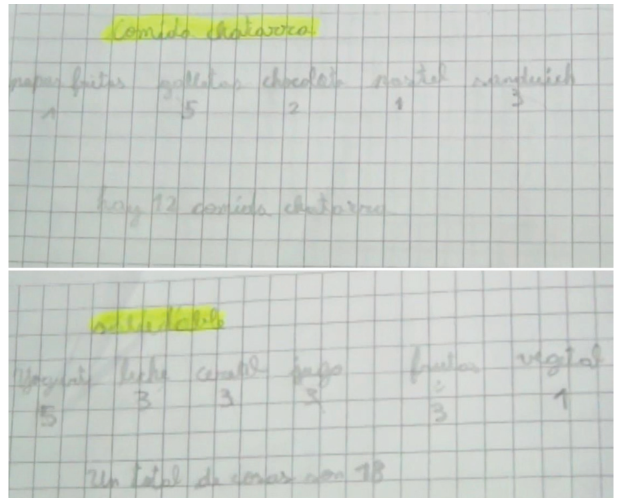


Figura A4. Registro de cuaderno de tabla con texto y cardinal.

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.11

CONDICIONES QUE ACTIVAN LA ARGUMENTACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN CLASE

CONDITIONS THAT ACTIVATE THE ARGUMENTATION OF THE MATHEMATICS TEACHER IN CLASSROOM

Jorge A. Toro, jandres.toro@udea.edu.co
Universidad de Antioquia,
Medellín, Colombia

Walter F. Castro, walter.castro@udea.edu.co
Universidad de Antioquia,
Medellín, Colombia

RESUMEN

¿Cuáles son las condiciones que activan la argumentación del profesor de Matemáticas durante la discusión de tareas en clase? En este artículo se presentan posibles respuestas a esta pregunta, en el marco de un estudio que pretende comprender la argumentación del profesor de Matemáticas en un ambiente habitual de clase. Para ello se presenta una fundamentación teórica sobre la argumentación en la clase de Matemáticas. Los datos forman parte de un estudio más amplio, los cuales se tomaron durante lecciones de clase de décimo grado (estudiantes de 15 a 16 años), mientras la profesora y sus estudiantes discutían tareas sobre trigonometría. Se discuten fragmentos de episodios de clase, donde se describen indicadores de las condiciones que podrían activar la argumentación del profesor.

PALABRAS CLAVE:
Argumentación; discurso; aprendizaje; conocimiento profesional; oportunidades de participación.

ABSTRACT

What are the conditions that activate the argumentation of the mathematics teacher during the discussion of tasks in the classroom? This paper presents possible answers to this question within the framework of a study that aims to understand the argumentation of the mathematics teacher in a typical classroom environment. For this, a theoretical background is presented regarding the argumentation in mathematics classrooms. The data are part of a more extensive study, which was taken during tenth-grade class lessons (students aged 15 to 16), while the teacher and her students discussed tasks on trigonometry. Fragments of class episodes are discussed, where indicators of the conditions that could activate the teacher's argumentation are described.

KEYWORDS:
Argumentation; discourse; learning; professional knowledge; participation opportunities.

Recibido: 25 de octubre de 2019, Aceptado: 1 de marzo de 2020

1. Introducción

En los últimos años, la argumentación ha sido puesta en consideración por la comunidad de Educación Matemática (Stylianides, Bieda y Morselli, 2016), por cuanto es esencial en la construcción del conocimiento (Metaxas, 2015) en la que se tiene en cuenta una apreciación individual y una contribución a un proceso de comunicación (Knipping y Reid, 2015). También ha recibido atención por parte de instituciones encargadas de la organización y planeación de estándares. Por ejemplo, los C*ommon Core State Standards for Mathematics* (Common Core State Standards Initiative [CCSSI], 2010) han descrito ocho estándares para la práctica matemática, uno de los cuales plantea "construir argumentaciones correctas y criticar el razonamiento de otros" (CCSSI, 2010, p. 6). Este estándar invita al profesor a promover en sus estudiantes el planteamiento de conjeturas, el reconocimiento y uso de contraejemplos, la justificación y comunicación de conclusiones, la comparación y la eficacia de argumentos plausibles, y la construcción de argumentos usando referentes concretos tales como objetos, dibujos, diagramas, acciones, entre otros.

Considerar estas declaraciones indica que la tarea del profesor es cada vez más compleja (Selling, García y Ball, 2016). Algunas investigaciones han tenido como propósito estudiar cómo el profesor de Matemáticas puede acercarse a tal fin. Por ejemplo: cómo los profesores pueden apoyar la argumentación colectiva a través de contribuciones a los componentes de un argumento (en el sentido del modelo de Toulmin, 2007); qué preguntas plantean para impulsar estos componentes y las acciones de apoyo que utilizan para facilitar el desarrollo de un argumento (Conner, Singletary, Smith, Wagner y Francisco, 2014); cómo pueden orquestar la discusión en clase a través del uso de tareas matemáticas guiadas por la argumentación, de manera que la "cultura de la argumentación" pueda formar parte del contexto de clase (Boero, 2011); cómo pueden ser estratégicos con sus elecciones, de manera que aprovechen la argumentación como práctica profesional y ofrezcan a los estudiantes oportunidades para desarrollar una comprensión de la argumentación como una práctica de aprendizaje (Staples y Newton, 2016); cómo pueden gestionar sus clases para promover la argumentación (Solar, 2018); cómo pueden diseñar tareas teniendo en cuenta diferentes elementos para crear una situación conflictiva, crear una situación de colaboración y proporcionar un dispositivo para verificar conjeturas, pues aunque la argumentación es de ayuda para el aprendizaje, es difícil de sostener (Prusak, Hershkowitz y Schwarz, 2012), y cómo utilizan la noción de esquemas de argumentación junto con el modelo de Toulmin (2007) para analizar sus argumentos y dar pistas sobre el conocimiento profesional (Metaxas, Potari y Zachariades, 2016).

De esta forma se reconocen avances respecto al papel del profesor, tales como apoyar la argumentación, orquestar la discusión, brindar oportunidades, diseñar tareas o analizar la estructura de los argumentos. No obstante, se considera que poco se conoce aún sobre aspectos asociados a la argumentación del profesor. Cuestiones como ¿podría hablarse sobre qué argumenta el profesor en clase?, ¿cuáles son las características de la argumentación del profesor?, o ¿cuáles condiciones activan la argumentación del profesor de Matemáticas en clase?, intentan ser abordadas en la investigación de la cual desprende este artículo. Respecto a las dos primeras preguntas, algunos resultados han sido discutidos en otras contribuciones (Toro y Castro, 2019a, 2019b) y la tercera pregunta es la que dirige el presente artículo. De manera específica, en este documento se muestra cómo identificar condiciones que activan la argumentación del profesor de Matemáticas durante la discusión de tareas en clase. A partir del análisis de episodios de una lección de clase de trigonometría de una profesora de décimo grado (estudiantes de 15 a 16 años) en la ciudad de Medellín (Colombia) se hace ilustración de tales condiciones.

2. Fundamentación teórica

En este trabajo se considera la argumentación en la clase de Matemáticas como un acto complejo destinado a resolver una diferencia de opinión, en el cual interesa convencer acerca de la aceptabilidad de un punto de vista a través de la justificación o refutación; advierte una dimensión comunicativa, una interaccional y una epistémica, y tiene lugar cuando profesor y estudiantes discuten tareas durante el desarrollo de la lección. Considerar la argumentación bajo ese supuesto, consiste en concebirla como un tipo de actividad con propósito o intencionada, de modo que la actividad es reconocida como un proceso cuya representación es el uso del lenguaje; en ese sentido, la estructura de la constelación de los productos específicos debe analizarse como actos de habla que hacen parte de la resolución de diferencias de opinión (Santibáñez, 2015).

La argumentación surge en respuesta a, o en anticipación a, una diferencia de opinión, la cual no necesariamente toma la forma de un desacuerdo, disputa o conflicto, sino que hay una parte que tiene una postura y otra parte que tiene dudas sobre si aceptar o no dicha postura (van Eemeren et al., 2014).

En la clase de Matemáticas, la diferencia de opinión se reconoce cuando hay dudas o preguntas sobre una aseveración, indicación o explicación del profesor, o dudas sobre una respuesta o procedimiento diferente al presentado por el profesor, o diferentes respuestas a una tarea en el trabajo de los estudiantes.

A diferencia de otros actos de habla complejos como los de aclarar, amplificar o explicar, en la argumentación interesa la aceptabilidad (van Eemeren y Grootendorst, 2011), es decir, el argumentador defiende un punto de vista, que alude a cierto conocimiento de las matemáticas, ante un destinatario que tiene dudas respecto a la aceptabilidad o que tiene un punto de vista diferente, y busca convencerlo recurriendo a la justificación o a la refutación. Se proponen, además, tres dimensiones y acciones específicas: la comunicativa, referida a acciones que involucran aseveraciones, preguntas, gestos y expresiones; la interaccional, expresada en acciones que incluyen la participación, los medios y normas de clase, convencer y discutir; y la epistémica, indicada en acciones como el tratamiento del objeto matemático, conceptos y definiciones, retomar otras lecciones, tratamiento de errores, procedimientos y respuestas, justificar y refutar.

Para identificar episodios de lecciones de clase de Matemáticas donde se pueda reconocer la argumentación del profesor, se ha dispuesto del uso de los términos *intervención argumentativa* y *cierre*. La intervención argumentativa marca el inicio del episodio en donde se explicita la diferencia de opinión por parte del profesor o de un estudiante, y en el cierre se concluye la diferencia de opinión por parte del profesor. En el episodio, el profesor busca convencer a sus estudiantes a partir de su punto de vista, cuando recurre a su conocimiento y a su experiencia profesional.

Adicional a lo anterior, se retoman las condiciones que deberían darse en la clase de Matemáticas para el desarrollo de la argumentación de los estudiantes (Solar y Deulofeu, 2016). A través de análisis de clases de profesores, Solar y Deulofeu (2016) concluyen que mínimamente deberían darse tres condiciones: estrategias comunicativas, tarea matemática y plan de clase. Respecto a las estrategias comunicativas, refieren a las oportunidades de participación, la gestión del error y el tipo de preguntas. Sobre la tarea matemática, comentan la importancia de tareas abiertas, donde no necesariamente haya un único resultado o donde el procedimiento de solución requiera de diferentes estrategias, no solamente formales, de manera que se puedan promover distintos puntos de vista y discusión entre los estudiantes; difieren con las tareas cerradas, pues al haber un algoritmo estándar, se podría dificultar la argumentación. Y respecto del plan de clase, exponen que no solo basta con una tarea matemática abierta, sino que se requiere de la gestión del profesor, el cual debe prever la discusión e intervenir a través de acciones específicas y preguntas; la anticipación de respuestas, los procedimientos o posturas de los estudiantes, la anticipación de procesos argumentativos y las acciones del profesor, forman parte de los indicadores de esta condición.

Dado el propósito y objeto investigativo del presente artículo, se retoma la idea general de la propuesta de Solar y Deulofeu (2016), pero haciendo algunas adaptaciones e incluyendo una cuarta condición, resultado de análisis previos y que refiere al conocimiento profesional en términos de conocimiento didáctico-matemático (Pino-Fan, Assis, y Castro, 2015). El profesor es una variable muy importante en la gestión de la argumentación en clase, y debe recurrir tanto a su conocimiento como a su experiencia para gestionar la formación matemática de los estudiantes. De esta forma, se reconocen las siguientes condiciones que activan la argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase: estrategias comunicativas e interactivas, enfoque de la lección, enfoque de la tarea y conocimiento profesional. Los indicadores de cada dimensión emergen del análisis respectivo.

Finalmente, la preocupación por la discusión y la participación en la clase de Matemáticas, en particular por la discusión de tareas, está asociada a la forma en cómo se concibe el aprendizaje en esta investigación, esto es, desde una perspectiva participacionista (Krummheuer, 2011; Sfard, 2008), en la cual el aprendizaje se conceptualiza como la participación en el discurso de clase, donde las personas pasan de la participación en actividades implementadas de manera colectiva, a formas similares realizadas sin ayuda.

3. Método

El presente artículo forma parte de un estudio más amplio, el cual corresponde a una investigación con un enfoque interpretativo de corte cualitativo, en el cual se utiliza la observación como herramienta para la recolección de los datos. Lo anterior significa que se pretende explorar y describir ambientes y situaciones en la clase de Matemáticas, así como producir interpretaciones en profundidad, de manera que se puedan analizar las acciones individuales y colectivas del profesor y sus estudiantes mientras discuten tareas en clase.

Los episodios aquí reportados tuvieron lugar en una clase con 32 estudiantes de sexo femenino de décimo grado, de una institución educativa de carácter público en la ciudad de Medellín (Colombia). La profesora, protagonista de la investigación, en adelante Emma (seudónimo), estuvo de acuerdo en ser parte del estudio. Ella cuenta con diez años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas y cuenta con formación en magister en Educación Matemática. Los estudiantes suelen estar acostumbrados a participar en las lecciones de clase y no era la primera vez que formaban parte de un estudio empírico con un interés investigativo. El primer autor actuó como observador no participante y no colaboró en la planificación de las tareas presentadas durante las lecciones de clase observadas. Emma contó con autonomía en la preparación de sus lecciones, pues se pretendía observarla en su ambiente habitual de clase. Las lecciones de clase fueron grabadas en audio y video, la cámara de video tuvo siempre en primer plano a Emma, bien cuando se dirigía a todos los estudiantes o bien cuando trabajaba con un pequeño grupo de estudiantes.

En este artículo se presenta, a manera de ejemplo, el análisis de cuatro episodios durante una lección de clase, los cuales tuvieron lugar mientras Emma y las estudiantes (se utilizan seudónimos) discutían la tarea: *Con ayuda de la calculadora y con el círculo unitario, calcula el seno, coseno y tangente de 70° y 80°*. El interés investigativo está en la argumentación, por lo que los datos obtenidos constituyeron las transcripciones de las discusiones de todas las lecciones. Cada lección fue transcrita y discriminada por turno, participante e intervención. Para identificar los episodios de análisis en cada una de las lecciones se hizo un rastreo en cada uno de los turnos, tanto del profesor como de los estudiantes, de las intervenciones argumentativas y de los respectivos cierres a estas, lo cual indica el inicio y el fin de la argumentación. Luego se procedió a identificar qué condiciones activaron la argumentación de Emma en los diferentes episodios, para ello se realizó un rastreo por las diferentes intervenciones en el episodio, para reconocer allí alguna de las cuatro condiciones descritas en la fundamentación teórica. Además, se consideró oportuno indicar en cada episodio las intervenciones argumentativas, los cierres y las diferencias de opinión, para que lograran ser representativos de la argumentación. Lo anterior será presentado en el siguiente apartado y permite dar cuenta del objetivo aquí propuesto.

4. Análisis de datos y resultados

A continuación, se presentarán los episodios, acompañados de la respectiva interpretación, que permitirá presentar algunos resultados sobre el objetivo del artículo. El primer episodio tiene lugar mientras Emma da indicaciones sobre la manera de proceder en la tarea, hay una pregunta de una estudiante que parece sorprenderla y es interesante discutir su reacción. Vale la pena mencionar que otras tareas habían sido desarrolladas antes en la misma lección.

[81] Emma	Luisa, me lees por favor el cuarto punto de la actividad, que es lo que nos falta por hacer… Devolvámonos a la actividad, todas, ¿qué es lo que nos hace falta por hacer? Ya completamos la tabla, hicimos la construcción de los dos triángulos, ¿qué es lo que nos hace falta?
[82] Luisa	[Leyendo de su cuaderno] "Con ayuda de la calculadora y con el círculo unitario, calcula el seno, coseno, tangente de C y D".
[83] Emma	Listo, entonces por acá Luisa nos ayudó, vamos a hacer todas un plano cartesiano.
[84] Ana	¿De cuánto?
[85] Emma	Cada una dice de cuánto lo quiere hacer, pero la idea es que por todos lados mida lo mismo. Usted lo va a hacer del tamaño que quiera, vas a hacer un plano cartesiano del tamaño que quieras, ¿tú quieres que llegue hasta 5? Que llegue hasta 5… que llegue hasta 6… o sea del tamaño que tú lo desees. [Procede a realizar la construcción en el tablero].

La intervención argumentativa se reconoce en [84] en una pregunta de una estudiante que plantea una duda respecto a la indicación dada por la profesora, y el cierre se identifica en [85], en donde Emma, además de responderle a la estudiante, hace algunas precisiones respecto al plano cartesiano. Es un episodio donde se identifica la argumentación, pues hay una diferencia de opinión enunciada a través de una duda presentada por Ana en [84], a la que sigue una intervención de Emma, no solo dirigida a la estudiante que hizo la pregunta sino a toda la clase.

En relación con las condiciones que activaron la argumentación del profesor en este episodio, se resaltan en un primer momento las estrategias comunicativas e interactivas a través de una pregunta de una estudiante que manifiesta tener dudas respecto a la indicación dada por Emma, y en un segundo momento, el enfoque de la lección, pues la profesora parece estar atenta a las preguntas de las estudiantes y en cómo utilizarlas como pretexto para discutir cómo debe construirse un plano cartesiano. La expresión "usted lo va a hacer del tamaño que quiera", parece sugerir una intención educativa de la profesora, promover la toma de decisiones en sus estudiantes, y la expresión "la idea es que por todos lados mida lo mismo" advierte una posible norma consensada en clase.

Un segundo episodio, el cual tiene lugar algunos turnos después del anterior, ilustra una situación que suele ser común en la clase de Matemáticas: "mi figura no es igual a la de la profesora".

[106] Emma — [...] Lo que pasa es que yo entiendo la confusión de algunas, hay algunas que esta línea [indica un lado del triángulo en el tablero], este lado del triángulo no les está coincidiendo con la cuadrícula, eso no quiere decir que el triángulo esté malo, todas van a tener medidas diferentes, ¿lo único que vamos a tener todas en común qué es?

[107] Estudiantes — El triángulo [risas].

[108] Emma — Todas estamos construyendo un triángulo, pero ¿qué cosas del triángulo?... El ángulo, todas vamos a tener en común el ángulo porque partimos del ángulo de 70°, ya algunas van a tener el triángulo más grande, más pequeñito, a algunas les va a coincidir con la cuadrícula y a otras no [...]

En este episodio la diferencia de opinión puede inferirse de la intervención de Emma en [106], quien parece haberse percatado de algunas dudas de las estudiantes respecto a la construcción que han realizado. Esa misma intervención coincide con la intervención argumentativa, donde Emma trata de hacer explícito cuestiones que ameritan cuidado en la clase de Matemáticas, lo cual se infiere de la pregunta ¿qué cosas? (¿qué es un triángulo?, ¿qué es un ángulo?, ¿cómo construir un ángulo?), para llamar la atención sobre los diversos objetos matemáticos que están implícitos en un triángulo y que deben ser reconocidos y nombrados para determinar los referentes comunes sobre los cuales se basa la discusión. Puede hablarse de una argumentación por parte de la profesora, pues se reconoce su interés no solo por presentar una explicación, la cual según la postura teórica asumida acá dista de una argumentación, sino por tomarse el trabajo de prestar la atención y el cuidado necesario a situaciones de clase donde las estudiantes parecen mostrar inquietud, en este caso en [106].

El enfoque de la lección y de la tarea, y el conocimiento profesional, se reconocen en este episodio como las condiciones que activaron la argumentación de Emma. La intervención argumentativa de Emma se debe a que ella es capaz de identificar la necesidad de poner en discusión cuestiones que causan dudas en las estudiantes. La profesora reconoce que la figura hecha por las estudiantes y su ubicación en relación con la cuadrícula puede estar causando un conflicto de significado para ellas;el procedimiento de solución de la tarea que se ha llevado, en este caso la construcción de un ángulo específico en dónde surgen dudas en las estudiantes, es considerado un indicador del abordaje de la tarea; y el tratamiento de objetos matemáticos –ángulo, medida, construcción de triángulos–, en donde manifiesta que es conveniente establecer los términos de referencia y determinar las comprensiones de los estudiantes como requisito para establecer los términos de discusión.

Se pasa ahora a un tercer episodio, en el cual una respuesta de una estudiante, que no es la esperada por la profesora, marca el inicio de una situación de clase en donde se reconoce la argumentación.

[108] Emma — [...] Listo muy bien, así rápido sin pensar mucho, ¿cuánto tiene que medir este ángulo? [Señala un ángulo en el tablero].

[109] Clara — 90°

[110] Emma — ¡Oigan!

[111] Estudiantes — [Risas].

[112] Estudiantes — [Algunas dicen 45°, otras 70° y otras 30°].

[113] Avril — 20°

[114] Emma — 20°. ¿Por qué?

[115] Avril — Porque 70° más 90° serían 160° y 20° es 180°

[116] Emma	Muy bien [...]

En este episodio hay dos intervenciones de Clara y Emma, [109] y [110], que podrían ser consideradas como la intervención argumentativa, y las intervenciones [115] y [116] corresponderían al cierre. Se puede observar una argumentación que, aunque liderada por Emma, cuenta con la participación de las estudiantes. De hecho, una justificación es presentada por Avril y Emma actúa como validadora de la misma. Se identifica una diferencia de opinión en la intervención de Clara en [109] y luego de algunas estudiantes en [112], que no presentan la respuesta esperada por la profesora. Parece que algunas expresiones propias de la profesora en particular ("¡Oigan!"), son alertas para las estudiantes, quienes señalan que algo no está bien en la respuesta de Clara. Dicha expresión parece indicarles a las estudiantes que hay un error, sin necesidad de que sea expresado por Emma en una aseveración. Ello parece evidencia de un refutador no explícito, cuya naturaleza y estudio no forman parte de este artículo.

En el turno [113], Avril plantea la respuesta correcta, lo cual es seguido por una aprobación por parte de la profesora, pero parece ser importante para Emma que las estudiantes se convenzan de dicha respuesta, razón por la cual pide una justificación. Este episodio permite conjeturar que si bien puede identificarse la argumentación de la profesora en diferentes situaciones, también puede reconocerse argumentación por parte de los estudiantes y, aunque el interés del estudio no era indagar sobre cómo el profesor favorece la argumentación, se reconoce un vínculo entre lo que la profesor expresa en su discurso relacionado con la argumentación y en cómo ese mismo discurso tiene un interés educativo de favorecer la argumentación en lecciones de clase. Son indicio de lo anterior la intervención presentada en [110], en la cual hay ciertas expresiones que parecen advertir un error e invitan a las estudiantes a presentar otras respuestas; la intervención dada en [114], en la cual Emma aprueba y solicita una justificación, y la intervención [116], en la cual valida lo expresado por las estudiantes.

Las estrategias comunicativas e interactivas representadas por la gestión del error y el conocimiento profesional representado en las formas de justificar y refutar, se reconocen como condiciones que activaron la argumentación en este episodio. Sobre la gestión del error, se identifica en la intervención [110] y [114] una expresión y una pregunta, que funcionan como indicación de un error y superación de este, respectivamente. Parece ser importante para Emma no solo declarar un error, sino que sean las estudiantes mismas quienes presenten la respuesta esperada y la justificación a dicha respuesta. Y en relación con las formas de justificar y refutar, se identifica que no es Emma la que presenta la justificación y que diferentes expresiones pueden servir de refutador en una lección de clase.

Finalmente, en un cuarto episodio, el cual es particularmente interesante, Emma parece adelantarse a una situación que podría presentarse en el procedimiento de solución de la tarea, pues ella ha observado que las estudiantes se confunden cuando no obtienen la misma figura, como sucedió en los episodios uno y dos.

[138] Emma	Listo, entonces voy a suponer el siguiente caso. Resulta que, en mi construcción, yo voy a hacer... entonces... el seno de 70°. En mi construcción con mi regla a mí me midió 3.8 centímetros, supongamos, el lado opuesto y la hipotenusa, que en este caso sería el radio... sería 4. Con mis medidas, entonces, yo me voy a mirar el seno de 70°, va a ser igual... ¿qué tengo que hacer?... La división entre 3.8 y 4, entonces hacemos las divisiones, 3.8 divido 4. Lo vamos a convertir a números enteros, ¿entonces me quedaría cuánto?
[139] Ana	38 dividido 40.
[140] Emma	38 dividido 40. ¿Cuántas veces está el 40 en el 38?... Tengo que agregarle un 0, pero eso me genera el 0 en el cociente y la coma, entonces, ¿el 40 cuántas veces está en el 380?... Ya cada una tiene que hacer las operaciones con los datos que tienen.
[141] Sara	Profe, ¿y si los dos me dan lo mismo? O sea, cateto opuesto y la hipotenusa...
[142] Emma	Debes ser muy precisa, medir exactamente, porque aquí el milímetro hace la diferencia. Muéstrame [Emma se acerca a Sara a verificar su procedimiento y las demás continúan haciendo la tarea]. Ahí la diferencia es de

		2 milímetros. [Dirigiéndose a todas] Estudiantes, pilas con esto, porque acá tenemos que ser muy precisas, no es que "ah es que la diferencia es 1 milímetro", el milímetro hay que contarlo, listo. [...] ¿Cómo sabemos que si está bien hecha la operación?
[143]	Estudiantes	Con la calculadora.
[144]	Emma	Con la calculadora, ¿qué vamos a poner en la calculadora?... El seno de 70° [...] ¿Cuánto les dio la operación en la calculadora?
[145]	Estudiantes	[Unas dicen 0.91, otras 0.95 y otras 0.97].
[146]	Emma	[Se dirige al puesto de algunas estudiantes] [...] Tengan en cuenta lo siguiente: la calculadora me da a mí un valor... pues no es un valor exacto, porque ese es un decimal infinito no periódico, es un número irracional. Sin embargo, ustedes lo están haciendo a partir de las aproximaciones, estamos aproximando los números a partir de lo que les muestran a ustedes los instrumentos de medida. Pues la idea es que el resultado de esta división a usted le dé algo cercano a lo que aparece en la calculadora, si la calculadora a usted le está mostrando que es 0.94 [respecto al valor exacto de Sen70°]... si hacemos la aproximación y a usted le dio 0.70, ¿será que lo tiene bueno? No, está malo, entonces hay que devolverse a ver cuáles fueron las operaciones que se hicieron malas o las mediciones.

Inicialmente hay una primera intervención argumentativa en [138] declarada por Emma, quien ambienta una situación hipotética que parece situar a las estudiantes en un posible procedimiento de la tarea, y en la siguiente intervención en [140] presenta un primer cierre a dicha intervención; pero a partir de dicho cierre hay una pregunta de una estudiante en [141], a la cual Emma presenta un nuevo cierre en [142]; y luego hay una tercera intervención argumentativa por parte de las estudiantes en [145] que origina un tercer cierre en [146], el cual recoge los cierres e intervenciones anteriores. La diferencia de opinión es reconocida en tres intervenciones, la primera en [138], en la que Emma se adelanta a prever posibles errores pues ha observado ciertas dificultades de las estudiantes (episodios 1, 2 y 3), la segunda en [141], en una pregunta de una estudiante que manifiesta tener una duda sobre una posible respuesta y la tercera en [145], en diferentes respuestas a un mismo procedimiento de solución.

Respecto a las condiciones que activaron la argumentación en este cuarto episodio, se señala: (1) el conocimiento profesional a través del tratamiento de objetos matemáticos [138, 141, 145], en este caso número entero, número irracional, triángulo rectángulo y razón trigonométrica; (2) el enfoque de la tarea a través del procedimiento de solución de la tarea [138], y (3) las estrategias comunicativas e interactivas a través de una pregunta de una estudiante en [141] y de Emma en [142], y de la gestión del error en [145]. Cuando se afirma que la profesora pone en juego su conocimiento profesional nos referimos al conocimiento que la profesora ha adquirido a través de los años y que le permite determinar posibles errores, confusión en los términos, falta de precisión en los cálculos, o hacer afirmaciones sin tener los elementos suficientes para soportarlas.

5. Conclusiones

Se hace notar la forma en cómo fueron analizados los episodios, que además de ser el reflejo de un ambiente habitual de una lección de clase de Matemáticas donde una profesora discute tareas con sus estudiantes, permite poner en consideración aspectos que ameritan un tratamiento especial en la investigación, en este caso la argumentación. Un experto en análisis de la estructura de un argumento, en particular del modelo de Toulmin (2007), podría aseverar que no hay argumentación. Sin embargo, lo que se ha presentado en los análisis de los datos y en la interpretación de estos, permite plantear y presentar a la comunidad de Educación Matemática otra forma de analizar la argumentación que despliega un profesor en una clase de Matemáticas, así como también asumir la argumentación en la clase de Matemáticas, en este caso con el pretexto de indagar por cuestiones asociadas al profesor. Los resultados permiten afirmar que en dicho proceso de argumentación intervienen aspectos comunicativos, interaccionales y epistémicos, además de intenciones, propósitos educativos, así como aspectos asociados a condiciones contextuales.

Uno de tales aspectos refiere a las creencias que la profesora tiene sobre la enseñanza de la Matemática. Si bien en esta investigación no se estudia, es una característica que ha surgido durante el estudio y que amerita ser reconocida y puesta en relación con los aspectos comunicativos, interaccionales y epistémicos. Un profesor con una postura no formal sobre las matemáticas, o "no transmisionista", "promueve que los estudiantes resuelvan los problemas con sus propios métodos y los discutan con sus compañeros" (Schoen, LaVenia y Ozsoy, 2019, p. 6). La argumentación en la clase de Matemáticas no tiene existencia por sí misma, tan solo se activa si se dan condiciones especiales tanto por parte de los estudiantes como por parte del profesor. Las condiciones que activan la argumentación del profesor se han estudiado en este documento, pero aún han de investigarse las condiciones que activan la argumentación por parte de los estudiantes.

Respecto al objetivo de la investigación, los episodios que sirvieron de ilustración permiten identificar al menos cuatro condiciones que activan la argumentación del profesor: las estrategias comunicativas e interactivas, con indicadores como preguntas, oportunidades de participación y gestión del error; el enfoque de la lección, con las intervenciones argumentativas como indicador; el enfoque de la tarea, con el procedimiento de solución de la tarea como indicador, y el conocimiento profesional, con indicadores como el tratamiento de objetos matemáticos, retomar o prever lecciones, y las formas de justificar y refutar.

El interés por el estudio de la argumentación del profesor de Matemáticas va más allá de describir la argumentación: busca comprender sus componentes y las condiciones que la activan y que la distinguen de otras acciones tales como la comunicación, la interacción y la evaluación, y que una vez conocidas puedan ayudar a comprender el papel que tienen en la formación matemática de los estudiantes. En este documento intentamos hacer un análisis del discurso, propio para cada episodio; se aprecia que es difícil contrastar un episodio con otro, hay intervenciones ligadas con otras o propósitos de la profesora en común, por ejemplo, atender a una pregunta o un error cometido –o que podrían cometer– varios estudiantes.

Referencias

Boero, P. (2011). Argumentation and proof: Discussing a "successful" classroom discussion. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), Actas del 7th *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 120-130). Rzeszów, Polonia: ERME.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Recuperado desde http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P., y Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics, 86*(3), 401-429. doi:10.1007/s10649-014-9532-8

Van Eemeren, F., Grassen, B., Krabbe, E., Snoeck Henkemans, F., Verheij, B., y Wagemans, J. (2014). *Handbook of Argumentation Theory*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Van Eemeren, F., y Grootendorst, R. (2011). *Una Teoría Sistemática de la Argumentación*. *La Perspectiva Pragmadialéctica*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Biblos.

Knipping, C., y Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 75-101). New York: Springer.

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion ''learning-as-participation'' in everyday situations of mathematics classes. ZDM *Mathematics Education, 43*(1), 81-90. doi:10.1007/s11858-010-0294-1

Metaxas, N. (2015). Mathematical argumentation of students participating in a mathematics–information technology project. *International Research in Education, 3*(1), 82-92. https://doi.org/10.5296/ire.v3i1.6767

Metaxas, N., Potari, D., y Zachariades, T. (2016). Analysis of a teacher's pedagogical arguments using Toulmin's model and argumentation schemes. *Educational Studies in Mathematics, 93*(3), 383-397. doi:10.1007/s10649-016-9701-z

Pino-Fan, L., Assis, A., y Castro, W. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. EURASIA *Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Prusak, N., Hershkowitz, R., y Schwarz, B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 19-40. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9335-0

Santibáñez, C. (2015). Función, funcionalismo y funcionalización en la teoría pragma-dialéctica de la argumentación. *Universum, 30*(1), 233-252. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-23762015000100014

Schoen, R. C., LaVenia, M., y Ozsoy, G. (2019). Teacher beliefs about mathematics teaching and learning: Identifying and clarifying three constructs. *Cogent Education, 6*(1), 1-29. https://doi.org/10.1080/2331186X.2019.1599488

Selling, S., Garcia, N., y Ball, D. (2016). What does it take to Develop Assessments of Mathematical Knowledge for Teaching?: Unpacking the Mathematical Work of Teaching. *The Mathematics Enthusiast, 13*(1), 35-51.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Solar, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana de Educación,* 74, 155-176.

Solar, H., y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema*, *30*(56), 1092-1112. http://dx.doi.org//10.1590/1980-4415v30n56a13

Staples, M., y Newton, J. (2016). Teachers' Contextualization of Argumentation in the Mathematics Classroom. *Theory into Practice, 55*(4), 294-301. doi:10.1080/00405841.2016.1208070

Stylianides, A., Bieda, K., y Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. En Á. Gutiérrez, G. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 315-351). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Toro, J., y Castro, W. (2019a). Features of mathematics' teacher argumentation in classroom. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 336-337). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Toro, J., y Castro, W. (2019b). Purposes of mathematics teacher argumentation during the discussion of tasks in the classroom. En M. Graven, H. Venkat, A. Essien, y P. Valero (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 458-477). Pretoria, Sudáfrica: PME.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación.* Barcelona, España: Ediciones Península.

VOLÚMEN 12
N°1
ABRIL 2020

R
E
C
H
I
E
M

REVISTA
CHILENA DE
EDUCACIÓN
MATEMÁTICA

sochiem