Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles
sochiem
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
XXVIII
Jornadas Nacionales
de Educación Matemática
12 y 13
DICIEMBRE
2024
EDUCACIÓN MATEMÁTICA HOY:
Desafíos en innovación, inclusión y formación
COMITÉ ORGANIZADOR
Dr. Sergio Morales
Dr. Eugenio Chandía
Dra. Marianela Castillo
Dr. Mauricio Gamboa
Dra. Jesús G. Lugo-Armenta
Los Ángeles,
Región del BioBío
MODALIDAD PRESENCIAL
Escuela de Educación
Universidad de Concepción
Campus los Ángeles
Facultad de Educación
Universidad de Concepción

ACTAS

PREFACIO

El año 2024, la Universidad de Concepción, a través de su Escuela de Educación del Campus Los Ángeles, y la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM), organizaron las XXVIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática, que se llevaron a cabo los días 12 y 13 de diciembre, de manera presencial, en la ciudad de Los Ángeles. Estas jornadas continuaron la tradición de promover el desarrollo y fortalecimiento de la comunidad nacional dedicada a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, integrando conferencias magistrales, talleres, exposición de póster, reportes de investigación y experiencias de aula.

El objetivo principal de estas jornadas fue que sus participantes se familiarizaran con nuevas perspectivas educativas que contribuyeran a enriquecer la reflexión y práctica pedagógica en torno a la educación matemática. Las actividades realizadas permitieron abordar fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina, fortaleciendo el pensamiento matemático como herramienta para transformar la realidad de manera crítica, constructiva y reflexiva.

Las jornadas convocaron a investigadores, docentes de matemáticas, educación básica, educación especial y educación parvularia, estudiantes, y especialistas internacionales reconocidos. En esta edición, se contó con la destacada participación de la Dra. Rossella Santagata, Dr. Karl W. Kosko, Dra. Ceneida Fernández Dr. Mustafa Çevikbaş, quienes enriquecieron las discusiones y el intercambio de experiencias con sus aportes.

Como Comité Organizador y Comité Científico, valoramos profundamente el apoyo y confianza brindados por la Universidad de Concepción, particularmente por su Campus Los Ángeles, así como por la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM). Finalmente, extendemos nuestro reconocimiento a todos los ponentes y asistentes por su valiosa participación, que hizo de estas jornadas un espacio único de aprendizaje, reflexión y colaboración.

Comité Científico JNEM28 UdeC - SOCHIEM

Índice

Prefacio

Organización

XXVII JNEM

Conferencias Plenarias

Conferencias Especiales

Teacher Noticing: From Theory to Practice.

Rossella Santagata, Universidad de California.

Desarrollo de la competencia docente en los futuros profesores de matemáticas

Ceneida Fernández. Universidad de Alicante

Digital Technologies in Mathematical Modelling: Opportunities, Challenges, and Forward Innovations

Ponente: Mustafa Cevikbas, Universidad de Humboldt.

How Novel Technology and Theory Can Shape Research & Practice in Mathematics Education

Karl Kosco. Universidad de Ken

Experiencia de aula

Formación de profesores en competencias de argumentar y comunicar en el aula de matemáticas
Natalia Pérez y Horacio Solar

Comparando áreas de figuras geométricas grandes con aprendizaje colaborativo
Rodrigo Rojas-Muñoz
Rosa Coñué Levicoi
Claudia Rozas Rozas

Construcción del concepto familia de operaciones en un segundo básico por medio de un estudio de clases
Ricardo Martínez T.

Habilidades matemáticas de argumentar y modelar en el aula de matemáticas
Camilo Andrés Torres Torres
Horacio Solar

Una propuesta de enseñanza para el desarrollo del pensamiento crítico en matemática
Sergio Morales Candia
Lucas Amaza Fernández
Katherine Fabriga Fica

Innovación sociocultural en la enseñanza de transformaciones geométricas para la formación de profesores de matemática: una experiencia de aula
Nicolás Alvarado-Morales
Danitza González

Evaluación integrada taller geometría y álgebra para docentes de educación básica en formación
Constanza Ripamonti
Evelyn Campos
Ana María Alarcón

Enseñanza de la función cuadrática en su forma canónica bajo la teoría de registros de representación y el uso de herramientas digitales
Gabriela Paz Escalona Kojic

Secuencia para la introducción de la forma general de la ecuación cuadrática
Consuelo Álvarez Lisboa

Uso de registros de representación semiótica de funciones afines en un problema que integra geogebra en educación básica
Priscila Rubilar Pérez

Desarrollo de la alfabetización estadística en futuros profesores a través de R y RStudio
Jocelyn D. Pallauta
Ingrid Jácome

Descubriendo la Distribución Normal: una propuesta para la enseñanza de estadística en contexto profesional
Melanie Cubillos D.
Álvaro Figueroa L.

Propuesta de enseñanza ¿el juego es justo?, enfrentando los significados de la probabilidad
Daniela Cortés Fredes
Eduardo Fernández Tapia

Propuesta de diversificación de estrategias pedagógicas para enseñar trigonometría: influencias positivas en el aprendizaje
Dayans Estrada Parra

Una propuesta alternativa para la enseñanza atípica del teorema de Pitágoras
Jacobo Molina Peña
Diego Silva Farias

Armonía trigonométrica. La matemática en la construcción de una zampoña
Gloria Velozo

De las velas y derivadas: una aproximación intuitiva para la enseñanza de la noción de derivada
Rodrigo Ramírez Corral

¿Qué tiene tu plato? Una situación de modelación para la función exponencial desde la teoría sociepistemológica de la matemática educativa
Fernando Sánchez Sanhueza

Evaluación del conocimiento de logaritmos en estudiantes de segundo año medio a través de Scratch para el desarrollo de habilidades digitales
Patricia Andrea Peñailillo Olmos

Pensamiento computacional y Scratch: una propuesta de aula
Adiel Silva Riveros

Propuesta didáctica: oscilaciones de un resorte en matemáticas
Victor Sazo

Taller de pensamiento computacional entre matemática y bacteriología clínica
Fernanda Freite
Alessandro Roco
Paulina Sepúlveda
Arturo Levican
Isabel Cantillana

Propuesta de demostraciones visuales y concretas de fórmulas de sumatorias en la enseñanza del cálculo
José Ignacio Andrés Ainzúa Céspedes
Iván Esteban Pérez Vera

Comprensión del concepto físico de rapidez asociado con la noción de pendiente de la recta en el plano, en una competencia de carreras de estudiantes de educación media de la comuna de Renca, una mirada desde la teoría de registros de representación semiótica
Rodolfo Arturo Rioseco Díaz

Reportes de Investigación

El rol de la operación binaria en el desarrollo de nuevas estructuras matemáticas en álgebra lineal. Una mirada desde la teoría
Yasna Solar
Mauricio Gamboa
Miguel Rodríguez

Explorando etnomatemáticas en tejidos de Costa Rica para configurar una propuesta glocalizada en la enseñanza de la geometría
Elena Gavarrete Villaverde
Pamela Montero Solano
Bayron Molina Montoya
Iriana Montiel Arguedas

Coherencia curricular de los planteamientos didácticos de la educación matemática secundaria costarricense en el área temática de las ecuaciones lineales
Cynthia González-Jiménez
Juan Francisco Ruiz-Hidalgo

La derivada en la formación inicial de profesores de matemática: una mirada desde los textos universitarios

Víctor Córdova-Cornejo
María D. Aravena-Díaz
Marcela Parraguez-González
Danilo Díaz-Levicoy

Construyendo el fragmento matemático homotecia: una propuesta desde la teoría APOE integrando Geogebra
Arantxa Flores Arancibia

Co-diseño multilingüe para redistribuir la autoridad epistémica en matemática de primaria
Patricia Fuentes Acevedo
Christina Kimmerling
Rossella Santagata

Comprensión gráfica en el contexto de preguntas estadísticas. Un estudio en contexto EPJA
Esteban L. Maturana S.
Martín Nicolás Sánchez Acevedo

Evaluación de modelo de formación para profesores líderes en competencias matemáticas
Horacio Solar
Florencia Gómez
Kurt Mursell

Formación ciudadana en la sala de matemática: reflexiones docentes sobre los primeros acercamientos de su implementación
Noemí Pizarro
Juan Núñez
Byron Zamorano
Alicia Zamorano

Mirada profesional de las oportunidades de participación equitativa en el aula de matemáticas
Victoria Arriagada Jofré
Horacio Solar Bezmalinovic

Niveles de noticing en profesores expertos de matemáticas al enseñar el teorema de Pitágoras
Ledher M. López
Diana Zakaryan

Creencias de docentes de la ciudad de Valparaíso sobre las causas que generan ansiedad matemática en sus estudiantes
Juan Pablo Medel

Javier Santis
Carlos Mejías
Álvaro Bustos Rubilar

Diseño y gestión de clases que promueve la argumentación en el aula matemática: un proceso formativo
Andrés Ortiz
Antonio Meneses

Matemáticas con perspectiva de género en educación parvularia: retos y experiencias
Ana Milena Mujica-Stach
María José Bergma Álvarez
Luis Marcelo Casis Raposo

Tareas en entornos lúdicos y unplugged que promueven el desarrollo del pensamiento estadístico y computacional desde los primeros años
Brahiam Ramírez
Patricio Santibáñez
Alejandra Mondaca-Saavedra
Soledad Estrella
Raimundo Olfos
Marcela Parraguez

Objetos matemáticos movilizados por futuros profesores al proponer y resolver una tarea geométrica
Guadalupe Morales Ramírez

Justificaciones realizadas por un estudiante de primero básico en una tarea de ecuaciones e inecuaciones
Lourdes Anglada
Sandra Fuentes
Romina Narváez
María Cañadas

Un estudio de clase para desarrollar el razonamiento inferencial informal en enseñanza básica con material lúdico
Antonia Rodríguez Guzmán
Sarah Salinas Asenjo

El concepto de ángulo en textos escolares: una aproximación al conocimiento utilizado por docentes
Noemí Pizarro
Alicia Zamorano-Vargas

Nuria Joglar-Prieto
Juan Miguel Belmonte

Conocimiento especializado de una profesora de educación especial en una clase de adición para estudiantes ciegos
Juan Luis Piñeiro G.
Eder Pinto M.
Catalina Román Á.

Desarrollo del pensamiento crítico en la enseñanza de la fracción: un enfoque metodológico mixto
Yaricsa Jeldres Villagrán
Sergio Morales Candia

Desarrollando el pensamiento computacional en K-2: una propuesta de secuencia de aprendizaje lúdica
Patricio Santibáñez
Alejandra Mondaca-Saavedra
Brahiam Ramírez
Soledad Estrella
Marcela Parraguez
Raimundo Olfos

Ansiedad ante la enseñanza de la matemática en futuros maestros de primaria
Katty Villalobos-Morales
Kenneth García-Chaves
Islande Delgado-Monge

Comprensión de las dificultades del concepto altura en docentes de secundaria: un estudio exploratorio
Elizabeth Toro Barbieri
Arturo Mena-Lorca

Conexiones extra-matemáticas establecidas por futuros maestros de educación primaria al diseñar tareas escolares geométricas
Juan Pablo Vargas Herrera
Yuly Vanegas
Joaquín Giménez

El conocimiento especializado de una futura profesora de matemáticas durante su práctica profesional
Gabriel Meza-Pereira
Miguel Ángel Montes

Estudio de la articulación de conocimientos teóricos y prácticos en el espacio de trabajo matemático de la triada formativa
Romina Menares Espinoza
Laurent Vivier

Propuesta de evaluación diagnóstica para profesores de educación matemática
Álvaro Figueroa L.
Melanie Cubillos D.

Rediseño de tareas en la formación inicial del profesorado que involucran la traslación de figuras planas
Javiera Valdivia-González
Paula Verdugo-Hernández
Carolina Henríquez-Rivas

Análisis de la pendiente de una recta: una mirada desde teoría de registros de representación semiótica
Sebastián Cantallopts Rauld
Gonzalo Martínez Riquelme

Propuesta de enseñanza para favorecer el aprendizaje de función trigonométrica en estudiantes de cuarto medio
Constanza Paz Sánchez Sánchez
Sofía Catalina Escobedo Aránguiz
Patricio Alejandro Delgado Donoso

Dificultades en la comprensión del concepto de función en aulas neurodiversas: una propuesta didáctico-matemática basada en la teoría de situaciones didácticas y en la teoría de las representaciones semióticas
Romina Rossi Yumha
Freddy Molina Dotte
Yocelyn Parra Urrea

Modelos del método de Euler desarrollados por estudiantes y analizados desde la educación matemática realista
Juan Felipe Medina-Mendieta
Carolina Guerrero-Ortiz

Microenseñanza, un contexto para explorar en el pensamiento estadístico de futuros profesores de matemática
Camila Cisterna Alarcón
Armin Kauer Suazo

Daniela Araya Bastías
Nicolás Sánchez Acevedo

Situaciones-problema de correlación y regresión en libros de texto de Chile y Colombia
Audy Salcedo
Danilo Díaz-Levicoy
Jaime I. García-García

Tareas para el encuentro de estudiantes de educación media con el concepto de n! en situaciones de azar
Kevin Rojas-Hernández
Juan Luis Prieto-González
Irene V. Sánchez-Noroño

Una propuesta de secuencia de clase para la distribución normal
Elizabeth Toro Barbieri
Nicolás Sánchez Acevedo

Dificultad en la definición y representación de la altura de un triángulo. Un estudio exploratorio
Elizabeth Toro Barbieri
Tamara Siles Vega
Gabriela Escalona Kojic

Razonamiento geométrico en un ciclo de modelación matemática: análisis de la aplicación en el contenido de homotecia en estudiantes de primero medio
Marco Maulén Araya
Ariel Osorio Saavedra
Claudio Zamorano Sánchez

Creación y uso de tareas geométricas para la enseñanza del concepto de cuadrilátero según el modelo de Vinner
Francesca Morecchio J.
Fabián Quiroga M.

Comunicaciones Breves

Iniciación a la geometría en educación infantil. Las metodologías exhibidas

Olga Casanova Cárdenas, Ismenia Guzmán Retamal, y Jesús Lugo Armenta

Laberintos para la enseñanza de los números complejos a través de representaciones *geométricas y algebraicas*

Patricio Santibáñez Galdames

Implementación de una metodología activa y su alcance para el desarrollo del pensamiento estadístico
Hugo Alvarado Martínez

Visión de los docentes sobre las dificultades de comprensión de las pruebas de hipótesis
María Lidia Retamal

El encuentro con la distribución binomial. Diseño de tareas para estudiantes de educación media

Cristóbal Arenas, Alan López, Juan Luis Prieto-González y Elizabeth-H. Arredondo

Errores en la construcción de gráficos de barras por estudiantes de 5º y 6º básico de escuelas rurales
Matías Bustamante-Valdés, María José Pérez-Jasma y Danilo Díaz-Levicoy

Subcompetencias de modelación y pensamiento probabilístico en estudiantes con talento académico
Esteban Aros Sánchez, Andrea Vergara Gómez, María Aravena Díaz y Marianela Castillo Fernández

Conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad en futuras maestras de educación infantil
Claudia Vásquez y Carmen Batanero

Diseño de una propuesta didáctica para probabilidad frecuentista
Carolina Fernández

Propuesta de enseñanza de percentiles desde la perspectiva gráfica
Hernán Chacón Osorio, Manuel Rioseco Jopia, Gabriel Meza Pereira y Álvaro Figueroa López

Estrategias de comparación de muestras: Una experiencia con inferencias estadísticas informales en edades tempranas
Maritza Méndez-Reina, y Soledad Estrella

Gráficos estadísticos con apoyo de software educativo: Diseño de tareas para estudiantes

de 8° básico
Joel Núñez Encina, y Nathaly Arias Bacarreza

Traducción de gráfico a tabla de doble entrada por estudiantes de secundaria
Jocelyn D. Pallauta y Pedro Arteaga

Análisis de tareas de patrones del libro de texto de matemática de primaria desde la instrucción
Helen Bolaños González, y Antonio Moreno

Las emociones epistémicas y los obstáculos epistemológicos presentes en el proceso de resolución de ecuaciones algebraicas: Una propuesta de investigación
Ricardo Neftalí Ramírez Osorio, y Luis Cornelio Recalde Caicedo

Desarrollo del pensamiento algebraico a través de las desigualdades numéricas
Jorge Jiménez-Gutiérrez, Eder Pinto, Natividad Adamuz-Povedano y Elvira Fernández-Ahumada

Caracterización de campos de problema de la derivada en ingeniería
Dra. Maritza Galindo y Luis González

Inteligencia artificial generativa y derivadas: Diseñando una situación de aprendizaje
Adiel Jeremías Silva Riveros y Sebastián Andrés Saavedra Messina

Modelo de transformación de la enseñanza del cálculo diferencial e integral, para su aprendizaje
Patricia Rojas Salinas

Uso de tecnologías en la modelación matemática: El caso del plano inclinado en formación inicial de profesores
Iván Pérez Vera, Millaray Rojas y José Ainzúa y Jacobo Molina

Una revisión sistemática de la literatura sobre las funciones de la argumentación para el desarrollo de la habilidad en el aula de matemáticas
Jorge Olivares-Aguilera y Manuel Goizueta

Curiosidad en el proceso de aprendizaje de estudiantes de quinto grado en el contexto del razonamiento inferencial informal
Rocío García Ambiado, Monserratt Pinto Grandón y Sergio Morales Candia

Percepción del error en el aprendizaje de matemáticas en estudiantes de enseñanza básica:

Un estudio de caso múltiple
Víctor Diaz Bocaz y Matías Arellano Salinas

Proporcionalidad funcional: Su falta en la matemática escolar dificulta el desarrollo del pensamiento crítico
Manuel Ampuero y Astrid Morales Soto

Análisis de la implementación de un ABP en contexto de educación técnico profesional: Logros y desafíos
Iván Muñoz Barrera y José Galaz Arraño

Diseño de una secuencia didáctica de modelación para la enseñanza de sistemas de ecuaciones utilizando como herramienta epistemológica el algoritmo de clasificación de relevancia de páginas web Page Rank
Néstor Gajardo y Andrés Navas

Avance de investigación sobre un estudio de estrategias empleadas por docentes en formación en enseñanza de la matemática al resolver problemas de modelización: El caso de Chile y Costa Rica
Roberto Araneda-Benítez, Jesennia Chavarría-Vásquez, María Victoria Martínez-Videla y Ronny Gamboa-Araya

Habilidad de resolución de problemas en tercero básico: Una realidad postpandemia
Cecilia Marambio Carrasco

Aprendizaje ubicuo en la formación inicial docente de matemática para la enseñanza media
Samuel Benjamín Beñaldo Catalán y Alexis Alejandro Fuentes Tapia

Reconfiguración de las prácticas docentes en el contexto de la enseñanza de los números racionales y sus operaciones: Un análisis desde el modelo de Ponte
Javier Vera Carvacho

Desafíos en la enseñanza de inferencia estadística en Chile: Un estudio de metodologías no tradicionales
Isadora Navarro Pérez

Desafíos en la formación docente frente a la actualización curricular: Un estudio exploratorio
Daniela Olivares y Paola Armijo

¿Cómo se han estudiado los conocimientos y competencias del futuro profesor de matemáticas durante su práctica profesional?
José Luis Morales Reyes y Diana Zakaryan

Formación docente inicial en la era digital: Percepciones de futuros profesores de matemática sobre su intención de aprender IA
Brahiam Ramírez, Soledad Estrella y María Inés Pezoa

El conocimiento matemático para la enseñanza desde la mirada de las educadoras de párvulos
Leidy Caterine Bautista Galeano y Víctor Michael Pérez Fernández

¿Qué sabemos de las fracciones? Investigación acerca del conocimiento de los profesores en formación de educación básica sobre las interpretaciones de las fracciones
Francisca Espinoza Guerrero

Significados de la ansiedad en la enseñanza de la matemática: Un estudio cualitativo con profesores de enseñanza media en Chile
Andrea Pinto-Vergara y Daniver Morales Nejaz

La matemática escolar desde la perspectiva estudiantil en la región de La Araucanía
Karla Ignacia Cocio Caniulao, Benjamín Adrián Reyes Riquelme y Francisca Belén Vidal Acosta

Profesores noveles en matemática: Facilidades y dificultades
Esteban Alarcón, Christian Puentes, Fernando Sepúlveda y Carlos Reyes

Análisis de las habilidades matemáticas y socioemocionales de párvulos de nivel de transición I y transición II
Sandra Catalán, Joaquín Cubillos y Raimundo Olfos

Propuesta de proyecto de aula interdisciplinario entre matemática y artes visuales: Evaluación del aprendizaje basado en proyectos desde el enfoque edumétrico
Jorge Erices y Auristela Hormazábal

Evaluación de un proyecto STEM: Calidad de la propuesta y la presencia de la matemática en él
Gladys Osorio Railef, José Luis Lupiáñez y José Miguel Vílchez

Integrar el conocimiento matemático mapuche en la formación docente
Javiera Barría Rivas

Víctor Figueroa Hernández
David Martínez Martínez
Constanza Montesino Hernández
Anahí Huencho Ramos

Desafíos y posibilidades para el diseño de tareas matemáticas culturalmente relevantes: Voces de tres profesoras en formación
Natalia Gómez Maripán, Evania Vergara y Paula Sandoval

Estrategias didácticas con perspectiva de género en matemáticas
Makarena Paz Vidal Delquen, Ana Milena Mujica-Stach, Karina Estefany Ebner Araya y Verónica Yuliana Vidal Barrientos

Un curso para el desarrollo del noticing sobre sentido numérico en profesores de estudiantes sordos
Juan Luis Piñeiro G, Ximena Acuña R., Eder Pinto M y Jorge Zúñiga M.

Un diseño didáctico sobre secuencias y patrones: Articulación entre el DUA y la educación matemática
Ingrid Janeth Jácome Anaya y Sandra Evely Parada Rico

Una revisión de la literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de estudiantes en el espectro con foco en el conocimiento del profesor
Sofía Salazar S. y Juan Luis Piñeiro G.

Experiencia de futuros docentes autistas en su formación en didáctica de las matemáticas
Daniela Olivares y Génesis Ahumada

El rol de la motivación en el aprendizaje de las mujeres en matemáticas
Catalina Fernández Ibáñez
Camila Muñoz San Martín
Sebastián Orellana Muñoz
Javiera Riquelme Ancal
Jorge Miranda Ossandón

Un acompañamiento docente para la enseñanza de la geometría: Una práctica reflexiva

Tamara Del Valle Contreras, Mariela Carvacho Bustamante y Claudio Opazo Arellano

Talleres

Demanda cognitiva de tareas matemáticas
Leonardo Medel Contreras, Universidad San Sebastián
Carolina Durán Sierra, Universidad San Sebastián

Mirada profesional docente en la habilidad de argumentación
Sara Rivera Herreros, Universidad Católica de la Santísima Concepción
Kurt Mursell Montenegro, Pontificia Universidad Católica de Chile
Horacio Solar, Pontificia Universidad Católica de Chile

Diseño de situaciones didácticas con fichas algebraicas como recurso tangible para la enseñanza y el aprendizaje de operaciones algebraicas en el contexto escolar
Mario González, Universidad Arturo Prat
Judith Zárate, Universidad Arturo Prat
Juan José Núñez, Universidad Arturo Prat

Significados y niveles de comprensión de la derivada. Implicaciones para su enseñanza en educación media
Alan Pizarro-Ayavire, Universidad Arturo Prat
Juan Luis Prieto-González, Universidad Arturo Prat
Rafael Enrique Gutiérrez-Araujo, Asociación Aprender en Red

Integrando el pensamiento computacional en el aula matemática a través del uso de robots pequeños
María José Seckel Santis, Universidad Católica de la Santísima Concepción
Claudia Vásquez Ortiz, Pontificia Universidad Católica de Chile

Co-enseñanza en el aula matemática: sumando saberes y multiplicando experiencias
Paula Rodríguez Retamal, Colegio Leonardo Da Vinci
Paloma Villamandos Soto, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Pensamiento funcional en alumnos de 3 a 8 años
Sandra Fuentes, Universidad de Granada, España
Romina Narváez, Universidad Autónoma de Chile
Lourdes Anglada, Centro de Magisterio María Inmaculada de Antequera, España
María C. Cañadas, Universidad de Granada, España

Algoritmos combinatorios del pasado: una oportunidad para el presente
Patricio Santibáñez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Reflexiones sobre una propuesta de aula para introducir el concepto de límite de sucesiones
Cristián Bustos Tiemann, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Elisabeth Ramos Rodríguez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Experimentando la modelación matemática para el aula de educación básica
Bárbara Bustos-Osorio, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Elisabeth Ramos-Rodríguez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Produciendo materiales escritos con criterios de accesibilidad
Daniela Araya Román, Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica
Evelyn Alfaro Vargas, Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica

Cuestiones de género en el planteamiento de problemas verbales de estructura multiplicativa
Natalia Chacón-Bravo, Universidad Arturo Prat
Beatriz Valenzuela-Bacho, Universidad Arturo Prat
Juan Luis Prieto-González, Universidad Arturo Prat

Tareas abiertas en un entorno digital para el desarrollo del ETM colectivo
Jorge Gaona, Universidad de Playa Ancha
Catalina Palacios Bezama, Universidad de Playa Ancha

Posters

Interculturalidad y matemáticas: perspectivas desde una revisión sistemática
Camila Zepeda H., Kevin Rojas H., Irene V. Sánchez-N.

Experiencia didáctica de alta demanda cognitiva para la introducción a la estadística inferencial en alumnos del bachillerato internacional
Carolina Durán Sierra, Silvana Pruzzo González

Caracterización de las heurísticas utilizadas por estudiantes de enseñanza básica, media y universitaria en la resolución de problemas
Sebastián Belmar Fuentes, Carlos Bravo Fuentes, Felipe Orellana Quezada

Secuencia didáctica de geometría para segundo básico
Alberto Acto Herrejón

Estudio del trabajo matemático de profesoras en formación inicial en la organización y gestión de una actividad basada en juegos para primer año de enseñanza media
Kristil Oyarce, Nisi Salazar, Romina Menares

Una experiencia con portafolios en cursos de especialización en matemática para profesores de educación básica en formación
Carlos Eduardo Rojas Bruna

Fichas algebraicas: Una alternativa para la enseñanza de operatorias algebraicas a nivel escolar
Judith Zárate, Mario González, Juan José Núñez

Propuesta de demostraciones visuales y concretas de fórmulas de sumatorias en la enseñanza del cálculo
José Ignacio Andrés Ainzúa Céspedes, Iván Pérez

Articulando significados de la derivada mediante la conversión entre registros de representación semiótica
Salvo, A.

Inteligencia artificial generativa y derivadas: Diseño de una situación de aprendizaje para la superación de obstáculos
Sebastián Saavedra Messina, Adiel Silva Riveros

Modelación matemática del péndulo usando Tracker y GeoGebra
Santiago Giovanetti, Susana Riquelme

Análisis estadístico en educación media: Medidas de dispersión y vida saludable
Daniela Cortés Fredes, Eduardo Fernández Tapia

El uso de tecnología en la enseñanza de la probabilidad en la formación de profesores de matemática: Una revisión sistemática
Jonathan Parra Muñoz

Medición inalcanzable: Uso del teorema de Pitágoras para medir una distancia inalcanzable con estudiantes de enseñanza media
Rodrigo Rojas-Muñoz, Rosa Coñué Levicoi, Claudia Rozas Rozas

Trayectorias educativas de PK a 2° básico, sobre el concepto de simetría
Bárbara Espinoza Morales, Mariela Castillo Becerra, Trinidad Prieto Hurtado

Experimentando las geometrías no euclidianas con el uso del crochet y material reciclado: Una experiencia en aula en la formación inicial del profesor/a de matemática
Isabel Berna Sepúlveda, Denisse Cisternas Canio, Daniela Hueichao Catrivil, Lisa Navarro Bahamondes

Caída libre: Estudio de la velocidad y aceleración por medio de la experimentación y el análisis con uso de tecnologías
Karla Pacheco, Daniel Román

Impacto de los dispositivos tecnológicos en la educación matemática: Un análisis desde las publicaciones del ALME
Andrés Gálvez-Arriagada, Noemí Cárcamo-Mansilla, Danilo Díaz-Levicoy

Modelación y tecnología: Construcción de representaciones y modelos desde la experimentación con auto impulsado por un globo de aire
Millaray Rojas, Iván Pérez

Gamificación en la enseñanza de geometría: Diseñando juegos para el aula
José Camilo Cabrera, Aranza Villegas

Una propuesta alternativa para la enseñanza prototípica del teorema de Pitágoras
Jacobo Molina, Diego Silva

ABJ y rincones de aprendizaje: Estrategias inclusivas para la diversidad en el aula

matemática
Rayen Aguilar V., Fernanda Espinosa M., Javiera López P., Francisca Núñez P.

Diseño de un plan de acompañamiento para profesores de matemática que imparten las asignaturas electivas de enseñanza media
Francisca Albornoz, Nicolás Castro, Ellen Zúñiga

Figuras 2D: Invitación a la diversificación para un aula heterogénea e inclusiva
Benjamín Melo, Isabella Pruzzo, Emilia Sánchez, Emilia Velasco

Innovación educativa y diversidad a través del aprendizaje basado en problemas
Daniel Ahumada

Empoderando el aprendizaje personalizado: Math Solver como apoyo al aula invertida para estudiantes adultos vespertinos
Gonzalo Donoso

Innovación pedagógica para mejorar el aprendizaje matemático y las habilidades transversales en estudiantes recién admitidos en la facultad de matemáticas
Mahsa Allahbakhshi

Pensamiento computacional y Scratch: Una propuesta de diseño de juego
Adiel Silva, Florencia Morales

Propuesta de actividad para el desarrollo de la modelación y uso de TIC: Oscilación amortiguada de resorte
Víctor Sazo

Uso de chatbots en la formulación de problemas matemáticos con fracciones: Implicaciones para la formación docente
Sara Embid, Josefa Perdomo-Díaz

Educación STEM, modelación matemática y uso de la tecnología: Un análisis en la formación de ingenieros
Carol Asencio, María Aravena Díaz

Introducir el concepto de la proporcionalidad directa
David Alejandro Escobar Sánchez

Herramientas tecnológicas para enseñanza matemática en educación secundaria: Una revisión de los artículos de ALME. Propuesta de investigación

Andrés Gálvez-Arriagada, Noemí Cárcamo-Mansilla, Danilo Díaz-Levicoy

Conocimiento sobre herramientas de inteligencia artificial y su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje por docentes de matemáticas de enseñanza media en ejercicio en Chile
Marco Pascal, María Paz Flores, Álvaro Moya Oliva

Resolución de problemas matemáticos con perspectiva de género en formadores de futuros profesores de pedagogía general básica mención matemática
Sofía Inés Parada Alfaro

ORGANIZACIÓN XXVII JNEM

Las XXVIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática – 2024 fueron convocadas por la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM) y la Universidad de Concepción a través del Campus los Ángeles, a través de la Escuela de Educación y la Facultad de Educación. Particularmente, agradecemos al Comité Organizador, al Comité Científico, a las y los Pares Evaluadores y a las y los estudiantes voluntarios, quienes, con su esfuerzo y dedicación, hicieron posible la exitosa realización de estas Jornadas.

COMISIÓN ORGANIZADORA

Sergio Morales

Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles. Departamento de Didáctica, Currículum y Evaluación, Escuela de Educación.
Eugenio Chandia

Universidad de Concepción, Campus Concepción. Departamento de Currículum e Instrucción, Facultad de Educación.

Marianela Castillo
Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles. Departamento de Ciencias Básicas, Escuela de Educación.

Mauricio Gamboa

Universidad de Concepción, Campus Concepción. Departamento de Currículum e Instrucción Facultad de Educación.

Paloma Nahuelhual
Universidad de Concepción, Campus Concepción. Departamento de Metodología e investigación, Facultad de Educación.

Valeria Sepúlveda
Universidad de Concepción, Campus Concepción. Facultad de Educación.

COMITÉ CIENTÍFICO

Dr. Sergio Morales (UdeC)

Dr. Eugenio Chandía (Udec)

Dra. Marianela Castillo (UdeC)

Dr. Mauricio Gamboa (UdeC)

Dra. Jesús G. Lugo-Armenta (SOCHIEM)

ESTUDIANTES

EVALUADORES

Andrés Ortiz Jiménez

Alicia Zamorano-Vargas

Alvaro Cortínez

Anahí Huencho

Andrea Cárcamo

Armando Peri

Carmen Paz Oval Soto

Carol Sepúlveda Herrera

Cecilia Rojas Pardo

Claudia Cornejo Morales

Claudia Vargas Díaz

Claudia Vasquez

Claudio Fuentealba

Cristina Ayala-Altamirano

Daniela Araya Bastias

Daniela Olivares

Danilo Díaz Levicoy

David M. Gómez

Diana Zakaryan

Pamela Reyes Santander

Paola Ramirez

Eder Pinto

Emilio Castro Navarro

Exequiel Llanos Lagos

Felipe Almuna Salgado

Felipe Marín Álvarez

Felipe Retamal

Felipe Ruiz

Francisco Rodríguez Alveal

Guadalupe Morales Ramírez

Horacio Solar

Hugo Alvarado Martínez

Irma Pinto-Rojas

Isabel García Martínez

Jaime Huincahue Arcos

Jaime I. García-García

Jairo Navarrete

Jocelyn D. Pallauta

Jorge Gaona

Juan José Núñez Fernández

Juan Luis Piñeiro G.

Juan Luis Prieto González

Leidy Bautista

Leonardo Medel

Lorena Espinoza Salfate

Luz Valoyes

Maximina Márquez

María Victoria Martínez Videla

Mauricio Gamboa

Miguel Díaz Flores

Nataly Pincheira

Nicolas Fernandez Coronado

Nicolás Sánchez Acevedo

Noemí Pizarro

Patricia Fuentes Acevedo

Patricia Vásquez Saldías

Paula Verdugo-Hernández

Pedro Vidal-Szabó

Rafael Miranda-Molina

Renán Concha Zelada

Rodrigo Jiménez Villarroel

Romina Menares

Romina Narváez

Sandra Burgos

Sandra Fuentes M.

Silvia Moral Sánchez

Soledad Estrella

Teresita Méndez Olave

Valeria Randolph Veas

Victoria Arriagada

EXPERIENCIAS DE AULA

FORMACIÓN DE PROFESORES EN COMPETENCIAS DE ARGUMENTAR Y COMUNICAR EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Natalia Pérez, Pontificia Universidad Católica de Chile

Horacio Solar, Pontificia Universidad Católica de Chile

Abstract:

A través del uso del modelo Mejoramiento de la Experiencia Docente (MED), se ha trabajado con un grupo de seis docentes pertenecientes a un Servicio Local de Educación Pública (SLEP) en la Región Metropolitana, teniendo como foco principal que los profesores que enseñan matemática logren promover en sus estudiantes las competencias matemáticas de Argumentar y Modelar. Además, de manera transversal se integra el enfoque de noticing docente, en el que se considera la capacidad del profesor para identificar eventos críticos, indagar en el pensamiento de los estudiantes, interpretarlo y tomar decisiones al respecto. Lo anterior se desarrolla a través del análisis de videos que muestran breves episodios de clases de matemática que se presentan en dos formatos: prácticas de otros y luego la revisión de prácticas propias, para posteriormente trabajar en el diseño, implementación, evaluación y rediseño de tareas matemáticas, consolidando así una mejora continua en la promoción de las competencias abordadas.

Profesores líderes, Competencias matemáticas, Argumentar, Modelar, Noticing

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática es un componente esencial en la formación de los estudiantes, no solo por su valor como disciplina académica, sino también por su papel en el desarrollo de competencias fundamentales para la vida en sociedad. En este contexto, los currículos educativos a nivel general han evolucionado hacia enfoques competenciales.

Si bien el currículo de Chile se actualizó el año 2012 y transitó hacia un enfoque competencial, de acuerdo a evaluaciones internacionales como PISA, se observa que desde el año 2006 a la actualidad casi la mitad de los estudiantes en Chile no logra alcanzar el nivel mínimo competencial en matemática (Agencia de Calidad de la Educación, 2023).

Frente a esta situación de estancamiento en el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes, se hace necesario generar espacios para que los docentes que enseñan esta asignatura puedan participar de una formación actualizada y adaptada a esta demanda educativa y social, de manera que la enseñanza de la matemática deja de estar focalizada en la transmisión de contenidos por sí solos y pasan a tener un uso social (Alvis et al, 2019).

Por lo descrito anteriormente, el objetivo de este proyecto es que el grupo de profesores que participa de la formación tenga la capacidad de promover las competencias matemáticas de Argumentar y de Modelar en sus estudiantes, además que desarrollen un enfoque de noticing docente.

ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA PROPUESTA

En el contexto de esta formación de docentes, la competencia de argumentar se entiende como la capacidad de los estudiantes para convencer a otros de la validez de sus resultados (Krummheuer, 1995), para que ello ocurra debe haber necesariamente más de un punto de vista sobre un asunto que debe ser sometido a discusión. Además, se distingue la argumentación matemática de la argumentación en el aula de matemática, aludiendo a que la primera se refiere al proceso de prueba para demostrar algo y la segunda a la discusión provocada en la clase de matemática en la que confrontan dos o más puntos de vista (Solar y Deulofeu, 2016).

Por otro lado, la competencia de modelación en matemática es entendida como un proceso cíclico desde la simplificación del problema real, a la validación del modelo (Blum y Borromeo-Ferri, 2009). En este sentido, un estudiante es competente modelando cuando es capaz de analizar y construir modelos matemáticos en otros contextos, llevando la matemática una situación ajena a ella, sacando conclusiones y analizando la validez del modelo escogido o construido (Niss, 2011).

Por último, la modalidad de esta formación propende a que los docentes estén constantemente analizando prácticas pedagógicas y el razonamiento de los estudiantes, por lo que se integra de manera transversal el noticing docente, es decir, la capacidad que tienen los docentes para notar eventos críticos durante las clases de matemática, interpretarlos y decidir cómo responder a dichos eventos (van Es y Sherin, 2002).

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

Contexto

La propuesta que se describe es una experiencia de formación de una profesora líder a 6 docentes de enseñanza básica de establecimientos adscritos a un Servicio Local de Educación Pública (SLEP) en la Región Metropolitana. Esta experiencia es una de seis que se están llevando a cabo en el contexto de un programa formativo para profesores líderes de un proyecto FONDECYT en curso. El programa formativo está basado en el Modelo de Acompañamiento Docente Colaborativo (MADC), el cual tiene como base tres líneas formativas: 1) Desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido, que en esta propuesta es la argumentación y modelación 2) Noticing docente y 3) Competencias de acompañamiento para monitorear, retroalimentar y modelar prácticas docentes

Estructura de las sesiones

Se han diseñado 18 sesiones, que comenzaron a inicios del primer semestre del 2024 y terminarán estimativamente a mediados del primer semestre 2025. En estas sesiones se abordarán los mismos contenidos de las líneas formativas 1) y 2). Las sesiones son cada 15 días aproximadamente de dos horas de duración. La propuesta formativa para los docentes se basa en el modelo de Mejoramiento de la Experiencia Docente (MED) (Solar et al, 2016), que sigue un ciclo compuesto por cuatro etapas: 1) Análisis de la práctica docente de otros. 2) Análisis de la propia práctica. 3) Diseño e implementación. 4) Evaluación y reflexión. Las sesiones están diseñadas para que se produzca un trabajo y aprendizaje colaborativo a través de discusiones y la revisión de literatura pertinente, para ello se crean tareas que tienen como propósito que los profesores transiten por diferentes momentos de aprendizaje: elicitación del pensamiento; conflicto cognitivo y finalmente la instalación de nuevas ideas.

A fines del año 2024 se habrán realizado unas 12 sesiones con los docentes en que se habrán trabajado argumentación, modelación y noticing docente. A modo de ejemplo, a continuación, se presenta la estructura de una sesión.

Ejemplo de una sesión

La primera sesión del programa de formación tiene por objetivo establecer definiciones de argumentar, para ello la sesión se planteó de la siguiente forma: (1) Docentes reciben la contextualización del episodio de clase que se observará y la instrucción de poner atención en la habilidad de argumentar. (2) Observan el primer video y discuten la pregunta: ¿Crees que hubo argumentación? ¿Por qué? (3) Leen un breve apunte con las definiciones de argumentación y explicación. (4) Establecen la diferencia entre argumentar y explicar. (5) Vuelven a responder las preguntas relacionadas al video 1 tomando en consideración el apunte revisado. (6) Observan el video 2 y discuten la pregunta: ¿Crees que hubo argumentación? ¿Por qué? (7) Establecen las diferencias observadas entre los videos, mostrando que en uno se presentó la explicación y en el otro la argumentación en el aula de matemática.

Los puntos 1 y 2 de la sesión tienen como propósito levantar información y elicitar el pensamiento de las docentes, por otra parte, los puntos 3 y 4 buscan provocar un conflicto cognitivo en el que sus ideas iniciales de argumentación se ven confrontadas con lo presentado en la literatura. Finalmente, en los puntos 5, 6 y 7 se instalan las nuevas ideas surgidas a partir de la lectura, la discusión y la revisión del nuevo material.

RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN

Hasta el momento del envío de esta experiencia docente, se ha realizado 8 de las 12 sesiones planificadas para el 2024. De acuerdo con lo descrito por los docentes que han sido parte de la formación, se manifiesta que la incidencia de esta ha sido positiva, sobre todo en lo relativo a la promoción de competencias matemáticas en sus estudiantes. Los profesores describen que han replicado algunas de las tareas presentadas en el

Desde la primera sesión describieron conformidad respecto al formato de las sesiones y señalan que la observación de videos auténticos y situados en contextos que no son lejanos a ellos les ha permitido realizar una reflexión pedagógica profunda, mirando sus prácticas y planteando tareas novedosas que buscan potenciar las competencias abordadas en la formación.

Por otra parte, el desarrollo del noticing docente es un elemento que aún se puede potenciar más, dado que requiere de conocimientos y experiencias profesionales mucho más robustas, por ejemplo, es necesario tener conocimiento sobre la naturaleza de los obstáculos presentes en el aprendizaje de la matemática, la identificación de patrones de pensamiento en los estudiantes y la forma en que estos razonan.

Para profundizar en los resultados obtenidos, en la presentación de esta experiencia de aula mostraremos ejemplos concretos de tareas diseñadas por docentes que forman parte del proyecto.

CONCLUSIONES

El programa de formación destaca por su capacidad para generar profundo sentido entre los profesionales de la educación matemática, sobre todo, al momento de confrontar sus ideas preexistentes con nueva información o evidencias. Este proceso es significativo ya que no solo fortalece su comprensión y compromiso con la enseñanza de la matemática, sino que fomenta un alto nivel de sentido profesional.

Por otra parte, dada la modalidad del programa, es factible de implementarlo a gran escala si se generan oportunidades y vínculos con conglomerados como lo son los SLEP, en que sería posible integrar a profesionales de la educación que pertenecen a diferentes instituciones. Estos profesionales, además de participar en el programa, incorporarían nuevas prácticas en sus propios establecimientos, y además podrían compartirlas con otros docentes y educadores, promoviendo así una red de colaboración profesional.

Esta experiencia es una gran oportunidad para acercar el mundo académico a las instituciones educativas, brindando a los profesores y educadores la posibilidad de acceder a literatura actualizada y pertinente que podría fortalecer la formación y experiencia profesional con la que cuentan.

Por último, esperamos que estos resultados puedan contribuir a la política pública para ser aplicada en otros contextos, pues, como se menciona anteriormente, el marco que se utiliza en este proyecto es factible de aplicar y replicar.

Referencias

Agencia de Calidad de la Educación. (2023). Informe Nacional PISA 2022. https://s3.amazonaws.com/archivos.agenciaeducacion.cl/Informe+Nacional+PISA+2022.pdf

Alvis, J., Aldana, E., & Solar, H. (2019). Ambientes de aprendizaje: un articulador para el desarrollo de competencias matemáticas. Revista Espacios, 40(21), 8-20.

Borromeo-Ferri R. & Blum, W. (2009). Insight into Teachers' Uncinscious Behaviour in Modeling Contexts. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students´ Mathematical Modeling Competencies* (pp. 423-432). New York, NY: Springer. DOI 10.1007/978-1-4419-0561-1_36

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), T*he emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Niss, M. (2011). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 6(9). 13 - 24.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to Notice: Scaffolding New Teachers' Interpretations of Classroom Interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10,* 571–596.

"COMPARANDO ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS GRANDES CON APRENDIZAJE COLABORATIVO"

Rodrigo Rojas-Muñoz, Universidad Austral de Chile

Rosa Coñué Levicoi, Universidad Austral de Chile

Claudia Rozas Rozas, Universidad Austral de Chile

Abstract:

En el contexto de la Semana de la Matemática 2024, se realiza una actividad corta sobre medición de áreas. La actividad se desarrolla en una feria escolar en un establecimiento de la ciudad de Coyhaique, donde grupos de 6 a 8 estudiantes de 5º y 6º Básico (11-12 años) deben comparar el tamaño de dos figuras geométricas grandes, un círculo y un cuadrado, marcados en el suelo, sin contar con instrumentos estándares de medición. El enfoque de la *actividad consiste en el desarrollo del concepto de área mediante su medición, el que según varios reportes, es uno de los conceptos con mayor dificultad de aprendizaje, en los distintos niveles escolares, incluso a nivel universitario. La tarea fue diseñada bajo el enfoque de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau. Todos los grupos participantes lograron resolver la problemática propuesta, reconociendo que estaban frente a un nuevo concepto matemático para ellos, el área. La actividad mostró ser atractiva y desafiante para los estudiantes, estimuló el trabajo en equipos, activó conocimientos previos, mantuvo el interés, permitió el reconocimiento del concepto de área y fue bien evaluada por los estudiantes y sus profesores. Desde el punto de vista de la TSD, se logra observar todas las situaciones pertinentes: acción, formulación, validación e institucionalización.*

Cuadratura del Círculo, Enseñanza de la Geometría, Aprendizaje Colaborativo, Teoría de las Situaciones Didácticas, Medición de Áreas

INTRODUCCIÓN

Esta actividad se realizó en el marco de la Semana de la Matemática en una feria escolar en un colegio particular de Coyhaique, región de Aysén, la cual consistió en que los estudiantes determinen que área era más grande, en este caso, de un círculo y un cuadrado, con lo que tengan a su disposición. Dado el contexto, los grupos fueron organizados por el establecimiento, y el tiempo estuvo acotado de 8 a 10 minutos. El diseño fue pensado en estudiantes de tercero a quinto básico, quienes no conocían el concepto de área.

Las dificultades de aprendizaje del concepto de área están bien documentadas en la literatura (Caviedes, de Gamboa y Badillo, 2020; Freudenthal, 1983; Jaimes Pérez, Arévalo Duarte y García García, 2024; Lizana, 2024; Mego, 2018; Urbano-Urbano, Gaviria-Garcés y Prada-Núñez, 2021). La didáctica de Freudenthal (1986) distingue tres dimensiones involucradas en la enseñanza del área: la equipartición, la comparación y reproducción de formas y la medición, tanto como repartición, medida o valoración.

Considerando los antecedentes, el contexto y el grupo objetivo, se consideró la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (2007), para el diseño de la actividad, en particular, dado el contexto de desarrollo fuera del aula.

ELEMENTOS TEÓRICOS O CONCEPTUALES

Para el diseño de esta tarea, hemos considerado la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau (2007). El origen de esta teoría, según el autor, es la relación didáctica entre el profesor, el estudiante y el saber, donde *situación* se refiere a “un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado” (Brousseau, 2007, p. 16). Las situaciones de aprendizaje en esta teoría deben comprender *situaciones adidácticas,* donde el estudiante se enfrenta a la resolución de una problemática mediante la construcción de un camino de conocimiento, donde el docente sólo puede intervenir en forma de *devoluciones*. Estas situaciones adidácticas son propuestas adecuadamente por el profesor, así como establece las condiciones previas para el desarrollo de las actividades. Todo esto conforma la *situación didáctica* (Barreiro y Casetta, 2015, p. 21).

La TSD considera tres tipos de situaciones: *acción, formulación y validación.* En la *situación de acción,* cada estudiante explora el problema organizando sus conocimientos previos para interpretarlo. En la *situación de validación,* cada estudiante conjetura y comunica al resto "nuevas" ideas para la resolución del problema. En la etapa de *validación,* el grupo decide un procedimiento válido para lograr una respuesta.

En este desarrollo, el docente debe crear una situación de *institucionalización del conocimiento,* donde sintetiza los saberes que surgieron en las situaciones anteriores, dando a conocer a los estudiantes los conceptos utilizados por la comunidad matemática para designarlos.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

Objetivo de la actividad: Diseñar estrategias colaborativas para estimar áreas de figuras planas de gran dimensión usando partes del cuerpo en niños de 11-12 años.

Duración: La actividad se realizó entre 8 y 10 minutos por grupo.

Actividad: Se dispone en el suelo de la sala de un cuadrado y un círculo encerrados por cuerdas.

Figura 1

Cuadrado y círculo construidos en el suelo con cuerdas

A los estudiantes reunidos en grupos, se les hacen las siguientes preguntas:

¿Saben qué figuras son éstas?
Según ustedes ¿Qué figura es más grande? ¿Por qué?
¿Cómo corroboramos cuál es más grande?

¿Cómo lo medirían con lo que tienen en el entorno?

Después de la última pregunta, se deja que los estudiantes en grupo decidan como medir el tamaño de cada figura. (5 minutos).

Una vez que los estudiantes han determinado cuál es la figura más grande, se indaga si los estudiantes reconocen lo que están midiendo.

¿Qué es lo que acaban de medir?

Finalmente, los docentes indican que se está midiendo área, como medida de la extensión de una superficie.

RECOLECCIÓN DE DATOS

El proceso de recolección de datos se realizó in situ mediante fotografías, videos, informes verbales de campo grabados por las investigadoras, entrevistas no estructuradas a estudiantes y comentarios espontáneos de profesores. Los datos obtenidos a través de estos métodos fueron analizados desde un punto de vista cualitativo. En este sentido, los registros audiovisuales fueron usados para analizar y comparar las metodologías utilizadas por los distintos grupos de trabajo. Los informes de campo describieron diversos acontecimientos como metodologías, estrategias, comentarios, respuestas, discusiones intragrupales y reacciones presenciales. Además, todo el material ha servido para la evaluación general de la actividad.

RESULTADOS DE IMPLEMENTACIÓN

La actividad de medición utilizando unidades de medidas no estandarizadas como pulgares, cuartas, manos, pies, personas de pie y personas acostadas, resultó ser una experiencia enriquecedora para los estudiantes de 5º y 6º básico. Durante la implementación, los estudiantes midieron perímetros, diámetros y áreas de diferentes figuras geométricas. Un hecho interesante que se observó fue que todos los grupos concluyeron que el cuadrado era más grande que el círculo. Este hallazgo provocó discusiones entre los estudiantes, resaltando la importancia del diálogo en el aprendizaje. Un ejemplo de esto fue cuando una niña comentó que la mano de otro niño era más grande que la suya para medir en cuartas, lo que puso en evidencia la variabilidad en las mediciones al usar el cuerpo como referencia.

El grupo 1, compuesto por seis estudiantes de 5º básico, tuvo una discusión notable sobre las unidades de medida. Mientras que una niña propuso medir en pulgadas, otro niño sugirió usar los pies. Sin embargo, la idea fue rápidamente cuestionada por otro compañero, quien señaló que todos tenían pies de diferentes tamaños, lo que podría afectar la precisión de las mediciones. Ante esta situación, los docentes propusieron que todos trabajaran juntos para encontrar una solución consensuada. En los otros grupos, la dinámica fue variada. Por ejemplo, en el grupo 2 compuesto por cinco estudiantes de 5º básico, el grupo 3 compuesto por siete estudiantes de 5º básico y el grupo 4 compuesto por seis estudiantes de 6º básico ocurrieron situaciones similares; en cambio, en el grupo 5, compuesto por cinco niños de 6º básico, se observó cierta dificultad para trabajar en equipo, posiblemente influenciada por el deseo de usar calculadoras. Mientras tanto, el Grupo 6, formado por nueve niñas de 6º básico, no logró concluir su trabajo debido a que la actividad fue interrumpida por el timbre (recreo).

Los comentarios recibidos tras la actividad fueron muy positivos. Un profesor de matemáticas, egresado hace tres años, comentó que le llamó mucho la atención la actividad, destacando que "los niños siempre tienen que estar en constante movimiento" y que "los niños de aquí son rápidos y siempre tenemos que estar haciendo actividades para potenciar sus conocimientos". Por otra parte, una profesora con mucha experiencia comentó que, aunque la actividad parecía muy simple, fue la que más llamó la atención tanto a docentes como a estudiantes, haciéndolos reflexionar. Los propios estudiantes también expresaron su entusiasmo, como lo demuestra el comentario de un niño de 6º básico que dijo: "me gustó mucho la actividad, estaba muy divertida". Asimismo, una niña de 5º básico expresó su agradecimiento diciendo: "gracias, estaba muy entretenido todo".

CONCLUSIONES

La actividad de medición con unidades no estandarizadas resultó ser un ejercicio atractivo y didáctico tanto para los estudiantes como para los profesores. A pesar de que inicialmente algunos grupos encontraron dificultad al colaborar, como el uso de diferentes unidades de medida y la tentación de utilizar calculadoras, la experiencia fue valorada positivamente por todos. Se observó que los estudiantes estaban motivados y disfrutaron del proceso, lo que demuestra la efectividad de integrar actividades físicas y prácticas en el aprendizaje matemático.

El número óptimo de participantes por grupo fue de 8 estudiantes, lo que permite un equilibrio entre la participación activa y la colaboración en equipo. Este tamaño facilita la organización y asegura que cada estudiante tenga la oportunidad de contribuir, ya que al ser menos estudiantes necesitamos de más personas para completar el área de las figuras. Además, el enfoque en la actividad práctica ayudó a los estudiantes a comprender mejor los conceptos matemáticos, mostrando la importancia de mantenerlos involucrados y activos en el proceso educativo.

En cuanto a las metodologías, hubo dos preferidas: llenar las figuras con personas de pie y llenar las figuras con personas en el piso. En este caso, esto les permite a los estudiantes entender de manera práctica y concreta cómo el área se relaciona con la ocupación de espacio, por lo tanto, no solo ayuda a los estudiantes a comprender la noción de área de una manera tangible, sino que también fomenta el aprendizaje a través de la acción y la reflexión.

Por otro lado, pudimos observar en forma evidente las tres situaciones de Brousseau. Situación de acción: los estudiantes afrontaron la tarea asignada, buscando en sus conocimientos previos de medición de longitudes o fórmulas conocidas alguna forma para medir los espacios ocupados por las figuras. Situación de formulación: los estudiantes expresan sus ideas para medir cada figura, usando partes del cuerpo. Situación de validación:

los estudiantes acuerdan una forma de medición eficaz y efectiva para comparar las áreas de las figuras, llegando al resultado esperado. Finalmente, los docentes institucionalizan el saber.

Finalmente, esta actividad puede ser adaptada a otros niveles educativos, por ejemplo: se puede trabajar con estudiantes de 7º Básico en la estimación del área del círculo, pero con grupos más pequeños y figuras de cartulina. También es posible adaptar la actividad para mostrar la relación entre las áreas de polígonos y rectángulos circunscritos en estudiantes de 5° y 6° Básico, pero con figuras recortadas en cartulina. Además, es posible adaptar la actividad para el aprendizaje del concepto de volumen en estudiantes de 4° Básico, pero con cuerpos construidos con bloques.

Referencias

Barreiro, P. y Casetta, I. (2015). Teoría de las Situaciones Didácticas. Pochulu, M.D. y Rodríguez, M.A. (Eds.), *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Editorial Universitaria de Villa María, 1a Ed., 4a reimpresión, Provincia de Córdoba, Argentina.

Brouseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Editorial Libros del Zorzal, 1a Edición, Buenos Aires, Argentina.

Caviedes, S., de Gamboa, G. y Badillo, E. (2020). Procedimientos Utilizados por Estudiantes de 13-14 Años en la Resolución de Tareas que Involucran el Área de Figuras Planas. *Bolema, 34(68),*

Freudenthal, H. (1983). Measuring by means of Geometry. Bishop, A.J. (Ed.) *Didactical phenomenology of mathematical structures,* Dordrecht: Kluwer, 1983, p. 373-392.

Jaimes Pérez, M.D., Arévalo Duarte, M.A. y García García, M.A. (2024). El proceso de enseñanza y aprendizaje en la construcción del concepto de área y perímetro. Perspectivas de las investigaciones científicas. *Revista Educación, 48(2),* 1-22.

Lizana Beltrán, J.P. (2024). Construcción y diseño de rectángulos a partir del perímetro y área: una propuesta didáctica basada en la Teoría Modos de Pensamiento. *Revista Chilena de Educación Matemática, 16(2)*, pp. 43-59.

Mego Hernández, A. (2018). *Estrategias metodológicas para el desarrollo de capacidades matemáticas en el contenido de áreas de figuras planas en sexto grado de Educación Primaria Mórrope* (Tesis). Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo.

Urbano-Urbano, I.F., Gaviria-Garcés, N.F. y Prada-Núñez, R. (2021). Dificultades en el aprendizaje del concepto de área y resolución de problemas. *Mundo Fesc, 11(S6),* pp. 138-155.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO FAMILIA DE OPERACIONES EN UN SEGUNDO BÁSICO POR MEDIO DE UN ESTUDIO DE CLASES

Ricardo Martínez T. Universidad de Los Andes

En este trabajo se presenta una experiencia de aula que aborda la construcción del concepto de familia de operaciones en un segundo año básico, atendiendo al objetivo de aprendizaje 10 presente en las bases curriculares de matemática de ese nivel. La propuesta didáctica fue diseñada en el contexto de un estudio de clases por profesores de educación básica de un colegio de la comuna de Lo Barnechea. Los resultados de la clase fueron expuestos en una clase pública abierta a la comunidad.

Familia de operaciones, estudio de clases,

INTRODUCCIÓN

Este trabajo dará cuenta de una propuesta didáctica de aula destinada a la construcción del concepto de familia de operaciones para ser implementada en un segundo año básico respondiendo al objetivo de aprendizaje 10: "Demostrar que comprende la relación entre la adición y la sustracción, usando la familia de operaciones en cálculos aritméticos y la resolución de problemas" (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012, p, 232). Para la preparación de la propuesta se consideraron las dificultades que presentan los estudiantes al momento de entender la relación que existe entre la adición y la sustracción. La secuencia de actividades consideró 9 momentos, cada uno con diferentes desafíos que involucró trabajo individual y colaborativo entre estudiantes, uso de material manipulativo y simbólico. El ciclo de estudio de clases permitió mejorar el diseño de la propuesta por medio de la colaboración con otros profesores.

Antecedentes

El estudio de clase es una metodología de trabajo colaborativo entre profesores que permite diseñar, implementar y reflexionar sus propias prácticas favoreciendo el mejoramiento de la enseñanza de los docentes e impactando de manera positiva en el aprendizaje de los estudiantes (Isoda y Olfos, 2009). Al enfocarse completamente en el aprendizaje de los estudiantes el estudio de clases permite a los docentes analizar las diferentes necesidades educativas y les brinda información sobre cómo abordar estas necesidades (Dudley, 2013, Lewis y Perry, 2015, Lewis et al., 2006).

Familia de operaciones se denomina a un conjunto de 3 números que están relacionados entre sí de manera aditiva. Una familia de operaciones se determina a partir de un trío aditivo. Encontrar la relación existente entre la adición y sustracción de estos 3 números hace más eficiente los procesos de cálculo, por lo que, al abordar una combinación aditiva básica, es necesario que se estudien también las sustracciones asociadas a dicha igualdad (Martínez, 2013). ¿Qué relación tendrá la manipulación de material concreto en la construcción de un concepto como el de familia de operaciones?

Metodología

Se utilizó la metodología estudio de clase para la planificación, implementación y posterior reflexión de la propuesta. En la fase de planificación, 4 docentes se reunieron durante 4 semanas en sesiones de 40 minutos, en donde se construyó el plan de clases, el material para cada una de las etapas y se establecieron las gestiones de aprendizaje que el docente a cargo debe realizar. En la fase de implementación, todos los participantes del proceso de planificación observaron la clase. La fase de reflexión fue una sesión de 40 minutos en donde se retroalimentaron las fortalezas y aspectos a mejorar del plan de clases. El ciclo de estudio de clase permitió la mejora de la planificación y diseño de la secuencia. Este producto final fue nuevamente implementado en un curso paralelo y presentado en una clase pública abierta a la comunidad educativa en la IV jornada de estudio de clases realizada en el aula magna de la Universidad de Los Andes en junio de 2023. En las siguientes secciones de presentará la propuesta didáctica enriquecida con los aportes de la implementación y retroalimentación junto a las reflexiones finales de este trabajo.

PROPUESTA DIDÁCTICA DE AULA

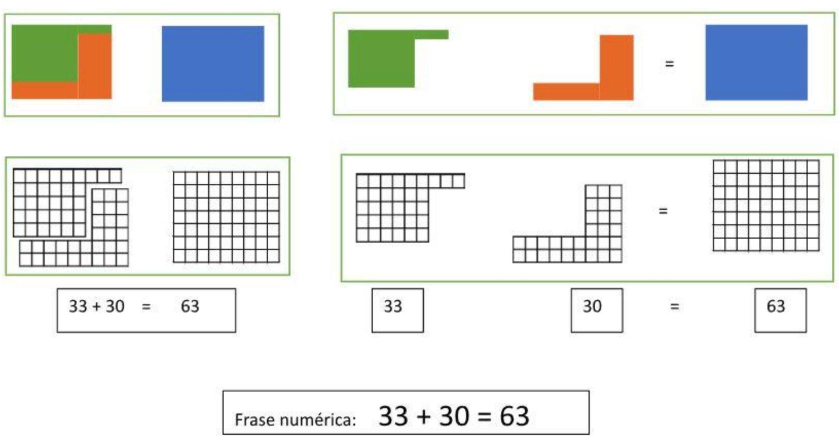
El diseño de la propuesta considera una secuencia de 9 partes con el objetivo que fueran construyendo el concepto de familia de operaciones a partir de la relación de congruencia existente entre una combinación de dos figuras geométricas y un rectángulo. Se divide al curso en grupos de 4 o 5 estudiantes y se les da la instrucción de que en la clase habrá momentos de trabajo individual donde deberán pensar y luego grupales donde deberán conversar y realizar lo que se pide. En la primera parte denominada **"identificación del rectángulo base"**, los estudiantes reciben un rectángulo de color azul confeccionado en cartulina plastificada. Se espera que observen detenidamente la figura geométrica y reconozcan el tamaño y cuáles son sus principales características. En la segunda parte **"construcción del rectángulo congruente con el primero a partir de dos piezas"** los estudiantes reciben una bolsa con algunas formas geométricas en su interior. Individualmente deberán observar las figuras sin tocarlas, pensando en aquellas que puedan componer una figura congruente al rectángulo azul. El docente intenciona la dinámica "pienso, hablo y comparto" remarcando los tiempos en cada una de las partes de la secuencia. Luego en grupo, prueban sus ideas debatiendo cuáles son las piezas necesarias para componer el rectángulo con dos piezas como se muestra en la figura 1.

Figura 1

Piezas entregadas y figura compuesta congruente a rectángulo

En la tercera parte llamada **“valorización de las piezas”**, cada grupo recibe una gran cuadrícula, que está compuesta por muchos cuadrados pequeños. Los estudiantes deben poner sobre esta cuadrícula las tres piezas trabajadas: Rectángulo azul y las dos piezas que escogieron como composición de esta. Marcan el contorno de estas figuras sobre la cuadrícula y cuentan cuántos cuadrados tiene cada figura en su interior, de esta forma sabremos cuál es el valor de cada figura. En la cuarta parte: **“crear adición a partir de las piezas”** los estudiantes identifican la pieza naranja y verde y sus respectivos valores como sumandos de una operación y la pieza azul como la suma de la unión de las dos piezas. Reconocen en ella una frase numérica y la escriben como tal identificando el primer sumando, el segundo sumando y la suma en números.

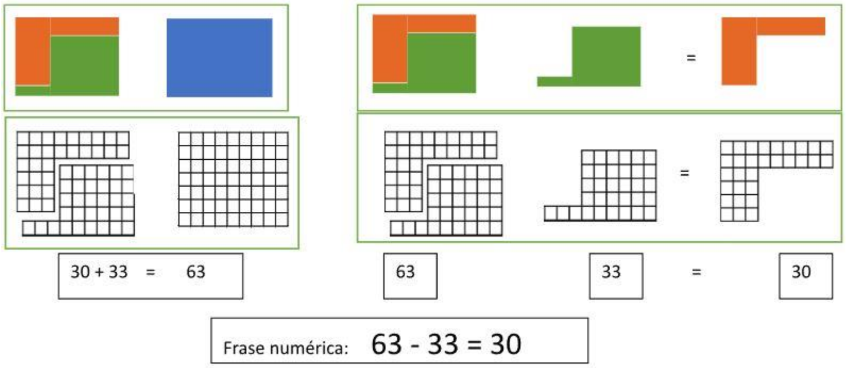
Figura 2



Creación de adición a partir de las dos piezas

La quinta parte **“crear segunda adición a partir de las piezas”** busca que los estudiantes reagrupen las piezas para generar, a partir de las mismas tres piezas iniciales, una nueva operación de adición, en este caso 30 + 33 = 63. En la sexta parte llamada **“crear una sustracción a partir de las piezas”** se espera que los estudiantes sean capaces de relacionar las piezas para ahora formar una sustracción con ellas. Se les pide que formen nuevamente el rectángulo inicial con las dos piezas y se hacen preguntas tales como ¿es posible realizar una operación de sustracción con las piezas naranja y verde? Se espera que, a partir de la manipulación de las piezas, determinen el minuendo, el sustraendo y la resta y que puedan componer numéricamente la operación con los valores de cada figura.

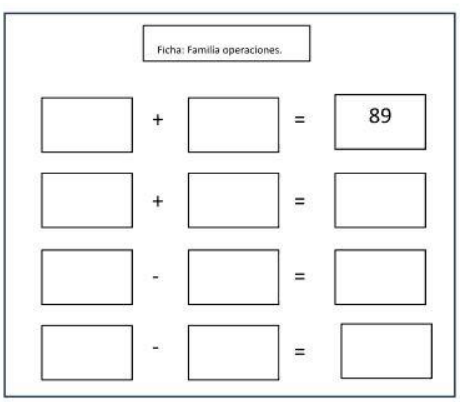
Figura 3



Creación de una sustracción a partir de las piezas

La séptima parte **"crear la segunda sustracción a partir de las piezas"** busca que los estudiantes determinen una nueva operación de sustracción distinta a la anterior utilizando las mismas piezas, en este caso 63 – 30 = 33. En la octava parte de esta secuencia didáctica llamada **"institucionalización de la familia de operaciones"** se espera que los estudiantes sean capaces de reconocer que, a partir de 3 números, relacionados entre sí, se pueden crear cuatro operaciones distintas. En conjunto con el profesor, ordenan las frases numéricas creadas en las etapas anteriores y las escriben en la pizarra como la familia de operaciones que surgen a partir de los números 63, 30 y 33. La novena parte de esta propuesta es una **"actividad de salida"** en donde se espera que los alumnos logren completar una ficha de trabajo en la que se encuentra el resultado de una adición sin los sumandos y con los espacios para generar 4 frases numéricas como se muestra en la figura 4.

Figura 4



Ficha de trabajo

Reflexiones finales

La propuesta didáctica permitió, a partir de la manipulación de material concreto (específicamente con la congruencia de rectángulos y figuras), encontrar de manera más explícita la relación existente entre la adición y sustracción, para luego dar paso a la representación simbólica de estas frases numéricas. Entender la reversibilidad de la suma y la resta hace más eficiente el proceso de realizar cálculos más complejos. Dada que todos los estudiantes lograron comprender de mejor forma esta relación, se sugiere incorporar material concreto en actividades introductorias a contenido, sobre todo en las que se deba entender las relaciones numéricas.

No es explícita la congruencia entre el todo y las partes en una situación didáctica que involucra manipulación de material concreto, debido a que la tercera pieza debe ser reemplazada por la combinación de 2 piezas y eso hace que se deba intencionar con mayor énfasis sobre todo en la transferencia hacia un registro simbólico. Es esto es clave que el uso de material manipulativo ya sea físico o digital, sea acompañado de manera paralela con la representación simbólica.

Existe un potencial importante de esta actividad para conectarla con desarrollo de pensamiento algebraico. Cuando se construye la relación aritmética de 3 números, es posible concluir futuras respuestas atendiendo a la estructura que subyace a la tarea, por ejemplo, si la suma de dos números va al final de una frase numérica de adición, ese mismo resultado irá al principio de una frase numérica de sustracción que involucra a los mismos números. Es importante pensar con anticipación las intervenciones docentes que estimularán este pensamiento.

El aporte del estudio de clase en la preparación de esta propuesta permitió mejorar el plan de clases con las observaciones de los docentes participantes, sobre todo en el diseño y la gestión de clase, logrando nutrir cada una de las intervenciones para favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Referencias

Dudley, P. (2013). Teacher learning in Lesson Study: What interaction-level discourse analysis revealed about how teachers utilised imagination, tacit knowledge of teaching and fresh evidence of pupils learning, to develop practice knowledge and so enhance their pupils' learning. Teaching and Teacher Education, 34, 107–121. doi:10.1016/j.tate.2013.04.006.

Isoda M., Arcavi A., Lorca A. (2007). El Estudio de Clases Japonés en Matemática. Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Isoda M., Olfos R. (2009). El enfoque de Resolución de Problemas. Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Lewis, C., & Perry, R. (2015). A randomized trial of lesson study with mathematical resource kits: Analysis of impact on teachers' beliefs and learning community. In E. J. Cai & Middleton (Eds.), Design, results, and implications of large-scale studies in mathematics education (pp. 133–155). New York: Springer

Lewis, C., Perry, R., Hurd, J., & O'Connell, M. P. (2006). Lesson study comes of age in North America. Phi Delta Kappan, December 2006, 273–281.

Martínez, S. & Varas, M.L. (2013). Números para futuros profesores de educación básica. Refip Matemática. Ediciones SM: Santiago de Chile.

Ministerio de Educación (2012). Bases curriculares primero a sexto básico (p, 232).

HABILIDADES MATEMÁTICAS DE ARGUMENTAR Y MODELAR EN EL AULA DE MATEMÁTICAS.

Camilo Andrés Torres Torres. Centro Educacional Millantu, SLEP Gabriela Mistral, Región Metropolitana.

Horacio Solar, Pontificia Universidad Católica de Chile

Resumen:

El siguiente reporte da a conocer la experiencia de aula del primer autor de este reporte con docentes pertenecientes a un Centro Educacional Municipal de un SLEP de la Región Metropolitana, con los cuales se promueve las habilidades de modelación y argumentación en el aula de matemática. En esta experiencia de aula consideramos que la argumentación tiene como propósito convencerse así mismo, como a otros, de la validez de un razonamiento, y la modelación es un proceso cíclico que relaciona el contexto extra matemático y la matemática a través de un modelo que se construye para dar una solución a un problema. El primer autor del artículo participó en un programa formativo para que profesores de matemática se conviertan en profesores líderes, el cual se basa en el Modelo de Acompañamiento Docente Colaborativo (MADC) Se podrá apreciar los resultados obtenidos a lo largo de estos casi dos años en lo que se lleva promoviendo estas habilidades matemáticas en docentes y lo provechoso que ha sido para los mismos. Esto debido a que una vez implementado el trabajar de manera constante estas habilidades, ya están interiorizadas de muy buena manera en la mayoría de los y las docentes.

[profesores líderes, habilidades matemáticas, argumentación, experiencia de aula en matemática]

INTRODUCCIÓN

En esta presentación podrá apreciar una visualización de una experiencia de aula en un Centro Educacional adscrito a un SLEP de la Región Metropolitana. La cual se ha visto enriquecida desde hace dos años, tiempo en que el autor principal de este reporte ingresó a un Proyecto FONDECYT (en curso) para promover competencias matemáticas de modelación y argumentación mediante un acompañamiento basado en el uso de videos entre profesores líderes y docentes.

El autor principal participó en un programa formativo de profesores líderes, y actualmente está formando a 5 docentes que realizan clase entre kínder y cuarto año básico, desde abril a diciembre 2024. La experiencia que a continuación se describe trata del rol como docente líder –del primer autor- en la formación de docentes. La propuesta que se está implementando en cada sesión tiene que ver con la implementación de competencias matemáticas de modelación y argumentación a docentes.

ELEMENTOS TEÓRICOS O CONCEPTUALES

Los elementos teóricos o conceptuales en los que se basa la experiencia de aula son los siguientes:

Argumentación

La argumentación matemática contribuye a una comprensión compartida de las ideas matemáticas a través del análisis y comparación de enfoques y perspectivas. En esta experiencia de aula consideramos que la argumentación tiene como propósito convencerse a sí mismo, como a otros, de la validez de un razonamiento (Ayalon y Hershkowitz, 2018; Krummheuer, 1995), por medio de aserciones, evidencias, justificaciones y refutaciones (Toulmin, 2003; Cervantes- Barraza et al., 2017), siendo este último elemento un requisito esencial para que la argumentación en el aula de matemáticas ocurra. En el aula de matemáticas, la argumentación promueve una cultura en la que la construcción del conocimiento se considera una actividad situada, crítica y reflexiva que involucra la participación grupal o también llamada argumentación colectiva (Conner et al., 2014; Krummheuer, 1995). La argumentación colectiva requiere del apoyo docente puesto que con determinadas acciones se puede potenciar diferentes pasos del proceso argumentativo que desarrollan los estudiantes (Conner et al., 2014). Al implementar una actividad de argumentación en el aula de matemáticas se espera que el docente promueva que los estudiantes discutan sus distintas respuestas y posiciones, que refuten las de otros y que fundamenten esta discusión.

Modelación

La *modelación matemática* es un proceso que relaciona el contexto extra matemático y la matemática a través de un modelo que se construye para dar una solución a un problema (Blum y Borromeo-Ferri, 2009; Maaß, 2006). En las clases se utilizó el ciclo de modelación propuesto por Maaß (2006), porque muestra claramente la interacción entre el mundo real y las matemáticas durante el proceso de modelación, estableciendo una relación entre ellos. El ciclo de modelación considera cinco fases: simplificación, matematización, trabajando con las matemáticas, interpretación y validación. El ciclo de modelación comienza en el mundo real; *simplificando*, estructurando e idealizando el problema para obtener un modelo real que contiene un enfoque matemático preliminar que orienta la segundo fase de *matematización*. Esta segunda fase traduce al lenguaje matemático los datos, relaciones y suposiciones, que conducen a un modelo matemático de la versión idealizada. *Trabajando con las matemáticas* se utilizan definiciones, propiedades y procesos matemáticos, donde se obtienen soluciones matemáticas las cuales deben ser *interpretadas*, en un rango aceptable y compatible con las condiciones iniciales y luego *validadas*, mediante aproximaciones numéricas en términos del problema real (Blum y Niss, 1991). Este proceso puede ser cíclico (Borromeo-Ferri, 2006). Al implementar una actividad de modelación en el aula de matemáticas como docente debo promover que los estudiantes transiten por el modelo antes señalado.

Descripción de la propuesta.

La propuesta formativa que se presenta está basada en la experiencia de formación a través del modelo formativo para profesores líderes. El cual se basa en el *Modelo de Acompañamiento Docente Colaborativo (MADC),* diseñado e implementado en el contexto de un proyecto Fondecyt en ejecución. En este programa participan profesores de matemáticas para que se conviertan en profesores líderes para que acompañen a un grupo de docentes de matemáticas en su establecimiento u otro. El MADC está diseñado para ser utilizado en programas de acompañamiento docente a gran escala. Esto es especialmente pertinente en Chile, ya que desde el año 2017 con la promulgación del Sistema de Educación Pública, se comenzaron a crear los SLEP que administrarán la educación pública.

El MADC tiene tres líneas formativas:

Línea Formativa 1: desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido, que en este proyecto se traduce al desarrollo de las competencias matemáticas de argumentar y modelar,

Línea Formativa 2: noticing docente.

Línea Formativa 3: competencias de acompañamiento para monitorear, retroalimentar y modelar prácticas docentes.

El MADC tiene asociado una plataforma digital que contiene los recursos necesarios para efectuar el acompañamiento. La Figura 1 presenta el programa de Desarrollo Profesional para docentes líderes basado en el MADC.

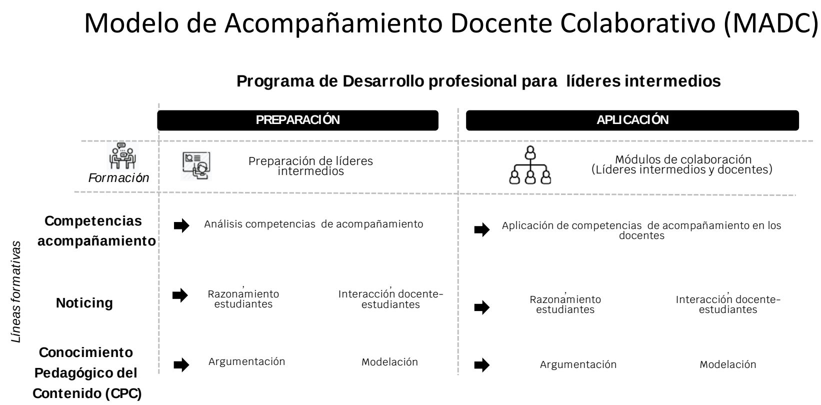


Figura 1: Modelo de acompañamiento docente colaborativo (MADC)

Resultados de implementación.

Los resultados de la implementación de las habilidades mencionadas anteriormente -modelación y argumentación- en las sesiones con docentes pertenecientes a un Centro Educacional Municipal, han sido muy satisfactorios. Esto debido a que una vez implementado el trabajar de manera constante estas habilidades, se han ido interiorizando de muy buena manera en los y las docentes, pudiendo verse reflejadas a la hora de realizar sus clases, las cuales han podido ser grabadas y analizadas en sesiones pertenecientes a su formación. Las y los docentes ahora, promueven las habilidades mencionadas en sus estudiantes.

CONCLUSIONES

Como se menciona anteriormente, el aprender de mejor manera las habilidades mencionadas en este documento, ha ayudado a los y las docentes en formación a mejorar mucho sus clases en esta asignatura. Debido a que han podido modificar la manera en que sus estudiantes entregaban una respuesta o resultado y ahora sus estudiantes pueden analizar, confirmar o refutar matemáticamente lo que se está tratando en la clase pudiendo cada docente ir aprendiendo mucho de la manera de pensar de sus estudiantes, del como analizaron una actividad y la manera en como son capaces de explicar sus resultados e ir compartiendo sus maneras de analizar y pensar situaciones dadas con sus pares para ir enriqueciendo los contenidos que van aprendiendo en cada clase.

Referencias

Ayalon, M., & Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior*, 49, 163-173. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95.

Borromeo-Ferri R. & Blum, W. (2009). Insight into Teachers' Uncinscious Behaviour in Modeling Contexts. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students´ Mathematical Modeling Competencies* (pp. 423-432). Springer. DOI 10.1007/978-1-4419-0561-1_36

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68. https://doi.org/10.1007/bf00302716

Cervantes-Barraza, J.; Cabañas-Sánchez, G.; Ordoñez-Cuastuma. (2017). El poder persuasivo de la refutación en argumentaciones colectivas. *Bolema*, 31(59), 861-879

Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A. & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, 86, 401-429.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), T*he emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM – Mathematics Education*, 38(2), 113-142.

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument.* Cambridge University Press (Second ed.).

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO CRÍTICO EN MATEMÁTICA

Sergio Morales Candia, Universidad de Concepción

Lucas Amaza Fernández, Universidad de Concepción

Katherine Fabriga Fica, Universidad de Concepción

Abstract:

Esta propuesta de enseñanza se sitúa en el desarrollo del pensamiento crítico temprano, desde la perspectiva de Facione (2007), a partir de una lección de matemática basada en el *juego que ha sido diseñada en el contexto del Estudio de Clases para profundizar, además, en la suma de números naturales. La tarea central de la lección corresponde a la carrera del 20, en una modalidad de juego en que los estudiantes compiten en equipos en un tablero ubicado en el suelo de la sala de clases, adoptando con su cuerpo distintas posiciones que les permiten abarcar 1, 2 o 3 lugares en el tablero. La lección fue implementada en un primero básico de una escuela de la Región del Biobío, y evidenció la manifestación de pensamiento crítico en los estudiantes y el rol de las intervenciones docentes en dichas manifestaciones, dando cuenta así del potencial de la propuesta para el desarrollo temprano del pensamiento crítico en matemática.*

Palabras clave: Pensamiento crítico, Estudio de Clases, matemática, números,

INTRODUCCIÓN

En 2022, PISA reportó que un 55,7% de los estudiantes chilenos carecen de una base mínima de preparación matemática para enfrentar los desafíos de las sociedades modernas (MINEDUC, 2023), evidenciando carencias en habilidades matemáticas claves para atender desafíos tecnológicos y sociales de este siglo (OCDE, 2018). Estos resultados coinciden con diversas investigaciones que reportan un insuficiente desarrollo de habilidades para el futuro, por ejemplo, pensamiento crítico (Bermúdez, 2021). El pensamiento crítico es una habilidad clave para la sociedad actual (Dekker, 2020) y una de las más valiosas del s.XXI (Changwong, 2018). Estudios realizados en Chile en torno al Pensamiento crítico develaron la importancia de estructurar propuestas para su desarrollo, poniendo especial énfasis en el mejoramiento de las prácticas educativas y en la consolidación de las bases empíricas para su medición y evaluación (Betancourth et al., 2020).

ELEMENTOS TEÓRICOS O CONCEPTUALES

El pensamiento crítico es un juicio intencional y autorregulado que hace uso estratégico de un conjunto de habilidades de razonamiento que son empleadas para desarrollar un pensamiento reflexivo que se optimiza a sí mismo y que incluye el compromiso de utilizar sus resultados como base para la toma de decisiones y la resolución de problemas (Jablonka, 2020). Entre sus componentes se reconocen habilidades cognitivas y disposiciones afectivas que indican una preparación y potencial para el pensamiento crítico (Mao et al., 2022). Facione (2007) identifica seis habilidades de pensamiento crítico: interpretación, análisis, evaluación, inferencia, explicación y autorregulación.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

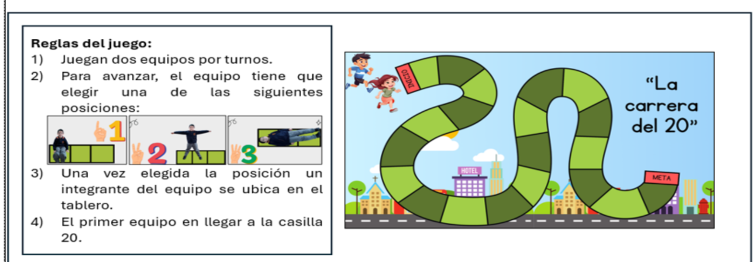
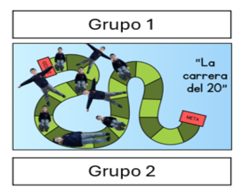
La propuesta de enseñanza fue diseñada en el marco del Estudio de Clases y busca promover el desarrollo del pensamiento crítico en estudiantes de primer ciclo. A través de una variación del juego matemático "La carrera del 20" (Brousseau, 1997), buscamos explorar estrategias efectivas para fomentar el pensamiento crítico desde los primeros grados a través del juego, utilizando dinámicas que incentivan la reflexión y la toma de decisiones de manera activa y basado en datos. A continuación, se presenta la propuesta plasmada en el plan de la lección elaborado.

Esta lección de primero básico busca, por un lado, desarrollar el pensamiento crítico de los estudiantes y, por otro, atender al objetivo de aprendizaje OA 09 “demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números del 0 al 20 progresivamente, de 0 a 5, de 6 a 10, de 11 a 20 con dos sumandos” (Mineduc, 2012). El objetivo de la clase presentado a los estudiantes fue “Sumar hasta el 20, a través del juego la carrera del 20”.

La tarea de la clase (Figura 1) consiste en la carrera del 20, pudiendo optar a los números 1, 2 o 3 para avanzar, los números seleccionados se van sumando hasta que uno de los equipos llega a 20 y gana el juego. Sin embargo, en esta propuesta los estudiantes compiten en equipos teniendo que adoptar posiciones específicas para poder avanzar.

Figura 1

Tarea central de la lección para la promoción del pensamiento crítico

Actividad de aprendizaje	Orientaciones al docente
	El tablero es de tamaño real y se ubica en el centro de la sala de clases. Cada grupo se posiciona en un costado del tablero. 

Para la gestión del juego, las docentes presentan el juego y realizan un modelaje en el tablero ubicado en el piso de la sala de clases, utilizando las posiciones ya aprendidas por los estudiantes. Se plantea explícitamente que la tarea de los grupos es buscar estrategias para ganar. En cuanto al rol docente, se busca que acompañe a los estudiantes en la toma de conciencia de la posición en que se encuentran durante el juego (la suma acumulada), junto con la cantidad de casillas que faltan para llegar a la meta, así como de las que tienen un valor para obtener la victoria mediante preguntas como ¿Hasta qué número está lleno el tablero? ¿Qué número repitieron más en este juego? ¿Qué números ocuparías para ganar? ¿Cuál es la casilla importante? Dentro de las primeras conjeturas se espera que los estudiantes reconozcan el 16 como una casilla importante.

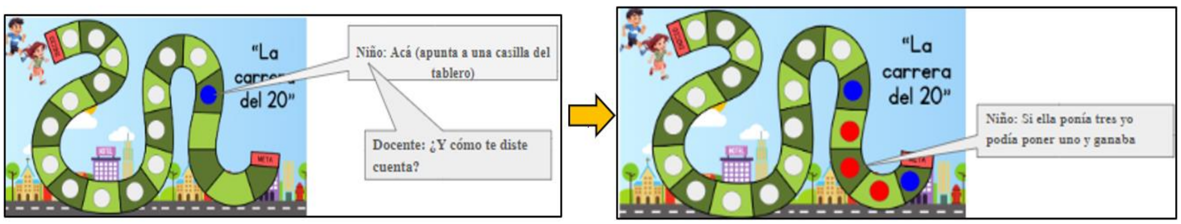
RESULTADOS DE IMPLEMENTACIÓN

La lección reportada en este trabajo corresponde a la segunda implementación dentro de un proceso del Estudio de Clases. La lección fue implementada en codocencia por una profesora de educación básica y una educadora diferencial en un primero básico de un colegio particular subvencionado de la ciudad de Los Ángeles, Región del Biobío. Esta segunda implementación de la lección fue ajustada en función de las observaciones que surgieron de la primera versión.

A continuación, se presenta el caso en que una vez finalizado un juego la docente pregunta a un jugador del equipo ganador "¿Cuándo te diste cuenta de que ibas a ganar?", ante lo que se desarrolla la conversación que se observa en la figura 2. El niño llega a una conclusión a partir de una predicción (posibles jugadas), logrando activar la habilidad de pensamiento crítico Inferencia, y en base a ello afirmar que "Ganaba"; esta afirmación es razonable y sustentada en datos que permiten reconocer la casilla 16 como importante.

Figura 2

Manifestación de la habilidad de autorregulación producto de una intervención docente



Para activar el pensamiento crítico, el docente interviene preguntando "¿y cómo te diste cuenta?", con ello promueve dos habilidades de pensamiento crítico en el estudiante, por un lado, la "Explicación" ya que el estudiante deberá presentar los resultados de su razonamiento para comunicar sus decisiones en las jugadas realizadas, y por otro, la autorregulación que de acuerdo con Facione (2007) corresponde al "monitoreo auto consciente de las actividades cognitivas propias, de los elementos utilizados en esas actividades, y de los resultados obtenidos, aplicando particularmente habilidades de análisis y de evaluación a los juicios inferenciales propios, con la idea de cuestionar, confirmar, validar, o corregir el razonamiento o los resultados propios". De esta manera, la intervención docente provee las condiciones para que el estudiante reflexione, justifique y comunique su manera de pensar frente a la búsqueda de una estrategia para ganar el juego, de igual manera el docente provee al estudiante la oportunidad de evaluar su juicio y confirmar la efectividad de su estrategia. La respuesta del estudiante evidencia las habilidades esperadas por la docente, pero además muestra la activación de la habilidad de inferencia descrita por Facione (2007), pues, es capaz de identificar y asegurar los elementos necesarios para sacar conclusiones razonables, formular conjeturas e hipótesis, considerar la información pertinente y sacar las consecuencias que se desprendan de los datos; teniendo en cuenta los datos a su disposición, formula conjeturas claras respecto de los posibles desenlaces del juego, y en base a ello obtiene una conclusión razonable. Esta experiencia da cuenta de la importancia del rol del docente en el desarrollo de las habilidades del pensamiento crítico, las que se pueden promover mediante preguntas específicas del profesor.

CONCLUSIONES

La implementación de la propuesta de enseñanza permitió evidenciar que la tarea de la lección, en el contexto del juego, junto con intervenciones docentes planeadas en el contexto del Estudio de Clases, facilitan la manifestación de todas las habilidades de pensamiento crítico indicadas por Facione (2007), aportando orientaciones específicas para el desarrollo del pensamiento crítico temprano en matemática. Con respecto al juego, este posee el potencial de adaptarse a distintos niveles educativos y contextos; cambiar el rango de avance o la meta a la que se debe llegar, genera nuevos patrones en el juego lo que demanda el pensamiento crítico en los estudiantes.

REFERENCIAS

Bermúdez, J. (2021). El aprendizaje basado en problemas para mejorar el pensamiento crítico: revisión sistemática. *Innova Research Journal*, *6*(2), 77-89. https://doi.org/10.33890/innova.v6.n2.2021.1681

Betancourth-Zambrano, S., Martínez-Daza, V., y Tabares-Díaz, Y. (2020). Evaluación de Pensamiento Crítico en estudiantes de Trabajo Social de la región de Atacama-Chile. *Entramado*, *16*(1), 152-164. https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.1.6139

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques (1970-1990).

Changwong, K. (2018). Critical thinking skill development: Analysis of a new learning management model for Thai high schools. *Journal of International Studies 11*(2), 37–48. https://doi:10.14254/2071-8330.2018/11-2/3

Dekker, T. (2020). Teaching critical thinking through engagement with multiplicity. *Thinking Skills and Creativity*, *37*, 100701. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2020.100701

Facione, P. (2007). Pensamiento Crítico: ¿Qué es y por qué es importante? *Insight assessment*, *22*, 23-56. pensamiento_critico_facione-libre.pdf (d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net)

Jablonka, E. (2020). Critical Thinking in Mathematics Education. In: Lerman, S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_35

Mao, W., Cui, Y., Chiu, M., y Lei, H. (2022). Effects of Game-Based Learning on Students' Critical Thinking: A Meta-Analysis. *Journal of Educational Computing Research*, *59*(8), 1682-1708. https://doi.org/10.1177/07356331211007098

MINEDUC (2023). *Pisa 2022 entrega de resultados*. https://s3.amazonaws.com/archivos.agenciaeducacion.cl/PISA+2022+Entrega+de+Resultados+final+final.pptx.pdf

OCDE. (2018). *Revisiones de la OCDE sobre educación en Chile*. OCDE https://politicaspublicas.uc.cl/wp-content//uploads/2018/05/Seminario_Desafios_Educacion_Chile_Paulo_Santiago

INNOVACIÓN SOCIOCULTURAL EN LA ENSEÑANZA DE TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA: UNA EXPERIENCIA DE AULA

Nicolás Alvarado-Morales, Universidad Católica de Temuco

Danitza González, Universidad Católica de Temuco

Abstract:

Esta innovación sociocultural en el aula explora la importancia de incorporar un enfoque de responsabilidad cultural en la enseñanza de matemáticas, especialmente en la Región de la Araucanía. En base a un marco socio-histórico-cultural se propone una tarea matemática que emplea como eje central el juego tradicional mapuche "Pubalkantun" como un Artefacto Matemático Cultural que media el conocimiento cultural y el conocimiento curricular para la enseñanza del concepto de homotecia con estudiantes de Primero Medio. La propuesta integra tanto el conocimiento matemático como los saberes culturales, generando un aprendizaje significativo que fortalece la identidad personal y social de los estudiantes. Durante la implementación, los estudiantes participaron activamente descubriendo la conexión entre el juego ancestral y la homotecia, lo que resaltó la importancia de contextualizar el aprendizaje. Los resultados indicaron una comprensión profunda del concepto matemático y una mayor valoración de su cultura. Esta experiencia de aula demuestra que la integración de elementos culturales en el aula enriquece el aprendizaje, promoviendo un enfoque más inclusivo en la educación matemática. La propuesta enfatiza la necesidad de promover en la Formación Inicial Docente habilidades para realizar innovaciones didácticas, con foco en las racionalidades y saberes de grupos culturales diversos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

[Educación matemática intercultural, Artefacto Matemático Cultural, Enseñanza de la geometría, Formación Inicial Docente]

INTRODUCCIÓN

Dado el contexto sociocultural de la Región de la Araucanía, donde más de un tercio de la población pertenece al pueblo mapuche (Instituto Nacional de Estadísticas, 2017), es fundamental diseñar tareas matemáticas que incorporen un enfoque de responsabilidad cultural, que no solo enriquece el aprendizaje matemático, sino que fortalece la relación entre el conocimiento académico y el saber cultural, generando una experiencia educativa más significativa (Huencho et al., 2022). De esta manera se busca explorar cómo el uso de un Artefacto Matemático Cultural en el aula puede ayudar a los futuros profesores a integrar un enfoque sociocultural en la enseñanza de las transformaciones geométricas. Así, el objetivo de esta implementación es promover diseños curriculares alternativos para los profesores en formación, incorporando elementos de la cultura mapuche para el proceso de aprendizaje de la matemática, generando instancias de aprendizaje significativo que aportan al desarrollo de la identidad personal y social de los estudiantes (Quintriqueo y Torres, 2012).

ELEMENTOS TEÓRICOS

En los últimos años, diversas investigaciones han abordado la enseñanza de la geometría desde enfoques innovadores, destacando el uso de recursos didácticos como elementos fundamentales en este proceso (Bravo et al., 2022), siendo clave el uso de manipulativos y la gamificación para involucrar a los estudiantes y facilitar un aprendizaje profundo de los conceptos geométricos (Chavarría-Pallarco, 2020). Van Hiele plantea que el aprendizaje de la geometría avanza a través de niveles cognitivos, desde la identificación de figuras hasta la comprensión de sus propiedades y transformaciones. Algunos estudios destacan que estos niveles permiten a los estudiantes avanzar de un pensamiento intuitivo hacia una comprensión más formal y abstracta de la geometría (Arnal-Bailera y Manero, 2024).

En este sentido, es crucial que el sistema educativo chileno, conforme a la Ley General de Educación N° 20.370 (2010), no solo promueva este avance cognitivo, sino que también respete y valore la diversidad cultural de sus estudiantes. La actualización curricular 2024 incorpora un marco socio-histórico-cultural que conceptualiza el conocimiento matemático como una construcción social, proporcionando un sentido significativo al aprendizaje y enriqueciendo la comprensión geométrica al contextualizarla en la realidad cultural de los estudiantes (MINEDUC, 2024).

De esta manera resulta fundamental integrar conocimientos propios de la cultura mapuche en el ámbito educativo, esta inclusión es esencial ante la marginación y relegación del patrimonio cultural a un estatus de inferioridad o negación, lo que afecta de manera adversa la construcción de la identidad personal y social de los estudiantes indígenas (Quintriqueo y Torres, 2012). Un paso esencial en este proceso es reconocer y valorar la matemática presente en la comunidad local, mediante la identificación de Artefactos Matemáticos Culturales

(AMC), que reflejan objetos y procesos matemáticos de la vida cotidiana en dicha comunidad (Huencho et al., 2018).

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

El Artefacto Matemático Cultural (AMC) que guía esta planificación es el *Pubalkantun*, conocido también como juego de lana, y tiene por objetivo que los estudiantes, mediante una actividad colaborativa, construyan de forma implícita el concepto de homotecia, evitando su mención directa. Esta planificación abarca tres dimensiones fundamentales: 1. Cultural: el *Pubalkantun*, como juego tradicional del pueblo Mapuche, establece una relación entre las figuras creadas y elementos naturales, generando nociones matemáticas. 2. Matemática: el juego facilita la comprensión del concepto de homotecia a través del cálculo de distancias y las relaciones proporcionales entre las medidas de las lanas. 3. Curricular: la actividad está alineada con el Objetivo de Aprendizaje 08 del eje de geometría para Primero Medio, el cual establece la comprensión del concepto de homotecia.

La tarea inicia con una fase de contextualización del AMC, en la que se introduce a los estudiantes en el uso del artefacto y se conforman los grupos de trabajo colaborativo. La segunda fase, los estudiantes manipulan el AMC y resuelven la tarea matemática propuesta. La tercera etapa corresponde a la plenaria, en la cual se consolida el conocimiento matemático generado a partir del AMC, favoreciendo la reflexión colectiva y el fortalecimiento de los conceptos trabajados.

RESULTADOS DE IMPLEMENTACIÓN

La tarea matemática generó entusiasmo y curiosidad en los estudiantes, así como incertidumbre entre el uso de la lana y las matemáticas. Durante la fase de contextualización se les explicó que este juego tiene un origen ancestral en la cultura mapuche, generando reacciones de asombro. Una vez contextualizados se dio inicio a la fase de desarrollo, en la que se promovió la interacción con el AMC y se incentivó la construcción del conocimiento mediante la práctica colaborativa, en la cual los estudiantes exploraron libremente, formando diversas figuras ya conocidas por ellos, como la "taza" y la "pata de gallina", y participando en juegos en parejas. Posteriormente, siguiendo las instrucciones del material de apoyo, lograron construir la transformación geométrica (Figura 1), y sus primeros comentarios destacaron la formación de triángulos. No obstante, al enfrentar la última demanda, que implicaba el cálculo de un cociente, algunos estudiantes mostraron desmotivación debido a la dificultad para formular las relaciones, ante ello se implementaron preguntas orientadoras por parte del docente, con lo cual lograron avanzar en la resolución de la tarea.

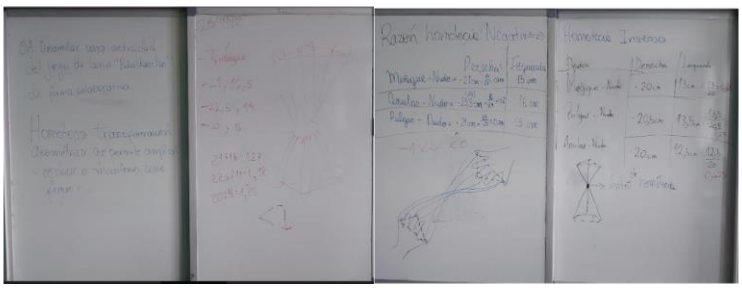
Figura 1

Los estudiantes manipulando el AMC

En la Figura 2 se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes al responder a las diferentes demandas planteadas, los cuales fueron discutidos en la plenaria. Esta instancia promovió una reflexión crítica en torno a la relación entre los elementos culturales ancestrales mapuche y su conexión con el aprendizaje matemático contemporáneo, destacando la relevancia de este enfoque pedagógico. Al preguntar “¿cuál fue el objetivo de la clase?”, varios estudiantes señalaron que era "ver la homotecia en la lana", lo que evidencia que comprendieron el propósito de la tarea.

Figura 2

Resultados obtenidos de los estudiantes en la plenaria



CONCLUSIONES

El conocimiento matemático construido por medio de Artefactos Matemáticos Culturales es una variable mediadora entre el conocimiento cultural y el conocimiento curricular (Huencho et al., 2018), ya que esta integración no solo enriquece la comprensión matemática al conectar conceptos abstractos con prácticas culturales ancestrales, sino que también refuerza la identidad cultural de los estudiantes. En este sentido, los resultados de esta implementación reflejan que los estudiantes no solo lograron entender el concepto de homotecia, sino que también apreciaron la conexión entre lo cultural y el contenido matemático. Así, la presente innovación sociocultural realza la importancia de integrar las vivencias y saberes culturales de los estudiantes en la enseñanza de la matemática, promoviendo un aprendizaje significativo y relevante, logrando motivar a los estudiantes y generar un interés genuino por el área. Para replicar este enfoque sociocultural en otros contextos educativos, se podría adaptar, por ejemplo, a través de patrones geométricos presentes en los tejidos tradicionales de la cultura mapuche, lo cual subraya la importancia de incluir módulos en la Formación Inicial Docente que promuevan la reflexión y destaque la necesidad de realizar adaptaciones curriculares con responsabilidad cultural, siendo abierto a otras racionalidades (Blanco-Álvarez et al., 2017).

Referencias

Arnal-Bailera, A., y Manero, V. (2024). A Characterization of Van Hiele's Level 5 of Geometric Reasoning Using the Delphi Methodology. Int J of Sci and Math Educ, 22, 537–560. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10380-z

Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A., y Oliveras, M. (2017). Formación de Profesores de Matemáticas de la Etnomatemática: estado de desarrollo. Bolema, 31(58), 564-589. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a02

Bravo, F., Oyervide, V., y Chávez, E. (2022). Recursos tecnológicos para la enseñanza de geometría descriptiva. Revista Científica UISRAEL, 9(2), 95–110. https://doi.org/10.35290/rcui.v9n2.2022.540

Chavarría-Pallarco, N. (2020). Modelo Van Hiele y niveles de razonamiento geométrico de triángulos en estudiantes de Huancavelica. Investigación Valdizana, 14(2), 85-95. https://doi.org/10.33554/riv.14.2.587

Huencho, A., y Chandía, E. (2018). Matemáticas con responsabilidad cultural. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 82, 7-15.

Huencho, A., Chandía, E., Rojas, F., y Williamson, G. (2022). Tercer espacio: Modelo de tareas matemáticas con responsabilidad cultural desde el contexto indígena. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática. Relime 25 (2), 197-222. https://doi.org/10.12802/relime.22.2523

Instituto Nacional de Estadísticas (INE). (2017). Censo 2017: Resultados definitivos. http://resultados.censo2017.cl/Region?R=R09

Ley N° 20.370 de 2010. Ley General de Educación. 02 de julio de 2010. Diario Oficial de la República de Chile.

Ministerio de Educación (MINEDUC). (2024). Bases Curriculares de 1° Básico a 2° Medio Matemática. Propuesta de Actualización para Consulta Pública 2024.

Quintriqueo, S., y Torres, H. (2012). Distancia entre el conocimiento mapuche y el conocimiento escolar en contexto mapuche. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 14(1), 16-33.

EVALUACIÓN INTEGRADA TALLER GEOMETRÍA Y ÁLGEBRA PARA DOCENTES DE EDUCACIÓN BÁSICA EN FORMACIÓN

Constanza Ripamonti, Universidad Católica Silva Henríquez

Evelyn Campos, Universidad Católica Silva Henríquez

Ana María Alarcón, Universidad Católica Silva Henríquez

Abstract:

Damos cuenta de una experiencia de aula en la FID (Formación Inicial Docente) de Educaciòn Bàsica, en la Universidad Catòlica Silva Henrìquez (UCSH), con dos grupos de estudiantes de la mención matemática (diurno y vespertino). Ambos grupos desarrollaron una evaluación de competencias pedagógicas y disciplinares integrando Álgebra y Geometría y aplicando diseños a escolares en dos modalidades diferentes. La evaluación diseñada incluye elementos epistemológicos, didácticos y curriculares que permiten vincular las competencias y resultados de aprendizaje de ambas AC (Actividades Curriculares) y los estándares pedagógicos y disciplinares propuestos por el Marco para la Buena Enseñanza 2021(MBE) .

[FID, evaluaciòn, álgebra, geometría, estàndares]

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de la matemática se pueden privilegiar diversas metodologías, algunas tradicionales y otras que pueden ser implementadas a partir de distintos modelos didácticos de enseñanza. Algunos de ellos ya se han revisado en las AC de la mención de matemática en la carrera de Educaciòn Bàsica de la UCSH . El objetivo ha sido innovar los procesos de evaluación de los distintos ejes temáticos de la asignatura de matemática.

Mediante los modelos constructivistas se debe comprender que los y las docentes no pueden esperar que los estudiantes aprendan por imitación o mediante claras explicaciones, sino a partir de lo que han encontrado por ellos mismos (Camargo, 2011).

En todas las AC de la malla curricular de la carrera de Educaciòn Bàsica existe una evaluación integrativa que pondera el 30% del curso, en el caso de los cursos del octavo semestre para la menciòn corresponden al hito formativo nivel 800: las actividades curriculares Geometría y Taller de didáctica II lenguaje algebraico.

La propuesta consiste en el diseño de una evaluación integrativa que combine y permita demostrar los resultados de aprendizaje de ambas AC de la mención de Matemáticas que se describen en la Fig1.

Figura 1

Competencias del perfil de egreso en el Hito evaluativo integrado

Competencia(s) del perfil a la(s) que tributa este Hito Evaluativo

3. Desarrollar respuestas, propuestas o soluciones en forma contextualizada, eficiente y pertinente, utilizando diversos medios comunicacionales orales, escritos, digitales y tecnológicos, al servicio de su ejercicio profesional.
5. Implementar acciones pedagógicas pertinentes, contingentes y de acuerdo con la planificación elaborada, en coherencia a las necesidades y características de la comunidad educativa y con sustento en la teoría de la enseñanza y el aprendizaje, las políticas educativas y el análisis crítico y ético de la labor docente.
8. Realizar un acompañamiento personalizado de los estudiantes, considerando la dimensión pedagógica, social y afectiva, para mejorar su proceso de aprendizaje de forma integral.
10. Implementar experiencias de enseñanza y de aprendizaje, demostrando un conocimiento pedagógico del contenido de la disciplina, coherente y complejo, basado en la indagación, la innovación y la didáctica específica de su mención.

Nota: Adaptado del documento de competencias del perfil de egreso de la carrera de Pedagogía en Educación Básica UCSH (2019).

Elementos teóricos o conceptuales

La propuesta de diseño de esta Experiencia de Aula se enmarca en estrategias y líneas teóricas tanto de la perspectiva de la EM como de las didácticas específicas del Álgebra y la Geometría.

La metodología COPISI, que tiene su principio en la teoría constructivista del aprendizaje, ya que se enfoca en el trabajo exploratorio por parte de los alumnos, y a través de la manipulaciòn de objetos y el tránsito de un sistema de representaciòn a otro, se presume que tendrán un aprendizaje mayormente significativo. Se conecta con el modelo Van Hiele en cuanto al proceso de aprendizaje y a las características de la teoría cognitiva de Piaget, con diferencias en la recursividad del desarrollo del pensamiento matemático; Piaget considera que el desarrollo del razonamiento evolutivo permite el avance en el proceso de aprendizaje, mientras que los Van Hiele consideran que gracias a los procesos de enseñanza y aprendizaje se promueve el desarrollo del razonamiento (Camargo, 2011).

El modelo de razonamiento geométrico de los esposos Van Hiele explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes dividiéndolo en cinco niveles secuenciados, jerárquicos y recursivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo, y, como muestra la Figura 1, lo que se manifiesta de forma implícita en un nivel inferior, se hace explícito en el siguiente. (Fouz, 2005).

Figura 2

Niveles de Van Hiele

	ELEMENTOS EXPLÍCITOS	ELEMENTOS IMPLÍCITOS
NIVEL 0	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
NIVEL 1	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
NIVEL 2	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
NIVEL 3	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)

Nota: El modelo de Van Hiele para enseñar la geometría. Adaptado de Fouz, F. (2005).

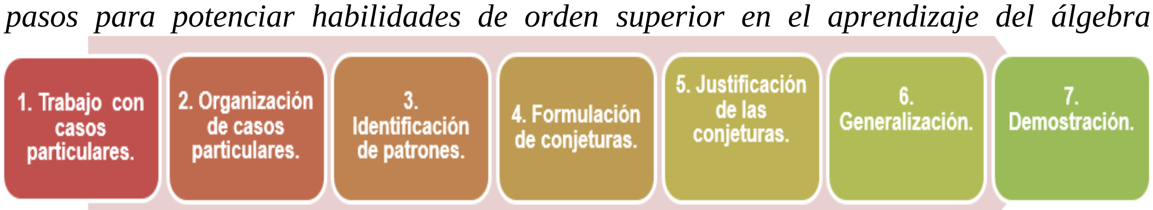
El estudiante se ubica en un nivel dado al inicio del aprendizaje y, conforme vaya cumpliendo con un proceso, avanza al nivel superior. El modelo de Van Hiele también indica la manera de apoyar a los estudiantes a mejorar la calidad de su razonamiento, pues proporciona pautas (Fases) para organizar el currículo educativo y así mediar para que los estudiantes pasen de un nivel a otro.

Por otra parte está el proceso de algebrización o de generalización de las fórmulas o teoremas que permiten la construcción del conocimiento geométrico, como destacan Cañadas et al. (2010): "El razonamiento es un proceso de pensamiento que permite obtener conclusiones a partir de premisas previamente establecidas. Según sea el desarrollo de dicho proceso se distingue entre razonamiento deductivo y razonamiento inductivo". Castro et al.(2010), afirman que varios autores en diferentes épocas señalan a la inducción como la vía para llegar al conocimiento en cualquier ciencia, en particular en la ciencia matemática, partiendo de casos o eventos particulares, observando las regularidades para alcanzar la generalización, la que finalmente se expresa en lenguaje algebraico .

Como muestra la Figura 3, las autoras desarrollaron un modelo de 7 pasos o fases para desarrollar el proceso de generalización desde el pensamiento inductivo , en este caso de los escolares de Enseñanza Básica .

Figura 3

7 pasos para potenciar habilidades de orden superior en el aprendizaje del álgebra



Nota: Adaptada de Introducción al pensamiento algebraico (Castro, Cañadas y Molina, 2010).

Finalmente, utilizaremos como referente epistemológico y motivación, la carta de Arquímedes de Siracusa a Eratòstenes citada por Massmann (s/f) en la revista del profesor de Matemàtica, en la cual da cuenta de un nuevo método para calcular el volumen de una esfera (figura 3).

Figura 4

Extracto de la carta de Arquímedes a Eratóstenes.

> *Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes por la mecánica, recibieron luego demostración por geometría, habida cuenta de que la investigación por ese método queda lejos de una demostración; como que es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto. Por esta razón, aun en el caso*

Nota: Arquímedes: el área y volumen de una esfera. Massmann, H. (1983)

Descripción de la propuesta

En la evaluación integrativa el o los estudiantes tendrà/n que:

1. Desarrollar una propuesta didáctica que dé cuenta de: a. Análisis previo (tanto curricular como disciplinar y didáctico), b. diseño c. implementación y d. evaluación.
2. Cuidar que la secuencia permita a los escolares descubrir en forma inductiva y luego generalizar utilizando el lenguaje algebraico, la forma en que se calcula el volumen en diversos cuerpos geométricos relacionados (prismas y pirámides; cilindro-esfera; cilindro-cono).
3. Usando la metodología COPISI y considerando las habilidades matemáticas de modelar, representar, comunicar y argumentar, y resolver problemas. El tránsito desde lo concreto hasta llegar a su expresión simbólica permitirá relacionar la geometría y el álgebra.
4. La implementación de su propuesta debe considerar actividades de acuerdo a las fases de enseñanza propuestas por Van Hiele y los 7 pasos de Cañadas, Castro y Molina (2010).
5. Analizar si esta propuesta permite a los/as alumnos/as alcanzan un nivel de razonamiento geométrico/algebraico esperado o si se deben realizar adecuaciones a su diseño, con el fin de proponer finalmente un modelo que favorezca el proceso de aprendizaje de los/as alumnos/as (Fig 5).

Figura 5

Extracto del texto instructivo de la evaluación.

Descripción general de la actividad	Trabajo de investigación en acción en grupos de trabajo colaborativos, consistente en una propuesta didáctica que dé cuenta del análisis, diseño e implementación de una secuencia didáctica que muestre la forma en que se descubre el modelo de cálculo del volumen en diversos cuerpos geométricos, usando la metodología COPISI y la estrategia basada en la indagación: **Realizan propuesta grupal (duplas) sobre situaciones de aprendizaje en los ejes temáticos de geometría y álgebra y el contenido de volumen en formas 3D, en las que demuestran dominio didáctico y disciplinar, integrando componentes del currículo de matemática y orientaciones didácticas para su aprendizaje:** **1. Fase 1: Análisis preliminar.** **Fundamentación Teórica-curricular sobre recursos didácticos para los ejes de Patrones y Álgebra y Geometría: volumen de cuerpos geométricos y los obstáculos en los ejes de Patrones y Álgebra y Geometría en educación básica.** **2. Fase 2: Selección de situaciones de aprendizaje, diseño de la propuesta y evaluación (Rúbrica con tres criterios: proceso de indagación, proceso de generalización y transferencia a la resolución de problemas).** **Selección y análisis de recursos didácticos para el cálculo de volumen en cuerpos geométricos asignados.** **3. Fase 3: Reflexión y análisis a priori.** **4. Fase 4: Análisis a posteriori.** La propuesta debe exponerse la primera semana de diciembre.

Criterios	Niveles de desempeño				
	R.A.	Logrado (3)	Medianamente logrado (2)	Por lograr (1)	No aplica (0)
	10.2.3	disciplinar, incluyendo ejes, habilidades y actitudes coherentes con la propuesta didáctica.	disciplinar, incluyendo dos de estos (ejes, habilidades y actitudes) en coherencia con la propuesta didáctica.	disciplinar, incluyendo uno de estos (ejes, habilidades y actitudes) en coherencia con la propuesta didáctica.	
3. Adecuación del currículo		10.2.3 Realiza adecuaciones del currículo del área disciplinar, considerando la diversidad del contexto de enseñanza aprendizaje (edad, género y contexto social) de su propuesta didáctica.	10.2.3 Realiza adecuaciones del currículo del área disciplinar, considerando dos rasgos de la diversidad del contexto de enseñanza aprendizaje (edad, género y contexto social) de su propuesta didáctica.	10.2.3 Realiza adecuaciones del currículo del área disciplinar, considerando un rasgo de la diversidad del contexto de enseñanza aprendizaje.	Desempeño no observado.
IV. Implementación 1. Fundamentación	10.3.1 5.1.3	10.3.1 Fundamenta la situación de aprendizaje según teorías disciplinarias, considerando los requisitos pedagógicos y disciplinares (uso de bases curriculares y programas de estudio vigentes) para su implementación.	10.3.1 Fundamenta la situación de aprendizaje según teorías disciplinarias y/o considerando algunos de los requisitos pedagógicos y disciplinares (uso de bases curriculares y/o programas de estudio vigentes) para su implementación.	10.3.1 Fundamenta la situación de aprendizaje sin considerar teorías disciplinarias, los requisitos pedagógicos y disciplinares (uso de bases curriculares o programas de estudio vigentes) para su implementación.	Desempeño no observado.

Nota: Extracto instructivo original de la evaluación integrativa. (II Semestre 2023)

Resultados de implementación

Los estudiantes implementaron sus secuencias en una Feria de Matemàticas (diurno) y con escolares en situación no de aula (vespertino) en ambos casos con escolares de segundo ciclo básico (5ª a 8ª) y presentaron sus resultados en formato pòster en comisión de docentes de la menciòn.

Los resultados de la evaluaciòn respecto de los indicadores de evaluaciòn asociados a las competencia del nivel, en ambas secciones y en las dos AC superaron el 80% de logro, sin embargo se evidenciaron algunos logros no anticipados:

-Los niveles reflexivos respecto de su propia práctica fueron relevantes entre todos/as los estudiantes, destacando oportunidades de mejora en todos los casos.

-La consolidación del uso de manipulativos para la enseñanza de la matemática en educación básica y específicamente en Álgebra y Geometría.

-La relevancia de la implementación de secuencias y su análisis a posteriori para la mejora de los procesos de enseñanza- aprendizaje.

Referencias

Camargo, Uribe, Leonor (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. *Revista Colombiana de Educación*, Núm. 60, enero-junio, 2011, pp. 41-60.

Castro, E., Cañadas, M., Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *Revista UNO* 54, pp. 55-67.

Fouz, F. (2005). El modelo de Van Hiele para enseñar la geometría. *Un paseo por la Geometría; Universidad de Granada.*

Massmann, H. (1983). Arquímedes: el Área y volumen de una esfera.*Revista del profesor de matemáticas 1*. pp. 25-37.

ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN SU FORMA CANÓNICA BAJO LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN Y EL USO DE HERRAMIENTAS DIGITALES

Gabriela Paz Escalona Kojic, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

El análisis curricular y revisión de los libros de texto ministeriales evidenció que no existen actividades que fomenten la exploración por parte de los estudiantes en las cuales puedan reafirmar (o construir) la información que entrega la forma canónica y cómo se relaciona con los desplazamientos de la gráfica de una función cuadrática, en base a esto, se tomaron en cuenta elementos de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (Duval 2006) y elementos del uso de tecnología y herramientas (Trigo 2016) para diseñar una propuesta didáctica innovadora con el objetivo de que los estudiantes pudieran relacionar los distintos tipos de registros(algebraico, gráfico y tabular) para enunciar la información que entrega la forma canónica de la función cuadrática con respecto al vértice de ésta y los desplazamientos de la gráfica. La actividad se realizó en grupos de 4 estudiantes los cuales trabajaron de manera continua durante 4 sesiones, partiendo con el uso de material concreto y el registro de datos, el tratamiento y conversión de estos datos en Excel, la conversión nuevamente con el software GeoGebra y finalmente respondiendo un cuestionario. Los resultados arrojaron que los estudiantes relacionaron las gráficas realizadas por el movimiento de la linterna con la información entregada por la forma canónica, pudiendo enunciar generalizaciones. El uso de distintos registros facilitados por las herramientas tecnológicas fue un aporte a la comprensión de la forma canónica de la función cuadrática por parte de los estudiantes, lo cual se vio reflejado en las respuestas del cuestionario final.

[función cuadrática, forma canónica, registros de representación, herramientas digitales]

INTRODUCCIÓN

En el contexto de la enseñanza de las matemáticas en la educación media en Chile, un objeto que destaca es el de función, estando presente en todos los niveles de educación media, pasando por distintos tipos de funciones: lineal, afín, cuadrática, exponencial, logarítmica, potencia y funciones trigonométricas. En el caso del currículo de segundo medio, en el eje de álgebra y funciones está el objetivo de aprendizaje, “Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$: (a≠0)”. (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2015, p.123). Con la finalidad de cubrir el currículo en cuanto a los contenidos y también a los lineamientos de las Bases Curriculares (MINEDUC, 2015), las cuales mencionan que el uso de TIC son un apoyo para la comprensión del conocimiento matemático. En este contexto se diseñó una propuesta de innovación de enseñanza que proporcionó a los estudiantes una experiencia que les permita trabajar con distintos tipos de registros de representación la forma canónica, el vértice y los desplazamientos de la función cuadrática, utilizando material concreto, papel milimetrado y uso de herramientas tecnológicas como Excel y GeoGebra. Este diseño se realizó bajo la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) (Duval 2006) la cual menciona que los estudiantes deben ser capaces de reconocer un objeto matemático en distintos contextos de representación, además se incluyó el uso de herramientas tecnológicas atendiendo las propuestas de las Bases Curriculares. La implementación de la actividad fue en un colegio particular subvencionado de la comuna de La Reina, Santiago. Se caracteriza por ser un colegio con un enfoque academicista y que busca conseguir la excelencia académica con respecto a las pruebas estandarizadas SIMCE y PAES, por lo que la enseñanza en la asignatura de matemáticas suele ser de forma tradicional por lo que trabajar con una situación real y herramientas digitales para transitar entre las distintas representaciones fue una situación innovadora, surgen las preguntas, el uso de herramientas digitales en este contexto, ¿facilitará el aprendizaje de la forma canónica de la función cuadrática? ¿Cómo coordinan los distintos registros de la función cuadrática con el registro algebraico en su forma canónica?

ELEMENTOS CONCEPTUALES

Para la propuesta didáctica se tomaron en cuenta elementos de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (Duval 2006) y elementos del uso de tecnología y herramientas digitales según lo mencionado por Trigo (2016). Las distintas representaciones de un objeto matemático son de interés para la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS) (Duval 2006) la cual afirma que la actividad matemática se realiza en un contexto de representación, el cual no es único para un objeto matemático. Las representaciones utilizadas en un contexto matemático deben ser semióticas y tener en cuenta la naturaleza de las formas en cómo se utilizan y las demandas cognitivas que involucran. Estas representaciones semióticas deben tener la propiedad de transformación, es decir, que dentro de un mismo registro de representación se puedan realizar tratamientos y a la vez, se puedan realizar conversiones de un registro de representación a otro, para que de esta manera el estudiante sea capaz de escoger el registro que mejor le acomode para resolver el problema propuesto. Es importante que se consideren al menos dos registros distintos a la hora de abordar un contenido matemático para que de esta forma el estudiante no confunda el registro utilizado con el objeto matemático. (Duval 2006). Teniendo esto en cuenta, la propuesta didáctica de enseñanza de la variación de los parámetros del a función cuadrática en su forma canónica facilita que los estudiantes usen distintos tipos de registros para resolver la tarea, pudiendo realizar tratamientos y conversiones. En la tarea se trabaja con el registro gráfico, numérico, algebraico y verbal. Dado que se hace a partir de la silueta de la luz de una linterna, el tratamiento algebraico se volvería engorroso y se perdería el foco de la actividad, por lo cual la actividad se respalda también en el uso de tecnología para facilitar el tratamiento y la conversión entre registros, ya que como menciona Trigo (2016) se sugiere que los estudiantes de ahora centren la discusión en el significado de las ideas matemáticas y se cuestiona si con la existencia de las herramientas digitales es necesario que los estudiantes sigan dedicando tiempo a la realización de cálculos y procedimientos.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

La propuesta didáctica que se detalla a continuación está enmarcada en el OA3 de segundo medio propuesto en las bases curriculares de MINEDUC (2015)

Dado que el OA es bastante extenso, se consideraron los siguientes indicadores de evaluación

- Grafican y derivan la función para distintos valores de sus parámetros, obteniendo la forma canónica $y = a(x - d)^2 + e$.
- Analizan las variaciones de la gráfica mediante diferentes medios de representación.

Sesión 1: Graficar la silueta de una linterna proyectada en el papel milimetrado. Posicionar los ejes en el vértice de la parábola. Dibujar 3 o 4 parábolas más, realizando movimientos de la linterna. Escoger puntos de las gráficas y llevarlas a tablas en Excel. Ingresar gráfico de dispersión y marcar línea de tendencia junto con la expresión polinómica asociada.

Sesión 2: Graficar en GeoGebra funciones obtenidas en sesión anterior, transformarlas a la forma canónica.

Sesión 3: Responder un cuestionario en grupo. Dada la extensión del cuestionario, se explicitan las preguntas 7 y 8. Pregunta 7: Realiza una conclusión respecto del análisis realizado anteriormente; Pregunta 8: ¿Cómo se evidencia el desplazamiento que hicieron con la linterna en el papel milimetrado en la forma canónica?

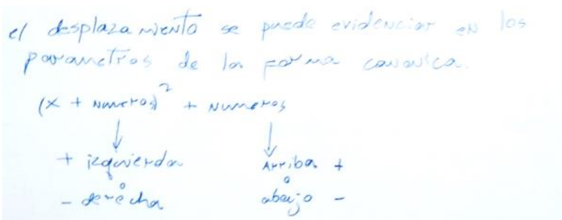
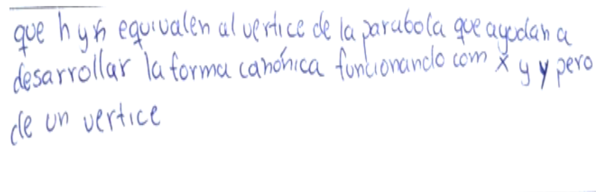
Sesión 4: Presentar en plenario las conclusiones del trabajo. Realizar guía de ejercicios de manera individual.

Los datos se recolectaron mediante las producciones de los estudiantes correspondientes a las sesiones 1 y 3. Estas producciones se analizarán según los distintos registros de representación, teniendo como meta que se comprenda que la representación algebraica en su forma canónica de la función cuadrática se relaciona tanto con desplazamientos de la gráfica como con la posición del vértice. Los avances de la comprensión conceptual se evaluaron con la guía de ejercicios que realizaron de manera individual.

RESULTADOS DE IMPLEMENTACIÓN

A modo de resumen y para facilitar la comprensión de los distintos registros utilizados para el mismo objeto matemático se presenta la siguiente tabla con imágenes de algunas producciones de los estudiantes

Tabla 1

Representación algebraica	**Representación verbal**
Respuesta a pregunta 8 de cuestionario	*Respuesta a pregunta 7 de cuestionario*
	

La imagen correspondiente a la representación verbal de la Tabla 1, representa la respuesta dada por un grupo a la pregunta 7 del cuestionario, dice “que h y k equivalen al vértice de la parábola que ayudan a desarrollar la forma canónica funcionando como x y y, pero de un vértice”. Esta respuesta hace alusión a la generalización del significado de los parámetros h y k cuando la función cuadrática se escribe de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, relacionándolos específicamente con el vértice de la gráfica de la función.

La imagen correspondiente a la representación algebraica representa la respuesta dada por un grupo a la pregunta 8 del cuestionario, dice “El desplazamiento se puede evidenciar en los parámetros de la forma canónica $(x + números)^2 + números$”. Además, aclara mediante unas flechas que si el número que se suma a la x es positivo si el desplazamiento es hacia la izquierda y si es negativo hacia la derecha, así como que el desplazamiento es vertical hacia arriba si el número que se suma luego del paréntesis es positivo y hacia abajo si es negativo. Esta respuesta a diferencia de la anterior relaciona los parámetros h y k con los desplazamientos realizados a la gráfica de una función cuadrática y como se ven reflejados en la forma canónica. Se clasifica esta respuesta en la sección de representación algebraica ya que hace alusión directa a la forma canónica en su escrita de manera algebraica.

Al estar usando por lo menos dos distintos registros para hablar de la forma canónica y la información que esta entrega, se puede observar que como resultado de la clase se logran los indicadores de evaluación propuestos asociados al OA3 correspondiente a segundo medio.

CONCLUSIONES

Con respecto a la secuencia, en su implementación se observaron dificultades al trabajar con una situación de la vida real, la precisión de dibujo dificulta poder situar los ejes realmente en el vértice de la primera parábola realizada. Un factor positivo de considerar una situación de la vida real fue que los coeficientes de la función cuadrática asociada a cada parábola eran números reales no enteros, lo cual diversifica la forma algebraica en cómo se presenta el objeto de función cuadrática a los estudiantes, saliendo de los coeficientes enteros o racionales. Algo no esperado fue la mejora de los estudiantes en cuanto al registro verbal en comparación a ocasiones anteriores en las que tenían que explicar o argumentar sus resultados.

Acorde a los resultados obtenidos, a pesar de que no todos los grupos lograron el objetivo, si se hicieron partícipes de la construcción de su propio conocimiento y pudieron aclarar sus dudas con respecto a la actividad en la sesión 4, además que como lo afirman Blázquez y Ortega (2001) “la diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos sobre ese objeto o concepto” (p. 221). Por lo que entendiendo el aprendizaje como un proceso, el que los estudiantes no logren el objetivo en una sesión no quiere decir que no lo vayan a lograr eventualmente, ya que su capacidad cognitiva aumentó con respecto al concepto de función cuadrática. La secuencia propuesta se puede mejorar incluyendo preguntas en la que el estudiante tenga que decidir que representación usar para poder resolver un problema propuesto, ya que, si bien se utilizaban distintas representaciones, en ninguna pregunta del cuestionario ni de la guía de ejercicios el estudiante tenía la posibilidad de escoger la representación a usar para responder a la pregunta. Otra forma de mejorar esta propuesta es mediante simulaciones con programas computacionales de las gráficas de las parábolas para disminuir las dificultades en cuanto a la precisión del dibujo y por ende la identificación de puntos en el plano cartesiano para su posterior tratamiento tanto en Excel como en GeoGebra. Finalmente, implementar esta misma secuencia de clases en otro contexto podría arrojar otro tipo de resultados los cuales contribuyen al mejoramiento y desarrollo de la secuencia propuesta

Referencias

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *4*(3), 219-236.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Ministerio de Educación. (2015). Bases Curriculares 7º a 2º medio.

Trigo, L. M. S. (2016). La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 333-346.

SECUENCIA PARA LA INTRODUCCIÓN DE LA FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Consuelo Álvarez Lisboa, Universidad de Los Lagos

Abstract

Los avances en Educación Matemática evidencian diversas dificultades asociadas al aprendizaje del álgebra producto del enfoque aritmético de la Enseñanza Básica. Estas dificultades repercuten en cursos posteriores al trabajar con estructuras algebraicas como ecuaciones y funciones. El objetivo de este trabajo es describir la implementación de una clase de álgebra para estudiantes de segundo medio (15-16 años) en la que, a partir de la generalización, crean familias de ecuaciones. El objetivo de la clase es comprender la naturaleza de los parámetros a, b y c en la forma general de la ecuación cuadrática. Se utilizan las bases teóricas propuestas en la Teoría de Objetivación. Se muestran las bases teóricas del diseño, la descripción general de las actividades, el análisis de las respuestas y las reflexiones finales. Se cumple el objetivo de clase propuesto y se observa un desarrollo de los tres tipos de pensamiento algebraico propuestos en la Teoría de Objetivación adaptados al nivel.

[dificultades en álgebra, experiencia de aula, teoría de objetivación, ecuación cuadrática, parámetro]

INTRODUCCIÓN

Las dificultades asociadas al aprendizaje del álgebra se observan en su transición desde la aritmética, que luego genera obstáculos en la comprensión de objetos como ecuaciones y funciones (Fuentes, 2016; Rojas y Vergel, 2013; Zapatera 2016). En el caso del segundo nivel de enseñanza media, la unidad de álgebra comienza con ecuaciones y funciones cuadráticas (Ministerio de Educación, 2016). En este trabajo se presenta una clase implementada en el nivel mencionado, que busca introducir la forma general de la ecuación cuadrática a partir de la generalización de parámetros. El objetivo de la clase es distinguir los parámetros *a*, *b*, y *c* de las incógnitas, profundizando en la idea de que los símbolos alfanuméricos son un recurso para expresar generalidades y que tienen un significado dentro del objeto estudiado, en ese caso, en la ecuación.

MARCO TEÓRICO

Pensamiento algebraico en la Teoría de Objetivación.

Según Radford (2010), el pensamiento algebraico en la Teoría de Objetivación se constituye por tres componentes: a) El sentido de indeterminancia (uso de incógnitas, variables y parámetros, en contraposición con el uso de números determinados), b) el tratamiento analítico (reconocimiento del carácter operatorio de los objetos indeterminados) y c) la expresión semiótica (formas de nombrar o referirse a los objetos). Estos componentes se desarrollan en tres formas de pensamiento algebraico según la TO: 1) *pensamiento factual*, que se evidencia cuando la indeterminancia no alcanza el nivel de enunciación y se muestra de forma implícita en acciones corporales, gestos, interacciones, frases, etc. 2) *pensamiento contextual* en el que la indeterminancia se presenta de forma explícita a través de descriptores sin acudir a símbolos alfanuméricos y 3) *pensamiento simbólico* en el que las frases clave se representan por símbolos alfanuméricos.

En lo que concierne a la generalización de patrones, como forma de desarrollar el pensamiento algebraico, la TO plantea tres ideas claves de este proceso: *capturar una característica común* notada en una secuencia dada (procurando que esta captura sea de naturaleza algebraica y no aritmética), *aplicar esta característica* a todos los términos de la secuencia y *utilizar la propiedad común para deducir la expresión general* (Vergel 2015). En ese sentido, este trabajo se adaptan estas ideas claves para introducir la forma general de la ecuación cuadrática.

SUJETOS DE ESTUDIO Y CONTEXTO

La clase se implementó en un curso de segundo año de enseñanza media con 31 estudiantes de género mixto de un colegio particular subvencionado humanista-científico de la ciudad de Valdivia. Durante las clases anteriores a la implementación se realizaron recordatorios generales de álgebra (generalización de patrones, definición de ecuación, operatoria con expresiones algebraicas) de tal forma que la actividad presentada introduce por primera vez la noción de ecuación cuadrática. Respecto de la disposición del curso al trabajo en clases de matemáticas, esta tiende a ser generalmente positiva en la que la mayoría del curso muestra una actitud de interés y participación.

DISEÑO DE LA SECUENCIA

La clase consiste en la realización de una guía de trabajo, mediada por una profesora durante la sesión, que contiene 4 actividades prácticas (15 – 20 minutos c/u) y una fase final de formalización (10 min). Cada actividad está diseñada a partir de las ideas claves para el desarrollo del pensamiento algebraico en base a la TO. A continuación, se describe de forma general la secuencia de actividades y su relación con el marco teórico.

La actividad 1 (20 min) lleva la instrucción *"Crea 10 ecuaciones con diferentes estructuras."* y se entrega el espacio para escribirlas. En esta oportunidad el formato era libre, sólo se recordó que la ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas.

La actividad 2 (15 min) lleva la instrucción *"Observa las ecuaciones creadas y agrúpalas según una característica común. Cada grupo será una "familia de ecuaciones"* y se entrega el espacio para escribir el aspecto común (observado por ellos) y el espacio para escribir las ecuaciones que corresponden a esa familia. Cada estudiante crea 3 familias de ecuaciones. Esta actividad se basa en la primera idea clave de la generalización de patrones que consiste en capturar una idea común. En este caso, lo *común* se observa sobre la estructura y características de las ecuaciones creada.

La actividad 3 (15 min) lleva la instrucción "*Crea 3 ecuaciones más por familia de tal forma que las 3 tengan la misma estructura".* Para esta ocasión se utiliza la segunda idea clave de aplicar la característica común cuando los estudiantes crean ecuaciones nuevas que cumplan con la característica común utilizada como descriptor de cada familia de ecuaciones.

La actividad 4 (20 min) lleva la instrucción *"Para cada familia, crea una expresión general"*. Esta última actividad considera la tercera idea clave de utilizar la característica común para deducir la expresión general de la familia de ecuaciones. De esta forma, los estudiantes generalizan los parámetros para las tres ecuaciones de diferente estructura.

Finalmente se presenta la forma general de la ecuación cuadrática de tal forma que se compara con la expresión general de sus propias ecuaciones e identificar que los parámetros *a*, *b* y *c* representan números específicos para cada ecuación y que la forma general refiere a la forma general de la familia de ecuaciones cuadráticas.

Si bien la guía de trabajo es individual, se espera que entre estudiantes se compartan en grupos pequeños las ideas asociadas a su desarrollo.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

El análisis de resultados se realiza sobre las respuestas escritas en las guías de trabajo. A continuación de los resultados se incluye una imagen de ejemplos de respuesta representativa para cada actividad.

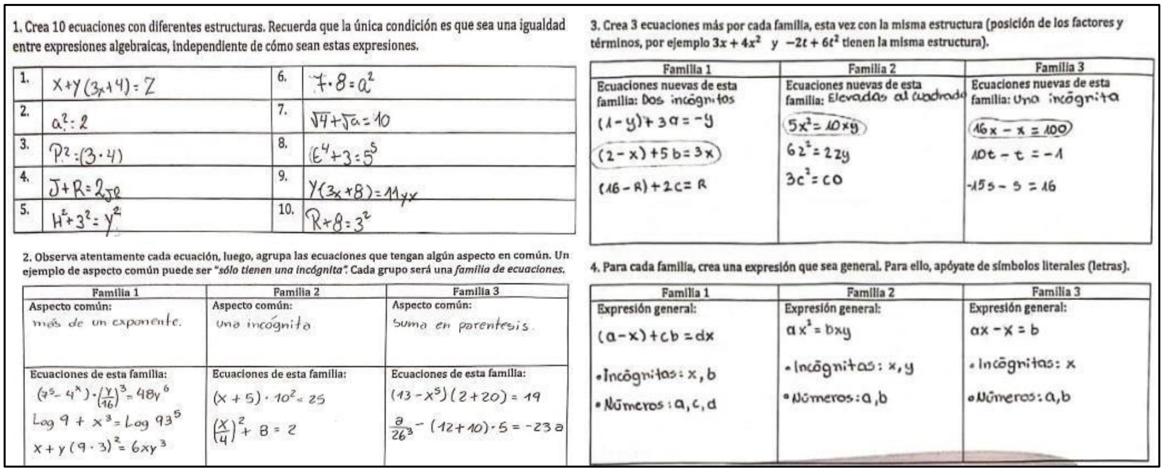
En la primera actividad cada estudiante logra crear las 10 ecuaciones diferentes, sin embargo, se observan ecuaciones complejas estructuralmente, con operaciones no simplificadas, evidenciando una dificultad en reconocer lo elemental de los términos algebraicos en una ecuación.

Para la segunda actividad, aparecen aspectos comunes que se repiten con mayor frecuencia: ecuaciones que contienen una operación determinada (multiplicaciones, sumas, restas, divisiones) y ecuaciones que contienen un elemento determinado (exponentes, paréntesis, raíces, cantidad de incógnitas). En general no se presentaron dificultades en esta actividad. Se observó un pensamiento factual en estudiantes que, para identificar elementos comunes, señalaban sobre la guía elementos de las ecuaciones y utilizaban expresiones como *"esta se parece a la de acá"* o *"son como esta de aquí"* antes referirse a *"tienen paréntesis"* o *"tienen una suma en medio"*.

En la tercera actividad no se evidenciaron dificultades, los estudiantes lograron crear ecuaciones aplicando el aspecto común identificado en la actividad anterior. Se observa un desarrollo del pensamiento algebraico contextual.

En la última actividad los estudiantes logran generalizar los parámetros con la dificultad estructural de utilizar letras arbitrarias para las incógnitas y los parámetros. Frente a la necesidad de distinguir entre ambas, algunas estudiantes decidieron indicar sobre la expresión qué letras representaban números generales y cuáles incógnitas. Otros estudiantes adaptaron las ecuaciones a partir de sus conocimientos previos cambiando las incógnitas a la letra común *"x"* para dejar los parámetros expresados con otras letras. Se observa un desarrollo del pensamiento algebraico simbólico en cuanto los estudiantes logran utilizar nuevos símbolos literales para representar números que mantienen un lugar específico dentro de la estructura de la ecuación.

Para el cierre de la actividad, los y las estudiantes manifestaron, gestual y verbalmente, comprender la función de los parámetros en la expresión $ax^2+bx+c=0$ al compararlos con sus propias ecuaciones, cumpliéndose el objetivo de la secuencia.



1. Crea 10 ecuaciones con diferentes estructuras. Recuerda que la única condición es que sea una igualdad entre expresiones algebraicas, independiente de cómo sean estas expresiones.

1.	$X+Y(3x+4)=Z$	6.	$7\cdot 8=a^2$
2.	$a^2=2$	7.	$\sqrt{4}+\sqrt{a}=10$
3.	$P^2=(3\cdot 4)$	8.	$E^4+3=5^5$
4.	$J+R=2JR$	9.	$Y(3x+8)=11yx$
5.	$H^2+3^2=Y^2$	10.	$R+8=3^2$

2. Observa atentamente cada ecuación, luego, agrupa las ecuaciones que tengan algún aspecto en común. Un ejemplo de aspecto común puede ser "*sólo tienen una incógnita*". Cada grupo será una *familia de ecuaciones.*

Familia 1	Familia 2	Familia 3
Aspecto común: más de un exponente.	Aspecto común: una incógnita	Aspecto común: suma en parentesis.
Ecuaciones de esta familia: $(7^5-4^x)\cdot\left(\frac{y}{16}\right)^3=48y^6$; $\text{Log } 9+x^3=\text{Log } 93^5$; $x+y(9\cdot 3)^2=6xy^3$	Ecuaciones de esta familia: $(x+5)\cdot 10^2=25$; $\left(\frac{x}{4}\right)^2+8=2$	Ecuaciones de esta familia: $(13-x^5)(2+20)=19$; $\frac{a}{26^3}-(12+10)\cdot 5=-23a$

3. Crea 3 ecuaciones más por cada familia, esta vez con la misma estructura (posición de los factores y términos, por ejemplo $3x+4x^2$ y $-2t+6t^2$ tienen la misma estructura).

Familia 1	Familia 2	Familia 3
Ecuaciones nuevas de esta familia: Dos incógnitos	Ecuaciones nuevas de esta familia: Elevadas al cuadrado	Ecuaciones nuevas de esta familia: Una incógnita
$(1-y)+3a=-y$	$5x^2=10xy$	$16x-x=100$
$(2-x)+5b=3x$	$6z^2=2zy$	$10t-t=-1$
$(16-R)+2c=R$	$3c^2=c0$	$-15s-s=16$

4. Para cada familia, crea una expresión que sea general. Para ello, apóyate de símbolos literales (letras).

Familia 1	Familia 2	Familia 3
Expresión general: $(a-x)+cb=dx$	Expresión general: $ax^2=bxy$	Expresión general: $ax-x=b$
• Incógnitas: x, b	• Incógnitas: x, y	• Incógnitas: x
• Números: a, c, d	• Números: a, b	• Números: a, b

Imagen 1: Ejemplo de respuestas de diferentes estudiantes para cada actividad.

REFLEXIONES FINALES

Durante la secuencia se evidenció el desarrollo del pensamiento factual, contextual y simbólico en la descripción de aspectos comunes y en la creación de expresiones generales. Sin embargo, no se desarrolla de igual manera que en la generalización de patrones puesto que en esta actividad la necesidad de representación algebraica era explícita desde la instrucción. Se perciben dificultades en la creación libre de ecuaciones, se observa la necesidad de profundizar en el concepto de ecuación y analizar sus elementos según su función dentro de la estructura. Se perciben dificultades en el componente de la analiticidad. La principal limitación de la clase es la falta de una actividad final que permitiera evidenciar el cumplimiento del objetivo a través de un registro explícito. Dentro de las mejoras de la clase se incluyen aspectos como diseñar las actividades posteriores para lograr una reflexión más profunda del concepto de parámetro y de su rol dentro de una ecuación. Respecto del trabajo, se describe en un formato general la implementación de clase, mostrando resultados y ejemplos. En las proyecciones se encuentra la posibilidad de aplicarse en cursos anteriores (por ejemplo, al introducir la forma general de la ecuación lineal).

REFERENCIAS

Fuentes, I. (2016). Del lenguaje aritmético al algebraico: errores y dificultades. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas, 73*, 38-44.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Rojas, P. J., & Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista científica, 17*(2), 137.

Ministerio de Educación de Chile (2016). Matemática: *Programa de Estudio, Segundo Medio.* Primera edición, ISBN 978-956-292-605-8.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Zapatera, A (2016). Como desarrollar el pensamiento algebraico. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 73, 32-37

USO DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA DE FUNCIONES AFINES EN UN PROBLEMA QUE INTEGRA GEOGEBRA EN EDUCACIÓN BÁSICA

[Priscila Rubilar Pérez], [Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]

Abstract:

Las funciones son uno de los objetos más relevantes para la matemática (Klein, 2006). En la enseñanza básica se aborda formalmente con funciones lineales y afines, relevando el uso de software educativo (MINEDUC, 2016). El objeto función presenta diferentes problemáticas al ser abordado por los estudiantes, algunas de ellas provenientes de la dificultad de articular los diferentes registros de representación semiótica, asociado a la visualización del objeto. En torno a las problemáticas expuestas previamente y a la relevancia de la tecnología para el desarrollo de las habilidades del Siglo XXI (MINEDUC, 2021) se propone el desarrollo de una propuesta de innovación con uso de GeoGebra para la toma de decisiones en las que se ven implicadas funciones afines. En torno a ello, el estudio busca analizar cómo los estudiantes utilizan los registros de representación de la función afín, mediante el diseño de la ingeniería didáctica. Entre los hallazgos, se evidencia la predominancia de realización de cálculos sin cuestionar su uso, la priorización del registro algebraico, problemáticas al trabajar en el registro gráfico sin uso de GeoGebra y su uso como pilar de la realización de tratamientos pertinentes en el registro gráfico, conversión entre registro algebraico y gráfico; siendo primordial para la toma de decisiones.

[Función afín, Teoría de registros de representación semiótica, GeoGebra, educación secundaria]

INTRODUCCIÓN

Se ha estudiado que las nociones del cálculo son problemáticas para los estudiantes (Artigue et al., 1995) y que existe una predominancia del registro algebraico para su trabajo, además, Cuevas y Díaz (2014) indican razones por las que los estudiantes tienen dificultades, por ejemplo, que posee una multiplicidad de representaciones. Dada la problemática intrínseca del objeto y la complejidad en las conversiones de entre registros es preciso generar experiencias que permitan al estudiante apropiarse de él. MINEDUC (2016) propone uso de GeoGebra para el trabajo con funciones, declarando la importancia del trabajo con software educativo. Como el punto de partida de la enseñanza de las funciones en Chile es la función lineal y afín en 8° año básico, es que se abordó este objeto en ese curso, con estudiantes de la región de Valparaíso. Así, a continuación, se presentarán elementos teóricos, descripción de la propuesta, resultados de la implementación y conclusiones.

ELEMENTOS TEÓRICOS

En el presente apartado se mostrarán los elementos teóricos más relevantes del marco utilizado, en este caso, la teoría de los registros de representación semiótica.

TEORÍA DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

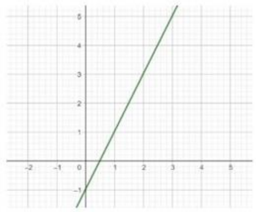
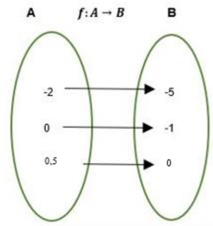
Para Duval (2004) el estudio y comprensión de los objetos matemáticos requiere del estudio de sus diferentes representaciones y el tránsito entre ellas. Se plantea la premisa de que los objetos matemáticos no son tangibles, ni accesibles a la percepción, por lo que tenemos acceso a ellos mediante sus representaciones semióticas (Duval, 2004). Entre los conceptos claves en la teoría se encuentran: representación, tratamiento y conversión. La representación, en palabras de Llinares (1994) es un concepto complejo de definir, podría ser "una escritura, una notación, un símbolo representando un objeto matemático, las figuras geométricas, son ejemplos de representaciones" (Kaput, 1987).

Por otro lado, Duval (2006; 2004) define transformaciones en las representaciones semióticas: tratamiento y conversión. El tratamiento refiere a transformaciones realizadas en el mismo sistema semiótico. La conversión es una transformación que se realiza "cambiando el sistema semiótico (el registro) usado sin cambiar los objetos indicados" (Duval, 2006). La conversión genera más dificultades, pues es un proceso más complejo que el tratamiento. Aquí nace la importancia de adentrarse en estas transformaciones que se generan al realizar actividades.

Un aspecto relevante es que no existe noesis sin semiosis, es decir, se requiere de las representaciones semióticas para la aprehensión de los objetos. En este sentido, el autor menciona que es necesario que los estudiantes tengan un bagaje en los diferentes registros, aprender solo uno podría generar la creencia de que el objeto es su representación, por ejemplo, que una función es una tabla. Finalmente, dado que se trabajará con este marco teórico, se muestran sus registros de representación:

Tabla 1

Registros de representación semiótica en la función afín

<table>
<tr><th>Registro algebraico</th><th>Registro gráfico</th><th>Registro figural</th><th>Registro tabular</th></tr>
<tr><td>$f(x) = 2x - 1$</td><td></td><td>
$Dom(f) = \mathbb{R}; Rec\ (f) = \mathbb{R}$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$f(x) = 2x - 1$</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$</td><td>-1</td></tr><tr><td>0,5</td><td>$f(0{,}5) = 0$</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
</table>

Nota: En los registros figural y tabular se presentan ejemplos, se ha agregado dominio y recorrido de la función para evitar confusiones entre lo discreto y continuo

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

La propuesta se enmarca en la comprensión de la función afín. Mediante la actividad se desea promover el uso de diferentes registros de representación semiótica para trabajar con funciones afines.

La clase posee en su inicio una lectura de las instrucciones, junto a ello, una introducción a GeoGebra. Posterior a eso, se les indica que pueden trabajar con el graficador de GeoGebra para resolver.

Figura 1

Parte 1 de la actividad

Figura 2

Parte 2 de la actividad

Fase 2:

Fabrizio, trabajador de una pizzería de Valparaíso, dice que en algunos casos conviene más comprar en una pizzería que en la otra, ¿está en lo correcto?,

Un estudiante de otro octavo básico dice que existen varios métodos para responder estas preguntas, ¿esta afirmación es verdadera?, ¿cuáles serían estos métodos? Justifica.

Luego, comienza la fase individual, donde utilizando los recursos que consideren pertinentes, los estudiantes responden a la pregunta que aparece en la Figura 1. Esto les permitirá acercarse a la representación algebraica, es decir, descubrir que existe un valor que es fijo, independiente del número de pizzas que se pida, o bien, del número de personas que integren la familia. Así, la primera actividad está relacionada a que puedan usar el resgistro numeral.

En la tercera parte de la actividad, se entrega la segunda hoja a los estudiantes y se les recomienda utilizar GeoGebra para su realización. En esta parte deben evaluar y argumentar la veracidad de una afirmaciones que se indican en la figura 2. Con esta actividad se busca que los estudiantes utilicen algún registro de representación semiótica para representar las funciones lineales asociadas.

La última parte de la actividad tiene como finalidad que el estudiante pueda cuestionar su estrategia y pensar en otros posibles caminos, eso serviría para reconocer que existe algún error.

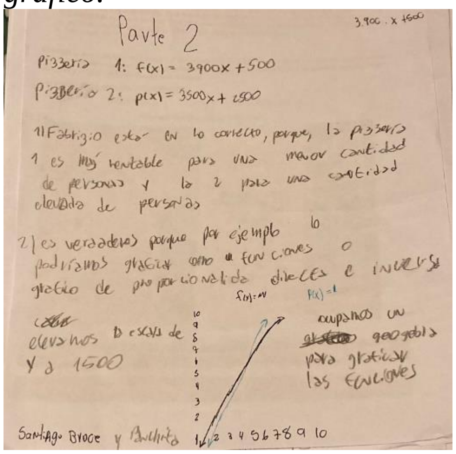
RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN

Uno de los hallazgos que coinciden con la literatura es la predominancia de los procesos algorítmicos de cálculo en la primera parte, sin llegar a una función como tal. En torno al registro algebraico, existieron problemáticas en la conversión desde lo numérico a lo algebraico, pues, aunque se observaba que existía un valor fijo, los estudiantes generaban variaciones, esto proviene, en algunos casos, de la falta de análisis de las expresiones, o bien, porque los estudiantes solo calcularon 1 o 2 casos, lo que no les permitió hallar regularidades. En los tratamientos en el registro algebraico, existieron problemáticas para hallar la variable.

Existe una diferencia entre los desarrollos de los estudiantes que han utilizado GeoGebra. Cabe señalar que algunos no tenían experiencia en este, por lo que no lo utilizaron. Al momento de intentar abordar otro registro de representación, los estudiantes presentaron sus respuestas de diferentes formas, e incluso, algunos de acuerdo con vagos recuerdos de las clases, indicaron que se podía realizar una gráfica. Uno de los grupos escoge utilizar GeoGebra, dado que ya tenían las funciones y sabían que para 5 pizzas no importaba en qué pizzería se comprara, por lo que, con el uso de GeoGebra y las preguntas de devolución, comprendieron que inicialmente conviene una de ellas, sin embargo, luego de este punto en común, se invierten los papeles y esto se aprecia cuando una de las rectas ahora estás más arriba que la otra en el plano, siendo que inicialmente no era así:

Figura 3

Grupo de estudiantes modela las funciones afines utilizando registro algebraico, tabular y gráfico.



CONCLUSIONES

Se evidencia lo que investigaciones como la de (López y Sosa, 2008) señalan, pues existe una predominancia de los procesos algorítmicos de cálculo y de representaciones algebraicas. El uso del registro algebraico sin apoyo se software educativo ha demostrado ser más complejo en términos de tratamientos internos. El uso de GeoGebra potenció los tratamientos en el registro gráfico y otorgó una forma más rápida de tomar la decisión.

En torno a las proyecciones, la segunda actividad debe ser potenciada y guiada hacia el uso de GeoGebra. Emerge la necesidad de la generación de una secuencia didáctica que comience con familiarizar a los y las estudiantes con el uso de GeoGebra, para que sea utilizada. Se plantea como algo sumamente necesario replantear algunas preguntas, ya que las que apuntaban hacia la metacognición deben ser más específicas, y también las que se señalan en la guía, por ejemplo, se podría agregar: ¿Para cuántas personas da lo mismo una pizzería que la otra?

REFERENCIAS

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cuevas, A. y Díaz J. (2014). La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función. *El Cálculo y su Enseñanza*, 5(5). Cinvestav-IPN (México).

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (Segunda ed.).* Peter-Lang.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.

Kaput, J. (1987) Representation Systems and Mathematics. In Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*, 19-26. Hillsdale.

Klein, F. (2006). *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* (Trad. J. Fernández). Nivola. (Obra original publicada en 1926).

Llinares, S. (1994) Los aprendices y las matemáticas. En Santaló et al., La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia, 183-225. Rialp.

López, J. y Sosa L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 308-318. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

MINEDUC (2016). *Programa de estudio octavo básico. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18983_programa.pdf*

MINEDUC (2021). *Un recorrido por las habilidades para el siglo XXI.* https://www.curriculumnacional.cl/portal/Innovacion/Desarrollo-docente/86740:Un-recorrido-por-las-habilidadespara-el-siglo-XXI

DESARROLLO DE LA ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA EN FUTUROS PROFESORES A TRAVÉS DE R Y RSTUDIO

Jocelyn D. Pallauta, jocelyn.diaz@ulagos.cl, Universidad de Los Lagos

Ingrid Jácome, ingrid.jacomeanaya@ulagos.cl, Universidad de Los Lagos

Abstract:

Se presenta la implementación de un taller formativo cuyo objetivo es desarrollar la alfabetización estadística incorporando el uso de tecnología en un grupo de profesores y profesoras de matemáticas en formación de una universidad chilena. En la experiencia participaron 28 estudiantes de pedagogía en matemáticas que cursaban su quinto y noveno semestre de la carrera. El taller se centró en el análisis cuantitativo de los datos por medio *del uso de los programas R y RStudio. Durante la experiencia, los participantes desarrollaron habilidades en el manejo de estas herramientas tecnológicas, junto con explorar cómo integrar estos conocimientos en su futura labor docente para mejorar la enseñanza de la estadística. Los principales resultados reflejan que los participantes pudieron construir representaciones, calcular estadísticos e interpretarlos considerando el contexto de los datos. Esta experiencia destaca la importancia de incorporar el uso de tecnologías en la formación del profesorado, pues permite desarrollar una alfabetización estadística, junto con ofrecer herramientas que promuevan la implementación de enfoques más efectivos en sus aulas, contribuyendo así al fortalecimiento de la enseñanza de la estadística en un contexto actual en el que abundan los datos.*

Alfabetización estadística, profesores en formación, tecnología

INTRODUCCIÓN

En la sociedad actual los ciudadanos requieren interpretar y comprender variada información para tomar decisiones basadas en conceptos estadísticos. Esto requiere de una alfabetización estadística que esté en sintonía con las demandas actuales, promoviendo una mejor comprensión de temas complejos y una participación activa en la sociedad y las políticas públicas (Gal, 2002). En este sentido, la enseñanza de la estadística y la probabilidad ha cobrado especial importancia en la formación de la ciudadanía para que pueda desenvolverse exitosamente en la sociedad actual.

Directrices curriculares como las Pautas para la Evaluación e Instrucción en Educación Estadística GAISE II (Bargagliotti et al, 2020), proponen recomendaciones para la enseñanza de la estadística y la probabilidad, centrando la atención en el análisis y sentido de los datos considerando: la formulación de preguntas de investigación que promuevan la recolección y análisis de los datos; variados tipos de variables para planificar adecuadamente el proceso de recolección de los datos; incorporar el pensamiento multivariante en todos los niveles educativos; destacar la importancia de la probabilidad para cuantificar la incertidumbre; integrar la tecnología en la enseñanza de la estadística; y centrar la evaluación en la comprensión de conceptos para desarrollar el razonamiento estadístico. En esta línea, GAISE II destaca que "la práctica estadística moderna es inseparable de la tecnología y muchas herramientas de software y aplicaciones están disponibles gratuitamente para mejorar la comprensión de los estudiantes, por lo que se recomienda adoptar la tecnología en la mayor medida posible" (Bargagliotti et al., 2020, p.73). Así el objetivo de esta experiencia de enseñanza es desarrollar la alfabetización estadística incorporando el uso de tecnología en un grupo de profesores y profesoras de matemáticas en formación de una universidad chilena.

FUNDAMENTOS

Alfabetización estadística

La sociedad actual, en la que abundan los datos, requiere que los ciudadanos cuenten con una alfabetización estadística para tomar decisiones informadas en los diferentes ámbitos de su vida. En este sentido, las estadísticas deberían guiar dichas decisiones en lugar de los sentimientos o las creencias personales (Shrama, 2017).

La alfabetización estadística, de acuerdo a Gal (2002), implica la capacidad de interpretar y evaluar críticamente la información estadística considerando el contexto, plantear argumentos basados en los datos y discutir o comunicar la información estadística. El desarrollo de la alfabetización estadística abarca habilidades para interpretar información estadística y comprender la probabilidad como una medida de incertidumbre, así como la capacidad de organizar y representar datos por medio de diferentes representaciones. Para lograrlo, es necesario comprender conceptos, vocabulario y símbolos (Ben-Zvi y Garfield, 2004). En este sentido, los estudiantes en el aula deberían desarrollar la capacidad de interpretar los resultados de estudios, formular preguntas críticas a partir de ellos junto con comunicar sus respuestas.

Por otra parte, Wild y Pfannkuch (1999) proponen un modelo para la enseñanza de la estadística denominado ciclo PPDAC (problema, plan, datos, análisis y conclusión) que incluye cuatro dimensiones: un ciclo de investigación, tipos de pensamiento, un ciclo interrogativo y disposiciones. Dichos autores identifican cinco elementos principales del pensamiento estadístico: la transnumeración de datos, la comprensión de la variación, el uso de modelos estadísticos, y la interpretación de los estadísticos de acuerdo al contexto. Además, describen ciclos interrogativos que guían la reflexión durante el análisis de los datos, y las disposiciones necesarias para resolver problemas estadísticos. Aunque las dimensiones no son jerárquicas ni lineales, los ciclos de investigación e interrogación siguen un orden secuencial.

Rol de la tecnología

La incorporación de la tecnología en la enseñanza de la Estadística ha facilitado el cálculo y la enseñanza experimental de conceptos a través de simuladores. Autores como Biehler et al. (2013) recomiendan su uso, dado que facilita la visualización de los datos junto con promover la comprensión de conceptos estadísticos. Actualmente se cuenta con una variedad de programas especializados como herramienta para la enseñanza de la estadística con diferentes características, y que son utilizados para el análisis de los datos (p. ej. R y RStudio, Python, SPSS). En esta experiencia de enseñanza, siguiendo las recomendaciones e GAISE II, se optó por R porque es gratuito, ampliamente utilizado y permite desarrollar habilidades de gestión de datos de manera flexible y eficaz (Gould, 2005). Asimismo, R facilita el análisis y visualización un gran número de datos, contribuyendo en el desarrollo de la alfabetización estadística (Chance et al., 2007).

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

En la experiencia participaron 28 estudiantes de pedagogía en matemáticas que cursaban quinto y noveno semestre de una universidad del sur de Chile. Los futuros profesores habían realizado, al menos, un curso de estadística y probabilidad. El diseño de la experiencia consideró algunos aspectos del informe GAISE II (Bargagliotti, 2020), y el ciclo PPDAC (problema, plan, datos, análisis, conclusión) de Wild y Pfannkuch (1999), para facilitar la enseñanza de la estadística. La experiencia tuvo una duración de cuatro horas, fue dirigida por los autores y comprendió tres momentos: a) Presentación de R junto a sus principales funciones; b) Se propuso una base de datos del contexto educativo (asistencia, notas, etc.), cercana para los participantes, para reforzar la interpretación de conceptos estadísticos básicos a través de R; c) Se planteó a los participantes realizar un pequeño estudio estadístico, en grupos de 4 personas, utilizando R para analizar otra base de datos sobre las características de un conjunto de animales, la cual consideraba diferentes tipos de variables (tipo de animal, peso, alimentación, altura, esperanza de vida, entre otros).

RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN

Figura 1

Producciones de los participantes

Dado el tiempo limitado de la experiencia se describirán algunas fases el ciclo PPDAC (Wild y Pfannkuch, 1999) que se pudieron desarrollar. En la fase del problema, los participantes plantearon variadas preguntas de investigación de acuerdo a la base de datos, siendo la más frecuente: ¿Existe alguna relación entre el tipo de alimentación y la esperanza de vida de los animales? Para la fase de análisis los futuros profesores utilizaron variados tipos de representación de datos. Por ejemplo, en la Figura 1 (izquierda) el boxplot presenta la esperanza de vida según la dieta de los animales, evidenciando cómo los participantes pudieron visualizar la variación en los datos y hacer interpretaciones basadas en patrones observados. Recogiendo lo planteado por Gal (2002), sobre la necesidad de desarrollar habilidades para organizar y representar datos, comprendiendo los conceptos subyacentes. Otros participantes optaron por utilizar resúmenes estadísticos para analizar las variables numéricas de la base de datos (Figura 1, derecha). De este modo, se da cuenta de cómo la tecnología facilita la representación y análisis de datos complejos, permitiendo a los participantes organizar la información de manera eficaz (Bargagliotti, 2020).

Las principales conclusiones, de acuerdo a los datos proporcionados, se centraron en que los animales herbívoros tenían una mayor esperanza de vida en comparación con los carnívoros y omnívoros, evidenciando la capacidad de plantear argumentos basados en los datos.

CONCLUSIONES

En una sociedad donde los datos son omnipresentes (Shrama, 2017), es importante que los profesores cuenten con una alfabetización estadística que les permita guiar de manera pertinente la enseñanza de la estadística de sus estudiantes. Esta experiencia de aula fue diseñada considerando aspectos del informe GAISE II (Bargagliotti, 2020), como es el análisis de diferentes tipos de variables y la incorporación del uso de herramientas tecnológicas, en este caso R y RStudio. Asimismo, se recoge parcialmente el ciclo PPDAC (problema, plan, datos, análisis, conclusión) de Wild y Pfannkuch (1999) para la enseñanza de la estadística a través de proyectos. Los principales resultados sugieren que los futuros profesores que participaron en la experiencia están desarrollando las habilidades para analizar e interpretar información estadística. Aunque se requiere seguir trabajando estas habilidades en la formación incial docente, a través del uso de herramientas tecnológicas como R, para que el profesorado pueda enfrentar eficazmente los desafíos de la enseñanza de la estadística.

Agradecimientos: Fondo de enlace RED2199, proyecto fortalecimiento de la investigación y la formación avanzada en educación en el sistema de universidades estatales RED 21995, PFUE 2021.

REFERENCIAS

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J. y Medina, E. (2007). The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics. *Technology Innovations in Statistics Education, 1*(1). http://dx.doi.org/10.5070/T511000026

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II) A Framework for Statistics and Data Science Education*. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (ed.), *The Challenge of Devoloping Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 3-16). Springer.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2013). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. En M. A. Clements et al. (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643-689). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_21.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review, 70*(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Gould, R. (2005). Using R for Introductory Statistics. *Journal of Statistical Software, 14*(7), 1-3.

Sharma, S. (2017). Definitions and models of statistical literacy: a literature review. *Open Review of Educational Research*, *4*(1), 118–133. https://doi.org/10.1080/23265507.2017.1354313

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical inquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223–265.

DESCUBRIENDO LA DISTRIBUCIÓN NORMAL: UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE ESTADÍSTICA EN CONTEXTO PROFESIONAL

Melanie Cubillos D., Universidad Católica Silva Henríquez

Álvaro Figueroa L., Universidad de Santiago de Chile

Abstract:

La siguiente propuesta está enfocada en que estudiantes de medicina veterinaria reconozcan elementos característicos de la Distribución Normal a través del análisis de datos en un contexto real, por medio de la modelación intuitiva utilizando herramientas tecnológicas, durante el análisis de datos se pretende determinar la media como el punto máximo de la distribución y la simetría de la distribución alrededor del promedio, relación entre las medidas de tendencia central y analizar los cambios en el área de la distribución, entre otros elementos. Se busca reconocer la importancia del contexto al momento de desarrollar habilidades estadísticas que brindan la oportunidad de confeccionar argumentos sustentados en la evidencia que entrega la información, desarrollando a su vez una visión crítica de las afirmaciones que surgen de la observación de datos, puesto que en contextos universitarios el concepto de Distribución Normal tiende a enfocarse solo en resolver situaciones problemáticas de forma mecánica y no en el análisis de esta.

Distribución Normal, Matemática Realista, Bioestadística, Contexto.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la enseñanza de la estadística ha cobrado gran importancia puesto que proporciona herramientas para comprender diversos fenómenos científicos y sociales (Batanero y Borovcnik, 2016). En línea con lo anterior, Contreras y Molina (2019), mencionan la importancia del desarrollo de habilidades matemáticas/estadísticas, ya que permiten la construcción de argumentos sólidos basados en evidencia y desarrollar una visión crítica de afirmaciones a partir de la observación de datos. La importancia del desarrollo de habilidades estadísticas ha generado la creación de asignaturas estadísticas en diversas carreras universitarias, específicamente, las carreras del área de la salud y ciencias biológicas presentan la asignatura de Bioestadística. En esta línea, Rodríguez et all., (2020), indica que los problemas en bioestadística deben enfocarse a la argumentación y toma de decisiones.

Uno de los elementos fundamentales de la estadística es la Distribución Normal, que según Lemus y Huincahue (2019) permite modelar diversas características de la sociedad y la ciencia. Este modelo ha permitido importantes avances en el análisis del comportamiento de datos, especialmente en las ciencias médicas y biológicas, donde las variables involucradas suelen seguir una distribución aproximadamente normal (Torres et al., 2004, citado por Pino et al., 2020).

Dentro de contextos universitarios el concepto de Distribución Normal es presentado como un producto acabado de la actividad matemática y se enfocan tan solo en resolver situaciones problemáticas de forma mecánica (Calandra, 2020). En cambio, González, Ojeda & Palacios (2018) proponen la enseñanza de la Distribución Normal a partir del análisis de datos, asimismo, Alsina y Annexa (2021) proponen que el uso de contextos reales es fundamental al momento de la enseñanza de las matemáticas, específicamente de la estadística. En línea con esta idea, Batanero y Díaz (2011) recomiendan que la enseñanza de la estadística debe enfocarse en la comprensión, integrando datos reales y contextos significativos para los estudiantes, promoviendo el aprendizaje activo y significativo apoyado en el uso de tecnología para la exploración y análisis de datos.

En este contexto, se plantea una propuesta de aula para la enseñanza de la Distribución Normal en un curso de Bioestadística para Medicina Veterinaria con el objetivo de que las y los estudiantes logren reconocer el comportamiento normal de un conjunto de datos reales y modelar esta situación para generar recomendaciones, y a través del razonamiento crítico, tomar decisiones donde la variabilidad forma parte del contexto.

PROPUESTA DIDACTICA

Contexto: Análisis de una base de datos de los pesos de perros de la raza Basset Hound, que fueron participes de un estudio propuesto por una serie de veterinarias municipales de la región metropolitana.
Habilidad General: Reconocer elementos característicos y distintivos de la Distribución Normal a través del análisis de datos de un contexto real utilizando herramientas tecnológicas.
Habilidades Especificas: Construye histograma de las frecuencias relativas utilizando herramientas tecnológicas; Determina elementos importantes a través del análisis gráfico y descriptivo de los datos utilizando herramientas tecnológicas; Relaciona el histograma de frecuencias relativas con su respectiva modelación a partir de la función de densidad Normal.

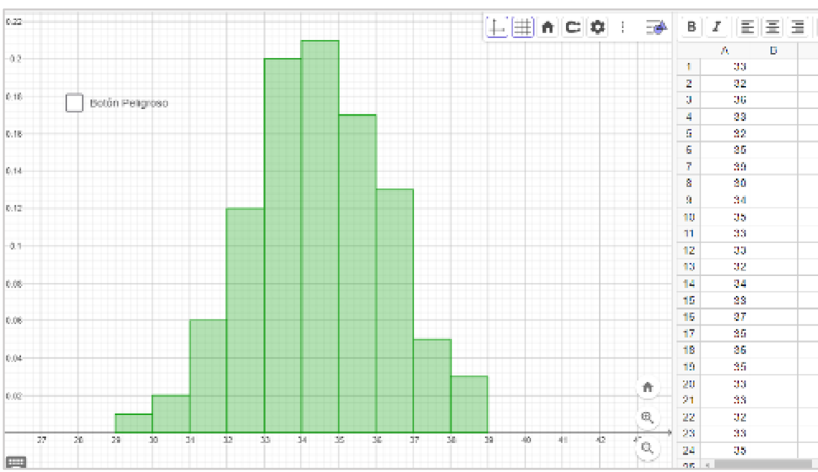
SECUENCIA DIDÁCTICA

Se inicia la secuencia didáctica con una guía de trabajo, la cual comienza exponiendo a modo de contexto el artículo titulado: “Obesidad y sobrepeso en el Basset Hound: guía práctica”, dicha noticia menciona los problemas de salud que se asocian al sobrepeso en la raza de perros Basset Hound y determina un rango de pesos saludable para los perros de dicha raza. Los estudiantes trabajaran con la información presentada en el artículo y una base de datos que busca presentar un estudio realizado por veterinarias municipales de comunas del sector norte de la región metropolitana respecto del peso de 100 perros machos adultos de la raza Basset Hound. Se busca presentar una situación real y cercana al grupo objetivo de estudiantes, para dar sentido al proceso de aprendizaje (Batanero y Díaz, 2011).

La primera sección apunta a la utilizar herramientas tecnológicas para la construcción de histogramas en base a frecuencias relativas. La información entregada en la hoja de cálculo, exportando su contenido a GeoGebra para generar un histograma por medio de la herramienta *Análisis de una variable,* para finalizar esta sección los estudiantes exportaran el gráfico construido (Figura 1) a la vista gráfica de GeoGebra para comenzar con el análisis de la información. Como recuso de trabajo se entregó un documento GeoGebra prediseñado con la escala adaptada y la hoja de cálculo.

Figura 1

Vista Inicial de GeoGebra



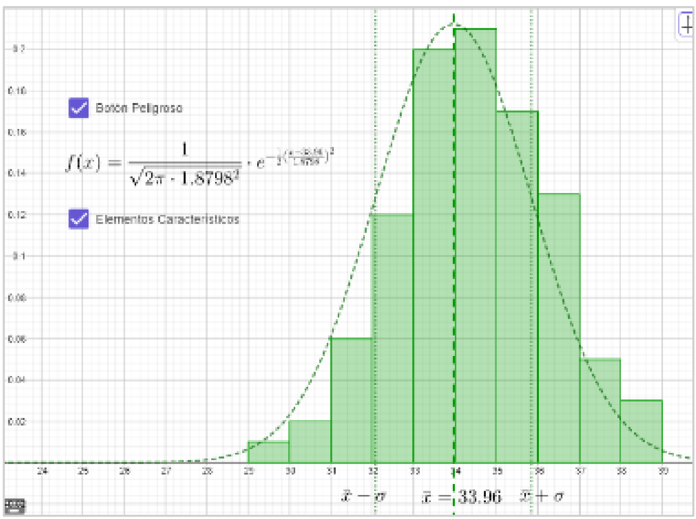
Fuente: Elaboracion propia, 2023

La segunda sección se centra en el análisis gráfico y descriptivo del histograma. Guiados por preguntas de dificultad creciente las y los estudiantes identificarán características de la distribución de los datos y que serán relacionadas a las características de la Distribución Normal, como la concentración de datos, la media, la moda, la mediana, la desviación estándar, la simetría, la disminución del área en las colas de la distribución, el punto máximo de la distribución y los cambios de concavidad. También evaluarán cómo cambian los datos en la gráfica, la relación entre el contexto y la base de datos, y tomarán decisiones basadas en la información observada. Este enfoque busca mejorar la comprensión estadística y promover una argumentación sólida (Tauber, 2001).

La tercera sección busca, desde la intuición y por medio de la conexión de conclusiones previas, que los y las estudiantes generen una transición a la representación de la Distribución Normal. Para lograr la transición se espera que identifiquen la representatividad de la muestra y limitaciones de la misma, respeto de la información presentada por el artículo, por otra parte, que generen un boceto de grafica que contenga a las frecuencias, comparando finalmente este esbozo con la gráfica que podrán visualizar al cliquear en una casilla que estará presente en el archivo GeoGebra con el cual trabajaran durante la secuencia didáctica (Figura 2).

Figura 2

Vista GeoGebra con casillas activas



Fuente: Elaboración propia, 2023

Se busca que con este último paso los y las estudiantes puedan terminar de reconocer elementos característicos de la Distribución Normal (a través del análisis de datos de un contexto real), tales como: centro de la distribución, forma de la distribución, área acumulada, simetría con respecto al centro y desviación estándar. Para finalizar presentando la definición de la Distribución Normal por medio de los procesos anteriores.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Esta propuesta de enseñanza busca que los y las estudiantes de medicina veterinaria reconozcan elementos característicos de la Distribución Normal mediante el análisis de datos de un contexto real y la modelación utilizando herramientas tecnológicas. A partir de la implementación de la propuesta se evidenciaron deficiencias respecto a los conocimientos previos, por lo tanto, durante la aplicación se trabajó desde el análisis intuitivo. Por esta razón, al momento de reconocer elementos como la media aritmética y la desviación estándar, las y los estudiantes lograron resignificar y comprender estos elementos desde el análisis crítico de la información. A su vez, esta compresión permitió construir, a través de reflexiones grupales, una curva que modelara la situación planteada, reconociendo la Distribución Normal como un elemento importante dentro del conocimiento estadístico y profesional. Dicho modelo, además, les permitió generar recomendaciones y tomar decisiones pertinentes al contexto trabajado.

Finalmente, las y los estudiantes valoraron este tipo de propuestas, pues comentaron el uso de tecnología que permita visualizar y trabajar los datos, además del foco en trabajar con un contexto cercano les provocaba motivación y sentido a elementos que en un principio parecían ajenos y alejados, pero con esta actividad tomaron un significado en su formación profesional.

Referencias

Alsina, Á., y Annexa, E. (2021). Estadística en contexto: desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. Tangram - Revista de Educación Matemática, 4, 71-98. https://doi.org/10.30612/tangram.v4i2.14396

Alvarado, H., y Batanero, C. (2008). Significado del Teorema Central del Límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. Estudios pedagógicos, 34(2). https://doi.org/10.4067/s0718-07052008000200001

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). Statistics and probability in high school. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-624-8

Batanero, C y Díaz, C. (Eds.) (2011). Estadística con proyectos. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf

Calandra, M., y Costa, V. (2020). Estrategia de Enseñanza de la distribución normal enmarcada en la Pedagogía de la Investigación Eje 4. ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/343167105_Estrategia_de_ensenanza_de_la_distribucion_Normal_enmarcada_en_la_pedagogia_de_la_investigacion_Eje_4_INNOVACIONES_Relato_de_experiencia_pedagogica

Contreras, J. M. y Molina-Portillo, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística. www.ugr.es/local/fqm126/civeest.htm

González, Y., Ojeda, A. M., y Palacios, J. (2018). Comprensión de profesores de la distribución normal. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (2.ª ed., Vol. 31, pp. 1764-1772). Sema, L. y Páges, D. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/comprension-de-profesores-de-la-distribucion-normal/

Lemus, N., y Huincahue, J. (2020). Distribución normal: análisis histórico-epistemológico e implicaciones didácticas. *UCMaule*, *56*, 29-57. https://doi.org/10.29035/ucmaule.56.29

Pino, J., Ávila, R., Expósito, M., y Domínguez, D. (2020). La distribución normal en ciencias biomédicas: un enfoque a partir de las distribuciones de Pearson: Distribución normal y distribuciones de Pearson. *Revista Científica Sinapsis*, *1*(16). https://doi.org/10.37117/s.v1i16.351

Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L. Vásquez, C. y Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. NÚMEROS, Revista de Didáctica de la Matemática, 104, 217-238. http://funes.uniandes.edu.co/23560/

Tauber, L. (2002). La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/tauber_dnormal.pdf

PROPUESTA DE ENSEÑANZA ¿EL JUEGO ES JUSTO?, ENFRENTANDO LOS SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD.

Daniela Cortés Fredes, Colegio Francisco de Miranda de Quillota

Eduardo Fernández Tapia , Colegio Francisco de Miranda de Quillota

Abstract:
El presente trabajo trata de comprender cómo estudiantes de octavo año de enseñanza básica comprenden la regla de Laplace a partir de un contraste entre la probabilidad intuitiva, frecuencial y teórica. Para ello, se diseñó una actividad de aprendizaje basado en la TSD de Brousseau, considerando aspectos históricos-epistemológicos de la probabilidad y los objetivos de aprendizaje del currículo chileno. A partir de la implementación se observa que los estudiantes manifiestan un paso y una articulación entre los significados intuitivos y frecuentistas de la probabilidad, dando paso a una formalización del objeto apoyado en el significado Laplaciano.

Introducción
La probabilidad se ha encontrado presente en la vida de los humanos y en la construcción de su conocimiento desde siglos atrás. Elementos asociados a hechos de incertidumbre, decisiones frente a situaciones que surgen en el diario vivir o simplemente enfrentar un juego implican que las personas adquieran un conocimiento de razonamiento probabilístico (Batanero, Gea & Alvarez, 2023), lo que ha provocado su enseñanza sea tomado con mayor consideración, y a su vez, ha permitido poder identificar elementos que son relevantes de considerar al momento de abordarla.

En la educación chilena actualmente existe un trabajo desde una priorización curricular (2023 - 2025) debido a los efectos de periodos de suspensión prolongada de clases. Allí se realiza la diferenciación de objetivos de aprendizaje en basales y complementarios donde define a los primeros como " aprendizajes que son "base" o "fundamento" para el desarrollo de trayectorias formativas… contienen conocimientos claves…"(MINEDUC, 2023, p. 3). Considerando dicho documento se evidencia que desde los primeros años de enseñanza los estudiantes se relacionan con situaciones de experimentos aleatorios (EA) 2° básico con monedas y dados, luego existe un salto hasta 5° Básico donde deben describir en palabras la posibilidad de ocurrencia de un evento en un EA, en 6° conjeturan acerca de la tendencia de resultados de EA con dados y monedas, para posteriormente en 7° explicar probabilidad de eventos considerando su estimación, su frecuencia relativa y relacionándola con su fracción OA 18. Podemos vislumbrar que existe un vacío de objetivos relacionados a probabilidad de 3 años en la priorización, lo cual provoca una desconexión y comienza de forma tardía los contenidos lo que va en contra de las actualizaciones curriculares que se han realizado en diversos países tal como lo evidencia Hernández, Gea, Batanero y Álvarez. (2023).

Ahora, como es sabido, el desarrollo histórico de los objetos matemáticos ha sido un proceso constante, donde soluciones a situaciones y concepciones de propiedades que en un momento fueron aceptadas válidas posteriormente son cuestionadas o profundizadas a medida que el conocimiento se va desarrollando. Esto es un elemento que consideramos en el trabajo, centrándonos en los significados históricos de la probabilidad y tratando de que los estudiantes puedan contrarrestar sus creencias basadas en el significado intuitivo de la probabilidad con lo experimental y lo teórico tal como lo menciona Batanero, Gea & Álvarez (2023) dentro de los componentes para desarrollar el razonamiento probabilístico.

A partir de lo anterior nos surge la interrogante, ¿Cómo los estudiantes transitan por los distintos significados de probabilidad a partir de una simulación de un experimento aleatorio?

Elementos teóricos.

Para la construcción de la actividad se consideraron distintos significados de la probabilidad, ya que, según Batanero, Gea & Álvarez (2023) y Alvarado, Estrella, Retamal & Galindo, (2018) mencionan la importancia de presentar situaciones en donde se vean enfrentados los significados para promover las competencias probabilísticas

Batanero (2005) define el *Significado intuitivo* como el grado de creencia personal, se utilizan frases coloquiales para expresar la posibilidad de ocurrencia. *Significado Laplaciano*, probabilidad como cociente entre casos favorables y casos totales de un espacio muestral finito y con sucesos elementales equiprobables. *Significado Frecuencial*, basado en el empirismo, corresponde a la frecuencia relativa de un experimento, la que se acerca al valor de la probabilidad teórica.

Para la actividad se consideró la TSD de Brousseau, donde se centra en cómo los estudiantes adquieren conocimiento a partir de situaciones construidas intencionalmente por el profesor (Brousseau, 2007), para ello se consideró las fases de una situación didáctica, la situación de *acción,* donde los estudiantes interactúan con el medio desarrollando un determinado saber. *formulación,* los estudiantes en grupo comienzan a interactuar sobre sus conjeturas e hipótesis. *validación*, los estudiantes confrontan sus resultados emitiendo juicios y aceptando o rechazando lo expuesto y finalmente la fase de *institucionalización,* corresponde al cierre de la situación donde se retoma lo realizado y se formaliza convirtiéndose en un saber matemático formal.

Descripción de la propuesta

Se consideró el OA 18 de 7mo básico "Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo: Estimándolas de manera intuitiva. Utilizando frecuencias relativas. Relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje."

Se consideraron 3 sesiones de 30 min, en la primera se presenta un juego, con el objetivo de enfrentar los significados intuitivo y frecuencial de la probabilidad.

Considere dos jugadores, el jugador A y el jugador B. El juego consiste en 20 turnos, donde se lanzan dos dados de seis caras y se suman los valores obtenidos en la cara superior. El jugador A gana 1 punto si la suma obtenida es 2, 3, 4, 10, 11 y 12 mientras que el jugador B gana 1 punto cuando la suma obtenida es 1, 5, 6, 7, 8 y 9. Al finalizar los 20 turnos quien tenga mayor puntaje gana ¿Quién crees tú que va a ganar? ¿Por qué?
- Ahora en parejas jueguen y vean si sus creencias eran ciertas. (registren sus resultados)

Una vez que los estudiantes realizan el juego se consideran los resultados de todas las parejas para generar una tabla y realizar un acercamiento a la probabilidad frecuencial

En la sesión 2 se solicita que vuelvan a jugar considerando 50 partidas utilizando un applet (https://www.geogebra.org/classic/hmydh5tp) , luego se realiza una tabla con todos los resultados para posteriormente solicitar dar respuesta a *¿Cómo podemos evidenciar que el jugador B tiene ventaja por sobre el jugador A?*

Finalmente, en la sesión 3 se les solicita a los estudiantes que en conjunto se expongan las producciones realizadas y compartan sus argumentos a la pregunta realizada, para finalmente institucionalizar el concepto de regla de Laplace.

Cabe destacar que la actividad seleccionada corresponde a una adaptación de la realizada por Parraguez, Gea, Díaz y Batanero (2016)

Metodología e Implementación

El estudio realizado es de carácter cualitativo, con un foco interpretativo considerando elementos propuestos por la TSD. La implementación se llevó a cabo en un colegio particular subvencionado de la comuna de Quillota, donde los sujetos de estudio fueron 8 estudiantes de octavo básico (12-13 años) los cuales trabajaron en duplas (G1, G2, G3 y G4). La selección de los estudiantes fue considerando su responsabilidad académica, su interés en participar y la accesibilidad. El nivel se seleccionó debido a que los estudiantes no presentan instrucción previa sobre regla de Laplace ni cálculo de probabilidades, ya que el año anterior no fueron trabajados en la asignatura.

Los métodos de recolección de datos son los registros escritos realizados por las duplas de estudiantes, de los cuales se considerarán aquellos que evidencian una mayor riqueza en cuanto a información para ser analizada, tanto de aspectos matemáticos como argumentativos.

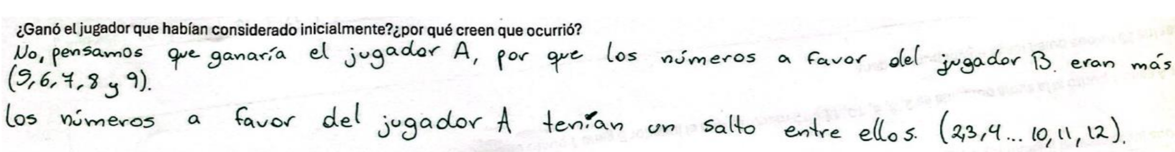
Para el análisis de los datos se considera lo realizado en cada una de las sesiones con foco en las fases de la TSD, principalmente en las fases de *acción y formulación* y por otro lado identificando que tipo de significado de probabilidad se evidenciaba.

Se espera que en la fase de *Acción,* los estudiantes interactúen con el medio (juego) y presenten una postura inicial evidenciando un significado intuitivo. En la fase de *Formulación, e*stablezcan hipótesis para argumentar su postura a partir de sus interacciones considerando el significado frecuencial apoyándose en el simulador y/o clásico considerando los elementos del espacio muestral. En la fase de *Validación*, los estudiantes deberán presentar sus posturas y cuestionar las desarrolladas por sus pares y finalmente la fase de *Institucionalización* donde se espera a partir de lo trabajado considerando los distintos significados, lograr formalizar la regla de Laplace.

Resultados y conclusiones.

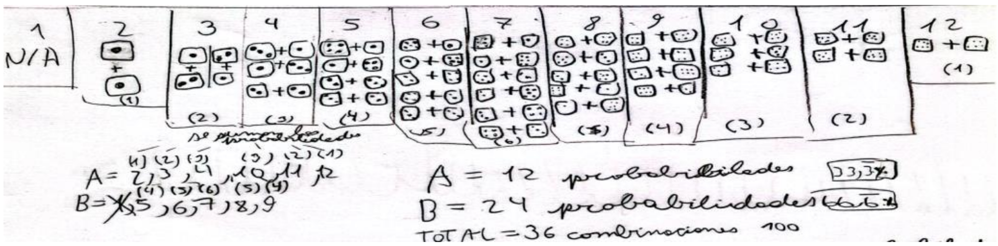
La primera parte de la sesión 1 se basó en que los estudiantes de manera individual presentarán su creencia sobre el jugador ganador. 6 de los 8 estudiantes indican que el jugador B tiene más opciones de ganar, fundamentando en experiencias previas como que al lanzar dos dados sus números son más comunes de salir, uno de ellos establece todas las combinaciones para poder dar respuesta en base al espacio muestral, mientras que los otros dos estudiantes argumentan que será el jugador A dado que B tiene el 1 lo cual es imposible. En el trabajo en duplas un grupo que contestó que ganaría el jugador A se enfrentó a que al momento de jugar ganaba el jugador B, argumentando su decisión por la cercanía entre los números presentes, la Figura 1. En esta sesión 1 se evidencia la fase de acción dada la interacción de los estudiantes con el medio.

Figura 1


¿Ganó el jugador que habían considerado inicialmente?¿por qué creen que ocurrió?
No, pensamos que ganaría el jugador A, por que los números a favor del jugador B eran más (5,6,7,8 y 9).
los números a favor del jugador A tenían un salto entre ellos. (2,3,4... 10,11,12).

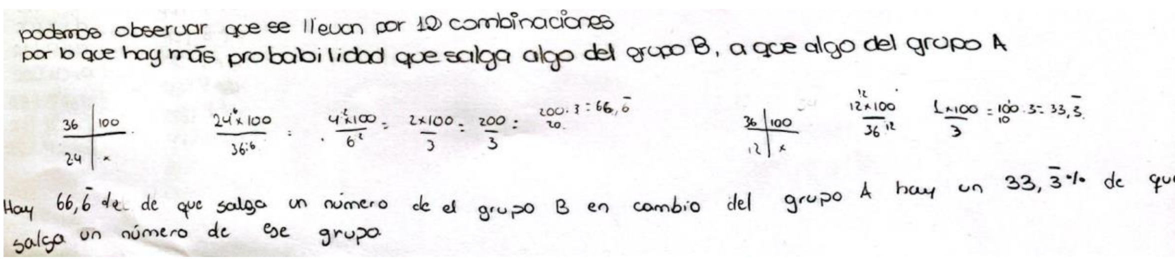
En la sesión 2, los estudiantes realizaron nuevamente el juego, ya convencidos que el jugador B tiene ventaja, comenzaron a buscar la justificación de este hecho, lo que da paso a la fase de formulación, donde hay grupos que lo hacen utilizando los resultados obtenidos del applet considerando una mirada desde la noción frecuencial y otros como la Figura 2 identifican los elementos del espacio muestral contabilizando los casos favorables a cada jugador mostrando los primeros acercamientos a una noción laplaciana de la probabilidad.

Figura 2



Finalmente, en la sesión 3, se utilizan las combinaciones construidas para dar fundamentos matemáticos, siendo el argumento porcentual el utilizado por 2 de los 4 grupos mediante la regla de 3, identificando que el jugador B tiene el doble de opciones de ganar que el jugador A como muestra la Figura 3. Este hecho permitió poder conectar los procedimientos realizados con la definición de la Regla de Laplace.

Figura 3



Como conclusión, logramos identificar que los estudiantes realizan un procedimiento intuitivo para tomar decisiones con respecto al juego, donde sus argumentos en primera instancia, dentro de la fase de acción, se basan en experiencias propias y relación entre tipo de números, idea que posteriormente se va modificando al momento de comenzar el juego y observar que el argumento del ganador se basa en la cantidad de veces que gana el jugador B identificando que hay mayor cantidad de combinaciones presentes para el jugador B, se aprecia un cambio desde el significado intuitivo de probabilidad hacia un significado frecuentista. Posteriormente comienza la fase de formulación donde la construcción de las combinaciones posibles al momento de lanzar dos dados son el elemento teórico que es utilizado como argumento, tanto identificando el espacio muestral de EA como utilizando las obtenidas del juego. Para la validación y posterior institucionalización, los estudiantes utilizaron el concepto de porcentaje para dar mayor peso a su respuesta. Frente a esto, se utilizó la regla de 3 como un elemento que permitió la articulación con la Regla de Laplace.

Se destaca en la propuesta el paso que tuvieron los estudiantes entre los diferentes significados de la probabilidad, relacionando estos pasos con los ocurridos históricamente con respecto a este objeto. Tal como menciona Batanero (2005) es necesario que los diferentes significados de la probabilidad sean incorporados de manera progresiva, ya que hay una relación entre la comprensión del concepto y la evolución del significado, conectándolo con la construcción histórica de este. El elemento facilitador de este paso fue la utilización del simulador de experimento aleatorio, el cual permitió que los estudiantes, a partir de ideas intuitivas, pudiesen generar argumentos frecuenciales y clásicos considerando los casos que se obtienen en el experimento realizado.

Como proyecciones de experiencia de aula se espera poder realizar la aplicación de la actividad a un curso completo, utilizando de igual forma el simulador. Otra de las proyecciones es poder utilizar la misma forma de trabajo considerando la evolución histórica de los objetos para su formalización, apoyándose en la tecnología para llevarlo a cabo, como fue el uso del simulador. Con base en lo anterior, como último aspecto queremos considerar el uso de simuladores y herramientas digitales que faciliten la comprensión en los estudiantes de conceptos y objetos matemáticos de mayor complejidad en conjunto con sus propiedades, como por ejemplo, la visualización de dominios y recorridos de funciones, propiedades relacionadas a objetos geométricos, entre otros.

Referencias

Alvarado, Hugo, Estrella, Soledad, Retamal, Lidia, & Galindo, Maritza. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *21*(2), 131-156. https://doi.org/10.12802/relime.18.2121

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *RELIME*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C., Gea, M. M. G. S., & Álvarez-Arroyo , R. (2023). Educação do raciocínio probabilístico. *Educação Matemática Pesquisa Revista Do Programa De Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática*, *25*(2), 127–144. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i2p127-144

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Libros del Zorzal

Hernández-Solís, L. A., Gea, M. M., Batanero, C. & Álvarez-Arroyo, R. (2023). Investigación sobre el razonamiento de los niños en la comparación de probabilidades. *BEIO*, *39*(1), 1-24

Mineduc (2023) *Actualización de la priorización curricular para la reactivación integral de aprendizajes MATEMÁTICA.*

Parraguez, R., Gea, M. M., Díaz-Levicoy, D., & Batanero, C. (2017). ¿ Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad? *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *17*(2), 1-15.

PROPUESTA DE DIVERSIFICACIÓN DE ESTRATEGIAS PEDAGÓGICAS PARA ENSEÑAR TRIGONOMETRÍA: INFLUENCIAS POSITIVAS EN EL APRENDIZAJE

Dayans Estrada Parra, Liceo Polivalente Arturo Alessandri Palma

Abstract:

La presente investigación-acción se llevó a cabo en un liceo municipal de Providencia, con el objetivo de abordar los bajos resultados académicos en matemática entre estudiantes de segundo medio. Se identificó la necesidad de implementar estrategias de diversificación de enseñanza para mejorar los procesos de aprendizaje y promover una mayor motivación hacia la asignatura.

El estudio se fundamentó en la exploración de dificultades y desafíos comunes que enfrentan estudiantes al aprender matemática, así como en la identificación de factores que contribuyen a mejorar estos procesos. Se diseñó e implementó una Unidad Didáctica centrada en la diversificación de estrategias de enseñanza de la trigonometría, en colaboración con docentes de matemática y profesoras diferenciales.

Los resultados sugieren que esta intervención tuvo una influencia positiva en los procesos de aprendizaje de estudiantes, fomentando una mayor motivación hacia la asignatura. A pesar de los desafíos que emergieron durante la implementación, como limitaciones de tiempo y participación parcial de docentes, la intervención produjo resultados alentadores.

En conclusión, este estudio destaca la importancia de implementar estrategias pedagógicas innovadoras y adaptadas a las necesidades individuales de estudiantes para influir positivamente en los procesos de aprendizaje y promover un ambiente de aprendizaje inclusivo y efectivo en contextos educativos desafiantes.

Palabras clave: Diversificación pedagógica, trigonometría educativa, metodología activa, estrategias de enseñanza, innovación pedagógica

INTRODUCCIÓN

En el contexto educativo actual, la diversificación de estrategias de enseñanza es fundamental para promover el desarrollo integral de estudiantes y responder a las necesidades de aprendizaje diverso en estudiantes (Aguilar y Marín, 2022). Sin embargo, la rigidez de las estructuras institucionales a menudo limita la implementación efectiva de estos enfoques innovadores. Este trabajo se centra en explorar la influencia de la diversificación de las estrategias de enseñanza de la matemática, específicamente en el aprendizaje de la trigonometría de estudiantes de II° año medio.

A pesar de los esfuerzos previos en la institución para mejorar el rendimiento académico en matemática, los resultados no han sido satisfactorios. Por lo tanto, esta investigación-acción se propone abordar este problema mediante el desarrollo de estrategias de diversificación de la enseñanza matemática, con el objetivo de mejorar el rendimiento académico y fomentar una mayor motivación hacia la asignatura.

Para lograr este objetivo, se diseñó e implementó un plan de intervención educativa centrado en la elaboración y aplicación de una Unidad Didáctica que aborda específicamente la enseñanza de la trigonometría. Se espera que esta iniciativa influya en los procesos académicos y la experiencia de aprendizaje de los estudiantes de II° año medio en matemática, promoviendo un ambiente educativo enriquecedor y equitativo.

En este contexto, surge la pregunta central que guía la investigación: *¿De qué manera la diversificación de las estrategias de enseñanza de la matemática puede influir en los procesos de aprendizaje de estudiantes de segundo medio en un liceo municipal de Providencia?*

MARCO CONCEPTUAL

La enseñanza matemática ha evolucionado desde enfoques tradicionales hacia modelos más inclusivos y contextualizados (Alsina y Franco, 2020), reflejando la adaptación de estrategias pedagógicas a diversas formas de aprender. En particular, la combinación de resolución de problemas con la modelación permite que la trigonometría se transforme en un conocimiento funcional (MINEDUC, 2023). Esta tendencia ha impulsado la exploración de enfoques innovadores, como el uso de tecnologías educativas y la contextualización de problemas, para hacer que los conceptos trigonométricos sean más accesibles y significativos para los estudiantes (Asomah et al., 2023). Además, la diversificación de la enseñanza, apoyada en programas inclusivos como el DUA y el PIE, busca garantizar el acceso equitativo a los aprendizajes matemáticos, reconociendo la diversidad de necesidades educativas y fortaleciendo la equidad en el aula (Paredes e Inciarte, 2013; Palma et al., 2018).

METODOLOGÍA

El encuadre metodológico abarcó dos fases: diagnóstico e intervención. En la 1° fase se recopiló información de docentes y estudiantes para identificar aspectos que facilitan o dificultan el aprendizaje de la matemática en el contexto del liceo. Se utilizaron diferentes instrumentos (i.e., cuestionarios, entrevistas y grupo focal, validados por juicio experto) para obtener una perspectiva amplia sobre el problema a tratar.

Mientras que en la 2° fase se diseñó y aplicó una unidad didáctica de 10 clases presenciales sobre trigonometría (23 h cronológicas). Grosso modo, dicho diseño contempló una indagación sobre la historia de la trigonometría; una introducción sobre razones trigonométricas; se resolvieron problemas trigonométricos; se construyeron goniómetros caseros usándose en procesos de modelación que se evidenciaron mediante videograbaciones en contextos de aplicación. Asimismo, durante la intervención se identificaron percepciones de estudiantes y se evaluó la influencia de estrategias pedagógicas empleadas, utilizando diversos instrumentos (i.e., ev. formativas y sumativas, entrevistas semiestructuradas y autoevaluaciones), validados por juicio de expertos con tres docentes del Magíster en Innovación Curricular y Evaluación Educativa, seleccionados por su experiencia en educación matemática, pedagogía y/o áreas afines, lo que aseguró la coherencia y calidad de los instrumentos. La participación activa de 78 estudiantes de II° año medio y 3 docentes (una de matemática y dos de ed. diferencial), permitió una ev. continua para ajustar la enseñanza según necesidades de aprendizaje y retroalimentación que se implementó mediante la revisión de actividades de clase, discusiones grupales y la resolución conjunta de problemas. Estas instancias no solo facilitaron la identificación de dificultades conceptuales, sino que también guiaron ajustes en las estrategias de enseñanza, enfocándose en fortalecer habilidades específicas según las necesidades emergentes.

RESULTADOS

En la fase diagnóstica se destacó la importancia de diversificar la enseñanza matemática para mejorar el aprendizaje en estudiantes de II° año medio. Los cuestionarios y entrevistas revelaron dificultades como la comprensión limitada y baja motivación, sugiriendo la necesidad de adoptar enfoques más activos y participativos. Además, el Focus Group con profesoras diferenciales resaltó la importancia de actividades lúdicas para hacer los contenidos más atractivos.

La unidad didáctica se centró en la diversificación de estrategias de enseñanza en trigonometría, fomentando la participación activa de estudiantes. Se aplicaron diversos instrumentos para evaluar su influencia. La evaluación formativa destacó la capacidad de los estudiantes para contextualizar problemas matemáticos, aunque con algunos errores (Figura 1). En la evaluación sumativa (Figura 2) se observó una variedad de enfoques y estrategias utilizadas (mnemotecnias, representaciones realistas, etc.), lo que sugiere una comprensión más amplia de la trigonometría. La autoevaluación (Tabla 1 y Tabla 2) resaltó la colaboración activa de estudiantes en actividades como la grabación de vídeos, subrayando la importancia del aprendizaje colaborativo. La entrevista con la profesora diferencial reveló un aumento significativo en la motivación de estudiantes y la importancia de adaptar las actividades a sus necesidades individuales. En resumen, los resultados indican la efectividad de las estrategias de enseñanza diversificadas, aunque persisten desafíos en la percepción de las matemáticas que requieren atención continua.

CONCLUSIONES

Tras realizar esta investigación-acción, se sugiere que la diversificación de las estrategias de enseñanza en matemática influye positivamente en el aprendizaje de estudiantes de II° año medio, ya que la implementación de una unidad didáctica centrada en la diversificación de estrategias mostró mejorar la comprensión sobre la trigonometría y acrecentó la motivación de estudiantes hacia la matemática al trabajar de forma individual y colaborativamente, lo cual corroboran los recientes hallazgos de Asomah y colaboradores (2023). Para replicar esta intervención en otros contextos, se propone capacitar a docentes en el diseño de unidades didácticas diversificadas, utilizar recursos accesibles como goniómetros caseros e implementar retroalimentación continua que involucre a estudiantes. También se recomienda la colaboración interdisciplinaria para adaptar las estrategias a las necesidades de cada grupo.

Se destaca la importancia de adaptar las actividades a las necesidades individuales de estudiantes, tales como NEE, variados niveles de habilidades, etc.; ya que se fomenta una participación más activa y colaborativa durante sus procesos de aprendizajes. Por ejemplo, asignación de tareas y roles diferentes, construcción y manipulación de instrumentos de medición, aplicaciones en la vida real, etc.

En base a los resultados de esta investigación-acción, se respalda la necesidad de continuar explorando y aplicando estrategias pedagógicas innovadoras para promover una educación matemática con sentido, a través de una colaboración continua entre docentes, estudiantes de educación media y las comunidades educativas.

Tabla 1

Frecuencia de categorías Pregunta Abierta 3: ¿Qué estrategias de enseñanza encontraste más efectivas para tu aprendizaje? Da ejemplos concretos y describe esas estrategias

Categoría	Descripción	n	Fr (%)
No reconoce ninguna	No identifica ninguna estrategia	5	8%
Interacción con docente	Menciona directamente a la docente, toda vez que le enseña en clases, responde sus consultas, escucha sus historias, o monitorea	6	9%
Estudio autónomo	Estudia lo visto en clases, ve videos, realiza ejercicios o investiga por su cuenta	9	14%
Clase tradicional	Reconoce estrategias de resolución de problemas paso a paso; ejemplos; escribir lo visto en clases o prestar atención	11	17%
Aire libre	Las actividades de mayor interacción entre pares le resultaron más efectivas, como las de producción de un video o salir al patio para la utilización del goniómetro	18	28%
Mnemotecnias	Nombra que se le facilita el aprendizaje con técnicas como el SoCaToa, o del "video del gato brasileiro"	24	37%

Tabla 2

Frecuencia de categorías Pregunta Abierta 8: ¿Ha cambiado tu percepción sobre las matemáticas después de esta Unidad Didáctica? ¿Cómo? Describe dando detalles

Categoría	Descripción	n	Fr (%)
Autoconcepto	Se siente con mayor seguridad hacia las matemáticas, con mayor disposición hacia su aprendizaje, o presiente mejoría en su aprendizaje	7	11%
Mayor utilidad en la vida diaria	Reconoce que lo aprendido lo puede aplicar en situaciones de la vida diaria	9	14%
Refuerzo positivo	No cambia su percepción, pues ya posee altas expectativas hacia la disciplina	10	15%

Más atractivo	Después de la intervención se le facilita la matemática, le genera mayor interés o diversión	14	22%
No cambia	Su percepción sigue siendo mayormente negativa hacia la matemática	20	31%

Figura 1

Representaciones de estudiantes a problema de evaluación formativa

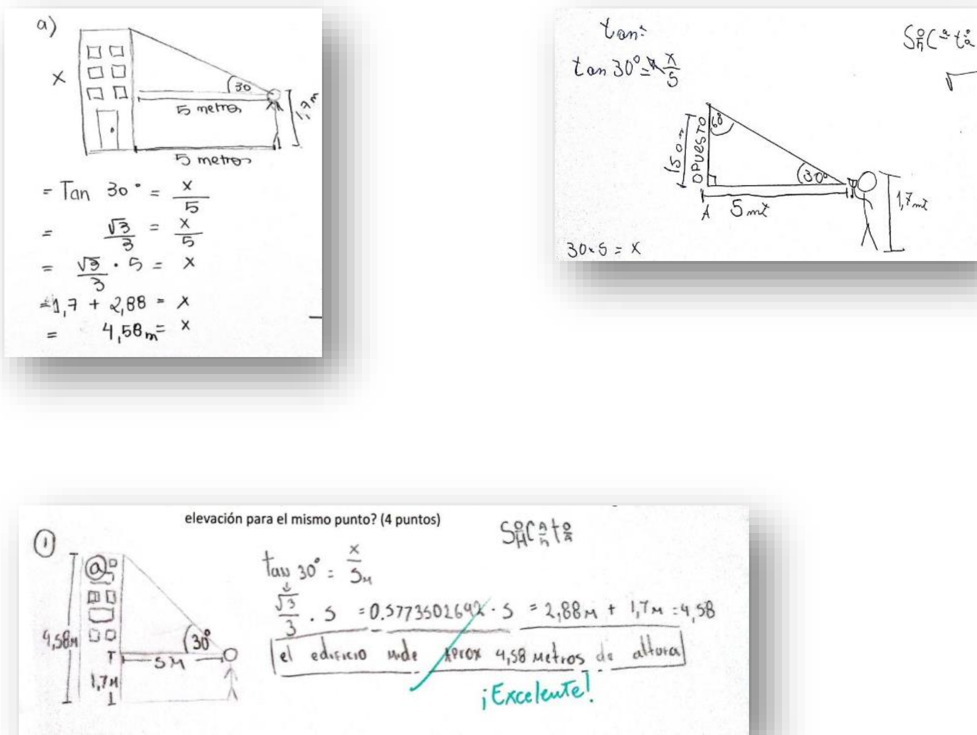
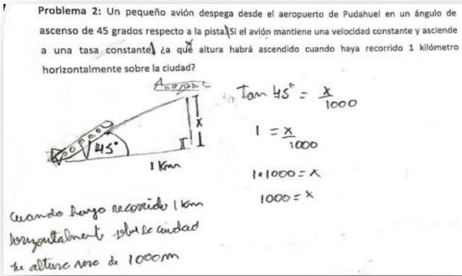
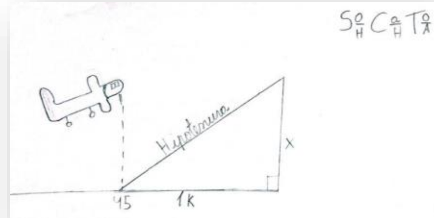
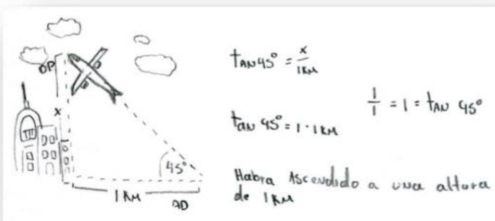


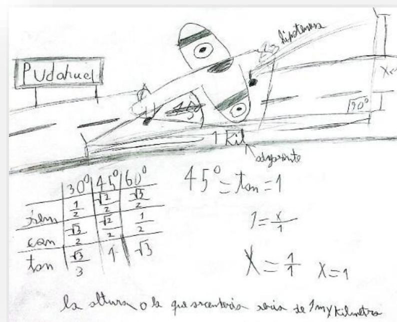
Figura 2

Representaciones de estudiantes a problema de evaluación sumativa









Referencias

Aguilar, J., y Marín, M. (2022). *Propuesta de talleres que fomentan la capacidad creativa de los profesores de Ciencias Naturales y Biología en formación, como recurso para la diversificación de estrategias de enseñanza. Un estudio exploratorio sobre su implementación* [Trabajo de Titulación, Universidad del Biobío]. Repositorio Biblioteca UdeC. http://repositorio.udec.cl/jspui/handle/11594/9896

Alsina, Á., y Franco, J. (2020). Promoviendo la educación matemática inclusiva desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: El caso de las fracciones. *APEduC Revista*, *1*(2), 13-29. https://apeducrevista.utad.pt/index.php/apeduc/article/view/130

Asomah, R., Agyei, D., Ntow, F., & Benning, I. (2023). Hypothetical Approach to the Teaching of Trigonometric Concepts Using Cooperative Learning. *Education Research International, 2023*(1), 1-12. https://doi.org/10.1155/2023/2051776

Ministerio de Educación (2023). *Actualización de la Priorización Curricular para la reactivación integral de aprendizajes, Matemática*. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-332018_priorizacion.pdf

Palma, C., Castro, A., & Oyarzo, X. (2018). Una propuesta para evaluar el conocimiento de los profesores sobre diversificación de la enseñanza. RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática, 11(1), 134-138.

Paredes, Í., & Inciarte, A. (2013). Enfoque por competencias. Hacia la integralidad y el desempeño profesional con sentido social y crítico. Omnia, 19(2), 125-138. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=73728678010

UNA PROPUESTA ALTERNATIVA PARA LA ENSEÑANZA ATÍPICA [PR1] DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Jacobo Molina Peña, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE)

Diego Silva Farias, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE)

Abstract: *El teorema de Pitágoras es un concepto esencial en la geometría, cuya enseñanza tradicionalmente se ha caracterizado por el uso predominante de figuras prototípicas. Sin embargo, esta propuesta busca rediseñar su enseñanza apoyándose en la teoría de la transposición didáctica de Chevallard y la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, destacando la importancia de fomentar la flexibilidad del pensamiento matemático y el desarrollo de la capacidad espacial en los estudiantes.*

Se plantea la creación de situaciones didácticas que involucren triángulos rectángulos en diversas orientaciones y contextos significativos, con el objetivo de ampliar y profundizar la comprensión del teorema. Esta metodología se centra en promover un aprendizaje significativo mediante la conexión del conocimiento previo con el nuevo, utilizando actividades que invitan al análisis y la reflexión sobre las propiedades geométricas de los triángulos. Asimismo, la incorporación de herramientas digitales y materiales concretos facilita la transición del conocimiento teórico a su aplicación práctica en situaciones cotidianas, como el cálculo de diagonales en terrenos o construcciones.

Se espera que esta propuesta pueda fomentar un aprendizaje más profundo, reduciendo las limitaciones asociadas a métodos tradicionales y favoreciendo el desarrollo de habilidades críticas y creativas para la resolución de problemas matemáticos.

Palabras clave: [Teorema de Pitágoras, transposición didáctica, figuras prototípicas, enseñanza de la geometría, herramientas digitales, pensamiento crítico]

INTRODUCCIÓN

El teorema de Pitágoras es un pilar fundamental de la geometría, comúnmente enseñado a través de representaciones tradicionales, como los triángulos rectángulos. No obstante, cuando los estudiantes solo trabajan con las figuras prototípicas, se quedan con una representación errada del concepto, lo que puede generar errores en su aplicación, pensando que este teorema sólo se aplica a triángulos rectángulos cuyo ángulo recto se encuentra sobre la base (“piso”). Esto lo podemos verificar con Chevallard (1997), el cual señala la importancia de mantener la riqueza del conocimiento original del aula, permitiendo explorar diferentes casos, como lo son los triángulos rectángulos poco comunes o aplicaciones en la vida diaria, como la ingeniería o la arquitectura. Por lo que, para abordar esta problemática, en la presente propuesta nos centraremos en la aplicación de la teoría de la transposición didáctica de Chevallard (1997), el cual ya mencionamos y en la teoría del aprendizaje de Ausubel (1983). Todo esto con el fin de rediseñar la enseñanza del teorema de Pitágoras. Todo esto con el objetivo de implementar la orientación para la enseñanza de parte de los docentes, lo cual permitirá guiar al estudiante a desarrollar un pensamiento crítico y reflexivo del teorema, utilizando diversos contextos y representaciones. El enfoque no solo busca superar las limitaciones de los métodos tradicionales, sino que también busca fomentar el desarrollo de un pensamiento crítico matemático por parte del estudiantado, donde la flexibilidad de dicho pensamiento es crucial para la comprensión completa del nuevo conocimiento.

ELEMENTOS TEORICOS

El uso reiterado de figuras estándar que imprenta el texto del estudiante, para la enseñanza el teorema de Pitágoras, pueden transmitir un conocimiento mecanizado por parte del estudiante, haciéndolo olvidar el conocimiento anterior, como lo es las condiciones o medición de los lados de un triángulo, asiéndolo pensar que el conocimiento adquirido anteriormente es insignificante. Por lo que es crucial que el docente comprenda, “que el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información” (cita del texto que te mande).

Cuando se enseña el teorema de Pitágoras es fundamental, es fundamental que los estudiantes comprendan cuando es aplicable. Investigaciones como las de NRC (2001) han señalado que el uso de figuras prototípicas, pueden limitar la comprensión de los estudiantes al inducir errores conceptuales. Por ejemplo, si un triángulo rectángulo tiene la hipotenusa en la base, los alumnos podrían descartar la posibilidad de aplicar el teorema debido a la influencia de las figuras prototípicas. El fenómeno puede explicarse gracias a la transposición didáctica de Chevallard (1997), el cual describe cómo el conocimiento científico, al ser llevado a la enseñanza, sufre cambios que pueden restringir su significado original. Incorporar triángulos en diversas posiciones durante las actividades en clase no solo corrige estos errores, sino que también promueve el desarrollo de la capacidad espacial, ayudando a los estudiantes a aplicar el teorema en contextos más generales.

Para comprobar estos dichos anteriores se realizó una encuesta a estudiantes de la UMCE de distintas carreras donde se les pregunto ¿Cuál de los siguientes triángulos de la imagen 1 es un triángulo rectángulo?

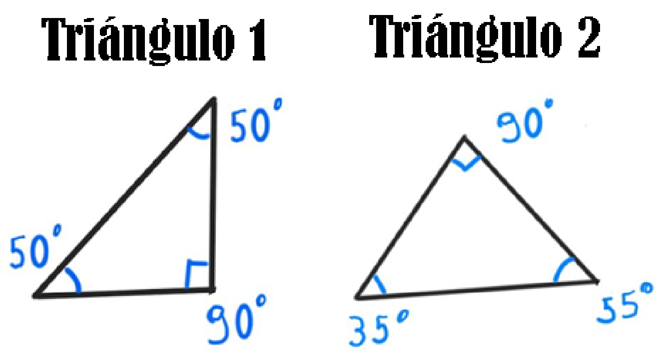


imagen 1

Donde se obtuvieron los siguientes resultados:

Primera vista	
El 1ro es triángulo rectángulo	**17**
El 2ro es triángulo rectángulo	**1**
Ambos son triángulos rectángulos	**7**

Cómo es posible apreciar en la tabla, la gran mayoría de los estudiantes creyeron que solo el primero era un triángulo rectángulo. Al momento de justificar sus respuestas, muchos mencionaron que recordaban que un triángulo rectángulo debe tener su ángulo recto (90°) “sobre el piso”. Mientras que otro grupo de los encuestados que mencionó que ambos eran, ya que solo bastaba con que existirá un ángulo recto (90°), sin pensar en las condiciones fundamentales de los triángulos de dos dimensiones, donde sus ángulos internos deben sumar 180°.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

A partir de la aplicación del concepto de transposición didáctica propuesto por Chevallard (1993) y la teoría del aprendizaje de Ausubel (1983), esta propuesta tiene como objetivo rediseñar la enseñanza del teorema de Pitágoras, con el fin de transformar la comprensión de los estudiantes más allá del uso de figuras prototípicas, como lo son los triángulos rectángulos habituales. Se proponen generar situaciones didácticas que presenten triángulos rectángulos en diversas orientaciones, como en una granja, en la construcción, en una piscina, etc. Todo esto con el propósito de que el estudiante genere un pensamiento crítico y desafiante, de las ideas preconcebidas. Asimismo, se contempla la incorporación de estrategias que promuevan el pensamiento reflexivo, con énfasis en los procesos de validación y justificación matemática. Para lograrlo, se utilizarán materiales concretos y herramientas digitales accesibles, facilitando así la transición del conocimiento teórico hacia su aplicación práctica.

En este contexto, se realizó una actividad con estudiantes de distintas carreras para identificar las concepciones que manejan de los triángulos rectángulos. Al preguntarles: ¿Cuál de estas figuras pertenece a un triángulo rectángulo?

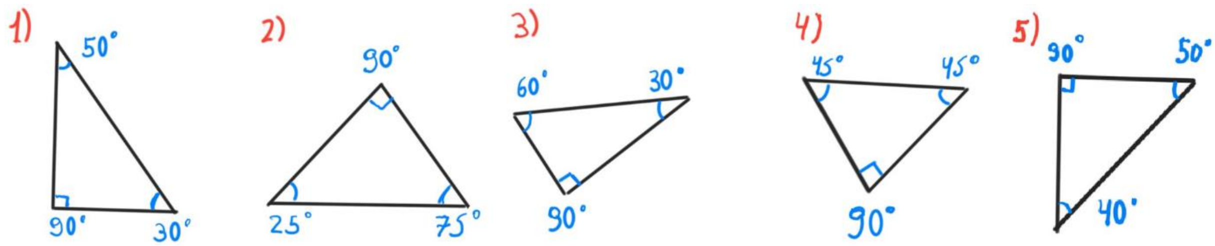


imagen 2

RESULTADOS

Se prevé que los estudiantes adquieran una comprensión más profunda y flexible del teorema de Pitágoras, lo que les permitirá aplicarlo de manera efectiva en una amplia variedad de contextos. Se anticipa una reducción en las concepciones erróneas, tales como la creencia de que un triángulo es rectángulo únicamente si su ángulo recto se encuentra en la base, sin importar las condiciones para ser considerado un triángulo. Además, se espera que los estudiantes desarrollen habilidades mejoradas para justificar y argumentar sus respuestas, utilizando el teorema de manera crítica y creativa en diversas situaciones. Al realizar esta actividad los resultados fueron los siguiente:

¿Es un triángulo rectángulo?	SI	NO
Figura 1	**2**	**26**
Figura 2	**0**	**28**
Figura 3	**28**	**0**
Figura 4	**27**	**1**
Figura 5	**27**	**1**

CONCLUSIONES

La propuesta presentada busca transformar la enseñanza del teorema de Pitágoras al abordar directamente las limitaciones de los métodos tradicionales que se enfocan en figuras prototípicas. Mediante la introducción de triángulos en diversas orientaciones y contextos, se promueve que los estudiantes reflexionen sobre las propiedades fundamentales de los triángulos, favoreciendo la construcción de un aprendizaje significativo según los principios de Ausubel. Al conectar este conocimiento previo con el teorema de Pitágoras, se facilita una comprensión más profunda y versátil del concepto.

El enfoque metodológico planteado inicia con actividades que invitan a los estudiantes a comentar, recordar y analizar las características esenciales de los triángulos, para luego explorar casos donde se cumplen o no las condiciones de un triángulo rectángulo. Posteriormente, el teorema es institucionalizado a través de su aplicación en situaciones prácticas y significativas, como el cálculo de diagonales en piscinas o terrenos.

De este modo, la propuesta no solo corrige concepciones erróneas y refuerza las estructuras cognitivas previas, sino que también fomenta el pensamiento crítico, la reflexión y la validación matemática. Al integrar herramientas concretas y digitales, el proceso de aprendizaje se enriquece, permitiendo una transición efectiva entre el conocimiento teórico y su aplicabilidad en diversos contextos. Así, la propuesta contribuye al desarrollo de una enseñanza más inclusiva, adaptativa y alineada con los principios de un aprendizaje profundo y significativo.

ofrece una metodología didáctica más eficaz y adaptable para la enseñanza de conceptos matemáticos fundamentales.

BIBLIOGRAFÍA

- Ausubel, D. (1983). *Teoría del aprendizaje significativo*.
- Barrera, R., & Ortiz, N. (2020). *Matemática 2° medio* (1.ª ed.). Carla Frigerio.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica.*
- National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academies Press.
- Torres, C., & Caroca, M. (2019). *8 Básico texto matemática* (1.ª ed.). Rodolfo Hidlago.

ARMONÍA TRIGONOMÉTRICA. LA MATEMÁTICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE UNA ZAMPOÑA

Gloria Velozo, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

[Esta propuesta interdisciplinaria integra conceptos trigonométricos en la construcción y afinación de una zampoña, siguiendo el ciclo de modelación de Blum-Borromeo. El objetivo es que los estudiantes entre 17 y 18 años apliquen funciones trigonométricas para relacionar la longitud de los tubos del instrumento con las frecuencias sonoras. La propuesta se basa en la Ingeniería Didáctica como metodología de diseño experimental; abarca 4 sesiones de 2 horas cada una. Para visualizar y analizar las funciones se utiliza GeoGebra, permitiendo conectar la teoría matemática con la física del sonido. La creación de esta experiencia de aula busca responder a la pregunta ¿cómo influye en la comprensión matemática de los estudiantes, la integración de conceptos trigonométricos al construir una zampoña?Este enfoque interdisciplinario mejora la comprensión de la trigonometría aplicada y también promueve el desarrollo de habilidades esenciales del siglo XXI. El ciclo de trabajo inicia con la descripción del problema, identificando materiales y el uso del instrumento, seguido de la matematización para construir un modelo ajustado a la realidad. La última etapa es la de validación utilizando los resultados experimentales. Así, el pensamiento crítico se fortalece a medida que los estudiantes reflexionan sobre los resultados y ajustan su modelo para mejorar la precisión. El pensamiento creativo se fomenta al diseñar y construir la zampoña, buscando soluciones innovadoras para los desafíos que surgen. Finalmente, el trabajo colaborativo destaca en todas las etapas, ya que los estudiantes deben coordinarse, compartir ideas y tomar decisiones en grupo, integrando habilidades individuales para alcanzar un objetivo común.]

[Trigonometría, música, interdisciplinaridad, matematización, habilidades del siglo XXI]

INTRODUCCIÓN

La matemática y la música han estado ligadas históricamente, aunque curricularmente, en la actualidad, se estudian como disciplinas muy separadas. Girón (2018) señala que hoy en día la música se asocia solamente a las bellas artes, invisibilizando sus orígenes cuando Boecio por el siglo VI d.C. escribió el Tratado sobre la música, desarrollando y extendiendo los principios del Pitagorismo, base de toda la teoría musical. Según Girón, Boecio consideraba que la música era una de las ciencias que permitía al hombre alcanzar la sabiduría. A raíz de aquello se denominó *quadrivium* o cuádruple vía hacia la sabiduría al conjunto de la música, la aritmética, la astronomía y la geometría.

En Chile, el programa de estudio de electividad de 3° y 4° año medio se nutre de asignaturas que resultan afines para el trabajo matemático en el aula desde una mirada más concreta (Mineduc, 2021). Para Borromeo et al (2021) el profesor de matemática en Chile, debe enfrentarse a nuevos desafíos, en particular en enseñanza secundaria con la incorporación de asignaturas como estadística descriptiva, tecnologías digitales, cálculo infinitesimal, geometría 3D, inferencia estadística y pensamiento computacional; dando nuevos enfoques. Para los autores, este desafío aporta la posibilidad de acercar la matemática desde una mirada más práctica, fomentando las habilidades del siglo XXI, tales como el pensamiento crítico y la resolución de problemas. Esta propuesta sostiene que estas habilidades pueden abordarse desde la modelación matemática y su relación con el electivo de interpretación musical (impulsor de la creación de esta experiencia de aula).

ELEMENTOS TEÓRICOS

En la actualidad, las Bases Curriculares promueven la habilidad matemática de modelación y desde la Unidad de Curriculum y Evaluación del Ministerio de Educación se proponen diversas tareas que buscan desarrollar de forma progresiva esta habilidad (Mineduc, 2021). La modelación matemática permite obtener un modelo a partir de una situación real, siguiendo una secuencia organizada de fases: comprensión del problema, idealización y validación, las que pueden repetirse si se debe ajustar el modelo (Borromeo, 2006).

Por otra parte, el Mineduc (2021) da énfasis a la integración disciplinar, reconociendo en ésta la comprensión de conocimientos y habilidades de pensamiento. Ello se logra con el trabajo colaborativo entre profesores y el aprendizaje de resolución de problemas que incorpora en las Bases Curriculares a través del Aprendizaje Basado en Proyectos.

Tanto en el programa de Límites, derivadas e integrales como el de Interpretación musical, se integran orientaciones concretas y modelos de proyectos con un enfoque interdisciplinario (Mineduc, 2021), por lo que se requiere de una planificación conjunta en algunas actividades entre profesores de diferentes asignaturas.

Modelación Matemática

Borromeo-Ferri (2006) presentan una estructura de modelación matemática compuesta por un ciclo. Este ciclo se estructura en distintos pasos que inician con la Situación Real (SR), la cual representa el problema que se plantea al individuo. Luego, la Representación Mental de la Situación (RMS), donde se genera la comprensión interna del problema, que se idealiza y simplifica para crear el Modelo Real (MR). Este Modelo Real se matematiza para construir el Modelo Matemático (MM). En esta última, los estudiantes realizan representaciones externas, tales como gráficos o fórmulas que se expresa de forma matemática. Al obtener los Resultados Matemáticos (RM), se debe realizar la interpretación de los mismos para llegar a los Resultados Reales (RR) y evaluar a partir de la situación original para lograr la Validación, donde se realiza un contraste con la representación mental.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

La propuesta de aula surge de la necesidad de generar una conexión con la asignatura de Interpretación Musical que es parte de los cursos electivos para los estudiantes secundarios de último año. Se consideró la primera unidad del electivo de límites, derivadas e integrales que trata sobre Funciones, en particular las funciones trigonométricas que fueron estudiadas y relacionadas con la música a partir de un trabajo de investigación. Se inicia con cuatro grupos de trabajo de 5 estudiantes cada uno, quienes investigan la relación entre la música y la matemática. Este proceso indaga en conceptos teóricos, tales como frecuencia, velocidad del sonido, función trigonométrica y características de instrumentos musicales de viento. Los estudiantes realizan una búsqueda por internet, consultas al profesor de música y matemática, y revisión de algunos artículos sugeridos por la profesora, considerando dentro de su estudio un posible modelo que pueda aplicarse a la realidad a partir de lo investigado. Como segunda etapa, se planifica la construcción de una zampoña, considerando utilizar una impresora 3D o tubos de PVC, escogiendo esta última por la accesibilidad, facilidad de uso y el costo inferior de los materiales, versus una impresora 3D. Además, el PVC es fácil de cortar y lijar, lo que permite una construcción más sencilla del instrumento. Por otra parte, el profesor del electivo de Interpretación Musical instruye a los estudiantes en las propiedades acústicas de los tubos de PVC siendo más adecuadas para la emisión de sonidos claros y resonantes. Para la propuesta de esta segunda fase se declaran medidas específicas para los tubos y la identificación de las variables en juego, tales como la longitud de los tubos relacionada a la frecuencia del sonido, el diámetro de estos, la precisión en el corte, el lijado de los bordes y la posición de los tapones de goma, los cuales influirán en la claridad, resonancia y afinación de las notas emitidas. Se consideran algunas posibles dificultades en el proceso de construcción tales como obtener cortes precisos de los tubos y el ajuste de los tapones de goma. Desde la matematización, los modelos pueden ser inexactos en la correlación de la longitud de los tubos y las frecuencias producidas, debido a la dificultad anterior, y por otra parte, la visualización de la función trigonométrica asociada puede no ser inmediata, por lo que se requiere de un apoyo gráfico a partir del uso de GeoGebra.

Metodología

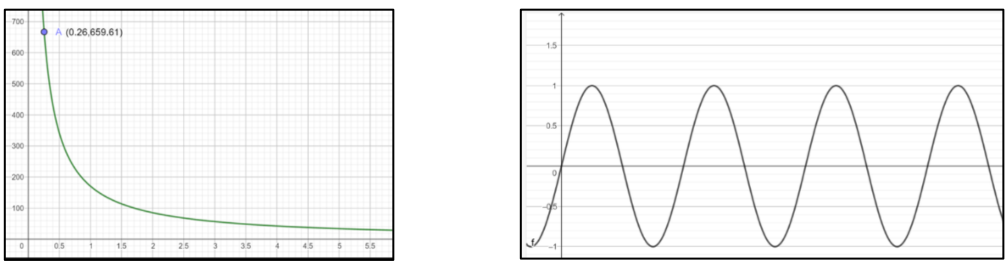
Desde la Ingeniería Didáctica se crea un diseño experimental que permite planificar, implementar y evaluar la propuesta. La secuencia de clases fue dividida en fases: diseño del modelo, ajustes y validación mediante pruebas experimentales. GeoGebra se utiliza como herramienta de apoyo a la visualización y permite conectar los resultados experimentales con la teoría matemática. Para evaluar el impacto en las habilidades y conocimientos de los estudiantes, se realizaron un control previo sobre nociones de trigonometría y una exposición final donde los estudiantes dieron cuenta de sus resultados frente a sus pares y profesores de ambos electivos. Las observaciones en clases, también fueron un indicador de sus avances a través de una rúbrica que se socializó al inicio del proyecto y GeoGebra fue otro indicador sobre las habilidades de los estudiantes para interpretar los conceptos matemáticos involucrados, así como en la construcción misma del modelo.

RESULTADOS DE IMPLEMENTACIÓN

La implementación considera dos grupos de 5 estudiantes cada uno, trabajando en 4 sesiones de 2 horas cada una, pertenecientes al electivo de Interpretación musical y de Límites, derivadas e integrales. El ciclo se inicia con la construcción de un primer modelo, el que considera algunos ajustes y pruebas, tales como corrección de la longitud de los tubos y la posición de los tapones de goma. En la fase de matematización una de las expresiones que se consigue es $\lambda = 2L$, donde L es la longitud del tubo y λ la longitud de onda del sonido producido en el tubo. Para el caso del tubo de 26 cm (0,26 m) calculan la frecuencia del sonido a partir de la expresión $\lambda = \frac{v_p}{f}$ y utilizando $v_p = 343\frac{m}{s}$ (velocidad del sonido) se obtiene que la frecuencia producida por el tubo de 26 cm. es de 659,6 Hz, lo que corresponde a una nota Mi. Además, se registran las gráficas de las funciones modeladas considerando la frecuencia del sonido y la longitud del tubo con su respectiva función trigonométrica asociada a través de una función sinusoidal, tal como se ilustra en la Figura 1.

Figura 1

Matematización; frecuencia del sonido.



Parte de la interpretación es que un tubo más largo producirá un sonido más grave, mientras que un tubo más corto produciría un sonido más agudo, además, al conocer la frecuencia de la nota es posible representar la función trigonométrica asociada a la onda de sonido que produce cada tubo.

CONCLUSIONES

Con esta propuesta de aula se cumple la relación entre la matemática y la música, obteniendo un producto concreto a partir de una Situación Real que permite analizar conceptos matemáticos complejos de forma significativa, apoyado en el ciclo de Bloom-Borromeo. Los estudiantes demostraron creatividad al diseñar y construir la zampoña, experimentando con distintas medidas y materiales para afinarla. El pensamiento crítico fue observable, por ejemplo, al momento de determinar cómo los cambios en las variables afectaban las notas musicales y el modelo matemático, mientras que el trabajo colaborativo se reflejó en la distribución de tareas e integración de ideas. Estas evidencias se recogieron mediante observaciones, análisis de productos finales y reflexiones escritas. Como futuras aplicaciones y modificaciones a la actividad se considera el trabajo con la asignatura de física, afín para esta temática, trabajando las funciones trigonométricas y los fenómenos sonoros.

Referencias

Borromeo, R., Mena, J. y Mena, A. (2021). *Fomento de la Educación -STEM y la Modelización Matemática para profesores. Fundamentos, ejemplos y experiencias.* Kassel University Press.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – Mathematics Education*, 38(2), 86-89.

Girón, F. (2018). Matemáticas y música. Conferencia impartida en Málaga el 22 de octubre de 2018. *Boletín de la Academia Malagueña de Ciencias*, 21, 45-57.

Mineduc (2021). *Programa Límites, Derivadas e Integrales 3° y 4° Medio.* Unidad de Currículum y Evaluación.

Mineduc (2021). *Programa Interpretación musical 3° y 4° Medio.* Unidad de Currículum y Evaluación.

DE VELAS Y DERIVADAS: UNA APROXIMACIÓN INTUITIVA PARA LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE DERIVADA

Rodrigo Ramírez Corral, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Abstract:

La presente propuesta de innovación es un estudio cualitativo que explora las dificultades que enfrentan los estudiantes para comprender las nociones de razón de cambio y la pendiente de la recta tangente a una curva, conceptos fundamentales en el estudio de la derivada. El objetivo principal es diseñar una actividad de experimentación utilizando una vela cilíndrica y una vela cónica, fundamentada en la Teoría de la Modelación Matemática (Blum y Borromeo-Ferri, 2009), para luego analizarla dentro del marco de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (Duval, 2004). Este trabajo se llevó a cabo en un establecimiento de Santiago, con informantes de tercer año de enseñanza media del plan diferenciado de matemáticas: Límites, Derivadas e Integrales, conforme al programa establecido por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2019). La metodología de investigación consistió en la implementación de una secuencia didáctica validada por expertos y a nivel interno, mediante la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori de la propuesta, siguiendo las cuatro fases de la Ingeniería Didáctica descritas por Artigue (1990). En consecuencia, se diseñó una propuesta didáctica de Modelación Matemática que permitió a los estudiantes adquirir una comprensión intuitiva de la derivada como la *pendiente de la recta tangente en un punto de la curva. En conclusión, la actividad de modelamiento de la situación Y los resultados muestran que los informantes lograron realizar tratamientos y conversiones de RRS, lo que nos permite concluir que los estudiantes logran comprender desde este enfoque, la derivada como razón de cambio y como la pendiente de la recta tangente a una curva.*

Palabras clave: Límite, Derivada, Modelación Matemática, Ingeniería Didáctica, Representaciones Semióticas.

INTRODUCCIÓN

La asignatura de Límites, Derivadas e Integrales aborda conceptos y resultados fundamentales para estudiantes de Educación Media que desean continuar estudios superiores, ya sean técnicos o universitarios. En particular, estos contenidos preparan a los estudiantes para los cursos de Cálculo que comúnmente se dictan en la educación superior (MINEDUC, 2019).

Con este propósito, se presenta una propuesta didáctica basada en la Modelación Matemática (Blum y Borromeo Ferri, 2009), la cual es analizada desde la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (Duval, 2004). Para validar la propuesta didáctica empleada en este estudio de caso, se utilizó la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1990) en sus cuatro fases: 1) Análisis preliminar, 2) Diseño y *análisis a priori*, 3) Experimentación y 4) *Análisis a posteriori* y contraste entre el *análisis a priori* con el *análisis a posteriori.*

Este estudio busca que los participantes comprendan intuitivamente el concepto de derivada a partir de la razón de cambio y para ello, se plantea el siguiente objetivo: modelar una situación del mundo real que requiera la aplicación de los conceptos de razón de cambio y velocidad instantánea, utilizando diferentes registros de representaciones semióticas, entre los que se destacan el registro natural, registro algebraico, registro tabular y registro geométrico, para la comprensión del objeto matemático derivada.

ELEMENTOS TEÓRICOS

En este estudio, se utilizan principalmente dos constructos teóricos.

El primero es la concepción de modelación matemática y profundización del ciclo de Blum desde una visión cognitiva (Borromeo Ferri, 2009), para el diseño e implementación de la actividad de experimentación.

El segundo marco teórico para realizar el análisis de este estudio de caso, desde los aspectos teóricos relativos a la Teoría de los Registros de las Representaciones Semióticas (TRRS) de

Duval (2004), ya que este aborda el funcionamiento cognitivo que involucra la actividad matemática, tanto en los problemas de su aprendizaje, así como la naturaleza de dichas dificultades y dónde se pueden ubicar.

Además, se considera que, en el marco de la reforma curricular iniciada en 2019, el Ministerio de Educación (MINEDUC, 2019) ha propuesto un nuevo plan de estudio para la educación media, que busca flexibilizar el currículo y otorgar mayor autonomía a los estudiantes para elegir las asignaturas que más se ajusten a sus intereses, necesidades y proyecciones.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

En primer lugar, se diseña una propuesta didáctica dividida en tres partes. La primera consiste en una actividad de experimentación que aborda el consumo de dos velas encendidas: una cilíndrica, utilizada para evaluar la velocidad promedio, y otra cónica, para evaluar la velocidad instantánea en un tiempo determinado.

En la segunda parte, se solicita a los estudiantes que tabulen los datos obtenidos, los grafiquen y determinen la función que modela dicho consumo. Para este proceso, se utiliza la hoja de cálculo Excel y el software matemático GeoGebra. Posteriormente, los estudiantes responden preguntas destinadas a la comprensión y análisis de los resultados.

Finalmente, la tercera parte corresponde a la evaluación, donde los participantes, basándose en las conclusiones obtenidas durante la experimentación, responden preguntas sobre conceptos como velocidad promedio, velocidad instantánea, y la pendiente de la recta tangente en un punto, entre otros.

RESULTADOS DE IMPLEMENTACIÓN

En la fase de evaluación se realizan dos preguntas con el objetivo de que los sujetos informantes puedan responder a partir de la comprensión de los conceptos de: velocidad promedio y velocidad instantánea.

Pregunta 1: ¿Cuál es la velocidad promedio del consumo de una vela encendida, de forma cónica, entre el minuto t=3 y el minuto t=7? Explica y representa de forma gráfica y algebraicamente.

Análisis Descriptivo: Se observa que los tres sujetos informantes responden correctamente a la pregunta, graficando la recta en un plano cartesiano y determinando la pendiente de la recta que pasa por dos puntos, reemplazando en la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Análisis Interpretativo: Se interpreta que los estudiantes relacionan la velocidad promedio como la pendiente de la recta que pasa por dos puntos. Además, logran realizar tratamientos en el registro de lenguaje natural, geométrico y aritmético, realizando conversiones entre diferentes registros de representaciones semióticas como es el caso de registro geométrico al registro algebraico.

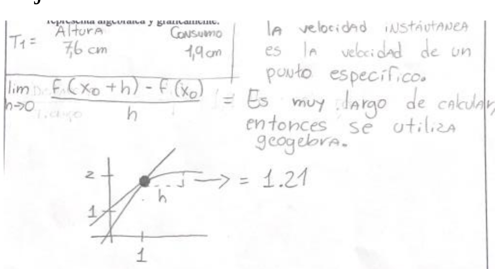
Pegunta 2. ¿Cuál es la velocidad instantánea del consumo de la vela encendida, de forma cónica, en el tiempo t=1? Explica y representa gráfica y algebraicamente.

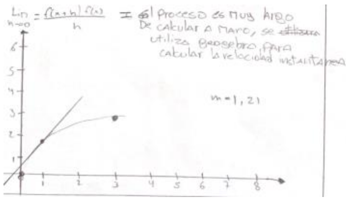
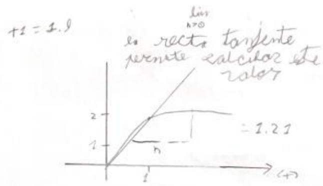
Análisis descriptivo: Se observa que los informantes calculan correctamente la velocidad instantánea en el tiempo t =1. Además, identifican la expresión algebraica $\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$. Dado lo compleja que es la función que modela la situación, utilizan el software GeoGebra para identificar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (1, f (1)) y posteriormente realizan un bosquejo representativo.

Análisis Interpretativo: A partir de los datos entregados por los informantes se interpreta que logran comprender el concepto matemático velocidad instantánea como la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva, ya que, logran realizan tratamientos en diferentes registros, tales el registro de lenguaje natural, registro algebraico, registro aritmético y registro geométrico. Además, logran realizar la conversión entre diferentes registros, como de registro de lenguaje natural a registro aritmético, de registro geométrico a registro algebraico, entre otros.

Tabla 1

Productos de los sujetos informantes de pregunta 2

Respuesta del sujeto informante	Transcripciones
Sujeto informante 1: 	T1 = Altura = 7,6 cm Consumo= 1,9 La velocidad instantánea es la velocidad de un punto específico. $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 1{,}21$$ Es muy largo de calcular, entonces se utiliza GeoGebra.

Sujeto informante 2: 	$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=1{,}21$$ El proceso es muy largo de calcular a mano, se utiliza GeoGebra para calcular la velocidad instantánea.
Sujeto informante 3: 	$\lim\limits_{h\to 0}$ La recta tangente permite calcular este valor. 1,21

Nota. Elaboración propia.

CONCLUSIONES

La propuesta didáctica basada en la modelación matemática del consumo de velas ha demostrado ser una herramienta efectiva para introducir el concepto de derivada de manera intuitiva a estudiantes de educación media. Al vincular conceptos abstractos con experiencias concretas, se facilita la comprensión de la razón de cambio y la pendiente de la recta tangente. Los resultados evidencian que los estudiantes lograron realizar conexiones significativas entre diferentes representaciones semióticas, lo que indica un aprendizaje profundo del concepto. La combinación de la modelación matemática y el enfoque de los registros de representación semiótica ha demostrado ser una estrategia prometedora para mejorar la enseñanza de conceptos matemáticos abstractos. Sin embargo, se identificaron tanto fortalezas como áreas de mejora. Esta investigación abre nuevas perspectivas para futuras investigaciones, como ampliar la muestra, explorar otros conceptos del cálculo diferencial y evaluar el impacto a largo plazo de esta propuesta didáctica. Además, sugiere la posibilidad de implementar esta estrategia en otros niveles educativos, como en la educación superior. En conclusión, la propuesta didáctica presentada ofrece una alternativa innovadora y efectiva para la enseñanza de la derivada, contribuyendo a una mejor comprensión de este concepto fundamental en el ámbito matemático.

Referencias

Artigue, M. (1990) Épistémologie et didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques, (2.3) 241–286. Traducción Armando Cuevas, revisión José Orozco.

Blum, W., Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 45-58.

Duval, R. (2004). S*emiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle.

MINEDUC. (2019). Programa de Estudio 3º o 4º Medio FDM: Límites, Derivadas e Integrales (2ª ed. rev.). Santiago de Chile: Ministerio de Educación.

¿QUÉ TIENE TU PLATO?

UNA SITUACIÓN DE MODELACIÓN PARA LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DESDE LA TEORÍA SOCIEPISTEMOLÓGICA DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Fernando Sánchez Sanhueza, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Abstract:

Se elabora e implementa una propuesta didáctica desde una mirada socioepistemológica de la matemática educativa (TSME) con el objetivo de permitir a los/as alumnos(as) describir modelos y representar la función exponencial, valorando la dimensión social y cultural del saber matemático, basada en una investigación cualitativa de estudio de casos. El hecho de que los/as estudiantes no estén habituados a trabajar situaciones de modelación y a construir su aprendizaje en comunidad, motiva a estudiar y diseñar este tipo de propuestas. La implementación y recolección de información se realizó en una unidad educativa Técnica Profesional de la comuna de Puente Alto con 40 estudiantes de III medio de la especialidad de Gastronomía; demostrando que, en efecto, existe un débil desarrollo en la habilidad de modelamiento matemático pero que estos son capaces de poner en juego sus conocimientos previos para desarrollar la situación socializando su saber institucionalmente con la comunidad.

Modelación, TSME, Función exponencial, Estudio de casos, Aprendizaje en comunidad.

INTRODUCCIÓN

El pensamiento matemático, de acuerdo con el currículo educativo chileno, se desarrolla a partir de cuatro habilidades: resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar. En particular, la modelación permite: "construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de la realidad, para estudiarla, modificarla y/o evaluarla" (Mineduc, 2015, p.98).

En Chile, ciertos establecimientos dependen de fundaciones educacionales las cuales definen sus propias evaluaciones siempre que tributen a los Objetivos de Aprendizaje curriculares.

Como parte de este tipo de planificación, se desarrolla una actividad de innovación en una unidad educativa ubicada en la comuna de Puente Alto, Técnico Profesional, dependiente de una fundación educacional compuesta por varios colegios. Esta fundación se caracteriza por implementar pruebas estandarizadas transversales que tributan a un formato SIMCE o PAES; se despersonaliza el saber matemático y se enseña desde la dupla contenido – ejercicio, enfocado en la heurística del saber.

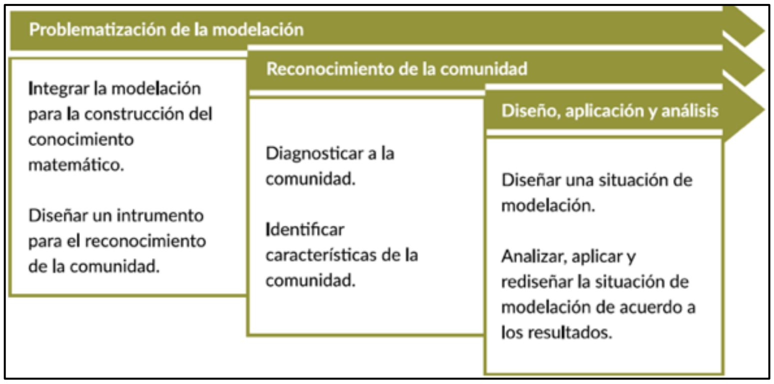
La actividad previamente mencionada, se diseña para III Medio (Gastronomía), con el objetivo de trabajar el objeto matemático de función exponencial y, desde su especialidad, la evaluación de posibles medidas de prevención asociadas a la manipulación de alimentos, valorando la importancia de las decisiones y comportamientos de cada persona en la salud de los demás. Es decir, existe la necesidad de desarrollar competencias para describir modelos (Aravena, 2016) y representar gráficamente la función exponencial, valorando la dimensión social y cultural del saber matemático.

ELEMENTOS TEÓRICOS

La actividad de innovación se diseña bajo la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013) pues reconoce y valora las experiencias y conocimientos previos de los/as estudiantes en la construcción del saber. Se consideran sus constructos: (1) la problematización del saber: usos y razón de ser del conocimiento matemático esperado; (2) la comunidad del conocimiento: localidad, intimidad y reciprocidad; (3) el uso de la gráfica: como representación que conceptualiza el concepto matemático y (4) el diseño de situaciones de modelación que se puede organizar en tres fases articuladas (Ver Figura 1): problematización de la modelación, reconocimiento de la comunidad y diseño, aplicación y análisis de la situación de modelación (Soto, 2020).

Figura 1

Diseño de situaciones de modelación, en Soto (2020)



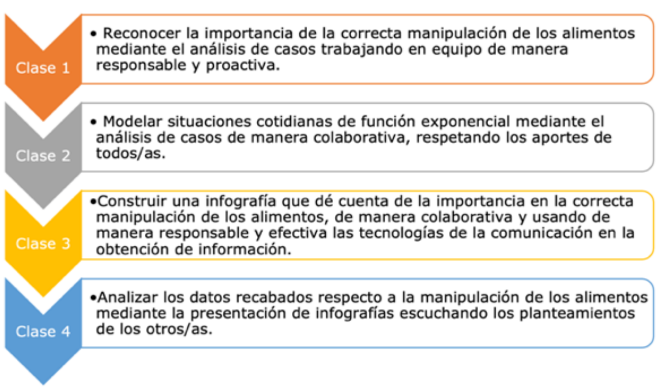
DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

Bajo el alero de un estudio de casos (Hernández Sampieri et al., 2014), la propuesta se sustenta en el diseño de una secuencia didáctica mediante situaciones de modelación en tres fases (Ver Figura 1). Se documenta la problemática del diseño de situaciones de modelación desde la TSME para resignificar el saber del objeto matemático, es decir, reinterpretar y reconstruir el conocimiento matemático a partir de su contexto social y cultural (Cantoral, 2013).

El propósito de la secuencia es construir modelos de función exponencial de manera colaborativa, mediante situaciones que involucren la correcta manipulación de los alimentos y sus consecuencias en la propagación de la bacteria *Salmonella* spp. Para esto, se implementa un cuestionario de preguntas abiertas con el objetivo de levantar información desde lo cognitivo, didáctico, epistemológico y social de los conocimientos asociados a la modelación por parte de los/as estudiantes. En complemento, se diseñan cuatro clases de 90 minutos. En la Figura 2 se presenta la organización de cada una de las clases con sus respectivos objetivos didácticos de aprendizaje.

Figura 2

Organización (por objetivo didáctico) de la secuencia asociada a cada clase

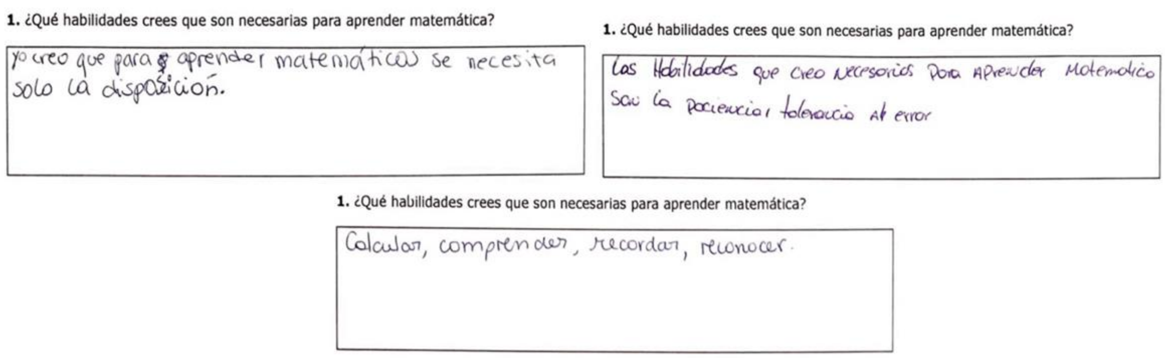


RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN

Antes: Se diseña un instrumento de tipo cuestionario, de pregunta abierta, donde se pide que los/as estudiantes respondan desde una dimensión cognitiva, didáctica, epistemológica y social los conocimientos asociados a la habilidad de modelar. Se evidencia el cómo los/as alumnos(as) relevan aspectos más bien actitudinales frente a la Matemática, pero no habilidades disciplinares como el modelar o resolver problemas, lo que refleja una enseñanza más bien estructurada y conductista enfocada en la adquisición de pasos (o secuencias) para la resolución de un ejercicio. En la Figura 3 se muestran algunos componentes actitudinales como la disposición, la paciencia, la tolerancia, etc. Uno de ellos menciona el calcular y recordar, habilidades propias de la heurística en la Matemática.

Figura 3

Algunos resultados de encuesta tipo cuestionario a estudiantes sobre la habilidad de modelación



1. ¿Qué habilidades crees que son necesarias para aprender matemática?

yo creo que para aprender matemáticas se necesita solo la disposición.

1. ¿Qué habilidades crees que son necesarias para aprender matemática?

Los Habilidades que creo necesarias para aprender Matemática son la paciencia, tolerancia al error

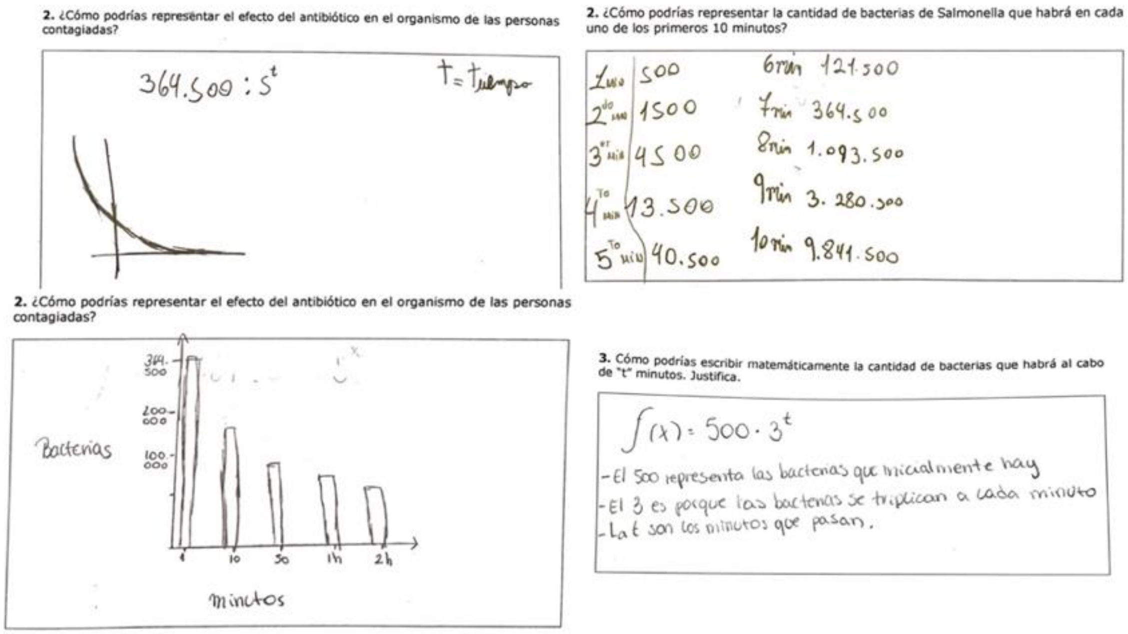
1. ¿Qué habilidades crees que son necesarias para aprender matemática?

Calcular, comprender, recordar, reconocer.

Durante: Se observa que los/as estudiantes poseen conocimientos claros y precisos del proceso de preparación y elaboración de productos culinarios de consumo inmediato en Gastronomía. En general logran identificar que el crecimiento de la bacteria de Salmonella es muy rápido, mostrando el modelo esperado para representar las bacterias presentes en el minuto *t*, entregando argumentos que justifican cada elemento de la función. Además, interpretan correctamente el efecto de un antibiótico en el organismo, pero con una diversidad de representaciones que si bien, apuntan a un efecto de decrecimiento de las bacterias de Salmonella (Ver Figura 4), en lo hegemónico del discurso matemático escolar tradicional, poseen distintos niveles de pertinencia para explicar el fenómeno.

Figura 4

Respuestas propiciadas por los equipos de trabajo al representar la situación de función exponencial



Después: Estudiantes difunden institucionalmente el aprendizaje construido en equipos de trabajo con los demás cursos del establecimiento escolar, socializando el saber y los aprendizajes desarrollados mediante una infografía como producto (Ver Figura 5). Aquí se plasman las reflexiones sobre los aprendizajes adquiridos respecto a la correcta manipulación de los alimentos con base en argumentos matemáticos, democratizando el conocimiento como parte del proceso educativo.

Figura 5

Infografías realizadas por los/as estudiantes respecto a la correcta manipulación de los alimentos

CONCLUSIONES

La propuesta consideró, desde la TSME, tres fases conectadas: problematización de la situación de modelación (desde su especialidad en Gastronomía con la correcta manipulación de los alimentos), reconocimiento de la comunidad y diseño, aplicación y análisis de una situación de modelación. La propuesta permitió: (1) diseñar una situación considerando la habilidad de modelar y el reconocimiento de la comunidad; (2) tensionar lo matemático y lo social en cuanto las/os estudiantes utilizan su experiencia previa para matematizar la problemática planteada; (3) difundir y socializar con la comunidad escolar: estudiantes, profesores y funcionarios los resultados de la actividad de modelación y (4) romper con la estructura tradicional del proceso enseñanza-aprendizaje que se venía llevando a cabo en el establecimiento, dando paso a que los/as estudiantes pongan en juego sus conocimientos para construir su aprendizaje socialmente y desde sus conocimientos previos.

Referencias

Aravena, M. (2016). *Modelación matemática en Chile - Investigaciones latinoamericanas de modelación*. Gedisa editorial.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa*. Gedisa editorial.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Interamericana.

Mineduc Chile (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*.

Soto, D. (2020). Diseño de situaciones de modelación. *UCMaule*, (58), 107-139.

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO DE LOGARITMOS EN ESTUDIANTES DE SEGUNDO AÑO MEDIO A TRAVÉS DE SCRATCH PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES DIGITALES

Patricia Andrea Peñailillo Olmos, Colegio Alberto Blest Gana

Abstract:

Dada la necesidad de integrar la tecnología en el proceso de enseñanza de manera transversal para el desarrollo de habilidades, se diseña e implementa una experiencia de aula que describe el proceso de diseño de un juego educativo desarrollado en Scratch, orientado a la evaluación del contenido de logaritmos por estudiantes de segundo año medio en Chile. Con ella se promueve un enfoque activo y significativo que fomente el interés de los estudiantes en las matemáticas, centrado en el proceso creativo y exploratorio por los estudiantes, potenciando el pensamiento computacional, una habilidad esencial en el siglo XXI. La experiencia se enmarca en las nuevas Bases Curriculares que priorizan la alfabetización digital y el uso innovador de la tecnología en la educación. Los resultados indican un aumento en la motivación y la comprensión de los estudiantes sobre el contenido, favoreciendo la metacognición y el pensamiento divergente por medio de la auto evaluación y la evaluación entre pares.

[Scratch, Logaritmos, Tecnología, Pensamiento Computacional, Juegos]

INTRODUCCIÓN

La experiencia de aula presente evidencia el desarrollo de un juego de Scratch para la evaluación del contenido de Logaritmos por estudiantes de segundo año medio en Chile. La justificación para esto se encuentra en la creciente necesidad de implementar experiencias de aula con el uso de tecnologías para el desarrollo de habilidades necesarias para el futuro. Se presenta detalladamente la propuesta implementada, seguida de los resultados en cuanto a los juegos creados y el proceso de evaluación de los mismos.

ELEMENTOS TEÓRICOS

La educación ha tenido que adaptarse a las demandas del siglo XXI, incluyendo la integración de tecnología en el aula. Según Gómez (1997), aunque la tecnología no resuelve todos los problemas en la enseñanza de las matemáticas, su inclusión es crucial para transformar el paradigma educativo. En un estudio posterior, Gómez (2004) enfatiza que el uso de tecnología debe ser planificado con un propósito específico, orientado a actividades que proporcionen experiencias matemáticas significativas para el aprendizaje.

En línea con lo anterior, es que, a partir de la necesidad del mundo actual frente a la resolución de problemas por medio de recursos tecnológicos, se reconoce la habilidad del pensamiento computacional. Esta es definida por primera vez por Jeannete Wing en 2006 destacando la importancia no solo para personas cercanas al área de la informática, si no que para toda persona, luego en 2010 establece el pensamiento computacional como los procesos mentales para la formular problemas y soluciones representados de manera digital por agentes informáticos (Wing, 2010), permitiendo que los estudiantes desarrollen capacidades de resolución de problemas que son aplicables a múltiples disciplinas.

Para Zapata (2015) la relevancia del pensamiento computacional radica en que, en el mundo digital actual, esta permite el desarrollo de habilidades esenciales para la vida como son la metacognición, creatividad, pensamiento abstracto, entre otros, lo cual permite afrontar problemas científicos y tecnológicos.

En el contexto chileno, el contenido de logaritmos se ubica actualmente en el programa de estudios del nivel de segundo medio, en el eje de números, donde se espera que los estudiantes sean capaces de describir la relación entre potencias y logaritmos aplicándolo en la resolución de problemas (Ministerio de Educación, 2015). En este objetivo de aprendizaje no se señala el uso de tecnología ni software para el aprendizaje, sin embargo, las Bases Curriculares para tercero y cuarto medio dan énfasis en el desarrollo de habilidades para el siglo XXI, entre las cuales destaca la alfabetización digital. Esta competencia promueve el uso creativo e innovador de la tecnología para el desarrollo del pensamiento computacional (Ministerio de Educación de Chile, 2019).

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

La experiencia de aula se planificó y aplico en el nivel de segundos medios de un colegio particular subvenciado de la comuna de San Ramón, en ella se esperaba que los estudiantes pudieran trabajar de manera autónoma y colaborativa a través del uso de Scratch, utilizado como plataforma para plasmar los conocimientos adquiridos sobre el concepto de logaritmos.

De esta forma, el objetivo por evaluar fue que los estudiantes fueran capaces de diseñar por medio de la Programación en bloque de Scratch un juego donde se utilizan logaritmos. Para el logro de este objetivo se organizó las ocho sesiones de clases, que fueron desde un pequeño recordatorio de las funciones matemáticas en Scratch, hasta una presentación final, tal y como se detalla a continuación en tabla 1:

Tabla 1

Cronograma de actividades

Número de clase	**Descripción de actividad**
1	- Actividad introductoria de reconocimiento de bloques con operatoria en Scratch.
	- Selección de grupos de trabajo y roles dentro del grupo. - Definición de elementos del juego a desarrollar: Tipo de juego, objetivo del juego, elementos de Programación.

2	
3 – 6	- Desarrollo del juego en Scratch de manera autónoma y grupal
7	- Preparación de presentación y autoevaluación
8	- Presentación grupal Coevaluación y Heteroevaluación.

En detalle, durante las dos primeras clases se definió a los estudiantes las características del juego solicitado en Scratch además de establecer roles dentro de cada equipo compuesto de cuatro a cinco estudiantes debido a la cantidad de recursos tecnológicos del establecimiento.

En las siguientes tres clases los grupos trabajaron de manera autónoma según los roles asignados por ellos mismos, pero sugeridos por la docente, y siguieron además una autoevaluación clase a clase en la cual se solicitaba por ejemplo escribir a mano parte relevante del código que iban desarrollando, y describir cómo este permitía cumplir con el objetivo de un juego interactivo con logaritmos.

Durante la séptima clase los estudiantes comenzaron a preparar la presentación de su juego a partir de una rúbrica de autoevaluación y coevaluación. Esta fue utilizada durante la octava y última sesión donde de manera libre los estudiantes pudieron analizar los diferentes juegos de sus compañeros, para luego evaluar a un grupo asignado y ser evaluados por la docente.

Con esto la experiencia de aula culmina analizando fortalezas y debilidades del proceso de trabajo y cómo este aporta o no para la evaluación de sus conocimientos.

RESULTADOS

Los resultados más relevantes en torno a la implementación de la experiencia de aula se recogieron por medio de registros escritos de los estudiantes en la guía de autoevaluación, además de registros audiovisuales del proceso de creación y presentación de los juegos.

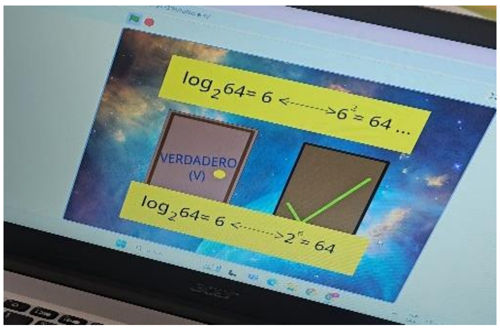
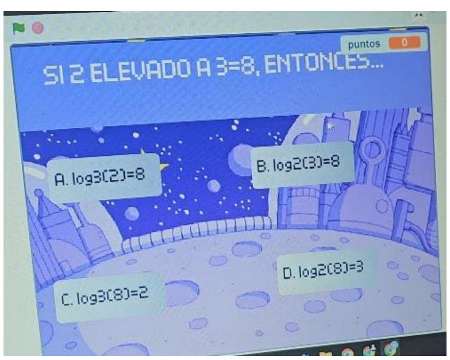
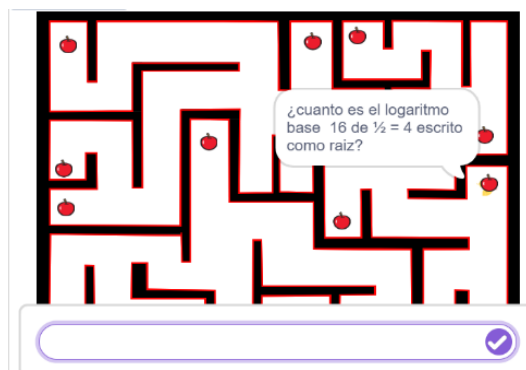
En cuanto a las guías de autoevaluación, en primer lugar, al consultar por "¿Consideras que la programación es una manera efectiva de evaluar tu aprendizaje?", muchas respuestas coinciden en que es una manera atractiva y diferente, por lo que los motivaba a implementar su aprendizaje en otro contexto, sin embargo, hay quienes difieren señalando que es muy fácil copiarse.

En otra consulta, respecto a auto evaluar la efectividad del juego creado en términos de proceso y el trabajo matemático, varios estudiantes destacan el trabajo en equipo. Esto pues a algunos estudiantes se les hacía más fácil el concepto de logaritmos y se complementaban con quienes tenían fortalezas en el ámbito de la programación, a su vez, existen quienes diseñan partes del juego. Se enfatiza en el auto aprendizaje, cuando muchas veces querían realizar acciones fuera de lo aprendido a la fecha, buscaron videos y se apoyaron en compañeros de otros niveles educativos para la resolución de estos problemas.

Respecto a los juegos creados, se encuentra una amplia variedad de tipos de ellos, existen diversos formatos de juegos y preguntas, desde respuestas escritas y selección múltiple hasta escenarios interactivos como laberintos, historias o puertas para elegir. Todo lo anterior, se visualizan en las siguientes imágenes.

Figura 1

Juegos confeccionados

 Juego con preguntas en puertas y corrección.	 Juego de pregunta aplica la propiedad de multiplicación de logaritmos.
 Juego de preguntas que evidencia la relación de potencias con logaritmos.	 Juego de laberinto evidencia la relación de raíz con logaritmos.

CONCLUSIONES

Se visualiza que la experiencia de aula fue exitosa, los juegos confeccionados por los estudiantes cumplieron ampliamente con las expectativas planteadas en un inicio. El hecho de no haber puesto parámetros establecidos en su creación permitió que los grupos exploraran creativamente el programa poniendo en evidencia sus gustos personales en torno a los juegos,

Con esta experiencia se evidencia las posibilidades para el desarrollo del Pensamiento Computacional de manera transversal en la asignatura de matemática, alineándose con la propuesta para nuevas Bases Curriculares. Siendo una invitación a aplicar nuestras prácticas educativas y permitir el desarrollo creativo con tecnologías dentro de la sala de clases, por ejemplo, utilizando la programación en el proceso de aprendizaje y no solo en la evaluación.

REFERENCIAS

Ministerio de Educación. (2019). *Bases Curriculares 3º y 4º medio.* Santiago de Chile.

Ministerio de Educación de Chile. (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio.* Santiago de Chile.

Wing, J. M. (2010). *Computational thinking: What and why?* Carnegie Mellon University. https://www.cs.cmu.edu/~CompThink/

Zapata-Ros, M., (2015). Pensamiento computacional: Una nueva alfabetización digital. RED. Revista de Educación a Distancia, (46), 1-47.

PENSAMIENTO COMPUTACIONAL Y SCRATCH UNA PROPUESTA DE AULA

Adiel Jeremías Silva Riveros, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Abstract:

El Pensamiento Computacional (PC) ha ganado relevancia en la educación chilena, considerándose como una habilidad básica, debido a su potencial para resolver problemas y su aplicación en diversos contextos. El currículum nacional promueve el desarrollo del PC y habilidades digitales a través de diversas asignaturas, como matemática y tecnología, con el propósito de desarrollar habilidades de resolución de problemas y utilizarlas en diversos contextos tecnológicos. El currículum nacional propone, por medio de la asignatura de tecnología, desarrollar habilidades digitales y el PC. Scratch, al ser un programa que utiliza la programación en bloque, se presenta como una herramienta sencilla pero valiosa para introducir a la comunidad estudiantil en la programación, y de esta forma, desarrollar el PC, habilidades digitales y la resolución de problemas. La propuesta de aula se implementa en un colegio de San Bernardo, y su diseño considera cuatro fases: contextualización y diagnóstico, planificación, implementación y evaluación. La propuesta que se lleva a cabo en la asignatura de robótica en el 7° nivel. Para ello, considera la contextualización y *diagnóstico realizado, y se propone desarrollar el PC junto con habilidades digitales por medio de la programación en Scratch para fomentar la participación de este nivel en la feria científica del establecimiento. La propuesta de aula promueve la participación estudiantil y el trabajo colaborativo entre docentes. Se propone un enfoque para futuras implementaciones según el nivel educativo, desde la programación, hasta el estudio de los fenómenos físicos.*

Pensamiento Computacional, Scratch, programación, habilidades digitales, propuesta de aula

INTRODUCCIÓN

El Pensamiento Computacional (PC) se ha vuelto relevante para la educación actual chilena, a tal punto que es considerado como una de las habilidades básicas, en conjunto con la habilidad de leer, escribir y calcular (Roberts Molina, 2019). El currículum nacional promueve el desarrollo del PC en los estudiantes, ya que considera que se encuentra inherente en el mismo aprendizaje de la matemática (MINEDUC, 2021). En la educación primaria, el PC debe desarrollarse por dos razones. En primer lugar, fomenta la habilidad de resolución de problemas mediante la descomposición del problema, el reconocimiento de patrones y la creación de una secuencia de pasos para su solución. En segundo lugar, las habilidades que desarrolla el PC promueven que los estudiantes, en un futuro, puedan aplicar estas soluciones en dispositivos tecnológicos, diferenciándose de los usuarios de la sociedad actual (Iglesias y Bordignon, 2020; Roberts Molina, 2019).

Si bien, existe en el curriculum nacional el diferenciado de Pensamiento Computacional y Programación para los niveles de 3° y 4° medio, no es el único nivel donde se desarrollan las habilidades del PC. En 7° básico también se busca desarrollar habilidades digitales, por medio de la asignatura de tecnología. Entre sus objetivos de aprendizaje (OA) se encuentra el OA 02 que corresponde a “Diseñar e implementar soluciones que respondan a las necesidades de reparación, adaptación o mejora de objetos o entornos, haciendo uso eficiente de recursos materiales, energéticos y digitales” (MINEDUC, 2015, p. 384). A partir de lo anterior surge la siguiente pregunta ¿Cómo diseñar una propuesta de aula que considere el OA 02, con el fin de desarrollar en estudiantes de 7° básico el PC y habilidades digitales?

En este estudio se propone construir una propuesta de aula contextualizada que considere el OA 02, con el fin de desarrollar en estudiantes de 7° básico el PC y habilidades digitales.

MARCO CONCEPTUAL

Pensamiento computacional

El PC es una habilidad cognitiva fundamental a desarrollar en el estudiantado, debido a su potencial para resolver problemas en base a los principios de la lógica de programación y su aplicación en diversos contextos. El PC incluye la formulación de problemas con una computadora, con el fin de identificar, analizar, implementar, generalizar y transferir las soluciones factibles (Salamanca Garay y Badilla Quintana, 2021). El PC desarrolla habilidades del pensamiento como: descomponer un problema en partes más pequeñas, evaluar y detectar posibles desperfectos, abstraer con el fin de conceptualizar y comprender objetos complejos, generalizar a través del reconocimiento de patrones, y pensar algorítmicamente para resolver un problema de forma progresiva.

Scratch

Scratch es un programa desarrollado por el Instituto Tecnológico de Massachussets (MIT). Este programa utiliza un lenguaje de programación en bloques, lo que permite que sea una herramienta sencilla para desarrollar el pensamiento computacional, el pensamiento creativo, junto con diversas habilidades como: imaginar, crear, jugar, colaborar, reflexionar, solucionar problemas, entre otras. Gracias a su interfaz y su modo de uso, Scratch puede considerarse como un software propicio para que la comunidad estudiantil se sumerja en el mundo de la programación (Taco Coayla, 2019).

Además de ser un programa popular debido a su sencillez, Scratch se ha consolidado como una de las herramientas más utilizadas a nivel mundial para el aprendizaje inicial de la programación (García Rodríguez, 2022). Scratch promueve el desarrollo de habilidades para el siglo XXI, al desarrollar habilidades de procesamiento de la información, comunicación, pensamiento computacional y creativo, junto con la resolución de problemas, por medio de la creación y edición de entornos digitales. Scratch promueve la búsqueda de soluciones innovadoras a problemas inesperados, y a estar preparados para diseñar nuevas soluciones ya que su utilización implica no solo aprender a solucionar problemas de manera predefinida, sino a estar preparado para generar nuevas soluciones conforme surgen nuevos problemas (García Rodríguez, 2022).

METODOLOGÍA

La propuesta de aula se llevará a cabo en el mes de octubre en un colegio de San Bernardo. Para el desarrollo de la propuesta, y para la investigación como tal, se han diseñado cuatro fases, las cuales son: Contextualización y diagnóstico, planificación, implementación y evaluación.

1. Contextualización y diagnóstico: Se elabora un estudio del colegio de San Bernardo, considerando proyecto educativo institucional (PEI), reglamento de convivencia escolar y de evaluación, entrevistas con los docentes, estudiantes y directivos. También se considera el contexto del curso y los contenidos abordados antes de la implementación de la propuesta.

2. Planificación: En base a la contextualización y diagnóstico, se elabora una propuesta de aula acorde a la realidad educativa y a las necesidades del propio establecimiento.

3. Implementación: Se lleva a cabo la propuesta de aula diseñada en la fase de planificación.

4. Evaluación: Se evalúan los aprendizajes de los estudiantes y la reacción de la comunidad educativa ante la propuesta, además se verifica si las necesidades del liceo han sido abordadas.

Para evaluar la propuesta, se diseña un formulario dirigido a los estudiantes de 7° básico que considere el proceso de implementación de la propuesta de aula, junto con aspectos pertinentes al contexto educativo. Además, se toma en consideración la percepción de la comunidad educativa en torno a la propuesta de aula diseñada.

RESULTADOS

En base a la metodología presentada, se han presentado los siguientes resultados en torno a la primera fase: El establecimiento tiene incorporado para el 7° nivel la asignatura Robótica, la cual tiene por propósito desarrollar habilidades digitales y el pensamiento computacional; la asignatura se ha desarrollado por medio de la realización de actividades en Scratch y otros programas con lenguaje de programación en bloque; el establecimiento requiere que el 7° nivel participe de una feria científica que se llevará a cabo el mes de noviembre.

Considerando el diagnóstico, se planifica una propuesta de aula que tiene por objetivo: Desarrollar el pensamiento computacional en estudiantes de 7° básico a través de la creación de un juego en Scratch. Esta propuesta considera cuatro clases de 45 minutos cada una, cuyos objetivos son:

1. Programar el movimiento del personaje del juego.

2. Diseñar los elementos gráficos del juego como personaje, escenario, fondo, trampas y meta.

3. Programar la interacción del personaje con su entorno.

4. Analizar los fenómenos físicos presentes en el juego.

Cabe destacar que, para el desarrollo de estas clases, se ha elaborado una plantilla base en Scratch para agilizar el proceso de implementación. También se han diseñado cuatro guías de aprendizaje (una para cada clase), para que los estudiantes puedan construir su juego de forma progresiva.

Para evaluar el aprendizaje de los estudiantes, se ha diseñado un formulario dirigido a los estudiantes de 7° básico, que considera los siguientes aspectos: (1) Preguntas orientadas a la construcción del juego. (2) Preguntas orientadas a los fenómenos físicos que se encuentran en el juego. (3) Preguntas orientadas a la programación de los fenómenos físicos. (4) Entrega del juego.

Respecto al proceso de implementación, se desarrolla en el laboratorio de computación del establecimiento. No se logra realizar un trabajo colaborativo con el profesor de física debido al tiempo acotado. Los estudiantes llevan a cabo las actividades en equipos de trabajo. Cabe destacar que se realizaron 5 clases en lugar de 4, debido a factores que retrasaron el proceso: muchos estudiantes olvidaron sus cuentas de Scratch y dedicaron tiempo a recuperarlas en lugar de realizar las actividades propuestas; además, la mayoría no leyó las guías de aprendizaje, lo que retrasó las retroalimentaciones y el avance de las actividades. A pesar de estos inconvenientes, los estudiantes logran completar las actividades de manera satisfactoria y superan las expectativas al ir más allá de las propuestas iniciales.

La propuesta se centra en el desarrollo del pensamiento computacional y las habilidades digitales de los estudiantes a través de la creación de un juego en Scratch. La propuesta también permite diseñar e implementar soluciones a partir de los problemas que van surgiendo en el proceso de creación del juego, utilizando de manera eficiente los recursos digitales. De esta forma, la propuesta cumple con el objetivo de aprendizaje planteado.

CONCLUSIONES

El desarrollo del PC en la comunidad estudiantil es fundamental para prepararlos para su futuro. Las fases de contextualización y diagnóstico, planificación, implementación y evaluación permiten desarrollar una propuesta de aula acorde a la realidad educativa. Gracias a la propuesta, también es posible desarrollar el pensamiento crítico, la creatividad, la autonomía y la resolución de problemas. El potencial de la propuesta radica en su adaptabilidad y versatilidad para replicarse en otros niveles y contextos educativos. La utilización de Scratch no solo promueve el desarrollo de habilidades del siglo XXI e introduce a los estudiantes en la programación, sino que también facilita la comprensión de conceptos complejos. En síntesis, este tipo de propuestas pueden transformar la educación de manera significativa al vincularla con los intereses y habilidades de los estudiantes.

Finalmente, para futuras implementaciones, se propone: primero, considerar la realidad y las necesidades del establecimiento educacional; segundo, promover un aprendizaje interdisciplinario en cuanto sea posible; tercero, señalar y recordar a los estudiantes la importancia de recordar sus cuentas y utilizar el material brindado; y cuarto, crear una instancia en la que los estudiantes puedan presentar sus juegos a la comunidad escolar.

Referencias

García Rodríguez, A. (2022). Enseñanza de la programación a través de Scratch para el desarrollo del pensamiento computacional en educación básica secundaria. *Revista Academia y Virtualidad*, *15*(1), 161–182.

Iglesias, A., y Bordignon, F. (2020). *Introducción al pensamiento computacional*. CLACSO.

MINEDUC. (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio* (Primera edición: julio de 2016). Ministerio de Educación. Unidad de Currículum y Evaluación,

MINEDUC. (2021). *Programa de Estudio Pensamiento Computacional y Programación 3° y 4° medio*. Ministerio de Educación, Unidad de Currículum y Evaluación.

Roberts Molina, R. (2019). *Conceptos: Pensamiento Computacional y Ciudadanía Digital, en sus acepciones relativas a la educación escolar*. Biblioteca del Congreso Nacional de Chile. https://www.bcn.cl/asesoriasparlamentarias/detalle_documento.html?id=74486

Salamanca Garay, I. J., y Badilla Quintana, M. G. (2021). Del pensamiento computacional al pensamiento creativo. *Revista ICONO 14. Revista científica de Comunicación y Tecnologías emergentes*, *19*(2), 261–287. https://doi.org/10.7195/ri14.v19i2.1653

Taco Coayla, R. A. (2019). *INFLUENCIA DEL PROGRAMA SCRATCH EN EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN ESTUDIANTES DEL NIVEL PRIMARIO* [Universidad Privada de Tacna]. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.32142.89926

Propuesta Didáctica: Oscilaciones de un Resorte en Matemáticas

Víctor Sazo, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Abstract:

Este trabajo presenta una propuesta didáctica sobre las oscilaciones de un resorte para estudiantes de 2°medio, mediante dos enfoques: el uso de simulaciones y la experimentación real. A través de herramientas como Tracker y PhyPhox, se analizaron los movimientos oscilatorios en diferentes escenarios, permitiendo comparar el comportamiento de un resorte simulado con uno real. Este análisis es útil para entender cómo se comporta el movimiento oscilatorio amortiguado y evaluar la validez de las simulaciones frente a la realidad.

Palabras clave: oscilaciones, resorte, simulación, Tracker, PhyPhox

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene como objetivo estudiar el fenómeno de las oscilaciones de un resorte. Cuando una masa es separada de su posición de equilibrio en un resorte, ésta oscila de forma periódica. Para realizar este estudio, se ha diseñado un experimento utilizando tanto simulaciones como un resorte real.

OBJETIVO GENERAL

Que los estudiantes de 2° Medio comprendan el movimiento oscilatorio amortiguado a través de la experimentación real y simulada con un resorte, analizando los datos obtenidos para identificar patrones y relaciones matemáticas clave.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1. Identificar las características del movimiento oscilatorio amortiguado a través de la observación de un resorte.

2. Aplicar herramientas digitales para la captura y análisis de datos (Tracker, PhyPhox, y simulaciones en PHET).

3. Describir matemáticamente el movimiento oscilatorio amortiguado usando funciones trigonométricas y ecuaciones.

4. Comparar resultados experimentales y simulados, analizando discrepancias y sus posibles causas.

ELEMENTOS TEÓRICOS

La propuesta se centra en la comprensión del movimiento oscilatorio amortiguado, abordado a través de fundamentos matemáticos y tecnológicos. En términos matemáticos, se estudia la ecuación:
$x(t) = Ae^{-at} cos(\omega t + \varphi)$ (Ríos et al, 2017). Esta ecuación describe cómo una masa en oscilación pierde energía debido a factores como la fricción, lo que genera un patrón de decrecimiento exponencial en la amplitud de las oscilaciones.

Además, la propuesta fomenta el desarrollo del pensamiento computacional, una competencia clave en la resolución de problemas complejos. Este enfoque se integra a través de:

1. **Descomposición de Problemas:**
   El experimento se divide en fases manejables (simulación, recolección de datos y análisis), lo que permite a los estudiantes abordar el fenómeno de manera estructurada.
2. **Reconocimiento de Patrones:**
   Durante el análisis gráfico, los estudiantes identifican regularidades y relaciones, como la dependencia de la frecuencia con la masa o la influencia del amortiguamiento en la oscilación.
3. **Abstracción:**
   Se emplean modelos matemáticos y herramientas digitales que simplifican la representación del movimiento, permitiendo abstraer las condiciones reales para facilitar su estudio.
4. **Algoritmos y Automatización:**
   El uso de aplicaciones como PhyPhox y Tracker permite automatizar procesos de

recolección y análisis de datos, introduciendo a los estudiantes a prácticas computacionales esenciales en la investigación científica.

Este enfoque se basa en la definición de pensamiento computacional de Jeannette M. Wing (2010).

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

1. Simulación: usar la plataforma PHET para que los estudiantes experimenten virtualmente con las oscilaciones de un resorte.
2. Recolección de datos: a través de la simulación, los estudiantes observarán cómo cambian los parámetros de la oscilación al variar la masa, la constante del resorte y la fricción.
3. Análisis gráfico: obtener los gráficos de posición en función del tiempo.

Experimento real con resorte

Montaje del experimento: proporcionar a los estudiantes un resorte, una masa conocida y herramientas de medición.

Medición con PhyPhox: los estudiantes utilizarán sus teléfonos con la aplicación PhyPhox para registrar los datos del movimiento del resorte.

Registro visual con Tracker: grabar el movimiento y analizarlo con Tracker para obtener el gráfico de posición vs tiempo.

Experimentación con PhyPhox.
En esta fase, los estudiantes usarán la aplicación PhyPhox en sus teléfonos móviles para medir las oscilaciones del resorte. La aplicación utilizará el sensor del teléfono (acelerómetro o magnetómetro) para registrar los datos en tiempo real.

Pasos:
1. Configuración del experimento: colocar el teléfono móvil en una plataforma que oscile o adherirlo a una masa sujeta a un resorte. Utilizar la función de sensor de aceleración para registrar la aceleración y posición del teléfono en el tiempo.
2. Recolección de datos: Registrar las lecturas del sensor durante las oscilaciones del resorte y exportar los datos para análisis.
3. Análisis gráfico: obtener los gráficos de posición y aceleración en función del tiempo para compararlos con los resultados de las fases anteriores.

Comparación de resultados.

1. Comparación: los estudiantes compararán los gráficos obtenidos en la simulación de PHET y los datos experimentales recogidos con PhyPhox y Tracker.
2. Análisis de discrepancias: se guiará a los estudiantes para que identifiquen y expliquen las diferencias, tales como la fricción y la resistencia del aire en el experimento real, frente a las condiciones ideales de la simulación.

RESULTADOS

Los estudiantes deberán ser capaces de:

- Interpretar gráficos de posición con respecto al tiempo.

- Calcular parámetros como la constante del resorte, la amplitud, entre otros, a partir de los datos experimentales.

- Deducir las limitaciones de los experimentos reales en comparación con las simulaciones.

La evaluación, pensada de manera formativa, se llevará a cabo en base a:
1. Reportes grupales sobre los experimentos realizados.

2. Gráficos y cálculos comparativos entre los datos simulados y experimentales.

3. Discusión crítica en equipo sobre las fuentes de error y posibles mejoras en el diseño experimental.

El análisis de los resultados se centrará en comparar los gráficos obtenidos en las tres fases experimentales:
- Fase 2 (Simulación PHET): Condiciones ideales, sin fricción ni factores externos. El gráfico muestra un patrón predecible y suave.
- Fase 3 (Experimento Real con Tracker): Los datos presentan mayor dispersión debido a la fricción, resistencia del aire y otros factores externos. La calidad del gráfico puede depender de la precisión de la grabación visual.
- Fase 4 (PhyPhox): Los datos del sensor deben ser más precisos y continuos en comparación con Tracker, pero aún sujetos a las condiciones del experimento real. Se esperan variaciones más suaves, pero influenciadas por la sensibilidad del sensor.

CONCLUSIONES

Los estudiantes deben comparar los tres gráficos, observando las diferencias entre las condiciones ideales y las reales. Se prestará especial atención a los factores que afectan las mediciones reales, como la fricción y los errores experimentales, y cómo las herramientas digitales como Tracker y PhyPhox mejoran la calidad y precisión de las mediciones.

BIBLIOGRAFÍA

Ríos, V., Montero, G., Román, A., García, A. (2017). Simulación experimental para la enseñanza del movimiento oscilatorio. Latin-American Journal of Physics Education, 11(1), 7.

Wing, J.M. (2010). Computational Thinking: What and Why?

Taller de Pensamiento computacional entre matemática y Bacteriología Clinica

Fernanda Freite, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Alessandro Roco, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Paulina Sepúlveda, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Arturo Levican, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Isabel Cantillana, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

Esta contribución tiene como propósito compartir experiencias de aula desarrolladas en el marco de un taller de robótica, dirigido a estudiantes de tercer año de Tecnología Médica de la PUCV que cursan la asignatura de Bacteriología clínica. En este taller, de 8 horas pedagógicas, los estudiantes aprendieron conceptos de pensamiento computacional y técnicas de búsqueda. Posteriormente, se les introducoal lenguaje de programación visual por bloques mediante el software Mblock, con el objetivo de programar un robot para identificar de forma básica un conjunto de bacterias, mediante la detección de patrones de colores, mientras se desplaza siguiendo trayectorias simples. La experiencia de aula permitió que 40 estudiantes de Tecnología Médica, agrupados en equipos, lograran programar a 8 robots Mbot2 para que estos entreguen respuestas en formato de texto, patrones de luces led y audio. Asimismo, los resultados de dos encuestas, de percepción y motivación, dan cuenta de una valoración altamente positiva de los estudiantes.

Palabras claves. Robótica, Pensamiento Computacional, Programación.

INTRODUCCIÓN

Para la carrera de Tecnología Médica, y más aún en el ramo de bacteriología, es necesario que los estudiantes sean capaces de identificar diferentes bacterias a partir de sus algoritmos de búsqueda correspondientes. Sin embargo, se ha observado que los estudiantes tienen dificultades al momento de ordenar los resultados de las pruebas de indentificación de bacterias o de seguir algoritmos de identificación de un modo coherente.

Con el objetivo de abordar estas dificultades se creó este taller interdisciplinar entre el Instituto de Matemáticas (IMA) y Tecnología Médica (TM), con el financiamiento del programa de Desarrollo Docente PUCV (DD). Este taller buscó desarrollar el pensamiento computacional y las competencias digitales mediante la programación básica de un robot educativo, además de determinar la percepción y la motivación de los estudiantes tras la experiencia.

ELEMENTOS TEÓRICOS O CONCEPTUALES

Se considera que el "Pensamiento Computacional es un conjunto de habilidades para resolver problemas de forma sistémica, utilizando principios fundamentales de la informática. Esto implica habilidades como descomponer problemas, crear abstracciones, automatizar los procesos y evaluar las soluciones" (Weintrop et al., 2016).

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

El taller consta de 4 sesiones de dos horas pedagógicas. Primero se les introducen conceptos como el pensamiento computacional y algoritmos de búsqueda. En la segunda sesión los estudiantes se familiarizaron con la programación a través del software visual de bloques Mblock, en esta sesión los estudiantes programaron objetos del entorno (por ejemplo, avanzar, retroceder, girar). En la tercera sesión los estudiantes aplican lo aprendido para programar el robot Mbot2 con la programación en bloques y aprenden a usar sus sensores. En la cuarta sesión, los estudiantes realizan una actividad evaluada, en la cual reciben una reciben una ficha, con una serie de bacterias y deben crear un algoritmo de identificación que el robot debe seguir.

Para evaluar la efectividad de la propuesta, se aplican una encuesta en dos momentos: al inicio de la primera sesión, para medir el nivel de expectativas; y tras la actividad evaluada, para recoger percepciones y niveles de motivación de los estudiantes.

Sesión 1 (unplugged)

La primera clase tuvo como objetivo introducir el pensamiento computacional, el concepto de algoritmo y estrategias de búsqueda. Para ello la sesión comienza con la pregunta: "¿Cómo se puede preparar un pan con queso?" (duración de la actividad: 5 minutos), y a través de la retroalimentación de sus respuestas se reconoce lo que es un algoritmo.

Luego, mediante ejemplos de la disciplina conocidos por los estudiantes, como algoritmos para reconocer la diabetes gestacional o el diagnóstico de síndrome de Cushing, se exploran los componentes de los flujogramas, siendo posible plasmar diferentes tipos de algoritmos y reconociendo que existen algoritmos más óptimos que otros, según las condiciones de estudio.

Posteriormente, los estudiantes realizan un flujograma en lápiz y papel, para identificar una fruta de un conjunto de ellas (naranja, plátano, frutilla, manzana) (duración de la actividad: 5 a 10 minutos). Al finalizar, se repitió el procedimiento asociándolo a su disciplina, identificando cuatro bacterias pertenecientes a los Bacilos Gram Negativos. Para ello, se les entrega una ficha con las características de cada bacteria, que contenía la información necesaria para crear el flujograma de identificación. (Duración de la actividad: 10 a 15 minutos).

Sesión 2 (plugged)

La segunda clase inició con la definición de programa (algoritmo para ser ejecutado en un computador), junto a la presentación del software Mblock y su interfaz. Posterior a ello, se mostraron los bloques output, que corresponden a sonidos, apariencias, y movimientos del objeto. Luego se presentaron los bloques de control, considerados fundamentales para cualquier tipo de programación, pues con ellos se generan bucles y condiciones.

Con el conocimiento sobre estos bloques se realizó una actividad que solicitaba al objeto escribir “voy a hacer un cuadrado”, y proceder a dar un paseo girando 90° tres veces para realizar un cuadrado, terminando con un audio “meow” (Duración de la actividad: 5 a 10 minutos).

Asimismo, los estudiantes tuvieron experiencias con los sensores del objeto. En esta sesión se presentó el sensor de teclado, que permite escribirle al objeto, y este guarda el texto como variable.

Finalmente, utilizando el flujograma de las frutas, se les solicitó a los estudiantes crear un código, con respuestas de “si” o “no” para que el objeto pueda a identificar la fruta (Duración de la actividad: 10 a 15 minutos).

Sesión 3 (plugged)

La tercera clase comenzó con un repaso, mediante una actividad con el objeto. Luego se presentó al robot Mbot2, precisando sus componentes, cómo debía conectarse y la sección del programa destinada para dispositivos. Una vez reconociendo el robot se comenzó a trabajar con los bloques de programación. Los primeros en ser estudiados fueron los outputs (texto por pantalla, luces led y sonidos), y luego, los sensores RGB del robot y su utilidad para detectar líneas y colores. También, en esta instancia se hizo un pequeño recordatorio de los comandos de control, para así dar inicio a la primera actividad de la clase, en la que se solicitó a los alumnos que crearan un código en que el robot, al detectar el color morado, reproduzca el audio “guau” (Duración de la actividad: 10 a 15 minutos).

Asimismo, se mostro los bloques correspondientes al movimiento del robot. Estos fueron utilizados para identificar banderas de diversos países mediante sus colores y en el orden que aparecían (por ejemplo, Italia: Verde, Blanco y Rojo). Para ello, el robot se desplaza en línea recta sobre las cartulinas correspondientes a los colores de las banderas (Duración de la actividad: 20 minutos). A modo de contextualizar este tipo de actividad de reconocimiento, se propuso una actividad relacionada al movimiento y reconocimiento de colores y patrones. En esta actividad debían identificar bacterias según los colores asociados a los resultados de diversas pruebas (por ejemplo, prueba de catalasa: negro cuando es positiva y blanco cuando es negativa) (Duración de la actividad: 20 minutos).

Sesión 4 (plugged)

En la cuarta clase se realizó una actividad evaluada que integró los conocimientos adquiridos a lo largo de las sesiones. Esta consistió en identificar bacterias pertenecientes a un subgrupo, asociándolas a una serie de pruebas de identificación. Al igual que en la sesión anterior, cada bacteria fue representada con un código de colores. La evaluación completa consistió en que los estudiantes crearan un flujograma para la identificación de bacterias, incluyendo que el robot fuese capaz de identificar la bacteria correspondiente según los colores que se pusieran delante de él (Duración de la actividad: 45 minutos).

Como cierre del Taller, se planteó un reto con un premio para el grupo que lo completara primero. Este reto complementaba la actividad evaluada. Por ejemplo, si un grupo trabajó en la identificación de las Enterobacterias H2S positivas, debían extender el código para incluir también la identificación de las Enterobacterias H2S negativas (Duración de la actividad: entre 15 a 20 minutos).

RESULTADOS DE IMPLEMENTACIÓN: APLICACIÓN DE ENCUESTAS DE PERCEPCIÓN Y MOTIVACIÓN

Se aplicaron dos encuestas (DD, 2023) sobre percepción (36 ítems) y motivación (27 ítems), (ver figuras 2 y 3), con escala de Likert (Totalmente de acuerdo (5), de acuerdo (4), ni de acuerdo ni en desacuerdo (3), en desacuerdo (2) o totalmente de acuerdo (1)).

Según los resultados de las encuestas, en promedio el curso estuvo de acuerdo en que el taller fue llamativo, relevante, útil y de su gusto. Sin embargo, también expresaron que no se sentían completamente seguros de poder realizar las actividades, lo que influyó en que no se sintieran relajados durante el desarrollo de las mismas.

Figura 1

Encuesta de Percepción

Categoría	Promedio
Atención (12 ítems)	4,08
Relevancia (9 ítems)	3,80
Caonfianza (9 ítems)	3,21
Satisfaccion (6 ítems)	3,96

Figura 2

Encuesta de Motivación

Categoría	Promedio
Interés/Disfrute (4 ítems)	4,33
Elección Percibida (4 ítems)	4,41
Esfuerzo/Importancia(5 ítems)	4,41
Presión/tensión (4 ítems)	2,63
Valor/Utilidad (3 ítems)	4,38
Relación (4 ítems)	4,36
Competencia Percibida (3 ítems)	4,21

CONCLUSIONES

Al término del taller, los 40 estudiantes progresaron en sus competencias digitales de programación básica puesto que lograron realizar la programación del robot. Con la aplicación de las encuestas fue posible determinar una percepción y motivación altamente positiva de la experiencia de aula de robótica asociada a la Bacteriología Clinída. Se proyecta en futuras intervenciones realizar un test diagnóstico respecto al pensamiento computacional para medir su progresión.

AGRADECIMIENTOS

Al proyecto PUCV 2023.20.INV.TEM.01.

REFERENCIAS

DD (2023). Encuestas de percepción y de motivación (Documento interno PUCV).

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L., & Wilensky, U. (2016). Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms. Journal of Science Education and Technology, 25(1), 127–147. https://doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5

PROPUESTA DE DEMOSTRACIONES VISUALES Y CONCRETAS DE FÓRMULAS DE SUMATORIAS EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO

Jose ignacio Andres Ainzua Cespedes, Universidad Metropolitana de ciencias de la educación

Iván Esteban Pérez Vera, Universidad Metropolitana de ciencias de la educación

ABSTRACT:

Este trabajo explora el uso de demostraciones visuales para mejorar la comprensión de las sumatorias en el aula. Basado en las teorías de representación semiótica de Gérard Duval, se propone una actividad que utiliza figuras geométricas para visualizar las sumatorias. La actividad busca facilitar la transición entre diferentes formas de representación matemática y ayudar a los estudiantes a deducir fórmulas de manera intuitiva. Un taller piloto mostró resultados positivos, aunque se destacó la necesidad de más material manipulativo.

Sumatoria, Visualización, Didáctica, Representación, Matemática

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo aborda el uso de demostraciones visuales y manipulativas para facilitar la comprensión de las fórmulas de sumatorias en el contexto educativo universitario. Estas estrategias buscan mejorar la transición entre diferentes registros de representación matemática, ayudando a los estudiantes universitarios a deducir fórmulas algebraicas complejas mediante métodos geométricos. La propuesta se enmarca en los desafíos actuales del aprendizaje del cálculo universitario, en el que conceptos como las sumatorias juegan un rol fundamental para la comprensión de temas más avanzados, como las integrales.

ELEMENTOS TEORICOS

La investigación se fundamenta en las teorías de Gérard Duval sobre la representación semiótica, que enfatizan la importancia de transitar entre distintos registros de representación (algebraico, gráfico, numérico, etc.) para lograr una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. Además, se consideran las indicaciones del currículo chileno de educación media y superior, que subrayan la relevancia de las sumatorias en el electivo de Límites y Derivadas y en asignaturas universitarias como "Procesos Infinitos".

El currículo chileno de educación media y universitaria:

En el currículo chileno de tercero y cuarto medio, se observa que las sumatorias son parte integral del contenido matemático en el electivo de límites y derivadas. Este concepto se refuerza en el ámbito universitario, particularmente en la formación de profesores de matemáticas, donde se aborda de manera más avanzada en asignaturas como "Procesos Infinitos". La importancia de las sumatorias en la educación matemática sugiere la necesidad de un enfoque didáctico que facilite su comprensión desde etapas tempranas (Ministerio de Educación, 2021).

Dificultades en la transición a la educación superior:

En el artículo "Estudio de Signos del Cálculo a través de los Espacios de Trabajo Matemático"(Sandoval Troncoso, 2019), se destaca cómo los estudiantes de primer año universitario enfrentan dificultades significativas con signos matemáticos complejos, como los de sumatoria y límite. Estos signos son fundamentales en cursos de cálculo, pero los estudiantes tienden a verlos como entidades desarticuladas, lo que complica su comprensión y aplicación

A partir de los antecedentes mencionados, se identifica una problemática común en los estudiantes de primer año universitario: la dificultad para manejar expresiones algebraicas complejas, como las sumatorias. Esta dificultad se agrava debido a la falta de integración entre los diferentes registros de representación matemática, lo que impide una comprensión profunda y articulada de estos conceptos.

Para abordar esta problemática, nos basamos en las teorías de Gérard Duval sobre la semiótica y los registros de representación semiótica. Duval sostiene que la comprensión matemática profunda requiere la habilidad de transitar entre diferentes registros de representación (algebraico, gráfico, numérico, etc.). En este contexto, proponemos una actividad de aula que fomente esta transposición semiótica mediante el uso de representaciones geométricas de sumatorias (Duval, 2004).

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

La actividad propuesta consistirá en una secuencia didáctica que utiliza demostraciones visuales y manipulativas para abordar la sumatoria de los primeros n términos y la sumatoria de los cuadrados de los primeros n términos.

Construcción y visualización de $\sum_{i=1}^{n} \quad i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Se iniciará la actividad mostrando una representación geométrica de la sumatoria de los primeros n términos, utilizando elementos visuales como una representación geométrica en donde cada unidad estará representada por un cubo de volumen 1 y lados de 1 unidad, se busca generar una estructura escalonada que represente la suma de los n términos de filas. donde la primera fila tendrá un elemento, la segunda dos elementos y asi sucesivamente. la idea es que se deduzca junto a los estudiantes que, es posible deducir el resultado de una determinada sumatoria conociendo el volumen de dicha figura, para hacerlo se buscan soluciones y se sugiere la idea de usar una figura idéntica para formar un prisma, de lados $n+1$ y n donde n son el número de filas que se están sumando.
Al calcularlo y dividirlo por 2 (por estar usando 2 figuras iguales) se espera que el estudiante reflexione sobre cómo las demostraciones visuales nos pueden ayudar con los métodos de conteo para conocer el valor de una sumatoria . Esto permitirá a los estudiantes visualizar la progresión aritmética conocida y sencilla, y activar su conocimiento previo.

Construcción y visualización de $\sum_{i=1}^{n} \quad = i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

La actividad comienza con la construcción de una estructura piramidal que simula la suma de los cuadrados de los primeros cuatro términos $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$. Esta pirámide está compuesta por niveles, donde cada nivel representa uno de los términos al cuadrado. Se insta a los estudiantes a calcular el volumen de esta pseudopirámide. El volumen de la pseudopirámide, con la unidad representada por un cubo de lado 1, permitirá a los estudiantes determinar el valor final de la suma de dichos términos.

Para simplificar el cálculo del volumen, se guía a los estudiantes a transformar la pseudopirámide en una figura más familiar, como un pseudoprisma. Se sugiere que se utilicen tres estructuras piramidales idénticas, ya que el comportamiento pseudopiramidal pordira permitir combinar 3 figuras para coincidir en un prisma.

En el proceso de transformación, los estudiantes observarán que la estructura resultante se aproxima a un prisma, pero presenta un sobresaliente en uno de sus lados. Se les invita a analizar este sobresaliente y a resolver el problema para que la figura final adquiera la forma prismática perfecta.
Se propone el uso de la simetría para completar la figura prismática. Los estudiantes deben generar una figura idéntica a la que presenta el sobresaliente y acoplarse de manera que la estructura resultante sea un prisma.

Con el prisma completado, se pide a los estudiantes que examinen sus lados. Se les pregunta qué sucedería si se agregaran más capas y cómo se podría deducir el tamaño de los lados en función de un número genérico n. A través del análisis, los estudiantes determinarán que las medidas de los lados son n, $n+1$ y $2n+1$. Esto los llevará a calcular el volumen del prisma como el producto de estos tres valores $n(n+1)(2n+1)$ Finalmente, se recuerda a los estudiantes que se usaron seis estructuras piramidales para completar la figura, por lo que el volumen de la pirámide original es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

RESULTADOS

La metodología utilizada cualitativa y fue un estudio de caso exploratorio con estudiantes del curso de Procesos Infinitos de la carrera de pedagogia en matematica de la universidad Metropolitana del Ciencia de la Educación, esto debido a que se tenía conocimiento previo de dificultades en los estudiantes de reconocer elementos de la sumatoria. se realizó un taller con 40 estudiantes que buscaba apoyar su comprensión del concepto de sumatoria mediante actividades visuales y manipulativas. Este taller fue supervisado por el profesor Mauricio Allende y empleó modelos geométricos creados con impresoras 3D, diseñados en Tinkercad.

Primera actividad: Sumatoria de los primeros n términos

En la introducción al taller, se narró la historia del "niño Gauss" para contextualizar el concepto de sumatoria. Posteriormente, los estudiantes trabajaron con representaciones escalonadas, formadas por bloques que representaban las filas de una progresión aritmética. Usando dibujos en la pizarra, se explicó cómo duplicar estas estructuras para formar prismas y calcular su volumen.

- **Ejemplo:** Al trabajar con una sumatoria de $n = 5$ términos, los estudiantes construyeron dos estructuras idénticas que, al unirse, formaron un prisma de dimensiones $5(5+1)$. Esto les permitió deducir la fórmula $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- **Impacto observado:** Los estudiantes mostraron un mejor entendimiento al relacionar las sumatorias con el volumen de un prisma, un concepto más tangible que la manipulación algebraica abstracta.

Segunda actividad: Sumatoria de cuadrados de los primeros n términos

Se presentó una estructura piramidal que representaba la suma de los cuadrados de los primeros n términos. Para calcular su volumen, los estudiantes trabajaron en transformar la pirámide en un prisma mediante la combinación de varias estructuras.

Ejemplo: Al trabajar con una pirámide que representaba la sumatoria hasta $n = 3$, se explicó que combinar tres pirámides idénticas generaría un prisma cuyas dimensiones eran $n(n+1)(2n+1)$. Finalmente, se dividió el volumen del prisma entre 6 para obtener la fórmula $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Dificultades: La falta de suficientes modelos manipulativos limitó la participación activa. Esto se solventó parcialmente con una demostración grupal en la pizarra, pero algunos estudiantes aún encontraron complejo el proceso de deducción.

Reflexiones finales del taller

La actividad concluyó con la exploración de otras demostraciones visuales, incluidas algunas relacionadas con series. Los estudiantes destacaron la utilidad de los materiales manipulativos para conectar conceptos abstractos con representaciones concretas. Sin embargo, se identificó la necesidad de incrementar la disponibilidad de recursos manipulativos para garantizar una experiencia más inclusiva y participativa.

CONCLUSIONES.

Se espera que esta actividad sea un punto de partida interesante para ayudar a estudiantes, tanto preuniversitarios como universitarios, a comprender mejor el concepto de sumatoria como un método de conteo. Las fórmulas, a menudo percibidas como abstractas y complejas, demostraron ser más accesibles al emplear representaciones visuales y manipulativas. Además, estas estrategias podrían facilitar una transición más orgánica hacia conceptos avanzados del cálculo, como las integrales.

Dificultades observadas.

La implementación presentó dos principales desafíos:

1. **Escasez de materiales manipulativos:** El número limitado de modelos dificultó la interacción directa de los estudiantes, afectando la experiencia práctica.
2. **Diferencias en los niveles de comprensión:** Algunos estudiantes necesitaron mayor apoyo para relacionar las representaciones geométricas con las fórmulas algebraicas.

Propuestas de mejora.

Incrementar la cantidad de materiales y diseñar actividades con niveles de complejidad diferenciados puede atender estas limitaciones y garantizar una experiencia más inclusiva y efectiva.

BIBLIOGRAFÍA

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Ministerio de Educación. (2021). Programa de Estudio Matemática: Límites, Derivadas e Integrales - 3° y 4° medio. Unidad de Currículum y Evaluación.

Sandoval Troncoso, L. (2019). Estudio de signos del cálculo a través de los espacios de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 32*(1), 576-584.

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO FÍSICO DE RAPIDEZ ASOCIADO CON LA NOCIÓN DE PENDIENTE DE LA RECTA EN EL PLANO, EN UNA COMPETENCIA DE CARRERAS DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA DE LA COMUNA DE RENCA, UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Rodolfo Arturo Rioseco Díaz, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Abstract:

La presente es una propuesta didáctica realizada con el objetivo de mejorar la enseñanza del concepto físico de rapidez o velocidad que corresponde a la pendiente de una recta en el plano, en el nivel de segundo medio compuesto por 35 estudiantes en un establecimiento particular subvencionado, de índice de vulnerabilidad mediano-alto en la comuna de Renca, región metropolitana de Chile.

La propuesta fue diseñada y analizada considerando conceptos propios de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS) creada por Raymond Duval, donde al realizar las conversiones entre distintos registros, teniendo en cuenta los criterios de

congruencia entre representaciones, se logra la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos, produciendo nuevos conocimientos (Duval, 1999).

La implementación de la secuencia didáctica desarrolló una mejor comprensión del concepto de rapidez o velocidad y del uso de la pendiente. Los estudiantes estaban interesados en realizar la actividad, lo que permitió la construcción del objeto matemático dándole un significado propio en relación con su contexto.

La actividad consistió en competencias de carreras de velocidad, donde de cada tres estudiantes, ubicados a 10, 20 y 30 metros de la meta, y luego de registrar sus tiempos, la pendiente de la recta indicaba la rapidez de cada participante, obteniéndose así al ganador.

Palabras clave: Geometría, Rapidez, Recta, Pendiente, Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS).

Introducción:

Para el desarrollo del estudio de las ciencias se utiliza a las Matemáticas, para dar fundamento a los conceptos que permiten describir los fenómenos naturales. Es así, como la Física, explica la Cinemática, el estudio del movimiento de los cuerpos, mediante representaciones gráficas, fórmulas y cálculos, interpretando la realidad de forma simple.

Según la Agencia de Calidad de la Educación (2022), los resultados SIMCE muestran una disminución en la autoestima académica y motivación escolar, lo que se observa en los estudiantes al momento de enfrentar problemas matemáticos relacionados con Física, donde la falta de la capacidad de aprender y el gusto por estudiar impiden la comprensión de los objetos matemáticos, como la pendiente de una recta y la interpretación del concepto velocidad.

Esta propuesta se analiza bajo la mirada de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS) creada por Raymond Duval en 1995, donde postula que las representaciones mentales son aquellas que "permiten mirar el objeto en ausencia total del significante perceptible. Por lo general, se igualan con las 'imágenes mentales' en tanto que entidades psicológicas que han tenido una relación con la percepción" (Duval, 1999, p.20), además afirma que "no se deben confundir nunca los objetos matemáticos con sus representaciones pues puede darse a través de representaciones muy diferentes" (p. 20), lo que es pertinente, porque los objetos matemáticos son abstractos y necesitan de diversos sistemas de expresión y representación, siendo estos los que favorecen su comprensión conceptual.

Objetivo general:

Diseñar e implementar una secuencia didáctica transversal entre Matemáticas y Física, para la enseñanza del concepto físico de velocidad como la pendiente de una recta, desde los distintos registros de representación semiótica en estudiantes de segundo medio.

Elementos teóricos o conceptuales:

Para el diseño y análisis de esta propuesta de innovación, se utilizó como marco teórico la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas, porque esta teoría nos muestra que la actividad matemática se debe desarrollar basada en tareas de reconocimiento de variables cognitivas derivadas de las representaciones semióticas, donde las conversiones entre registros semióticos se hagan de manera explícita permitiendo la comprensión del objeto matemático por parte de los estudiantes, según Duval (1999), "las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma" (p. 14).

La coordinación de registros de representación es una condición esencial para la aprehensión conceptual, pero depende de su congruencia. Cuando dos representaciones son congruentes se facilita la actividad de conversión, logrando en algunos casos que ésta sea realizada de manera instantánea.

Duval (2006) comenta que, comúnmente pueden no ser congruentes, dos representaciones de un mismo objeto matemático en distintos registros, porque cualquier cambio de registro requiere primero del reconocimiento del mismo objeto entre dos representaciones, cuyos contenidos tienen muy seguido nada en común.

Para realizar las actividades experimentales sólo se consideraron los registros tabular, algebraico y gráfico para su coordinación, realizando conversiones entre el registro tabular al algebraico y tabular al gráfico, porque es habitual en los textos de Física encontrar ejercicios en estos registros y son fáciles de reconocer por los estudiantes.

Para realizar el análisis de esta propuesta en el aula, se sigue la metodología de investigación-acción que se centra en el desarrollo de una actividad implementando un plan de acción en los sujetos informantes. En este mismo sentido, Hernández, Fernández y Baptista (2014) expresan que "La finalidad de la investigación-acción es comprender y resolver problemáticas específicas de una colectividad vinculada a un grupo"(p.498).

En el proceso de estudio se llevaron a cabo las principales acciones de la investigación-acción que constan de las siguientes etapas: identificar la problemática, elaborar el plan, implementarlo, evaluarlo y realizar realimentación (Hernández et al.,2014).

Descripción de la propuesta:

Al considerar la problemática que los estudiantes presentan, debido a la no congruencia entre los registros algebraico y gráfico, tal y como lo menciona Duval (1999) en cuanto a la no correspondencia semántica entre el representante y el representado, se decide realizar una actividad basada en la metodología investigación-acción, porque al estar estructurada por etapas se pueden detectar las dificultades que el concepto velocidad posee (Elliott,1990).

Antes de realizar la propuesta didáctica, se realiza una evaluación diagnóstica para identificar el dominio de los conceptos previos de Cinemática, por parte de los estudiantes, y así considerarlo al momento de elaborar experiencias prácticas aplicadas a diversas situaciones problema.

En la etapa de planeación, se crea la secuencia didáctica con el propósito de mejorar la comprensión del concepto rapidez o velocidad, utilizando la TRRS, para que los estudiantes puedan realizar conversiones desde el registro tabular al gráfico y desde el registro tabular al registro algebraico.

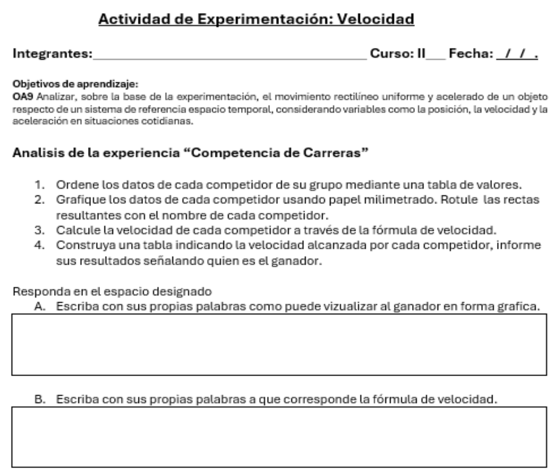
En la etapa de acción, los estudiantes compiten entre ellos, registran sus datos en tablas y, posteriormente grafican y observan la inclinación de la recta. Mediante las representaciones tabulares, gráficas y algebraicas van transitando desde un registro a otro, comprendiendo las propiedades del objeto matemático, vinculándolo con el concepto de rapidez o velocidad y así obtener al ganador.

Figura 1

Fotografía de actividad de carreras de velocidad.

Figura 2

Cuestionario de la actividad experimental.



Actividad de Experimentación: Velocidad

Integrantes:__________________ Curso: II___ Fecha: _/_/_.

Objetivos de aprendizaje:
OA9 Analizar, sobre la base de la experimentación, el movimiento rectilíneo uniforme y acelerado de un objeto respecto de un sistema de referencia espacio temporal, considerando variables como la posición, la velocidad y la aceleración en situaciones cotidianas.

Analisis de la experiencia "Competencia de Carreras"

1. Ordene los datos de cada competidor de su grupo mediante una tabla de valores.
2. Grafique los datos de cada competidor usando papel milimetrado. Rotule las rectas resultantes con el nombre de cada competidor.
3. Calcule la velocidad de cada competidor a través de la fórmula de velocidad.
4. Construya una tabla indicando la velocidad alcanzada por cada competidor, informe sus resultados señalando quien es el ganador.

Responda en el espacio designado

A. Escriba con sus propias palabras como puede vizualizar al ganador en forma grafica.

B. Escriba con sus propias palabras a que corresponde la fórmula de velocidad.

En la etapa de evaluación, se analiza la información recolectada en los informes hechos por los estudiantes, los cuales responden el cuestionario de aplicación de resolución de problemas.

En cuanto al análisis de los instrumentos de recolección utilizados en el desarrollo de las situaciones problemas, presentadas a los estudiantes, se observan los criterios de congruencia entre las representaciones, identificando los aciertos y dificultades presentadas, teniendo en cuenta los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento referidos por Duval (1999).

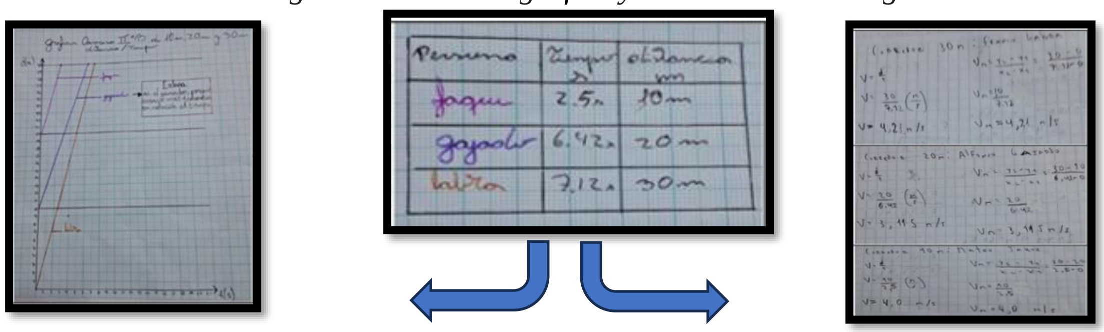
Resultados de implementación:

Al realizar el análisis de los resultados se observa que:

- Los estudiantes realizaron las conversiones desde lo tabular a lo algebraico y desde lo tabular hacia lo gráfico, sin presentar dificultades en su gran mayoría.
- Existe un fuerte desarrollo del registro gráfico más que el desarrollo algebraico.
- Existe una mayor comprensión del concepto velocidad debido a la coordinación entre los diferentes registros.

Figura 3

Conversiones: Desde registro tabular al gráfico y desde tabular al algebraico.



Conclusiones:

Mediante esta actividad, los estudiantes lograron un aprendizaje significativo del concepto de rapidez o velocidad, porque pudieron visualizar que la inclinación de la recta estaba relacionada con la rapidez o velocidad de cada uno.

El uso de distintas representaciones semióticas ayuda en la construcción adecuada del concepto, visualizando características propias como saber quién es el más rápido y comunicar los resultados obtenidos, para ello se realizaron conversiones desde el registro tabular al gráfico y desde el registro tabular al algebraico, permitiendo la interpretación del concepto de velocidad en forma contextualizada.

Respecto a la validacion de la propuesta, se puede observar que los estudiantes conectaron conocimientos previos con nuevos conocimientos adquiridos mediante la actividad, se motivaron en participar y mostraron curiosidad e interés en saber el resultado final. Además esta actividad tiene implicaciones prácticas con la asignatura de Educación Física en el nivel de octavo básico, lo que fortalecería el proceso educativo.

Referencias:

Agencia de Calidad de la Educación. (2022). SIMCE. https://www.agenciaeducacion.cl/simce/

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Original publicado en 1995).

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 9.1.

Elliott, J. (1990). La investigación-acción en educación. Ediciones Morata.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P.(2014). Metodología de la investigación Mc Graw Hill. Interamericana Editores.

oo

REPORTE DE INVESTIGACIÓN

EL ROL DE LA OPERACIÓN BINARIA EN EL DESARROLLO DE NUEVAS ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS EN ÁLGEBRA LINEAL. UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE

Yasna Solar, Universidad de Concepción
Mauricio Gamboa, Universidad de Concepción
Miguel Rodríguez, Universidad de Playa Ancha
Enseñanza y aprendizaje del álgebra

Abstract:

La presente investigación se centra en proponer una descomposición genética para estudiar la construcción del concepto de operación binaria, a partir de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) desarrollada por Dubinsky (1991,1996) y el grupo RUMEC (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, & Thomas, 1997). Para la construcción de dicho concepto, se consideró un análisis histórico-epistemológico, un análisis de textos de estudio y algunas investigaciones reportadas en la academia, en donde el concepto operación binaria tiene una incidencia directa. Luego, para validar la descomposición genética hipotética, se diseñó un cuestionario que se aplicó a 17 estudiantes, entre ellos alumnos de ingeniería y pedagogía en matemática, utilizando el ciclo de investigación de la teoría APOE. Así, teniendo en cuenta el cumplimiento de su tercera etapa, el análisis de los datos a través de un diagrama de árbol y el grafo implicativo, del Análisis Estadístico Implicativo, se puede señalar que los resultados indican la viabilidad de la descomposición genética hipotética, siendo los conceptos implicados necesarios a la hora de construir el concepto operación binaria. Así, con base en el análisis de la información recolectada en esta investigación, se concluyó que existe la necesidad de fomentar el concepto operación binaria en los estudiantes de los cursos que anteceden a la asignatura de álgebra lineal, a través de la implementación de problemas no rutinarios que permitan al estudiante enfrentarse a nuevas estructuras.

Operación Binaria, Estructura Matemática, Álgebra Lineal, Descomposición Genética, Teoría APOE.

INTRODUCCIÓN A LA PROBLEMÁTICA

Antecedentes de investigación

El estudio de la enseñanza de los distintos temas matemáticos a nivel universitario resulta fundamental para la formación en carreras relacionadas con esta disciplina. En este contexto, las investigaciones en didáctica de la matemática en educación superior cobran particular importancia, especialmente al orientar el desarrollo de estrategias pedagógicas innovadoras para su implementación en el aula. Dentro de los enfoques teóricos más relevantes en este campo, la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) ha sido ampliamente adoptada como marco conceptual para analizar la construcción del conocimiento matemático. Según Trigueros (2013), esta teoría se basa en el proceso de abstracción reflexiva, proporcionando una explicación rigurosa sobre cómo se desarrolla dicho conocimiento. Lo anterior, según Cartes, et al., (2022) es relevante para los investigadores a la hora de estudiar diferentes estructuras y mecanismos mentales, mostrados por los estudiantes al enfrentarse a diversos conceptos matemáticos de nivel universitario.

Por otra parte, el concepto de espacio vectorial ha sido uno de los más estudiados en investigaciones relacionadas con la enseñanza del álgebra lineal. Esto se debe a su amplia aplicabilidad en la ingeniería, especialmente en estudios de modelización, como la teoría de elementos finitos o por medios continuos, entre otros. Dado lo anterior, según Parraguez y Oktaç (2010), es necesario que un estudiante genere un esquema sólido del concepto espacio vectorial, pero esto será muy difícil sin poseer una construcción esquema operación binaria, entre otros. Por otra parte, Aguilar y Oktaç (2004) confirman la necesidad de capacitar a profesores en cuanto a la introducción de nuevas estructuras, dado que generalmente éstos utilizan conjuntos y operadores usuales a la hora de tratar de resolver un problema, agregando que las actividades relativas a operaciones binarias deberían ir encaminadas en ayudar a los estudiantes a que entrelacen el conjunto y la operación binaria en una estructura. A lo anterior, Rodríguez y Parraguez (2013) señalan que, en la mayoría de las carreras de ingeniería, el docente usualmente define y explica de una manera muy abreviada en qué consta una operación binaria, para luego definir un espacio vectorial en función de una operación binaria interna y otra externa, siendo una introducción repentina a un concepto básico para comprender la nueva unidad. También Rodriguez y Parraguez (2013) mencionan como un problema frecuente en el aula que los estudiantes, al desconocer estructuras matemáticas no usuales, tienden a generalizar propiedades conocidas a operadores no usuales, lo que refleja, según Martin et., al (2017), una manipulación mecánica de los conceptos sin una comprensión profunda.

Por otro lado, Melhuish et al., (2019) señalan la importancia de las operaciones binarias como una de las estructuras fundamentales subyacentes en nuestro sistema numérico y algebraico, siendo un tema primordial en los planes de estudios de matemática, al estar presentes en todos los niveles de enseñanza, esto ya sea de forma explícita (recién aparece una definición formal del concepto en cursos avanzados de educación superior), como implícita (en niveles de primaria y secundaria), a lo que Brown et al., (1997) agrega que este concepto está presente en los cursos de álgebra abstracta, teniendo un rol clave en sus contenidos.

En este sentido, Can et al., (2021) recalcan la necesidad de fomentar los esquemas de operación binaria, de conjunto, axiomas y de función, señalando que el uso de operaciones binarias distintas a las definidas normalmente en los números reales favorecen la capacidad de los estudiantes de trabajar con otros conceptos, tales como el de espacio vectorial en particular, donde Podevils y Montenegro (2021) indican que es necesario fortalecer el esquema de las operaciones binarias presentes en los espacios vectoriales, por lo que no se puede tomar a la ligera la enseñanza de este concepto. Además, Melhuish y Fagan (2018) señalan que la comprensión conceptual en los cursos de teoría de grupos tiene como problema principal el que los profesores en formación no siempre general conexiones entre lo que es el álgebra abstracta y lo que van a enseñar a la hora de egresar.

Dado que esta investigación se centra en la construcción cognitiva de conceptos matemáticos, la teoría APOE es adecuada para este marco, ya que, según Trigueros y Oktaç (2005), permite analizar las construcciones mentales involucradas en el aprendizaje y caracterizar las estructuras que emergen al desarrollar conceptos abstractos, que en este caso es el de operación binaria.

Problema de Investigación

En el caso particular de los espacios vectoriales, Oktaç y Trigueros (2010) indican que, debido a su naturaleza abstracta, éste es un concepto muy difícil de asimilar por los estudiantes a la hora de cursar álgebra lineal, por lo que la formalización de conceptos previos, entre ellos el de operaciones binarias, es parte de una necesidad, por lo que su enseñanza es uno de los problemas que regularmente se presentan a la hora de impartir este curso.
De lo anterior, la pregunta que guía esta investigación es la siguiente: ¿Cómo construyen el concepto operación binaria los estudiantes que han cursado la asignatura de álgebra lineal?

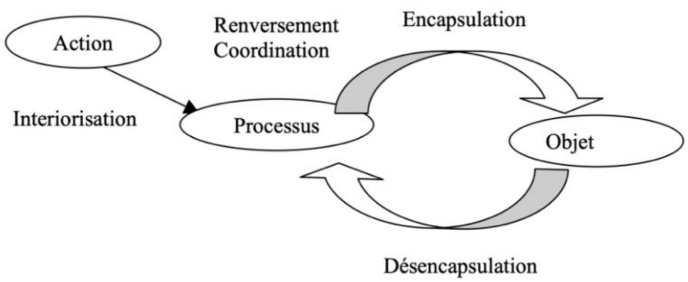
Finalmente, en atención a lo que ya se ha expuesto anteriormente, y teniendo en cuenta la relevancia de la operación binaria como concepto base a la hora de construir nuevas estructuras matemáticas, el objetivo de la investigación es: determinar y caracterizar las estructuras mentales que muestran los estudiantes universitarios que han cursado la asignatura de álgebra lineal, al resolver problemas no rutinarios relativos al concepto operación binaria.

MARCO TEÓRICO

Para llevar adelante la investigación desde un punto de vista cognitivo, ésta se enmarcó en la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema), la cual es una teoría constructivista que, según Arnon et al,.(2008), extiende las ideas de Piaget sobre la teoría de abstracción reflexiva al análisis de cognitivo de conceptos matemáticos que son estudiados en un nivel superior, a lo que Montenegro et al., (2020) agregan como la clave de la construcción de los conceptos lógicos-matemáticos al concepto de abstracción reflexiva, el cual es señalado por Rodríguez y Parraguez (2013), como la base de los mecanismos mentales de la teoría APOE. Trigueros y Oktaç (2005) señalan que estos mecanismos se activan mediante las acciones físicas o mentales que el individuo realiza sobre sus acciones. Dubinsky (1996) agrega que la interacción entre el sujeto y el objeto de conocimiento es considerada como dialéctico, lo cual significa la confrontación entre sus estructuras mentales previas y la construcción del nuevo conocimiento matemático.
Finalmente, según lo señalado por Dubinski y McDonald (2001), esta perspectiva teórica resulta útil para comprender el aprendizaje de estudiantes de pregrado en diversos temas, incluidos conceptos de álgebra abstracta. Esto refuerza que la teoría APOE es adecuada para estudiar las estructuras y mecanismos mentales frente a problemas no rutinarios con operaciones binarias.

Figura 1

Estructuras mentales y mecanismos de construcción de los conocimientos matemáticos.



Nota: Tomado de APOS Theory (p.18), por Arnon et al., 2014, Springer

DISEÑO METODOLÓGICO

Esta investigación se enmarca en un enfoque mixto, combinando una perspectiva exploratoria y descriptiva. Por un lado, se emplea el estudio de caso para realizar un análisis empírico de las respuestas de algunos estudiantes a quienes se les aplicó el cuestionario. Por otro lado, se utiliza la estadística implicativa para analizar las respuestas obtenidas mediante el software CHIC, considerando diversas categorías predefinidas (procedimientos, estrategias y argumentos matemáticos). A partir de este análisis, se genera un árbol de similitud y un grafo implicativo, lo que permite interpretar de manera más profunda los datos recopilados.

Ciclo de investigación APOE

Mediante el ciclo de investigación de la teoría APOE, se busca explorar las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes manifiestan al manipular el concepto de operación binaria, sustentado en evidencia empírica con un marco teórico sólido. En la primera fase de este ciclo, se realizó un análisis histórico-epistemológico, junto con la revisión de programas y textos de estudio, tanto de enseñanza media como de nivel superior. Esta fase concluye con la construcción de una descomposición genética hipotética (DG), la cual detalla las construcciones y mecanismos mentales necesarios para que los estudiantes puedan comprender y construir el concepto bajo estudio. La siguiente fase involucró la elaboración y aplicación de un instrumento. En esta investigación, se implementó un cuestionario validado, compuesto por tres preguntas que abordan problemas no rutinarios relacionados con el concepto de operación binaria. Este cuestionario fue administrado a 17 estudiantes de una universidad local, seleccionados bajo los siguientes criterios: estar matriculados en carreras de Ingeniería o Pedagogía en Matemática, haber cursado y aprobado la asignatura de Álgebra Lineal con un buen rendimiento académico, y, en el caso de los estudiantes de Pedagogía en Matemática, idealmente haber cursado asignaturas de Álgebra y Trigonometría, Cálculo Diferencial e Integral e Introducción al Razonamiento Matemático, también con buen rendimiento académico. Finalmente, la tercera fase consistió en el análisis y verificación de los datos. Este proceso se llevó a cabo mediante el análisis estadístico implicativo y un análisis empírico de las respuestas proporcionadas por los estudiantes al cuestionario aplicado.

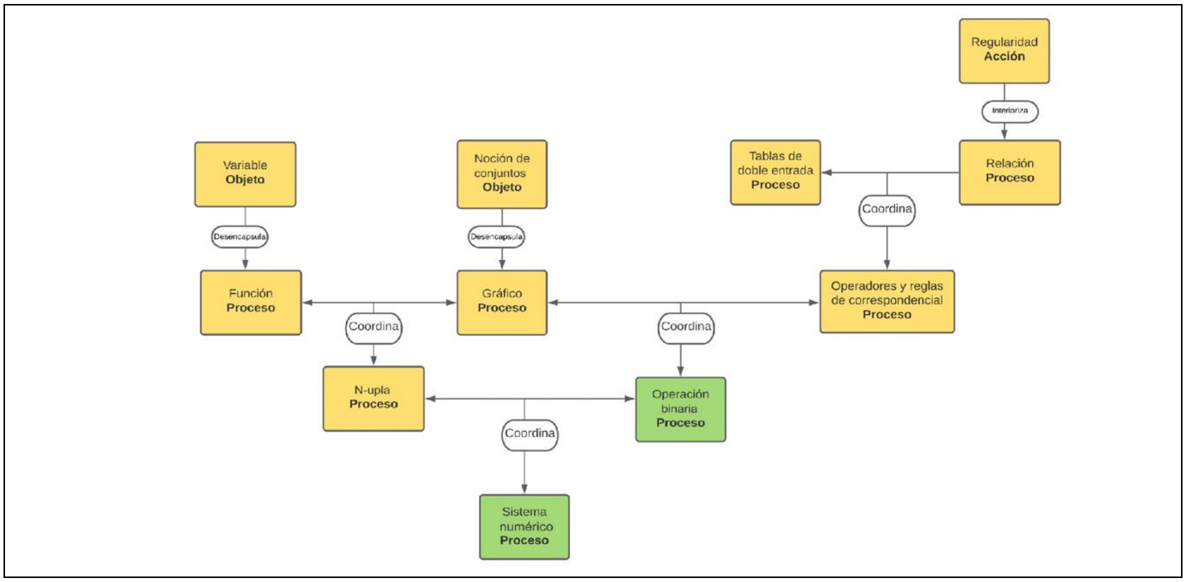
Con lo anterior, se pretendió responder a la necesidad de realizar un estudio de caso para validar nuestra DG hipotética.

La DG y el cuestionario

La descomposición genética, creada a partir del análisis teórico efectuado, y cuyos componentes son las construcciones y mecanismos mentales para construir el proceso sistema numérico, señala que para ésto se requiere de los objetos variable y noción de conjunto, pues es preciso realizar acciones con dichos objetos. Para ello es necesario que el objeto variable se desencapsule en el proceso función, mediante la explicitación de una correspondencia entre una o más variables independientes con una variable dependiente como mecanismo de desencapsulación. Por otro lado, el objeto noción de conjunto se desencapsula el proceso gráfico, al describir conjuntos de puntos del plano cartesiano, como mecanismo de coordinación con el proceso de función de manera analítica, con esta coordinación se genera el proceso de n-upla, al realizar acciones con la función, tales como la búsqueda de una o más soluciones para las variables independiente y/o la variable dependiente.

Por otra parte, se interioriza la acción de regularidad en el proceso relación, mediante la detección de patrones y secuencias, para que coordinado con el proceso tablas de doble entrada, se identifiquen las reglas de correspondencia del operador indicado en estas tablas, generando el proceso operadores y reglas de correspondencia. Ahora, el proceso operación binaria se genera mediante la coordinación del proceso gráfico y el proceso operadores y reglas de correspondencia, mediante el análisis del cumplimiento de propiedades que caracterizan a una operación binaria. Así, mediante la coordinación del proceso n-upla y el proceso operación binaria, mediante actividades que involucren la búsqueda de diversas soluciones, dada una situación específica como buscar el inverso o el elemento neutro, y la manipulación de las propiedades relativas al segundo proceso, se genera el proceso sistema numérico, como un conjunto de símbolos y reglas utilizadas para representar cantidades.
En la Figura 2 se presentan las estructuras y mecanismos mentales que posiblemente influyen en la construcción del concepto de operación binaria y sistema numérico.

Figura 2
Diagrama de la DG con las construcciones y mecanismos mentales para operación binaria y sistema numérico.



Con el propósito de recopilar información, se diseñó un cuestionario compuesto por tres preguntas directamente vinculadas con la descomposición genética hipotética planteada. El objetivo principal de este instrumento es evidenciar empíricamente las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes manifiestan al responder, en relación con los conceptos de operación binaria y sistemas numéricos. Para validar el instrumento, se contó con la colaboración de un grupo de investigadores destacados en las áreas de matemática y didáctica de las matemáticas.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El análisis de los datos recopilados mediante el cuestionario aplicado, nos revela que las construcciones y mecanismos mentales mostrados por los estudiantes que respondieron el instrumento, son coherentes con las construcciones y mecanismos mentales propuestos en la descomposición genética hipotética para construir el concepto operación binaria y encaminar éste hacia el concepto de sistema numérico, siendo fundamentales el uso de 2-uplas específicas, y el uso de operadores y reglas de correspondencia los que se dejan entrever como necesarios a la hora de generar estos procesos.

Lo anterior queda en evidencia mediante las respuestas de los estudiantes al cuestionario aplicado, las cuales mostraron una coordinación entre los procesos tablas de doble entrada y relación, en el proceso operadores y reglas de correspondencia, mediante la asignación de un elemento del conjunto de partida a un elemento del conjunto de llegada. Además, tanto en el problema dos como en el problema tres, los estudiantes lograron coordinar los procesos n-upla y operación binaria, en el proceso sistema numérico, por medio de la asignación de 2-uplas a una operación binaria definida en un problema no rutinario, la identificación de propiedades relacionadas con la operación binaria dada y la extensión de propiedades de operadores usuales a otros no usuales.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-7966-6

Aguilar, P., & Oktaç, A. (2004). Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 7*(2), 117-144. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33507201

Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(3), 187-239. https://doi.org/10.1016/s0732-3123(97)90028-6

Can, A., Sánchez, M., & Trigueros, M. (2021). Estado del conocimiento didáctico sobre el concepto de espacio vectorial. *Educación Matemática, 33*(3), 121-140. https://doi.org/10.24844/em3303.05

Cartes, J., Soto, J., & Valencia, J. (2022). *Estructuras y mecanismos mentales de los estudiantes en los conceptos de permutación y combinación analizados desde la teoría APOE*. Editorial Académica Española. https://www.eae-publishing.com/catalog/details/store/gb/book/978-620-3-88785-3/estructuras-y-mecanismos-mentales-de-los-estudiantes.

Dubinsky, E., Mcdonald, M.A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In: Holton, D., Artigue, M., Kirchgräber, U., Hillel, J., Niss, M., Schoenfeld, A. (eds) The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. New ICMI Study Series, vol 7. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

Martín, A., Martinez-López, Y., & Pérez, O. (2017). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto Espacio Vectorial. *Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa, REF-CalE*, 5(2), 195-209. http://refcale.uleam.edu.ec/index.php/refcale/article/view/1796/981

Melhuish, K., & Fagan, J. (2018). Connecting the Group Theory Concept Assessment to Core Concepts at the Secondary Level. En *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (pp. 19-45). https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3_2

Melhuish, K., Ellis, B., & Hicks, M. D. (2019). Group theory students' perceptions of binary operation. *Educational Studies in Mathematics, 103*(1), 63-81. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09925-3

Montenegro, F., Gagliardo, A., Mangini, S., & Carrasco, A. (2020). El aprendizaje de espacios vectoriales en álgebra lineal: Una mirada desde la teoría APOE / Espaços vetoriais de aprendizagem em álgebra linear: Um olhar a partir dos APOIOS teóricos. *Brazilian Journal of Development*, *6*(11), 84339-84351. https://doi.org/10.34117/bjdv6n11-009

Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 13*(4-II), 373-385. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33558827009

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construcción esquema del concepto espacio vectorial. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, 45-53. http://funes.uniandes.edu.co/4523/

Podevils, L., & Montenegro, F. (2021). Propuesta de enseñanza mediada por TIC en la asignatura Álgebra Lineal desde APOE: Tesis de Maestría en carreras de Ingeniería. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 17*(62), 1-17. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/159

Rodríguez, M., & Parraguez, M. (2013). Un reporte de la investigación: Construcción cognitiva de los conceptos espacio vectorial R2 y R3 desde la teoría APOE. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 579-587). http://funes.uniandes.edu.co/4090/

Trigueros, M., & Oktaç, A. (2005). La teoría APOE y la enseñanza del álgebra lineal. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 157-176. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IST05013.htm

Trigueros, M. (2013). *¿Qué nos dice la teoría APOE sobre la enseñanza del álgebra lineal? Simposio Nororiental de Matemáticas*, 242-248. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/que-nos-dice-la-teoria-apoe-sobre-la-ensenanza-del-algebra-lineal/

EXPLORANDO ETNOMATEMÁTICAS EN TEJIDOS DE COSTA RICA PARA CONFIGURAR UNA PROPUESTA GLOCALIZADA EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Dra. Ma. Elena Gavarrete Villaverde, Universidad Nacional, Costa Rica, mgavarrete@una.cr

Bach. Pamela Montero Solano, Universidad Nacional, Costa Rica, pamela.montero.solano@est.una.ac.cr

Bach. Bayron Molina Montoya, Universidad Nacional, Costa Rica, bayron.molina.montoya@est.una.ac.cr

Bach. Iriana Montiel Arguedas, Universidad Nacional, Costa Rica, iriana.montiel.arguedas@est.una.ac.cr

Abstract:

Este reporte de investigación, asociado a la línea temática de Cultura y etnicidad en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, plantea algunos avances de un estudio *etnomatemático de algunos tejidos en Costa Rica para configurar una propuesta glocalizada en enseñanza de la geometría. La investigación corresponde a un Trabajo Final de Graduación, que se desarrolla en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica, el cual, plantea una propuesta que considera ideas de pensamiento matemático, visto desde un proceso cognitivo, pedagógico y social. El estudio etnomatemático se centra en estudiar los tejidos del Valle Central, considerado como signo cultural, y la propuesta glocalizada para la enseñanza de la geometría, plantea el desarrollo de contenidos disciplinarios, aprovechando las relaciones dialógicas entre las prácticas matemáticas locales y las prácticas matemáticas globales de una comunidad, para la innovación de la práctica educativa, como forma de apoyo al aprendizaje de estudiantes. El desarrollo de la investigación ha conllevado revisiones documentales, y trabajo de campo preliminar para desarrollar competencias investigativas, así como también el trabajo de campo etnográfico y el diseño e implementación de diferentes técnicas e instrumentos para recolectar información, de cuyo análisis se ha nutrido la configuración de la propuesta glocalizada -que se encuentra en ciernes- y que plantea la posibilidad de realizar sugerencias para enriquecer la enseñanza de la Geometría en Costa Rica.*

Etnomatemática, Etnomodelación, Tejido, Conocimiento matemático cultural, Enculturación

1. CONTEXTO Y FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La investigación en la que se enmarca esta contribución, corresponde a un Trabajo Final de Graduación, desarrollado en el marco del Plan de Estudios de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática, que se imparte en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica.

Este trabajo se cimenta en una investigación que se centra en los tejidos de Costa Rica, con la cual se persigue realizar un reconocimiento de las prácticas ancestrales, y también establecer relaciones con las matemáticas occidentales, estudiando la relación existente entre las matemáticas y el conocimiento local del tejido, mediante una deconstrucción y un análisis predominantemente etnomatemático.

Para tal efecto, se cataloga el tejido de Costa Rica como un signo cultural, constructo que fue concebido por Oliveras (2005) como un elemento de la cultura que posee relevancia y potenciales conocimientos matemáticos implícitos, los cuales pueden ser aprovechados para su uso en diversos contextos didáctico-matemáticos.

La investigación inició con un estudio documental, del cual se resalta la necesidad de hacer referencia a los constructos émicos y éticos de la etnomodelación planteados por Orey y Rosa (2021), donde el constructo émico, se refiere a la perspectiva interna, y en analizar cómo los miembros de una comunidad conceptualizan y practican matemática, desentrañando las representaciones locales de las matemáticas, reconociendo su riqueza cultural y contextual;

mientras que el constructo ético, permite a las personas investigadoras involucrarse y analizar desde su propio punto de vista los procesos matemáticos realizados, es decir, desde afuera, pero tomando en consideración sus creencias y manera de pensar. De este modo, en este trabajo, el constructo ético de la etnomodelación se desarrolla mediante el análisis del tejido desarrollado en Costa Rica para, una vez identificados los términos matemáticos presentes, puedan establecerse relaciones con las habilidades propias del área de Geometría que propone el Programa de Estudio del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

A partir de esta etapa de revisión bibliográfica se decidió iniciar el trabajo de campo con la realización de sondeos, lo cual permitió generar conjeturas de investigación:

- El estudio del tejido puede ser útil para la comprensión y el análisis de la visión occidental y la visión comunitaria en el área de la Geometría.
- La cultura puede valorarse como fuente de aprovechamiento en la creación de problemas en el área de la Geometría.
- La Etnomatemática puede considerarse como una nueva estrategia didáctica en la educación matemática de Costa Rica.
- La Etnomatemática y la etnoeducación pueden valorarse como un proceso de trascendencia por medio de la diversidad.

De estas conjeturas, emerge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo utilizar los hallazgos de un estudio etnomatemático del Tejido para el diseño de una propuesta glocalizada que aporte pertinencia cultural a la enseñanza de la Geometría en el Ciclo diversificado en Costa Rica?

Tal como lo establece D'Ambrosio (2016), el Programa Internacional de Etnomatemáticas utiliza los resultados de la investigación para la acción pedagógica y, es por esto que, desde múltiples perspectivas, se han desarrollado propuestas de innovación que enriquecen la educación matemática. En este caso particular, se promueve una consonancia entre las visiones émica y ética, con lo cual, según Orey y Rosa (2015), surge la visión dialógica, desde la cual se persigue dar respuesta a la pregunta anteriormente descrita.

2. ALGUNAS CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

El diseño de la investigación ha tenido que considerar la necesidad de conocer a profundidad acerca de la cultura de las personas artesanas, para comprender sus creencias, pensamientos, costumbres, economía y prácticas laborales, entre otros aspectos importantes en las comunidades, y, por tanto, poder tener herramientas que favorezcan el estudio desde la visión émica. Así como también considerar elementos metodológicos para orientar el estudio desde la visión ética.

La investigación se ha orientado desde un paradigma cualitativo-interpretativo, donde se utiliza el enfoque etnográfico, y se realiza un estudio de casos.

El enfoque etnográfico es predominante, pues según Álvarez (2008), tiene como finalidad cuatro aspectos: la descripción del contexto cultural, la interpretación y comprensión de la cultura, la difusión de los aspectos encontrados y, por último, observar su potencial para mejorar la educación. Además, el carácter emergente de dicho enfoque lo hace pertinente para un estudio etnomatemático.

Con respecto al estudio de casos que se plantea realizar en esta investigación, según Merriam (1998) y Stake (1994) consiste en seleccionar una o varias personas que representen a un grupo o comunidad tomando en consideración que tengan aspectos en común, esperando una coherencia en sus respuestas. En este caso, se seleccionarán personas artesanas que realicen diversos tipos de tejidos.

El trabajo de campo en las comunidades artesanas es indispensable para poder observar todas las dinámicas y obtener resultados que describan los aspectos émicos. Para este fin se realizaron visitas a las personas artesanas, observaciones participantes y entrevistas etnográficas, con la finalidad de recabar información que permita interpretar el sentido social de los sujetos de estudio, cuyo registro se realizó en diarios de campo.

Por la naturaleza etnográfica de esta investigación, surgieron categorías emergentes, sin embargo, se realizó una estructura de categorías prefijadas, para cuya construcción se tomaron en consideración los objetivos de investigación.

Con los resultados del estudio etnomatemático, considerando ambas visiones (émica y ética), es que se realizará una propuesta glocalizada (desde una perspectiva dialógica), en la cual se considerarán las habilidades específicas establecidas en los Planes de Estudios de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) para la enseñanza del área de Geometría, las cuales están definidas según el MEP (2017) como “una capacidad o un saber hacer en relación con un objeto matemático (concepto o procedimiento)” (p. 22).

3. EL TRABAJO DE CAMPO Y SUS RESULTADOS

El equipo de investigación desarrolló un trabajo de campo preliminar en una costarricense donde se practican diferentes tipos de tejidos, con la finalidad de desarrollar experiencia en el trabajo etnográfico y habilidades investigativas. De este modo, se llevó a cabo un estudio etnográfico de campo en la comunidad indígena de Boruca, la cual se encuentra ubicada al sureste de la provincia de Puntarenas, cantón de Buenos Aires, al sur del país, la cual se caracteriza por sus expresiones artísticas, sus tejidos y otras artesanías, mediante las cuales reflejan su cotidianidad y cosmología.

Este primer acercamiento al trabajo de campo, se enfocó en el estudio de los signos culturales, fortaleciendo la práctica en la observación, realización de entrevistas y análisis iniciales a tejidos que se desarrollan en esta comunidad indígena mediante las técnicas de tejeduría, cordelería y cestería; además, de identificar, caracterizar e interpretar, elementos matemáticos presentes en las prácticas culturales de la elaboración de los tejidos de este grupo social

El trabajo etnográfico desarrollado en el territorio indígena de Boruca permitió la identificación de elementos matemáticos involucrados en el tejido. Por otro lado, el trabajo de campo y el registro de información en los diarios de campo, contribuyó a establecer una estructura de categorías prefijadas de investigación y a considerar la versatilidad investigativa en el surgimiento de categorías emergentes durante el desarrollo del estudio.

El estudio preliminar constituyó una valiosa experiencia para el equipo investigador, pues se validaron herramientas y metodologías planteadas para el trabajo de campo. Es así como, con lo aprendido en la región de Boruca, se desarrolló la investigación de forma completa con los tejidos del Valle Central de Costa Rica, pues el estudio etnomatemático abarcó la tejeduría, cestería y cordelería, para lo cual se realizaron observaciones y entrevistas etnográficas que fueron registradas en veinticinco diarios de campo, distribuidos en nueve visitas a personas artesanas que trabajan este tipo de tejidos.

Del trabajo etnográfico de campo se desprende una organización de la información por tipo de tejido. Se realizaron cuatro visitas a personas dedicados a la tejeduría, con un registro detallado en doce diarios de campo sobre este tejido; además, se realizaron tres visitas a personas artesanas dedicadas a la cestería, las cuales se registraron en siete diarios de campo; y, por último, dos visitas a un artesano que desarrolla la cordelería, con un total de seis diarios de campo dedicados a registrar la información concerniente a este tejido.

4. CONFIGURANDO LA PROPUESTA GLOCALIZADA PARA ENSEÑAR GEOMETRÍA

El trabajo etnográfico de campo aportó información para establecer relaciones dialógicas entre las visiones émica y ética, a partir de una serie de resultados que permiten configurar una propuesta glocalizada para enseñar geometría, la cual se encuentra en este momento en el proceso de diseño.

A lo largo de la investigación se ha podido constatar que al interior de las comunidades que se han visitado existen diversos contextos laborales, sociales, artísticos y culturales que pueden ser potencialmente aprovechables como contextos de aprendizaje.

La identificación de nociones geométricas en los distintos tejidos permite hacer sugerencias a la educación costarricense por medio de una propuesta glocalizada la cual se encuentra en construcción y que permite generar recomendaciones para enriquecer la enseñanza de la Geometría en el Ciclo Diversificado de Costa Rica, el cual corresponde a los dos últimos años de la Educación Secundaria.

Referencias

Álvarez, C. (2008). La etnografía como modelo de investigación en educación. *Gaceta de Antropología, 24*(1), 1-15.

D'Ambrosio, U. (2016). An overview of history of ethnomathematics. In M. Rosa; U. D'Ambrosio; D. Orey; L. Shirley; W. Alangui; P. Palhares and M.E. Gavarrete (Eds.), *Current and Future Perspectives of Ethnomathematics as a Program* (pp. 5-10). Springer International Publishing.

Merriam, S.B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. Jossey-Bass.

Ministerio de Educación Pública. (2017). *Los Huetares del Centro de Costa Rica. Minienciclopedia de los Territorios Indígenas de Costa Rica* [versión electrónica]. Autor.

Oliveras, M. L. (2005). Microproyectos para la educación intercultural en Europa. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas. 38*(11), 70-81.

Orey, D. & Rosa, M. (2015). Three approaches in the research field of ethnomodeling: emic (local), etic (global), and dialogical (glocal). *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8*(2), 364-380

Orey, D. & Rosa, M. (2021). Ethnomodelling as a glocalization process of mathematical practices through cultural dynamism. *The Mathematics Enthusiast*, *18*(3), 439-468.

Stake, R.E. (1994). Case studies. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Dirs.*). Handbook of qualitative research* (236-247). Sage.

COHERENCIA CURRICULAR DE LOS PLANEAMIENTOS DIDÁCTICOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA SECUNDARIA COSTARRICENSE EN EL ÁREA TEMÁTICA DE LAS ECUACIONES LINEALES

González-Jiménez, Cynthia, Universidad Nacional, Costa Rica

Ruiz-Hidalgo, Juan Francisco, Universidad de Granada, España

Abstract:

La planificación educativa es una herramienta necesaria en el accionar docente, principalmente para diseñar las tareas y recursos didácticos que orientan el proceso de aprendizaje. En Costa Rica, las planificaciones por parte de los docentes son obligatorias y deben atender el currículo normativo que tiene como eje central la resolución de problemas como estrategia de enseñanza. Este currículo detalla algunas pautas para la elaboración del planeamiento didáctico y las tareas escolares que diseñe el docente para la enseñanza de la matemática. En este trabajo presentamos un análisis cualitativo que profundiza la relación entre el diseño del planeamiento curricular que realiza el docente, las tareas escolares propuestas y los fundamentos curriculares, como parte de estudio relacionado con la coherencia curricular. Identificamos diferentes diseños de planificaciones que incorporan con mayor o menor detalles lo que refiere a la introducción del tema por medio del

planteamiento de un problema, la descripción de las actividades grupales a desarrollar, la inclusión del elemento histórico, el uso de la tecnología, niveles de dificultad, entre otros.

Palabras clave: *álgebra, currículo de Costa Rica, planeamiento didáctico, enseñanza de las matemáticas, resolución de problemas como estrategia de enseñanza.*

INTRODUCCIÓN

La educación matemática en Costa Rica a nivel de primaria y secundaria cuenta con un currículum normativo, conocido por los docentes y académicos como *la reforma educativa.* Este currículo se basa en la resolución de problemas y la contextualización activa como estrategias de enseñanza. A través de este documento, el Ministerio de Educación Pública (MEP) orienta al docente en su quehacer, por medio de indicaciones que describen cómo debe llevar a cabo la contextualización activa y la resolución de problemas como estrategia de enseñanza. Para ello, la planificación didáctica es una herramienta fundamental para responder al currículo normativo (MEP, 2012).

¿Qué conocimiento se debe enseñar? ¿Para qué se utiliza ese conocimiento? ¿Cómo se lleva a cabo la enseñanza? ¿Qué, cómo y cuándo evaluar? Estas cuestiones, según Rico y Ruiz-Hidalgo (2018), dan lugar a cuatro dimensiones que permiten estructurar el análisis y el diseño del currículo. En particular, el planeamiento que realiza el docente forma parte del currículo escolar, la planificación de la enseñanza es una herramienta que orienta al docente sobre lo que debe enseñar, los contenidos que debe desarrollar, los tiempos y momentos en los que debe atender la clase, las estrategias y recursos que apoyarán el proceso enseñanza, y qué elementos debe evaluar.

Por lo anterior, consideramos que la gestión del profesor es fundamental para generar coherencia curricular entre las actividades que conforman la planificación didáctica y los fundamentos de la Educación Matemática en Costa Rica. El docente debe diseñar las actividades, materiales, evaluaciones y los recursos en general, de manera que correspondan a los fundamentos curriculares, como lo son la contextualización activa y la resolución de problemas, la historia y la tecnología como recurso de enseñanza, y los niveles de dificultad.

Este trabajo forma parte de una investigación doctoral que estudia la coherencia del currículo en la educación secundaria costarricense, analizando la relación entre los fundamentos curriculares y los diversos materiales y recursos didácticos que elabora el docente para la enseñanza de las ecuaciones en octavo año de secundaria. Particularmente esta investigación pretende identificar la relación de coherencia entre el planeamiento didáctico realiza el docente de octavo curso, con los elementos curriculares en que se basa la enseñanza de la matemática en Costa Rica. Una pregunta guía para el desarrollo de esta investigación es ¿incluye el docente en su planeamiento didáctico los fundamentos curriculares de la educación matemática? ¿Cómo lo hace?

ELEMENTOS TEÓRICOS O CONCEPTUALES

Coherencia curricular

La coherencia curricular es un principio educativo que se refiere a la alineación y consistencia entre los diferentes elementos del currículo, como los objetivos de aprendizaje, los contenidos, las metodologías de enseñanza, y las estrategias de evaluación. De acuerdo con Feriole, Cormedi, & Aguilar (2021), este concepto busca garantizar que todos los componentes trabajen en armonía para promover un aprendizaje significativo y alcanzar las metas educativas establecidas.

En el área de la educación matemática, un estudio sobre coherencia curricular puede desarrollarse desde diferentes enfoques. Golding (2018) afirma que la coherencia de un currículo se puede estudiar desde la comunicación de las intenciones curriculares, especialmente respecto a los planes de estudio renovados de razonamiento matemático y resolución de problemas, el impacto y el uso de los recursos, el desarrollo de los maestros conocimiento del tema y el conocimiento pedagógico para el nuevo plan de estudios, el papel de las evaluaciones y exámenes.

De acuerdo con Rico (1998), el currículo es un instrumento que estructura la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, definiendo objetivos, contenidos, actividades y evaluaciones. Su diseño debe ser coherente y alinearse con los contextos socioculturales y las necesidades del estudiantado.

Planificación didáctica

La planificación, como competencia clave del profesor de matemáticas, demanda el desarrollo de habilidades para organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos mediante el análisis cuidadoso de su contenido, análisis necesario para establecer las expectativas de aprendizaje; al respecto, Gorycheva et al. (2020) señalan que la competencia didáctica es característica funcional de un docente y refleja su capacidad para tomar decisiones didácticas y la construcción de situaciones educativas orientadas a la comunicación, la reflexión y la comprensión.

La planificación didáctica es la previa selección y organización de todas las actividades de enseñanza, en función de las áreas temáticas (contenidos), objetivos y habilidades detallados en el currículo normativo, considerando los recursos humanos, económicos y materiales, el interés y las necesidades de la comunidad educativa, el tiempo disponible y la experiencia de años anteriores (MEP, 2012).

Zumbado (2014) recomienda planificar un problema y realizar la solución para verificar que favorece y desarrolla el conjunto de habilidades seleccionadas; además de incluir y detallar el momento de cierre o clausura, sin dejar de lado los diferentes momentos de la lección como la introducción y el desarrollo que deben atender el desarrollo de habilidades como la comunicación y algunas actividades lúdicas para favorecer el agrado por disciplina, incluir diferentes niveles de complejidad.

Elementos generales del planeamiento didáctico según el MEP

En el documento curricular normativo para la educación matemática en Costa Rica, considera que la enseñanza de las matemáticas escolares debe estar basada en la incorporación de problemas debidamente contextualizados, que sirvan como situaciones no sólo para aplicar conceptos o procedimientos matemáticos sino también para construirlos.

El currículo normativo también señala que es medular una intervención docente en términos de guía, asesoramiento y formulación de preguntas apropiadas. Los problemas que se presentan deben tener cierta complejidad, en este estilo las personas se ven confrontadas a distintos tipos de tareas y exploraciones, con la acción docente se ven motivadas para encontrar respuestas o condensar sus aportes realizando los procesos matemáticos de Representar, Razonar y argumentar, Comunicar o Conectar. De entrada, se trabaja directamente con el planteamiento y resolución de problemas, que con un énfasis en los contextualizados promueve la identificación, uso y diseño de modelos matemáticos sencillos, lo que apoya el desarrollo de las capacidades matemáticas.

Estructura y formato del planeamiento didáctico según el MEP

El MEP (2012) ofrece sugerencias generales para el diseño y elaboración de planeamiento didáctico y el desarrollo de las lecciones. Inicialmente, la integración de habilidades está considerada una de las orientaciones relevantes para el desarrollo de la acción de aula, refiere al manejo de los contenidos y las habilidades específicas. El currículo normativo aclara que no se trata de objetivos operativos que deben trabajarse en el aula necesariamente por separado, por el contrario, lo conveniente es tratar de integrar las habilidades específicas en todas las actividades de aprendizaje: planeamiento, desarrollo de la lección y evaluación. Tomando en cuenta que por medio de un solo problema es posible abordar varias habilidades.

Para la planificación del diseño de los problemas, se le pide al docente identificar contextos diversos y al mismo tiempo determinar los fines que se buscan con ellos, pues tendrán una función distinta a aquellos que sirven para iniciar la lección. Las sugerencias que emite el MEP (2012) para elaborar un planeamiento didáctico, se orientan a la inclusión de la contextualización por medio de problemas en los cuales se pueden abordar diversas habilidades; también se sugiere incluir los momentos de la clase; introducción o inicio por medio del planteamiento de un problema del contexto en el que el estudiante se sienta retado, por otro lado, el desarrollo de la lección en el que se implementan actividades de aprendizaje grupales y lúdicas orientadas por la resolución de problemas; y por último el cierre de la lección, en el que el docente hace una síntesis de los aprendizajes.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudio responde a una investigación cualitativa en la que han aplicado un conjunto de técnicas de recolección de información y de análisis, para obtener una visión general del trabajo que realizan 8 docentes de matemática y su percepción sobre la utilidad del planeamiento didáctico y la implementación de los fundamentos curriculares que plantea el programa de estudios de matemática a nivel de secundaria.

La investigación cualitativa ayuda a los investigadores a entender cómo es percibido un problema por la población objetivo, así como a definir o identificar opciones relacionadas en un contexto dado. Por su parte consideramos que esta investigación es un estudio de caso, ya que el estudio puede ser planeado y ejecutado de diferentes maneras, por ejemplo, adoptando enfoques cuantitativos, cualitativos o mixtos, y escogiendo una o varias unidades de análisis seleccionadas con diferentes justificativos. Los estudios de caso privilegian el estudio de fenómenos actuales e investigan y describen el contexto de la situación analizada (Yin, 2003).

Esta investigación pertenece a una serie de estudios derivados de un estudio doctoral en didáctica de la matemática, que tiene como propósito analizar la coherencia curricular en octavo año, específicamente en el tema de ecuaciones. Para este estudio, la población participante está conformada por 8 docentes de matemática que han impartido octavo nivel, en el cual se aborda el tema de ecuaciones lineales. Estos docentes nos facilitaron diversos materiales y recursos, como planeamientos, listados de ejercicios y prácticas, y pruebas evaluativas. De los 8 docentes, 7 de ellos tienen menos de 10 años de experiencia en educación secundaria, solo una persona docente tiene 15 años de experiencia.

Hemos desarrollado esta investigación por medio de un análisis documental de tipo descriptivo, dado que implica la revisión, selección, interpretación y análisis sistemático de documentos para obtener información relevante y significativa sobre un tema de estudio. De acuerdo con Guevara-Rodríguez (2019), es una técnica común en disciplinas como la educación y parte de su propósito es comprender contextos específicos a partir de la revisión y análisis de documentos artículos académicos, informes, registros oficiales, actas, bases de datos, entre otros.

El currículo normativo de matemática en Costa Rica detalla una serie de orientaciones generales para el diseño de problemas, practicas, evaluaciones, actividades de mediación y todas aquellas actividades relacionadas con el quehacer docente, entre ellas el diseño de su planeamiento didáctico. Por lo cual nos hemos centrado en una revisión documental para determinar cuáles son los indicadores de cada fundamento curricular, presentes en 8 planeamientos didácticos del tema de ecuaciones en octavo año.

Los indicadores que se utilizan para estudiar la inclusión de los fundamentos curriculares se construyeron en una primera etapa de la investigación doctoral. Establecemos una relación de correspondencia entre los fundamentos curriculares y las características del planeamiento didáctico para evidenciar la relación de coherencia curricular entre estos, a continuación, describimos brevemente los indicadores considerados para este análisis.

Para la búsqueda de un papel activo del estudiante en el proceso educativo por medio de la resolución de problemas y la contextualización activa: El docente debe presentar la temática por medio de un problema de introducción, para construir conceptos y destacar la necesidad de las matemáticas.

El docente debe presentar en el planeamiento didáctico, las actividades se pretenden desarrollar para favorecer el desarrollo de la habilidad específica, en busca de integrar las habilidades específicas en todas las actividades de aprendizaje: planeamiento, desarrollo de la lección y evaluación.

En lo que refiere al desarrollo de la competencia matemática por medio de procesos: el currículo normativo señala que el planeamiento didáctico debe proponer una actividad en las lecciones para que cada estudiante contraste y comunique sus ideas y soluciones.

Las actividades y objetivos propuestos deben considerar introducciones históricas para presentar el concepto de ecuación, mencionan aspectos históricos que enfoquen la importancia de la matemática en diversos contextos y disciplinas, consideran errores del pasado histórico para orientar la comprensión de sus estudiantes.

Para generar actitudes, creencias y valores positivos sobre la disciplina: sugerimos la incorporación de los siguientes elementos en las actividades y tareas que se presentan en el planeamiento didáctico:

- Perseverancia. Ver los errores oportunidades para mejorar el razonamiento.
- Confianza en la utilidad de las Matemáticas: Problema aplicable al contexto.
- Participación activa y colaborativa: favorecer la participación estudiantil activa e interactiva.
- Autoestima: impulsar la búsqueda de múltiples formas de razonamiento.
- Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas. Reflexión al recurrir a otras disciplinas.

Estos elementos se reflejan en el planeamiento didáctico por medio del enfoque del problema de introducción, el cual debe conformar un a situación del contexto que visualice la aplicabilidad de las matemáticas y oriente al estudiante a tener confianza, respeto, aprecio y disfrute por la disciplina.

Finalmente, el currículo normativo detalla que los problemas que se presentan en el planeamiento didáctico deben tener cierta complejidad, suponiendo que no se poseen todos los medios (conceptos o procedimientos) para resolverla.

RESULTADOS

En lo que respecta a la plantilla o formato que usan los docentes de matemática para presentar su planeamiento didáctico, encontramos que no existe relación entre el tipo de documento y la modalidad de la institución. Por ejemplo, unos docentes presentan la planificación de sus lecciones en una tabla de dos o tres columnas, en las que detallan habilidades por desarrollar y las estrategias de mediación en conjunto con los indicadores esperados. Mientras, otros los docentes presentan la planificación de sus lecciones por medio de una plantilla más amplia en la que se detallan las habilidades a desarrollar por el estudiante, las estrategias de mediación en la que se incluyan ejemplos específico, indicadores de la habilidad y además, se complementa en algunos casos con rúbricas de evaluación para el estudiante; recursos didácticos que se implementarán en el proceso de enseñanza, momentos de clase como introducción, desarrollo y trabajo del estudiante, discusión y retroalimentación, y clausura.

En general no existe un mecanismo por parte de las personas supervisoras que garantice que el docente incluya parcial o totalmente los fundamentos del currículo normativo. Lo más cercano es la revisión que hace el coordinador del departamento de matemática en la institución y en ocasiones el asesor regional. Sin embargo, 3 de los 8 planeamientos analizados, consisten en un listado de habilidades a desarrollar con indicadores de logro muy generales.

L inclusión de los momentos de la lección y la forma en la que se desarrolla cada una de estas etapas de la clase, se considera en 5 de los 8 planeamientos didácticos analizados. Lo que señala que el docente tiene claro que la lección se divide en introducción con el planteamiento del problema contextualizado, desarrollo de la clase con el trabajo colaborativo y la intervención docente, considerando la diversidad de pensamiento; y, por último, el cierre de la lección con la retroalimentación que pueda emitir el profesor. Pese a la importancia de las actividades evaluativas, únicamente dos de los planeamientos analizados se hace referencia al proceso de evaluación.

Los resultados que detallamos a continuación responden a los fundamentos curriculares, el en siguiente orden: búsqueda de un papel activo del estudiante en el proceso educativo por medio de la resolución de problemas y la contextualización activa, el desarrollo de habilidades y capacidades superiores, desarrollo de la competencia matemática por medio de procesos, inclusión de la tecnología y la historia de la matemática como un recurso de enseñanza, generar actitudes, creencias y valores positivos sobre la disciplina, y situaciones de aprendizaje con diferentes niveles de complejidad.

Todos los planeamientos analizados se refieren al enfoque de la resolución de problemas como estrategia de enseñanza en conjunto con la contextualización activa. Sin embargo, el MEP señala que, en el planeamiento, este elemento no solo debe mencionarse, el docente de incorporar el problema inicial como introducción de cada temática, enmarcado en un contexto familiar para el estudiante, en el que este pueda proponer soluciones. Del total de los planeamientos analizados, 4 de ellos detallan un problema o situación del contexto para hacer la introducción a la temática de ecuaciones.

Todos los docentes participantes de este estudio incluyen en sus planeamientos las habilidades que se deben abordar con la temática de ecuaciones en octavo año, así como la intensión de desarrollar las competencias correspondientes. En pocos casos, 2 docentes específicamente mencionan en su planeamiento el uso de la historia y la tecnología como recurso didáctico.

En lo que respecta a generar actitudes, creencias y valores positivos sobre la disciplina, 5 docentes incorporan la intencionalidad del trabajo colaborativo, y en cuales actividades se implementará. Según MEP (2012), la inclusión de este elemento favorece el disfrute y aprecio por la disciplina. Cabe rescatar que en ninguno de los planeamientos se hace referencia a la diversidad de soluciones que puedan surgir, ni al uso del error. Y la mitad de los planeamientos didácticos analizados incorporan diferentes niveles de dificultad en los problemas y actividades de clase.

CONCLUSIONES

En general, la planificación didáctica es una herramienta que permite al docente organizar la acción, ordenar la tarea, estimular el compartir, el confrontar, ayudar a establecer prioridades, a concientizarse sobre eso que va a enseñar, sobre la distribución del tiempo. Por lo que se sugerimos al MEP y a las universidades formadoras de futuros docentes de matemática, generar espacios de reflexión sobre este instrumento tan importante, como talleres o actividades académicas en las que se refuerce la importancia del diseño de este recurso, que orienta el desarrollo de las lecciones.

Al analizar los planeamientos didácticos de 8 docentes de matemática en secundaria, específicamente en el área de ecuaciones, encontramos que no existe relación con la modalidad de la institución y la inclusión de los fundamentos curriculares en el planeamiento didáctico que presenta el docente de matemática. El diseño y el detalle que incluyen estos planeamientos son muy variables: en algunos se hace referencia al problema que usará el docente para la introducción de la temática, las actividades grupales y lúdicas, y otros. Por lo que se sugiere a las personas asesoras un mayor seguimiento sobre la elaboración y diseño de este recurso.

La planificación de aula debería incorporar mayor descripción sobre el papel activo del estudiante en su proceso de aprendizaje, y complementar las actividades presentadas y su relación con los fundamentos curriculares. Se recomienda al MEP y a las universidades fortalecer la competencia profesional del docente de matemática en lo que respecta a la planificación de sus lecciones. Favorecer el sentido de elaborar este recurso, y no solo diseñarlo para cumplir.

En general, el planeamiento didáctico que elabora el docente no incluye la totalidad de actividades a desarrollarse en cada lección, lo aborda de manera general y en algunos casos no hay detalle de las actividades que responden al desarrollo de las habilidades y competencias. Consideramos que se requiere mayor detalle en el diseño de los planeamientos didácticos sobre las actividades de enseñanza y problemas a desarrollar, para que este instrumento cumpla su función, y al mismo tiempo poder identificar con mayor detalle su relación con los fundamentos curriculares, esto debido a que muchos de los fundamentos se identifican en el diseño de instrucciones, problemas y ejercicios, actividades de clase y los recursos, las cuales se incluyen de forma muy breve.

El planeamiento didáctico es un recurso que favorece la preparación cuidadosa de la lección involucrando la escogencia de los problemas, los tiempos a destinar para cada actividad y la acción docente en cada momento, que no es solamente guía general para la construcción de aprendizajes automáticos, sino que posee un carácter central en la interacción social y cognitiva de aula. El diseño adecuado de este recurso y su implementación es un elemento importante para generar coherencia entre los elementos curriculares de la educación matemática costarricense.

REFERENCIAS

Diaz, C. C., Reyes, M. P. y Bustamante, K. G. (2020). Planificación educativa como herramienta fundamental para una educación con calidad. *Utopía y praxis latinoamericana*, *25*(3), 87-95.

Guevara-Rodríguez, G. (2019). Análisis documental: Propuestas metodológicas para la transformación en programas de posgrado desde el enfoque socioformativo. *Atenas*, *3*(47), 105-123.

Gorycheva, S. N., Ignateva, E. Y. y Dautova, O. B. (2020). Structural and content characteristic of didactic competency of a modern educator. *European Proceedings of Social and Behavioural Sciences*.

Golding, J. (2018). What price coherence? Challenges of embedding a coherent curriculm in a market-driven and high-stakes assessment regime. In Y. Shimizu and R. Vithal (eds.), *The Twenty-fourth ICMI Study Conference Proceedings. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* (pp. 237-244). Tsukuba, Japan: International Commission on Mathematical Instruction.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2011). Disposiciones sobre el Planeamiento Didáctico en los Centro Educativos (DM-0033-11-11). San José, Costa Rica: autor.

Yin, R. (2003). Case Study Research: Design and Methods. (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Rico, L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional.

Rico, L., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018, November). Ideas to work for the curriculum change in school mathematics. In *ICMI Study 24 Conference proceedings. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* (pp. 301-308). ICMI.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 1(1), 22-39.

Feriole, G., Cormedi, M., & Aguilar, G. (2021). Alineación: el camino hacia el aprendizaje. *Conceptos Claves*.

Zumbado, M. (2014). Elementos a considerar en el planeamiento didáctico al implementar la Resolución de Problemas

LA DERIVADA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA: UNA MIRADA DESDE LOS TEXTOS UNIVERSITARIOS

Víctor Córdova-Cornejo, Universidad Católica del Maule

María D. Aravena-Díaz, Universidad Católica del Maule

Marcela Parraguez-González, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Danilo Díaz-Levicoy, Universidad Católica del Maule

Abstract:

Este estudio tiene como objetivo caracterizar las actividades propuestas para la enseñanza de la derivada en libros universitarios utilizados en la formación de profesores de matemática de Educación Secundaria en Chile. El análisis se centra en los tipos de funciones, actividades y problemas presentados en los textos. La muestra estuvo compuesta por dos libros que aparecen con mayor frecuencia en los programas de estudio de las asignaturas de cálculo diferencial en una variable de cuatro universidades que ofrecen la carrera de Pedagogía en Matemática. Se realizó un análisis de contenido utilizando categorías que incluyen el tipo de función, tipo de actividad y tipo de problema. Los resultados revelan una predominancia de funciones polinómicas. Las actividades son predominantemente ejercicios. Entre los problemas, los que involucran modelado matemático son escasos. Estos hallazgos sugieren que los textos universitarios para la enseñanza de la derivada se centran más en procedimientos algorítmicos que en la comprensión conceptual y la aplicación en contextos reales. El estudio acentúa la necesidad de una inclusión equilibrada de diferentes tipos de funciones, un mayor énfasis en los problemas de modelado para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la derivada. Estos resultados evidencian la necesidad de que los docentes universitarios complementen la enseñanza de la derivada con otros recursos, con el propósito de desarrollar una

comprensión amplia y profunda de este objeto matemático y de la habilidad de resolución de problemas.

Derivada, textos universitarios, modelación matemática, formación de profesores.

INTRODUCCIÓN

La derivada es una herramienta fundamental en el campo del cálculo y juega un papel crucial en diversas áreas de la matemática, la ciencia y la ingeniería (Aravena-Díaz et al., 2022; García et al., 2011). Sin embargo, pese a la importancia de este tópico, diversas investigaciones han reportado las dificultades que tienen los estudiantes, así como los profesores en formación, respecto al aprendizaje de este objeto matemático (Artigue et al., 1995; Pino-Fan et al., 2015; Galindo, Breda y Alvarado, 2023). Tales dificultades se deben a varias causas, entre las que se encuentran el predominio del registro algebraico, la enseñanza centrada en mecanismos, la dificultad en el cambio de registro, los errores conceptuales previos al cálculo y la complejidad inherente de los conceptos asociados al cálculo (Hitt, 2017; Molina-Mora, 2017).

Para subsanar aquellas dificultades, la modelación matemática emerge como herramienta para aplicarla en el aula (Hitt y Dufour, 2021). En este sentido, la investigación destaca las bondades de la práctica de la modelación matemática, que van desde el desarrollo del pensamiento crítico hasta la mejora de la resolución de problemas y la aplicación de conceptos matemáticos en contextos del mundo real (Zaldívar et al., 2017). Por su parte, Muñoz (2017) analiza la aplicación de la modelación matemática como estrategia pedagógica para el aprendizaje de la derivada, resaltando la importancia de esta para la comprensión conceptual, debido a la aplicación con fenómenos reales y cercanos a los estudiantes.

Por lo anterior, es un desafío, para los profesores en formación y en activo, contar con el conocimiento disciplinar y didáctico de manera que puedan desarrollar en los estudiantes el aprendizaje de los conceptos matemáticos (Carrillo et al., 2013). En particular, un buen dominio de la derivada y sus aplicaciones permite a los profesores explicar el concepto de manera clara y abordar las dificultades comunes que los estudiantes puedan enfrentar (Pino-Fan et al., 2012).

Por otro lado, uno de los elementos que guía el aprendizaje de la matemática de los estudiantes de los diferentes niveles de enseñanza es el libro de texto. Recurso que proporciona actividades y ejemplos que permiten a los estudiantes la construcción de su comprensión de un concepto matemático específico (Arnon et al., 2014). En este sentido, los libros universitarios desempeñan un papel clave en la enseñanza y aprendizaje de la derivada en el contexto de la Educación Superior, proporcionando una base estructurada para el estudio, con explicaciones teóricas, ejemplos prácticos y ejercicios que ayudan a los estudiantes a desarrollar una comprensión sólida (Larios y Jiménez, 2022; Vargas et al., 2020).

De acuerdo con las dificultades ampliamente documentadas en la enseñanza y aprendizaje de la derivada, así como con la relevancia de los libros de texto como recurso central en la formación matemática, este estudio tiene como objetivo caracterizar las actividades propuestas para la enseñanza de la derivada en textos universitarios utilizados en la formación de profesores de matemática de Educación Secundaria en Chile.

ANTECEDENTES

Los libros de texto son un recurso pedagógico esencial para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, y cada vez son más las investigaciones que centran su atención en este recurso, por lo que estudiar su contenido resulta inherente en la disciplina (Castillo et al., 2022; Schubring y Fan, 2018). Por ejemplo, Vargas et al. (2020) analizan las tareas sobre derivada en libros de texto de Bachillerato en España (entre 16 y 17 años), concluyendo la predominancia de tareas algorítmicas enfocadas en las reglas de la derivada y no en el propio concepto, ni su significado.

Larios y Jiménez (2022) analizan los significados parciales, en el contexto del enfoque ontosemiótico, que se da a la derivada en los textos universitarios para la formación de ingenieros, concluyendo que estos promueven un significado parcial del objeto matemático, enfocándose en la última etapa de su desarrollo histórico y no en el acercamiento intuitivo de los estudiantes. Utilizando el mismo enfoque teórico, Galindo y Breda (2023) analizaron 13 libros de texto universitarios utilizados para la formación de ingenieros comerciales, estableciendo la poca presencia de teoremas importantes relacionados con la derivada, falta de representatividad de sus definiciones y la predominancia de lenguaje simbólico en los argumentos.

METODOLOGÍA

Para lograr el objetivo de investigación, se realiza un estudio de tipo cualitativo por medio del análisis de contenido. La muestra estuvo formada por dos textos universitarios (Apóstol, 2001; Larson et al., 1999, T1 y T2, respectivamente), utilizados en la formación de profesores de matemática de Educación Secundaria. Para la selección de los textos se consultó los programas de estudio relacionados con la enseñanza del Cálculo Diferencial en una Variable de cuatro universidades chilenas y se eligió aquellos que se mencionan con mayor frecuencia en la bibliografía obligatoria o complementaria.

Las categorías consideradas para el análisis de las actividades presente en los textos universitarios seleccionados son:

Tipo de función. Se identifica la función que interviene en la actividad planteada. Para ello, se adaptaron las identificadas en Vargas et al. (2020): Polinómica (Pl), Radical (Rd), Valor absoluto (Va), Trigonométrica (Tr), Racional (Rc), Potencia (Pt), Exponencial (Ex), Logarítmica (Log), Composición (Cm) y No identificada (Ni).

Tipo de actividad. Las situaciones se clasifican en ejercicio (E) o problema (P), basándonos en la visión de Mazzilli et al. (2016), quienes mencionan que el ejercicio busca la repetición de un procedente para asimilar conocimientos y habilidades, mientras que el problema tiene "como objetivo la aplicación de los conocimientos, habilidades y hábitos para encontrar la solución" (p.105).

Tipo de problema. Las actividades que se han categorizado como problemas, a su vez, se han clasificado como de Modelado (Mod) o No Modelado (NMod), atendiendo a que modelo matemático corresponde a "un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación" (Villa-Ochoa et al., 2009, p.162).
Los datos se han ingresado a una planilla Excel para su posterior resumen en tablas y análisis.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la Tabla 1 se resume la distribución de las 1069 actividades identificadas en este análisis y presentadas según el tipo de función.

Tabla 1

Frecuencia (y porcentaje) de tipo de función

Texto	Tipo de función								Total
	Pl	Rd	Va	Tr	Rc	Pt	Cm	Ni	
T1	49(34,8)	3(2,1)	0(0)	9(6,4)	17(12,1)	0(0)	38(27)	25(17,7)	141(100)
T2	263(28,3)	41(4,4)	22(2,4)	91(9,8)	150(16,2)	12(1,3)	148(15,9)	201(21,7)	928(100)
Total	312(29,2)	44(4,1)	22(2,1)	100(9,4)	167(15,6)	12(1,1)	186(17,4)	226(21,1)	1069(100)

Nota: Polinómica (Pl), Radical (Rd), Valor absoluto (Va), Trigonométrica (Tr), Racional (Rc), Potencia (Pt), Composición (Cm) y No identificada (Ni).

En cuanto al tipo de función, observamos que existe un claro predominio de las polinómicas (29,2%), seguida de aquellas donde no se especifica qué función intervine (no identificadas) (21,1%) y las racionales (15,6%), predominancia que concuerda con los resultados reportados por Vargas et al. (2020). Además, estos resultados se ajustan con lo mencionado por Artigue et al. (1995), respecto al predominio de lo algorítmico, dado que para derivar las funciones polinómicas solo se debe aplicar la regla de una potencia y suelen presentarse luego de la definición, teoremas o axiomas, como ejercicios con menor dificultad. Esta tendencia hacia las funciones polinómicas y racionales refleja una inclinación hacia métodos de cálculo más directos y menos complejos.

En cuanto al tipo de actividad (Tabla 2), en su mayoría, corresponden a ejercicios (62,1%), en desmedro de los problemas (37,9%). Este hallazgo refleja una tendencia hacia la práctica de habilidades y procedimientos específicos, en lugar de fomentar la resolución de situaciones más complejas que requieren la aplicación de conocimientos en contextos variados y reales (Vilca, 2019).

Respecto al tipo de problema, observamos que los relacionados con modelado matemático tienen menos presencia en los textos universitarios para la enseñanza de la derivada en la formación de profesores de matemática (7,4%). Esto contradice la literatura, que destaca la importancia del modelado matemático para desarrollar habilidades de pensamiento crítico y comprensión conceptual (Molina-Mora, 2017). La insuficiencia en la inclusión de problemas de modelado puede limitar la capacidad de los estudiantes para aplicar la derivada en contextos prácticos y reales, lo que es crucial para una formación integral (Rodríguez y Quiroz, 2016).

Tabla 2

Frecuencia (y porcentaje) de tipo de actividad

Tipo de actividad		T1	T2	Total
Ejercicios		80 (56,7)	584 (62,9)	664(62,1)
Problemas	Mod	11 (7,8)	68 (7,3)	79(7,4)
	NMod	50 (35,5)	276 (29,7)	326(30,5)
Total		141(100)	925(100)	1069(100)

Mod: Problema de Modelado; NMod: Problema de no modelado

CONCLUSIÓN

Los textos universitarios son un recurso importante para la formación de los futuros profesores de matemática, dado que presentan los aspectos centrales de los objetos matemáticos que se trabajan en esta carrera (Font y Godino, 2006).

En cuanto a los resultados de este trabajo, donde se buscó caracterizar las actividades propuestas para la enseñanza de la derivada en textos universitarios utilizados para la formación de profesores, se observa la predominancia de las funciones polinómicas y no identificadas, así como los ejercicios. A partir de estos resultados se desprende la necesidad de que los docentes universitarios (formadores de formadores) planteen situaciones donde los futuros profesores interactúen con una mayor variedad de funciones, y problemas, dado que la derivada es un tema fundamental para otros contenidos matemáticos y con aplicaciones en diferentes contextos de la vida cotidiana y de diferentes profesiones.

En cuanto a los tipos de problema, la mayoría de los propuestos en los textos universitarios analizados no favorecen el modelado matemático, es decir, se busca el aprendizaje del concepto desde lo procedimental mecánico, limitando la posibilidad de relacionar, predecir y explicar la realidad mediante relaciones y símbolos matemáticos.

Finalmente, si bien estos resultados son producto del análisis de dos textos, sus hallazgos son relevantes, dado que estos son los utilizados con mayor frecuencia en programas de estudios de Calculo Diferencial en una Variable en las universidades consultadas y refleja, en gran medida, la enseñanza que reciben los futuros profesores.

Este trabajo plantea el desafío de caracterizar las tareas presentes en los textos de menor frecuencia mencionados en los programas de estudio de Calculo diferencial.

Agradecimientos

Estudio financiado por ANID - Proyecto FONDECYT Regular 1230865 y Beca ANID-Subdirección de Capital Humano/Doctorado Nacional/2024-21241040.

Referencias bibliográficas

Apóstol, T.M. (2001). *Calculus* (2da. ed.). Reverté.

Aravena-Díaz, M.D., Díaz-Levicoy, D., Rodríguez-Alveal, F. y Cárcamo-Mansilla, N. (2022). Estudio de caso y modelado matemático en la formación de ingenieros. Caracterización de habilidades STEM. *Ingeniare*. *Revista Chilena de Ingeniería, 30*(1), 37-56.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). ERME.

Castillo, M., Burgos, M., y Godino, J.D. (2022). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa, 48*, e238787. https://doi.org/10.1590/s1678-4634202248238787esp

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *8*(1).

Galindo, M. K., Breda, A., y Alvarado, H. (2023). Diseño de un proceso de enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. *Paradigma*, *44(2), 321-*

350.

García, L., Moreno, M., Badillo, E. y Azcárate, C. (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: Consideraciones didácticas. *Economía, 36*(31), 137-171.

Hitt, F. (2017). El aprendizaje del cálculo y nuevas tendencias en su enseñanza en el aula de matemáticas. *Eco Matemático, 8*, 6-15. https://doi.org/10.22463/17948231.1374

Hitt, F. y Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: representations and actions by students in action. *ZDM - Mathematics Education*, *53*(3), 635-647. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x

Galindo, M. y Breda, A. (2023). Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. *Bolema. Boletim de Educação Matemática, 37*(75), 271-295.

Larios, V. y Jiménez, A. (2022). Significados parciales de la derivada en libros universitarios en la formación de ingenieros. *Praxis & Saber*, *13*(33), e12274.

Larson, R.E., Hostleter, R.P. y Edwards, B.H. (1999). *Cálculo y geometría analítica* (6ta. ed.). Mc Graw-Hill.

Mazzilli, D., Hernández, L. y De La Hoz, S. (2016). Procedimiento para desarrollar la competencia matemática resolución de problemas. *Escenarios*, *14*(2), 103-119.

Molina-Mora, J.A. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *Uniciencia, 31*(2), 19-36. https://doi.org/10.15359/ru.31-2.2

Muñoz, J. (2017). *La modelación matemática como estrategia didáctica para el aprendizaje del concepto de derivada*. Universidad Católica de Manizales.

Pino-Fan, L.R., Godino, J.D., Castro, W.F. y Font, V. (2012). Conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación: explorando el conocimiento especializado sobre la derivada. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 427 - 434). SEIEM.

Pino-Fan, L.R., Godino, J.D. y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, *29*(51), 60-89. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04

Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática*, *28*(3), 91-110.

Schubring, G. y Fan, L. (2018). Recent advances in mathematics textbook research and development: an overview. *ZDM - Mathematics Education*, *50*(5), 765-771.

Vargas, M.F., Fernández-Plaza, J.A. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2020). La derivada en los libros de texto de 1o de Bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 18*, 87-102. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.288

Vilca, C. (2019). Resolución de problemas como estrategia en el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de secundaria. *Revista De Investigaciones, 8*(2), 1028-1036.

Villa-Ochoa, J.A., Bustamante, C.A., Berrío, M.J., Osorio, J.A. y Ocampo, D.A. (2009). Sentido de Realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 159-180.

Zaldívar, J.D., Quiroz, S.A. y Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, 8*(15), 87-110. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.63

CONSTRUYENDO EL FRAGMENTO MATEMÁTICO HOMOTECIA: UNA PROPUESTA DESDE LA TEORÍA APOE INTEGRANDO GEOGEBRA

[Arantxa Flores-Arancibia], [Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]

Abstract:

[El presente documento muestra los resultados de la implementación de una propuesta elaborada con base al marco teórico APOE. Su objetivo, es caracterizar las estructuras mentales de los estudiantes respecto al fragmento matemático homotecia tras realizar una actividad que implica el uso de Geogebra para la formulación de conjeturas, y en consecuencia, su influencia en la evolución de esquemas mentales. Para ello, se creó una propuesta de actividad que se aplicó con 6 estudiantes de primero medio de un colegio particular subvencionado ubicado en la comuna de Concón. La situación de aula fue construida siguiendo la estructura de la Ingeniería Didáctica, que permitió contrastar el análisis a priori y posteriori de la situación. Se realizó un análisis preliminar de la homotecia desde una perspectiva histórico-epistemológica, seguido por su estudio como objeto matemático y su análisis en el currículo escolar. Posteriormente, se diseñó la actividad a partir de un análisis a priori, considerando posibles respuestas, contrastándolas con respuestas expertas, y anticipando errores comunes, como la generalización incorrecta de los parámetros de las razones de homotecia y dificultades técnicas al manipular GeoGebra. Tras la fase de experimentación, se analizaron los resultados y se evaluó la implementación de la propuesta, considerando cómo los elementos del marco teórico se operativizaron en actividades concretas que promovieron las construcciones mentales previstas en los estudiantes. Los resultados demostraron que la propuesta de aula favoreció la evolución de

los esquemas mentales de los estudiantes, logrando la encapsulación de la homotecia como un objeto matemático.]

[APOE, Homotecia, Geometría, GeoGebra, Propuesta Didáctica]

INTRODUCCIÓN

La geometría es fundamental en la formación académica y cultural, destacándose por su capacidad para desarrollar el razonamiento lógico y espacial, así como habilidades de visualización, pensamiento crítico y resolución de problemas (Jones, 2002). En el ámbito escolar, el Ministerio de Educación (2016) indica que el eje de geometría busca potenciar las capacidades espaciales de los estudiantes, siendo fundamental la habilidad de representación, sin embargo, la enseñanza de esta rama a menudo se centra en la memorización y aplicación de fórmulas (Gómez y Andrade-Molina, 2022). Además, es frecuente que los contenidos geométricos se posterguen en la planificación escolar, lo que afecta su enseñanza y comprensión (Abrate et al., 2006); uno de estos es la homotecia. Este fragmento matemático se introduce en primer año de enseñanza media, generalmente al final del segundo semestre, pero dado el enfoque algebraico de su enseñanza, se pierde la oportunidad de comprenderla como una relación dinámica entre perspectiva y transformaciones geométricas (Gómez y Andrade-Molina, 2022). Es por esta razón que surge la necesidad de generar propuestas didácticas que permitan trabajar los objetos matemáticos desde su concepción geométrica.

ELEMENTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

La teoría APOE, desarrollada por Ed Dubinsky (1996), describe cómo el aprendizaje de un concepto o fragmento matemático se desarrolla a través de construcciones mentales que llevan a la solución de un problema por medio de la articulación de mecanismos mentales o abstracciones reflexivas. Según esta teoría, el aprendizaje comienza con *acciones*, que son las primeras interacciones del sujeto con un fragmento matemático por medio de la instrucción. Estas acciones, al repetirse y reflexionarse, se interiorizan en *procesos*, pues ya no se necesita del estímulo externo. Una vez que el individuo se hace consciente del proceso como un todo y logra establecer relaciones entre dos o más procesos, se dice que los ha coordinado, lo que lleva a una encapsulación de los procesos en un *objeto*. Todas estas estructuras se organizan en *esquemas*, que son las colecciones de acciones, procesos y objetos necesarios para comprender un concepto matemático y enfrentar situaciones problemáticas.

Al operativizar los elementos teóricos y conceptuales con los antecedentes sobre la enseñanza de la homotecia en la escuela, surge la pregunta de investigación ¿*de qué manera la formulación de conjeturas mediante el uso de GeoGebra, propicia la evolución de los esquemas mentales y la encapsulación de la homotecia como un objeto matemático*?

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

La propuesta se centra en una actividad donde los estudiantes, utilizando GeoGebra, formulan conjeturas sobre las propiedades de la homotecia al variar la razón 'k'. Cada parte de la propuesta está diseñada y justificada con base en el marco teórico APOE.

En la etapa inicial, se busca conectar nuevos fragmentos matemáticos con los conocimientos previos de los estudiantes para facilitar la evolución de sus esquemas mentales. Se les entrega una guía con preguntas dirigidas y se proyectan 7 fotografías para identificar en ellas elementos matemáticos tales como rectas, figuras geométricas, semejanza, proporcionalidad, entre otros.

A continuación, los estudiantes describen estos elementos en su guía y posteriormente, comparten sus respuestas con sus compañeros para enriquecer sus definiciones. Finalmente, los conceptos desarrollados se discuten en plenario para formalizarlos y corregir posibles errores.

La actividad continúa en el patio del establecimiento, donde los estudiantes toman fotografías con características similares a las identificadas en las imágenes. Luego, en la sala de computación se entregan instrucciones para importarlas a GeoGebra Clásico, una vez cargada la imagen deben identificar y trazar un polígono etiquetando sus vértices. A partir de ello, generan dos rectas que pasen por las aristas del polígono, y marcan su intersección. Aquí, los estudiantes están siguiendo pasos detallados y reaccionando a estímulos externos, por lo que se encuentran en la etapa de *acción*.

Luego deben crear un deslizador 'k' y asociarlo a una homotecia entre el polígono trazado y la intersección de las rectas. Cuando los estudiantes manipulan el deslizador de GeoGebra para modificar el valor de k y observar cómo la figura se transforma, se encuentran en la etapa de *proceso*, pues están interactuando dinámicamente con el concepto de homotecia.

De lo observado, escriben sus anotaciones en la guía de trabajo y repiten el mismo proceso con otra fotografía, prediciendo lo que sucederá al variar la razón de homotecia. Al hacer esto, se espera que los estudiantes den un paso hacia la generalización del concepto, pues conjeturan y plantean las propiedades observadas para generalizarlas.

Para finalizar la actividad contrastan sus respuestas en un plenario y se muestra nuevamente la primera diapositiva, donde podrán identificar las propiedades de la razón de homotecia dados ciertos polígonos homotéticos. Se considera que han encapsulado la homotecia como *objeto* cuando pueden explicar el valor de 'k' tanto algebraica como geométricamente, sin la necesidad de mover el deslizador, y aplicarlo en diferentes contextos.

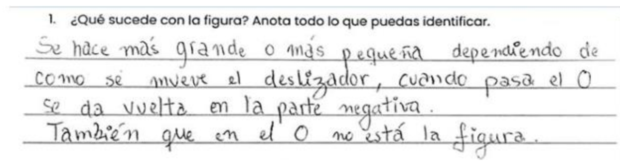
RESULTADOS DE IMPLEMENTACIÓN

En la primera parte de la actividad, los estudiantes lograron evocar y definir distintos conceptos matemáticos, mostrando una comprensión general de los elementos como *proceso* y, en algunos casos, como *objeto*. En la segunda parte, todos los estudiantes pudieron tomar fotografías adecuadas para el análisis de homotecias y siguieron cuidadosamente las instrucciones para trazar los elementos necesarios, sin embargo, en esta parte necesitaron más apoyo, pues no estaban familiarizados con el software.

Posteriormente, al manipular el deslizador, los estudiantes identificaron inmediatamente que la figura cambiaba su tamaño, además de algunos casos particulares: si $k < 0$, esta se invierte y si $k = 0$, la figura ya no se muestra.

Figura 1

Respuesta a la primera pregunta de la guía de trabajo



1. ¿Qué sucede con la figura? Anota todo lo que puedas identificar.

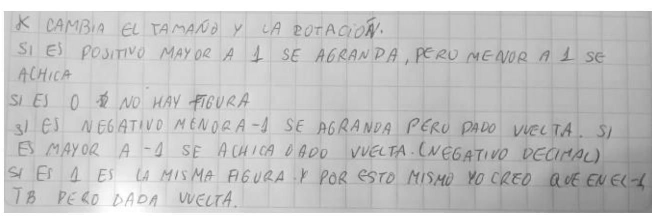
Se hace más grande o más pequeña dependiendo de como se mueve el deslizador, cuando pasa el 0 se da vuelta en la parte negativa.
También que en el 0 no está la figura.

Nota: Elaboración de un estudiante

Se logró una generalización de manera algebraica caso por caso a partir de la observación geométrica de las figuras en GeoGebra. Uno de los estudiantes resumió las ideas recogidas del plenario, se presenta la evidencia a continuación.

Figura 2

Conclusiones respecto a los valores de la razón de homotecia



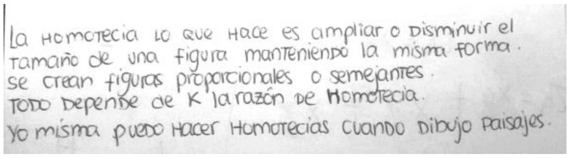
K CAMBIA EL TAMAÑO Y LA ROTACIÓN.
SI ES POSITIVO MAYOR A 1 SE AGRANDA, PERO MENOR A 1 SE ACHICA
SI ES 0 NO HAY FIGURA
SI ES NEGATIVO MENOR A -1 SE AGRANDA PERO DADO VUELTA. SI ES MAYOR A -1 SE ACHICA DADO VUELTA. (NEGATIVO DECIMAL)
SI ES 1 ES LA MISMA FIGURA Y POR ESTO MISMO YO CREO QUE EN EL -1 TB PERO DADA VUELTA.

Nota: Elaboración de un estudiante a partir del plenario

Además, una de las estudiantes de manera individual, logró explicar en qué consiste la homotecia, relacionándola a conceptos como proporcionalidad y semejanza, además de reconocer su aplicación en el dibujo.

Figura 3

Conclusiones de una estudiante respecto al concepto homotecia



Nota: Elaboración de un estudiante

CONCLUSIONES

Se observó que los estudiantes lograron encapsular la homotecia como un *objeto*, pues fueron capaces de dar una definición para el objeto, argumentando cuáles son los parámetros de k en figuras homotéticas y relacionando el nuevo conocimiento con conceptos previos y otras situaciones fuera de la matemática. Esto evidencia una evolución de sus esquemas mentales dado que lograron caracterizar el objeto con sus propiedades y asociarlo a otros contextos.

El trabajo colaborativo fue clave para complementar definiciones y observaciones. Además, las actividades fuera del aula y el uso de TIC motivaron a los estudiantes, incentivando su participación. Se identificó la necesidad de reforzar el uso del lenguaje matemático, ya que los estudiantes tuvieron dificultades para expresar definiciones formalmente.

Para mejorar la propuesta, se sugiere realizar una introducción previa al uso de GeoGebra, acompañada de ejemplos prácticos y guiados que familiaricen a los estudiantes con las herramientas básicas del software. Asimismo, se recomienda intencionar su uso frecuente durante las actividades, priorizando la visualización y manipulación de los objetos geométricos como punto de partida para la posterior comprensión numérica y algebraica.

REFERENCIAS

Abrate, R., Delgado, G., y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, *39*(1), 1-9

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, *8*(03), pp. 24-41.

Gómez, J., y Andrade-Molina, M. (2022). Discordancias del currículo escolar: Homotecia más allá de la proporcionalidad. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *14*(1), 31–42.

Jones, K. (2002) Issues in the teaching and learning of geometry. In, L. Haggarty (ed.), *Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice*. Routledge, pp. 121-139.

Ministerio de Educación [Mineduc]. (2016). *Bases Curriculares 7° a 2° Medio*. Unidad de Currículum y Evaluación Ministerio de Educación, Primera edición. Santiago de Chile.

CO-DISEÑO MULTILINGÜE PARA REDISTRIBUIR LA AUTORIDAD EPISTÉMICA EN MATEMÁTICA DE PRIMARIA

Patricia Fuentes Acevedo, Christina Kimmerling, Rossella Santagata

University of California, Irvine

Abstract:

Transformar las perspectivas deficitarias sobre el conocimiento y habilidad matemática de los estudiantes provenientes de grupos minorizados requiere enfoques que centren a sus familias y comunidad como pieza clave en los procesos de mejora de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Este estudio cualitativo explora cómo las experiencias de co-diseño y el uso de repertorios lingüísticos completos por parte de madres, profesoras e investigadoras pueden promover la redistribución de autoridad epistémica en matemática de primaria (ejercer el poder o derecho de saber matemática). Utilizamos análisis temático para codificar cualitativamente las transcripciones de siete reuniones audio-grabadas, artefactos producidos y dos grupos focales finales. Los hallazgos preliminares indican que la creación de un espacio comunicativo familiar y la resolución conjunta de problemas matemáticos desafiantes permiten la restauración o creación de autoridad epistémica matemática. Las interacciones reflejan que el translenguaje contribuye a humanizar las relaciones, evocar valores familiares y permitir que las madres ejerzan autoridad epistémica matemática junto a las profesoras e investigadoras. Este estudio muestra que la participación expansiva y flexible en actividades matemáticas desafiantes y la deconstrucción de fronteras lingüísticas promueven la restauración de la autoridad epistémica de las madres latinas, permitiendo una colaboración equitativa con la escuela que apoya el aprendizaje matemático.

Matemática de primaria, Co-diseño, Multilingüismo, Involucramiento familiar

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje matemático puede ser una experiencia de alegría, exploración y creatividad. Sin embargo, en el contexto estadounidense, las aulas de matemática también pueden ser espacios donde los estudiantes de comunidades minorizadas deben dejar de lado su herencia y sus prácticas comunitarias para adaptarse a los paradigmas dominantes de la educación matemática (Paris, 2012; Louie, 2018). Cambiar las narrativas sobre lo que cuenta como conocimiento matemático válido y riguroso y quién tiene derecho a hacer matemáticas requiere acciones intencionales donde se eleven, valoren y sostengan las formas de ser, conocer y hacer matemática de las personas de color (Gutiérrez et al., 2023; Paris, 2012). En la actualidad, la educación matemática en las escuelas estadounidenses sigue enfrentando el gran reto de transformar las perspectivas deficitarias sobre los estudiantes minorizados, sus familias y sus comunidades. Para lograr estos cambios, los enfoques que incorporan a las familias y la comunidad como pieza clave en el aprendizaje matemático de formas equitativas tienen gran potencial (Ishimaru, 2019).

La presente investigación se desarrolla en una escuela primaria del sur de California que atiende 83% de comunidades latinas y más de 90% de familias en situación socioeconómica desfavorecida. El trabajo ocurre en el marco de una alianza investigación-práctica entre una facultad de educación y un distrito escolar local para la mejora de la enseñanza de la matemática. El rol del equipo universitario ha sido apoyar la implementación de un nuevo enfoque de enseñanza de la matemática, el cual pone el pensamiento matemático de los estudiantes al centro de la instrucción, pero no necesariamente presta atención a su herencia cultural, prácticas lingüísticas y prácticas matemáticas comunitarias. Uno de nuestros objetivos ha sido la creación de colaboraciones equitativas con las familias como una forma de construir infraestructura para integrar aspectos cognitivos y culturales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Guiados por la literatura sobre participación de padres y comunidades en la escuela (Civil, 2007; Ishimaru, 2019), nuestro proyecto desarrolla una colaboración equitativa entre madres mayormente latinas, profesoras de primaria, e investigadoras. En reuniones mensuales las participantes discuten sus prácticas matemáticas, resuelven problemas y co-diseñan apoyos para el aprendizaje matemático, utilizando tanto inglés como español.

Este estudio analiza la experiencia de las participantes y las interacciones sostenidas para comprender las dinámicas de poder en un espacio colaborativo en donde diferentes actores convergen, algunos de ellos bilingües y otros no, sosteniendo conversaciones centradas en la matemática escolar de primaria. Por tanto, abordamos la siguiente pregunta de investigación: ¿De qué manera las experiencias de co-diseño y el uso de los repertorios lingüísticos completos de los participantes permiten la redistribución de autoridad epistémica matemática?

ELEMENTOS CONCEPTUALES

Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática en la Escuela Primaria

El enfoque instruccional que el distrito escolar ha adoptado se denomina Instrucción Cognitivamente Guiada (CGI) y se basa en un marco desarrollado por investigadores en educación matemática para traducir sus hallazgos sobre el pensamiento matemático de estudiantes hacia prácticas de enseñanza concretas (Carpenter & Franke, 2004). Uno de los principios fundamentales de CGI es que los estudiantes llegan a la escuela con concepciones y entendimiento de las ideas matemáticas elementales y que los profesores deberían tomarlo como base de su instrucción (Carpenter & Franke, 2004). Sin embargo, el enfoque CGI no considera explícitamente que las concepciones y entendimiento de los estudiantes están mediados por aspectos sociales, culturales y políticos. Por tanto, si bien CGI puede promover la equidad en el aula al perseguir una instrucción centrada en el pensamiento matemático del estudiante, la implementación del enfoque por sí sola no interrumpe perspectivas deficitarias sobre los estudiantes y sus familias, especialmente en comunidades minorizadas (Maldonado Rodríguez et al., 2022). En este sentido, se vuelven necesarios esfuerzos adicionales para transformar las perspectivas y prácticas de las escuelas y los profesores.

Perspectivas Críticas en Involucramiento de la Familia y la Comunidad

La forma en que las escuelas y los maestros interactúan con las familias y los miembros de la comunidad es el foco de un campo de investigación educativa que en las últimas décadas ha promovido que las escuelas construyan colaboraciones equitativas con las familias y las comunidades basadas en la confianza relacional, la redistribución del poder y la direccionalidad recíproca de las acciones (Ishimaru, 2019). Como Ishimaru (2019) postula, las colaboraciones equitativas pueden «en teoría, construir apoyo y el compromiso familiar, así como mejorar las escuelas» (p. 356). Nuestro trabajo conjetura que para construir colaboraciones equitativas que consigan transformación institucional es necesario que se redistribuya la autoridad epistémica matemática, posicionando la herencia y prácticas culturales de las familias como fuente valiosa de conocimiento matemático.

Experiencias en donde las familias forman parte del diseño de oportunidades de aprendizaje matemático pueden ayudar a establecer o restaurar la autoridad epistémica matemática de los padres, madres y cuidadores (Booker & Goldman, 2016). Estos autores definen la autoridad epistémica como “ejercer el derecho o el poder de saber" (Booker & Goldman, 2016, p. 222). En su proyecto con familias, profesores, académicos, estudiantes, organizadores comunitarios, diseñadores curriculares y un matemático, identificaron conexiones entre las prácticas matemáticas cotidianas de los participantes y los estándares de aprendizaje matemático para co-diseñar múltiples apoyos matemáticos para las familias y estudiar los procesos de trabajo conjunto. Nuestra investigación extiende esos esfuerzos previos y provee un ejemplo concreto de redistribución de autoridad epistémica en el contexto de colaboración equitativa multilingüe en matemática de primaria.

Uso del Repertorio Lingüístico Completo

Reconociendo que las lenguas son objetos sociales, la perspectiva de translenguaje describe cómo las personas pueden utilizar de forma fluida y dinámica sus prácticas de lenguaje rompiendo las fronteras definidas social y políticamente para diferenciar una lengua de otra (Otheguy et al., 2015). Estas perspectivas sobre el lenguaje permiten centrar las prácticas lingüísticas de los grupos minorizados, rompiendo con paradigmas tradicionales del sistema educativo estadounidense en donde se prioriza la enseñanza monolingüe con el objetivo de desarrollar competencia en el idioma dominante.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Contexto

El Equipo de Liderazgo Matemático Familiar (ELMF) es el escenario principal donde se lleva a cabo la colaboración. Comenzamos el ELMF durante el último año escolar, reuniéndonos mensualmente durante 90 minutos. Las reuniones fueron facilitadas en inglés y español por la primera autora, con colaboración de una coordinadora de proyecto y una asistente de investigación. Todas son bilingües y se identifican como latinas. Un total de siete madres se unieron a nuestro equipo. Seis de ellas se identifican como latinas y una como afroamericana. Tres profesoras también formaron parte del equipo: una profesora latina de primer grado, una profesora afroamericana de segundo grado y una profesora blanca de tercer grado.

Fuentes de datos

Como datos primarios se utilizan las transcripciones de las reuniones del ELMF que fueron audio-grabadas utilizando 2 dispositivos simultáneamente, situados en distintas partes de la sala, y dos grupos focales de 30 minutos (madres y profesoras por separado) realizados al final del año escolar. Además, consideramos los artefactos utilizados y producidos durante las reuniones. El equipo creó las transcripciones utilizando los softwares Otter.ai, para las partes en inglés, y Notta.ai, para las partes en español. Combinamos ambos textos para tener una transcripción completa en el idioma original de las conversaciones.

Enfoque analítico

Para responder nuestra pregunta de investigación utilizamos análisis temático (Nowell et al., 2017), pues permite describir y nombrar las prácticas de participación en las interacciones que posibilitan, materializan y restringen la redistribución de la autoridad epistémica matemática entre cuidadores, docentes e investigadores cuando estos participan en experiencias de co-diseño utilizando sus repertorios lingüísticos completos. Esta técnica permite combinar los enfoques deductivo e inductivo. Utilizamos los grupos focales para desarrollar un esquema de códigos basado en lo que las madres y profesoras resaltaron como relevante sobre la experiencia. Luego de sucesivas iteraciones para mejorar el esquema de códigos informado por la literatura relevante en involucramiento familiar y translenguaje, analizamos las transcripciones de las reuniones del ELMF, tomando como unidad de análisis segmentos de conversación, identificando un nuevo segmento por cada cambio en el tema de conversación. El 30% las transcripciones de las reuniones fueron codificadas por dos miembros del equipo de investigación y se utilizaron los artefactos recolectados para alcanzar un entendimiento completo de cada situación interaccional. Reuniones periódicas del equipo permitieron presentar los segmentos codificados y resolver discrepancias, cuando existieron, hasta alcanzar consenso.

RESULTADOS

Los hallazgos preliminares del análisis temático revelan dos formas principales en que experiencias de co-diseño y el uso de los repertorios lingüísticos completos de los participantes promueven la redistribución de autoridad epistémica matemática: la creación de un espacio de comunicación familiar y la resolución de problemas y diseño de experiencias matemáticas.

Creación de un espacio de comunicación con valores familiares

Las madres, profesoras y miembros del equipo de investigación crearon activamente un espacio de comunicación confortable a través del translenguaje. Nuestros análisis revelan evidencia de múltiples expresiones de humor y cariño en las interacciones, además de interpretación de un idioma a otro llevada a cabo no solo por la facilitadora principal, sino que por múltiples participantes. Esto contribuyó a la co-construcción de discurso en español y en inglés. Estas condiciones son especialmente relevantes para las prácticas instruccionales de estas profesoras, quienes atienden un alto porcentaje de estudiantes bilingües. Las formas de participación multimodal permitieron que a través de la discusión de sus prácticas matemáticas cotidianas o de la resolución de problemas, las madres, profesoras e investigadoras pudieran desplegar sus repertorios lingüísticos completos para humanizarse frente a las otras. Esta fluidez entre diferentes formas de expresión favoreció que las madres ejercieran su autoridad de saber matemática junto a las profesoras, pues evocó valores familiares y de amistad:

> Madre 1: Pero también hablar en español porque si muchas veces lo que he notado hablando con papás de hoy es que no quieren, no se sienten cómodos no más en inglés, no se sienten incluidos y aquí uno se siente incluido. Hablar en español se siente como familia. Se siente *like okay* más la amistad porque es en español. Y en inglés yo hago amistades sí, pero es como más profesional, más negocio, y esto es más íntimo.

Resolución problemas desafiantes y creación de experiencias matemáticas en conjunto

Variadas interacciones revelan que algunas madres del equipo ejercieron poder de practicar y de legitimizar el conocimiento matemático (Booker y Goldman, 2006), principalmente tomando el liderazgo cuando resolvieron problemas en grupos pequeños que no resultaron triviales para las madres ni para las profesoras. Por ejemplo, en el siguiente intercambio, el grupo debía interpretar algoritmos no tradicionales para la resta 74 menos 26 y luego utilizar el algoritmo en otros casos, como 72 menos 35. La conversación evidencia cómo una de las madres hace uso de su autoridad epistémica para explicar el procedimiento a una profesora, co-construyendo discurso con otra de las madres del grupo:

> Profesora 1: ¿Cómo han sacado 50? Dicen que debería ser 80 menos treinta...
>
> Madre 2: Así que tienen que quitar los dos que redondearon. Intentan redondear este, el de arriba. Así que cuando redondean, se convierte en 80. Y entonces
>
> Madre 1: Así que se quedan...
>
> Madre 2: Después de obtener la respuesta, restan lo que sumaron al de arriba...
>
> Madre 1: Para hacerlo un todo, para redondearlo.

Madre 2: Así que si, como 72 y 35 si redondeas esto a 40 y luego esto se convierte en 77 vamos a sumar tres [inaudible].

Maestra 1: Oh, ya entiendo. Entonces 40 y 80, 80 menos 40 y luego es 40 y luego menos tres.

En el grupo focal final, las profesoras enfatizaron que la interacción con las madres no fue tradicional, pues se sintieron “como iguales” al crear en conjunto experiencias matemáticas para la familia que surgieron a partir de ideas planteadas por las madres. Una de las profesoras elaboró sobre cómo imagina abrir su clase de matemática en nuevas formas tienen el potencial de redistribuir la autoridad epistémica matemática desde el aula:

Profesora 2: … Antes yo tenía padres viniendo de voluntarios, pero no para matemática. Tal vez podrían leer con sus hijos o algo así, pero no para matemática. Esto es algo que ha cambiado. Ahora estoy pensando, Oh, viendo que los padres ven cómo la matemática ha cambiado, y viendo cómo los padres están teniendo dificultades con ella, así, para que vengan y trabajen con sus hijos sería, creo, sería muy beneficioso.

CONCLUSIONES

Los temas preliminares encontrados sugieren que en un espacio de co-diseño para apoyar el aprendizaje matemático es fundamental el involucramiento en actividades matemáticas desafiantes, a la vez que se deconstruyen las fronteras lingüísticas sociales. Esto permite dar paso a formas de comunicación fluidas y familiares que promueven la restauración de la autoridad epistémica matemática de las madres latinas, ya que les permite no solo expresar sus ideas matemáticas en el lenguaje de su preferencia, sino que les permite reclamar el poder de practicar matemática colectivamente. Estas formas expansivas y flexibles de participación lingüística y matemática permiten a las personas llevar toda su humanidad más allá del papel particular de madre, profesora o investigadora (Ishimaru & Bang, 2022), contribuyendo a la interrupción de la dinámica de poder tradicional provocada por la autoridad epistémica que estos papeles conllevan. Adicionalmente, experiencias como las que ofrece el ELMF pueden modelar para las profesoras nuevas formas de interactuar con comunidades minorizadas, expandiendo su repertorio de posibilidades para el aprendizaje matemático de los niños en el aula. De este modo, colaboraciones como la que presentamos en este trabajo pueden constituir una poderosa forma de desarrollo profesional docente en matemática.

Referencias

Booker, A., & Goldman, S. (2016). Participatory design research as a practice for systemic repair: Doing hand-in-hand math research with families. *Cognition and Instruction*, *34*(3), 222-235.

Carpenter, T. P., & Franke, M. L. (2004). Cognitively guided instruction: Challenging the core of educational practice. *Expanding the reach of education reforms: Perspectives from leaders in the scale-up of educational interventions*, 41-80.

Civil, M. (2007). Building on community knowledge: An avenue to equity in mathematics education. *Improving access to mathematics: Diversity and equity in the classroom*, 105-117.

Gutiérrez, R., Myers, M., & Kokka, K. (2023). The stories we tell: Why unpacking narratives of mathematics is important for teacher conocimiento. *The Journal of Mathematical Behavior*, *70*, 101025.

Ishimaru, A. M. (2019). From family engagement to equitable collaboration. *Educational Policy*, *33*(2), 350-385.

Ishimaru, A. M., & Bang, M. (2022). Designing with families for just futures. *Journal of Family Diversity in Education*, *4*(2), 130-140.

Louie, N. L. (2018). Culture and ideology in mathematics teacher noticing. *Educational studies in mathematics*, *97*, 55-69.

Maldonado Rodríguez, L. A., Jessup, N., Myers, M., Louie, N., & Chao, T. (2022). A critical lens on Cognitively Guided Instruction: Perspectives from mathematics teacher educators of color. *Mathematics Teacher Educator*, *10*(3), 191-203.

Nowell, L. S., Norris, J. M., White, D. E., & Moules, N. J. (2017). Thematic Analysis: Striving to Meet the Trustworthiness Criteria. *International Journal of Qualitative Methods*, *16*(1). https://doi.org/10.1177/1609406917733847

Otheguy, R., García, O., & Reid, W. (2015). Clarifying translanguaging and deconstructing named languages: A perspective from linguistics. *Applied linguistics review*, *6*(3), 281-307.

Paris, D. (2012). Culturally sustaining pedagogy: A needed change in stance, terminology, and practice. *Educational researcher*, *41*(3), 93-97.

COMPRENSIÓN GRÁFICA EN EL CONTEXTO DE PREGUNTAS ESTADÍSTICAS. UN ESTUDIO EN CONTEXTO EPJA

Esteban L. Maturana S. Martín, Universidad Central de Chile

Nicolás Sánchez Acevedo, Universidad Central de Chile

Abstract: *La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico resalta la importancia de la alfabetización en datos, incluyendo la comprensión de gráficos estadísticos como una habilidad esencial en la educación. Este estudio investiga cómo los futuros profesores de matemáticas en la Educación de Personas Jóvenes y Adultas (EPJA) promueven la comprensión gráfica, basándose en la jerarquía de Aoyama, que incluye desde lo idiosincrático, hasta la elaboración de hipótesis y modelos. Los resultados revelan que los futuros docentes se enfocan predominantemente en niveles intermedios de comprensión.*

La mayoría de las actividades se dirigen a la "Lectura Básica" (58,06%), lo que indica un énfasis en la extracción simple de información de los gráficos. Los niveles avanzados, como el "Racional/Literal" y el "Crítico", representan solo el 35,47% de las actividades, sugiriendo una falta de énfasis en habilidades interpretativas más profundas. Esto subraya la necesidad de mejorar la formación docente para desarrollar habilidades críticas y de formulación de hipótesis en los futuros profesores. Es fundamental que los programas de formación incluyan estrategias para la interpretación de gráficos. Además, se recomienda investigar cómo diferentes enfoques pedagógicos pueden fortalecer la comprensión gráfica en diversos contextos educativos, para así mejorar la capacidad de los futuros docentes para enseñar estos conceptos de manera efectiva.

Comprensión gráfica, Jerarquía de Aoyama, Profesores de matemática, Estadística.

INTRODUCCIÓN

La OCDE (2018) subraya la importancia de alfabetizar a los niños en datos, lo que incluye la interpretación de gráficos estadísticos. En línea con esta perspectiva, el Ministerio de Educación chileno aborda este reto en su programa de estudios de tercero y cuarto medio, específicamente en el electivo de estadística descriptiva e inferencial (MINEDUC, 2020). Además, las bases curriculares de séptimo básico a cuarto medio (MINEDUC, 2015) indican que los estudiantes deben ser capaces de leer e interpretar gráficos y descifrar intenciones reflejadas en ellos. En la educación para jóvenes y adultos, Chile también busca que los estudiantes mayores de 18 años comprendan los gráficos estadísticos (MINEDUC, 2009).

Bajo las directrices que da el Ministerio de Educación chileno, los profesores tienen que poseer ciertas capacidades para promover la comprensión gráfica en sus estudiantes, por lo cual, se hace necesario entender qué tanto comprenden los docentes de matemática sobre los gráficos estadísticos y todas sus formas de representación, ya sea tabular, pictórica, etc.

Las investigaciones globales destacan dificultades comunes en la comprensión de gráficos por parte de los profesores. En Indonesia, Mae-suri Patahuddin y Lowrie (2018) encontraron que los profesores tenían problemas para responder preguntas que requerían interpretar más allá de los datos en gráficos de líneas, según la taxonomía de Curcio (1987). En Chile, Díaz Levicoy et al. (2021) revelaron que los profesores de primaria tenían un conocimiento limitado sobre gráficos estadísticos a pesar de su relevancia en el currículo. Similarmente, Uyanik y Medine (2023) demostraron que los profesores de matemáticas de secundaria también enfrentan dificultades con preguntas que requieren un pensamiento avanzado sobre los gráficos, según la misma taxonomía.

En contraste, estudios sobre profesores en formación, como los de Sánchez et al. (2021) y Vásquez (2021), revelan que estos futuros docentes también tienen limitaciones significativas, especialmente en niveles más altos de comprensión gráfica. Esto destaca la necesidad de reforzar la formación en estadística para mejorar las habilidades interpretativas. En este contexto, surge la pregunta de qué elementos de comprensión gráfica debería promover un futuro profesor de matemáticas en la educación para jóvenes y adultos, dado el bajo nivel actual en el desarrollo de estas competencias.

MARCO DE REFERENCIA

Comprensión gráfica

La comprensión gráfica es más que simplemente interpretar imágenes visuales, esta requiere la capacidad de analizar, evaluar y extraer conclusiones sólidas a partir de gráficos complejos, diagramas, mapas y otros tipos de representaciones visuales (Arteaga et al. 2011).

Además, la comprensión gráfica no se limita a la interpretación de gráficos ajenos, sino que también implica la capacidad de crear gráficos efectivos por sí mismos. Esto significa seleccionar el tipo adecuado de gráfico para representar datos específicos, diseñar gráficos de manera clara y atractiva, y asegurarse de que transmitan la información de manera precisa y comprensible (González et al. 2011).

Jerarquía de Aoyama

La jerarquía de Aoyama (2007) permite analizar, por medio de cinco niveles, la comprensión gráfica, identificando su progreso gradual que va desde lo más básico a lo más avanzado. Esta también nos permite identificar habilidades y dificultades que están dentro de esta misma comprensión.

Los niveles que propone Aoyama son los siguientes:

Idiosincrático: Los estudiantes en este nivel no pueden leer valores o tendencias en gráficos. Proporcionan valores incorrectos o no responden las preguntas relacionadas con los gráficos. Sus respuestas se basan en experiencias personales limitadas o perspectivas puramente personales.

Lectura básica: Los estudiantes en este nivel pueden leer valores y tendencias en los gráficos, pero no pueden explicar los significados contextuales de las tendencias o características que observan. Tampoco pueden contextualizar los eventos presentados.

Racional/literal: Los estudiantes pueden leer valores y tendencias particulares y explican los significados contextuales de manera literal en términos de las características mostradas en un gráfico. Sin embargo, no pueden sugerir interpretaciones alternativas y solo utilizan los significados presentados.

Crítico: Los estudiantes en este nivel pueden leer gráficos y entender las variables contextuales presentadas. Además, pueden evaluar la fiabilidad del significado contextual descrito en el gráfico y cuestionar la información presentada.

Elaboración de hipótesis y modelos: Los estudiantes en este nivel pueden leer gráficos, aceptar y evaluar información, y formar sus propias hipótesis o modelos para explicar los datos. Este nivel implica una comprensión más sofisticada y la capacidad de proponer explicaciones alternativas para las características de los datos

METODOLOGÍA

El enfoque de esta investigación es cualitativo, ya que, como menciona Gómez (2009), "estudia la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados" (p. 32). Esto se alinea con el objetivo de nuestra investigación, que es comprender, descubrir e interpretar la realidad, enfatizando la interpretación, como destaca Erickson (1986). Además, el tipo de investigación es exploratoria, definida por Arias (2006) como "aquella que se efectúa sobre un tema u objeto desconocido o poco estudiado" (p. 23). Así, se busca analizar los niveles de comprensión gráfica que un profesor de matemáticas promueve en la enseñanza de la estadística en el contexto de la Educación de Personas, Jóvenes y Adultos (EPJA).

Técnica e instrumento de recolección de datos.

La recolección de la información se llevó a cabo a través de grabación y posterior transcripción de clases de manera detallada. La información se analizó de acuerdo con los niveles de la Jerarquía de Aoyama, por lo cual después de la transcripción de la clase, y sus respectivas selecciones de preguntas, se identificó y describió los niveles de compresión gráfica que moviliza el profesor.

Actividad propuesta por el docente:

Dependiendo del día de la semana, Clara va al trabajo de una forma distinta:

I.- El lunes va en bicicleta. II.- El martes, con un compañero de trabajo en auto (parando a recoger a su amigo Luis). III.- El miércoles, en transporte público (que hace varias paradas). IV.- El jueves va caminando. V.- Y el viernes en moto.

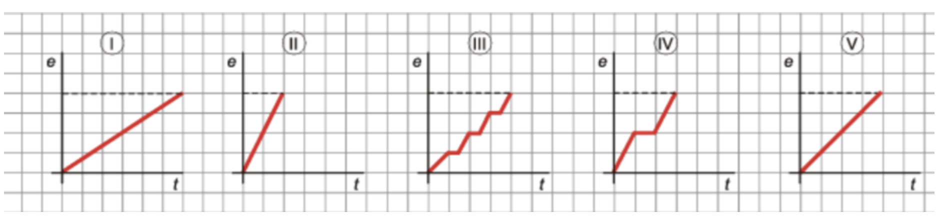


Figura 1: Distancia y tiempo del recorrido realizado.

Una de las preguntas seleccionadas de las que hizo el futuro profesor de matemática son las siguientes:

4. ¿Qué variables vemos en este ejercicio?

Esta pregunta se clasificó en el nivel 2 (lectura básica) dado "Se realiza la lectura de valores y tendencias en el gráfico, pero no se explican los significados contextuales". En la actividad, el estudiante tiene que leer o extraer información de la gráfica, no da paso para dar hipótesis o dar tendencias de lo que podría pasar.

11. ¿Qué día Clara tarda menos en llegar?, ¿Y cuál se demora más? ¿Cuándo se demora menos, cuándo se demora más? ¿Qué día recorre más distancia?

Esta pregunta es del nivel (racional/literal) lee y compara valores para identificar días específicos y proporciona una explicación directa.

18. Según los datos. ¿Qué podemos decir de la gráfica? ¿O sea, cómo creemos que va a ser la gráfica de esos datos?

Crítico dado que pide una evaluación de cómo debería ser la gráfica basada en los datos, implicando reflexión crítica sobre la representación gráfica.

RESULTADOS

En la siguiente tabla 1 se muestra la clasificación de las preguntas extraídas de la clase y sus respectivas actividades. Cada pregunta está diferenciada por su nivel según la jerarquía de Aoyama, que inicia desde el nivel idiosincrático hasta el racional/literal.

Tabla 1

Jerarquía de Aoyama / %	**Actividad 1**	**Actividad 2**
Idiosincrático / 3,3%	3	
Lectura básica / 60%	1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16	17, 22, 23, 24, 25, 26, 27
Racional - Literal / 16,6%	6, 10, 11, 13	19
Critico/ 16,6%		18, 20, 21, 28, 29
Elaboración de Hipótesis y Modelos/3,3%		30

Respecto del análisis de la grabación de la clase, se puede apreciar que el mayor porcentaje de preguntas corresponde a una lectura básica de los datos, y en menores medidas, el nivel racional/literal y crítico dado un 16,6% y 16,6 % respectivamente, dando en cuenta que el profesor no solo busca una comprensión superficial de los gráficos estadísticos, si no que estos también tengan una mirada crítica

CONCLUSIONES

El estudio revela que la enseñanza de la comprensión gráfica en EPJA del contexto de este colegio se centra mayormente en la "Lectura Básica" (60%), con una promoción limitada de niveles avanzados como el "Racional/Literal" y el "Crítico" (33,2%). Esto revela que en las practicas pedagógica están haciendo falta que los docentes promuevan habilidades más complejas. Para lograrlo, es esencial que los programas de formación docente incluyan estrategias más avanzadas en interpretación gráfica. Se recomienda investigar cómo enfoques pedagógicos diversos pueden mejorar la comprensión gráfica y cómo la formación docente impacta en la promoción de niveles interpretativos más altos.

Referencias

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*, (3), 298-318.

Arias, F. (2006). *El proyecto de investigación* (5ta ed.). Caracas.

Arteaga Cezón, J., Batanero Bernabeu, M., Cañadas de la Fuente, G., & Contreras García, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*.

Díaz-Levicoy, D., Parra-Fica, J. H., Aravena-Díaz, M., & Gutiérrez-Saldivia, X. (2021). Lectura de gráficos estadísticos por profesores de educación primaria en activo. *Información tecnológica*, *32*(3), 57-68.

Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instruction (Vol. 32). *Journal for Research in Mathematics Education*.

Gómez, M. (2009). *Introducción a la metodología de la investigación científica* (1ra ed.). Brujas, Argentina.

González, M. T., Espinel, M. C., & Ainley, J. (2011). Teachers' graphical competence. *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: a joint ICMI/IASE study: the 18th ICMI study*, 187-197

Patahuddin, S. M., & Lowrie, T. (2019). Examining teachers' knowledge of line graph task: A case of travel task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 781-800.

Méndez, C. (2009). *Metodología: Diseño y desarrollo del proceso de investigación*. México.

Ministerio de Educación (MINEDUC). (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. Chile.

Ministerio de Educación (MINEDUC). (2020). *Programa de estudio 3º y 4º medio*. Chile.

OCDE. (2018). *The future of education and skills: Education 2030*.

Acevedo, N. S., Barbieri, E. T., & Bastias, D. A. (2021). Interpretación y comprensión de gráficos estadísticos por profesores de Matemáticas en formación. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *13*(4), 230-243.

Tamayo, & Tamayo, M. (2004). *El proceso de la investigación científica: Incluye evaluación y administración de proyectos de investigación* (4ta ed.). México.

Uyanik, S., Elbir, D., & Ozmen, Z. M. (2023). Determining the Graphical Literacy Levels of the Middle School Mathematics Teachers. *Pedagogical Research*, *8*(2).

Vásquez, C. (2021). Comprensión y uso docente de gráficos estadísticos por futuros profesores para promover competencias para la sostenibilidad. *Revista Paradigma*, *42*, 165-190.

EVALUACIÓN DE MODELO DE FORMACIÓN PARA PROFESORES LÍDERES EN COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Horacio Solar, Pontificia Universidad Católica de Chile

Florencia Gómez, Pontificia Universidad Católica de Chile

Kurt Mursell, Pontificia Universidad Católica de Chile

Abstract:

En este reporte de investigación, compartimos los resultados de la evaluación de un programa de formación para profesores líderes de matemáticas. El programa se basa en el Modelo de Acompañamiento Docente Colaborativo (MADC). El MADC se compone de tres líneas formativas: competencias matemáticas de modelación y argumentación, noticing y habilidades de acompañamiento. Trece profesores de primaria y secundaria participaron en el programa de un año de duración para convertirse en profesores líderes y actualmente seis de ellos están acompañando a profesores en sus propios establecimientos por un período de dos años. Para evaluar el programa, analizamos el desempeño de los profesores líderes desde dos perspectivas. Primero, a partir de los resultados de aprendizaje de los profesore líderes en cada una de las tres dimensiones del programa. Segundo, a partir del progreso de casos de profesores seleccionados en los que nos hemos centrado para evaluar la implementación/desempeño de las habilidades de acompañamiento con otros profesores. Los resultados iniciales dan cuenta que la evaluación del programa MADC ofrecerá información valiosa para diseñar programas para profesores líderes que desarrollen el noticing docente

[Noticing, formación continua, competencias matemáticas, argumentación,modelación]

INTRODUCCIÓN

La investigación muestra que un aspecto importante en las experiencias de desarrollo profesional docente es que estas sean promovidas de manera *colaborativa* (Goodchild, 2014). Trabajar colaborativamente con pares, así como ser parte de comunidades de aprendizaje, constituyen elementos clave para desarrollar procesos reflexivos con base en las propias prácticas, que podrían promover cambios e innovaciones en las mismas, favoreciendo mejores climas organizacionales en los espacios educativos (Ávalos-Bevan; Bascopé, 2017). La legislación implementada en los últimos años en Chile (Ley 20.903/2016), para impulsar un Sistema de desarrollo profesional docente, ofrece un marco para las experiencias de acompañamiento basadas en el trabajo colaborativo. En particular, el sistema de desarrollo profesional docente en Chile contempla la existencia de profesores líderes, es decir, docentes que pueden realizar mentorías o acompañamientos a sus pares. Con ello, se reconoce el rol de profesores líderes para desarrollar acompañamiento estructurado que favorezca mejoras en las prácticas y capacidades docentes (MINEDUC, 2022). Aunque el rol de profesores líderes ha sido objeto de amplia investigación, el sistema escolar reconoce que se requiere avanzar en programas de formación de profesores líderes, y estudios recientes en matemáticas se enfocan de manera explícita en las decisiones y prácticas que estos líderes emplean para guiar a otros docentes en su formación continua (Borko et al., 2021).

Internacionalmente, más experiencias de desarrollo profesional en noticing docente en matemáticas incluyen profesores líderes, dada la evidencia de su impacto favorable en las prácticas docentes (Witherspoon et al., 2021). En EEUU, varias de estas experiencias de desarrollo profesional se enfocan en una enseñanza de la matemática ambiciosa, que hace referencia a favorecer ambientes de aprendizaje donde el estudiante es el centro de la actividad (Lampert et al., 2010). Estudios dan cuenta de qué manera profesores líderes preparan a otros docentes para promover una enseñanza de la matemática ambiciosa, con tareas profesionales asociadas a: competencias de noticing, orquestación de la discusión, y tareas matemáticas desafiantes (p.ej., Amador et al. 2024).

En el contexto curricular chileno, ha crecido el interés por promover una enseñanza más ambiciosa, orientándose en que estudiantes desarrollen competencias matemáticas (Mineduc, 2016; Mineduc, 2021). Estos cambios en la última década han causado confusión en el profesorado sobre el significado de competencias matemáticas del currículo escolar como son la argumentación y la modelación. Por ejemplo, en las Bases Curriculares de Chile para 1º básico a 2º medio (5-15 años) (Mineduc, 2016) la argumentación pone el foco en la demostración, en la generalización, y en la fundamentación de conjeturas. En cambio, en las Bases Curriculares de Chile para 3º-4º medio (16-18 años) (Mineduc, 2021) la argumentación pone el foco en la toma de decisiones fundamentadas, en la veracidad de conjeturas y el alcance de un argumento. De este modo, las Bases Curriculares vigentes de 1º básico a 2º medio contemplan una caracterización más simple y reduccionista de la argumentación en comparación a las Bases Curriculares para 3º-4º medio (2021) que presenta una caracterización de argumentación compartida por el grueso de las investigaciones en el campo, más asociada a una visión de convencerse tanto a sí mismo, como a otros, de la validez de un razonamiento (Krummheuer, 1995). Un análisis similar ocurre con la modelación que también presenta una caracterización reduccionista en las bases curriculares vigentes de 1º básico a 2º medio.

Esta confusión del profesorado sobre el significado de las competencias de argumentación y modelación en el currículum de matemáticas en Chile, puede causar visiones profesionales divergentes en los docentes sobre cómo promover la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas. Por esto se requieren docentes que posean competencias profesionales específicas (Mason, 2002) para promover la argumentación o la modelación en los estudiantes. Una perspectiva reciente para estudiar las competencias profesionales del docente de matemáticas es el Noticing (o mirada profesional). Si bien existen varias aproximaciones a noticing (König et al., 2022), la definición original se distingue por atender a acontecimientos relevantes en una situación de enseñanza, utilizar el conocimiento del contexto para razonar sobre los acontecimientos identificados y establecer conexiones entre acontecimientos específicos y principios más amplios de enseñanza y aprendizaje (van Es y Sherin, 2002).

Para responder a las necesidades de desarrollo profesional con un foco de colaboración docente para la enseñanza matemática desafiante, se ha diseñado un *Modelo de Acompañamiento Docente Colaborativo (MADC).* Este modelo se ha diseñado e implementado en el contexto de un proyecto Fondecyt en ejecución, y considera un programa formativo para que profesores de matemáticas se conviertan en profesores líderes que acompañen a un grupo de docentes de matemáticas en su establecimiento u otro. El MADC está diseñado para ser utilizado en programas de acompañamiento docente a gran escala. Cabe resaltar que el programa MADC utiliza como base el modelo formativo para profesores Mejoramiento de la Experiencia Docente (MED) (Solar et al., 2016), que uso como base el desarrollo del noticing docente.

El MADC tiene tres líneas formativas (LF). LF1: desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido, que en este proyecto se traduce como desarrollo de las competencias matemáticas de argumentar y modelar, LF2: noticing docente y LF3: competencias de acompañamiento para monitorear, retroalimentar y modelar prácticas docentes. El MADC tiene asociado una plataforma digital que contiene los recursos necesarios para efectuar el acompañamiento. La Figura 1 presenta el programa de Desarrollo Profesional para docentes líderes basado en el MADC.

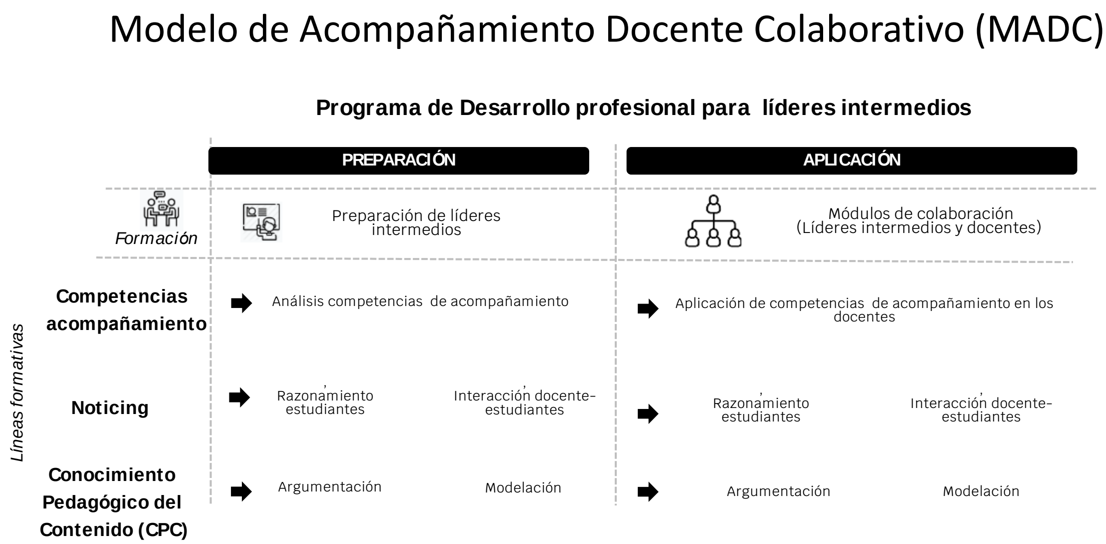


Figura 1: Modelo de acompañamiento docente colaborativo (MADC).

En el marco del proyecto Fondecyt, uno de los propósitos es evaluar el programada formativo para profesores líderes en matemáticas basado en el MADC. Ello a través de dos perspectivas: por una parte, caracterizar el noticing de los profesores líderes en las competencias matemáticas de argumentar y modelar, y por otra, caracterizar las competencias de acompañamiento de monitoreo, retroalimentación y modelación de los profesores líderes para acompañar a docentes. En este contexto, el propósito del estudio que presentamos en esta comunicación, es evaluar el programa MADC para profesores líderes con un enfoque en promover las competencias de argumentación y modelación en el aula de matemáticas.

METODOLOGÍA

Este estudio incluye un programa para profesores de educación básica y media, basado en el MADC que les forma como profesores líderes, con foco en el desarrollo de la capacidad de observación docente para promover competencias de argumentación y modelación matemática. Seleccionamos 13 profesores para participar en el programa de formación en dos regiones de Chile (6 en Biobío y 7 en la región Metropolitana). El programa tuvo una duración de un año, agosto 2023 hasta julio 2024. Después de seis meses, desde marzo 2024, los profesores líderes iniciaron el acompañamiento a profesores pares para ganar experiencia práctica en un proceso de acompañamiento que continuará hasta fines del 2025. Actualmente son 6 los profesores líderes que acompañan a un total de 30 profesores, ya que 7 de ellos por diversas razones no pudieron acompañar a un grupo de docentes pares.

El programa de formación basado en MADC para profesores líderes se implementó en forma remota. En cambio, el acompañamiento de profesores líderes a docentes pares se realiza de manera presencial en cada establecimiento.

Evaluación de un programa de formación profesional en docentes líderes

Como se señaló anteriormente, la evaluación del programa MADC aborda dos dimensiones: (1) Caracterizar el noticing de los profesores líderes en las competencias matemáticas de argumentar y modelar. (2) Caracterizar las competencias de acompañamiento de monitoreo, retroalimentación y modelación de los profesores líderes para acompañar a docentes.

Caracterización el noticing de los profesores líderes: los 6 docentes líderes que están acompañando a sus pares, participan del registro del noticing en 4 ocasiones (abril 2024, ya aplicado), noviembre 2024, mayo 2025, y noviembre 2025). Cada docente líder participa en el análisis de dos videos: una situación de clase sobre argumentación y otra de modelación. Sus respuestas sobre lo observado son grabadas. Esas grabaciones transcritas se analizan con un instrumento adaptado de Van Es (2011), que presenta diferentes niveles y criterios para caracterizar el noticing en el desarrollo de la argumentación y modelación en el aula de matemáticas. Dado que se aplica en diferentes momentos, es posible establecer puntos de comparación y describir una trayectoria de desarrollo del noticing en los docentes líderes. El instrumento permite codificar las respuestas de los docentes líderes y posteriormente asignarles una escala de progreso. El diseño del instrumento tuvo seis fases de construcción: (1) revisión de literatura, (2) diseño de preguntas y videos, (3) testeo de preguntas y videos de profesores, (4) construcción de rúbricas, (5) validación de instrumentos a través de juicios de expertos, (6) ajustes finales instrumento.

Caracterización competencias de acompañamiento: al finalizar el segundo semestre de 2023, 9 profesores líderes diseñaron un proceso de acompañamiento destinado a promover las competencias de argumentación y modelación en el aula de matemáticas. Estos diseños han sido analizados a través de categorías relacionadas con las competencias de acompañamiento que están descritas (Solar et al, 2016), utilizando como criterio evaluativo la correspondencia entre las características de las competencias de monitoreo, retroalimentación y modelado de la práctica docente en relación con lo planificado. Estas categorías están descritas en el modelo MED (Solar et al., 2016).

RESULTADOS

Caracterización del noticing de los profesores líderes

Nuestro análisis reveló cuatro hallazgos. El primer hallazgo es la identificación de tres eventos críticos en relación con el apoyo de los docentes a la argumentación y la modelación. (1) Decisión de no validar las intervenciones de los estudiantes, (2) preguntas de cuestionamiento del docente, y (3) uso de representaciones. El segundo hallazgo se centra en cómo los profesores líderes aplicaron las categorías adaptadas de Van Es (2011), dando cuenta de niveles 3 y 4 en noticing en orquestación argumentativa, lo que implicó que demostraron conexiones entre los eventos críticos y la orquestación argumentativa. El tercer hallazgo aborda las ambigüedades en la percepción de los profesores líderes sobre la orquestación argumentativa al interpretar la evidencia de la enseñanza. Finalmente, el cuarto hallazgo es relacionar la argumentación con la modelación en el análisis de situaciones de enseñanza. En la presentación de este reporte de investigación se mostrarán ejemplos de estos hallazgos.

Competencias de acompañamiento

Como criterio evaluativo, se analizó la correspondencia entre las características de las competencias de monitoreo, retroalimentación y modelado de la práctica docente en relación con lo planificado en los informes de acompañamiento. A partir de este análisis, se definieron cuatro etiquetas que permiten identificar patrones y tendencias en las propuestas: (1) *Fundamentos Iniciales*, que se refiere a una planificación incompleta que no menciona explícitamente las características de las competencias de acompañamiento; (2) *Competencias en Proceso*, que incluye la incorporación de estrategias para modelar la práctica docente y monitorear el progreso, aunque sin integrar todas las competencias; (3) *Competencias Integradas*, que reflejan una reflexión más profunda sobre el proceso de retroalimentación y sus características, incorporando de manera más completa las competencias; y (4) *Dominio Avanzado*, que evidencia una integración coherente de las competencias de acompañamiento en el diseño, mostrando un manejo más consolidado del modelo formativo.

Los resultados del análisis de los niveles alcanzados por los docentes líderes en formación indican que cinco participantes lograron el nivel de *Competencias Integradas*, mientras que uno alcanzó el *Dominio Avanzado*. Por otro lado, dos participantes se encuentran en el nivel de *Fundamentos Iniciales*, lo que sugiere áreas que requieren atención y desarrollo adicional. Finalmente, uno de los líderes se sitúa en el nivel de *Competencias en Proceso*, lo que indica que está en una fase intermedia de su formación. En la presentación de este reporte de investigación se mostrarán ejemplos de estos resultados.

Discusión de los hallazgos

El objetivo de este estudio es evaluar el programa MADC para profesores líderes con un enfoque en promover las competencias de argumentación y modelación en el aula de matemáticas. El reporte da cuenta del desempeño de los profesores líderes en dos aspectos: un alto nivel de su noticing en apoyo docente en argumentación y en su apropiación de las competencias de acompañamiento para estructurar sus informes basados en dichas competencias. Estos hallazgos sustentan la decisión de enfocar la formación de docentes líderes en noticing para apoyar a otros docentes, en coherencia con lo encontrado por Amador et al. (2024) en su estudio con docentes líderes. Si bien los altos niveles alcanzados por los profesores líderes en este estudio no garantizan que los profesores a los que apoyen en el futuro alcancen un nivel comparable; nos inclinamos a pensar que harán un progreso significativo en términos de percepción de la argumentación. Este estudio, aparte de sus contribuciones teóricas, espera ser una contribución en políticas de desarrollo profesional de profesores en matemáticas.

Referencias

Amador, J. M., Gillespie, R., Choppin, J., & Carson, C. D. (2024). Characteristics of mathematics coaches' suggestions to teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-27.

Avalos-Bevan, B., & Bascopé, M. (2017). Teacher informal collaboration for professional improvement: Beliefs, contexts, and experience. *Education Research International*. 2017. https://doi.org/10.1155/2017/1357180

Borko, H., Carlson, J., Deutscher, R., Boles, K. L., Delaney, V., Fong, A., ... & Villa, A. M. (2021). Learning to lead: An approach to mathematics teacher leader development. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*, 121-143.

Goodchild, S. (2014). Mathematics teaching development: learning from developmental research in Norway. *ZDM*, *46*(2), 305-316. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0567-6.

König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A. K., Yang, X., & Kaiser, G. (2022). Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice. *Educational Research Review*, *36*, 100453.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Lawrence Erlbaum.

Lampert, M., Beasley, H., Ghousseini, H., Kazemi, E., & Franke, M. (2010). Using designed instructional activities to enable novices to manage ambitious mathematics teaching, 2018. In M. K. Stein, & L. Kucan (Eds.)

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Routledge Falmer.

MINEDUC (2016). *Bases curriculares 7º básico a 2º medio*. MINEDUC

MINEDUC (2021). Bases curriculares 3° medio y 4° medio. MINEDUC

Solar, H., Ortiz, A., & Ulloa, R. (2016). MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia. *Estudios Pedagógicos,* 42(4), 281-298.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to Notice: Scaffolding New Teachers' Interpretations of Classroom Interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10, 571–596.

van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. In Sherin, M. G., Jacobs, V., Philipp, R. (Eds*.), Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134–151). Routledge.

Witherspoon, E. B., Ferrer, N. B., Correnti, R. R., Stein, M. K., & Schunn, C. D. (2021). Coaching that supports teachers' learning to enact ambitious instruction. *Instructional Science*, *49*(6), 877–898. https://doi.org/10.1007/s11251-021- 09536-7

Formación ciudadana en la sala de matemática: reflexiones docentes sobre los primeros acercamientos de su implementación

Noemí Pizarro, Universidad Metropolitana De Ciencias De La Educación

Juan Nuñez, Universidad Arturo Prat

Byron Zamorano, Universidad Metropolitana De Ciencias De La Educación

Alicia Zamorano, Universidad De Chile

Abstract:

En nuestro país el curriculum y algunas leyes indican que en las escuelas se debe promover la democracia, por ello, el quehacer docente sobre formación ciudadana en la clase de matemática es fundamental para el desarrollo de las directrices educacionales. En este reporte de investigación, se da cuenta de una experiencia de aproximación al trabajo en formación ciudadana por parte de dos profesores en ejercicio docente en un liceo de un pueblo del norte de Chile. El estudio es de características cualitativas y descriptivas, en el que se realiza una entrevista semi estructurada, donde los docentes contaron sobre su formación en el área, la experiencia docente al aproximarse a la formación ciudadana en sus clases y posibles acciones futuras. Se evidencia una, posible, inexistente formación inicial docente en matemática escolar para la ciudadanía, con el fin que el profesorado de matemática realice clases de acuerdo a las directrices gubernamentales, reflexiones sobre la motivación de los estudiantes al participar en clases contextualizadas en sus entornos locales e intereses en miras de problemáticas sociales y el interés de los docentes por enseñar matemáticas con características sociales. Considerando lo anterior, es necesario discutir sobre la formación política de profesores que tienen como convicción ser partícipes de una educación transformadora.

[Formación ciudadana, formación docente, matemática escolar para la ciudadanía, democracia]

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con las leyes 20.903, 20.911 y las Bases Curriculares vigentes de Chile; en las clases de matemática se debe fomentar la democracia. A pesar de estos lineamientos, en la formación inicial docente, la formación ciudadana está débilmente integrada (Garrido y Jiménez, 2020). Por ello, posiblemente, los y las docentes no tienen herramientas para trabajarlas en las aulas, dado que las experiencias disciplinares con las que han sido formados y/o llevan al aula no hayan incluído crítica social, política o económica, soslayando las estructuras sociales, las etnias, el género y las relaciones de clase (Apple, 1995), aunque considerando, además, que las matemáticas son un constructo social, es difícil comprenderlas como una ciencia neutral, asocial, amoral y apolítica (Martin, 1997); por ello son indispensables en la formación de ciudadanos responsables y activos (Hazelkorn et al., 2015).

En un contexto de colaboración bidireccional con un liceo del norte de Chile, se trabajó en la planificación, gestión y reflexión de clases con dos profesores de matemática. En algunas clases, a partir de la necesidad de contextualización o de problemáticas que emergían en el contexto, la colaboración se dirigió a un trabajo en miras a la formación ciudadana. Por ello, el propósito de esta investigación es caracterizar reflexiones sobre las primeras aproximaciones acerca de la formación para la ciudadanía al enseñar matemática. Para lograr el objetivo, planteamos la siguiente pregunta movilizadora; ¿Cuáles son las principales reflexiones de los profesores de matemáticas sobre sus primeras experiencias en la implementación de actividades orientadas a la formación ciudadana, considerando los desafíos y oportunidades encontradas en relación a sus prácticas pedagógicas y a su formación inicial?, lo anterior guiado por una entrevista semi estructurada como; ¿Qué entiendes por formación ciudadana?, en tu formación académica ¿tuviste algún curso vinculado a la formación ciudadana?, ¿qué diferencias encuentras entre las clases en las que trabajaste formación ciudadana y en las que no?, lo anterior aplicado a los docentes participantes. En este documento, se muestra parte de sus reflexiones sobre la implementación. Algunos resultados muestran que los docentes nunca habían considerado formación ciudadana, ni en su formación y ni en su práctica docente.

REFERENTES TEÓRICOS

La ciudadanía es un concepto polisémico, ya que, por una parte, se asocia a la idea de civilidad o puede corresponderse con la idea de educación cívica, que significa aprender cómo funcionan las instituciones; por otra parte, puede vincularse a una perspectiva que coloca el foco en el estudio razonado y crítico de los problemas sociales y desde ahí conlleva una formación ciudadana con énfasis en el desarrollo de la participación ciudadana (Heimberg, 2010). Estas dos miradas sobre la educación para la ciudadanía pueden ser organizadas diametralmente, lo que llaman concepciones mínimas y máximas (DeJaeghere, 2009).

Las concepciones máximas no son una condición natural, no se nace demócrata, ni ciudadano, por lo tanto, la democracia y la ciudadanía deben ser enseñadas (Cox y Castillo, 2015), por ello es radical que la ciudadanía sea formada en la escuela. En la educación de la ciudadanía, las distintas visiones o corrientes respecto a la democracia y la ciudadanía provenientes de la teoría política, conviven, se complementan y también tensionan, dando origen a su vez a distintas concepciones sobre la ciudadanía a enseñar y la manera de enseñarla.

Schön (1992) desde hace más de 30 años se refirió a la importancia de reflexionar con y desde la práctica. Ahora, la atención no es solo sobre lo que hacemos sino sobre cómo y qué intencionan nuestras acciones; a qué modelo respondemos al enseñar matemática. Por ello es relevante identificar las creencias, concepciones y conocimientos de los profesores sobre qué es enseñar matemática con foco en la ciudadanía y el rol político que sus clases realizan en la formación de sus estudiantes. Para Gee (2011) es necesario alfabetizar o comprender cómo los profesores entienden la práctica social conectada para contextos históricos, culturales e institucionales, donde las herramientas propias de la disciplina son usadas para comprender diversas situaciones que involucran lectura, escritura, conocimiento (Shanahan y Shanahan, 2012). Para Freire, D'Ambrosio y Mendonca (1997) la alfabetización matemática se relaciona con la formación para la ciudadanía. Por esto, el docente debe propiciar instancias para que los estudiantes creen conciencia sobre el mundo que viven y cómo, desde sus realidades, hacer acciones que lo transformen.

La clase de matemática

Geiger et al (2023) revisan las conexiones entre educación matemática y educación para la ciudadanía, concluyendo la importancia de reconocer las diferentes acepciones de ciudadanía que existen según los tipos de sociedades y las distintas formas de gobierno. Para Osandón (2019) las características epistémicas de la matemática permiten trabajar diversas situaciones que involucran la vida diaria de las personas, lo que propicia abrir reflexiones políticas que atienden las necesidades de la población. Lamentablemente, dichas reflexiones son lejanas a la población chilena, que desde mediados de los 90, posiblemente como consecuencia de la dictadura, no es relevante para el diario vivir de los chilenos y es un tema propio de las elites (Consultora Mori, 2006). Esta lejanía, podría provocar que los contextos de la enseñanza de la matemática sean débiles y lejanos a matemáticas formen conciencia política y sociológica, reconociendo las variabilidad y las inconsistencias sociales sobre clase, raza, cultura y comunidad (Gutstein, 2006). Por ello, es necesario que el profesorado posea consciencia política de sus actos para que puedan potenciar sus propias prácticas al servicio de la democracia, transparentando su intencionalidad política (Skovsmose y Valero, 2012). Si el profesorado realiza trabajos que relacionan matemática con comunidad, identidad cultural y conciencia crítica para trabajar las injusticias sociales, podremos promover que el contexto en los estudiantes de nivel medio motive el aprendizaje matemático. Además, en mayor o menor medida, se ha podido apreciar una profundización en los contenidos matemáticos a raíz de dicha motivación (Molfino y Ochoviet, 2019). Por otro lado, en nuestro país se ha observado que los docentes de Matemática soslayan los Objetivos Fundamentales Transversales que presentan las Bases curriculares (Díaz y Poblete, 2014). Para Gutierrez (2013) el profesorado necesita conocimiento política, porque con él se supone una convicción que clarifica la postura de la enseñanza de la matemática, comprendiendo cómo opera la opresión.

METODOLOGÍA

El estudio se sustenta en el paradigma socio-crítico, dado que nos interesa conocer y comprender la realidad desde la práctica, para que el conocimiento especializado de la enseñanza de la matemática sea, de acuerdo a Popkewitz (1988), una instancia de liberación y empoderamiento social, con el fin que profesores e investigadores se impliquen en la adopción de decisiones consensuadas, gracias a la auto y co-reflexión, para la transformación desde los intereses particulares. El estudio es un estudio de caso del tipo cualitativo descriptivo, porque conlleva una investigación que realizará descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos observables incorporando la voz de los participantes, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamientos y reflexiones tal y como son expresadas por ellos mismos (Pérez Serrano, 1994).

La población informante son dos profesores de Enseñanza Media. Uno de ellos es ingeniero de formación inicial y acaba de terminar la prosecución de estudios como profesor de Matemática, es un profesor líder en su equipo, pro activo e inquieto en la mejora de su práctica. La dirección del establecimiento tiene mucha confianza en su quehacer y los estudiantes, constantemente, valoran sus procesos de enseñanza. La otra docente se ha titulado hace dos años, tiene convicciones políticas sólidas en su diario vivir que constantemente manifiesta, constantemente estudia lo que hace y es reflexiva en la vigilancia epistemológica de su quehacer docente.

A ambos docentes se les realizan entrevistas semi estructuradas con el propósito de recoger información sobre cómo los participantes abordaron la formación en el aula y sus correspondientes análisis a priori a posteriori. Estas son algunas de las preguntas realizadas: ¿Qué entiendes por formación ciudadana?; en tu formación académica ¿tuviste algún curso vinculado a la formación ciudadana?; ¿En qué curso trabajaste en formación ciudadana?; ¿Qué hiciste?; ¿Qué dificultades hubo?; ¿Habías enseñado el OA antes?; ¿Qué diferencias encuentras entre las clases en las que trabajaste formación ciudadana y en las que no?; Lo que hiciste ¿cumplió los objetivos?; ¿Harías algún cambio?; ¿Conversaste con otros colegas sobre esto? ¿Recomendarías a otros trabajar con formación ciudadana?; Ahora que no tienes asesorías ¿trabajarías formación ciudadana? ¿Se te ocurre cómo? ¿Qué elementos rescatas?

Las entrevistas fueron registradas en video para repasar constantemente los dichos de los profesores. Los participantes firmaron consentimiento informado para utilizar la información recogida**.**

ANÁLISIS Y RESULTADOS

i) Comprensión del concepto formación ciudadana: De las entrevistas vislumbramos que ambos docentes toman distancia respecto a la apropiación del concepto de ***formación ciudadana***, sin embargo, las nociones de los docentes respecto a ella son; 1) Según el primer docente (entrevista semi-estructurada, 15 de julio, 2024) "Es una manera de contribuir a una sociedad en constante transformación" , 2)Según el segundo docente (entrevista semi-estructurada, 22 de julio, 2024), "es un proceso que transmite valores y es una herramienta para la construcción de ciudadanos que generen un impacto positivo en su medio". Ambos docentes poseen concepciones diferentes respecto al significado de formación ciudadana, posiblemente, estas perspectivas particulares están relacionadas con la identidad de cada docente.

ii) Formación profesional de los docentes respecto a la formación ciudadana:

Ambos docentes manifiestan no haber tenido una formación para la ciudadanía en su formación inicial, los únicos acercamientos han sido los movilizados por ellos mismos como la participación en instancias de cuidado de lugares públicos o ayuda comunitaria local. Podemos visualizar que la formación de ciudadanía al igual que otras concepciones docentes no son aprendidas durante la formación inicial, por tanto la noción de ciudadanía tiene puntos comunes, pero generalmente es variable para cada docente.

iii) Desarrollo de clases bajo la mirada de formación ciudadana en matemáticas:

Ambos docentes utilizaron el tema de las potencias para abordar problemas reales y cercanos a los estudiantes. El primer docente lo vinculó a la propagación de las *fake news*, mientras que el segundo se centró en la reproducción de gatos. Ambos casos permitieron a los estudiantes comprender cómo las matemáticas pueden modelar fenómenos del mundo real y fomentar la reflexión sobre temas relevantes como la tenencia responsable de mascotas

iv) Similitudes o contrastes al trabajar bajo la formación ciudadana:

Ambos docentes manifiestan que la participación de los estudiantes es mayor a la habitual podemos ver que se debe a que históricamente en la clase de matemática el docente es quien tiene la palabra y no el estudiante , pero en estos dos casos se manifiesta al contrario dando paso al diálogo, y también en ocasiones al debate. En otro aspecto el tratamiento de la matemática es diferente , un docente afirma que: Según el primer docente (entrevista semi-estructurada, 15 de julio, 2024) "Lo que aquí hicimos fue pasar de la problemática a la matemática y no al revés". Es decir, es posible afirmar que la matemática que aquí se trabaja cobra un sentido propio debido a que tanto los intereses como el contexto de los y las estudiantes son incluidos en el proceso, por ende existe una matemática con sentido y relevancia para los estudiantes.

v) Matemática requerida para trabajar:

Ambos docentes abordaron el tema de las potencias en los cursos de Octavo y Primero Medio, con el objetivo de introducir el concepto y avanzar hacia el estudio de sus propiedades. Uno de ellos señaló que el enfoque no se limita a un tratamiento teórico, sino que busca profundizar en el contenido a través del análisis de una o dos situaciones problemáticas por clase. Según el primer docente (entrevista semi-estructurada, 15 de julio, 2024) "Aunque esto puede ralentizar el ritmo de avance, permite una comprensión más profunda del contenido o tema trabajado". Si bien es posible observar que el contenido matemático trabajado es menor también debemos considerar que estas son aproximaciones hacia la un enfoque reciente en matemáticas, y la suma de este tipo de acercamientos nos llevará cada vez a tener prácticas diversas para una formación ciudadana en matemáticas.

CONCLUSIONES

Si deseamos una formación ciudadana en las aulas de matemática, es necesario apuntar hacia una formación inicial docente que contenga dentro de su malla curricular los aspectos teóricos y metodológicos para la formación de la ciudadanía y no obviar o, dejar en el curriculum nulo, la formación política del profesorado como parte de su formación profesional (Gutierrez, 2013). De esta forma, sus creencias sobre la formación ciudadana estará situada en contextos de enseñanza de la matemática y no sobre supuestos que no manejan, posiblemente, a nivel teórico y político.

Podemos identificar en ambas situaciones que los docentes evidencian entusiasmo para trabajar en formación ciudadana, pero no cuentan con las herramientas necesarias para poder implementar este tipo de perspectiva en sus clases. Realizar intervenciones en escuelas, posiblemente es un trabajo para el desarrollo de la Ley 20.911 o los Objetivos de Aprendizaje Transversales. Una de las tareas indispensable de los establecimientos de educación superior es generar o fortalecer un trabajo bidireccional permanente con la comunidad escolar y la comunidad educativa para que exista formación o co-formación entre docentes y formadores docentes.

Se observa además que, al igual que en otros trabajos, trabajar desde el contexto, utilizando las matemáticas como medio para comprenderlo, motiva a los estudiantes y profundizan el conocimiento matemático (Molfino y Ochoviet, 2019; Gutiérrez y Morales, 2002). El contexto al tener sentido para los estudiantes es posible mediante este llegar a la transformación o acción ciudadana, como comentaba uno de los docentes. Los estudiantes se veían con la necesidad de llevar a sus mascotas a esterilización para así contribuir a una tenencia responsable, y por consiguiente contribuir a una responsabilidad social. La matemática, tradicionalmente individual, se transforma en una herramienta para construir comunidades. Al fomentar la colaboración, las matemáticas equipan a los estudiantes para participar activamente en una sociedad democrática y resolver problemas que necesariamente deben ser resueltos en comunidad.

Referencias

Apple, M. (1995). Taking power seriously: New directions in equity in mathematics education and beyond. En W. Secada, E. Fennema y L. Adajian (Eds.). *New directions for equity in mathematics education* (pp. 146-164). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Cox, C., y Castillo, J. C. (2015). *Aprendizaje de la ciudadanía: Contextos, experiencias y resultados*. Ediciones UC.

Díaz Quezada, V., & Poblete Letelier, A. (2014). Resolución de problemas en matemáticas desde la transversalidad: educar en valores éticos. *Paradigma*, *35*(2), 155-182.

DeJaeghere, J. G. (2009). Critical citizenship education for multicultural societies. *Inter-American Journal of Education for Democracy*, *2*(2), 222-236.

Garrido, M. & Jiménez, M. (2020). La formación ciudadana en la formación inicial docente. *Sophia Austral*, *26*, 349-370.

Gee, J., & Gee, J.P. (2007). *Social Linguistics and Literacies: Ideology in Discourses* (3rd ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203944806

Geiger, V., Gal, I., & Graven, M. (2023). The connections between citizenship education and mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, *55*(5), 923–940.

Gutstein, E. (2003). Teaching and learning mathematics for social justice in an urban, Latino School. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*, 37–73.

Gutiérrez, R. (2013). Why (urban) mathematics teachers need political knowledge. *Journal of Urban Mathematics Education*, *6*(2).

Freire, P., D'Ambrosio, U., & Mendonça, M. D. C. (1997). A conversation with Paulo Freire. *For the Learning of Mathematics*, *17*(3), 7–10.

Osandón, (2019). "Politizar" las asignaturas escolares: ampliando horizontes para la formación ciudadana. En Ramis, A y Peña. M (Eds.). Educar para la ciudadanía: Fundamentos, metodologías y desarrollo profesional docente. Universidad de Chile.

Martin, B. (1997). Mathematics and social interests. En A. Powell y M. Frankenstein (Eds.). *Ethnomathematics. Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 155-171). Suny Press.

Hazelkorn, E., Ryan, C., Beernaert, Y., Constantinou, C. P., Deca, L., Grangeat, M., Karikorpi, M., Lazoudis, A. Casulleras, R., & Wel- zel-Breuer, M. (2015). *Science education for responsible citizenship: Report to the European Commission of the expert group on science education.* Publications Office of the European Union.

Heimberg, C. (2010). ¿Cómo puede orientarse la educación para la ciudadanía hacia la libertad, la responsabilidad y la capacidad de discernimiento de las nuevas generaciones? *Iber: Didáctica de las ciencias sociales, geografía e historia*, (64), 48-57

Pérez Serrano, G. (2014). Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. I Método. La Muralla.

Popkewitz, T. (1988). Paradigma e ideología en investigación educativa. Las funciones sociales del intelectual. Madrid: Mondadori
MINEDUC.. (2016). Ley 20.911 Crea el Plan de Formación Ciudadana para los Establecimientos Educacionales reconocidos por el estado. Biblioteca del Congreso Nacional de Chile.
MINEDUC. (2016). Ley 20.903 Biblioteca del Congreso Nacional de Chile - www.leychile.cl - documento generado el 13-Jun-2012
MINEDUC.. (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° medio*. Decreto 879. Unidad Currículum y Evaluación.
Molfino, V., & Ochoviet, C. (2019). Enseñanza de la matemática para la justicia social en cursos de postgraduación. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *22*(2), 139-162.
Mori, C. (2006). Estudio mundial de valores Chile 2006.
Shanahan, T., & Shanahan, C. (2012). What Is Disciplinary Literacy and Why Does It Matter? *Topics in Language Disorders*, *32*(1).
Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Paidós.
Valero, P., & Skovmose, O. (2012). *Educación Matemática Crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas*. Editorial Kimpres Ltda.

MIRADA PROFESIONAL DE LAS OPORTUNIDADES DE PARTICIPACIÓN EQUITATIVA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Victoria Arriagada Jofré, Pontificia Universidad Católica de Chile

Horacio Solar Bezmalinovic, Pontificia Universidad Católica de Chile

Abstract:

[La competencia docente mirada profesional, ha tomado interés el último tiempo debido a la importancia para la práctica docente. El objetivo del estudio es caracterizar la mirada profesional de oportunidades de participación equitativa durante la orquestación comunicativa en el aula de matemáticas. Para ello, aplicamos el instrumento Mirada Profesional de la Gestión Comunicativa diseñado y validado previamente, en tres momentos de un programa de desarrollo profesional (PDP) donde participación cinco docentes de matemática. Codificamos con la rúbrica de análisis del instrumento que tiene 4 niveles (nivel 1, nivel 2, nivel 3 y nivel 4), tanto para identificar oportunidades de participación equitativa como para interpretarlas. Los docentes respondieron de forma individual y luego discutieron sus respuestas en grupos pequeños. Las respuestas de los docentes permitieron caracterizar y ejemplificar los 4 niveles de identificación y 4 niveles de interpretación. Los resultados indican que las respuestas grupales alcanzan niveles más altos que las respuestas individuales y en ambos casos se concentran en nivel 3 identificación y nivel 2 interpretación.]

[Noticing, oportunidades de participación, gestión comunicativa, equidad, desarrollo profesional]

INTRODUCCIÓN

La competencia mirada profesional ha generado interés y relevancia debido a la importancia de favorecer espacios reflexivos para comprender mejor la práctica docente y las dificultades que tienen los docentes en el aula (Dindyal et al., 2021). En la literatura, se han caracterizado diferentes perspectivas, definiciones y enfoques de mirada profesional. Nuestro estudio se enmarca en una perspectiva cognitivo-psicológica (König et al., 2022), porque abordamos procesos cognitivos de los docentes asociados a identificación e interpretación (van Es y Sherin, 2008).

Desde los orígenes, el interés se centró en el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010) pero actualmente se han incorporado otros enfoques: experiencias culturales, domésticas y comunitarias (Turner et al., 2012), clima de aula (Gold y Holodynski, 2017) y modelos tecnológicos (Prediger, 2019). Sin embargo, se ha puesto escaso interés en la mirada profesional de oportunidades de participación equitativa durante las discusiones en el aula, lo que es importante porque permite desarrollar la identificación e interpretación de las acciones realizadas por docentes. Algunos estudios se han centrado en la mirada profesional de la participación equitativa (Wager, 2014), sin embargo, han investigado la participación de los estudiantes y no las oportunidades que ofrece el docente para guiar las discusiones equitativamente. En este sentido, identificar qué oportunidades de partición equitativa ofrecen docentes de matemática y cómo interpretan esas oportunidades en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, no es trivial y enriquece las competencias profesionales de quienes las desarrollan. El objetivo del estudio es caracterizar la mirada profesional de oportunidades de participación equitativa durante la orquestación comunicativa en el aula de matemáticas. La pregunta que queremos responder es *¿qué oportunidades identifican e interpretan docentes de matemática sobre participación equitativa durante la orquestación comunicativa en el aula de matemáticas?.*

MARCO TEÓRICO

En el último tiempo, contexto y equidad se han integrado con el fin de generar espacios de aprendizaje más equitativos (Stovall et al., 2023; Rubin y van Es, 2024) y examinar oportunidades de aprendizaje que pueden limitar o favorecer el progreso de los estudiantes (Battey y Neal, 2018). Es por esto, que para responder la pregunta, consideramos las destrezas identificar e interpretar de la conceptualización de van Es y Sherin (2008) y oportunidades de participación durante la orquestación comunicativa de Solar y Deulofeu (2016). Además, este estudio contempla la equidad (Wager, 2014) desde el punto de vista de las acciones o prácticas que realiza el docente para promover la participación equitativa en el aula. De esta forma, este estudio se enfoca en prácticas docentes que favorecen la equidad a través de oportunidades de participación para todos los estudiantes en el aula. Para eso, consideramos el *enfoque comunicativo gestión de oportunidades de participación*, que contienen *acciones docentes comunicativas* que favorecen la argumentación (Boerst et al., 2011; Lee, 2006; Solar y Deulofeu, 2016).

METODOLOGÍA

El estudio tiene un diseño cualitativo con un enfoque de estudio de caso múltiple (Yin, 2013). Miramos las respuestas individuales y grupales de un grupo de docentes a lo largo de las aplicaciones del instrumento en el PDP.

Participantes y contexto

Los participantes (n=5) corresponden a una muestra intencionada (Creswell, 2011) invitada bajo tres criterios de participación: ser docente de matemática en primaria/secundaria, realizar o haber realizado clases a estudiantes de 10-15 años y participar presencialmente de las sesiones del PDP de argumentación y comunicación. Estos criterios fueron definidos porque los videos del instrumento (v-1, v-2, v-3) eran de aulas de estudiantes de 10-15 años. El reclutamiento y ejecución del estudio se realizó bajo aspectos éticos requeridos por el comité de ética correspondiente. El PDP se realizó post pandemia, presencial y semanalmente. Cada una de las 7 sesiones duró 2 horas y el propósito del PDP fue ofrecer herramientas de gestión comunicativa y argumentativa en el aula.

En un estudio previo (Arriagada et al., 2023) e inspirados en el marco para notar el pensamiento matemático del estudiante (van Es, 2011), consideramos *acciones docentes comunicativas* (Solar y Deulofeu, 2016) y elaboramos un instrumento llamado Mirada Profesional de la Orquestación Comunicativa (MPGC), compuesto por: i) 3 actividades de video estimuladas por preguntas; y, ii) una rúbrica de análisis, que contiene 4 niveles sobre la mirada profesional de los *enfoques comunicativos*, tanto para identificar como para interpretar. En este reporte nos centraremos en el enfoque Gestión de oportunidades de participación y los indicadores: GO-1. Pasear por la sala de clases observando los desarrollos de los estudiantes, para así reconocer procedimientos distintos, respuestas erradas o errores frecuentes; GO-2. Promover el debate de diferentes procedimientos, preguntas o respuestas utilizados para resolver un problema; GO-3. Promover la intervención de todos los estudiantes, y no tan sólo a aquellos que desean intervenir; GO-4. Gestionar con flexibilidad que los alumnos puedan interrumpir al profesor e intervenir en la clase; GO-5. No validar ni invalidar las preguntas realizadas por los estudiantes, respuestas, ni procedimientos utilizados para resolver un problema.

Datos y análisis

Los datos corresponden a las respuestas de los participantes a la pregunta "¿qué te llama la atención de como la docente gestiona las oportunidades de participación que ofrece a los estudiantes?", después de ver un video. Primero los docentes respondieron de forma escrita e individual. Posteriormente, se solicitó a los participantes compartir sus respuestas en grupos de 2-3 docentes, dejando el registro en audio por cada grupo.

Se realizó un análisis de contenido (Kvale, 2012) de ambos registros. Las respuestas individuales se codificaron con la rúbrica de análisis del instrumento MPGC en las 3 aplicaciones. Por cada respuesta, se asignó un nivel con la rúbrica, tanto para identificar como para interpretar. Las respuestas grupales también se codificaron con la rúbrica de análisis del instrumento MPGC por idea (Jacobs y Morita, 2002), considerando las intervenciones de los 2-3 integrantes del grupo mientras hablaban de un mismo tema. Esta decisión se justifica en que la extensión de las discusiones dificultaba la asignación de un único nivel. El 50% de los datos (n=43 respuestas) fue codificado por dos personas, autor principal y codificador externo. La fiabilidad entre codificadores fue del 70% en la segunda reunión y las discrepancias se resolvieron mediante discusión. El autor principal codificó los datos restantes.

RESULTADOS

Para responder a la pregunta, hemos organizado esta sección en 2 apartados. El primero, caracteriza las *identificaciones* de oportunidades de participación equitativa a través de 4 niveles, incorporando ejemplos de respuestas individuales y grupales (Tabla 1). El segundo, caracteriza las *interpretaciones* de oportunidades de participación equitativa a través de los niveles, incorporando ejemplos de respuestas individuales y grupales. En la presentación se ofrecerán más ejemplos grupales.

Qué identifican los docentes

En el *nivel 1*, los participantes del PDP identificaron acciones generales ocurridas en el aula, acciones de los estudiantes y acciones de la profesora que no se relacionaban con oportunidades de participación que ofrece en el video. En el *nivel 2*, los participantes se enfocan en la orquestación de la docente del video para promover la participación de todos sus estudiantes en la resolución de la tarea. Además los participantes se empiezan a focalizar en las oportunidades de participación de manera general. En el *nivel 3*, los participantes identifican acciones docentes específicas para promover la participación de los estudiantes y que corresponden a al menos uno de los indicadores de la rúbrica (GO-1, GO-2, GO-3, GO-4, GO-5). En el *nivel 4*, las respuestas de los participantes también están focalizadas en la orquestación del docente para promover oportunidades de participación. Además, se aprecia que la respuesta articula la orquestación de la profesora del video con la reacción de los estudiantes a la tarea. No se encontraron respuestas grupales de nivel 1 y nivel 2.

Cómo interpretan los docentes

En el *nivel 1*, los participantes describen lo ocurrido en el aula o emiten juicios de valor sobre generalidades ocurridas en el video. En el *nivel 2*, los participantes describen y/o evalúan las oportunidades de participación que ofrece la docente a sus estudiantes. Además, describen la orquestación de la profesora y/o emiten juicios de valor de la orquestación de la profesora del video. En el *nivel 3*, las respuestas de los participantes son interpretativas, intentando comprender lo que hizo la profesora del video para promover la participación de sus estudiantes. Además, no incorporan evidencia específica de lo ocurrido en el video como frases realizadas por la profesora para justificar su orquestación. En el *nivel 4*, las respuestas de los participantes son interpretativas e incorporan detalles de la orquestación de la profesora del video observado para fomentar la participación de todos sus estudiantes. No se encontraron respuestas individuales de nivel 4 ni grupales de nivel 1.

Tabla 1

Ejemplos de respuestas individuales(I) y grupales(G). Énfasis añadido.

Ejemplo	Nivel identificar	Nivel interpretar
"No entiendo. No sé, siempre la veo con solo uno de los estudiantes. Los alumnos describen cómo desarrollan sus problemas." (Cristofer, v-2, I)	Nivel 1	Nivel 1
"Se centra en los estudiantes que están consultando, no buscando la participación de otros estudiantes."(Isabel,v-2, I)	Nivel 2	Nivel 2
"A través de preguntas que le va generando a los estudiantes incentiva la participación de la mayoría. Con las mismas respuestas que le entregan [los estudiantes], genera una nueva pregunta a un/a compañera de trabajo. De la respuesta de un estudiante va generando preguntas a sus compañeros de trabajo (GO-2)." (Maite, v-1, I)	Nivel 4	Nivel 2
Isabel: yo puse que la profesora va dándole la palabra a distintos estudiantes y frenando a aquellos que quieren participar sin respetar turnos. No ves que en general frena a una niña, así como que, Belén para. Y que hace participar a aquellos que tienen la mano levantada como a los que no y va llamando	Nivel 3	Nivel 3

la atención a aquellos que están en otras cosas como que están molestando, metiendo ruido. (GO-3) *Maite: si, como que se desvía su atención. Yo puse que la profesora da la palabra a estudiantes que tienen la razón pero también a los que sus respuestas erradas, como que les da la misma importancia, incluso te lo voy a leer. Se asegura de que se generen discusiones de puntos de vista diferentes. Asegura dar la palabra a muchos de sus estudiantes, no solo 2 o 4 sino que son muchos los que van haciendo la discusión. (GO-5)* *Isabel: es como repartido en el aula.* *Maite: Si, si* (v-3, G)		

DISCUSIÓN

Las respuestas de los participantes ubicadas en los niveles más altos de identificación, indican que fueron capaces de identificar oportunidades de participación de forma equitativa ofrecidas por la docente del video. También identificaron cuándo los docentes no ofrecieron estas oportunidades a sus estudiantes en frases como "*la mayoría de las veces en los grupos, [la profesora] se dirige a uno de ellos, para ver y consultar lo que hace"* (indicador GO-3) y lo vincularon con el aprendizaje de los estudiantes. En estas situaciones, los participantes tuvieron en cuenta la equidad a través de acciones que permitieron o no, que todos los estudiantes pudieran participar de la resolución de la tarea (nivel 3 y nivel 4, identificación). Por otra parte, si bien muchas respuestas describieron y/o evaluaron el actuar de la profesora del video, otras respuestas lo interpretaron, tratando de entender por qué hizo lo que hizo durante la orquestación comunicativa e incorporando evidencias especificas a su respuesta (nivel 3 y nivel 4, interpretación). En nuestro estudio, estas características de las respuestas implican que un docente está *mirando profesionalmente la participación de forma equitativa durante la orquestación comunicativa*. Estos resultados se contrastan con los de Wager et al., (2014) que sugieren que la perspectiva de la participación ayudó a los profesores a considerar cómo proporcionar una enseñanza más equitativa de las matemáticas. Además, creemos que, al igual que Bartell et al., (2017), contar con prácticas concretas de oportunidades de participación equitativa observables en los videos, ayudó a mirar profesionalmente la participación de forma equitativa. Dentro de las limitaciones del estudio, consideramos que la cantidad de participantes y de sesiones del PDP pueden mejorarse. Dentro de las proyecciones, nos parece importante mirar de qué manera cambiaron las respuestas individuales al discutirlas en grupos pequeños.

Referencias

Arriagada, V., Fernández, C., & Solar, H. (2023). Diseño y validación de una rúbrica para caracterizar la mirada profesional sobre la gestión comunicativa en el aula de matemáticas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E., & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 147–154). SEIEM.

Battey, D., & Neal, R. A. (2018). Detailing Relational Interactions in Urban Elementary Mathematics Classrooms. *Mathematics Teacher Education and Development*, *20*(1), 23-42.

Boerst, T., Sleep, L., Ball, D., & Bass, H. (2011). Preparing teachers to lead mathematics discussions. *Teachers College Record*, *113*(12), 2844-2877. https://doi.org/10.1177/016146811111301207

Creswell, J. (2011). *Educational research: planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research.* Pearson.

Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H., & Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM-Mathematics Education*, *53*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y

Gold, B., & Holodynski, M. (2017). Using digital video to measure the professional vision of elementary classroom management: Test validation and methodological challenges. *Computers & Education*, *107*, 13-30. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.12.012

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169–202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Jacobs, J. K., & Morita, E. (2002). Japanese and American teachers' evaluations of videotaped mathematics lessons. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(3), 154–175. https://doi.org/10.2307/749723

Kvale, S. (2012). *Las entrevistas en investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A. K., Yang, X., & Kaiser, G. (2022). Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice. *Educational Research Review*, *36*, 100453.

Lee, C. (2006). *Language for learning mathematics: assessment for learning in practice: Assessment for learning in practice*. McGraw-Hill Education.

Prediger, S. (2019). Investigating and promoting teachers' expertise for language-responsive mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal*, *31*(4), 367-392.

Rubin, E., & van Es, E. A. (2024). Theorizing Mathematics Teacher Noticing for Equity Through Collaborative Design. In *Proceedings of the 18th International Conference of the Learning Sciences-ICLS 2024, pp. 1307-1310*. International Society of the Learning Sciences.

Stovall, J. L., Pimentel, D. R., Carlson, J., & Levine, S. R. (2023). High school mathematics teachers' noticing of inequitable talk. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-28.

Solar, H., & Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *30*(56), 1092–1112. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13

Turner, E. E., Drake, C., McDuffie, A. R., Aguirre, J., Bartell, T. G., & Foote, M. Q. (2012). Promoting equity in mathematics teacher preparation: A framework for advancing teacher learning of children’s multiple mathematics knowledge bases. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*, 67-82.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers’ “learning to notice” in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, *24*(2), 244–276.

van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. In *Mathematics teacher noticing* (pp. 164-181). Routledge.

Wager, A. A. (2014). Noticing children's participation: Insights into teacher positionality toward equitable mathematics pedagogy. *Journal for Research in Mathematics*

Education, *45*(3), 312-350.

NIVELES DE NOTICING EN PROFESORES EXPERTOS DE MATEMÁTICAS AL ENSEÑAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Ledher M. López y Diana Zakaryan, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

Este estudio explora los niveles de noticing en la enseñanza del Teorema de Pitágoras por parte de tres profesores chilenos de matemáticas con distintos años de experiencia. Basado en el marco teórico Learning to Notice, el análisis se enfoca en las dimensiones de atender e interpretar. Los resultados confirman que la experiencia no garantiza automáticamente una mayor experticia en noticing. Mientras dos de los profesores logran el nivel extendido en ambas dimensiones, uno se mantiene en un nivel mixto, a pesar de tener años de experiencia similares a otro profesor que sí alcanza el nivel extendido. Esto sugiere que hay factores, más allá de los años de enseñanza, que son importantes a considerar para el desarrollo del noticing. El estudio contribuye a la comprensión del noticing en relación con la experticia docente y plantea nuevas interrogantes sobre la formación y los factores que influyen en este proceso.

Noticing, experticia, Teorema de Pitágoras, Formación continua, profesores expertos

INTRODUCCIÓN

El noticing, como una competencia profesional en la Educación Matemática, se refiere a la habilidad que permite al profesor atender (notar) e interpretar los eventos significativos que ocurren en el aula. Esto orienta la práctica docente hacia un aprendizaje significativo para los estudiantes (König et al., 2022). Este proceso implica no solo atender, sino también interpretarlo críticamente y, de ser necesario, responder adecuadamente a lo observado. Así, el noticing se ha estudiado desde distintos enfoques y perspectivas, siendo una de ellas la *perspectiva relacionada con la experticia* (Köning et al., 2022; Santagata et al., 2021). Esta perspectiva se centra en estudiar las similitudes y diferencias respecto al nivel de noticing entre profesores, considerando tanto las variaciones dentro de los grupos de profesores expertos y nóveles como las que se dan entre ellos.

Si bien existen investigaciones que han concluido que los profesores expertos tienden a tener un noticing más refinado que los noveles, se necesitan más investigaciones que profundicen en esta línea (König et al., 2022; Weyers et al., 2024) entre ellas, investigaciones donde se compare el noticing de diferentes grupos de profesores expertos (Bastian et al., 2022), en ese sentido, nuestro interés está en aportar en dichas investigaciones al trabajar con niveles de noticing entre profesores expertos.

Bastian et al. (2022) abordaron la experticia del profesor al comparar de manera cuantitativa las habilidades de noticing de tres diferentes grupos de profesores de matemáticas con distintos niveles de experiencia profesional: profesores en formación, profesores en inicio de carrera y profesores experimentados. Los hallazgos no mostraron diferencias significativas en los profesores experimentados en comparación con los profesores en inicio de carrera, pero sí un posible estancamiento o disminución en las habilidades de noticing entre los profesores experimentados. En otras palabras, un mayor número de años de experiencia no necesariamente conduce a una mayor experticia en términos de noticing. Es decir, los años de experiencia por sí sola no garantizan el desarrollo de esta experticia. En este sentido, con el fin de aportar a la comunicación y estudio de la perspectiva de la experticia en noticing, desde contextos latinoamericanos, se plantea la siguiente pregunta que guía esta investigación. ¿Qué niveles de noticing manifiestan tres profesores de matemática con distintos años de trayectoria docente, al enseñar el Teorema de Pitágoras (TP)?

ASPECTOS TEÓRICOS

En la literatura actual, el noticing ha sido conceptualizado desde distintas perspectivas. En esta investigación, nos posicionamos desde la propuesta de van Es y Sherin (2021), quienes consideran tres dimensiones del noticing: atender, interpretar y dar forma. En este escrito, abordaremos las dimensiones atención e interpretación.

Atender

Van Es y Sherin (2021) han teorizado que la dimensión atender consiste en identificar los acontecimientos notables que tienen lugar en el aula. En la dinámica de una clase, la capacidad de un profesor para enfocarse en aspectos específicos de la enseñanza es crucial, aunque es comprensible que no puedan atender simultáneamente todo lo que ocurre en el aula, los docentes sí pueden centrar su atención en elementos particulares que son relevantes para el aprendizaje, como el pensamiento de los estudiantes o los conceptos matemáticos (van Es y Sherin, 2021). Berliner (1988) plantea que mientras más expertos se vuelvan los profesores, podrán notar de manera más natural los detalles que suceden en el aula de clase, por ejemplo, identificar problemas potenciales o reconocer cuándo una lección no está funcionando como se esperaba.

Interpretar

En cuanto a la dimensión de interpretación, van Es y Sherin (2021) consideran que en esta dimensión donde los profesores utilizan sus propios conocimientos y experiencias para dar sentido a lo observado. Las autoras se refieren a que los profesores tienen una gran cantidad de recursos a los que recurren para dar sentido a lo que han observado. La interpretación implica establecer conexiones entre eventos específicos y principios más amplios de enseñanza y aprendizaje (van Es y Sherin, 2021). Esta interpretación ayuda al profesor, posteriormente, a tomar decisiones pedagógicas informadas. En este sentido, para Berliner (1988), un profesor experto presenta un dominio de conocimiento más extenso: comprende no solo los conceptos, sino también las interrelaciones entre ellos y cómo se aplican en diferentes contextos, a la vez que es capaz de usar el conocimiento para adaptar la enseñanza sobre la marcha.

Niveles de Noticing

En nuestra investigación usamos la categorización de niveles de noticing de Lee y Choy (2017) que fueron adaptados del trabajo previo de van Es (2011). Así, para la dimensión de atender y de interpretar se reconocen cuatro niveles que responden a una trayectoria de desarrollo de la competencia noticing en profesores que podrían entenderse como nivel de experticia: línea de base (baseline), mixto (mixed), enfocado (focused) y extendido (extended).

En el nivel base, los profesores suelen centrarse en detalles irrelevantes o generales y ofrecen comentarios descriptivos, sin evidencia específica. En el nivel mixto, empiezan a notar aspectos más específicos de las matemáticas, el pensamiento de los estudiantes y proporcionan algunos comentarios evaluativos, aunque todavía generales. En el nivel enfocado, los profesores prestan atención a aspectos particulares de las matemáticas y sus implicaciones pedagógicas, también se atiende el pensamiento matemático de determinados alumnos y presentan interpretaciones más detalladas y basadas en evidencia concreta. Finalmente, en el nivel extendido, los profesores son capaces de relacionar el pensamiento matemático de diferentes alumnos con las estrategias de enseñanza, estableciendo conexiones profundas entre los eventos observados y los principios pedagógicos, lo que les permitiría proponer soluciones alternativas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje (van Es, 2011).

METODOLOGÍA

Participantes

La investigación se realizó con tres docentes de matemáticas chilenos (Joe, Mimí y Sora - seudónimos) que impartían matemáticas en octavo grado, caracterizados como profesores expertos a partir de las características propuestas por Rojas et al. (2012). Joe es un profesor con una vasta trayectoria de 22 años en la enseñanza de la matemática en nivel básico. Con un Magíster en Administración Educativa, ha participado activamente en cursos y diplomados asociados a la didáctica de la matemática que han enriquecido su labor. Joe ha impartido el TP en 20 ocasiones. Mimí, con un Magíster en Didáctica de la Matemática, ha complementado su formación con la participación en diversos cursos, diplomados y seminarios asociados a la didáctica de la matemática. Con 9 años de experiencia en la enseñanza, Mimí ha impartido el TP en dos ocasiones. Por otro lado, Sora, con 8 años de experiencia, ha participado en seminarios y diplomados asociados a la educación general. Ha impartido el TP en dos ocasiones. Al momento de la toma de datos no contaba con un postítulo o postgrado.

Recolección de datos

Para la recolección de datos se entrevistó a los profesores inmediatamente al concluir las clases que tenían planificadas para enseñar el tema del Teorema de Pitágoras en el año 2023. Joe y Sora impartieron dos clases, mientras que Mimí impartió siete clases asociadas a la unidad del TP. Así, al finalizar cada clase, se les pidió que recordaran retrospectivamente lo que estaban viendo y pensando durante su propia clase sin ningún recordatorio visual de lo ocurrido (Sherin et al., 2011). Para tales fines se les realizó una pregunta: *"¿Qué te llamó la atención de la clase del día de hoy?"*.

Análisis de datos

En el análisis de los datos que presentamos en esta comunicación, se consideraron las respuestas a las primeras dos entrevistas realizadas a cada profesor. Estas entrevistas se determinaron distintos fragmentos considerando las diferentes ideas que los profesores señalaban, a los cuales se les asignó un nivel por cada dimensión de noticing. Debido a que la cantidad de fragmentos variaba entre los participantes, para asignar un nivel representativo, se contaron las frecuencias de niveles por fragmento, luego se asignó el nivel que se presentó con mayor frecuencia. En el caso en el que las frecuencias sobre el nivel coincidían, se asignó el nivel más alto. Por ejemplo, si un profesor presentaba en la interpretación los niveles Base, Base, Mixto y Mixto, se le asignaba el nivel Mixto como representativo para la dimensión de interpretación.

RESULTADOS

En la Tabla 1 se presentan los niveles por las dimensiones atención e interpretación para los tres profesores del estudio. Seguidamente, presentamos ejemplos de cada uno de los niveles.

Tabla 1

Síntesis de resultados por profesor

Profesor	Dimensión Atención	Dimensión Interpretación
Joe	Extendido	Extendido
Mimí	Extendido	Extendido
Sora	Mixto	Mixto

Como se puede observar Joe alcanza un nivel extendido de atención en la enseñanza del Teorema de Pitágoras. Respecto a su segunda clase, menciona que:

> Joe: me tuve que sentar individualmente con ellos, con algunos, para que entendieran qué tenían que buscar si era cateto, hipotenusa (y ese). Pero se me aclaró bastante la duda y podría ser que aprendieron, pero hay que seguir reforzando muchas cosas...

Al sentarse individualmente con algunos de ellos, Joe está identificando y abordando problemas específicos que enfrentan en la comprensión de conceptos clave asociados al TP: su definición y el corolario para encontrar la medida de un lado usando TP. Al aclarar dudas en los estudiantes, Joe está alineando su enseñanza con lo que considera sucede en toda la clase, mostrando así una actitud de razonamiento ya que reconoce la necesidad de seguir reforzando el TP. En su interpretación, si bien faltan evidencias más robustas, logra establecer conexiones entre los acontecimientos atendidos y los principios de la enseñanza y el aprendizaje y a partir de las interpretaciones, propone soluciones pedagógicas alternativas (usar cosas lúdicas, GeoGebra):

> Joe: …Ahora vamos a trabajar cosas más lúdicas también con el Teorema de Pitágoras. También los voy a evaluar con eso, que les gusta más, con el computador (GeoGebra) y ahí creo que, ahí estaríamos con esto (usar el TP), porque la idea es que entiendan, que entiendan los conceptos. Que entiendan que está en la vida el Teorema de Pitágoras.

Mimí por su parte, presenta atención extendida cuando enseña el Teorema de Pitágoras. Esto se observa en cómo logra identificar y conectar el pensamiento matemático de sus alumnos con las estrategias de enseñanza. Por ejemplo, en una de las entrevistas atiende la relación entre el pensamiento matemático de determinados alumnos y las estrategias de enseñanza y el pensamiento matemático de todos los alumnos de clase:

> Mimí: Me llamó la atención que fue más fácil de lo que pensé que varios alumnos llegaran a la noción de raíz. Pero, al mismo tiempo, siento que (en) un grupo no menor, no pude comprobar, que hayan entendido bien, en base que les pedí que calcularan raíces utilizando el teorema de Pitágoras, si comprendieron bien Pitágoras. Porque… igual es lógico, es la segunda clase.

De esta forma, Mimí nota que varios estudiantes lograron comprender el concepto de raíz más fácilmente de lo que esperaba. Sin embargo, también reconoce que no pudo confirmar si todos los estudiantes realmente entendieron el TP cuando les pidió que calcularan raíces. Esto muestra que está prestando atención a las diferencias en el pensamiento entre los estudiantes y cómo estos aplican el concepto matemático en sus cálculos, lo que indica que está sintonizada con el proceso de aprendizaje de sus alumnos y reflexiona sobre el impacto de su enseñanza.

En el caso de Sora, alcanza el nivel mixto en ambas dimensiones. Ella comienza a atender conceptos matemáticos, pero que se encuentran fuera del TP:

> Sora: Me llamó la atención que se les había olvidado las tablas de multiplicar, como que contestaron muy poco en comparación con otras clases. Creo que también tiene que ver con que estuvimos una semana sin clases con las alianzas. Entonces tenían solo las dos primeras horas, venían muy pocos y llegaban todos a las alianzas. Lo otro que vi que trataron de participar varios alumnos que no han participado en otras ocasiones…

Además, empieza a prestar atención al pensamiento matemático de los alumnos, pero sigue atendiendo principalmente sus comportamientos. Respecto a la interpretación, sigue formando impresiones generales sobre lo que sucede en el aula y proporciona comentarios evaluativos: *"como que contestaron muy poco a comparación a otras clases"*. Sin embargo, sus interpretaciones son en gran medida generales o descriptivas.

COMENTARIOS FINALES

Los resultados sobre niveles de noticing de los profesores con distintas experiencias, según sus años de experiencia y formación, muestran diferencias en los profesores del estudio y aportan al debate sobre la relación entre la experiencia y experticia en noticing, y contribuyen al corpus de conocimiento desde un contexto latinoamericano, lo que amplía el alcance de las investigaciones previas, generalmente realizadas en contextos europeos o norteamericanos.

En primer lugar, Joe y Mimí, quienes presentan nivel extendido tanto en la dimensión de atención como en la de interpretación, pareciera ser que ilustran que una formación académica sólida puede potenciar la capacidad de los profesores para atender e interpretar aspectos clave del aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, esto no es del todo claro, ya que Joe cuenta con un postgrado en Administración Educativa versus a la de Mimí que es en Didáctica de la Matemática; esto podría apuntar a que existen otros factores que intervienen para que alcancen dichos niveles de noticing.

En segundo lugar, Joe cuenta con más de dos décadas de experiencia mientras que Mimí tiene 13 años menos, pero alcanzan niveles de experticia similares en noticing. Estos hallazgos parecen confirman lo planteado por estudios previos (Bastian et al., 2022; van Es y Sherin, 2021), en los que se destaca que la experiencia, por sí sola, no es suficiente para desarrollar una experticia avanzada en noticing y que esta no está directamente ligada a la cantidad de años de experiencia, sino a la calidad de la experiencia y al enfoque en el desarrollo profesional.

En tercer lugar, en el caso de Sora, si bien tiene años de experiencia similar a Mimí (8 y 9 respectivamente), presenta nivel mixto en ambas dimensiones. Su atención aún se centra en aspectos más generales, como el comportamiento de los estudiantes, y su interpretación carece de la profundidad y especificidad que caracterizan los niveles más altos de noticing. Esto sugiere que la formación adicional, como los cursos y seminarios en didáctica de la matemática, podría ser detonante para que Sora avance hacia niveles más elevados de competencia en noticing.

Finalmente, este estudio plantea nuevas preguntas de investigación, por ejemplo, ¿qué otros factores asociados a los profesores están influyendo en sus niveles de noticing?, ¿cómo o qué aspectos deberían incorporar las intervenciones, talleres o seminarios formativos de didáctica de la matemática para que promuevan el desarrollo de la experticia de noticing en profesores con distintos años de experiencia?

Referencias

Bastian, A., Kaiser, G., Meyer, D., Schwarz, B. y König, J. (2022). Teacher noticing and its growth toward expertise: an expert–novice comparison with pre-service and in-service secondary mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics, 110*(2), 205–232. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10128-y

Berliner, D. C. (1988). *The development of expertise in pedagogy.* American Association of Colleges for Teacher Education.

König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A.-K., Yang, X. y Kaiser, G. (2022). Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice. *Educational Research Review, 36*(100453). https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100453

Rojas, N., Carrillo, J., y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479 - 485). SEIEM.

Santagata, R., König, J., Scheiner, T., Nguyen, H., Adleff, A.-K., Yang, X., y Kaiser, G. (2021). Mathematics teacher learning to notice: a systematic review of studies of video-based programs. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 53*(1), 119-134. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01216-z

Sherin, M., Jacobs, V., y Philipp, R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 3-13). Routledge.

van Es., E.A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). Routledge.

van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2021). Extending on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *53*(1), 17-27.

Weyers, J., König, J., Scheiner, T., Santagata, R., y Kaiser, G. (2024). Teacher noticing in mathematics education: a review of recent developments. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 56*(2), 249–264. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01527-x

CREENCIAS DE DOCENTES DE LA CIUDAD DE VALPARAÍSO SOBRE LAS CAUSAS QUE GENERAN ANSIEDAD MATEMÁTICA EN SUS ESTUDIANTES

Juan Pablo Medel, Universidad de Valparaíso

Javier Santis, Universidad de Valparaíso

Carlos Mejías, Universidad de Valparaíso

Álvaro Bustos Rubilar, Universidad de Valparaíso

Abstract:

Este estudio se centra en la exploración de las creencias de los docentes sobre la ansiedad matemática de sus estudiantes. El objetivo de la investigación es determinar las creencias de docentes de escuelas públicas de la Ciudad de Valparaíso sobre las causas de ansiedad matemática de sus estudiantes en la asignatura. La investigación es de corte cualitativo, en la que se utilizó la Teoría Fundamentada para codificar y analizar entrevistas semi-estructuradas realizadas a docentes de matemáticas. Los resultados revelan creencias relacionadas con la influencia del rendimiento académico y las actitudes y metodologías docentes. Las conclusiones preliminares sugieren que factores como las relaciones familiares y la percepción de las habilidades matemáticas de los estudiantes también contribuyen a la

ansiedad matemática. Además, emergen creencias no previstas inicialmente, como la adaptabilidad de los estudiantes y el impacto de las prácticas docentes en la generación de esta ansiedad. Este estudio destaca la importancia de la formación docente en el reconocimiento y manejo de la ansiedad matemática para crear un ambiente de aprendizaje más inclusivo y favorable. Aunque los resultados no son generalizables debido a la naturaleza específica de la muestra, podría proporcionar un punto de partida significativo para futuras investigaciones en el área.

Creencias, Creencias docentes, Ansiedad matemática

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las matemáticas es un desafío significativo para estudiantes de nivel escolar, debido al temor que estas generan (Beilock y Maloney, 2015). Este temor a menudo conduce al desarrollo de actitudes negativas hacia la disciplina, considerándola tediosa y excesivamente compleja, lo que crea una barrera mental que dificulta la ejecución de operaciones matemáticas de nivel superior (Suárez, 2014). Este proceso desencadena un fenómeno conocido como "Ansiedad Matemática", el cual ha sido ampliamente estudiado debido a su impacto negativo tanto en el rendimiento académico como en la actitud hacia las matemáticas (Commodari et al., 2021).

Experimentar ansiedad matemática tiene múltiples implicaciones para los estudiantes, siendo una de las más importantes la relación entre la competencia matemática y la ansiedad misma. Esta relación se manifiesta en la disminución de la competencia matemática futura, lo que a su vez puede incrementar la ansiedad matemática (Weissgerber et al., 2022). De hecho, se ha observado que los estudiantes con menor ansiedad matemática tienden a obtener resultados de logro más altos en el largo plazo.

La ansiedad hacia las matemáticas también está relacionada con la falta de disfrute que los estudiantes experimentan al realizar tareas cognitivamente exigentes en la disciplina. Personas con una baja necesidad de cognición son más propensos a sufrir ansiedad matemática (Maloney y Retanal, 2020). Por lo tanto, los estudiantes que experimentan mayor ansiedad en matemáticas tienden a mostrar un menor pensamiento reflexivo en preguntas relacionadas con el razonamiento matemático (Maloney y Retanal, 2020). Además, la memoria de trabajo, una función crucial tanto para las matemáticas como para la vida cotidiana, también se ve afectada por la ansiedad matemática, ya que esta capacidad permite manipular y retener simultáneamente información relevante para una tarea en curso (Gutiérrez-Martínez, 2014).

Las creencias de los docentes desempeñan un papel crucial en esta problemática, ya que sus percepciones y expectativas pueden influir significativamente en la manera en que los estudiantes enfrentan y gestionan la ansiedad matemática (Díaz et al., 2010). Estas creencias, que abarcan desde la percepción de las habilidades matemáticas de los estudiantes hasta la valoración de la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana, pueden impactar tanto en la enseñanza como el aprendizaje, creando un entorno que puede ser más o menos propicio para el desarrollo de competencias matemáticas (Gamboa et al., 2017).

Comprender las creencias de los docentes sobre las causas de la ansiedad matemática es fundamental para abordar esta problemática. Sin embargo, existe poca investigación sobre las percepciones de los profesores en relación con los factores que la generan. Considerando lo anterior, resulta relevante explorar las creencias que los docentes tienen sobre las posibles causas que generan ansiedad matemática en sus estudiantes. Por lo tanto, la pregunta de investigación de este estudio es: ¿Qué creencias tienen los docentes sobre los factores que provocan ansiedad matemática en sus estudiantes? Para responder a esta pregunta se formuló el siguiente objetivo de investigación: **Determinar las creencias de docentes de escuelas públicas de la Ciudad de Valparaíso sobre las causas que generan ansiedad matemática en sus estudiantes.**

REFERENTES TEÓRICOS

De acuerdo con Mendías et al., (2022) observan que la ansiedad matemática se manifiesta en una variedad de niveles educativos, desde la educación primaria hasta la educación superior. A medida que los estudiantes avanzan en su educación, crean barreras mentales que se fortalece con el tiempo, lo que dificulta el aprendizaje en niveles más avanzados (Suárez, 2014). Por esta razón, Acevedo et al., (2020) destaca la importancia de abarcar la ansiedad matemática en diversos contextos educativos y proponen la necesidad de intervenciones más efectivas para ayudar a los individuos a superar este fenómeno.

Diversos factores psicológicos y pedagógicos contribuyen al desarrollo de la ansiedad matemática. Mehmet y Hulya (2021) señalan que uno de los principales factores es el miedo al fracaso, el cual surge de la percepción de los estudiantes al no ser capaces de adaptarse al ambiente escolar. Niveles cognitivos insuficientes, baja autoestima, estilos de aprendizaje inadecuados, actitudes negativas y falta de confianza son otros elementos que pueden inducir la ansiedad matemática, inhibiendo así el desarrollo de habilidades en la disciplina (Mehmet y Hulya, 2021). Además, los contextos educativos juegan un papel crucial en el surgimiento de la ansiedad matemática. Factores como la autoridad ejercida por los docentes, las limitaciones de tiempo en clase y durante actividades evaluadas, las altas expectativas de padres y profesores respecto al rendimiento académico, la desconexión entre el contenido escolar y la realidad, problemas de aprendizaje y un ambiente negativo en el aula, son aspectos que pueden contribuir al desarrollo de esta ansiedad en los estudiantes (Mehmet y Hulya, 2021).

Estudios previos han encontrado que la ansiedad matemática en el rendimiento académico puede provocar dificultades para mantener la concentración y la perseverancia en actividades relacionadas con las matemáticas, y la pérdida de retención de información ya almacenada, lo que influye en los resultados de sus pruebas (Passolunghi, 2018). Este fenómeno tiene un impacto igualmente perjudicial en el redimiento matemática, tanto en niños que experimentan ansiedad relacionada con lo números cómo en aquellos que enfrentan ansiedad derivada de las experiencias situacionales y sociales de hacer matemáticás (Wu et al., 2012)

Un factor adicional de gran relevancia es el genético, el cual, en combinación con múltiples factores ambientales, desempeña un papel fundamental en el origen de la ansiedad matemática (Commodari y La Rosa, 2021). Además, según Gunderson et al. (2017), las deficiencias en habilidades matemáticas y el bajo rendimiento académico impactan negativamente en la autoconfianza de los estudiantes, lo que puede llevar al desarrollo de ansiedad en esta área. Es importante señalar que padres con altos niveles de ansiedad matemática pueden transmitir esta preocupación a sus hijos, agravando aún más la situación.

Las creencias de los docentes son un sistema complejo que abarca constructos que los profesores utilizan al reflexionar, evaluar, clasificar y guiar su práctica pedagógica (Díaz et al., 2010). Estas creencias, generalmente alineadas con el sentido común, suelen tener un carácter implícito (Díaz et al., 2010). No obstante, estas creencias no siempre son coherentes, ya que están en constante evolución y pueden estar sujetas a cambios y reformulaciones. Aunque algunos autores sostienen que las creencias rara vez cambian, este proceso de reformulación puede ocurrir cuando las creencias se vuelven explícitas y constituyen un desafío directo para el docente, o cuando son cuestionadas por experiencias pasadas (Díaz et al., 2010).

Las creencias que los docentes tienen sobre las causas que generan ansiedad matemática en sus estudiantes pueden afectar su capacidad para diagnosticar estas situaciones. En el aula, el diagnóstico de la ansiedad matemática por parte del profesor es realizada a través de la observación participativa y el seguimiento del desempeño integral del estudiante, considerando tanto sus calificaciones académicas como sus actitudes hacia el aprendizaje de las matemáticas (Cordero, 2021). Según el mismo autor, los docentes deben fortalecer la confianza de los estudiantes en sus habilidades matemáticas e interactuar activamente con ellos en el aula para brindar apoyo y responder a sus preguntas. Además, se destaca la importancia de la tutoría fuera del horario de clases y la necesidad de mantener una comunicación asertiva dentro del aula, especialmente cuando los estudiantes enfrentan dificultades. Un ambiente de aula distendido, en el que los estudiantes se sientan seguros, es fundamental para reducir la ansiedad matemática. El vínculo de confianza entre el docente y el estudiante es crucial en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que puede influir significativamente en la ansiedad matemática de los estudiantes. Por lo tanto, el rol del docente se presenta como un factor determinante en la mitigación de esta ansiedad (Cordero, 2021).

MÉTODOS

La investigación es de corte cualitativo, mediante la cual se busca obtener una comprensión más detallada de las experiencias, percepciones y significados que los individuos o grupos atribuyen a un fenómeno específico (Sampieri, 2018). Para efectos de este trabajo nos centramos en la exploración de las creencias de docentes sobre los factores que ellos consideran que generan ansiedad matemática en sus estudiantes. Para la recolección y análisis de datos se utilizó la teoría Fundamentada, la cual se caracteriza por la recopilación y el análisis concurrente de datos, permitiendo que las teorías emerjan progresivamente a través de la codificación y la comparación constante (De la Espriella & Restrepo, 2020). Los sujetos participantes en la investigación fueron seis docentes de matemáticas de instituciones públicas de nivel escolar de la región de Valparaíso que fueron etiquetadas cómo P1, P2, P3, P4, P5 y P6. A continuación se detallará información de los profesores entrevistados.

P1: Es un docente de 32 años, cuenta con 5 años de experiencia laboral y se desempeña en un establecimiento científico humanista. Actualmente, está a cargo de impartir clases en los niveles de 7°básico, 1° medio y 3° medio. Además, ha participado en cursos de perfeccionamiento profesional que complementan su formación docente.

P2: Es un docente de 25 años, cuenta con aproximadamente 3 años de experiencia laboral y se desempeña en un establecimiento científico humanista. Actualmente, está a cargo de impartir clases en los niveles de 6° básico, 1° medio y 3°medio. No posee continuidad de estudios.

P3: Es un docente de 42 años, cuenta con 19 años de experiencia laboral y se desempeña en un establecimiento científico humanista. Actualmente, está a cargo de impartir clases en los niveles de 5° básico, 7° básico, 8°básico y 3° medio. Además, ha participado en cursos de perfeccionamiento profesional que complementan su formación docente.

P4: Es un docente de 31 años, cuenta con 12 años de experiencia laboral y se desempeña en un establecimiento científico humanista. Actualmente, está a cargo de impartir clases en los niveles de 5° básico, 2° medio y 3° medio. No posee continuidad de estudios.

P5: Es un docente de 35 años, cuenta con 12 años de experiencia laboral y se desempeña en un establecimiento científico humanista. Actualmente, está a cargo de impartir clases en los niveles de 3° medio y 4°medio. Además, ha participado en cursos de perfeccionamiento profesional y Magíster que complementan su formación docente.

P6: Es un docente de 43 años, cuenta con 14 años de experiencia laboral y se desempeña en un establecimiento Técnico profesional. Actualmente, está a cargo de impartir clases en los niveles de 1° medio y 4° medio. Además, ha participado en cursos de perfeccionamiento profesional y Magíster que complementan su formación docente.

Para recabar los datos se diseñó una entrevista semi-estructurada. Este instrumento fue diseñado cuidadosamente para abarcar diversos factores que influyen en la ansiedad matemática reportados en la literatura de educación matemática en los últimos años (véase Cézar et al., 2020; Cordero, 2021; Artero et al., 2022; Pelegrina et al., 2020), tanto desde la perspectiva de estudiantes como de docentes. La entrevista constó de dos partes. La primera parte incluye siete preguntas con el propósito de caracterizar al docente y la segunda parte consta de trece preguntas orientadas a la obtención de información sobre las creencias que tienen los docentes sobre los factores que genera ansiedad matemática en sus estudiantes.

Para la validación del instrumento se realizó un proceso que constó de tres fases. Fase 1: Revisión de un psicólogo con el fin de revisar la coherencia de las preguntas en relación con los factores que generan ansiedad matemática. Fase 2: Validación de la entrevista por un Profesor universitario en lenguaje y comunicación, un psicólogo y un especialista en educación matemática. Fase 3: Reformulación de las preguntas de la entrevista a partir de la comparación y análisis de cada una de las observaciones de la fase 2.

Las entrevistas fueron realizadas en un lugar acordado entre el o la docente y el entrevistador (uno de los investigadores). Cada entrevista fue registrada en una grabadora de voz. Una vez realizada cada entrevista se procedió a transcribirla utilizando la aplicación *TurboScribe*[1]. Luego se realizó la validación de la transcripción por un miembro del equipo de trabajo distinto al que realizó la entrevista. Para el proceso de análisis de las transcripciones de las entrevistas, se utilizó el software NVivo 14.

Se realizaron entrevistas iniciales a cuatro docentes (P1 a P4) y, tras codificar cada una, se aplicó un proceso de comparación constante, alternando entre codificación abierta y axial. Este análisis permitió desarrollar dos categorías: Categoría conceptual teórica (**CCT)** (basadas en la literatura) y Categoría conceptual emergente (**CCE)** (creencias emergentes). Luego, se realizaron entrevistas adicionales a P5 y P6 para profundizar en las categorías emergentes, lo que llevó a revisar y enriquecer las codificaciones previas. Posteriormente, se entrevistó nuevamente a los primeros cuatro docentes para explorar sus creencias emergentes con mayor detalle.

Durante este proceso, destacó el caso de P1, quien aportó ampliamente en CCT, pero solo manifestó una creencia en CCE en el primer proceso de entrevista, además de reportar una baja incidencia de ansiedad matemática entre sus estudiantes. Este patrón único despertó el

[1] *TurboScribe* es una plataforma que utiliza inteligencia artificial para transcribir archivos de audio a contenido escrito. Disponible en https://turboscribe.ai/es/dashboard

interés del equipo de trabajo, quienes examinaron en profundidad sus creencias y experiencias para entender mejor esta diferencia.

RESULTADOS

Se identifican dos categorías principales. Por un lado, se encuentran las categorías conceptuales teóricas (CCT), que están estrechamente vinculadas con la literatura revisada en esta investigación. Por otro lado, están las categorías conceptuales emergentes (CCE), las cuales contemplan a las a creencias que no se habían considerado previamente para este estudio y que emergen desde los datos.

Entre las CCT se encontró que la subcategoría denominada como Actitud docente fue la más mencionada entre los entrevistados, lo cual indica que la percepción y disposición de los docentes son identificados como factores importantes que pueden aumentar o mitigar la ansiedad matemática en sus estudiantes. Un ejemplo de esta subcategoría es la creencia de docente autoritario en donde algunos docentes creen que una actitud autoritaria puede generar en los estudiantes una sensación de inseguridad, lo que aumenta su ansiedad matemática. Este tipo de creencia ha sido respaldado por Mogollón (2010) en sus estudios sobre el impacto de las interacciones entre profesores y estudiantes en el aula.

En cuanto a las CCE, estas corresponden a factores que no estaban contemplados inicialmente, pero que surgieron durante la codificación y análisis de las entrevistas. Destacando la subcategoría Experiencias Pasadas con una representación significativa, lo que sugiere que los docentes consideran que los antecedentes académicos del estudiante en relación con la asignatura de matemáticas influyen en su ansiedad actual. Esto refleja una visión en la que las experiencias acumuladas, tales como fracasos o experiencias de éxito en la asignatura, moldean la predisposición emocional del estudiante hacia las matemáticas. La importancia atribuida a esta subcategoría muestra una conciencia en los docentes sobre cómo el historial académico de cada estudiante puede condicionar su actitud y acciones ante situaciones de aprendizaje matemático.

Mientras que la subcategoría de Establecimiento, la cual es la menos mencionada por algunos docentes; sin embargo, aquellos que la destacaron consideran que el tipo de establecimiento juega un rol relevante en los niveles de ansiedad matemática, precisamente en establecimientos científico-humanistas, donde la asignatura de matemáticas ocupa un rol central debido a la preparación para la prueba PAES, se genera una mayor presión académica que puede incrementar este tipo de ansiedad en los estudiantes. Esto contrasta con el establecimiento técnico profesional, donde se priorizan las asignaturas de especialidades, relegando las matemáticas en un rol secundario. Por lo tanto, el enfoque que tiene el establecimiento puede marcar la diferencia entre un estudiante que tenga altos niveles de ansiedad matemática y otros que no. Este contraste destaca la influencia de los objetivos educativos de cada tipo de institución en la experiencia emocional y académica de los estudiantes. Mientras que los establecimientos científico-humanistas priorizan el logro académico en matemáticas como una medida de éxito, los técnico-profesionales enfocan sus esfuerzos en la formación para habilidades prácticas y laborales. Esto sugiere que el enfoque institucional puede marcar la diferencia en cómo los estudiantes perciben y enfrentan la asignatura.

Este hallazgo resalta una dimensión social que no había sido considerada inicialmente en los referentes teóricos revisados. No obstante, un docente de establecimiento científico humanista expresó una opinión contraria al ser consultado por esta creencia, al argumentar que el establecimiento no influiría en la ansiedad matemática, lo que hace que este punto resulte aún más interesante. Además, no se logró encontrar literatura que mencionara sobre el objetivo que tiene el establecimiento con sus estudiantes como un factor generador de ansiedad

También para profundizar el estudio en las (CCE), el equipo de trabajo seleccionó el caso del docente identificado como P1, debido a las características particulares de sus respuestas en relación con dichas categorías.

El análisis de P1 se fundamenta en los datos recopilados durante su entrevista. Desde el principio, P1 evidenció, a través de un diagnóstico en los cursos que imparte, una percepción de baja ansiedad matemática entre sus estudiantes. Este hallazgo resultó interesante, ya que P1 fue el primer docente entrevistado, y sus respuestas se apartaron de las expectativas iniciales respecto de las posibles respuestas en este ámbito.

Además, P1 destacó entre los docentes mostrando un desarrollo más equilibrado y amplio en relación con las categorías emergentes, sin una inclinación marcada hacia un factor específico como principal causa de la ansiedad matemática en sus estudiantes. Inclusive es el único que exime a los estudiantes de responsabilidad en su ansiedad matemática, argumentando que esta actitud es más una consecuencia de la ansiedad que una causa. También subrayó la importancia de establecer códigos consensuados con los estudiantes, promoviendo valores como la empatía y el respeto, en lugar de imponer reglas rígidas en el aula. Según Cordero (2021), esta estrategia de crear un ambiente relajado y seguro, junto con un enfoque abierto para abordar los temas, es eficaz para mitigar la ansiedad matemática.

Asimismo, P1 resalta la relevancia de las estrategias pedagógicas orientadas a generar comodidad en el aula, con el propósito de disminuir tensiones y, en consecuencia, reducir la ansiedad matemática, en concordancia con lo señalado por Ashcraft y Ridley (2005). Aunque no enfatiza explícitamente en el desarrollo de la responsabilidad estudiantil, sus métodos parecen fomentar un ambiente propicio para el aprendizaje, disminuyendo las barreras que dificultan el proceso de aprendizaje.

CONCLUSIONES

A lo largo del trabajo se evidenció que la relación entre las creencias de los docentes y la ansiedad matemática es compleja y multifactorial, con manifestaciones diversas dentro de la dinámica educativa. En este sentido, resulta claro que el docente no solo cumple el rol de transmisor de conocimientos, sino también es el responsable de gestionar el clima emocional en el aula, influyendo de manera directa en el bienestar y rendimiento de sus estudiantes.

A través de entrevistas y la teoría fundamentada, se logró determinar las creencias de docentes de escuelas públicas de la Ciudad de Valparaíso sobre las causas que generan ansiedad matemática en sus estudiantes. Dode se categorizaron en dos grandes grupos: CCT (categoría conceptual teoría), relacionadas con la literatura existente, y CCE (categoría conceptual emergente), surgidas de forma natural a partir de las propias experiencias de los docentes.

El estudio permitió evidenciar que las creencias de los docentes tienen un impacto determinante en la manera en que los estudiantes enfrentan la ansiedad matemática. Los hallazgos muestran que las actitudes docentes y sus interacciones con los estudiantes pueden ser tanto una fuente de estrés como una herramienta para mitigar el problema. En este sentido, los docentes no solo cumplen la función de orientar el aprendizaje, sino también como gestores del bienestar emocional en el aula.

Desde una perspectiva pedagógica, este trabajo destaca la necesidad de promover estrategias docentes que fomenten la autoconfianza de los estudiantes en matemáticas. Las prácticas basadas en la empatía, la comunicación y la valoración de logros individuales son fundamentales para generar un ambiente seguro y estimulante. Asimismo, es importante que los docentes reflexionen sobre sus propias creencias y cómo estas afectan la percepción y las experiencias de sus estudiantes.

En términos de formación docente, los resultados sugieren que los programas de estudio deberían incluir componentes enfocados en el manejo de la ansiedad matemática. Proveer a los docentes con herramientas para reconocer y abordar las emociones de sus estudiantes podría tener un impacto significativo en el rendimiento y la percepción de las matemáticas como disciplina.

Por otra parte, desde una perspectiva investigativa, si bien existen numerosos estudios sobre ansiedad matemática y creencias docentes, hay una carencia relativa de investigaciones que aborden específicamente la relación entre ambas. En este sentido, esta investigación puede influenciar un punto de partida para futuras exploraciones en este campo.

Finalmente, aunque los hallazgos son relevantes, la investigación presenta limitaciones. El enfoque en un grupo reducido de docentes en la ciudad de Valparaíso subraya la necesidad de ampliar el alcance del estudio para obtener perspectivas más representativas. Futuras investigaciones podrían examinar cómo diferentes enfoques pedagógicos y contextos educativos influyen en la ansiedad matemática, contribuyendo a la construcción de estrategias más efectivas para su mitigación y, con ello, al mejoramiento del rendimiento académico y bienestar de los estudiantes.

Referencias

Villamizar Acevedo, Gustavo, Araujo Arenas, Tammi Yulien, & Trujillo Calderón, Wenddy Jurany. (2020). Relación entre ansiedad matemática y rendimiento académico en matemáticas en estudiantes de secundaria. Ciencias Psicológicas, 14(1), e2174. Epub 27 de abril de 2020.https://doi.org/10.22235/cp.v14i1.2174

Beilock, S. L., y Maloney, E. A. (2015). Math anxiety. *Policy insights from the behavioral and brain sciences*, 2(1), 4-12. https://doi.org/10.1177/2372732215601438

Cézar, R. F., Suarez, C. A. H., Prada-Núñez, R., & Ramírez-Leal, P. (2020). Creencias y ansiedad hacia las matemáticas: un estudio comparativo entre maestros de Colombia y España. *Bolema*, 34(68), 1174-1205. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a16

Commodari, E., & La Rosa, V. L. (2021). General academic anxiety and math anxiety in primary school. The impact of math anxiety on calculation skills. *Acta Psychologica*, 220, 103413. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2021.103413

Cordero Arteaga, J. C. (2021). Conociendo la ansiedad matemática. El rol del docente: Knowing math anxiety. The role of the teacher. *Franz Tamayo - Revista De Educación*, 3(7), 260–276. https://doi.org/10.33996/franztamayo.v3i7.583

De la Espriella, R., & Restrepo, C. G. (2020). Teoría fundamentada. *Revista Colombiana de Psiquiatría*, 49(2), 127-133. https://doi.org/10.1016/j.rcp.2018.08.002

Díaz, L, Claudio, Martínez I, Patricia, Roa G, Iris, & Sanhueza J, María Gabriela. (2010). Los docentes en la sociedad actual: sus creencias y cogniciones pedagógicas respecto al proceso didáctico. *Polis (Santiago)*, 9(25), 421-436. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-65682010000100025

Gunderson, E. A., Park, D., Maloney, E. A., Beilock, S. L., & Levine, S. C. (2017). Reciprocal relations among motivational frameworks, math anxiety, and math achievement in early elementary school. *Journal of Cognition and Development*, 19(1), 21-46. https://doi.org/10.1080/15248372.2017.1421538

Martínez-Artero, R. N., Pina, J. A. L., Núñez, R. M. N., & Checa, A. N. (2022). ¿Tienen ansiedad hacia las matemáticas los futuros maestros? *PNA*, 16(3), 191-213. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.20948

Maloney, E. A., & Retanal, F. (2020). Higher math anxious people have a lower need for cognition and are less reflective in their thinking. *Acta Psychologica*, 202, 102939. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2019.102939

Mendías, J. S., Alex, I. S., & Espigares, A. M. (2022). Ansiedad matemática, rendimiento y formación de acceso en futuros maestros. Dialnet. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8316515

Mehmet, C., & Hulya, S. (2021). Factors that cause students to develop math anxiety and strategies to diminish. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 16(4), 1356-1367. https://doi.org/10.18844/cjes.v16i4.5984

Mogollón, E. (2010). Aportes de las neurociencias para el desarrollo de estrategias de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Revista Electrónica Educare, 14(2), 113-124.

Passolunghi, M. C., Cargnelutti, E., y Pellizzoni, S. (2018). The relation between cognitive and emotional factors and arithmetic problem-solving. Educational Studies in Mathematics, 100(3), 271-290. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9863-y

Pelegrina, S., Justicia-Galiano, M. J., Martín-Puga, M. E., & Linares, R. (2020). Math Anxiety and Working Memory Updating: Difficulties in Retrieving Numerical Information from Working Memory. *Frontiers In Psychology*, 11. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00669

Sampieri, R. H. (2018). *Metodología de la investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw Hill

Suárez, J. (2014). Factores que generan miedo, apatía o desinterés frente al estudio de las matemáticas [Monografía de Licenciatura no publicada]. Universidad Tecnológica de Pereira. https://repositorio.utp.edu.co/entities/publication/e1b5471e-3444-4494-b931-abdd8affe603

Weissgerber, S. C., Grünberg, C., Neufeld, L., Steppat, T., & Reinhard, M. (2022). The interplay of math anxiety and math competence for later performance. *Social Psychology Of Education*, 25(4), 977-1002. https://doi.org/10.1007/s11218-022-09700-y

Wu, S., Barth, M., Amin, H., Malcarne, V. L., y Menon, V. (2012). Math anxiety in second and third graders and its relation to mathematics achievement. Frontiers in Psychology, 3,1. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2012.00162

Ashcraft, M. H., y Ridley, K. S. (2005). Math anxiety and its cognitive consequences: A tutorial review. Handbook Of Mathematical Cognition. https://psycnet.apa.org/record/2005-04876-018

Diseño y gestión de clases que promueve la argumentación en el aula matemática: Un proceso formativo

Andrés Ortiz, Universidad Católica de la Santísima Concepción

Antonio Meneses, Magíster en Didáctica de la Matemática en el Aula. Universidad Católica de la Santísima Concepción

Abstract:

El siguiente reporte tiene como propósito caracterizar los resultados de un proceso formativo a docentes de 2° grado de un colegio particular subvencionado de la provincia de Concepción, enfocado en promover la argumentación (Conner et al., 2014) en el aula matemática. Este trabajo es parte de una tesis de magíster enmarcada en el proyecto FONDECYT 1231303 "Noticing docente para promover competencias matemáticas de modelación y argumentación mediante un acompañamiento basado en el uso de videos entre líderes intermedios y profesores". El diagnóstico realizado a las docentes participantes del proyecto evidenció su poco conocimiento al diseñar e implementar clases que promuevan la habilidad de argumentación y son estos resultados los que llevan a confeccionar un proceso formativo centrado en la gestión de la argumentación.

En el proceso formativo de las docentes se utilizó la gestión argumentativa (Solar et al., 2021), anticipación de respuestas, monitoreo y preguntas deliberadas (Smith y Stein, 2016; NCTM, 2014). Lo anterior, inserto en una metodología de trabajo docente denominada "Mejoramiento de la Experiencia Docente" (MED), desarrollado por Solar et al. (2016).

Los resultados del proceso formativo muestran que las docentes integran a su planificación las anticipaciones de respuestas, preguntas deliberadas y el monitoreo. Además, implementan una clase donde se fomenta la argumentación, lo que se evidencia a través de un monitoreo activo, dirigido a identificar las respuestas anticipadas, y la formulación de preguntas a los estudiantes que les permite confrontar diferentes posturas.

[Argumentación, Gestión argumentativa, Anticipación de respuestas, Monitoreo, Preguntas deliberadas]

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones han mostrado que fomentar la argumentación en el aula conlleva beneficios significativos para el aprendizaje efectivo de las matemáticas por parte de los estudiantes (Conner et al., 2014; Krummheuer, 2007; Ortiz, 2023). Estos estudios respaldan la idea de que la capacidad de argumentar no sólo refuerza la comprensión conceptual, sino que también contribuye al desarrollo de habilidades críticas y analíticas en los estudiantes. Los resultados obtenidos por los estudiantes en la Evaluación Diagnóstico Integral de Aprendizaje (DIA) durante los años 2022 y 2023, específicamente en las preguntas relacionadas con la habilidad de argumentar, revelaron un rendimiento por debajo de las expectativas. En ambas ediciones de la evaluación, menos del 40% de los estudiantes lograron respuestas correctas en las secciones que evaluaban esta competencia. Por ello es que el proceso formativo tuvo como objetivo aumentar el conocimiento para preparar e implementar la enseñanza que favorezca la argumentación en el aula de matemática. Lo anterior, se estableció ya que en el proceso de diagnóstico, mediante la observación de clases y entrevistas semiestructuradas se pudo establecer que las docentes participantes, entre otros aspectos: a) empleaban el monitoreo únicamente para supervisar la ejecución de las actividades sin atender a la anticipación de respuestas, pues esto tampoco es considerado; b) no promueven que los estudiantes argumenten sus respuestas para convencer a sus pares; c) en relación con la gestión de errores, se destaca una falta de planificación, anticipación e intencionalidad en el abordaje de los errores como instancia de aprendizaje; d) confusión entre explicar y argumentar, ya que consideran que cuando un estudiante explica, automáticamente está argumentando.

El proceso formativo estuvo compuesto por 5 sesiones de dos horas cada una en donde se emplearon tres de las cinco técnicas señaladas por Smith y Stein (2016): anticipación de respuestas, monitoreo y preguntas deliberadas. En relación con estas últimas, también se utilizó una adaptación de tipo de preguntas propuestas en NCTM (2014). Adicionalmente, se formó a las docentes en lo que Solar et al. (2021) 1 señala como gestión argumentativa. Lo anterior, permitió que las docentes desarrollaran un aumento del conocimiento de la habilidad argumentar como también el diseño e implementación de procesos de enseñanza que promovieran la argumentación en los estudiantes de 2°grado.

MARCO TEÓRICO

Argumentación en el aula matemática

Según la medición DIA una de las habilidades menos lograda por los estudiantes de las docentes participantes en el estudio es la argumentación. Si bien, no se puede establecer una relación causal entre el logro de los estudiantes y la enseñanza del profesor, es plausible señalar que es probable que las docentes del proyecto no comprendían a que se refiere argumentación en el currículum nacional y que eso incida en su enseñanza. Al respecto, Ayalon y Hershkowitz (2018) señalan que existe poca investigación respecto al conocimiento de los docentes para gestionar la argumentación en el aula y de las dificultades asociadas en ello. En este mismo sentido, Kauertz et al. (2012) mencionan que la relación entre el desarrollo de las competencias y la enseñanza aún es vaga.

En este estudio, utilizamos el concepto de argumentación en el aula matemática para referirnos a la situación comunicativa que se da cuando se asocia la argumentación al hecho de convencer o persuadir al otro (Ortiz, 2023). Es decir, cuando se ofrecen razones que justifiquen o refuten cierta postura, con la intención de convencer al otro sobre la validez de un hecho, se habla de argumentación en el aula matemática (Solar et al., 2021) En forma más precisa, “un intercambio es argumentativo cuando las acciones de los participantes son interpretadas como una expresión de razones para establecer o discutir la validez de una cierta posición, ya sea de manera explícita o implícita” (Solar et al., 2022). Cabe señalar que las actuales bases curriculares chilenas en matemática entienden la argumentación como una habilidad, la cual "se aplica al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos" (MINEDUC, 2018, p. 217), y se considera que su promoción favorece el aprendizaje matemático.

En el ámbito de la gestión de la argumentación en el aula, Solar et al. (2021) han señalado que, al abordarla, es imprescindible considerar la manera en que el docente administra esta habilidad. Dicha competencia profesional, está asociada al conocimiento del docente para manejar las oportunidades y limitaciones que emergen del entorno a la tarea matemática y a los estudiantes, con el propósito de fomentar la argumentación. Entre las estrategias destacadas por diversos estudios, se encuentran la oportunidad de participación, la gestión del error y las preguntas deliberadas, las que se caracterizan por:

Oportunidades de participación: El docente busca garantizar que todos los estudiantes tengan igualdad de oportunidades para contribuir e intervenir en las discusiones matemáticas. Esta interacción está vinculada a la decisión del docente de no validar ningún procedimiento o respuesta hasta que los estudiantes expresen sus diversas opiniones, planteamientos, soluciones y argumentos que los respalden, evitando así limitar la participación de los estudiantes.

Gestión del error: El docente utiliza los errores en respuestas y/o procedimientos como oportunidades de aprendizaje para el resto de los estudiantes. Esto implica abrir un debate en torno a las distintas posturas, formulando preguntas apropiadas y contra preguntas a las respuestas de los estudiantes, sin proporcionar la validación anticipada de la respuesta correcta.

Preguntas deliberadas: El profesor debe formular preguntas que desafíen, pongan en duda y estimulen el pensamiento de los estudiantes. Estas preguntas deliberadas tienen la finalidad de mantener la discusión abierta y dirigir el enfoque de la conversación hacia los aspectos relevantes.

La tarea de desarrollar clases que promuevan la argumentación recae claramente en el docente, ya que es su responsabilidad planificar y gestionar la argumentación en el aula. En el contexto de la promoción de la habilidad de argumentar en el aula, Solar y Deulofeu (2016) identifican tres condiciones cruciales, de las cuales la primera, que tiene relación con las estrategias comunicativas, fue tratada en el apartado anterior, las otras dos se detallan a continuación:

Tareas Matemáticas: Se deben preferir tareas abiertas que permitan múltiples enfoques y no necesariamente tengan una única respuesta correcta. Estas tareas promueven diferentes puntos de vista y facilitan el debate entre los estudiantes, lo que propicia la argumentación. Las tareas cerradas, especialmente aquellas que promueven el uso de algoritmos estándar, pueden dificultar la aparición de la argumentación al limitar las posibilidades de enfoques alternativos y discusión entre los estudiantes.

Plan de Clase: No es suficiente asignar una tarea matemática abierta; el docente debe gestionar la clase de manera que conduzca hacia el conflicto. Cuando surja el conflicto, el docente debe intervenir con acciones y preguntas que fomenten el desarrollo de la argumentación y la resolución de problemas.

Gestión de la enseñanza

Como se ha destacado en secciones previas de este informe, diversos autores han señalado que el proceso de aprendizaje de las matemáticas va más allá de una simple transmisión de conocimientos, implicando, en cambio, la construcción activa de estos mediante discusiones productivas. En este contexto, Smith y Stein (2016) han identificado y propuesto cinco prácticas que fomentan la generación de discusiones productivas en el ámbito matemático, las cuales son: anticipación, monitoreo, selección, secuenciación y conexión. El propósito de estas es brindar apoyo al docente en la formulación de respuestas que faciliten la comprensión de los estudiantes y buscan dotar al profesor de un cierto control sobre el desarrollo de la discusión, permitiéndole guiar el proceso de manera más efectiva. Al hacerlo, se propicia un entorno donde la clase avanza de manera colectiva, y se otorga al docente la capacidad de tomar decisiones de manera más deliberada y reflexiva. Para los fines de esta intervención y dadas las limitaciones de tiempo establecidas establecidas en etapas anteriores a la implementación del proceso formativo, se optó por solo abordar dos de las cinco prácticas, las cuales son anticipación y monitoreo. La práctica de anticipación se relaciona estrechamente con las previsiones que el docente realiza con respecto a las respuestas/procedimientos que los estudiantes podrían emplear al abordar una tarea matemática específica. Otra práctica abordada en la intervención es el monitoreo, donde se establece que el enfoque radica en prestar atención al momento en el cual los estudiantes están llevando a cabo la tarea, así como a los procedimientos o estrategias empleadas y a las respuestas ofrecidas por los alumnos.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

La investigación se lleva a cabo en un establecimiento educativo particular subvencionado ubicado en la provincia de Concepción. Las docentes que participaron en el proceso formativo lo hicieron de manera voluntaria y cuentan con una experiencia profesional promedio de 10 años en el sistema educativo y poseen una especialización en el ámbito del lenguaje. Además, dos de ellas han completado la evaluación docente, alcanzando niveles de desempeño Avanzado y Experto 1. Cabe destacar que ninguna de las docentes posee estudios de especialización relacionados con la asignatura de matemáticas y todas realizan docencia en 2° grado.

Proceso formativo de las profesoras participantes

La implementación del proceso formativo se llevó a cabo en cinco sesiones de trabajo, cada una de ellas con una asignación temporal de 120 minutos. Las sesiones del proceso formativo, fueron trabajadas con actividades planificadas con sus respectivos indicadores de logro y medios de verificación de logro. A continuación, se presenta un resumen de las sesiones:

6. Sesión1_Anticipación de respuestas para promover la argumentación en el aula. Esta sesión tiene como objetivo que los docentes anticipen respuestas y procedimientos de los estudiantes. Para esto se les presenta una tarea matemática argumentativa reportada por Solar et al. (2021).
7. Sesión2_Reconocer tipos de preguntas deliberadas para promover la discusión en el aula matemática. El propósito de la sesión es identificar los distintos tipos de preguntas deliberadas con el fin de fomentar la argumentación y reflexionar sobre los tipos de preguntas que emplean en sus clases. La actividad utilizó la transcripción de un episodio, el cual fue extraído de un caso reportado por Solar et al. (2021).
8. Sesión3_Reconocer características del monitoreo y planificar la gestión argumentativa de una tarea de argumentación. En el marco de esta sesión, el objetivo es que las docentes desarrollen la capacidad de reconocer las características esenciales del monitoreo y sean capaces de planificar la gestión argumentativa de una tarea matemática. Este proceso implica la creación de preguntas deliberadas basadas en las respuestas proporcionadas por los estudiantes a la tarea matemática de la sesión uno, las cuales son extraídas del trabajo por Solar et al. (2021).

Sesión4_Planificación de una clase que promueva la argumentación. Para llevar a cabo la planificación de las sesiones, se adoptará un enfoque estructurado basado en los parámetros establecidos en sesiones anteriores, tomando como referencia el modelo de diseño propuesto por Solar y Deulofeu (2016). La planificación incluye la anticipación de respuestas y procedimientos, la formulación de preguntas deliberadas, y el monitoreo activo durante la sesión para gestionar la confrontación de posturas e ideas de los estudiantes. En relación a la tarea matemática seleccionada para esta planificación, corresponde a una adaptación de la tarea utilizada en la sesión inaugural y fue entregada a las docentes para que ellas la utilizaran en su planificación. Esta tarea ha sido diseñada específicamente para fomentar la argumentación y la participación activa de los estudiantes.

Sesión5_Implementación de la clase diseñada. En el transcurso de esta sesión, uno de los docentes pone en práctica la clase planificada durante la sesión 4. La clase mencionada se lleva a cabo en un segundo básico, con una matrícula total de 40 estudiantes. Sin embargo, en el día de la implementación, solo 30 de ellos estuvieron presentes.

RESULTADOS

El análisis centrado en el diseño e implementación de la clase revela que las docentes han integrado de manera efectiva los elementos abordados durante el proceso formativo tales como a) anticipación de respuestas; b) el monitoreo; c) preguntas deliberadas. Durante la etapa de planificación de la clase, las docentes demostraron una mayor capacidad para anticipar las posibles respuestas de los estudiantes, lo que a su vez permitió que las docentes pudieran elaborar preguntas deliberadas que promovieron discusiones matemáticas productivas. Durante la implementación de la clase planificada en conjunto por las docentes, se utilizaron de manera efectiva el monitoreo activo de las respuestas anticipadas en la planificación, por otra parte, se utilizan las preguntas deliberadas para guiar la reflexión y discusiones productivas de los estudiantes.

CONCLUSIÓN

La planificación y la implementación de clases basadas en un modelo estructurado han demostrado ser claves para promover la argumentación en el aula de matemáticas. Este enfoque permitió a los docentes seleccionar tareas pertinentes y formular preguntas deliberadas que incentivaron la participación activa de los estudiantes, creando un entorno de diálogo constructivo. Además, la anticipación de respuestas y el monitoreo activo de las contribuciones matemáticas de los estudiantes facilitaron un aprendizaje colaborativo y reflexivo.

REFERENCIAS

Ayalon, M., & Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *49*, 163-173. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010 .

Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics, 86*(3), 401–429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60–82. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.02.001.

Kauertz, A., Newmann, K., & Hearting, H. (2012). Competence in science education. En Fraser, et al. (Eds.), *Second International Handbook of Science Education* (pp. 711-721). Springer.

MINEDUC (2018). Bases Curriculares Primero a Sexto Básico. Ministerio de Educación de Chile. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all*. National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all*. National Council of Teachers of Mathematics.

Ortiz, A. (2023). Acciones docentes que promueven la argumentación en una clase de modelación: un caso de estudio en secundaria. UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 19(67).Smith, M. S., & Stein, M. K. (2016). *5 prácticas para orquestar discusiones productivas en Matemáticas*. Corwin.

Solar, H., Goizueta, M., & Montaner, S. H. (2022). Emergencia de patrones de interacción al promover la argumentación en el aula de matemáticas. *Educación matemática*, *34*(3), 132-162.

Solar, H., Ortiz, A., & Ulloa, R. (2016). MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia. Estudios Pedagógicos (Valdivia), 42(4), 281-298.

Solar, H., Ortiz, A., Deulofeu, J., & Ulloa, J. (2021). Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52(7), 977-1005. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1733686.

Solar, H. y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30, 1092-1112.*

MATEMÁTICAS CON PERSPECTIVA DE GÉNERO EN EDUCACIÓN PARVULARIA: RETOS Y EXPERIENCIAS

Ana Milena Mujica-Stach, Universidad de Los Lagos

María José Bergma Álvarez, Universidad de Los Lagos

Luis Marcelo Casis Raposo, Universidad de Los Lagos

Resumen:

En el contexto de la globalización, la unificación de criterios en políticas educativas es fundamental para garantizar la equidad de género en todos los niveles del sistema educativo. La UNESCO (2019), a través de su estrategia para la igualdad de género en y a través de la *educación (2019-2025), subraya la importancia de abordar el acceso, contenido, entorno, métodos de enseñanza-aprendizaje, logros educativos y perspectivas de desarrollo desde una perspectiva de género. La Región de Los Lagos, Chile, enfrenta el reto de integrar esta perspectiva en la enseñanza de las matemáticas en educación parvularia. La investigación se centra en explorar las estrategias didácticas empleadas por educadoras de párvulos que trabajan en instituciones educativas de la Región de Los Lagos. La metodología es cualitativa y exploratoria, se entrevistó a 7 educadoras de párvulos tituladas de la Universidad de Los Lagos. Los resultados revelan un reconocimiento de la importancia de integrar la perspectiva de género en la enseñanza de las matemáticas desde una temprana edad, enfatizando la igualdad de oportunidades y trato entre niños y niñas. Las estrategias que resultan efectivas para su logro incluyen el uso de juegos digitales, la exploración y el juego libre, así como la adaptación de actividades, según las necesidades individuales. Sin embargo, persisten desafíos para la implementación de esas estrategias, tales como la resistencia al cambio, por parte de algunas educadoras, y la falta de formación sobre género y educación inclusiva.*

Palabras clave: género, matemáticas, educación parvularia, igualdad, docente

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la igualdad de género en la educación ha emergido como una prioridad global, reconociendo la necesidad de eliminar las disparidades que afectan a estudiantes en su desarrollo académico. La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2019), mediante la estrategia de la UNESCO para la igualdad de género en y a través de la educación (2019-2025), establece esa necesidad, enfatizando la importancia de abordar aspectos como el acceso, el contenido, el entorno, los métodos de enseñanza-aprendizaje, los logros educativos y las perspectivas de desarrollo personal y profesional desde una perspectiva de género.

En este sentido, surge la necesidad de cambiar el currículo educativo para formar ciudadanos que se comprometan a respetar los derechos humanos y que sean capaces de participar en procesos de transformación social. Chile, no es ajena a esta situación y se encuentra ante el desafío de abordar la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva de género en el nivel de Educación Parvularia.

La presente ponencia se centra en explorar las estrategias didácticas empleadas por educadoras de párvulos que trabajan en instituciones educativas de la Región de Los Lagos. Asimismo, se busca sensibilizar a las educadoras sobre la importancia de abordar las desigualdades de género desde la infancia temprana, promoviendo un enfoque de enseñanza que garantice imparcialidad en el trato y brinde las mismas oportunidades y condiciones a todas las niñas y niños, independientemente de su género.

ELEMENTOS TEÓRICOS O CONCEPTUALES

De acuerdo con Celi et al. (2021), la enseñanza de las matemáticas no solo implica la adquisición de habilidades numéricas y de resolución de problemas, sino también el fomento del pensamiento crítico, la creatividad y la capacidad para desenvolverse en un mundo cada vez más tecnológico. Sin embargo, las personas experimentan diferentes experiencias en relación con las matemáticas desde sus primeros años de escolaridad, lo que puede influir en su desarrollo académico y personal.

Según Lima et al. (2020), adoptar un enfoque de género en la enseñanza de las matemáticas desde una edad temprana puede ayudar a contrarrestar estereotipos de género y promover una participación equitativa en el aprendizaje. Este enfoque no solo se trata de enseñar matemáticas, sino también de promover una educación inclusiva que reconozca y valore la diversidad de género en el aula.

Dentro del marco curricular de la Educación Parvularia, el empleo de conceptos matemáticos contribuye al desarrollo cognitivo de los niños y las niñas al promover la comprensión del entorno que los rodea (Subsecretaría de Educación Parvularia, 2019). Sin embargo, es importante destacar que el proceso de enseñanza de las matemáticas no debe ser ajeno a las dinámicas de género presentes en la sociedad.

De acuerdo con Martínez y Álvarez (2018), la enseñanza de las matemáticas con perspectiva de género implica ir más allá de la simple transmisión de conocimientos numéricos. Se trata de crear un ambiente educativo que reconozca y respete las diferencias de género, al tiempo que promueve la equidad y la igualdad de oportunidades en el aprendizaje matemático, lo cual implica utilizar estrategias pedagógicas que desafíen los estereotipos de género y fomenten la participación activa de todas las niñas y niños en el proceso de aprendizaje.

Desde esta perspectiva, el proceso matemático se convierte en una herramienta poderosa para fomentar la curiosidad intelectual, el pensamiento autónomo y la resolución de problemas en los niños y las niñas (Lima et al., 2020). Según Harris (2017), las habilidades matemáticas adquiridas desde una edad temprana son fundamentales para el desarrollo cognitivo y el éxito académico a lo largo de la vida

El enfoque de género en la enseñanza de las matemáticas también puede contribuir a la construcción de una sociedad más igualitaria y justa. Según Valenzuela y Carrasco (2019), al promover una educación matemática inclusiva, se están sentando las bases para una sociedad más equitativa en la que todas las personas, independientemente de su género, tengan las mismas oportunidades de desarrollo y éxito.

Es importante resaltar que la promoción del pensamiento matemático con perspectiva de género en la Educación Parvularia no solo impulsa el desarrollo cognitivo de los niños y las niñas, sino que también contribuye a la construcción de una sociedad más igualitaria y justa. Por lo mismo, es fundamental que las educadoras desarrollen competencias para diseñar estrategias de enseñanza que reconozcan y valoren la diversidad de género en el aula, garantizando así una educación equitativa y de calidad para todos los niños y las niñas. Teniendo presente que para las y el autor una estrategia didáctica específicamente en la primera infancia, es un conjunto planificado de actividades, métodos y recursos que un docente utiliza para facilitar el aprendizaje de niñas y niños.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

El enfoque metodológico cualitativo se escogió para este estudio debido a su capacidad para recopilar características y rasgos significativos de un tema específico (Espinoza, 2020). En este caso, se exploraron las experiencias y prácticas pedagógicas de siete egresadas de la carrera de Educación Parvularia de la Universidad de Los Lagos.

Este estudio se realizó en diversos establecimientos educativos de la región de Los Lagos, incluyendo Jardines Infantiles de la JUNJI (Junta Nacional de Jardines Infantiles), VTF (Vía Transferencia de Fondos), colegios subvencionados y escuelas municipales. Las participantes del estudio fueron siete educadoras de párvulos, seleccionadas según criterios específicos, como ser egresadas de la carrera de Educación Parvularia de la Universidad de Los Lagos entre 2022 y 2023. Esta selección intencional buscó maximizar la diversidad de experiencias y contextos educativos. Para la recolección de datos se implementó la técnica de la entrevista. El instrumento utilizado consistió en una pauta de entrevista semiestructurada. Los datos recopilados fueron analizados utilizando técnicas de codificación y categorización, lo que permitió identificar patrones y temas emergentes. Se aseguró el consentimiento informado de las participantes, la confidencialidad de los datos y el respeto a la integridad de todas las personas involucradas.

RESULTADOS

Los hallazgos permiten abordar la problemática de manera integral, al examinar las respuestas proporcionadas por las educadoras de párvulos en relación con la integración de una perspectiva de género en la enseñanza de las matemáticas en la educación parvularia, se destacan varios aspectos relevantes. Tal como lo señala E5 mencionó que "es importante que las actividades no solo sean inclusivas, sino también diseñadas para fomentar la colaboración y el respeto mutuo".

Se puede señalar que, existe un reconocimiento generalizado de la importancia de incorporar esta perspectiva desde edades tempranas, lo cual refleja una sensibilidad hacia la equidad de género en el ámbito educativo. Este reconocimiento sugiere una predisposición positiva hacia la promoción de la igualdad de oportunidades y trato entre niñas y niños desde el inicio de su proceso educativo.

De la misma forma, una de las áreas que más se enfatiza en las respuestas es la necesidad de evitar estereotipos de género al seleccionar materiales y diseñar actividades. Las educadoras reconocen la importancia de ofrecer a todos las niñas y niños las mismas oportunidades de participación y acceso a recursos, independientemente de su género. Esta preocupación por romper con los roles tradicionales de género en el aula refleja un compromiso con la equidad y la inclusión en el proceso educativo.

Asimismo, se evidencia una preocupación genuina por adaptar las estrategias pedagógicas para atender las diferencias individuales y garantizar la participación activa de todos las niñas y niños en el aula. Las educadoras reconocen la diversidad de ritmos y estilos de aprendizaje, lo que sugiere una disposición a personalizar la enseñanza con el fin de satisfacer las necesidades específicas de cada estudiante. Esta adaptación de las estrategias pedagógicas es fundamental para crear un entorno inclusivo que promueva el éxito académico de todos las niñas y niños, independientemente de su género o de sus habilidades individuales.

No obstante, a pesar del reconocimiento de la importancia de integrar una perspectiva de género en la enseñanza de las matemáticas, se identifican desafíos persistentes en su implementación efectiva. Entre dichos desafíos se encuentran la resistencia al cambio por parte de algunas educadoras, y la falta de conocimientos y formación tanto en género como en educación inclusiva. Tal resistencia al cambio puede deberse a una falta de conciencia sobre la importancia de abordar las cuestiones de género en el ámbito educativo, así como a la ausencia de capacitación y apoyo para implementar con éxito nuevas prácticas pedagógicas.

De esta manera, se resalta la necesidad de desarrollar más recursos y estrategias específicas para abordar estas temáticas en el contexto de la educación parvularia. Las educadoras reconocen que, si bien hay un interés y una voluntad de integrar una perspectiva de género en la enseñanza de las matemáticas, se necesitan más herramientas y orientaciones prácticas para hacerlo de manera efectiva. Esto sugiere una oportunidad para el desarrollo profesional continuo y la colaboración entre educadoras y expertos en género y educación inclusiva para mejorar la calidad de la enseñanza en este ámbito.

CONCLUSIONES

Dentro de este marco, el reconocimiento de la importancia de la perspectiva de género: las educadoras de párvulos reconocen lo trascendente que es integrar una perspectiva de género en la enseñanza de las matemáticas desde la educación parvularia. Esa admisión refleja una conciencia sobre la necesidad de promover la igualdad de oportunidades y trato entre niños y niñas desde una edad temprana.

En ese mismo orden de ideas, se identificaron diversas estrategias pedagógicas que promueven la participación equitativa de los niños y niñas en actividades matemáticas. Entre esas estrategias se encuentran el uso de juegos digitales, la exploración, el juego libre y la adaptación de actividades según las necesidades individuales, lo que sugiere un enfoque inclusivo y diversificado en la enseñanza de las matemáticas.

A pesar del reconocimiento de la importancia de la perspectiva de género, existen desafíos persistentes para su implementación efectiva. Entre esos desafíos se destacan: la resistencia al cambio por parte de algunas educadoras; la falta de formación en género y educación inclusiva; y, finalmente, la necesidad de desarrollar más recursos y estrategias específicas para abordar estas temáticas.

REFERENCIAS

Celi Rojas, S. Z., Sánchez, V. C., Quilca Terán, M. S., & Paladines Benítez, M. del C. (2021). Estrategias didácticas para el desarrollo del pensamiento lógico matemático en niños de educación inicial. Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación, 5(19), 826-842.

Espinoza Freire, E. (2020). La investigación cualitativa, una herramienta ética en el ámbito pedagógico. Conrado, 16(75), 103-110.

Harris, J. (2017). Early Mathematical Development: Exploring the Impact of Gender and Socioeconomic Status. Journal of Early Childhood Education, 39(3), 187-195.

Limas, L., Novoa, P., Uribe, Y., Ramírez, P., y Cancino, R. (2020). Competencias matemáticas en preescolares de cinco años según género. Eduser, 7(1), 41–48.

Martínez, C., y Álvarez, E. (2018). Enseñanza de las matemáticas con perspectiva de género: Desafíos y propuestas. Revista Internacional de Educación Matemática, 5(2), 30-45.

Subsecretaría de Educación Parvularia (2019). Marco para la Buena Enseñanza de la Educación Parvularia. Gobierno de Chile.

UNESCO (2019). Del acceso al empoderamiento: estrategia de la UNESCO para la igualdad de género en y a través de la educación 2019-2025. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000371127

Valenzuela, M., y Carrasco, L. (2019). Educación matemática inclusiva: Promoviendo una sociedad equitativa. Revista de Educación e Inclusión, 13(1), 78-92.

TAREAS EN ENTORNOS LÚDICOS Y UNPLUGGED QUE PROMUEVEN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESTADÍSTICO Y COMPUTACIONAL DESDE LOS PRIMEROS AÑOS

Brahiam Ramírez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Patricio Santibáñez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Alejandra Mondaca-Saavedra, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Soledad Estrella, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Raimundo Olfos, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Marcela Parraguez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

El aprendizaje basado en el juego y la narración de cuentos es una herramienta poderosa para motivar a los niños y niñas a adquirir vocabulario y nuevos conceptos. Con el objetivo de desarrollar el pensamiento computacional y considerando conceptos y prácticas estadísticas desde edades tempranas, se diseñó una secuencia de experiencias lúdicas desconectadas dirigida a estudiantes de grados K-2. Este trabajo presenta un análisis de las características de las tareas diseñadas que —utilizando materiales concretos y contextos lúdicos—, promueven el conocimiento y respeto por animales autóctonos chilenos, en un entorno positivo de relaciones de familia y naturaleza. Este reporte describe características clave de tales tareas para involucrar a los niños y niñas en la resolución de problemas, promoviendo el desarrollo del pensamiento computacional al crear instrucciones e identificar patrones. Especialmente, se integran conceptos matemáticos, estadísticos y computacionales en escenarios lúdicos donde los niños y niñas deben tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, desde un enfoque que valora dar sentido a descubrir, comunicar, razonar y dar razones sobre las relaciones entre datos desde los primeros grados.

[Pensamiento estadístico, Pensamiento computacional, ludicidad, resolución de problemas]

INTRODUCCIÓN

El pensamiento computacional (PC) propio del siglo XXI (Cf. Haseski et al., 2018) implica la resolución de problemas, el diseño de sistemas y la comprensión del comportamiento humano yendo más allá de realizar programación (Wing, 2006). El mismo foco de actualidad se ha propuesto para al pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999), especialmente en la era del Big Data, la Ciencia de Datos y la Inteligencia Artificial, en la cual la capacidad de interpretar, analizar y tomar decisiones informadas se ha vuelto crucial. El pensamiento estadístico es fundamental para responder preguntas no determinísticas, identificar patrones, hacer inferencias basadas en los datos, evaluar críticamente los resultados, y comunicar hallazgos y respuestas a problemas que afectan a la sociedad.

Ambos pensamientos son abordados por el marco curricular, del cual se identifican algunos objetivos de aprendizaje (OA) de las Bases Curriculares vigentes (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2018a, 2018b), incluyendo algunos del PC de la nueva propuesta curricular (Mineduc, 2024). La Tabla 1 integra los OA para el desarrollo del PC y, de la Estadística y Probabilidad desde Kínder al grado 2 (K-2).

Tabla 1

Objetivos de aprendizaje para el Pensamiento Computacional y la Estadística

Nivel	Pensamiento Computacional	Estadística
Kínder	OA3: Describir la posición de objetos y personas respecto de un punto u objeto de referencia, empleando conceptos de ubicación en situaciones lúdicas (MINEDUC, 2018a, p. 99). OA12: Comunicar el proceso desarrollado en la resolución de problemas concretos, identificando la pregunta, acciones y posibles respuestas (MINEDUC, 2018a, p. 99).	OA2: Experimentar con diversos objetos estableciendo relaciones al clasificar por dos o tres atributos a la vez y seriar por altura, ancho, longitud o capacidad para contener. OA5: Distinguir una variedad progresivamente más amplia de animales y plantas, respecto a sus características. OA6: Comprender contenidos explícitos de textos literarios y no literarios, describiendo información y realizando progresivamente inferencias y predicciones. OA11: Emplear medidas no estandarizadas, para determinar longitud de objetos, registrando datos, en diversas situaciones lúdicas o actividades cotidianas.
Grado 1	OA10: Crear secuencias de instrucciones simples que permitan explorar la posición relativa de objetos en relación consigo mismos y otros referentes, explicándolas para ser ejecutadas por otros, de manera precisa y rigurosa (MINEDUC, 2024, p. 60). OA13: Describir la posición de objetos y personas en relación a sí mismos y a otros objetos y personas, usando un lenguaje común (como derecha e izquierda) (MINEDUC, 2018b, p. 228).	OA19: Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas. OA20: Construir, leer e interpretar pictogramas. Nota: todos los OA desde MINEDUC (2018a, 2018b)
Grado 2	OA10: Crear secuencias de instrucciones simples que permitan explorar la posición relativa de objetos en relación consigo mismos y otros referentes, identificando relaciones de acción y causa, explicándolas para ser ejecutadas por otros, de manera precisa y rigurosa (MINEDUC, 2024, p. 61).	OA20: Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas. OA22: Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple.

Asimismo, se consideraron algunos conceptos y prácticas estadísticas posibles de desarrollar en edades escolares tempranas. ***Datos***, entendidos como observaciones o medidas obtenidas de alguna característica o fenómeno en un contexto, los cuales recopilan y organizan los estudiantes para responder preguntas (Estrella, 2018); ***Variabilidad,*** son las diferencias que se observan en los datos recolectados, reconociendo que no todos son iguales, pues hay variaciones usuales y esperadas en conjuntos de datos (Estrella, 2018); ***Inferencias estadísticas,*** es el proceso de sacar conclusiones sobre un grupo más amplio basándose en una muestra de datos y las tendencias o patrones observados en ella (Estrella et al., 2023); ***Preguntas estadísticas,*** son aquellas no determinísticas que anticipan la variabilidad en los datos (requiriendo su recolección y análisis) para ser respondidas. Estas preguntas guían la investigación, desde la recolección de datos hasta la interpretación de los resultados (Arnold y Franklin, 2021); ***Clasificación y categorías de la variable:*** Es el proceso de organizar los datos en clases o categorías según ciertas características. Los estudiantes aprenden a clasificar datos de acuerdo con las categorías que provienen de la variable en estudio, lo que ayuda a ver tendencias y patrones, y hacer comparaciones (Estrella et al., 2018); ***Visualización de datos:*** uso de representaciones gráficas y tabulares para organizar datos y facilitar su comprensión, análisis e interpretación, al identificar patrones, tendencias, y variabilidad en los datos, lo que ayuda a formular y responder preguntas estadísticas, a comparar diferentes categorías o variables, y llegar a hacer inferencias basada en la evidencia de los datos.

RELACIONES ENTRE EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL Y PENSAMIENTO ESTADÍSTICO

La integración del pensamiento computacional y el estadístico permite abordar problemas del mundo real de manera más efectiva al combinar habilidades de resolución de problemas, diseño de algoritmos y análisis de datos. Grover y Pea (2013) identificaron, entre varios elementos de PC, la generalización de patrones, que podemos relacionar con la estadística reconocida como la *ciencia de los patrones*. Desde la estadística descriptiva, el foco se encuentra en el análisis, la identificación y la interpretación de patrones en datos; y desde la Inferencia Estadística, al generalizar más allá de los datos desde los patrones identificados en las muestras (Estrella et al., 2023).

El trabajo con datos involucra el "manejo de variables" (Rich et al., 2020a), siendo el mecanismo para guardar y organizar los datos, en una trayectoria de cuatro niveles: usar datos, almacenar datos, usar variables y crear variables. Las tareas diseñadas en esta investigación abordan los niveles: *usar datos* —tener objetos mentales que representan piezas generales de información y se puede operar con ellas imitando cómo un programa podría usar los datos, manipulándolos, pero no etiquetarlos ni almacenarlos—; y *almacenar datos* —situar mentalmente objetos que representan datos en las variables y ver los datos almacenados en ellas, además rastrear instrucciones que implican la manipulación de datos—.

Considerando la importancia de identificar y comprender conceptos clave para el aprendizaje de estudiantes, en este reporte se evidencia la primera parte de un proyecto de investigación sobre el pensamiento estadístico y computacional en niveles tempranos de escolaridad, identificando características clave en el diseño de tareas unpplugged que conforman una secuencia de aprendizaje propuesta para integrar ambos pensamientos. Esta investigación situada en los niveles educativos de K-2 busca dar respuesta a ¿Qué conceptos y prácticas de estadística, propician tareas diseñadas para desarrollar el pensamiento computacional en los primeros niveles escolares?

METODOLOGÍA

Se consideraron cuatro fases en la investigación: planteos iniciales y diseño curricular entre cuatro educadores matemáticos, dos mujeres y dos hombres; pruebas pilotos y rediseño de tareas; Estudio de Clase (Isoda et al., 2011) con dos profesoras de una escuela pública de Viña del Mar, implementando las tareas con estudiantes de primer y segundo grado; y, evaluación y ajustes.

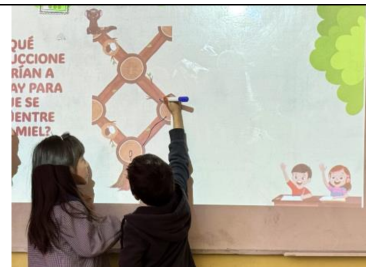
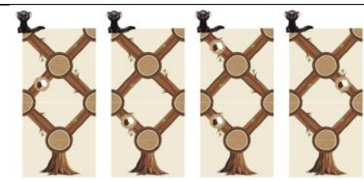
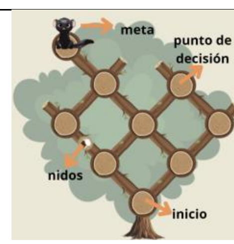
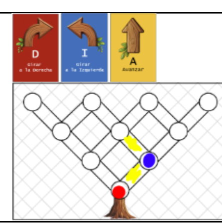
La fase reportada en este escrito es la primera (incorporando evidencia de la fase tres), la cual comenzó con una revisión exhaustiva de la literatura existente, mapeo de conceptos del PC, y de metodologías de enseñanza sobre este pensamiento con tareas sin computadoras (unplugged). Luego, se identificaron los contenidos clave, seleccionando los conceptos fundamentales de computación, matemáticas y estadística para los primeros niveles escolares, atendiendo al currículo escolar. Posteriormente, se diseñaron y evaluaron por consenso, en ciclos de constante mejora, el contenido conceptual y procedimental de las tareas, junto a la elaboración de imágenes (algunas realizadas con inteligencia artificial).

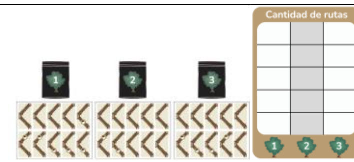
Las tareas se desarrollaron en torno al cuento "¡Por Aquí, Por Allá!", creado en la Fase 1, el cual narra la historia de una mamá quique (grisón menor) que quiere encontrar a su cría que sube a la cima de los árboles. Los estudiantes iniciaron instruyendo a sus compañeros para llegar a un objetivo, introduciendo nociones de derecha, izquierda y avanzar; luego, utilizaron material concreto en un tablero de juego con el que pudieron armar árboles y simular movimientos de la mamá quique; tomaron decisiones en cada bifurcación del árbol; replicaron árboles; identificaron patrones y los representaron; utilizaron tarjetas de instrucciones para ejecutar acciones; y, clasificaron y visualizaron los datos.

En la tabla 2, se presentan algunos componentes del PC (Rich et al., 2017, 2019, 2020b) que se integran con conceptos y prácticas propias de la Estadística. En la columna de las tareas, el color celeste señala el rol de usuario de datos, y el color verde, al rol de almacenador de datos, que, paulatina y progresivamente en la escolaridad, decantaría en interpretador e implementador de variable (Cf. Rich et al., 2020a).

Tabla 2

Características de las tareas que desarrollan el Pensamiento Computacional de K-2 en un nivel principiante con ejemplos integradores

Pensamiento Computacional	Nivel Principiante	Tareas de la secuencia	Conceptos y prácticas estadísticas integradas con uso y almacenamiento de datos
Secuencialidad (capacidad de procesar información y ejecutar acciones en un orden lógico y progresivo)	1. Es más probable que con instrucciones precisas se produzca el resultado deseado, que con instrucciones generales. 2. La precisión y la completitud son importantes cuando se escriben instrucciones en forma anticipada.	- Instruir a un compañero/a ir de un lugar a otro de la sala. - Escalada de la mamá quique paso a paso. - Hacer uso de tarjetas de instrucciones para indicar decisiones. - Rutas de cada árbol.	 **Usar datos.** Datos en contexto, y preguntas estadísticas.
Repeticiones (capacidad de ejecutar un conjunto de instrucciones varias veces, para automatizar y optimizar tareas, y manejar grandes cantidades de datos)	1. Para lograr algunas tareas, hay que repetir ciertas acciones. 2. Instrucciones cómo “avanza 3 veces” hacen lo mismo que “avanza, avanza, avanza”.	- Bifurcaciones en que decide la mamá quique - Subidas de árboles - Rutas de subidas con instrucciones	 **Usar datos.** Datos en contexto, variabilidad, inferencia estadística, y preguntas estadísticas.
Condiciones (capacidad de evaluar una expresión lógica y tomar diferentes caminos de ejecución basándose en el resultado de evaluaciones previas)	1. Las acciones a menudo son el resultado de causas específicas. 2. Un condicional conecta una condición con un resultado u acción. 3. Cada uno de los dos estados de una condición puede tener su propia acción.	- Rutas con metas definidas - Rutas con y sin nidos en ramas - Combinación de rutas con instrucciones	 **Usar datos.** Datos en contexto, variabilidad, inferencia estadística, y preguntas estadísticas.
Depuración (proceso de identificar, localizar y corregir errores en un algoritmo, contemplando la	1. El refinamiento iterativo puede ayudar a corregir errores.	- Detectar patrones en los datos desde fichas mapas en parejas	

comprensión del origen del error y su prevención)		- Replicar y evaluar patrones en un tablero.	**Almacenar datos.** Datos, variabilidad, la visualización de datos.
Patrones (capacidad de observar e identificar similitudes o regularidades en diferentes situaciones o problemas)	Observar similitudes y patrones entre cosas.	- Contabilizar rutas desde muestras de árboles - Identificar patrones en un tablero [con árboles].	 **Almacenar datos.** Clasificación de los datos en categorías de la variable, y visualización de datos.

Nota. Además, se identificaron dos aspectos pertenecientes a nivel intermedio para secuencialidad (1a) Distintos conjuntos de instrucciones pueden producir el mismo resultado y (1b) El orden en que se ejecutan las instrucciones puede afectar el resultado; y para depuración (2) Pequeños errores pueden crear diferencias entre el resultado esperado y el que se obtiene (Cf. Rich et al., 2017, 2019).

CONCLUSIONES

La investigación reportada buscaba respuestas a qué conceptos y prácticas de estadística, propician tareas diseñadas para desarrollar el pensamiento computacional en los primeros niveles escolares. Desde el diseño de las tareas presentadas, los componentes del PC se relacionaron con conceptos y prácticas de la Estadística. A modo de ejemplo, la depuración en el rol de almacenar datos, permitió desde un enfoque estadístico la revisión y corrección de errores en la recolección y análisis de datos, cuya práctica asociada a depurar o refinar iterativamente, es relevada mediante la tarea "fichas mapas en parejas" que requiere detectar y corregir errores, lo que es esencial en la validación y limpieza de datos en un ciclo investigativo. Otro ejemplo fue la identificación de patrones, también en el rol de almacenamiento de datos, que en Estadística se asocia a hacer inferencias; cuya práctica asociada es observar similitudes y patrones al "contabilizar tipos de caminos según número de nidos en árboles" usando categorías o "identificar patrones en un tablero [con árboles]" que permite la identificación de patrones al visualizar conjuntos de datos, práctica estadística propia de procesos de análisis e interpretación.

Las tareas han sido diseñadas para ayudar a los estudiantes de K-2 a desarrollar habilidades clave en el PC, integrando en su comprensión, conceptos y prácticas estadísticas como los datos en contexto, variabilidad, inferencia estadística, preguntas estadísticas, clasificación de los datos en categorías de la variable, y visualización de datos, las que son esenciales en el desarrollo de su razonamiento estadístico, desde un enfoque que valora dar sentido a descubrir, comunicar, razonar y dar razones sobre las relaciones entre datos desde los primeros grados.

AGRADECIMIENTOS. ANID/FONDEF IT23i0067; VINCI 039.493/2024; ANID/ Doctorado Nacional 21241378 / 21231116 / 21241086.

REREFENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnold, P., y Franklin, C. (2021). What makes a good statistical question?. *Journal of Statistics and Data Science Education, 29*(1), 122–130.

Estrella, S. (2018). Data representations in Early Statistics: data sense, meta-representational competence and transnumeration. En A. Leavy, A., M. Meletiou, y E. Paparistodemou (Eds.). *Statistics in Early Childhood and Primary Education – Supporting early statistical and probabilistic thinking*, (pp. 239–256). Springer.

Estrella, S., Méndez-Reina, M., y Vidal-Szabó, P. (2023). Exploring informal statistical inference in early statistics: a learning trajectory for third-grade students. *Statistics Education Research Journal, 22*(2), 116. https://doi.org/10.52041/serj.v22i2.426

Estrella, S., Olfos, R., Vidal-Szabó, P., Morales, S., y Estrella, P. (2018). Competencia meta-representacional en los primeros grados: representaciones externas de datos y sus componentes. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 143–163.

Grover, S., y Pea, R. (2013). Computational Thinking in K–12: A Review of the State of the Field. *Educational Researcher, 42*(1), 38–43. https://doi.org/10.3102/0013189X12463051

Haseski, H. İ., Ilic, U., y Tugtekin, U. (2018). Defining a new 21st century skill-computational thinking: Concepts and trends. International Education Studies, 11(4), 29-42. https://doi.org/10.5539/ies.v11n4p29

Isoda, M., Olfos, R., Ubiratan D'Ambrosio, Chamorro, C., Block, D., y Mendes, F. (2011). *Enseñanza de la multiplicación: desde el estudio de clases japonés a las propuestas Iberoamericanas*. Valparaíso: Ediciones Universitarias.

Ministerio de Educación de Chile. (2018a). *Bases Curriculares Educación Parvularia*. MINEDUC.

Ministerio de Educación de Chile. (2018b). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. MINEDUC.

Ministerio de Educación de Chile. (2024). *Bases Curriculares 1° Básico a 2° Medio: Propuesta de actualización para consulta pública 2024*. MINEDUC.

Rich, K. M., Strickland, C., Binkowski, T. A., Moran, C., y Franklin, D. (2017). K-8 learning trajectories derived from research literature: Sequence, repetition, conditionals1. En *Proceedings of the 2017 ACM Conference on International Computing Education Research* (182–190). ACM.

Rich, K. M., Strickland, C., Binkowski, T. A., y Franklin, D. (2019). A K-8 debugging learning trajectory derived from research literature12. En *Proceedings of the 50th ACM Technical Symposium on Computer Science Education* (pp. 745–751)3. Association for Computing Machinery.

Rich, K. M., Franklin, D., Strickland, C., Isaacs, A., y Eatinger, D. (2020a). A Learning Trajectory for Variables Based in Computational Thinking Literature: Using Levels of Thinking to Develop Instruction. *Computer Science Education, 32*(2), 213–234.

Rich, K.M., Yadav, A. y Larimore, R.A. (2020b). Teacher implementation profiles for integrating computational thinking into elementary mathematics and science instruction. *Education and Information Technology, 25*(1), 3161–3188. https://doi.org/10.1007/s10639-020-10115-5

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-248.

Wing, J. M. (2006). Viewpoint: Computational thinking. *Communications of the ACM, 46*(3), 33–35.

OBJETOS MATEMÁTICOS MOVILIDADOS POR FUTUROS PROFESORES AL PROPONER Y RESOLVER UNA TAREA GEOMÉTRICA

Guadalupe Morales Ramírez
Universidad de Los Lagos
guadalupe.morales@ulagos.cl

Este estudio tiene por objetivo caracterizar la forma en que los futuros profesores de educación media proponen y resuelven tareas geométricas. Para esto se identifican los objetos/procesos matemáticos movilizados en cada resolución, utilizando herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Onto-semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Se realiza un análisis de contenido que contempla una codificación deductiva-inductiva de los procedimientos y justificaciones realizadas por los futuros profesores al proponer y resolver una tarea que involucra el uso de una configuración de figuras. Los resultados muestran que los futuros profesores, en su mayoría, proponen tareas relacionadas con el cálculo de áreas de figuras 2D, lo que muestra un dominio de la aritmética y el uso de las fórmulas relacionadas a figuras conocidas. Además, muestran que los futuros profesores movilizan objetos asociados a los procesos de visualización y medición, (p.e., propiedades de las figuras y propiedades de la medida) al utilizar fórmulas de áreas de cuadrados y círculos.

Tareas geométricas, Futuros profesores, objetos y procesos matemáticos, Enfoque onto-semiótico, Educación media.

INTRODUCCIÓN

Entre los objetivos primordiales en la enseñanza de la geometría, a nivel de la Educación secundaria, se incluyen el desarrollo del conocimiento y la comprensión de las propiedades y teoremas geométricos, así como la capacidad de utilizarlos y fomentar el desarrollo y el uso de conjeturas, razonamientos deductivos y pruebas (Brown et al., 2004). Aunque estos objetivos se encuentran presentes en gran parte de los currículos educativos, siguen siendo difíciles de alcanzar (Jones, 2002), ya sea por las dificultades propias de los profesores en ejercicio y formación, o bien porque los materiales curriculares (p.e., los libros de texto) muestran poca claridad en relación con como promover los distintos procesos asociados al razonamiento geométrico, tal es el caso de la visualización. En este sentido, las investigaciones señalan que los estudiantes tienen dificultades para reconocer formas y características geométricas de los objetos con orientación no estándar, percibir relaciones de inclusión, visualizar sólidos geométricos en formato bidimensional (2D), y resolver problemas de medición que requieren razonamiento geométrico (Fujita 2012; Seah y Horne 2019). De manera similar, se ha evidenciado que muchos profesores en formación (PF) comparten las dificultades e ideas erróneas evidenciadas en los estudiantes (e.g., Presmeg, 2018; Seah y Horne 2019). Esto resulta relevante, pues si los profesores no poseen las estrategias para guiar a sus estudiantes, difícilmente estos podrán desarrollar una comprensión adecuada de los distintos conceptos y propiedades geométricas. En este contexto surge las preguntas ¿Cómo plantean y resuelven tareas geométricas los futuros profesore de educación media? ¿qué procesos geométricos movilizan futuros profesores al proponer y resolver tareas geométricas? Para dar respuesta a ello, esta comunicación tiene por objetivo identificar los objetos matemáticos que movilizan los futuros profesores en al proponer y resolver una tarea geométrica que involucra una configuración de figuras.

RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO (EOS)

En el EOS la comprensión que se tiene de un objeto matemático queda definida por la capacidad para reconocer las propiedades y las características de un objeto matemático, relacionarlo con otros objetos matemáticos, y utilizarlo en una variedad de situaciones problemas (Font et al., 2007; Godino et al., 2016). Cuando se considera el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, es posible distinguir entre sentido y significado de los objetos matemáticos. Mientras el sentido corresponde al significado parcial del objeto, el significado se reconstruye mediante la exploración sistemática de los contextos de uso del objeto y los sistemas de prácticas que intervienen (Godino et al., 2019). La relación entre estos objetos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos, argumentos, situación problema) se le conoce en el EOS como configuración onto-semiótica, la cual es de tipo epistémica o cognitiva (Godino et al., 2016). Aquí utilizamos la epistémica, referida al sistema de prácticas que promueve la institución o el currículo. Considerando que el razonamiento involucra la puesta en juego de diferentes objetos primarios y procesos, es posible asumir el razonamiento como un macroproceso social y epistémico, en el que se ven involucrados distintos objetos primarios (e.g., situaciones problema, definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y elementos lingüísticos), que pueden ser analizados desde una perspectiva proceso-producto. Desde el EOS se considera que un proceso se refiere a la “idea de una secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea (entrada), estas tareas están sometidas a reglas matemáticas o metamatemáticas" (Rubio, 2012, p.107). En este sentido, tanto los objetos como los procesos se constituyen como herramientas que permiten dirigir el análisis de la actividad matemática, y dar solución a una situación-problema determinada. En este contexto, este estudio asume que el razonamiento geométrico queda definido por las prácticas realizadas por una persona, para resolver distintas situaciones problemas de tipo geométrico. En estas prácticas emergen, gradual, sistemática y progresivamente, objetos matemáticos primarios y procesos vinculados al significado de un determinado objeto matemático (en un contexto geométrico). Así, los objetos matemáticos asociados a procesos del razonamiento geométrico, y que se ponen en juego tanto en el tarea como en la solución que proponen los profesores en formación, darían cuenta de su conocimiento geométrico.

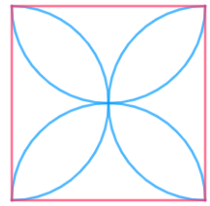
MÉTODO

El estudio se sitúa en un paradigma interpretativo y sigue un enfoque de tipo cualitativo (Cohen et al., 2007). Se sigue un análisis de contenido y una codificación deductiva-inductiva que permite identificar fragmentos que aluden tanto a la tarea geométrica como a la solución de la misma, identificando por una parte, los objetos primarios que movilizan los futuros profesores en una tarea que involucra una configuración de figuras (figura compuesta por figuras elementales); y, por otra parte, los procesos vinculados al razonamiento geométrico. Se utilizan los procesos clave para el desarrollo del razonamiento geométricos propuestos por Morales et al. (en prensa): (1) *visualización*, vinculada al reconocimiento de propiedades geométricas, procedimientos de componer-recomponer, y transformaciones sobre figuras y cuerpos geométricos; (2*) construcción*, vinculada a procedimientos que involucran instrumentos geométricos (regla, compás, etc.) y/ software; (3) *medición*, vinculada a procedimientos que involucran cálculos y fórmulas (aritméticos y/o algebraicos); (4) *representación*, vinculada al uso de figuras y/o dibujos para ilustrar elementos geométricos; y, (5) *deducción*, vinculada a la enunciación de proposiciones y/o uso hipótesis. En esta comunicación se abordan los procesos de visualización y medición.

La muestra estuvo conformada por 19 futuros profesores que cursaban la asignatura de Didáctica de la Geometría correspondiente al cuarto año de la Carrera de Pedagogía en Educación Media Matemática y Computación. Como parte de la asignatura, los futuros profesores habían tenido instrucción previa sobre la proposición y resolución de tareas geométricas, abordando las características de tales tareas, el papel que juegan las figuras y los procesos involucrados en el razonamiento geométrico (p.e., visualización, deducción, construcción, medición,). La Tarea planteada a los futuros profesores se presenta en la Tabla 1. Para resolver dicha actividad, los futuros profesores trabajan en parejas, a fin de complementar sus propias propuestas y resoluciones y, con ello, movilizar los objetos matemáticos asociados a procesos del razonamiento geométrico.

Tabla 1

Actividad y figura de la propuesta

Observa la siguiente Figura y responde: Utilizando la Figura que se muestra a continuación **¿Qué tarea plantarías a alumnos de entre 12 y 15 años de edad? ¿Cómo la resolverías? Justifica tus respuesta.**	

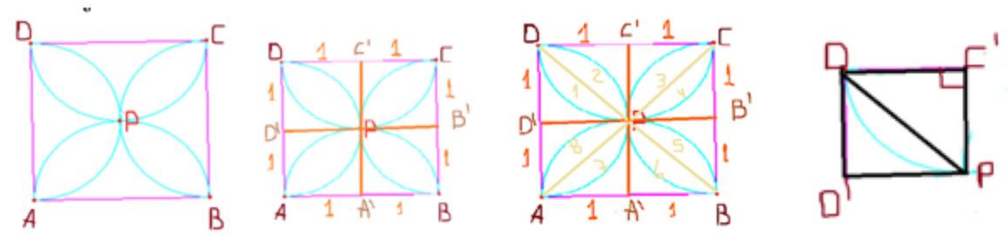
Fuente: Elaborado por autor.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

La Figura 1 muestra la solución de la tarea propuesta por la pareja 2. Se observa que la tarea propuesta tiene como propósito determinar el área de la superficie que encierra la figura color celeste. Para ello, los futuros profesores consideran que la longitud del lado del cuadrado es 2 cm y hacen explícitos los elementos que componen la configuración de figuras. Por ejemplo, los futuros profesores mencionan elementos como arco de circunferencia, punto medio y lado. La solución propuesta por la pareja 2 hace énfasis en procedimientos de descomposición. De este modo, los futuros profesores descomponen el cuadrado grande en cuatro cuadrados más pequeños y, a su vez, trazan las diagonales de dichos cuadrados con el fin de descomponerlos en dos triángulos rectángulos. Estas descomposiciones permiten a los futuros profesores visualizar que, cada "mitad de pétalo" corresponde a un cuarto de circunferencia cuyo radio es 1cm. Así, se infiere que la pareja 2 moviliza conceptos/definiciones como circunferencia, ángulo recto, triángulo rectángulo. Además, entre los procedimientos se evidencia la descomposición conveniente de superficies y el uso de fórmulas conocidas para calcular áreas. Por su parte, la propiedad de acumulación y aditividad del área (la superficie total es igual a la suma de las partes que la componen) se hace explícita en los procedimientos que implican la obtención del área de manera aditiva (p.e., el área de la figura cuyo perímetro está delimitado con color celeste se obtiene mediante al determinar el valor del área de su octava parte, la suma de sus partes permite la obtención del área total). Finalmente, se evidencia que la solución de la pareja 2 involucra la movilización de un lenguaje de tipo simbólico (aritmético y algebraico) y de tipo geométrico, asociados, respectivamente, a los procedimientos aritméticos/algebraicos que permiten calcular el área solicitada, y a las representaciones geométricas de las figuras y sus respectivas descomposiciones. De este modo, tanto la tarea propuesta por la pareja 2, así como su respectiva solución, dan cuenta de la movilización de un proceso de medición que involucra el cálculo de áreas, y de un proceso de visualización asociado al trazado auxiliar de líneas que permite la descomposición conveniente de las superficies.

Figura 1. Solución de tarea propuesta por pareja 2 de profesores en formación.

Tarea propuesta: *ABCD es un cuadrado de lado 2 cm, los cuatro arcos de circunferencia se dibujaron con centro en el punto medio P de cada lado del cuadrado. ¿Cuánto mide el área destacada celeste?*



Resolución: *Se sabe que la medida de los lados AB, BC, CD y AD tienen como medida 2 cm respectivamente. Además, P es punto medio, por lo tanto, existe un eje de simetría horizontal y vertical, obteniendo cuatro cuadrados de igual media en sus lados de un 1 cm cada uno. Al ser cada cuadrado de las mismas características, se tomará el cuadrado D'PC'D y se traza la diagonal correspondiente a DP. Por consiguiente, se traza la diagonal CP, AP y BP. Quedando así ocho figuras (mitad del pétalo) de la misma característica, basta con calcular una y multiplicar por ocho. Entonces, el razonamiento de ahora es que al tomar la mitad del pétalo se tiene* $1/4$ *de circunferencia, por lo tanto, se va a calcular el área* $1/4$ *de circunferencia, en la que se va a restar el área del triángulo. Entonces:* $\frac{\pi r^2}{4} - \frac{1}{2}$, *siendo r el radio de la circunferencia, cuyo valor es 1 cm, por lo tanto, queda como resultado* $\frac{\pi(1)^2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. *Finalmente, el área del medio pétalo es* $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, *se debe multiplicar por 8 veces, quedando así la medida del área destacada celeste* $2\pi - 4\ cm^2$.

Fuentes: Elaborado por autor.

En la Tabla 2 se presentan los objetos primarios movilizados por cada pareja de futuros profesores, así como su respectiva frecuencia. Se observa que, en su mayoría, los profesores movilizan objetos asociados al proceso de medición, siendo los más recurrentes aquellos que involucran cálculos aritméticos y uso de fórmulas. Respecto al proceso de visualización, se observa que los profesores movilizan procedimientos relacionados con la descomposición de superficies de manera conveniente, además de las comparaciones directas/indirectas. Aunque la movilización de dichos procedimientos permite facilitar el proceso de medición de áreas, es necesario que los profesores puedan recurrir, en primera instancia, a una reorganización de las unidades figurales que componen la figura presentada, a fin de poder identificar las partes que la componen. Además, la Tabla 2 muestra que la pareja 3 es aquella que logra movilizar una mayor cantidad de objetos asociados a los procesos de medición y visualización.

Tabla 2

Objetos y procesos movilizados por cada pareja de futuros profesores

	Objetos primarios/ Pareja (Pj)	Pj.1	Pj.2	Pj.3	Pj.4	Pj.5	Pj.6	Pj.7	Pj.8	Pj.9	Total
MEDICIÓN	P - Cálculos aritméticos.	1	1	-	-	1	1	1	1	1	**7**
	P - Descomposición de la superficie en unidades congruentes.	-	-	-	1	-	-	-	-	-	**1**
	P - Uso de fórmulas.	-	-	1	-	1	1	1	1	1	**6**
	L- Geométrico.	1	1	1	-	1	1	1	1	1	**8**
	L- Simbólico.	-	-	1	-	1	1	1	1	-	**5**
	Pp - Acumulación y aditividad.	-	-	1	1	1	1	1	1	1	**7**
	Pp - Elementos del cuadrado.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	Pp -Elementos de la circunferencia.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	C/D- Intersección.	-	-	-		-	-	1	-	-	**1**
	C/D -Semicírculo.	-	-	-	-	1	-	-	-	-	**1**
	C/D - Relación inversamente proporcional entre la unidad de medida y el valor resultante de la medición.	-	-	-	1	-	-	-	-	-	**1**
	C/D – Perímetro.	-	-	1	-	-	-	-	-	-	**1**
	C/D – Radio.	-	-	1	-	-	-	-	-	1	**2**
	C/D - Área/superficie.	-	-	1	-	1	1	-	1	1	**5**
VISUALIZACIÓN	P - Composición de superficies.	-	-	-	-	-	1		-	-	**1**
	P - Descomposición de perímetro.	-	-	1	-	-	-	-	-	-	**1**
	P - Descomposición conveniente de la superficie.	-	-	1	-	1	1	1	-	-	**4**
	P - Comparaciones directas/indirectas	-	-	1	-	1	-	-	-	-	**2**
	TOTAL	1	1	**10**	4	9	8	7	6	6	

Fuente: Elaboración propia.

Como podemos ver en la Tabla 2, el proceso de visualización es poco movilizado en comparación con el de medición, esto puede deberse a que este es poco promovido por los profesores o que se promueve de manera inconsciente. En contraparte, el proceso de medición es ampliamente promovido en tareas geométricas que se caracterizan por solicitar medidas, principalmente, en los libros de texto.

CONCLUSIONES

Esta comunicación tuvo por objetivo identificar los objetos matemáticos que movilizan los futuros profesores al proponer y resolver una tarea geométrica que involucra una configuración de figuras. Los resultados muestran que los futuros profesores tienen una tendencia hacia el uso de fórmulas y cálculos aritméticos, en detrimento de aquellos procedimientos asociados al proceso de visualización. En este sentido, los resultados son coincidentes con otros estudios que señalan que los futuros profesores tienen una tendencia marcada hacia el uso de fórmulas, similar a la de los alumnos (Seah y Horne 2019). Aunque los futuros profesores habían tenido experiencias con tareas que promovían la movilización de procesos geométricos (p.e., medición, visualización, deducción), estos fueron, mayoritariamente, omitidos por los futuros profesores, quienes centraron su atención en el cálculo aritmético o algebraico al proponer y resolver una tarea. No obstante, se infiere que el proceso de visualización tuvo un papel relevante al trabajar con figuras no prototípicas como la presentada, pues implica la movilización de procedimientos asociados a descomposición/composiciones de las figuras geométricas, a fin de dar sustento y justificación a un procedimiento aritmético-algebraico que permite la obtención del área (o el perímetro en otros casos). Estos resultados son una primera aproximación a aquellas tareas que permitirán la movilización de procesos asociados al razonamiento geométrico en la formación inicial docente. En este sentido, los resultados presentados podrían tener implicaciones en el tratamiento que dan los formadores de profesores a las tareas formativas que promueven la movilización de los procesos de medición y visualización, ambos relevantes para el desarrollo del razonamiento geométrico. Igualmente, es necesario seguir explorando la manera en que los futuros profesores movilizan los distintas procesos vinculados al razonamiento geométricos mediante el uso de tareas formativas. Así mismo, para el desarrollo del razonamiento geométrico es necesario que los formadores de profesores consideren actividades que fomenten el uso de figuras no prototípicas que apoyen a la movilización de procesos propios de la geometría (construcción, visualización, representación, deducción, visualización).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco de los proyectos Fondecyt 3230316, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias

Brown, M., Jones, K., Taylor, R., & Hirst, A. (2004). Developing geometrical reasoning. In: Ian Putt, Rhonda Faragher & Mal McLean (Eds), P*roceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol 1, pp. 127-134). MERGA27.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. (6 Ed). Routledge.

Jones, K. (2002). *Issues in the teaching and learning of geometry.* In L. Haggarty (Ed.), Aspects of teaching secondary mathematics: perspectives on practice (pp. 121–139). Routledge Falmer.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2–7.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60–72. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.003

Godino, J. D., Wilhelmi, M., Blanco, T., Contreras, Á, & Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de investigación en educación matemática*. 10, 91–110.

Presmeg, N. (2008). Spatial abilities research as a foundation for visualisation in teaching and learning mathematics. In P. Clarkson & N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education: Major contributions of Alan Bishop*, (pp. 83-95). Springer.

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos. [Tesis doctoral, Universitat de Barcelona].

Seah, R., & Horne, M. (2019). A learning progression for geometric reasoning. In D. Siemon, T. Barkatsas, & R. Seah (Eds.), *Researching and using progressions (trajectories) in mathematics education* (pp. 157–180). Brill Sense Publishers.

JUSTIFICACIONES REALIZADAS POR UN ESTUDIANTE DE PRIMERO BÁSICO EN UNA TAREA DE ECUACIONES E INECUACIONES

Lourdes Anglada, Centro de Magisterio María Inmaculada de Antequera, España.
Sandra Fuentes, Universidad de Granada, España.
Romina Narváez, Universidad Autónoma de Chile.
María Cañadas, Universidad de Granada, España.

Abstract:

Este trabajo es parte de una investigación más amplia sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria. Específicamente, en este documento describimos las justificaciones que utiliza un alumno de primero de educación primaria (6 años), de un colegio público del sur de España, al resolver tareas algebraicas de introducción a las equivalencias, ecuaciones e inecuaciones. Un grupo de investigadores en Didáctica de la Matemática, diseñamos e implementamos cuatro sesiones en un aula regular y posteriormente entrevistamos a 6 alumnos de esa clase. En este trabajo nos centramos en la entrevista final, presentando un estudio de caso con uno de esos alumnos. En esta entrevista aplicamos un cuestionario que los alumnos completaban por escrito, a la vez que iban respondiendo a las preguntas de la investigadora, preguntas enfocadas a la elaboración de la justificación (¿por qué?) y a la validación de la justificación (¿cómo?) por parte del alumno. En sus respuestas identificamos diversos tipos de justificación. Destacamos el análisis crítico que el niño realizaba a cada una de las tareas planteadas y el uso de

argumentos matemáticos en la mayoría de sus justificaciones. Como conclusión, a través del análisis de la entrevista pudimos identificar diferentes tipos de justificaciones, por ejemplo, la formulación y validación de sus argumentos.

Ecuaciones, inecuaciones, justificación, pensamiento algebraico.

INTRODUCCIÓN

La introducción del pensamiento algebraico está presente en currículos de educación primaria de diferentes países como Australia, Chile, España, Estados Unidos o Singapur (e.g., Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Diferentes autores destacan que prestar atención a la generalización, la representación, la justificación y el razonamiento, como prácticas algebraicas (Kaput, 2008), enriquece el aprendizaje de los estudiantes, favoreciendo el desarrollo del pensamiento algebraico (Blanton et al., 2011). En este trabajo nos centramos en la justificación, específicamente en el enfoque de equivalencia, ecuaciones e inecuaciones (Blanton et al., 2011).

En este estudio, nuestro objetivo es describir las justificaciones realizadas por un estudiante de primer curso de educación primaria al resolver tareas de introducción a las ecuaciones e inecuaciones.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

Los diferentes enfoques que componen el pensamiento algebraico son: patrones; aritmética generalizada; equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones; y pensamiento funcional (Cañadas y Molina, 2016). En el enfoque de equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones se busca desarrollar una comprensión relacional del signo igual, así como razonar con expresiones, establecer la equivalencia entre distintas expresiones en términos generales y plantear y resolver ecuaciones e inecuaciones (Blanton et al., 2018). Kaput y colaboradores propusieron que, para el desarrollo del pensamiento algebraico, independientemente del enfoque que se esté trabajando, se deben considerar las prácticas algebraicas: (a) generalizar; (b) representar; (c) justificar; y (d) razonar con estructuras y relaciones matemáticas (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008). Estas prácticas pueden abordarse conjuntamente, pero también pueden tratarse por separado. Aquí nos centramos en la justificación.

La justificación matemática es el proceso de respaldar afirmaciones y elecciones matemáticas al resolver problemas o explicar por qué su afirmación o respuesta tiene sentido (Bieda y Staples, 2020). En los primeros años de escolarización, las formas de argumentación de los alumnos suelen ser justificaciones empíricas ingenuas (Blanton et al., 2018). Justificar permite que los alumnos desarrollen conjeturas y puedan obtener reglas generales (Cañadas y Pinto, 2021). La justificación ayuda a determinar y explicar la verdad de una conjetura o afirmación (Blanton et al., 2011). Crear oportunidades para justificar seleccionando tareas que inciten a hacerlo y proponiendo conjeturas es valioso para la educación matemática (Thanheiser y Sugimoto, 2022; Ellis, 2007). Chua (2017) clasificó las tareas de justificación por su naturaleza y finalidad. En este trabajo nos centramos en tareas correspondientes a elaboración y validación. En las de elaboración, el objeto es explicar "cómo", se pretende que la justificación nos proporcione una descripción clara del método o estrategia utilizada para obtener el resultado matemático. En las tareas de validación el objetivo es explicar "por qué", se pretende obtener una razón o evidencia para apoyar o refutar una afirmación matemática.

Las investigaciones sobre justificación en el ámbito del pensamiento algebraico en primaria son escasas (Narváez et al., en prensa). Pinto (2021), en un estudio de caso, analizó las justificaciones de un niño de 5 años al resolver problemas que involucraban funciones lineales. Sus justificaciones se basaron en las reglas generales que encontró entre las variables involucradas en los problemas. Por su parte Acosta et al. (2023) realizaron un estudio longitudinal con estudiantes de tres, cuatro y cinco años sobre el tipo de justificaciones al trabajar con patrones repetitivos. Concluyeron que el tipo de justificación predominante es el que responde a validación. Ambos estudios destacaron la importancia de animar a los estudiantes a justificar sus respuestas. En educación primaria, Pinto et al. (2023) investigaron sobre las justificaciones de estudiantes de 9-10 años cuando resolvían tareas de distintos enfoques del pensamiento algebraico. Los autores destacan que, con una intervención adecuada, las tareas permitieron a los niños dialogar sobre saberes algebraicos y justificar sus resoluciones.

METODOLOGÍA

Esta investigación es cualitativa de carácter descriptivo y exploratorio (Hernández et al., 2010).

Un grupo de investigadores expertos en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (www.pensamientoalgebraico.es), en los que se encuentran las autoras de este reporte, diseñamos e implementamos cuatro sesiones de trabajo y una entrevista semiestructurada sobre ecuaciones e inecuaciones, para un grupo de primero de primaria en un colegio público de Granada. Tras las sesiones, entrevistamos a 6 alumnos. En la primera sesión abordamos los símbolos mayor y menor. En la segunda, sesión nos enfocamos en el uso de los símbolos y en la resolución de tareas que tuvieran ecuaciones e inecuaciones. En la tercera y cuarta sesión abordamos las inecuaciones mediante resolución de problemas. En la entrevista semiestructurada indagamos sobre el trabajo en las sesiones, poniendo énfasis en las estrategias y representaciones usadas en la justificación de sus respuestas. Les pasamos un cuestionario (ver Figura 1) en el que los niños iban completando por escrito a la vez que iban respondiendo las preguntas de la investigadora. Orientamos las preguntas a la comprensión de las tareas para que fueran un ente facilitador del diálogo y de la justificación por parte de los alumnos. Algunas de las preguntas realizadas fueron: “¿cómo pensaste ese [un número cualquiera]?”, “¿cómo lo has hecho?”, “¿por qué?”, “¿por qué no?”, “¿por qué se te ocurrió poner el [número] ahí?”, “¿y por qué dices que [ese número] funciona?”

Figura 1

Tareas del cuestionario

1. Determina el valor que falta para que las expresiones sean verdaderas. Explica.

a)	4 = □	b)	2 + 3 = □	c)	□ = 9 - 2
d)	□ = □	e)	5 + □ = 13	f)	12 < □
g)	□ < 8	h)	9 – 5 < □	i)	□ > 7 + 1

2. Responde y explica:
   a) María tiene menos de 4 perros ¿Cuántos perros puede tener María?
   b) Juan dice que compró más de 3 lápices ¿Cuántos lápices puede haber comprado Juan?
   c) José espera más de 4 invitados a cenar, pero menos de 8 invitados ¿Cuántos invitados pueden ir a cenar con José?
   d) Inventa una situación similar.

Las entrevistas estuvieron a cargo de dos investigadoras, las cuales fueron videograbadas y transcritas para su análisis. Cada entrevista duró 20 minutos aproximadamente.

En este reporte describimos el trabajo de uno de esos alumnos en la entrevista, a quien seleccionamos por su buena disposición, la originalidad de sus respuestas y un manejo adecuado de la simbología matemática.

Análisis de datos

Transcribimos la entrevista del alumno seleccionado. Las autoras de este manuscrito realizamos una primera revisión de los datos para establecer unas categorías de análisis (ver Tabla 1) a partir de una triangulación de expertos. Revisamos, de forma individual, los videos de las entrevistas para luego contrastar las categorías asignadas a cada justificación entregada por los alumnos. Si no había concordancia entre las categorías asignadas, se volvía a analizar el vídeo llegando a un acuerdo.

Podemos categorizar a un alumno con más de un tipo de justificación, ya que esto depende de cuan elaborado sea el argumento o si, frente al cuestionamiento de la investigadora, el alumno complementa su justificación con otra categoría, por ejemplo, puede utilizar argumentos matemáticos al dar por respuesta un número, “pueden ser 5” y cuando le pedimos que nos explique, puede cambiar a un argumento no matemático como un aspecto social “puede invitar a 5 personas a cenar porque tenemos 5 sillas”

Tabla 1

Categorías de análisis para la justificación de los estudiantes

Categorías	Indicador
1. No justifica	(a) No responde. (b) Dice que no sabe o no se acuerda. (c) Repite la respuesta, sin dar ninguna justificación.
2. Utiliza argumentos no matemáticos	(a) Apela a la evidencia (b) Inventa una historia (c) Recurre a aspectos sociales
3. Utiliza argumentos matemáticos	(a) Hace referencia a acuerdos o a contenidos trabajados antes. (b) Realiza operaciones (c) Recurre a transformaciones y propiedades, sin operaciones

RESULTADOS

Las justificaciones realizadas por el estudiante durante la entrevista fueron constantes y variadas. Hubo justificaciones para cada caso presentado, por lo que la categoría “No justifica” no se evidencia.

Respecto a los argumentos no matemáticos, evidenciamos una justificación relacionada al indicador social. Al presentar la situación “Juan dice que compró más de 3 lápices ¿Cuántos lápices puede haber comprado Juan?”, el alumno expresó:

> Alumno (A): Yo no creo que un niño va a comprar a la tienda ocho lápices
>
> Investigador (I): ¿Tú no crees?
>
> A: Porque… ¿para el cole se necesitan ocho lápices para escribir?
>
> I: ¿Y si son de colores?
>
> A: Pues entonces también voy a poner un ocho. A ver si me acuerdo cuántos lápices tengo. Me parece que veinte.
>
> I: Ah, veinte, ya, muy bien.
>
> A: Yo creo que voy a poner veinte.

En la situación anterior observamos que el estudiante indica que la cantidad de lápices debe ser mayor a tres, dando algunas respuestas como cuatro o cinco. Sin embargo, el alumno no se centra en dar un valor numérico adecuado a la inecuación, sino en que no necesita tener ocho lápices. De ahí que la investigadora le planteara la posibilidad que fueran lápices de colores, con esta nueva información, llega a expresar que veinte era una respuesta aceptada.

Para la ecuación: □ = 9 - 2, se produce el siguiente diálogo entre investigadora y alumno.

> A: Siete.

I: ¿Siete? Ya, pero coloca siete. Cuéntame qué hiciste con los dedos. Porque estabas ahí como... Pon los dedos encima y cuéntame cómo lo hiciste.

A: Yo puse el número nueve con los dedos y después le quité dos dedos para que me quede el resultado.

I: Ah, perfecto. Eso es lo que hacías con los dedos.

En el diálogo anterior, el alumno justificó su respuesta de "siete" utilizando un argumento matemático, realizando operaciones matemáticas con sus dedos.

Ante la tarea: "José espera más de cuatro invitados a cenar, pero menos de ocho invitados ¿Cuántos invitados puede tener a cenar José?", el alumno justifica utilizando argumentos matemáticos. Expresa "yo creo que es entre el cuatro y el ocho". Posteriormente, con sus dedos identifica los números "como recta numérica" y así observa los números que quedan entre los dedos a los que le asignó el número cuatro y el número ocho.

CONCLUSIONES

Nuestro objetivo de investigación era describir las justificaciones realizadas por un estudiante de primer curso de educación primaria al resolver tareas de introducción a las ecuaciones e inecuaciones, lo cual logramos al describir la entrevista realizada a este alumno y categorizar sus respuestas según las justificaciones que realizaba.

Las preguntas realizadas estaban fundamentalmente enfocadas a la elaboración de la justificación (¿por qué?) y a la validación de la justificación (¿cómo?), según la literatura (Chua, 2017), este tipo de preguntas fomentan en el alumno la capacidad de justificar. Esto permitió que el alumno realizara diversas justificaciones en su entrevista. Esto nos muestran que justificar no solo refuerza el razonamiento, sino que también promueve habilidades como el pensamiento crítico y la toma de decisiones. Esto ayuda al docente a seleccionar tareas que fomenten la justificación (Ministerio de Educación, 2012).

Al comparar nuestro estudio con los antecedentes (Pinto et al., 2023), podemos ver que nuestro alumno es menor y logra utilizar distintos tipos de justificaciones. Esto se puede deber al trabajo previo con el grupo completo.

En Acosta et al. (2023) los alumnos justifican siendo más pequeños que nuestro entrevistado, utilizando de manera predominante la validación de la justificación. En nuestro caso, se incorpora la elaboración de la justificación.

Con este trabajo no podemos generalizar, pero los hallazgos indican líneas abiertas de interés para abordar las sesiones con el grupo completo y con las entrevistas que nos quedan. Una de las principales limitaciones de este estudio, fue el análisis de un caso único.

Fomentar la justificación en el aula de matemática desde las primeras edades es un desafío que debemos abordar como educadores, proponiendo actividades de discusión matemática que lleven a nuestros alumnos a justificar sus decisiones. Como lo expresó Ellis (2007) aprender matemáticas en un entorno en el que normalmente se espera que se proporcionen justificaciones para las propias generalizaciones, ayuda para que tengan sentido y, por tanto, puedan explicarse.

Esperamos que este reporte de investigación sea un aporte al trabajo que se realiza en aula.

REFERENCIAS

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2023). Computational thinking and repetition patterns in early childhood education: Longitudinal analysis of representation and justification. *Education and Information Technologies*, 1-26. https://doi.org/10.1007/s10639-023-12051-6

Bieda, K. N. y Staples, M. (2020). Justifcation as an equity practice. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, *113*(2), 102–108.

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer International Publishing

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. y Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Cañadas, M. C. y Pinto, E. (2021). Prácticas en el aula de educación primaria relacionadas con el pensamiento algebraico. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 94*, 19-27.

Chua, B. L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 115–122). https:// hal.science/ hal- 01873071

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics education 38*(3), 194-229.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Ministerio de Educación de Chile (2012). *Decreto 439 de 14 de abril de 2012*, por el que se establecen las bases curriculares para la Educación Básica. Mineduc. Chile.

Narváez, R., Adamuz, R. y Cañadas, M. C. (en prensa). Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en educación infantil y educación primaria en Scopus. *Avances de Investigación en Educación Matemática*.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards*. NCTM.

Pinto, E. (2021). La construcción y justificación de ideas matemáticas generales por un niño de 5 años: el rol de las representaciones manipulativas. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, *6*(2), 144-164. https://doi.org/10.34179/revisem.v6i2.1601

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias, 41*(1), 149-173.

Thanheiser, E. y Sugimoto, A. (2022). Justification in the Context of Elementary Grades: Justification to Develop and Provide Access to Mathematical Reasoning. En K. N. Bieda, A. M. Conner, K. W. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 35-48). Springer.

UN ESTUDIO DE CLASE PARA DESARROLLAR EL RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL EN ENSEÑANZA BÁSICA CON MATERIAL LÚDICO

Antonia Rodríguez Guzmán, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Sarah Salinas Asenjo, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

El Razonamiento Inferencial Informal (RII) es constituyente del pensamiento estadístico y se enmarca en uno de los paradigmas para la enseñanza y aprendizaje de la Estadística. Con el fin de desarrollar este razonamiento tempranamente, un Grupo de Estudio de Clases diseñó un Plan de Clases, en torno a la narrativa de un cuento y un juego en duplas con uso de un artefacto aleatorio, cuyas tareas buscaron desarrollar el RII en 49 estudiantes de enseñanza básica (de 7 a 8 años de edad). El foco de las tareas presentadas a los estudiantes fue la argumentación desde la visualización de datos obtenidos por ellos mediante muestreo repetido y representados en un pictograma. Desde un enfoque cualitativo interpretativo, se analizaron las respuestas de los estudiantes, según el uso de los datos obtenidos como evidencia, la generalización más allá de los datos, y la expresión de la incertidumbre de la situación. Tras dos implementaciones del Plan de Clases, los resultados muestran progresos como desafíos en el desarrollo del RII de los niños y niñas.

Razonamiento Inferencial Informal, Estudio de Clases, variabilidad, muestreo repetido, formación inicial docente

INTRODUCCIÓN

El Estudio de Clases es una modalidad de desarrollo profesional docente (DPD) que comenzó a desarrollarse en Chile en el año 2008 con las colaboraciones de académicos de algunas universidades chilenas. En la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, los investigadores Olfos, Mena y Estrella promovieron esta metodología DPD junto al apoyo sostenido por 15 años por el CRICED liderado por el Dr. Masami Isoda, de la Universidad de Tsukuba, Japón. Estrella y Olfos (2023) han desarrollado un modelo de Estudio de Clases de dos meses de duración y 8 sesiones, basado en un ciclo con cuatro fases las cuales se iteran hasta lograr el objetivo propuesto.

Este modelo ha sido aplicado en la formación inicial de futuros profesores de matemáticas, quienes han manifestado una alta percepción de la efectividad del Estudio de Clases (Ramírez y Estrella, 2024); y también ha sido utilizado en la enseñanza de la Estadística (Estrella et al., 2022).

En esta investigación, futuras profesoras de matemáticas, como parte de su formación inicial, participaron de un Grupo de Estudio de Clases. En conjunto con dos profesores expertos en Estudio de Clases, co-crearon un plan de lección enfocado en la Inferencia Estadística Informal (ISI) —paradigma para la enseñanza y aprendizaje de la Estadística—, con el objetivo de desarrollar el Razonamiento Inferencial Informal (RII) a partir de tres componentes clave, establecidos por Makar y Rubin (2009) y Zieffler et al. (2008): (1) la generalización más allá de los datos, (2) el uso de los datos como evidencia, y (3) el empleo del lenguaje probabilístico para describir la generalización.

MARCO CONCEPTUAL

Esta investigación se enfoca especialmente en el RII, el cual toma los datos como evidencia, los analiza y permite a los estudiantes hacer generalizaciones sobre poblaciones a partir de las muestras. El ISI puede interpretarse como un "puente" que busca conectar el análisis exploratorio de datos y la inferencia estadística formal (e.g., Ben-Zvi, 2016).

Según Makar y Rubin (2009), la inferencia permite a los estudiantes la articulación de una predicción desde las observaciones, la organización y el uso de datos, el trabajo de la variabilidad y la relación de los datos obtenidos con su contexto. Por lo tanto, desarrollar las habilidades del razonamiento y el uso de los datos obtenidos con su contexto a una edad temprana proporciona a los estudiantes oportunidades para explorar de manera informal el comportamiento de los datos, realizar conjeturas y construir argumentos que respaldan inferencias sobre un grupo más amplio (Estrella et al., 2023).

CURRÍCULO Y ESTÁNDARES DE LA PROFESIÓN DOCENTE

Tras realizar un barrido curricular relacionado con el eje temático de Datos, desde los niveles de Kínder (MINEDUC, 2019), 1° a 6° (MINEDUC, 2012), 7° Y 8° (MINEDUC, 2016); se encontró que el currículum de educación chileno vigente aún no explicita componentes del RII, y tampoco en programas de estudio o textos escolares. Solo en los estándares de formación inicial docente de matemáticas relativos a Educación Básica (MINEDUC, 2022) y los de Educación Media (MINEDUC, 2021), se explicita que los docentes deben vincular la estadística descriptiva con la inferencia estadística informal y promover el uso de los datos para realizar inferencias.

A partir del análisis del currículo matemático en los niveles preescolar y escolar, se identificó la importancia de promover la argumentación en situaciones de incertidumbre y fortalecer el razonamiento inferencial en los niños y niñas desde una edad temprana. Así, considerando una secuencia de aprendizaje que aborda el RII con material lúdico (mediante la narrativa de un cuento y un juego de duplas que usa un artefacto aleatorio), diseñada por un grupo de Estudio de Clases, la pregunta que dirige la investigación es ¿Cuáles componentes del razonamiento inferencial informal expresan los estudiantes de los grados 2 y 3?

METODOLOGÍA

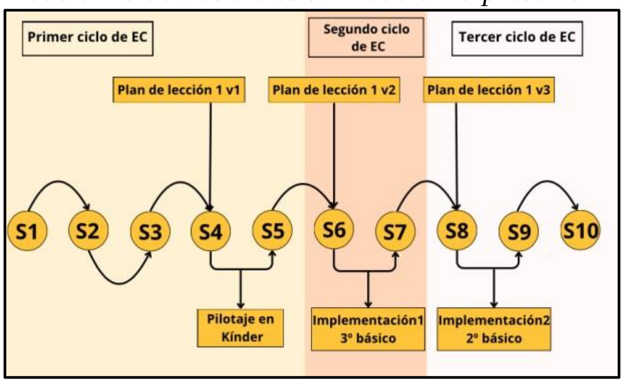
En las implementaciones del Plan de Clases participaron 49 niños y niñas de los grados 2 y 3. En el grado 2 el día 8 de mayo del 2024 asistieron 24 estudiantes, incluyendo 10 niñas y 14 niños de entre 6 y 7 años. En el grado 3 el día 9 de mayo del 2024 participaron 25 estudiantes, 13 niños y 12 niñas de entre 7 y 8 años. La duración de las lecciones fue de 76 y 74 minutos respectivamente, distribuídos en 5 momentos: introducción al tema, puesta en juego de conocimientos, planteamiento del problema y resolución, solucionando el problema y sintetizar ideas.

Ambos grupos pertenecían a una escuela urbana de la Región de Valparaíso y fue necesario solicitar autorización al establecimiento y a los apoderados a través de un consentimiento informado para realizar registros audiovisuales y entrevistar a los estudiantes. Las profesoras en formación inicial, fueron las encargadas de implementar el Plan de Clases. Una de ellas lo implementó inicialmente en el grado 3, y posteriormente, la otra implementó una versión mejorada del Plan de Clases en el grado 2.

El Plan de Clases como principal objeto de análisis y observación, fue diseñado cuidadosamente para ser implementado, evaluado y mejorado, lo que permitió crear y mejorar tareas, en ciclos continuos de Estudio de Clases (ver Figura 1). Este proceso, desarrollado según el modelo chileno (Estrella y Olfos, 2023), constó de 10 sesiones de 2 horas y 20 min cada una desarrolladas en modalidad presencial con el Grupo de Estudio de Clases (GEC).

Figura 1

Modelo EC de tres ciclos utilizado en la presente investigación



Nota. Adaptado de Estrella y Olfos (2023).

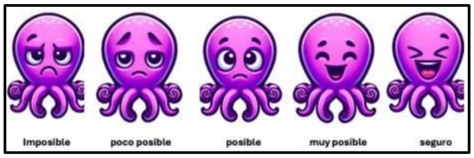
El Plan de Clases consta de 5 momentos que promueven la expresión de los componentes del RII, los cuales se describen a continuación:

Momento 1: Se introduce el lenguaje de incertidumbre con una escala de posibilidades con los niveles: “Imposible”, “Poco posible”, “Posible”, “Muy posible” y “Seguro” (ver Figura 2).

Finalizando con la narración del cuento “Cachivaches, burbujas y tentáculos” (Estrella y Olfos, 2021). [Recursos: Escala de posibilidades y cuento, ambos proyectados en la pizarra]

Figura 2

Escala de posibilidades con 5 niveles



Momento 2: Los estudiantes ponen en juego sus conocimientos al observar 3 tablas de conteo con datos de días anteriores (provenientes del cuento) y en base a estos datos realizan una tarea inicial respondiendo a una pregunta con lenguaje de incertidumbre, y utilizando la escala de posibilidades presentada en el primer momento. [Recursos: Tarea inicial impresa y un lápiz]

Momento 3: Se plantea el problema y se inicia la resolución. El muestreo repetido se trabaja mediante el juego del "Pulpotablero" (ver Figura 3), que consiste en un tablero con forma de pulpo, adaptado a tener solo cinco tentáculos (cada tentáculo contiene un cachivache diferente), un plumón y un artefacto aleatorio (pirinola) con cachivaches en cada uno de sus lados. Los cachivaches —conchita, mascarilla, botella, bolsa y bombilla— representan las categorías de la variable "cachivaches" (variable cualitativa nominal). El artefacto aleatorio de seis caras (ver Figura 4), se diseñó para que fuera no equiprobable, en cada una de cinco caras contiene un cachivache distinto, excepto en la sexta cara, en la cual se reiteró un cachivache (la botella plástica).

Instrucciones del juego: Antes de comenzar a jugar, los estudiantes se juntan en parejas y realizan una predicción inicial sobre ¿cuál tentáculo creen que completará la mayoría del grupo curso? Luego, se comienza a jugar y los estudiantes giran la pirinola en sus mesas, al detenerse ellos observan el cachivache de la cara superior, el cual identifican en uno de los tentáculos del "Pulpotablero" y pintan una ventosa de dicho tentáculo. Se repite este proceso hasta que uno de los tentáculos tenga todas sus ventosas pintadas, cuando esto suceda los estudiantes levantan la mano, señalan que han terminado el juego, y dicen ¡Pulpo! [Recursos: "Pulpotablero" impreso y termolaminado, plumón y pirinola]

Figura 3

"Pulpotablero"

Figura 4

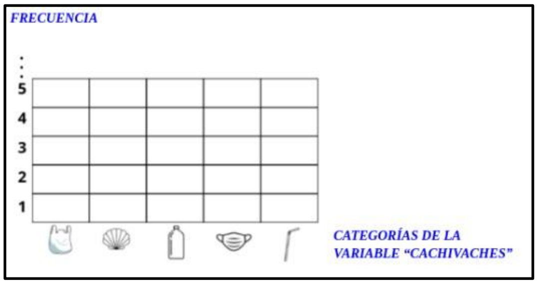
Pirinola con cachivaches en sus seis caras

Momento 4: Tras registrar los datos en el muestreo repetido, buscan una solución a la pregunta ¿cuál tentáculo creen que completará la mayoría del grupo curso? Se presenta la base de un pictograma con escala pero sin completar aún (ver Figura 5), y se pide construirlo con los datos obtenidos por los estudiantes en el juego a través de las muestras que ellos registraron. A medida que se va completando el pictograma por los estudiantes del curso, se realizan preguntas a los estudiantes para enfocarlos en

la observación de la frecuencia máxima y la frecuencia mínima. [Recursos: Pictograma sin completar]

Figura 5

Pictograma sin completar



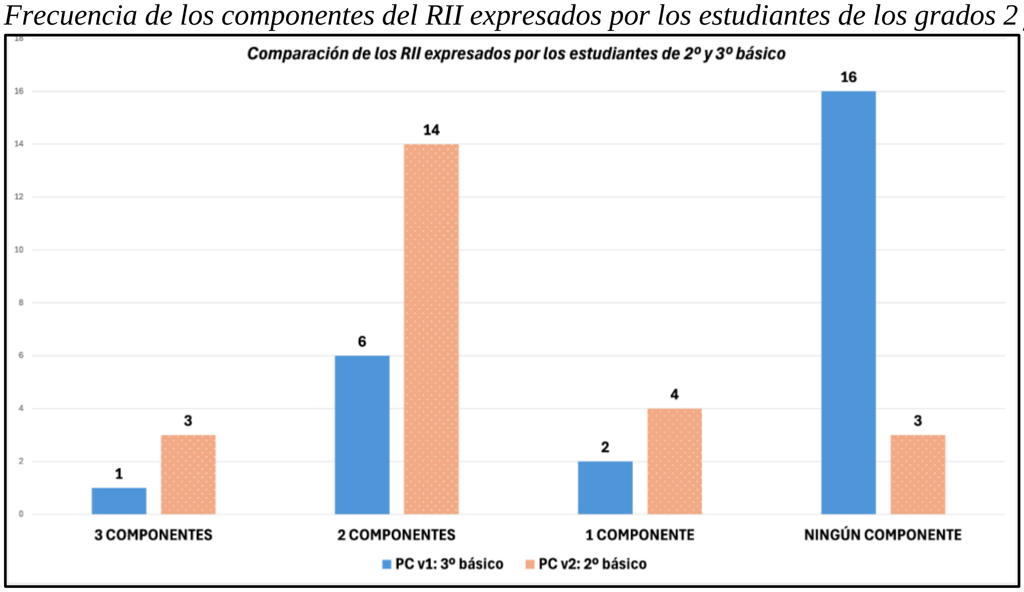
Momento 5: Al finalizar la lección, se orienta a la sintetización de ideas relativas a los tres componentes del RII. Se entrega una tarea de cierre a los estudiantes, donde ellos deben responder de manera escrita e individual la situación "Si tuvieras que aconsejar a un amigo para completar primero el "Pulpotablero", ¿qué cachivache le dirías que eligiera? ¿por qué? [Recursos: Tarea de cierre impresa y un lápiz]

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este reporte sólo se presenta un análisis comparativo de las respuestas de los estudiantes de los grados 2 y 3 en la tarea de cierre, considerando los componentes del RII: el uso del lenguaje de incertidumbre, el uso de los datos como evidencia y la generalización más allá de los datos.

Figura 6

Frecuencia de los componentes del RII expresados por los estudiantes de los grados 2 y 3



A partir de los datos graficados en la Figura 6, es posible interpretar que la implementación del Plan de Clases mejorado (PC v.2) mostró mejores resultados en la expresión de los componentes del RII. En la implementación del Plan de Clases versión 1 (PC v.1), más del 50% de los estudiantes (16) no presentaron componentes del RII en sus respuestas finales. En cambio, en la segunda implementación ese número se redujo considerablemente a sólo tres estudiantes. Estos resultados sugieren que los ajustes realizados en la versión mejorada del Plan de Clases contribuyeron a una mayor comprensión y expresión de los componentes del RII por parte de los estudiantes.

CONCLUSIONES

Esta investigación buscaba reconocer cuáles componentes del RII expresan los estudiantes de los grados 2 y 3. Al analizar los datos obtenidos de las dos implementaciones del Plan de Clases (Grados 3 y 2, en orden temporal), se observó que los estudiantes logran realizar generalizaciones utilizando los datos del pictograma como evidencia. Esto ocurrió al responder cuál cachivache es más posible que se complete primero en un futuro juego. Sin embargo, al redactar sus respuestas, la mayoría de ellos no utilizó el lenguaje de incertidumbre, lo que indica que solo dos de los tres componentes fueron expresados. Así, sigue siendo un desafío integrar los tres componentes en la mayoría de los estudiantes.

A pesar de ello, en un porcentaje reducido de las respuestas los estudiantes lograron expresar los tres componentes del RII. Además, se evidenció un progreso significativo en la expresión de dos de ellos tras las tareas propuestas en el Plan de Clases: el uso de los datos como evidencia y la capacidad de generalización más allá de los datos. Por otro lado, la expresión del lenguaje de incertidumbre al expresar la inferencia informal también mejoró de una implementación a otra, aunque no de manera escrita, sino que a través de la selección de uno de los niveles en la escala de posibilidades presentada visualmente.

REFERENCIAS

Ben-Zvi, D. (2016). Three paradigms in developing students' statistical reasoning. En S. Estrella et al. (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (p. 13-22), SOCHIEM, Chile. http://static.ima.ucv.cl.s3.amazonaws.com/wp-

Estrella, S., Vidal-Szabó, P. y Morales, S. (2022). Enseñanza de la estadística en Chile con Lesson Study: innovaciones y buenas prácticas. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 137-163). CIEME, Universidad Católica del Maule. http://hdl.handle.net/10872/21935

Estrella, S., y Olfos, R. (2023). Lecciones compartidas: un modelo chileno de Lesson Study aplicado con profesores de primaria y con formadoras de profesores de matemática que enseñarán matemáticas. *PARADIGMA*, 44(2), 110 – 130. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.10112251.2023.p110-130.id1414

Estrella, S., Méndez-Reina, M., y Vidal-Szabó, P. (2023b). Exploring informal statistical inference in early statistics: a learning trajectory for third-grade students. *Statistics Education Research Journal, 22*(2), 1-16. https://doi.org/10.52041/serj.v22i2.426

Isoda, M., y Olfos, R. (2009). *El Enfoque de Resolución de Problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Ediciones universitarias de Valparaíso. https://www.researchgate.net/publication/336889371

Makar, K. y Rubín, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 87-88. https://doi.org/10.52041/serj.v8i1.457

Ministerio de Educación de Chile (2019). *Matemática. Programa de Pedagógico Primer y Segundo Nivel de Transición*. Unidad de Currículum Nacional. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-210511_programa.pdf

Ministerio de Educación de Chile (2021). *Estándares de la Profesión Docente: Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media.* Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigación (CPEIP). https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wpcontent/uploads/2023/05/Matematica-Media.pdf

Ministerio de Educación de Chile [Mineduc]. (2022). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Educación General Básica.* Ministerio de Educación. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2023/05/basica_2023_digital.pdf

Ramírez, B., & Estrella, S. (2024). Perceptions of Lesson Study Effectiveness in Initial Teacher Training. *Revista Zetetiké*. (Aceptado) https://doi.org/10.20396/zet.v32i00.8676661

Zieffler, A., Garfield, J., DelMas, R., y Reading, C. (2008). A Framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 40-58. https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.469

EL CONCEPTO DE ÁNGULO EN TEXTOS ESCOLARES: UNA APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO UTILIZADO POR DOCENTES.

Noemí Pizarro, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Alicia Zamorano-Vargas, Universidad de Chile

Nuria Joglar-Prieto, Universidad Complutense de Madrid

Juan Miguel Belmonte, Universidad Complutense de Madrid

Abstract:

El concepto de ángulo tiene diversos enfoques que, en su conjunto, construyen la idea de ángulo. Los libros de texto son un factor importante en las actividades que los y las docentes planifican para utilizar en el aula. Por otro lado, las tareas, ideas, representaciones y definiciones que exponen son una evidencia del uso del concepto matemático. El Ministerio de Educación de Chile entrega libros de texto para las escuelas públicas y subvencionadas.

En particular, nos centraremos en Tercer Año Básico, donde el curriculum vigente indica que el alumnado demuestre la comprensión del concepto de ángulo. Utilizando una metodología cualitativa e interpretativa, se realiza un análisis de las tareas, ideas, representaciones y definiciones de los libros, posicionándonos, desde lo disciplinar y lo didáctico en el subdominio del Conocimiento de los Temas (KoT) del Modelo MTSK. Considerando lo anterior, las diversas actividades de los textos se clasifican según los fenómenos que organizan las definiciones de ángulos: región del plano que delimita, un par de semirrectas, un giro o la medida de abertura; como también, en sus registros ya sean simbólicos, verbales, gráficos o situaciones reales. El análisis muestra que se observa una proclividad hacia el enfoque estático sobre el dinámico con énfasis en la medida del ángulo, las representaciones tienden a ser registros de situaciones reales, aunque algunas son artificiales y no consideran la perspectiva.

[ángulo, texto escolar, enseñanza, conocimiento docente, MTSK]

INTRODUCCIÓN

Silfverberg (2019) discute sobre la conceptualización geométrica, mencionando que, en la escuela, la enseñanza se basa en un pequeño conjunto de conceptos y que, desde allí, los estudiantes aprenden a construir relaciones espaciales. Generalmente, los conceptos que se enseñan son puntos, líneas, figuras 2D, figuras 3D, que contrastan con la gran cantidad de formas y relaciones espaciales que existen en el mundo que nos rodea. Para la comprensión de estas relaciones espaciales, es necesaria la observación y el procesamiento de magnitudes físicas como longitud, superficie, volumen o ángulos. Es en este último donde nos enfocaremos en este trabajo.

En Chile la propuesta curricular del estudio de ángulos en Educación Primaria, comienza con el trabajo de la clasificación y medida de ángulos en diferentes figuras 2D y 3D, para continuar con el uso y la construcción de las isometrías en el plano. Específicamente en Tercer año de Educación Primaria el curriculum declara que los estudiantes deben demostrar que comprenden el concepto de ángulo en su entorno, estimando ángulos en 45º y de 90º (MINEDUC, 2012). La comprensión de este concepto se vuelve esencial en los cursos superiores para la resolución de problemas asociados a temas matemáticos como los teoremas de Pitágoras, de Thales, las funciones trigonométricas y un sinfín de aplicaciones prácticas de las ciencias sociales y experimentales; la arquitectura y construcción; la ingeniería, la medicina y el deporte, entre otras áreas.

El profesorado, para tratar los distintos Objetivos de Enseñanza, habitualmente se apoya en los textos escolares. Para la Superintendencia de Educación de Chile (2020) el texto escolar cumple un rol fundamental en la enseñanza dentro y fuera del aula, dado que los docentes lo utilizan para planificar, preparar y desarrollar clases y para los estudiantes articula el proceso de aprendizaje. De esta forma, el libro de texto es un objeto de investigación para indagar en las ideas que utilizan los docentes para el tratamiento del ángulo en la escuela. Por otro lado, la investigación en didáctica de la matemática ha puesto atención en aspectos epistemológicos del aprendizaje y de la enseñanza del concepto de ángulo. En este reporte nos centraremos en los primeros y los utilizaremos para analizar tareas que se proponen en los libros de texto que se utilizan en la educación pública y subvencionada de Chile.

MARCO TEÓRICO

Conocimiento del profesorado

El conocimiento del profesorado es un factor importante del aprendizaje que pueden lograr los estudiantes en la escuela (Ball et al. 2008; Carrillo et al., 2013). En el caso del objeto matemático ángulo, la investigación ha permitido dar cuenta de que el profesorado tiene una concepción restringida de su noción, limitándose a la idea estática y definiéndolo como el espacio entre dos semirrectas unidas por el vértice, lo que deja fuera otras ideas importantes de ángulo dinámico, esencial para la comprensión de conceptos más complejos como la trigonometría en los niveles superiores de enseñanza (Martín-Fernández et al., 2022). Existe una extensa literatura en torno al conocimiento del profesorado y en esta ocasión nos apoyaremos en el modelo teórico-analítico Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (Carrillo et al., 2018) y, en particular, nos centraremos en el subdominio Conocimiento de los temas (KoT): definiciones, propiedades y fundamentos; fenomenología y registros de representación. Concretamente abordaremos las categorías 1) Definiciones, propiedades y fundamentos: que incluye "el conocimiento acerca de lo que caracteriza y define un objeto matemático, sea teórica o formalmente, o con ejemplos o imágenes asociadas" (Vasco y Climent, 2018) y 2) Registros de representación, ya que según Duval (2006), los objetos matemáticos no pueden ser observados o percibidos, sino a través de sistemas de representación y de conversión.

CONCEPTUALIZACIÓN DE ÁNGULO

Existen diferentes aproximaciones al concepto, tanto desde el punto de vista disciplinar como escolar. Comenzamos con Matos (1990) y Casas y Luengo (2005) quienes hacen una revisión extensa, indicando que Euclides hace referencia al ángulo como el conjunto de dos rectas coplanarias distintas que se cortan en un punto; en otro momento, también hace mención a la región plana limitada por esas dos rectas o que es la inclinación entre dos líneas que se unen en un plano. En definitiva, Euclides se centra en un enfoque estático de ángulo. También se menciona a Hilbert que indica el ángulo como un sistema formado por dos semirrectas que pertenecen a distintas rectas de un plano que se cortan en un punto. Severi considera el ángulo como un conjunto de puntos comunes a dos semiplanos. Si lo analizamos fenomenológicamente, estos autores o consideran el ángulo como una región del plano o como un par de líneas rectas que se cortan en un punto. Por otro lado, Klein incluye la idea dinámica del ángulo indicando la cantidad de giro necesaria para trasladar una semirrecta a la posición de otra.

En el ámbito de la enseñanza hay diferentes investigaciones que incluyen al ángulo, desde donde se logra concluir que no hay una definición de ángulo y se identifican también las dificultades que surgen desde la enseñanza y del aprendizaje para movilizar el concepto en estas diferentes fenomenologías (estática o dinámica) (Clements y Burns, 2000; Mitchelmore y White, 2000; Pachuca y Zubieta, 2020). Por otro lado, Tanguay y Venant (2016) indican que la noción de ángulo que construyen los estudiantes se vincula a las representaciones, los registros y las conversiones entre ellos que se usan en situaciones de enseñanza en el aula y que se relacionan con las propuestas de los libros de texto.

Las ideas antes expresadas se pueden resumir en la siguiente tabla que será la estructura del análisis metodológico.

Tabla 1:
Codificaciones abiertas y sus respectivas categorías axiales

Codificación Abierta	Categorías Axiales
Definición y Fenomenología	Región del Plano (RP) Par de Semirrectas (PS) Giro (G) Medida abertura (MA)
Registros de representación	Simbólico (S) Verbal (V) Gráfico (G) Manipulativo (M) Situaciones Reales (R)

Nota: Elaboración Propia

LIBROS DE TEXTO

De esta forma, el texto escolar actúa como mediador entre docentes y estudiantes. Por ello, muchas investigaciones se centran en su análisis (AAAS, 2000; Monterrubio y Ortega, 2011; Fan, Zhu y Miao, 2013)

Considerando lo anterior, este documento se focaliza en el libro de texto, al tratarse de un recurso de enseñanza que influye considerablemente en el proceso de instrucción en el aula, puesto que conforma un elemento de apoyo para el profesorado en la preparación de la clase (Even y Olsher, 2014)

METODOLOGÍA

La intencionalidad de la investigación exige que sea de tipo cualitativo para realizar un análisis del contenido (Krippendorf, 2013) de los libros de texto. Para esta comunicación, elegimos los dos libros de texto que el MINEDUC declara como oficiales para Tercer año Básico y aún están vigentes. En la Tabla 2, se observa información de cada uno.

Tabla 2: *Libros de texto utilizados.*

Serie	Código	Título	Editorial	Autores	Año
Tomo 2	A	Sumo Primero. Texto del Estudiante	Gakko Tosho Co, LTD	Masami Isoda	2022
1	B	Texto del Estudiante. Matemática 3°Básico.	Santillana	Córdova y Droguett	2022

Nota: elaboración propia

Se analizaron las páginas de los libros que trataban ángulos, ya sea en sus introducciones, desarrollos o cierres de unidad. Para analizar el contenido nos centramos en dos unidades de análisis: a) perspectiva de la noción de ángulo (poner autores) y b) tipo de representación (poner autores). En primer lugar, se seleccionaron las actividades que correspondían al tratamiento de ángulos para identificar las unidades de análisis, que se codificaron de acuerdo a las mismas. Posteriormente, los autores discutieron sobre la codificación y los mejores ejemplos de las mismas para esta publicación.

Para realizar la codificación, se elaboró una codificación abierta a partir del estudio realizado previamente en el marco teórico, posteriormente, se refinó en una codificación axial (San Martin, 2014) como se recoge en la Tabla 1, lo que será nuestro instrumento de análisis.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Como se puede observar en la Tabla 3, el Texto A tiene más actividades que el Texto B. En ambos hay ausencia de la definición dinámica. Posiblemente por la edad de los estudiantes a quienes se destina (8 años) ninguno utiliza registro simbólico.

Tabla 3: *Presencia de las categorías axiales en los libros de texto.*

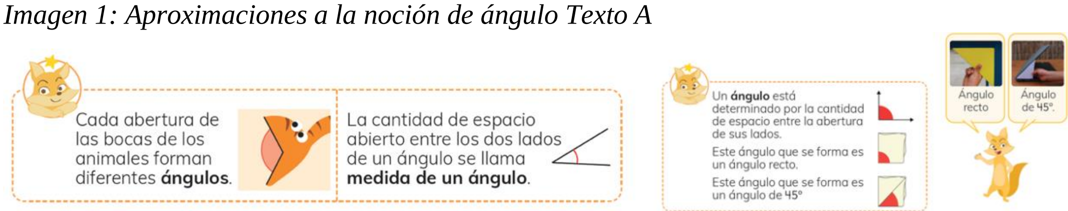
Codificación Abierta	Categorías Axiales	Texto A	Texto B
Definición y Fenomenología	Región del Plano (RP)	17	6
	Par de Semirrectas (PS)	13	9
	Giro (G)	0	2
	Medida abertura (MA)	16	9
Registros de representación	Simbólico (S)	0	0

Verbal (V)	3	1
Gráfico (G)	8	4
Manipulativo (M)	12	2
Situaciones Reales (R)	13	5

Nota: Elaboración propia

En el análisis también se observa que la Medida de abertura siempre está acompañada con la categoría axial Región del Plano o Par de Semi Rectas. El uso del Par de Semirrectas, comúnmente, se utiliza cuando niños o niñas dibujados abren sus brazos o piernas. Ambos libros comienzan aproximándose solo a a una noción de ángulo. El Texto A releva la medida y su referencia por medio de la Región del Plano (Imagen 1). El Texto B, comienza con una Situación Real como Par de Semirectas, para posteriormente indicar que "Un ángulo es la amplitud de giro entre dos líneas que coinciden en un punto llamado vértice", complementando lo anterior tanto con la idea de giro como con la medida de abertura. El giro sólo se usa en dos actividades posteriores y no se utiliza más. Cuando se trata rotación, en el texto A, se define como "movimiento alrededor de un punto. Mantiene la forma y el tamaño de la figura rotada" (p. 29) sin considerar el ángulo, en el texto B, en cambio, la rotación involucra ángulos y giros.

Imagen 1: Aproximaciones a la noción de ángulo Texto A



Nota: Isoda, 2002, pp.18 y 19

Imagen 2. Aproximación a la noción de ángulo Texto B.

Nota. Córdova y Droguett, 2022, p. 142

En el texto A, hay registros manipulativos directos o bien, como ejemplos. En ambos textos las situaciones reales tienden a ser forzadas o con ángulos en perspectiva (imágenes 3D a 2D), lo que distorsiona el ángulo, y, por consiguiente, su compresión.

Conclusiones

Los textos de estudio entregados por el MINEDUC proponen tareas que, principalmente, se enfocan en la perspectiva estática del concepto de ángulo, desaprovechando, además, la enseñanza del giro en la rotación. Uno de los libros considera el ángulo de la rotación, donde se trata como un elemento más y no desde su perspectiva conceptual como giro. Es necesario que al docente se le entreguen actividades que promuevan las distintas perspectivas del concepto de ángulo, con el fin que los estudiantes construyan su propia definición (Clementes y Sarama, 2014).

Referencias

American Association for the Advancement of Science (AAAS) (2000). Middle grades mathematics textbooks: A benchmarks-based evaluation. http://www.project2061.org/publications/textbook/mgmth/report/part1.htm [Links]

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59(5),* 389–407.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Casas García, L. y Luengo González, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de Las Ciencias, 23*(2), 201–216.

Clements, D., & Burns, B. (2000). Students' Development of Strategies for Turn and Angle Measure. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 31–45.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). Learning trajectories. *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education*, 1-30.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM, 45*(5), 633-646.

Martín Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F y Rico Romero, L. (2022). Conversions Between Trigonometric Representation Systems by Pre-service Secondary School Teachers. PNA. *Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática, 16*(3), 237–263. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.21957

Matos, J. (1990). The Historical Development of the Concept of Angle. *The Mathematics Educator, 1*(1), 4–11.

Mitchelmore, M. y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 209–238.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de Matemáticas. Silfverberg, H. (2019). Geometrical Conceptualization. In: Fritz, A., Haase, V.G., Räsänen, P. (eds) International Handbook of Mathematical Learning Difficulties. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_36

Pachuca Herrera, Y. y Zubieta Badillo, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. *Educación Matemática, 32*(1), 38–66. https://doi.org/10.24844/EM3201.03

Tanguay, D. y Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM, 48*(6), 875–894. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0789-5

San Martín, D. (2014). Teoría fundamentada y Atlas.ti: recursos metodológicos para la investigación educativa. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 16*(1), 104-122.

Silfverberg, H. (2019). Geometrical conceptualization. *International handbook of mathematical learning difficulties: From the laboratory to the classroom*, 611-630.

Superintendencia de educación (2020). Resolución Extenta 0668. Recuperado de https://www.supereduc.cl/wp-content/uploads/2019/02/REX-No-0668-APRUEBA-CIRCULAR-QUE-ENTREGA-RECOMENDACIONES-PARA-TRANSPARENTAR-LA-TOMA-DE-DECISIONES-EN-LA-ELECCION-DE-TEXTOS-ESCOLARES-EN-ESTABLECIMI.pdf

Vasco, D. y Climent, N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de álgebra lineal. http://hdl.handle.net/10481/50160

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA PROFESORA DE EDUCACIÓN ESPECIAL EN UNA CLASE DE ADICIÓN PARA ESTUDIANTES CIEGOS

Juan Luis Piñeiro G., Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Eder Pinto M., Universidad de O'Higgins

Catalina Román Á., Universidad de Chile

Abstract:

Este trabajo describe el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés) que un profesor de educación especial moviliza cuando enseña la adición de números naturales en un 3º básico de una escuela especial para estudiantes ciegos. Los resultados muestran que la enseñanza se realiza con un enfoque guiado (paso a paso) focalizado en el procedimiento mediante preguntas. Concluimos con un llamado de atención a formadores de educación matemática y de educación especial a discutir la formación matemática de este colectivo de profesores y profesoras.

MTSK, adición, educación especial, estudiantes ciegos

La enseñanza de las matemáticas en la Educación Especial ha tendido hacia un carácter reparador que ha restringido el acceso al conocimiento, relegando a sus estudiantes a bajas expectativas, es decir, "formas deshumanizadas del aprendizaje matemático" (Tan et al., 2020, p. 22). Un factor clave para la superación de esta problemática es el conocimiento del profesor que enseña matemáticas, entendido como el conocimiento profesional necesario para realizar las tareas recurrentes al enseñar matemáticas, el que se ha mostrado como crítico para fomentar el aprendizaje de las matemáticas escolares (e.g. Blömeke et al., 2022). No obstante, este hecho tiene una particularidad cuando se trata de la enseñanza a estudiantes ciegos. Por ejemplo, algunos autores señalan que el conocimiento de este colectivo de profesores es enseñar a los estudiantes estrategias de cálculo especializadas, i.e., signografía matemática, el ábaco japonés Soroban o la máquina de escribir braille (Brawand y Johnson, 2016). Este foco en el cálculo estaría superado por la complementariedad que debiese darse con el profesor de aula regular, sin embargo, en las escuelas especiales para estudiantes ciegos, las y los encargados son educadores especiales. En este sentido, existe muy poca literatura respecto a cuáles son las estrategias más adecuadas para enseñar a estos estudiantes (Klingenberg et al., 2019) y particularmente, respecto a los conocimientos de educadores que los acompañan en estos procesos (Piñeiro y Calle, 2023). En este contexto, nos preguntamos, ¿qué conocimientos especializados moviliza en la enseñanza una profesora de educación especial de estudiantes ciegos relativos a las operaciones aritméticas y particularmente, la adición?

PERSPECTIVA TEÓRICA

La literatura sobre conocimiento del profesor de educación especial ha tenido un desarrollo sostenido en los últimos años, aunque aún es insuficiente para comprender cabalmente el conocimiento matemático para la enseñanza de educadores especiales (Allsopp y Haley, 2015; van Garderen et al., 2013). Los avances que se han realizado tienen un marcado foco en el conocimiento didáctico del contenido (e.g., Firestone et al., 2021) y bastante disímiles entre sí. Así, en este trabajo se adopta una perspectiva teórica que surge desde la investigación en educación matemática y que permite responder la pregunta de investigación. Particularmente, nos referimos al Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés) desarrollado por Carrillo y colaboradores (2018). Este constructo teórico nos permitirá describir el conocimiento del profesor y, de esta manera, explorar qué conocimiento y habilidades movilizan en las salas de clases cuando enseñan matemáticas los profesores de educación especial. Carrillo et al. (2018) señalan que "este modelo presenta una reconfiguración del conocimiento matemático, una reinterpretación del conocimiento del contenido pedagógico y una nueva forma de conceptualizar la noción de especialización" (p. 240), considerando dos áreas de conocimiento: conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido.

DISEÑO METODOLÓGICO

De manera general, esta investigación tiene un planteamiento cualitativo, donde el interés está puesto en comprender y describir los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto. Asimismo, el carácter de esta investigación es descriptiva, ya que el interés está dado por caracterizar el conocimiento matemático para la enseñanza y el uso dado por parte de profesores de Educación Especial. En este sentido, adherimos a la idea de que la investigación cualitativa es "un proceso de trabajo con los datos, de modo que se pueda extraer de ellos más de lo que se obtendría simplemente leyendo, viendo o escuchando atentamente los datos varias veces"

(Simon, 2019, p. 112). Por otra parte, el diseño de esta investigación corresponde a un *video-based approach* (Widjaja et al., 2019). La recogida de datos central fue realizada mediante la video grabación de clases, debido a su capacidad de capturar la riqueza y complejidad de una sala de clases para el análisis posterior (Widjaja et al., 2019). Todo el proceso fue aprobado por un comité de ética en el Informe de Aprobación N° 180/2024.

Participante

Los participantes se invitaron por conveniencia y a la especificidad del contexto en que se sitúa este trabajo, i.e., participó una profesora de educación especial de 3° básico, cuya escuela es parte de los centros educativos con que la Institución mantiene convenios para la realización de prácticas. La selección de la escuela tiene relación con que los estudiantes ciegos asistentes no presentan otra discapacidad asociada a su baja visión o ceguera.

Recogida y análisis de los datos

La recogida de datos consistió en videograbaciones de clases de matemáticas en la escuela invitada. Concretamente, se utilizó una cámara móvil con un alcance de 360º (pensada especialmente para capturar las interacciones entre los participantes). La cámara 360º se ubicó en el centro de la sala con el fin de obtener una visión lo más completa posible. El foco de las grabaciones estuvo en las intervenciones de la profesora con sus estudiantes y el uso del conocimiento dado.

Este trabajo utilizó un análisis de datos que combina un desarrollo *concept-driven* y *data-driven* y fue llevado a cabo secuencialmente (Kuckartz, 2019). El primer paso fue transcribir las clases siguiendo las recomendaciones de Sánchez y Revuelta (2005) y subdividir en episodios y subepisodios de acuerdo a un criterio conversacional (Rodríguez et al., 1996). Luego, se utilizaron las categorías de análisis que proporcionan el MTSK (conocimiento matemático y conocimiento didáctico). Este proceso se utilizó para una primera organización de las unidades de análisis y presenta un carácter deductivo. Este análisis inicial se completó con un uno inductivo, específicamente, dentro de cada categoría, lo que llevó a la identificación y establecimiento de patrones más específicos en el conocimiento de la participante.

RESULTADOS

Los resultados son presentados de acuerdo a las dimensiones de conocimiento del MTSK, a saber, conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido.

Conocimiento Matemático – MK

Respecto a esta dimensión, los resultados muestran que en la clase analizada solo se pudo evidenciar un Conocimiento de los Temas sobre la suma. Al respecto, sobre el conocimiento de *definiciones, propiedades y fundamentos*, la profesora moviliza conocimiento sobre el valor posicional y su rol en sumar cantidades. Un ejemplo de esto lo vemos cuando la profesora señala el valor de la posición de las cifras que se están sumando:

Profesora:	y la unidad, bueno, perdón, esa es la decena, ¿verdad? La unidad iría bajo la decena. ¿Y la otra unidad?

Particularmente, se evidencia cuando la profesora realiza preguntas respecto a las posiciones de las cifras que los estudiantes están sumando y cómo cambiaría la posición de las reagrupaciones que deben realizarse. Por ejemplo, en el siguiente extracto la profesora pregunta al estudiante qué debería realizar cuando la suma de dos cifras es mayor a 9 y se debe reagrupar:

Profesora:	esa decena iría entonces a agruparse en la decena, ¿cierto? Ya, pero sería cuatro más nueve. Pero aquí, cuando tú hiciste... Desarrollaste la centena, te dio trece, ¿cierto? La unidad de ese trece la dejaste aquí abajito de la decena, ¿cierto? Pero te sobró, te sobró algo que la tenías que poner acá. ¿Qué te sobró?

Asimismo, es posible identificar conocimiento sobre el *procedimiento* del algoritmo de la adición. Este se evidencia cuando la profesora realiza preguntas para que el estudiante verbalice el procedimiento y se haga explícitos los pasos necesarios para llegar a la respuesta correcta. Por ejemplo, en el siguiente subepisodio se observa las preguntas que realiza la profesora desde la identificación de los precios de cada producto del supermercado como sumandos hasta el resultado:

Profesora:	vamos estudiante, ¿cuánto me dijiste que tenías la primera leche?
Estudiante:	10
Profesora:	¿10? A ver… ¿estás seguro? Ah, 10 en total, ¿cierto? Ya, mira. Vamos a poner atención. El primer producto, ¿cuánto tiene?
Estudiante:	8
Profesora:	ocho. Entonces, ve. ¿Cuál sería? Tengo aquí los números. Busca el primer valor. ¿Cuál sería? El valor que representa...
Estudiante:	el 2
Profesora:	ya. ¿Ese representa a qué? ¿A la leche o al jugo?
Estudiante:	el jugo
Profesora:	ya. Entonces, apártalo. Apártalo. Ponlo aquí abajo. Mil. Tómalo y envíalo abajo. Listo. Perfecto. Ahora, ¿qué valor representa la leche?
Estudiante:	8

Con respecto a los *registros de representación*, la profesora manifiesta este conocimiento en la utilización de representaciones concretas para mostrar las cantidades. Concretamente, se utilizaron materiales de acuerdo a las necesidades de los estudiantes: a) cubaritmo (material para realizar operaciones aritméticas con estudiantes ciegos) y b) cubos unifix y un vaso para juntar las cantidades. En ambos casos la profesora indica su uso. Por ejemplo,

Profesora: dígame. ¿Sumó? ¿restó? Porque yo en la tabla del cubarismo puedo hacer todas las operaciones básicas. Puedo hacer sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, ¿qué hizo? ¿qué en particular?

Estudiante: sumas.

Profesora: Sumas. Mira, hasta tu compañero se acordaba, hizo sumas. Con agrupamiento, que le llamamos nosotros, reservas o sin reserva.

Estudiante: con reserva.

Profesora: con reserva. ¿Y a dónde ocupaba la reserva? ¿En la decena? ¿En la centena? En la decena.

Estudiante: en la decena.

Finalmente, con respecto a la *fenomenología*, la profesora utilizó una interpretación de la adición como combinación. Esto al usar el contexto de una compra de productos de supermercado en que debían adquirir dos productos para realizar algún alimento. Por ejemplo, en el siguiente extracto, la profesora alude a dos productos y pregunta por el final:

Profesora: ya, entonces ahora, aquí en la cajita, vamos a sumar los dos. ¿Y qué hacemos cuando sumamos los dos? Vamos a unir, ¿cierto? Porque vamos a sumar, vamos a unir, vamos a juntar. ¿Sí? Entonces, vamos a juntar los dos en esta cajita. Uno. Uno, primer paso. Ya, vamos.

En definitiva, la profesora utiliza conocimiento de un principio del sistema de numeración decimal ligado al procedimiento de la adición y utiliza materiales que le permiten focalizar en esto. Todo lo anterior realizado en un contexto de problemas aritméticos de combinación.

Conocimiento Didáctico del Contenido – PCK

Sobre esta dimensión, los resultados muestran que la clase analizada evidenció mayoritariamente un Conocimiento de la Enseñanza por lo que solo mostraremos resultados sobre este subdominio. Particularmente, fue posible identificar evidencias de: a) teorías de la enseñanza de las matemáticas de carácter personal; b) recursos de enseñanza físicos; y c) estrategias y técnicas. En relación a las *teorías de enseñanza* fue posible identificar que la profesora pone valor en la rapidez en que se resuelven las tareas propuestas, relacionándolo con aprender más y mejor. Por ejemplo, en el siguiente extracto la profesora hace explícito esto responder a un estudiante:

Profesora: …Yo sé, aquí hay una personita Que comúnmente está diciendo que es aburrido, pero cuando le toca su ejercicio, no va tan rápido como yo esperaría. Entonces, a mí lo que me da la impresión es que hay niños que no saben, que no ejercitan nada en la casa…

Respecto a los *recursos de enseñanza*, la profesora manifiesta conocimiento de los recursos físicos al recordar cómo se utilizan materiales usados en escuelas para ciegos (cubaritmo). Además, manifiesta conocimiento de los objetivos de los materiales al utilizar diferentes materiales según las necesidades y ámbito numérico de los estudiantes. En el ejemplo, se puede observar que el estudiante pregunta dónde colocar un cubo del cubaritmo y la profesora lo ayuda mediante preguntas:

Estudiante: ¿Arriba de cuál?

Profesora: No sé, pues tienes que decirme tú. Es tu ejercicio.

Estudiante: De la unidad de mil

Profesora: Ya. Ponlo bien, ponlo bien, en la posición correcta.

Finalmente, fue posible identificar movilización de conocimiento sobre *estrategias y técnicas*. Concretamente, la profesora utiliza dos grandes estrategias: a) diversificación del ámbito numérico utilizado para cada estudiante y el tipo de material que utilizan para responder; y b) una enseñanza guiada en la que se acerca a cada estudiante indicando paso a paso el algoritmo de la suma. Para la primera, el siguiente extracto es ejemplificador de las veces en que la profesora se acerca a cada uno de los estudiantes y guía el quehacer de los estudiantes:

Profesora: ¡Vamos! Listo. Tengo fideos y salsa. Vamos a ver (Tomando los dedos del estudiante para guiar el conteo del valor del producto).

¿Mucho? ¿Mil? ¿Ve? ¿Seis? ¿Siete? ¿Cierto? ¿Y después del siete cuál viene?

Respecto a las *técnicas* que apoyaban las estrategias utilizadas, fue posible evidenciar que la profesora realizó preguntas a sus estudiantes, que fueron respondidas por ella misma. Una segunda técnica es la utilización de preguntas para que los estudiantes verbalicen el procedimiento de la suma (paso a paso y pregunta por pregunta). Por tanto, es posible inferir una enseñanza guiada utilizando preguntas que guían paso a paso al estudiante en el algoritmo de la suma.

REFLEXIÓN FINAL

El trabajo que presentamos es un primer acercamiento para entender un aspecto de la enseñanza en contextos que han sido descuidado por la educación matemática. Los profesores de educación especial no han sido formados para enseñar matemáticas (Piñeiro y Calle, 2023) y nuestros resultados indican que esto tiene implicancias en la enseñanza que estos puedan realizar. Por ejemplo, la profesora participante, en el MK descrito, solo movilizó KoT y principalmente relativo a procedimientos. Esto podría estar influyendo en que su entendimiento de las matemáticas es enseñar pasos para hacer algo, pues en el PCK manifestado se puedo evidenciar que la estrategia (KMT) utilizada es la enseñanza guiada.

Este trabajo es un llamado de atención a las escuelas de educación que forman profesores de educación especial. Particularmente, estos resultados muestran las diferentes limitaciones que una profesora de educación especial que no ha recibido formación específica para enseñar matemáticas y que podría ser transferible a otros profesores de esta especialidad en servicio. En este sentido, los resultados aquí presentados pueden servir de insumo para que formadores de profesores, tanto en el área de educación matemática como de educación especial, discutan en conjunto y, así, puedan ofrecer desarrollo profesional que sea de utilidad.

Financiamiento

Este trabajo fue financiado por Fondecyt Iniciación 11240835 y DIUMCE 13-2024 EFA.

Referencias

Allsopp, D. H. y Haley, K. C. (2015). A synthesis of research on teacher education, mathematics, and students with learning disabilities. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal, 13*(2), 177-206.

Blömeke, S., Jentsch, A., Ross, N., Kaiser, G. y König, J. (2022). Opening up the black box: Teacher competence, instructional quality, and students' learning progress. *Learning and Instruction, 79*, 101600.

Brandwand, A. y Johnson, N. (2016). Effective methods for delivering mathematics instruction to students with visual impairments. *Journal of Blindness Innovation and Research, 6*(1).

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Firestone, A., Aramburo, C. y Cruz, R. (2021). Special educators' knowledge of high-leverage practices: Construction of a pedagogical content knowledge measure. *Studies in Educational Evaluation, 70*.

Klingenberg, O. G., Holkesvik, A. H. y Augestad, L. B. (2019). Research evidence for mathematics education for students with visual impairment: A systematic review. *Cogent Education, 6*(1), 1-19.

Kuckartz, U. (2019). Qualitative text analysis: A systematic approach. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 181-198). Springer.

Piñeiro, J. L. y Calle, J. P. (2023). Mathematical knowledge for teaching in the initial education of special education teachers. *Acta Scientiae, 25*(5), 118-143.

Rodríguez, G., Gil, F. J. y García, J. E. (1996). *Introducción a la investigación cualitativa*. Aljibe.

Sánchez, M. y Revuelta, F. (2005). El proceso de transcripción en el marco de la metodología de investigación cualitativa actual. *Enseñanza & Teaching: Revista Interuniversitaria de Didáctica, 23*, 367-386.

Simon, M. A. (2019). Analyzing qualitative data in mathematics education. En K. R. Leatham (Ed.), *Designing, conducting, and publishing quality research in mathematics education* (pp. 111-122). Springer.

Tan, P., Padilla, A., Mason, E. N. y Sheldon, J. (2020). *Humanizar la discapacidad en la educación matemática*. NCTM.

van Garderen, D., Thomas, C. N., Stormont, M. y Lembke, E. S. (2013). An overview of principles for special educators to guide mathematics instruction. *Intervention in School and Clinic, 48*(3), 131-141.

Widjaja, W., Xu, L. y Jobling, W. (2019). Examining primary school teachers' professional noticing through a video-based methodology. En L. Xu, G. Aranda, W. Widjaja y D. Clarke (Eds.), *Video-based research in education* (pp. 66-82). Routledge.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO CRÍTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA FRACCIÓN: UN ENFOQUE METODOLÓGICO MIXTO

Yaricsa Jeldres Villagrán, Universidad de Concepción

Sergio Morales Candia, Universidad de Concepción

Abstract:

El propósito de esta investigación es estudiar el desarrollo del pensamiento crítico en estudiantes que participan de lecciones de fracciones diseñadas en el contexto del Estudio de Clases. Para ello se optó por un diseño metodológico mixto, diseño cuasiexperimental y análisis de contenido; los participantes fueron estudiantes de un 7mo A y un 7mo básico B de un colegio de Mulchén, Región del Biobío, quienes conformaron el grupo control y experimental respectivamente. Para determinar los cambios en el pensamiento crítico se aplicó un pre-test y post-test a ambos grupos y se realizó un análisis de datos mediante pruebas paramétricas y no paramétricas; y para estudiar la manifestación de pensamiento crítico se analizaron las transcripciones de las lecciones implementadas por el grupo experimental. La lección implementada en el grupo experimental incorporó aprendizaje basado en problemas e intervenciones docentes para activar habilidades del pensamiento crítico. Los resultados mostraron la manifestación de diferentes habilidades de pensamiento crítico y cambios positivos, significativos, en el grupo experimental, en comparación con el grupo control. Se concluye que el uso de aprendizaje basado en problemas y preguntas específicas favorece significativamente el desarrollo del pensamiento crítico y mejora la comprensión de conceptos de fracción.

Pensamiento crítico, Estudio de Clases, aprendizaje basado en problemas, Fracción.

INTRODUCCIÓN

Los cambios sociales y culturales de la actualidad requieren de sistemas educativos que destaquen por la aplicación de métodos de enseñanza que conduzcan a potenciar habilidades de pensamiento crítico y a la formación integral de los estudiantes (Moreno y Velásquez, 2017). Según Facione (2007), el pensamiento crítico está compuesto por un conjunto de habilidades y actitudes; que se promueven a través de enfoques centrados en la creación de teorías, trabajos experimentales y estrategias metacognitivas (Tabón, 2013).

Valbuena-Duarte et al. (2019) reportan que los educadores afirman aplicar el pensamiento crítico en sus enseñanzas, sin embargo, esto no siempre se refleja en sus prácticas reales. Es necesario dotar a los educadores con nuevas técnicas y métodos para integrar el pensamiento crítico de manera efectiva en sus planes y fomentarlo en la enseñanza de las matemáticas (Maricic et al., 2016). Diversos autores coinciden en la necesidad de desarrollar propuestas estructuradas para mejorar el pensamiento crítico, enfocándose en la mejora de las prácticas educativas (Betancourth et al., 2017; Jaimes y Ossa, 2016).

En Chile, las bases curriculares del Mineduc (2018) integran el pensamiento crítico de forma gradual, sin embargo, este solo se especifica en la asignatura de Historia, mas no en otras asignaturas, tales como, matemática en que sólo se hace mención.

De acuerdo con lo anterior nos planteamos las siguientes interrogantes, ¿Cómo afecta una lección que aborda el concepto de fracción en el desarrollo del pensamiento crítico de los estudiantes? ¿Cómo se manifiesta el pensamiento crítico en lecciones que abordan el concepto de fracción?

ELEMENTOS CONCEPTUALES

El pensamiento crítico es un proceso cognitivo complejo que integra habilidades (Tabla 1), disposiciones y actitudes (Facione, 2007), cuestiona el juicio, las afirmaciones y los conocimientos (Miranda, 2003), y se caracteriza por la claridad y precisión en las justificaciones y conclusiones; además de evaluar cada componente que lo constituye de manera detallada (Vázquez-Alonso y Manassero-Mas, 2020).

Tabla 1

Habilidades de pensamiento crítico según Facione (2007)

Habilidades	Descripción
Interpretación	Comprender y expresar el significado de una amplia variedad de experiencias, situaciones, datos, eventos, juicios, etc.
Análisis	Identificar las relaciones de inferencia reales y supuestas entre enunciados, preguntas, conceptos
Evaluación	Valoración de la credibilidad de los enunciados o de otras representaciones que recuentan o describen la percepción, experiencia, situación, etc.;

Inferencia	Identificar y asegurar los elementos necesarios para sacar conclusiones razonables; formular conjeturas e hipótesis; considerar la información pertinente y sacar las consecuencias que se desprendan de los datos
Explicación	Capacidad de presentar los resultados del razonamiento propio de manera reflexiva y coherente
Autorregulación	Monitoreo auto consciente de las actividades cognitivas propias, aplicando habilidades de análisis y de evaluación a los juicios inferenciales propios, con la idea de cuestionar, confirmar, validar, o corregir el razonamiento o los resultados propios.

Las matemáticas se relacionan estrechamente con el pensamiento crítico pues, ambos son procesos complejos, que a través de la realización de problemas mejoran la motivación, compromiso y deseo de aprender de los estudiantes (Alfayez et al., 2022). El aprendizaje basado en problemas beneficia el desarrollo del pensamiento crítico creativo desarrollando así habilidades superiores en el pensamiento crítico matemático (Anazifa y Djukri, 2017). Dado a lo anterior, se utiliza el estudio de clases para lograr un mayor análisis de las clases implementadas, ya que esta nos permite profundizar en los datos y muestras obtenidas.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

El objetivo de este trabajo es estudiar el desarrollo del pensamiento crítico en el contexto del estudio del concepto de fracción en estudiantes 7mo básico; para ello se optó por un enfoque metodológico mixto a través de un diseño cuasiexperimental (Reichardt, 2019) y mediante análisis de contenido.

Población o muestra

En el diseño cuasiexperimental participaron, 23 estudiantes de séptimo básico A, grupo experimental, y 29 estudiantes del grupo control, séptimo básico B. Los participantes pertenecientes a un colegio Municipal de Mulchén, Región del Biobío.

Técnica de recogida de datos e instrumentos

Para el desarrollo del diseño cuasiexperimental se aplicarán dos instrumentos de recogida de datos, en formato de pre y post-test enfocados en el pensamiento crítico, a un grupo experimental (que experimentará una intervención que corresponde a dos lecciones diseñadas en el contexto de Estudio de Clases) y a un grupo control (con características similares al grupo control pero que no experimenta la intervención), los cuales permitirán evidenciar cambios en el pensamiento crítico de los estudiantes como resultado de la implementación de las lecciones de fracciones diseñadas en el marco del Estudio de Clases. Este instrumento aborda 5 de las 6 habilidades del pensamiento crítico propuestas por Facione (2007), interpretación, análisis, evaluación, inferencia y explicación. El análisis de los datos considerará pruebas de normalidad de Kolmogorov-Smirnov y de Shapiro-Wilk y pruebas paramétricas o no paramétricas según corresponda.

Para indagar en la manifestación de pensamiento crítico las lecciones serán videograbadas y transcritas en su totalidad, y así realizar un Análisis de Contenido asociado a la transcripción de las lecciones. Para ello se procederá a analizar, interpretar y codificar textos u otros tipos de datos cualitativos con el objetivo de identificar patrones, temas y significados dentro del contenido analizado (Krippendorff, K. 2018). El análisis de contenido se realizará mediante el software Atlas.ti, que permite organizar y codificar grandes volúmenes de datos textuales. Se busca crear códigos específicos relacionados con las habilidades del pensamiento crítico, basados en las habilidades propuesto por Facione (2007).

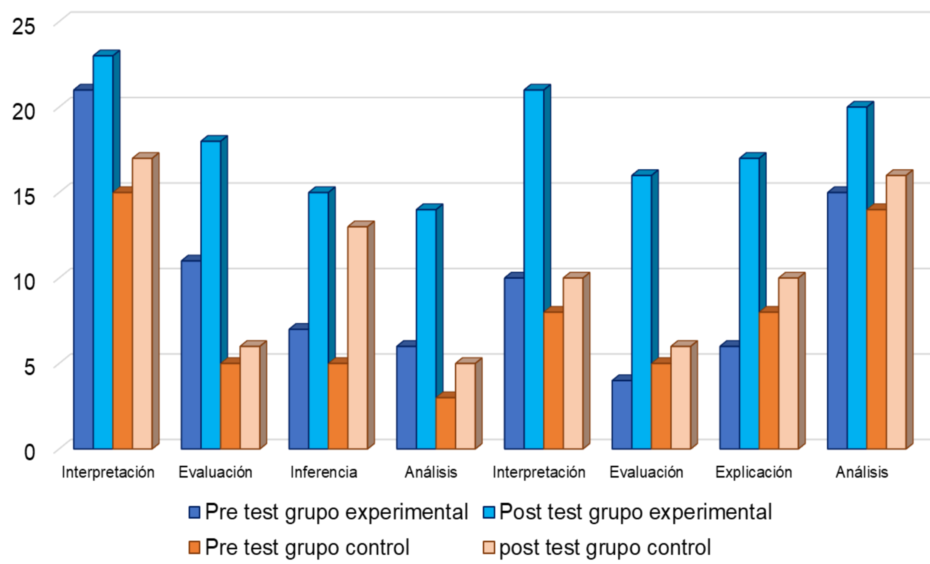
RESULTADOS

Desarrollo del Pensamiento Crítico

Los resultados muestran un aumento en el puntaje medio del grupo control y experimental (Figura 1), sin embargo, la prueba t de muestras emparejadas realizada al grupo control evidencia que tal incremento en la puntuación de los estudiantes no es estadísticamente significativo, por lo cual no puede asegurarse que esta relación se deba a algo más que el azar. Por otro lado, la Prueba de Wilcoxon aplicada al grupo experimental evidenció que la intervención tuvo un efecto significativo en las puntuaciones de pensamiento crítico de los estudiantes del grupo experimental. Finalmente, la prueba de hipótesis de Mann-Whitney rechaza la hipótesis nula concluyendo que existe una diferencia significativa en las mejoras del pensamiento crítico entre los dos grupos, siendo el grupo experimental quien evidenció mejoras significativamente mayores que el grupo control. Tal diferencia puede ser tribuida a la intervención.

Figura 1

Resultados pre-test y post test del Séptimo básico

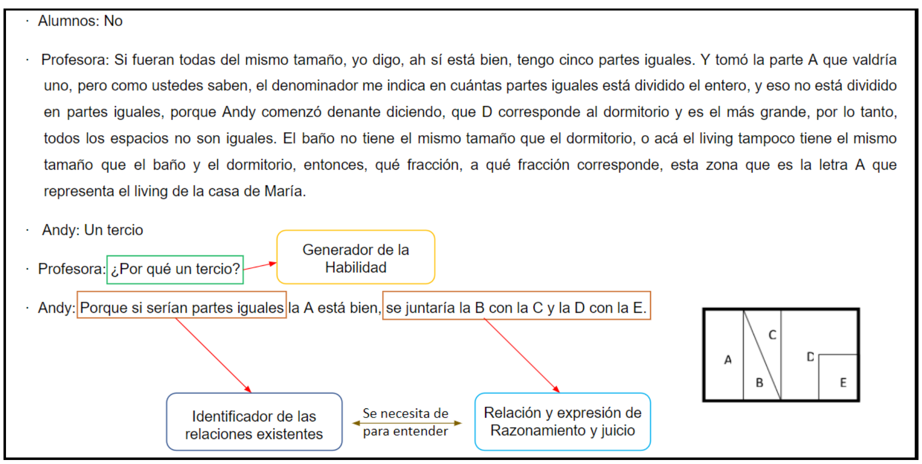


Manifestaciones de las habilidades del pensamiento crítico identificadas por momentos

El análisis realizado permitió detectar 71 manifestaciones de habilidades de pensamiento crítico a lo largo de la transcripción de las lecciones 1 y 2. En la lección 1 se identificaron 33 manifestaciones de las seis habilidades de pensamiento crítico descritas por Facione (2007), según el momento de la clase en el que se presenta dicha habilidad. En el inicio de la lección 1 se identificaron todas las habilidades del pensamiento crítico, mientras que, en el desarrollo de la clase, solo se presentan 5 de estas 6 habilidades, y en cierre de la clase no se observaron habilidades de pensamiento crítico. Por ejemplo, Habilidad de análisis fue evidenciada en el momento de inicio de la lección (Figura 2), donde podemos observar el caso de Andy, en que a pesar de presentar un error en su respuesta, se evidencia la habilidad de análisis al describir el cómo llegó al resultado, pues menciona que si la casa está dividida en partes iguales, la zona A representaría un tercio, la zona B y la Zona C representan otro tercio y la zona D con la E el tercio faltante, para lo cual identifica las relaciones producidas por estos elementos, para poder expresar su razonamiento y opinión, producto una intervención docente de la forma "por qué".

Figura 2

Manifestación de la habilidad de Interpretación



CONCLUSIONES

Los resultados del análisis de pre y postest mostraron un aumento significativo en las habilidades del pensamiento crítico entre los estudiantes del grupo experimental producto de su participación en las lecciones diseñadas en el contexto del Estudio de Clases, en comparación con el grupo. El análisis de contenido permitió identificar en las lecciones una amplia manifestación de todas las habilidades de pensamiento crítico descritas por Facione.

Los resultados y evidencias recolectadas a través del análisis de contenido indican que el estudio de clases puede ser una alternativa efectiva para atender las necesidades planteadas por Valbuena-Duarte et al. (2019), quienes destacan la importancia de dotar a los educadores con nuevas técnicas y métodos para integrar el pensamiento crítico de manera efectiva en sus planes de clases y ejecuciones diarias. Este enfoque no solo muestra la aplicabilidad del estudio de clases en mejorar las habilidades críticas, sino también su potencial para innovar y enriquecer las prácticas pedagógicas.

REFERENCIAS

Alfayez, M., Aladwan, S., Shaheen, H. (2022). El efecto de un programa de formación basado en estrategias de resolución de problemas matemáticos sobre el pensamiento crítico entre estudiantes de séptimo grado. *FRONTIERS IN EDUCATION.* https://doi.org/10.3389/feduc.2022.870524

Anazifa, R., y Djukri, D. (2017). Project-based learning and problem- based learning: are they effective to improve student's thinking skills? *Jornal Pendidikan IPA Indonesia, 6*(2), 346- 355. Recuperado de: *https://journal.unnes.ac.id/nju/jpii/article/view/11100*

Betancourth-Zambrano, S., Muñoz-Moran, K. T., & Rosas-Lagos, T. J. (2017). Evaluación del pensamiento crítico en estudiantes de educación superior de la región de Atacama-Chile. *Prospectiva. Revista de Trabajo Social e intervención social*, (23), 199-223. http://doi.org/10.25100/prts.v0i23.4594

Facione, P. (2007). Pensamiento Crítico:¿ Qué es y por qué es importante. *Insight assessment*, *22*, 23-56. https://facione/pensamientocritico

Jaimes, A y Ossa, C. (2016). *Impacto de un programa de pensamiento crítico en estudiantes de un liceo de la Región del Biobío. En: Revista de Investigación Educacional Latinoamericana. 2016. vol. 53, no. 2, p. 1-11*. Disponible en https://horizonteenfermeria.uc.cl/index.php/pel/article/view/25989

Krippendorff, K. (2018). *Content analysis: An introduction to its methodology*. Sage publications. http://doi.org/10.4135/9781071878781

Vázquez-Alonso A., y Manassero-Mas M. (2020). *Evaluación de destrezas de pensamiento crítico: validación de instrumentos libres de cultura.* http://hdl.handle.net/20.500.12209/16207

Maricic S.; Spijunovic K.; Lazic B. (2016). *La influencia de los contenidos en el desarrollo del pensamiento crítico de los estudiantes en la enseñanza inicial de las matemáticas.*

Croatian Journal Of Education-Hrvatski Casopis Za Odgoj I Obrazovanje. Recuperado de: https://doi.org/10.15516/cje.v18i1.1325

Ministerio de Educación de Chile, (2018), *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico, Unidad de Currículum y Evaluación Ministerio de Educación, República de Chile, Alameda 1371, Santiago*. https://www.curriculumnacional.cl/614/w3-propertyvalue-120183.html

Miranda Ch. (2003), *el pensamiento crítico en docentes de educación general básica en chile: un estudio de impacto, valdivia, chile* https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=s0718-07052003000100003

Moreno-Pinado W. y Velázquez-Tejeda M. (2017). *Estrategia Didáctica para Desarrollar el Pensamiento Crítico. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 15(2), 1-21.* https://www.redalyc.org/pdf/551/55150357003.pdf

Valbuena-Duarte S. De La Hoz Coronado K. Berrio Valbuena J. (2019). *El rol del docente de matemáticas en el desarrollo del pensamiento crítico en la enseñanza remota.* Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7925594

DESARROLLANDO EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN K-2: UNA PROPUESTA DE SECUENCIA DE APRENDIZAJE LÚDICA

Patricio Santibáñez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Alejandra Mondaca-Saavedra, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Brahiam Ramírez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Soledad Estrella, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Marcela Parraguez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Raimundo Olfos, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

El Pensamiento Computacional permite a los estudiantes adquirir habilidades esenciales para abordar y resolver problemas en diversos contextos cotidianos. Desde hace algunos años este tipo particular de pensamiento ha sido progresivamente incluido en currículos a nivel mundial, en diferentes niveles desde la primaria a secundaria, lo que ha suscitado interés en cómo implementarlo en el aula. En particular, se requiere más investigación y desarrollo en cómo fomentarlo en educación infantil y primaria. El reporte de investigación *presenta una secuencia de aprendizaje que describe los momentos y tareas para niños y niñas de los niveles de Kínder al grado 2, a través de la narración de historias y el diseño de tareas lúdicas y desconectadas con uso de material concreto. Se buscó que los niños y niñas explorarán y aplicarán componentes clave del pensamiento computacional, como la descomposición, la abstracción, el diseño de algoritmos y la depuración, proporcionando una opción más para su aplicación en aulas escolares regulares. El análisis de la evaluación de seis tareas diseñadas según los niveles de relevancia de cuatro componentes del CT, permiten evidenciar cómo el uso de estas tareas podría propiciar el desarrollo de algunos de los componentes fundamentales del pensamiento computacional desde los primeros años de escolaridad.*

Pensamiento computacional, Educación primaria, Juego, Lúdico, Secuencia de aprendizaje

INTRODUCCIÓN

Desde que en 2006 Jeannette Wing (2006) popularizara el concepto de Pensamiento Computacional (CT, por su sigla en inglés), ha comenzado una creciente ola de investigaciones en el área. Todas ellas enmarcadas en este tipo específico de pensamiento, que Papert definió originalmente en 1980 en su libro *Mindstorm,* donde manifestó que los niños no deben ser programados por las máquinas, sino que son ellos los que deben utilizarlas para construir, por medios computacionales, versiones concretas de objetos matemáticos abstractos o modelos mentales para comprender el mundo (Lodi y Martini, 2021; Papert, 1980). Para Wing (2006), el CT debería ser considerado como una habilidad tan trascendental como leer, escribir, y el manejo de la aritmética; y Silva et al. (2021) expresaron que el desarrollo del CT podría propiciar el desarrollo de habilidades cognitivas e intelectuales, permitiendo a las personas resolver problemas reales.

El interés por el CT ha comenzado a reflejarse en diversos currículos a nivel internacional (Abelson y Kong, 2024). En Chile, actualmente se está incorporando la inclusión transversal del CT en el currículo de matemática, abarcando desde el primer año de primaria hasta el segundo año de secundaria (MINEDUC, 2024). Este avance es significativo, ya que hace algunos años el CT se abordaba únicamente en el contexto del electivo de Pensamiento Computacional y Programación en los dos últimos niveles de secundaria (MINEDUC, 2019). A su vez, autores como Silva et al. (2021) han manifestado la importancia de desarrollar el CT desde edades tempranas.

Este reporte da cuenta de la creación de tareas que permiten a los estudiantes de K-2 comenzar progresivamente a explorar y aplicar conceptos fundamentales del CT, y busca dar respuesta a ¿Cuáles componentes del pensamiento computacional están propiciados en las tareas diseñadas?

ELEMENTOS TEÓRICOS O CONCEPTUALES

Varios autores han intentado definir el CT y precisar sus componentes (Lodi y Martini, 2021). Por ejemplo, Shute et al. (2017), proponen la descomposición, abstracción, diseño de algoritmos, depuración, iteración y generalización. Además, para esta investigación se aceptará la definición propuesta por Aho (2011), la cual considera que CT es el conjunto "procesos mentales involucrados en formular problemas de forma que su solución pueda ser representada como pasos computacionales o algoritmos" (p. 7), a fin de ser seguida por un agente externo.

En la revisión sistemática realizada por Silva et al. (2021), con foco en la enseñanza del CT en edades de dos a cinco años, afirman que, en este grupo etario, el número de investigaciones, artículos y otras iniciativas ha aumentado, sobre todo desde 2017. También, evidenciaron diferentes herramientas utilizadas para esta tarea, en particular, programación en bloque tangible o web, uso de robots con programación tangible o web, y otros robots; consideraron que las actividades desconectadas funcionan como complemento de las conectadas, pareciendo ser una buena estrategia en la progresión del desarrollo del CT.

Bell et al. (2019) manifiestan que las actividades desconectadas son formas de exponer a los estudiantes a ideas de la ciencia de la computación sin el uso de un computador. Este tipo de actividades pueden ser implementadas como juegos de tablero, juguetes, cartas, y puzles (Silva et al., 2021). Su uso para la enseñanza del CT tiene grandes ventajas, como el bajo costo de la implementación, la independencia del uso de computadoras, que pueden implementarse con facilidad sin requerir habilidades en tecnologías de la información y la comunicación por parte del docente (Busuttil y Formosa, 2020; Minamide et al., 2020).

En una revisión sistemática de investigaciones que utilizaron actividades desconectadas (Chen et al., 2023), los autores determinaron que cerca de la mitad consideraba estudiantes de primaria, y la herramienta más utilizada eran tableros y juegos de cartas, seguida de actividades en papel. Además, destacaron que el número de investigaciones que usan este enfoque desconectado ha aumentado en los últimos años, y encontraron evidencia de que estas actividades son útiles para desarrollar habilidades relacionadas con el CT.

Respecto a la enseñanza y aprendizaje del CT y la matemática, Hickmontt et al. (2017) pudieron determinar que muchos estudios que involucraban matemática se concentraban en enseñar habilidades de programación y, raramente se relacionaban con conceptos matemáticos en dominios como la probabilidad, estadística, medida o funciones. A su vez, Subramaian et al. (2022) lograron identificar seis tipos de herramientas utilizadas para el desarrollo del CT en educación matemática: métodos de enseñanza, aprendizaje basado en juegos, actividades de robótica, lenguajes de programación visual y computación lógica. Mientras que Ye et al. (2023) encontraron que los investigadores principalmente habían realizado trabajos en primaria, y al inicio de la secundaria; y la mayoría en contextos de resolución de problemas matemáticos, en vez de experiencias interdisciplinarias STEM.

Con los antecedentes descritos anteriormente, el presente estudio busca contribuir al cuerpo de investigaciones en educación infantil y primaria, que utilizan tareas desconectadas y lúdicas en el contexto de CT e indaga en los niveles relevantes de los componentes del CT de tales tareas.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Se adoptó un enfoque metodológico cualitativo interpretativo (Hernández et al., 2014), utilizando análisis de contenido con acuerdos entre investigadores para evaluar los componentes del pensamiento computacional en tareas.

La secuencia de aprendizaje fue elaborada por cuatro investigadores, se desglosa en tres momentos y consta de dos lecciones, con uso de cuentos y material concreto. Momento 1: Activación de conocimientos para que los estudiantes reconozcan las direcciones de derecha e izquierda, mediante acciones necesarias en una serie de situaciones (en PPT) que muestran a un robot, quien debe tomar decisiones sobre los caminos para llegar a tres lugares. En cada situación, el personaje se enfrenta a bifurcaciones en su camino y los estudiantes deben indicar las direcciones (ir hacia la derecha o la izquierda) para llegar al destino. Momento 2: La profesora narra un cuento para motivar y contextualizar la secuencia de tareas que desarrollarán. Se inicia a partir del cuento "¡Por Aquí, Por Allá!: La Gran Escalada de Quillay y Miel", que trata de una cría quique que trepa por un árbol y su madre debe ir a su encuentro. Durante la lectura, y posterior a ella, la profesora realiza preguntas para asegurarse que los estudiantes comprendieron las acciones de encuentro que deben realizar los personajes. Momento 3: Presentación del problema centrado en el encuentro de los personajes del cuento en un árbol binario con uso de materiales concretos. Los estudiantes deben llegar a dar instrucciones de manera precisa y rigurosa que permitan el encuentro. Este Momento comprende una secuencia de seis tareas que buscan activar cuatro de los componentes del pensamiento CT.

Análisis de las tareas del Momento 3

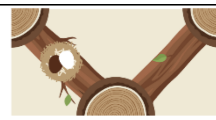
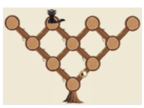
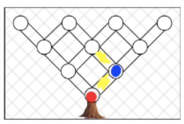
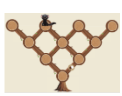
Como se señalaba, cuatro de los investigadores trabajaron colaborativamente en el diseño de tareas en torno al CT, y luego propusieron, identificaron, discutieron y lograron acuerdos sobre los niveles de relevancia para cada uno de los cuatro componentes del CT según el contenido de las tareas, confrontando los acuerdos según las definiciones de los componentes. Considerando que cada tarea podría propiciar uno o varios de estos componentes, los niveles se calificaron por tonalidades de verde según el análisis a priori de cada tarea, desde blanco (no propiciado en la tarea) hasta verde oscuro (propiciado directamente en la tarea). La Tabla 1 presenta los niveles de relevancia de cada componente conciliados.

Las definiciones de los componentes del CT utilizados para analizar el contenido de las tareas provienen de una revisión sistemática (Shute et al., 2017) quedando fuera dos (iteración y generalización) por la naturaleza de las tareas. (1) *Descomposición.* Separar un problema complejo en partes pequeñas y usar procesos sistemáticos para abordar cada uno de esos subproblemas; (2) *Abstracción.* Extraer la esencia de un sistema complejo. Comprendiendo tres subcategorías: recolección y análisis de datos, reconocimiento de patrones y modelamiento; (3) *Diseño de algoritmos.* Diseñar instrucciones ordenadas y lógicas para solucionar un problema y; (4) *Depuración.* Detectar e identificar errores, y luego corregirlos, cuando una solución no funciona como debería.

Tabla 1.

Evaluación de tareas del problema de la lección según cuatro componentes del CT

DS: descomposición, AB: abstracción, DA: diseño de algoritmos, DE: depuración	*DS*	*AB*	*DA*	*DE*
3.1 Replicar el árbol Descomponer la imagen del árbol para armar con las piezas de un tablero-árbol. 				
3.2a Construir un árbol [nivel 1, sin obstáculo] Descomponer la lámina del árbol que representa una abstracción del árbol (sin ramas), y armarlo con las piezas sin obstáculos de un tablero-árbol. 				
3.2b Construir un árbol [nivel 2, con obstáculo] Descomponer la lámina del árbol que representa una abstracción del árbol (sin ramas), y armarlo utilizando las piezas con obstáculos de un tablero-árbol.				

   				
3.3a Trazar la ruta de encuentro Mediante una lámina, crear una ruta trazando con lápices a partir de un punto de base del árbol hasta otro punto en él. Dicha lámina contiene un tronco (base del árbol); círculos, que representan las bifurcaciones de las ramas; y rectángulos que representan las ramas. Los círculos pueden pintarse de color rojo si la dirección es hacia la derecha y color azul si la dirección es a la izquierda. Las ramas solo pueden ser pintadas de color amarillo que indica “avanzar”.  				
3.3b Traducción de la ruta a tarjetas de instrucciones A partir de la lámina con la ruta coloreada, diseñar un algoritmo usando una secuencia de instrucciones mediante tarjetas. 				
3.4 Verificar rutas de encuentro Verificar y depurar secuencias de instrucciones de tres rutas proyectadas para lograr el encuentro (siendo solo una ruta la correcta).  				

DISCUSIÓN

Con el fin de presentar a los estudiantes de K-2 experiencias de aprendizaje que les permitan explorar y aplicar conceptos fundamentales del pensamiento computacional, se diseñaron tareas en torno a un cuento y juegos con material concreto, que propiciaban la descomposición, abstracción, diseño de algoritmos y depuración. El presente reporte de investigación presenta parte del diseño y análisis de contenido que permitió la evaluación de la relevancia de los cuatro componentes propiciados en seis tareas.

Las tareas diseñadas en la lección presentada tuvieron como objetivo fomentar componentes clave del CT en estudiantes de niveles tempranos, considerando su desarrollo cognitivo y basándose en la propuesta de Shute et al. (2017). La primera, segunda y tercera tarea, introducen a los estudiantes al proceso de descomposición; la segunda y tercera tarea los desafían en la descomposición y la abstracción (en particular, a reconocer patrones y replicarlos); la cuarta y quinta tarea propician principalmente el diseño de algoritmos; y la sexta tarea busca relevar el proceso de depuración enseñando a los niños a revisar y corregir errores en los procesos de resolución del problema. La presentación del reporte incluirá el análisis de ejemplos con NN de K-2 en las seis tareas.

CONCLUSIÓN

Esta propuesta de actividades muestra que la integración del CT en los primeros años escolares es viable, mediante actividades lúdicas y desconectadas, considerando la promoción de componentes clave de este tipo pensamiento, como la descomposición, la abstracción, el diseño de algoritmos y la depuración. Esto sienta bases sólidas para investigaciones futuras, y presenta una posibilidad de implementación en aulas regulares que complementa el currículo nacional.

AGRADECIMIENTOS. ANID/FONDEF IT23i0067; VINCI 039.493/2024; ANID/ Doctorado Nacional 21241378 / 21231116 / 21241086.

Referencias

Abelson, H., y Kong, S. C. (Eds.). (2024). *Computational Thinking Curricula in K–12: International Implementations*. MIT Press.

Aho, A. V. (2011). Ubiquity symposium: Computation and computational thinking. *Ubiquity*, *2011*(January).

Busuttil, L., y Formosa, M. (2020). Teaching computing without computers: Unplugged computing as a pedagogical strategy. *Informatics Educ.*, 19, 569–587.

Chen, P., Yang, D., Metwally, A. H. S., Lavonen, J., y Wang, X. (2023). Fostering computational thinking through unplugged activities: A systematic literature review and meta-analysis. *International Journal of STEM Education*, *10*(1), 1–25.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). Metodología de la investigación (6° ed.). McGraw Hill.

Hickmott, D., Prieto–Rodriguez, E., y Holmes, K. (2018). A scoping review of studies on computational thinking in K–12 mathematics classrooms. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *4*, 48–69.

Lodi, M., y Martini, S. (2021). Computational thinking, between Papert and Wing. *Science & Education*, *30*(4), 883–908.

Minamide, A., Takemata, K., y Yamada, H. (2020, July). Development of computational thinking education system for elementary school class. In *2020 IEEE 20th International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT)* (pp. 22-23). IEEE.

Ministerio de Educación. (2019). *Bases Curriculares de 3° y 4° Medio.*

Ministerio de Educación. (2024). *Actualización de las Bases Curriculares de 1° Básico a 2° Medio.*

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic books.

Shute, V. J., Sun, C., y Asbell–Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational research review*, *22*, 142–158.

Silva, E. F., Dembogurski, B. J., y Semaan, G. S. (2021). A systematic review of computational thinking in early ages. arXiv preprint arXiv:2106.10275.

Subramaniam, S., Maat, S. M., y Mahmud, M. S. (2022). Computational Thinking in Mathematics Education: A Systematic Review. *Cypriot Journal of Educational Sciences, 17*(6), 2029–2044.

Ye, H., Liang, B., Ng, O. L., y Chai, C. S. (2023). Integration of computational thinking in K–12 mathematics education: a systematic review on CT–based mathematics instruction and student learning. *International Journal of STEM Education*, *10*(1), 1–26.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35.

ANSIEDAD ANTE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA

[Katty Villalobos-Morales], [Universidad Nacional]

[Kenneth García-Chaves], [Universidad Nacional]

[Islande Delgado-Monge], [Universidad Nacional]

Abstract:

Este estudio forma parte de una tendencia emergente y en expansión que se dedica a explorar la ansiedad que experimentan los docentes al enseñar matemática. La finalidad de la investigación es identificar y describir el nivel de Ansiedad ante la Enseñanza de la Matemática de acuerdo con la influencia de sus dimensiones, las cuales serán el Conocimiento del Contenido, Conocimiento Didáctico, Autoeficacia y Actitudes hacia la enseñanza. Para ello, se utilizó un cuestionario adaptado de la Mathematics Teaching Anxiety Scale (MATAS), aplicado a 49 futuros docentes de Educación de Educación Primaria de la Universidad de Costa Rica. Los resultados revelaron que la media de AEM fue de 2.97, indicando una ansiedad media. Se encontraron correlaciones significativas entre AEM y las dimensiones de Conocimiento del Contenido y Autoeficacia sugiriendo que un mayor dominio del contenido y confianza en la enseñanza están asociados con niveles más bajos de ansiedad. La Actitud hacia la enseñanza de la matemática también mostró una correlación significativa. Las conclusiones sugieren que un mayor dominio del contenido puede reducir la ansiedad de los docentes, mejorando su confianza y competencia. Además, se identificaron preocupaciones sobre la aplicación práctica del conocimiento teórico y la necesidad de recursos didácticos.

Ansiedad ante la enseñanza de la matemática, Estudiante universitario, Formación de docentes de primaria, Emociones

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática representa un desafío significativo, especialmente para los docentes en formación. A menudo, estos maestros en formación inicial experimentan ansiedad al impartir esta materia (Delgado, 2021), lo cual puede afectar negativamente tanto su rendimiento como la calidad de la instrucción que brindan (Sloan, 2010). Según Delgado (2021), "la ansiedad no solo afecta a la persona estudiante, sino también a los profesores, quienes además pueden transferir esta ansiedad a sus alumnos" (p. 4). En consecuencia, un docente que experimenta ansiedad relacionada con las matemáticas o su enseñanza puede influir de manera adversa en el aprendizaje de la persona estudiante (Pérez-Tyteca et al., 2011).

Normalmente, los maestros inmersos en este fenómeno expresan comentarios como “No me gustan las matemáticas”, “La matemática es difícil” o “La matemática me hace sentir preocupado y nervioso”. Estos comentarios forman parte de un constructo conocido como ansiedad matemática. La investigación sobre la Ansiedad ante la Enseñanza de la Matemática es crucial porque aborda un aspecto fundamental en la formación docente, un área que ha cobrado relevancia en los últimos años. Profundizar en los niveles de AEM que experimentan los futuros maestros de primaria es vital para asegurar un ejercicio docente exitoso y evitar que el temor a enseñar matemáticas afecte tanto a los docentes como al estudiante (Peker 2006). Dado que esta línea de investigación es emergente y poco explorada, especialmente en Costa Rica, el presente estudio adquiere un valor significativo al contribuir de necesaria para llenar este vacío, ayudando a mejorar la formación y el desempeño de los futuros educadores.

ELEMENTOS TEÓRICOS

Ansiedad ante la Enseñanza de la Matemática

Un factor relevante en la enseñanza de la matemática es la ansiedad, tanto del estudiantado como del profesorado, que afecta el proceso de enseñanza-aprendizaje. El constructo de Ansiedad ante la Enseñanza de la Matemática (AEM) se refiere a la ansiedad vinculada directamente con la enseñanza de conceptos matemáticos, teoremas, fórmulas o problemas (Levine, 1993; Peker, 2006). Levine (1993) señala que esta ansiedad puede ser real o percibida, teniendo una base objetiva en situaciones como la complejidad de los contenidos matemáticos o la falta de recursos adecuados para la enseñanza.

Para que los futuros maestros de primaria enseñen matemáticas de manera efectiva, necesitan tener un conocimiento sólido tanto del contenido como de las metodologías educativas.

Según Peker (2006), la Ansiedad ante la Enseñanza de la Matemática se describe a través de cuatro subconstructos. Primero, el Conocimiento del Contenido (CC), que abarca el dominio que los docentes tienen sobre los conceptos, fórmulas y procedimientos matemáticos que deben enseñar. Segundo, el Conocimiento Didáctico (CD), que incluye las habilidades para enseñar matemáticas, como el uso de recursos, metodologías y actividades específicas para la disciplina. Tercero, la Autoeficacia (AT), que se relaciona con la confianza y seguridad de los docentes al enseñar matemáticas, la cual se vincula con la capacidad para realizar el rol docente. Finalmente, las Actitudes hacia la enseñanza de la matemática (AC), que reflejan las creencias y actitudes previas de los profesores hacia la enseñanza de la materia.

De la misma manera, Syuhada y Retnawati (2020) destacan que los futuros maestros pueden presentar síntomas físicos, cognitivos y conductuales relacionados con la AEM. Los síntomas físicos incluyen las reacciones del cuerpo ante la ansiedad, mientras que los síntomas cognitivos se vinculan con preocupaciones sobre eventos futuros en su labor educativa, afectando su concentración. Por último, los síntomas conductuales se manifiestan en comportamientos como la evitación de lecciones de matemáticas. Las autoras subrayan que estos síntomas no son excluyentes, es decir, un maestro puede experimentar más de un tipo de síntoma simultáneamente.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

La presente investigación es de tipo cuantitativa. En esta investigación, se evaluaron los niveles de Ansiedad ante la Enseñanza de la Matemática y sus distintas dimensiones y se realizó un análisis correlacional de la AEM y sus dimensiones.

Muestra

La muestra de este estudio estuvo compuesta por 49 estudiantes en formación como futuros docentes generalistas para Educación Primaria. Las personas participantes se encontraban cursando el segundo y tercer año del programa de Bachillerato y Licenciatura en Educación Primaria en la Universidad de Costa Rica (UCR) durante el segundo semestre del 2023.

Instrumento de recolección de la información

Para la recopilación de datos, se utilizó un cuestionario basado en la escala original *Mathematics Teaching Anxiety Scale* (MATAS), diseñada por Peker en 2006 y adaptada a nivel nacional por Delgado en 2021. La escala MATAS incluye ítems que abarcan diferentes dimensiones del constructo de Ansiedad ante la Enseñanza de la Matemática, tales como Conocimiento del Contenido, Conocimiento Didáctico, Autoeficacia y Actitudes hacia la enseñanza de la matemática. Esta escala sigue un formato tipo Likert, compuesto por 23 afirmaciones con cinco opciones de respuesta, numeradas del 1 al 5. En esta numeración, 1 indica "totalmente en desacuerdo", 2 "en desacuerdo", 3 "ni de acuerdo ni en desacuerdo", 4 "de acuerdo", y 5 "totalmente de acuerdo".

Variables

Las variables de esta investigación son conceptuales y se han derivado del marco teórico, incluyendo AEM, Conocimiento del Contenido, Conocimiento Didáctico, Autoeficacia y Actitudes hacia la enseñanza de la matemática. Las variables dependientes se calcularon sumando las puntuaciones de cada ítem del instrumento y dividiendo el total entre el número de ítems, obteniendo una puntuación que oscila entre uno y cinco. Un puntaje más alto indica una mayor presencia de la variable correspondiente. En los ítems formulados en negativo, se utilizó el valor inverso para que una mayor puntuación refleje consistentemente una mayor ansiedad ante la enseñanza de la matemática.

Para determinar el nivel de ansiedad en la muestra, los puntajes se clasificaron en cinco niveles: "muy bajo" (entre 1 y 1.5), "bajo" (entre 1.5 y 2.5), "medio" (entre 2.5 y 3.5), "alto" (entre 3.5 y 4.5), y "muy alto" (entre 4.5 y 5). Estas categorías han sido empleadas en diversas investigaciones como un método estandarizado para clasificar los niveles de AEM (Delgado, 2021; Pérez-Tyteca y Monje, 2022).

Análisis de la información

Se evaluó la confiabilidad y validez de la MATAS usando el coeficiente Alfa de Cronbach, obteniendo valores de $\alpha=0.90$ para la escala general y la dimensión del Conocimiento del Contenido, $\alpha=0.88$ para Autoeficacia y Actitudes hacia la enseñanza de la matemática, y $\alpha=0.71$ para Conocimiento Didáctico. Por otra parte, se comprobaron los supuestos paramétricos mediante la prueba de Shapiro-Wilk para evaluar la normalidad de los datos, un requisito fundamental para el uso de pruebas paramétricas como el coeficiente de correlación de Pearson. Esta última se empleó para determinar si existía una asociación entre la AEM y sus dimensiones, así como la intensidad de dicha relación.

RESULTADOS

Análisis descriptivo

El análisis descriptivo de los datos revela que la media de la Ansiedad ante la Enseñanza de la Matemática se situó en 2.97, con una desviación estándar de 1.07, indicando una dispersión moderada en las respuestas de los participantes. La mediana para AEM fue 3.03, reflejando que la mayoría de los puntajes se agruparon en torno a este valor. En cuanto a las dimensiones evaluadas, la dimensión Conocimiento del Contenido presentó una media de 2.73 y una desviación estándar de 1.03, con una mediana de 2.63. Por otro lado, la dimensión Conocimiento Didáctico mostró una media más alta, de 3.35, con una desviación estándar de 1.10 y una mediana de 2.71. Seguidamente, en la dimensión Autoeficacia se obtuvo una media de 3.32, una desviación estándar de 0.93 y una mediana de 3.40, indicando una percepción relativamente alta y consistente en cuanto a su nivel de AEM referente a su confianza para enseñar matemáticas. Finalmente, en la dimensión Actitud hacia la enseñanza de la Matemática obtuvo la media más baja, 2.48, con una desviación estándar de 1.09 y una mediana de 2.43.

Análisis correlacional

En particular, se observa que el constructo de la AEM presenta correlaciones muy fuertes con las dimensiones de Conocimiento del Contenido y Autoeficacia, con coeficientes de correlación de 0.925 y 0.901, respectivamente, ambos con valores $p < .001$. Esto sugiere que a medida que aumenta la AEM general, también lo hace la AEM relacionada con el Conocimiento del Contenido y la Autoeficacia. Además, la dimensión de Actitud hacia la enseñanza de la Matemática también muestra una correlación significativa con el constructo AEM ($R = 0.827, p < .001$), lo que sugiere que una actitud negativa hacia la enseñanza puede estar asociada con un aumento en la AEM general. En contraste, la dimensión de Conocimiento Didáctico presenta una correlación más moderada ($R = 0.425, p = 0.002$), lo que indica que, aunque existe una relación significativa, esta es menos intensa en comparación con las otras dimensiones.

Además, las correlaciones de la dimensión CD con CC ($R = 0.176$) y AT ($R = 0.318$) son aún más débiles, lo que sugiere que el Conocimiento Didáctico puede tener un impacto menos directo en la AEM en comparación con el Conocimiento del Contenido y la Autoeficacia. Por otra parte, la correlación entre el Conocimiento del Contenido y la Autoeficacia es significativa, con un coeficiente de $R = 0.779$ y un valor $p < .001$, esta relación sugiere que un mayor dominio del contenido puede contribuir a reducir la ansiedad que sienten los docentes ante la enseñanza de la matemática, ya que se sienten más seguros y competentes en su rol. Asimismo, la correlación entre AT y AC presenta un coeficiente de $R = 0.669$, con un valor $p < .001$. Esto sugiere que a medida que los docentes desarrollan una mayor autoeficacia en su capacidad para enseñar matemáticas, también tienden a adoptar actitudes más favorables hacia la enseñanza de esta disciplina.

Análisis de respuestas abiertas

Al realizar un recuento y agrupamiento de las respuestas obtenidas en los ítems abiertos del cuestionario, se identificaron preocupaciones genuinas sobre el papel futuro de los maestros de primaria en la enseñanza de la matemática. En la dimensión del Conocimiento del Contenido, se observaron respuestas diversas. Por ejemplo, un maestro comentó: "Recuerdo los temas cuando veo ejemplos, pero algunos ni los localizo si me dicen el nombre del tema." Otro maestro expresó: "El saber los contenidos, conceptos y leyes matemáticas no ayuda a la hora de enseñarlos, por ende, no influye en gran manera en mi vida laboral." Esta afirmación parece contradictoria, dado que el conocimiento teórico debería impactar en la enseñanza.

Además, aproximadamente un 45% de los participantes indicaron sentirse insuficientemente preparados para la labor de enseñanza. Entre estas respuestas, destacó el comentario de una participante: “Realmente no me siento preparada; creo que a lo largo de mi vida académica he tenido miedo a las matemáticas, por lo que no siento que sé los contenidos”.

En relación con la dimensión de Autoeficacia, se encontraron respuestas vinculadas con la seguridad, confianza y capacidad de los futuros maestros. Un participante indicó que “Dependiendo de los contenidos me siento capaz de hacerlo.” Esto sugiere que la percepción de Autoeficacia puede variar según el tipo de contenido. Comentarios como “Me causa un poco de tristeza ser tan nerviosa cuando se trata de matemáticas; desearía ser más capaz” y “Me da miedo no ser lo suficientemente buena para promover un aprendizaje significativo” son importantes, ya que la Ansiedad ante la Enseñanza de la Matemática puede afectar tanto a los docentes como al proceso de aprendizaje de la persona estudiante.

En cuanto al conocimiento sobre recursos y metodologías para la enseñanza de la matemática, la mayoría de los comentarios reflejan una creencia generalizada en la capacidad de los participantes para desempeñar el rol docente. Sin embargo, algunos maestros expresaron inquietudes específicas, como: “Me sé la materia, pero estoy en duda de cómo enseñarla”. También surgieron preocupaciones sobre la necesidad de materiales concretos, con comentarios como: “Con materiales concretos sí o sí. No me imagino poder enseñar sin utilizar estos materiales físicos.”

Finalmente, en relación con la dimensión de Actitudes hacia la enseñanza de la matemática, se observaron tanto actitudes positivas como negativas, siendo estas últimas las más predominantes. Se encontraron comentarios que reflejan una actitud negativa hacia la enseñanza de la materia, como: “Nunca he sido fan de las matemáticas, así que no me gustan; prefiero enseñar otras materias y ser feliz.” Este comentario denota una falta de interés en la materia. Otros participantes expresaron sentimientos de ansiedad y temor. En cuanto a los sentimientos y emociones asociados con la enseñanza de la matemática, se encontraron frases como: “Estrés, tristeza, furia, debido a que muchas veces no comprendo un tema y me hace pensar, ¿cómo voy a enseñar esto si ni siquiera yo lo comprendo?” En total, 20 participantes indicaron tener actitudes predispuestas que afectan su enfoque hacia la enseñanza de la matemática.

Conclusiones

Los resultados obtenidos revelan que los futuros maestros de educación primaria en Costa Rica experimentan un grado moderado de ansiedad cuando se trata de enseñar matemática. Este nivel de ansiedad es lo suficientemente significativo para afectar su desempeño y confianza al enseñar esta materia, así como su percepción de su propia eficacia y competencia profesional. Estos fenómenos no deberían ocurrir en futuros maestros, ya que pueden impactar negativamente el aprendizaje, causando bajo rendimiento, transmitiendo ansiedad al estudiantado y generando un temor infundado hacia la matemática desde temprana edad (Pérez-Tyteca et al., 2011; Sloan, 2010).

Por otra parte, se encontró que la ansiedad ante la enseñanza de la matemática en futuros docentes está significativamente relacionada con su Conocimiento del Contenido y su Autoeficacia. Los resultados sugieren que a medida que los docentes desarrollan un mayor dominio de los conceptos matemáticos, su nivel de ansiedad tiende a disminuir, lo que les permite abordar la enseñanza con mayor confianza. Además, se identificó que la Autoeficacia juega un papel crucial en la percepción de los futuros maestros sobre su capacidad para enseñar matemáticas. Aquellos que se sienten más seguros en su habilidad para impartir conocimientos matemáticos reportan niveles más bajos de ansiedad, lo que resalta la importancia de fomentar la confianza en la formación docente.

En este sentido, se recomienda prestar especial atención al desarrollo del dominio afectivo de los futuros maestros, abarcando sus actitudes, creencias y emociones. Es fundamental incluir más oportunidades prácticas dentro de los programas de formación para aumentar la confianza y seguridad de los futuros docentes, así como estrategias que fomenten la reflexión crítica sobre su práctica. Este enfoque integral contribuiría no solo a reducir la ansiedad, sino también a mejorar la calidad de la enseñanza de la matemática, beneficiando el aprendizaje del estudiantado.

Referencias

Delgado, I.C. (2021). *Ansiedad ante la enseñanza de la matemática en estudiantes universitarios para profesor de educación primaria* [Tesis de Doctorado, Universidad de Granada]. DIGIBUG: Repositorio Institucional de la Universidad de Granada. https://digibug.ugr.es/handle/10481/75929

Levine, G. (1993, from 17 to 20 October). *Prior mathematics history, anticipated mathematics teaching style, and anxiety for teaching mathematics among preservice elementary school teachers*. Annual Meeting for the International Group for Psychology of Mathematics Education, Asilomar, California. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED373972.pdf

Peker, M. (2006). Matematik öğretmeye yönelik kaygi ölçeğinin geliştirilmesi. *Journal of Educational Sciences & Practices*, *5*(9), 73-92. https://toad.halileksi.net/wp-content/uploads/2022/07/matematik-ogretmeye-yonelik-kaygi-olcegi-toad.pdf

Pérez-Tyteca P. y Monje, J. (2022). Futuros maestros de educación infantil y primaria en prácticas: Caracterización de su ansiedad hacia la enseñanza de la matemática. En C. Gonzálvez, R. Sanmartin y M. Vincent (Eds.), *Nuevos retos Investigativos e Investigación interdisciplinaria* (pp. 313-334). McGraw-Hill. http://hdl.handle.net/10045/131538

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (2011). Ansiedad matemática, género y ramas de conocimiento en alumnos universitarios. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *29*(2), 237-250. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n2.570

Sloan, T. R. (2010). A Quantitative and Qualitative Study of Math Anxiety Among Preservice Teachers. *The Educational Forum*, *74*(3), 242-256. https://doi.org/10.1080/00131725.2010.483909

Syuhada, N., & Retnawati, H. (2020). Mathematics teaching anxiety in novice teacher. *Journal of Physics: Conference Series*, *1511*, 1-10. http://doi.org/10.1088/1742-6596/1511/1/012039

COMPRENSIÓN DE LAS DIFICULTADES DEL CONCEPTO ALTURA EN DOCENTES DE SECUNDARIA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Elizabeth Toro Barbieri, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Arturo Mena-Lorca, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract: *A raíz de un estudio (Toro et al., 2023, en prensa), se logró evidenciar cómo estudiantes de educación secundaria definen y representan la altura de un triángulo en 2D;en dicho estudio se logra observar el trazado incorrecto una única altura cuando se trata de triángulos no estándar. Bajo esta premisa, surge la necesidad de comprender el conocimiento especializado del profesor de matemática ante dicho concepto geométrico, especialmente en el subdominio del conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas. Para ello, se desarrolló un estudio de caso que consta de dos profesores de matemática con 3 o más años de ejercicio. Los resultados respaldan una problemática que afecta la enseñanza y el aprendizaje del concepto altura en triángulos. La tendencia de estudiantes a trazar solo una altura parece estar vinculada con la presentación de triángulos estereotipados en la enseñanza y la falta de desarrollo de habilidades espaciales y abstractas. Además, las definiciones proporcionadas por docentes, aunque correctas, pueden beneficiarse de una mayor claridad y diversidad en las representaciones para facilitar una comprensión más profunda por parte de estudiantes.*

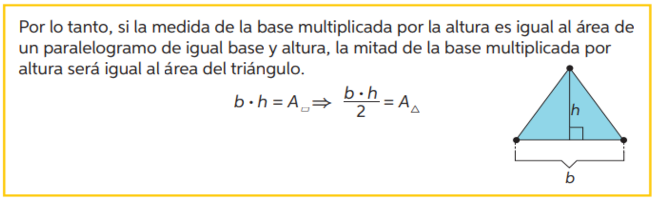
Palabras Claves: Altura; Triángulos en su forma no estándar; Conocimiento especializado del profesor; Representaciones geométricas.

INTRODUCCIÓN

En Chile, la enseñanza de la geometría se ve afectada por la priorización de otros temas en el currículo, lo que la relega al final de las planificaciones tanto en educación básica como media (Gómez y Andrade-Molina, 2022). Desarrollando una breve revisión de los textos escolares se revela que el concepto altura se introduce principalmente por su utilidad en el cálculo de áreas (ver figura 1), sin abordar de manera integral el estudio de rectas fundamentales del triángulo. Además, las representaciones gráficas suelen mostrar el triángulo con uno de sus lados paralelo a la base del libro, predominando los triángulos acutángulos y rectángulos de tipo isósceles y escalenos. Los triángulos obtusángulos, por parte, tienen una presencia significativamente menor.

Figura 1

Deducción del área de un triángulo según Texto del Estudiante Matemática 7º básico (Iturra et al., 2021)


Por lo tanto, si la medida de la base multiplicada por la altura es igual al área de un paralelogramo de igual base y altura, la mitad de la base multiplicada por altura será igual al área del triángulo.

$$b \cdot h = A_{\square} \Rightarrow \frac{b \cdot h}{2} = A_{\triangle}$$

Gamboa y Ballestero (2009) señalan que uno de los aspectos claves en el aprendizaje de la geometría es el proceso de visualización, el cual apoya la actividad cognitiva. La visualización se refiere a la acción progresiva de convertir un dibujo en una imagen mental de un objeto. La habilidad para observar más allá de lo meramente descriptivo en un dibujo geométrico, identificando propiedades y comprendiendo su interrelación, resume los elementos que pueden derivarse de la visualización. Por ejemplo, en una de sus investigaciones, Azcárate (1997) menciona que las imágenes mentales de sujetos informantes sobre el concepto de triángulo obtusángulo y escaleno son menos frecuentes. Además, en estas representaciones es común que una de las tres bases se identifique de manera horizontal. En cuanto a la altura del triángulo, se observa que los estudiantes tienden a identifican la altura como un único segmento del triángulo, estrechamente relacionado con la base horizontal.

En una línea similar, Barrantes y Zapata (2015) analizan en su trabajo los obstáculos y errores en la enseñanza que provocan que estudiantes de primaria y secundaria desarrollen esquemas conceptuales incompletos o incorrectos. En particular, la presentación constante de la altura de un triángulo en su forma estándar, tanto en la definición como en las actividades de medición o en la aplicación del teorema de Pitágoras, lleva a estudiantes a concebir que los triángulos tienen una sola altura. Como implicancia, cuando se les pide trazar alturas, solo trazan esta “altura estándar”, sin conocer la existencia de las demás o teniendo dificultades para representarlas, lo que limita el estudio profundo de las alturas no estándar de un triángulo.

A partir de la revisión de la literatura, se evidencian limitaciones en la diversidad de triángulos utilizados y en la representación de la altura. Estas observaciones generan interrogantes sobre cómo los docentes de educación secundaria comprenden y enseñan el concepto altura. En este contexto, resulta fundamental profundizar en la comprensión que tienen profesores sobre este concepto, y determinar si son conscientes de estas limitaciones.

Con base en lo anterior, nuestra pregunta de investigación es ¿Cómo comprenden y enseñan los docentes de educación secundaria el concepto de altura en triángulos y, hasta qué punto son conscientes de las limitaciones en la diversidad de triángulos y la representación de la altura?

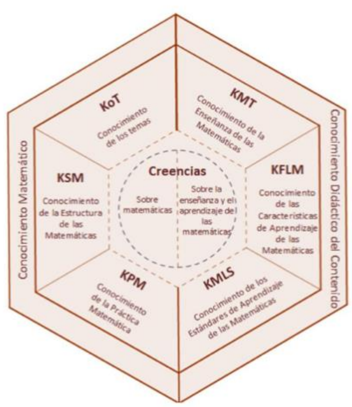
Nuestro objetivo general es explorar la comprensión y las prácticas de enseñanza de los docentes de educación secundaria respecto al concepto de altura en triángulos, las limitaciones en la diversidad de triángulos y la representación de la altura.

MARCO TEÓRICO

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El MTSK (Flores et al. 2016) es un modelo descriptivo y analítico, inspirado en Shulman (1986), diseñado para comprender de manera integral el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas. Este modelo divide dicho conocimiento en dos dominios principales: el dominio matemático y el dominio didáctico del contenido, cada uno subdividido en tres subdominios. Además, incorpora concepciones del profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, las cuales influyen en su práctica docente. Los dominios y subdominios se observan en la figura 2.

Figura 2. Subdominios del MTSK



Adaptado de Carrillo, J., et al. (2013) *Determining specialised knowledge for mathematics teaching,* p.6

Para esta investigación se considerará el subdominio relacionado con el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). Según Carrillo et al. (2013), este subdominio se centra en entender cómo los estudiantes aprenden matemáticas y en cómo los docentes interpretan su pensamiento al enfrentarse a actividades y tareas matemáticas. Este conocimiento resulta esencial para que los profesores identifiquen las posibles dificultades que los estudiantes pueden experimentar en temas específicos, lo cual depende tanto de su dominio general del contenido como de su familiaridad con las características y necesidades de los estudiantes.

METODOLOGÍA

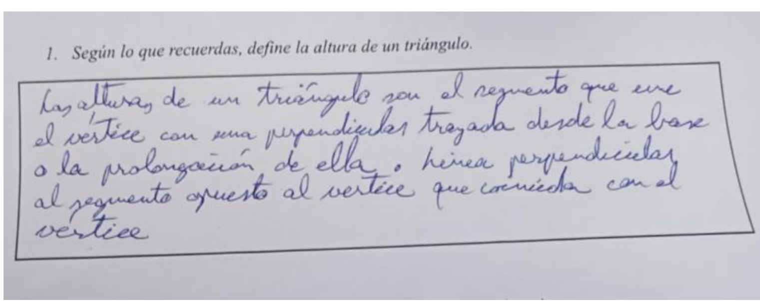
Los antecedentes sugieren que la utilización de triángulos en su forma estándar resulta perjudicial para la comprensión del concepto altura en estudiantes, por tanto, resulta interesante identificar qué es lo que ocurre en los docentes. La presente investigación centra su interés en explorar conocimientos que movilizan docentes de educación secundaria ante el concepto altura, para ello, se desarrolla un estudio de caso (Yin, 2014) cuyas técnicas de recogidas de datos son de tipo cualitativo. La unidad de análisis de este estudio incluyen la definición que el docente ofrece la altura, las representaciones gráficas que utiliza para ilustrar el concepto, la correspondencia que establece entre base y altura y las respuestas entregadas en la entrevista posterior a la aplicación del instrumento. Para indagar en profundidad, se replicó una secuencia de tres tareas diseñadas para abordar estos aspectos. El análisis de datos se realizó utilizando categorías emergentes definidas a partir de las secciones específicas de la tarea que se analizaron. Estas categorías permitieron describir el conocimiento que los docentes movilizaron al abordar el concepto de altura. Se analizaron extractos de las entrevistas y las respuestas escritas de los docentes, identificando elementos clave que evidencian su conocimiento. Las entrevistas fueron transcritas y los datos fueron revisados en colaboración con un experto en didáctica de la matemática para garantizar la validez del análisis.

Para el caso, se seleccionaron dos docentes de educación secundaria tres o más años de experiencia en aula, los cuales fueron identificados como S1 y S2. La selección de los participantes se basó en su experiencia mínima de tres años en aula, criterio que asegura un nivel adecuado de familiaridad con la enseñanza de conceptos matemáticos en contextos escolares. Además, ambos docentes trabajan en el mismo contexto educativo, lo cual es relevante, ya que este estudio es una extensión de un trabajo previo realizado con los estudiantes del mismo establecimiento. Por tanto, explorar el conocimiento de los docentes de estos estudiantes asegura una coherencia entre las etapas de la investigación.

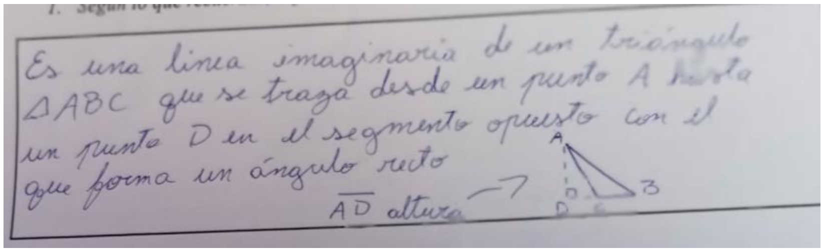
RESULTADOS

Para los análisis se tomará en consideración la definición y el trazo de las alturas. La figura 3 muestra la definición propuesta por cada uno de los docentes.

Figura 3



"Las alturas de un triángulo son el segmento que une el vértice con una perpendicular trazada desde la base a la prolongación de ella. Línea perpendicular al segmento opuesto al vértice que coincide con el vértice"
S1

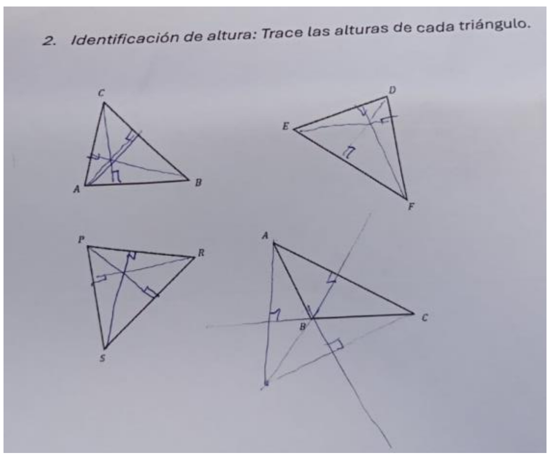

Es una linea imaginaria de un triángulo
ΔABC que se traza desde un punto A hasta
un punto D en el segmento opuesto con el
que forma un ángulo recto
$\overline{AD}$ altura

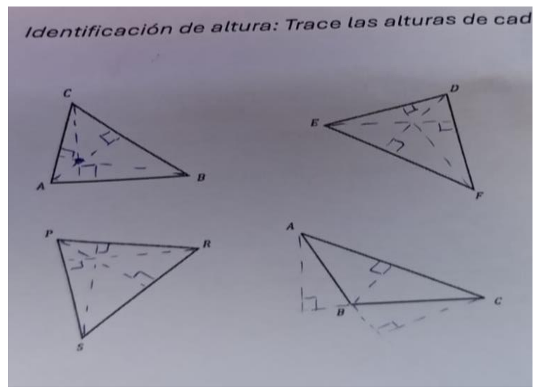
"Es una línea imaginaria de un triángulos ABC que se traza desde un punto A hasta un punto D en el segmento opuesto con el que forma un ángulo recto"

S2

Como es posible observar en la figura 4, ambos docentes trazan las 3 alturas haciendo énfasis en el ángulo recto y en el punto de intersección.

Figura 4.





S2

S1

Transcripción de la entrevista

I: **¿Por qué realizó el trazo de las tres alturas?**

S1: Porque la altura de un triángulo para mí se define como las perpendiculares entre la base y cada uno de sus vértices; entonces, tiene tres alturas, cada triángulo tiene tres alturas. En lo que es construcción, altura se toma como la vertical, porque muchas veces hay una confusión del concepto de altura matemático con el concepto de altura de la construcción o de otras cosas, generalmente, se enseña la altura como una línea que se traza vertical.

S2: Porque ahí me dice trace las alturas de cada triángulo, entonces yo asumí que como era en plural eran las tres alturas de cada uno de los triángulos. Ahí también hice el baricentro de las alturas, tratando de seguir eso que se juntaran en un punto, por formalidad, nada más.

I: **Cuando le aplicamos la misma tarea a estudiantes de educación básica o educación media, los estudiantes tienden a trazar solo una altura ¿Por qué crees que pasa eso y cómo lo abordas en tus clases?**

S1: Pienso que eso puede suceder porque en los libros mayoritariamente y también como se enseña, se traza un triángulo que está apoyado en una superficie y se traza un triángulo que es de tipo isósceles o equilátero, entonces tienen a ver que la altura está dentro del triángulo y que es justamente esa vertical, por eso las clases yo intento al menos trazarles triángulos en distintas posiciones y también triángulos que sean obtusángulos para que vean que hay alturas en otras partes, pero trazo solo una.

S2: Yo creo que pueden ser hartas cosas. Puede que por facilidad los docentes lo enseñemos como que la altura de un triángulo es solo una línea imaginaria única, y no adentramos en que la altura se traza en cada punto del triángulo; lo otro también puede ser que a ellos les cueste visualizar eso, que no se les haya desarrollado lo de las líneas imaginarias. Siempre es un concepto difícil de enseñar, como que tampoco está bien logrado en los estudiantes. Por otra parte, yo creo que la idea de que sea una línea imaginaria, yo creo que les cuesta a los estudiantes hacer construcciones auxiliares, y muchas veces pasa que aparece acá que uno debe extender la recta del segmento opuesto del vértice para que uno pueda hacer la altura; entonces eso implica otro paso y otro nivel de abstracción.

DISCUSIÓN

El análisis realizado sobre la compresión y enseñanza de las alturas de los triángulos en docentes de matemática reveló elementos claves en relación con la problemática de que estudiantes de educación secundaria tienden a trazar solo una altura. A continuación, se destacan los resultados principales basados en el modelo MTSK, subdominio KFLM.

Definición: Ambos sujetos demostraron un conocimiento adecuado sobre las propiedades geométricas de las alturas en los triángulos. Ambos trazaron correctamente las tres alturas (aunque por distintas motivaciones), identificando el ángulo recto y el baricentro. Sin embargo, sus definiciones de alturas presentan matices que pueden influir en la enseñanza:

S1, define la altura mencionando en diversas oportunidades un segmento de tipo vertical, evidenciando una posible influencia de la representación de la altura en su forma estándar. S1, al mencionar repetidamente un "segmento de tipo vertical", puede estar promoviendo una visión simplificada y estereotipada de la altura, que podría limitar la capacidad de los estudiantes para comprender la altura en diferentes contextos, como en triángulos no rectángulos o en los casos en los que la altura se extiende fuera del triángulo. Esta representación puede crear confusión o una visión demasiado restringida que dificulte la transferencia de conocimientos a situaciones más complejas

S2, por su parte, ofrece una definición más técnica "segmento que une el vértice con una perpendicular trazada desde la base o la prolongación de ella". Aquí se observa una comprensión más formal del concepto geométrico, haciendo hincapié en que la perpendicularidad puede implicar extender el segmento opuesto, lo que añade un nivel de abstracción.

Influencias de figuras estereotipadas: Un aspecto crítico que emerge de las entrevistas es la influencia de figuras estereotipadas en el aprendizaje de los estudiantes. Según S1, la enseñanza convencional utiliza, con frecuencia, triángulos apoyados en una superficie, comúnmente equiláteros o isósceles, lo que refuerza la idea de una única altura que corresponde a la perpendicular desde la base horizontal. Esto puede contribuir a que los estudiantes interpreten incorrectamente la noción de altura como una única línea vertical, desconociendo la existencia de otras alturas en diferentes triángulos o posiciones no estándares. S2 también señala que la enseñanza puede simplificar el concepto, presentando la altura como una "línea imaginaria única", sin profundizar en el hecho de que cada triangulo tiene tres alturas. Este enfoque podría estar limitando la capacidad de los estudiantes para visualizar las alturas en situaciones más completas o en triángulos no estándar.

Dificultad para identificar alturas en triángulos no estándar: Tanto S1 como S2 coinciden en que los estudiantes enfrentan dificultades significativas para visualizar y trazar las alturas en triángulos no estándar, especialmente en los obtusángulos, donde es necesario extender los lados para construir dichas alturas. Este desafío revela no solo una carencia en el desarrollo de habilidades espaciales por parte de ls estudiantes, sino también en el manejo de construcciones auxiliares, fundamentales para una comprensión más robusta de la geometría. Estas observaciones apuntan a una brecha de conocimiento sobre cómo los estudiantes aprender conceptos geométricos abstractos. S2 argumenta que esta dificultad se debe, en parte, a la naturaleza intrínsecamente abstracta del concepto de altura, descrita como "líneas imaginarias". Además, señala la ausencia de experiencias educativas adecuadas que fomenten la visualización y manipulación activa de construcciones geométricas en diversas configuraciones.

Impacto en la enseñanza: Los docentes, conscientes de estas dificultades, muestran un esfuerzo por corregir estas limitaciones. S1 menciona su intención de exponer a los estudiantes triángulos en diversas posiciones y tipos para evitar que se formen concepciones erróneas sobre la altura. No obstante, este esfuerzo debe ir acompañado de un mayor énfasis en el razonamiento geométrico y la visualización espacial, áreas en las que los estudiantes muestran carencias significativas.

S2 menciona que la altura de un triángulo es "solo una línea imaginaria única", pero al mismo tiempo introduce la idea de que la altura puede trazarse desde cada vértice, lo que refleja un nivel de conciencia respecto al condicionamiento del profesor ante las respuestas de los estudiantes. Este comentario evidencia una comprensión incipiente en el subdominio KFLM, específicamente en lo que respecta al conocimiento de las formas de aprender matemáticas. Además, señala que "puede que por facilidad los docentes lo enseñemos como que la altura…", lo que pone en evidencia una reflexión sobre las estrategias pedagógicas habituales y las posibles simplificaciones que podrían obstaculizar una comprensión más profunda.

CONCLUSIONES

Las conclusiones del análisis evidencian que, si bien los docentes poseen un conocimiento adecuado sobre las propiedades geométricas de las alturas en los triángulos, sus definiciones y prácticas de enseñanza reflejan influencias de representaciones estereotipadas. Esto puede limitar la comprensión de los estudiantes, especialmente en triángulos no estándar. Los docentes muestras un esfuerzo por diversificar las representaciones, pero la persistencia de ciertas concepciones tradicionales, como la altura vertical, sugiere la necesidad de reforzar estrategias didácticas que promuevan el razonamiento geométrico y el desarrollo habilidades espaciales.

En cuanto a las proyecciones, se plantea la importancia de diseñar experiencias de aprendizaje que involucren la exploración de triángulos en distintas configuraciones, poniendo énfasis en triángulos obtusos y acutángulos, donde la construcción de alturas requiere un mayor nivel de abstracción.

Además, se sugiere integrar herramientas digitales y manipulativas que permitan a los estudiantes interactuar con construcciones geométricas dinámicas, facilitando así una comprensión más profunda y flexible del concepto altura. Finalmente, futuras investigaciones podrían explorar cómo estas intervenciones impactan en la formación de concepciones más robustas y transferible en geometría.

BIBLIOGRAFIA

Azcarate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿Qué podemos decir de las alturas de los triángulos? *Suma (Granada), (25),* 23-30.

Barrantes M. y Zapata, M. (2015). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto. Revista de Educación*, *27*(1), 55-71.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., & Muñoz-Catalán, M. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L., Muñoz-Catalán, M., y Liñán, M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*(54), 204–221. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

Gamboa, R. y Ballestero E. (2009). Algunas reflexiones sobre didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4*(5), 113- 136.

Gómez, J. y Andrade-Molina, M. (2022). Discordancias del currículo escolar: Homotecia más allá de la proporcionalidad. *Revista Chilena de Educación Matemática, (14)*1, 31-42. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.105

Iturra, F. Cabrera, M. y Monsalva, C. (2021). Matemática 7° Básico, texto del estudiante. *Catálogos de textos escolares 2024.*

Shulman, L. (1986*)*. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2),* 4-14

Yin, R. (2014). *Case study research: Design and methods*. Sage Publications. https://doi.org/10.3138/cjpe.30.1.108

CONEXIONES EXTRA-MATEMÁTICAS ESTABLECIDAS POR FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA AL DISEÑAR TAREAS ESCOLARES GEOMÉTRICAS

Juan Pablo Vargas Herrera, Universidad de las Américas – UDLA

Yuly Vanegas, Universitat de Lleida

Joaquín Giménez, Universitat de Barcelona

Abstract:

Diferentes modelos del conocimiento del profesor de matemáticas subrayan la importancia de establecer conexiones, pues profundizan en la conceptualización de objetos, siendo fundamentales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una conexión matemática se puede entender como una relación entre dos objetos, que pueden o no pertenecer a las matemáticas. Establecer conexiones sólidas es una herramienta potente en el aprendizaje, al vincular lo matemático con lo cotidiano, lo que otorga un estatus especial al conocimiento. Las investigaciones en didáctica de las matemáticas clasifican las conexiones en intra-matemáticas y extra-matemáticas; sin embargo, la mayoría de los estudios han desarrollado primordialmente las primeras y, han enfocado sus análisis a niveles educativos distintos a la formación de profesores de Educación Primaria. El presente reporte presenta uno de los resultados, al investigar las conexiones extra-matemáticas que emergen al enfrentar a un grupo de 250 futuros docentes de Educación Primaria a una tarea profesional geométrica. El análisis, utilizando herramientas de la teoría de las conexiones y del enfoque Onto-semiótico, describe las prácticas matemáticas, objetos movilizados y funciones semióticas que evidencian la emergencia de las conexiones. Los resultados evidencian la conexión Interdisciplinar genérica como un tipo de conexión extra-matemática. Se discuten finalmente, elementos necesarios para promover conexiones de mayor calidad y aspectos de avance metodológico.

Conexiones Extra-matemáticas; Formación docente; Primaria; Geometría; Enfoque Ontosemiótico

INTRODUCCIÓN

Según el NCTM (2000) el aprendizaje de las matemáticas es más profundo y duradero si los alumnos pueden conectar ideas matemáticas con el mundo que los rodea. Desde esta perspectiva, numerosos autores han investigado las conexiones matemáticas (Businskas, 2008; García-García y Dolores-Flores, 2018; Rodríguez-Nieto et al., 2021, entre otros) estableciendo definiciones, interpretaciones y categorías de análisis para diferentes niveles educativos. En el presente documento, se entienden las conexiones como "un proceso cognitivo a través del cual una persona relaciona dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real" (García-García y Dolores-Flores, 2018, p. 22).

El estudio sobre conexiones, en el marco de la formación de profesores de Educación Primaria, es un campo reciente y, por tanto, con bastantes elementos inexplorados. Hoy en día, la investigación al respecto se ha enfocado principalmente en docentes de matemáticas de secundaria, tanto en formación como en servicio (García-García y Dolores-Flores, 2018), enfatizado mayoritariamente en las de tipo intra-matemático. Por ello, resulta necesario desarrollar investigaciones que exploren las conexiones en el ámbito de la formación de profesores de Educación Primaria, con el fin promover aspectos clave para su establecimiento en la enseñanza desde los primeros niveles educativos.

Este reporte de investigación tiene por objetivo, caracterizar una conexión extra-matemática reconocida al enfrentar a un grupo de 250 futuros docentes de Educación Primaria a tareas profesionales en relación con la geometría justificando su emergencia desde las herramientas de la teoría de las conexiones matemáticas y el Enfoque Onto-semiótico. El resultado reportado hace parte de una investigación doctoral que detectó seis diferentes tipos de conexiones extra-matemáticas, por cuestiones de extensión, se presenta en este documento únicamente una en detalle.

REFERENTES TEÓRICOS

A continuación, se presentan algunos aspectos sobre las conexiones matemáticas y posteriormente una síntesis de algunas herramientas del Enfoque Onto-semiótico utilizadas en los análisis.

LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS

Las conexiones matemáticas han sido objeto de estudio en la educación matemática, pues subrayan la importancia de vincular las matemáticas con el mundo real, dirigiendo la investigación educativa durante las últimas décadas (Businskas, 2008). Diferentes agentes han instado su uso e inclusión en currículos nacionales y en general se han constituido como elementos clave para la enseñanza de las matemáticas. A pesar de la extensa investigación, no existe una definición o categorización universalmente aceptada de estas (García-García, 2019). Diversas investigaciones han definido y tipificado conexiones matemáticas (Businskas, 2008; de Gamboa y Figueiras, 2014) dichos trabajos refieren a las relaciones que se pueden establecer entre elementos dentro y fuera de las matemáticas. Actualmente, se identifica una *conexión intra-matemática* como aquella que se produce entre elementos de las matemáticas; mientras que una conexión que establece relaciones entre un objeto externo y uno interno a las matemáticas, se define como *extra-matemática*. Respecto a las conexiones extra-matemáticas, Vanegas y Giménez (2018) categorizaron algunas de estas, identificadas en las producciones de un grupo de futuras maestras de educación básica. Las conexiones identificadas fueron: Modelizadora, Mediadora, Semiótica, Metafórica, de Materialización e Interdisciplinar genérica; este último tipo de conexión, referida a relaciones establecidas entre elementos de una disciplina, que funciona como elemento extra-matemático y representaciones de un objeto matemático, usualmente expresadas de manera genérica o poco profundizada.

HERRAMIENTAS DEL ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO (EOS): LAS CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS

El EOS considera que una práctica matemática es toda aquella secuencia de acciones, sujetas a normas matemáticas, realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros su solución, validarla, generalizarla y utilizarla en otros contextos (Godino et al., 2007). Cobra relevancia normalmente no como un elemento individual, sino que, hace parte de un sistema de prácticas que se manifiesta al enfrentar a una persona a una situación problema.

Godino et al. (2007) indican que para llevar a cabo una práctica matemática y posteriormente interpretar sus resultados como satisfactorios, es necesario poner en funcionamiento una serie de conocimientos. De esta manera, siempre que se lleva a cabo una práctica matemática para resolver un problema, una serie de objetos se movilizan, tales como situaciones, problemas, conceptos, proposiciones y procedimientos, estos intervienen en la elaboración de argumentos que puedan determinar las acciones de las cuales se compondrá la práctica. El EOS ha descrito, cómo dichos objetos pueden ser articulados mediante las denominadas configuraciones.

Las configuraciones permiten el análisis de la práctica matemática y brindan evidencia de la existencia o no, de diferentes tipos de conocimientos en quien realiza la tarea o actividad matemática, adquiriendo un carácter de *configuración epistémica* cuando se habla de la red de objetos institucionales (y por ende correctos) que se movilizan o *cognitivas*, cuando refiere a redes de objetos personales (que pueden ser o no del todo correctos). Las relaciones establecidas entre los diferentes objetos emergentes en cada una de las configuraciones se pueden identificar como *Funciones semióticas*. Según Godino et al. (2007) la noción función semiótica (FS), es la estructura metafórica que genera la correspondencia entre conjuntos incluyendo: un plano de expresión (objeto inicial), un plano de contenido (objeto final) y un criterio o regla de correspondencia. Dichas funciones serán clave para el logro del objetivo propuesto en este reporte. (ver Figura 1)

METODOLOGÍA

Este reporte expone uno de los resultados de una investigación con metodología de estudio de casos (Yin, 2014). El caso es el de las prácticas del grupo humano que configura una clase de didáctica de la geometría, perteneciente a un grado particular. Se diseña e implementa una tarea profesional (TP) con un total de 250 futuros maestros del grado de Educación Primaria de una universidad pública. La asignatura en la cual se llevó a cabo la implementación es la única que tienen los participantes, relativa a didáctica de la geometría dentro de su programa de formación. El instrumento de investigación corresponde a una tarea profesional (TP1) consistente en la presentación de una serie de imágenes de elementos/situaciones reales (protozoos, movimientos de la tierra en el espacio, la calzada gigante de Noruega, el Hotel W de Barcelona, etc.) a partir de las cuales, los futuros maestros debían diseñar una tarea escolar para la enseñanza de la Gometría, solicitándoles el enunciado completo.

Para el análisis de las conexiones obtenidas se utilizaron herramientas del EOS, particularmente el constructo de configuraciones epistémicas (Godino et al., 2007). Las que permitieron obtener una imagen completa de la actividad matemática realizada y los objetos primarios involucrados. El análisis de los datos se realizó en cuatro fases siguiendo una estructura similar a la planteada por Rodríguez – Nieto et al. (2021). La primera consistió en la revisión y organización de las respuestas de los futuros maestros, desde cada uno de los protocolos escritos que entregaron. Mediante el análisis de los protocolos fue posible extraer la información sobre las prácticas matemáticas que realizaron los futuros maestros en sus respuestas a la tarea propuesta. La segunda fase consistió en describir las prácticas matemáticas; seleccionando secuencias de acciones reguladas por reglas establecidas a nivel institucional y que buscaban la solución del problema propuesto. La tercera fase consistió en la construcción de la configuración epistémica para TP1, la cual refleja los objetos primarios que emergieron en las soluciones propuestas por los futuros maestros. Finalmente, en la cuarta fase se establecieron posibles funciones semióticas entre los objetos primarios de la configuración, lo que permitió conformar grupos de funciones semióticas que posteriormente sirvieron como descripción de las conexiones matemáticas. El análisis propuesto se realizó en reiteradas ocasiones con diferentes instrumentos; sin embargo, el presente documento narra el proceso únicamente para una tarea, permitiendo visualizar la emergencia de una conexión Interdisciplinar genérica.

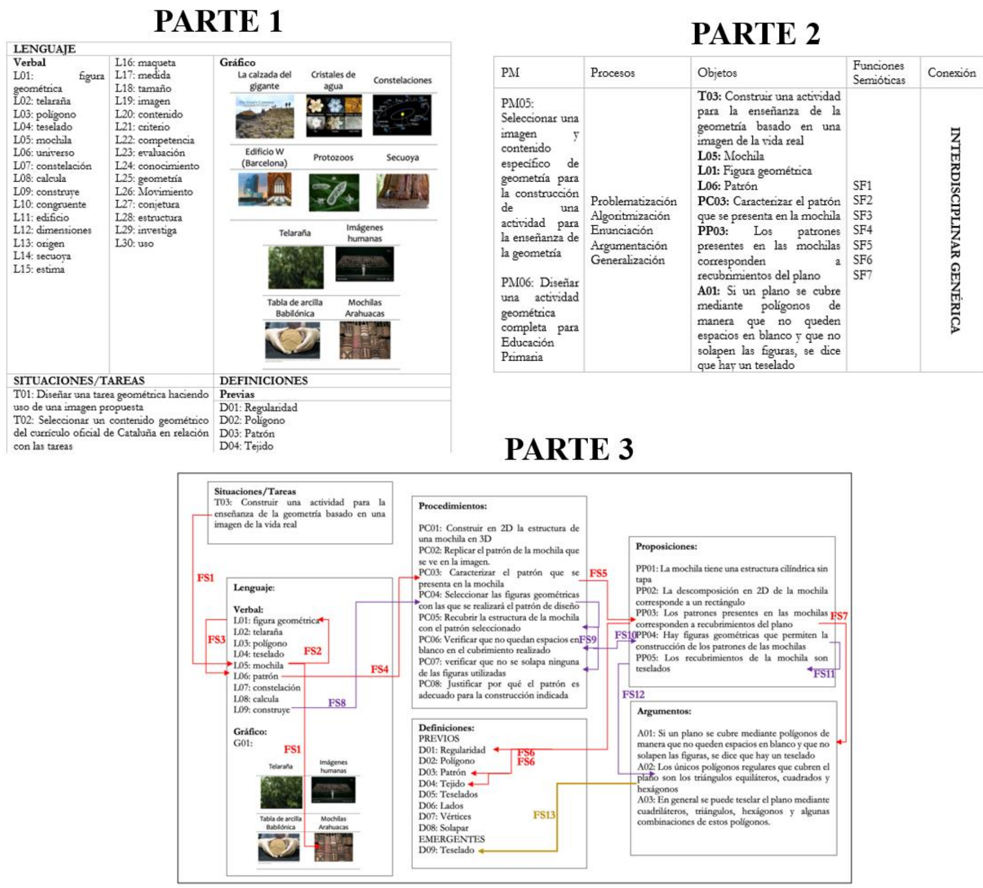
RESULTADOS

Para alcanzar el objetivo propuesto de caracterizar un tipo de conexión extra-matemática y justificar su emergencia, los resultados obtenidos se agrupan en tres tipos. El primero, corresponde a las configuraciones epistémicas logradas; en este reporte se presenta un fragmento del análisis a una de las propuestas de solución a la TP1 entregada por el grupo 7 del año 2020 (G7_2020). En la propuesta de G7_2020, utilizando la imagen de una mochila artesanal, se intenta abordar la idea de teselados mediante el tejido de mochilas. La Figura 1 – parte 1 presenta un extracto de dicha configuración, la propuesta de solución fue descompuesta en aquellos objetos primarios que emergieron; se incluyen los conceptos utilizados por los futuros maestros, los procesos y procedimientos realizados y los argumentos que brindan en relación con las prácticas matemáticas. Posteriormente, el segundo grupo de resultados refiere a las funciones semióticas, correspondientes a las relaciones establecidas entre los objetos primarios (Ver Figura 1 – parte 3), este proceso permite vislumbrar las relaciones que se pueden generar entre los objetos y el valor que tiene la utilización de uno u otro tipo de objeto.

En el caso del G7:2020 (ver Figura 1 – parte 3) es posible ver cómo a partir de la propuesta de construir una mochila artesanal, se aborda una idea geométrica. La tarea que proponen, proviene de la disciplina del tejido y confección, su diseño y la estructura que la conforman corresponden con una práctica extra-matemática; aun así, los elementos que entran en juego como los conocimientos y actividades asociadas, apuntan a elementos intra-matemáticos; un ejemplo de ello es, el hecho de que la mochila está cubierta por estructuras como cuadriláteros, triángulos o hexágonos, que permiten la conexión con la idea matemática de teselado y el argumento de que, únicamente mediante estas figuras es posible cubrir por completo el plano sin solaparlas y sin dejar espacios en blanco (dos condiciones que en matemáticas son necesarias para la construcción de un teselado, pero que además en la disciplina textil tienen un significado en cuanto a la estética y diseño mismo de la mochila).

Finalmente, un tercer tipo de resultados se presenta en la Figura 1 – parte 2, la tabla que allí se presenta corresponde a un fragmento de las diferentes asociaciones y relaciones establecidas entre los procesos que emergieron al desarrollar cada una de las prácticas matemáticas identificadas, los que posteriormente desencadenaban una serie de objetos en relación y funciones semióticas que al agruparse, permiten visualizar y justificas el tipo de conexión que emerge, así como el camino por el cual el grupo de futuros maestros de Educación Primaria accedió; en el caso de G7_2020, el fragmento de tabla presentado, evidencia cómo desde una disciplina (externa a las matemáticas) se pueden reconocer una serie de prácticas que movilizan objetos y desencadenan una conexión con ideas geométricas, de ahí la denominación de la conexión como *Interdisciplinar Genérica*.

Figura 1. Configuración, Funciones semióticas y conexiones matemáticas en G7_2020



DISCUSIÓN Y REFLEXIONES FINALES

Los análisis presentados en la Figura 1, se realizaron para todas las tareas profesionales diseñadas en el curso de Espacio y Forma, lo cual se puede profundizar en Vargas et. al (2024); respecto a este reporte, los resultados permiten la teorización de nuevos elementos y evidencian la manera en que emerge una conexión extra-matemática desde el trabajo propuesto a futuros maestros de Educación Primaria; adicionalmente aporta al análisis y caracterización de una población que hasta el momento no se había abordado de manera profunda. Se logra, mediante el uso de las herramientas del EOS dar razones sobre la existencia de las conexiones detectadas. Según García – García (2019) la investigación en educación matemática tiene la potestad de validar las conexiones matemáticas que actualmente se conocen, así como también de proponer incluir nuevas categorías que aún no se han identificado. Este tipo de resultados aporta a la teoría de las conexiones matemáticas, evidencias de la existencia de otro tipo de conexión como una colección de funciones semióticas que relacionan objetos movilizados al realizar uno u otro tipo de práctica matemática. La conexión interdisciplinar genérica, aborda la idea de relacionar elementos de otras disciplinas con objetos matemáticos; así, mediante el trabajo interdisciplinar, se logra la consolidación de objetos matemáticos que, a su vez, aportan a la solución de problemas en la disciplina de la que provienen u otras. Una dificultad a la hora de trabajar con este tipo de conexión, vienen dada por los conocimientos que se requieren para su emergencia; se coincide con Rebello et al. (2017) quienes afirman que para que haya emergencia de conocimiento en una tarea de tipo interdisciplinar, es necesario que el estudiante tenga un esquema robusto en el contexto inicial, además, debe saber cómo aplicar estos conceptos matemáticos en tareas de las demás ciencias. En este sentido, el logro de conexiones interdisciplinares potentes requerirá adicionalmente de conocimientos en otras disciplinas, como en el caso de G7_2020, conocimientos sobre el diseño textil o la artística. Metodológicamente se coincide con Godino et al. (2007), pues el uso de las configuraciones epistémicas permite el análisis de la práctica matemática y brinda evidencia de la existencia o no, de diferentes tipos de conocimientos; en este caso la construcción de las configuraciones y su análisis detallado en relación con los procesos y las prácticas matemáticas permitió evidenciar la emergencia de una conexión extra-matemática.

REFERENCIAS

Businskas, A. M. (2008). Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections [tesis doctoral no publicada]. Simon Fraser University, Canadá.

de Gamboa, G. & Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337 – 344) Salamanca: SEIEM.

García-García, J. G. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas, 100*, 129-133.

García-García, J. & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(2), 227–252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education, 39*(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics (Trad. Castellana, Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).

Rebello, N., Cui, L., Bennett, A., Zollman, D. & Ozimek, D. (2017). Transfer of learning in problem solving in the *context of mathematics and physics. In Jonassen, D. (Ed.) Learning* to Solve Complex Scientific Problems (1st edition, pp. 223-246). https://doi.org/10.4324/9781315091938-10

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F., Font, V. & Morales, A. (2021). Una visión desde la red de teorías TAC-EOS sobre el papel de las conexiones matemáticas en la comprensión de la derivada. *Revemop, 3*, 1–32. https://doi.org/10.33532/revemop.e202115

Vanegas, Y. & Giménez, J. (2018). Conexões extramatemáticas na formação inicial de docentes. *Estudos Avançados, 32*(94), 153–169. https://doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0012

Vargas Herrera, J. P., Vanegas, Y., & Giménez, J. (2024). Conexiones extra-matemáticas que establecen futurosmaestros de Educación Primaria al diseñar tareas escolares geométricas. *AIEM - Avances de investigación eneducación matemática*, *25*, 57-80. https://doi.org/10.35763/aiem25.644

Yin, R. (2014) *Case Study Research: design and methods*. Newbury Park: Sage Publications.

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA FUTURA PROFESORA DE MATEMÁTICAS DURANTE SU PRÁCTICA PROFESIONAL

Gabriel Meza-Pereira, UCSH - UHU

Miguel Ángel Montes, UHU

Abstract:

Esta investigación se centra en analizar el conocimiento especializado de una futura profesora de matemáticas durante su práctica profesional. Utilizando el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), el estudio examina cómo se aplica este conocimiento en el aula, específicamente en la enseñanza de las funciones cuadráticas. La observación de clase y la entrevista semiestructurada revelan tanto fortalezas como áreas de mejora. La profesora en formación demuestra un sólido conocimiento del contenido y usa eficazmente herramientas tecnológicas, como GeoGebra, para visualizar conceptos matemáticos y mejorar la comprensión de los estudiantes. Sin embargo, enfrenta desafíos al conectar los contenidos actuales con conceptos matemáticos futuros, como las funciones inversas, y en la anticipación de las dificultades de los estudiantes. Estos hallazgos sugieren la importancia de desarrollar más competencias en la planificación, la conexión entre temas matemáticos y el uso de estrategias de evaluación formativa. El estudio destaca el papel crucial de las prácticas profesionales en la integración del conocimiento teórico en contextos de enseñanza reales, subrayando la necesidad de un programa de formación inicial docente bien estructurado. Este trabajo contribuye al debate sobre cómo fortalecer la educación de los profesores de matemáticas, centrándose en el desarrollo y aplicación del conocimiento especializado durante la práctica profesional.

Educación matemática, profesora en formación, práctica profesional, conocimiento especializado, MTSK, formación docente

INTRODUCCIÓN

El conocimiento especializado de los futuros profesores de matemáticas es clave para mejorar la calidad de la educación. Durante las prácticas profesionales, los docentes en formación aplican sus conocimientos teóricos en el aula, enfrentándose a situaciones reales que requieren de un dominio tanto de los contenidos matemáticos como de las estrategias didácticas. Esta etapa es crucial para su desarrollo profesional, ya que les permite integrar teoría y práctica en su quehacer pedagógico (Montes Climent y Contreras, 2022).

A pesar de los avances en la formación inicial docente, diversas investigaciones indican que muchos futuros profesores experimentan dificultades para fusionar adecuadamente los aspectos matemáticos y pedagógicos durante sus prácticas. Según Advíncula-Clemente et al. (2022), estas carencias pueden impactar en la efectividad de su enseñanza, lo que subraya la importancia de una formación inicial sólida y coherente que atienda estos desafíos.

El presente estudio busca analizar cómo se moviliza el conocimiento especializado de una futura profesora de matemáticas durante su práctica profesional. A través de la observación de una clase y la posterior entrevista, se examina el conocimiento que despliega en el aula y los desafíos que enfrenta al enseñar conceptos matemáticos complejos, como las funciones cuadráticas.

El enfoque teórico utilizado es el Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) de Carrillo et al. (2018), que proporciona un marco robusto para observar y analizar el conocimiento docente en acción. Este análisis permitirá identificar tanto las fortalezas como las áreas de mejora, aportando al debate sobre cómo optimizar la formación inicial docente en matemáticas.

La problemática

El conocimiento especializado de los profesores de matemáticas sobre las funciones debe integrar tanto la comprensión profunda de los conceptos matemáticos como las habilidades didácticas necesarias para facilitar el aprendizaje de sus estudiantes. Es fundamental que los docentes no solo dominen los sistemas de representación algebraico y gráfico, sino que también sepan cuándo y cómo utilizar cada uno de ellos para maximizar la comprensión de los estudiantes. Este conocimiento incluye la capacidad de reconocer y abordar las dificultades comunes en el aprendizaje de las funciones, emplear contraejemplos cuando sea necesario y conectar conceptos como la continuidad y la derivabilidad de manera efectiva. Además, es esencial que los profesores actualicen continuamente sus conocimientos y utilicen herramientas tecnológicas, como GeoGebra y Desmos, para enriquecer las experiencias de aprendizaje en el aula (Dubarbie y García Gallo, 2023).

El problema central de esta investigación radica en la necesidad de entender cómo los futuros profesores de matemáticas movilizan y desarrollan su conocimiento especializado durante sus prácticas profesionales. A pesar de los avances en la formación inicial docente, la literatura sugiere que persisten deficiencias en la preparación matemática y pedagógica de los futuros docentes, lo que repercute en la calidad de la enseñanza que ofrecen (Advíncula-

Clemente et al., 2022; Díaz, 2015). En este contexto, resulta crucial explorar cómo las prácticas profesionales pueden contribuir al desarrollo de un conocimiento didáctico-matemático más sólido y eficaz.

La investigación busca no solo identificar el conocimiento que los futuros profesores exhiben en el aula, sino también comprender cómo dicho conocimiento evoluciona a lo largo de sus experiencias prácticas. Esto permitirá abordar una brecha en la literatura actual, la cual ha tendido a centrarse en momentos puntuales del proceso formativo sin proporcionar un análisis longitudinal sobre la maduración del conocimiento docente durante las prácticas profesionales (González-Brito & Calvo-Rost, 2012; Quiroz-Meza & Mayor, 2019).

MARCO TEÓRICO

El Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) fue propuesto por Carrillo et al. (2018) para comprender y analizar de manera más detallada el conocimiento que los profesores de matemáticas movilizan en su práctica. Este modelo surge como una evolución de los marcos previos como el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) de Shulman (1986) y el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) de Ball, Thames y Phelps (2008). A diferencia de estos modelos, el MTSK se enfoca específicamente en las particularidades del conocimiento que un profesor de matemáticas debe dominar y aplicar en el aula, integrando de manera equilibrada tanto los aspectos matemáticos como los didácticos.

El MTSK se organiza en dos grandes dominios: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico. Cada uno de estos dominios se subdivide en varios subdominios que permiten una descripción más fina de los componentes del conocimiento docente. El conocimiento matemático incluye el conocimiento común del contenido (relacionado con saberes matemáticos que cualquier persona podría manejar), el conocimiento especializado del contenido (relacionado con el conocimiento que solo los profesores de matemáticas necesitan para enseñar) y el conocimiento avanzado del horizonte matemático (que implica una comprensión amplia y conectada de la disciplina para guiar el aprendizaje a lo largo de los años escolares) (Carrillo et al., 2018).

Por su parte, el conocimiento didáctico se descompone en varios subdominios, como el conocimiento de la enseñanza, que abarca estrategias pedagógicas específicas para enseñar matemáticas; el conocimiento de los estudiantes y sus procesos de aprendizaje, que involucra la capacidad de anticipar dificultades y malentendidos; y el conocimiento del currículo, que implica una comprensión profunda de los objetivos y contenidos programáticos, así como la capacidad de adaptarlos a las necesidades del aula (Carrillo et al., 2018).

La riqueza del modelo MTSK radica en su capacidad para integrar y analizar estos diferentes subdominios de manera holística. En lugar de centrarse exclusivamente en la competencia matemática del profesor o en sus habilidades pedagógicas, el MTSK busca entender cómo estos dos componentes interactúan durante la práctica docente. Este enfoque permite un análisis más detallado del conocimiento que los futuros profesores movilizan en sus prácticas profesionales, lo que lo convierte en una herramienta valiosa para evaluar su desarrollo durante la formación inicial (Montes et al., 2019).

Finalmente, el MTSK proporciona un marco robusto para la investigación educativa, ya que permite observar no solo los conocimientos que los profesores tienen, sino también cómo los aplican en contextos reales. Esto resulta especialmente útil en el análisis de las prácticas profesionales, donde los futuros docentes deben poner en juego todo su conocimiento matemático y didáctico para enfrentar las demandas del aula. Por lo tanto, utilizar el modelo MTSK en esta investigación permitirá obtener una comprensión más profunda y detallada del desarrollo del conocimiento especializado en los futuros profesores durante sus prácticas profesionales (Quiroz-Meza & Mayor, 2019).

MARCO METODOLÓGICO

Este estudio se enmarca en un enfoque cualitativo, orientado a comprender en profundidad cómo los futuros profesores de matemáticas movilizan y desarrollan su conocimiento especializado durante las prácticas profesionales. Según González-Monteagudo (2001), la investigación cualitativa permite explorar fenómenos educativos desde la perspectiva de los participantes, facilitando una comprensión detallada de las complejidades del proceso de enseñanza y aprendizaje.

El diseño de investigación seleccionado es el estudio de caso, dado que permite un análisis exhaustivo y contextualizado de un fenómeno particular dentro de un entorno real (Yin, 2018). Esta metodología es apropiada para investigar el desarrollo del conocimiento especializado en futuros docentes, ya que se focaliza en un número reducido de participantes, proporcionando una visión profunda de sus experiencias durante las prácticas profesionales.

Los participantes del estudio serán futuros profesores de matemáticas que cursan las asignaturas de Práctica Profesional I y II en la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de la Universidad Católica Silva Henríquez. Estas asignaturas representan etapas cruciales en su formación, donde los estudiantes asumen roles y responsabilidades similares a los de un docente en ejercicio, permitiendo observar la aplicación real de su conocimiento teórico en el aula (Programas de Práctica Profesional I y II).

Para la recolección de datos se emplearán múltiples instrumentos cualitativos. Se realizarán observaciones directas y grabaciones de las clases impartidas por los futuros profesores, lo que posibilitará analizar detalladamente sus prácticas pedagógicas y la manifestación de los subdominios del modelo MTSK en su enseñanza. Adicionalmente, se llevarán a cabo entrevistas semiestructuradas con los participantes, con el fin de profundizar en sus percepciones, reflexiones y justificaciones sobre sus decisiones didácticas (Montes, Climent y Contreras, 2022).

En este reporte de investigación damos cuenta del pilotaje de este estudio que se enmarca en el desarrollo de una tesis doctoral. Nos referiremos a una clase observada el 6 de junio de 2024 que duró 90minutos y la posterior entrevista de 45 minutos de una futura profesora de la carrera antes mencionada. La clase se centró en la resolución de ecuaciones cuadráticas a través del uso de la discriminante, un concepto matemático clave para comprender la naturaleza de las raíces de estas ecuaciones.

El análisis de los datos se efectuó mediante codificación y categorización, utilizando el modelo MTSK como marco analítico para identificar y caracterizar los diferentes componentes del conocimiento especializado movilizado. Este proceso permitió no solo describir el conocimiento manifestado durante las prácticas, sino también determinar las características de su desarrollo a lo largo del tiempo, aportando así a la comprensión del crecimiento profesional de los futuros docentes en contextos reales de enseñanza (Carrillo et al., 2018).

RESULTADOS

El análisis de la clase observada el 6 de junio de 2024 y la entrevista realizada a la futura profesora revelan aspectos fundamentales sobre cómo se moviliza el conocimiento especializado del docente en formación, en el contexto de la enseñanza de las funciones cuadráticas. Durante la clase, la futura profesora demostró un sólido conocimiento matemático al explicar el principio de la discriminante y su relación con las soluciones posibles de una ecuación cuadrática, lo que se enmarca dentro del subdominio Knowledge of Topics (KoT) del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018).

La integración de herramientas tecnológicas, como el uso de GeoGebra para visualizar las intersecciones de las parábolas con el eje X, fue un punto destacado. Esta herramienta permitió a los estudiantes observar de manera interactiva cómo el discriminante afecta la forma de la parábola y sus intersecciones, facilitando una comprensión más visual del concepto matemático. Este uso intencional de representaciones visuales refuerza la habilidad de la futura profesora para hacer accesible el contenido matemático y se alinea con el subdominio Knowledge of Practices in Mathematics (KPM), donde se aprecia la capacidad del docente para emplear estrategias que promuevan el entendimiento matemático a través de representaciones efectivas (Montes, Climent y Contreras, 2022).

Sin embargo, en la entrevista, la futura profesora reconoció que no había considerado profundamente la conexión entre este contenido y los conceptos matemáticos futuros, como las funciones inversas o las restricciones de dominio. Esto refleja un área de mejora dentro del subdominio Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM), donde las conexiones entre los temas y su secuenciación juegan un rol crucial para ofrecer una enseñanza que apoye un aprendizaje progresivo y coherente a lo largo del tiempo. Aunque la profesora mostró capacidad para conectar el contenido actual con conocimientos previos, como la resolución de ecuaciones cuadráticas, aún se puede profundizar en cómo estos conceptos se relacionarán con futuros temas matemáticos.

Durante la clase, la futura profesora también demostró un manejo adecuado de la selección de ejemplos representativos, abordando diferentes casos del discriminante (mayor que cero, menor que cero e igual a cero), lo que facilitó la comprensión de los distintos escenarios posibles en la intersección de la parábola con el eje X. Sin embargo, en la entrevista, no se mencionaron contraejemplos explícitos, lo que podría haber reforzado aún más el entendimiento de los estudiantes al anticipar posibles errores o malentendidos. Este aspecto sugiere que, si bien hay un buen manejo de Knowledge of Teaching (KMT) en términos de ejemplos visuales y el uso de tecnología, podría profundizarse en el uso de estrategias adicionales, como la discusión en clase o el trabajo colaborativo, para promover un entendimiento más profundo.

En relación con Knowledge of Features of Learning Mathematics (KFLM), la futura profesora reconoció la importancia de conectar los nuevos contenidos con los conocimientos previos de los estudiantes, como las raíces de las ecuaciones cuadráticas. Sin embargo, no se observó un esfuerzo consciente por anticipar las dificultades específicas que los estudiantes podrían enfrentar con el concepto de discriminante. Este es un aspecto clave para mejorar la enseñanza, ya que prever errores comunes y concepciones erróneas permite diseñar estrategias más efectivas para abordarlas y clarificarlas en el proceso de enseñanza (Santa Cruz, Thomsen, , Beas y Rodríguez, 2011).

Finalmente, el análisis desde el subdominio Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS) revela que, aunque la futura profesora tenía claros los objetivos de la clase relacionados con la discriminante, no hubo una planificación detallada sobre cómo estos conceptos podrían conectarse con contenidos futuros. Además, en la entrevista no se profundizó en cómo se evaluaba si los estudiantes habían alcanzado los objetivos de aprendizaje, ni en cómo se ajustaba la enseñanza en función de estas evaluaciones. Este aspecto es fundamental para el desarrollo de una práctica docente reflexiva y adaptable, que responda a las necesidades de los estudiantes de manera continua (González-Brito y Calvo-Rost, 2012).

CONCLUSIONES

Los resultados del estudio evidencian que la futura profesora de matemáticas posee un conocimiento sólido del contenido y utiliza eficazmente herramientas tecnológicas, como

GeoGebra, para facilitar la comprensión de conceptos complejos. Sin embargo, se identifican áreas de mejora, como la necesidad de planificar mejor las conexiones entre los contenidos actuales y futuros, y de anticipar las dificultades que los estudiantes puedan enfrentar. Estos ajustes permitirían una enseñanza más integrada y efectiva, mejorando la capacidad de la docente para guiar el aprendizaje.

Asimismo, se resalta la importancia de fortalecer el uso de evaluaciones formativas para ajustar la enseñanza según las necesidades de los estudiantes. Desarrollar estas competencias contribuiría a un aprendizaje más profundo y coherente, alineado con los estándares de aprendizaje de las matemáticas. En conjunto, estos hallazgos subrayan la relevancia de una formación inicial que fomente tanto el dominio del contenido como la capacidad de reflexionar y ajustar la práctica docente en tiempo real.

Referencias

Advíncula-Clemente, E., Beteta-Salas, M., León-Ríos, J., Torres-Céspedes, I., & Montes, M. (2022). Conocimiento especializado del profesorado de matemática en formación inicial acerca de los polígonos. *UNICIENCIA*, 36(1), 1-17. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.7

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher’s specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Díaz, H. (2015). *Formación docente en el Perú: Realidades y tendencias*. Departamento de Marketing de Santillana.

Dubarbie, L., & García Gallo, A. (2023). La enseñanza de la derivabilidad de una función en un punto: Sistemas de representación y conocimiento especializado del contenido. *Revista X*, 68, 1-16.

González-Brito, A. I., & Calvo-Rost, E. (2012). La formación inicial docente en Chile. *Revista Digital de Educación y Formación del Profesorado*, número extraordinario: Formación del profesorado, 1-12.

González-Monteagudo, J. (2001). El paradigma interpretativo en la investigación social y educativa: Nuevas respuestas para viejos interrogantes. *Cuestiones Pedagógicas*, 15, 227-246.

Montes, M. Á., Climent, N., & Contreras, L. C. (2022). Construyendo conocimiento especializado en geometría: Un experimento de enseñanza en formación inicial de maestros. *Aula Abierta*, 51(1), 27-36. https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.27-36

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., & Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: Una propuesta desde el modelo MTSK. En *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157-176).

Quiroz Meza, A., & Mayor Ruiz, C. (2019). Evaluación de competencias en la formación inicial de docentes de matemáticas. *Perfiles Educativos*, 41(163), 21-38. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2019.163.58919

Santa Cruz, M. J., Thomsen, M. P., Beas, J., & Rodríguez, C. (2011). Análisis de las clases de errores que cometen los alumnos y propuesta de andamiaje para aquellos errores que requieren cambio conceptual. *Revista Iberoamericana de Educación*, 57(1), 1-12.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. https://doi.org/10.2307/1175860

Yin, R. K. (2018). *Case Study Research and Applications: Design and Methods* (6ª ed.). Sage Publications.

Estudio de la articulación de conocimientos teóricos y prácticos en el espacio de trabajo matemático de la triada formativa

Romina Menares Espinoza, Universidad de Valparaíso

Laurent Vivier, Université Paris Cité

Resumen:

En esta contribución mostraremos resultados empíricos sobre cómo los conocimientos teóricos y prácticos que se despliegan en instancias de planificación, implementación y análisis de una clase de Enseñanza Media sobre logaritmo en base diez contribuyen al desarrollo del trabajo matemático de la triada formativa: profesor en formación, profesor guía, y profesor supervisor de las prácticas, atendiendo a la conocida problemática sobre la desarticulación de la teoría con la práctica en profesores. El trabajo se sustenta teóricamente en lo que se define como conocimiento teórico y práctico (Eraut, 2003), y en la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak et al., 2022).

La metodología que se utiliza es la investigación de diseño intervencionista (Gravemeijer y Cobb, 2006), pues creamos escenarios de colaboración de la triada cuando planifican, *implementan y discuten sobre una clase de logaritmo en base diez para tercer año de Enseñanza Media. Realizamos el estudio en el contexto de un taller dirigido por dos investigadores, en cinco sesiones, donde participaron veinte estudiantes en formación inicial que cursan práctica, dos profesores guías y tres formadores de profesores. Los resultados demuestran la construcción de espacios de trabajo matemático enriquecidos gracias a la reflexión que se produce en la interacción de los integrantes de la triada que participan, quienes lograron robustecer sus conocimientos sobre el logaritmo en base diez y su enseñanza.*

Conocimientos teóricos y prácticos, Espacios de Trabajo Matemático, triada formativa, logaritmo en base diez

INTRODUCCIÓN

Una de las preocupaciones desde hace décadas de la Educación Matemática y de la Educación en general es la brecha existente entre la teoría y la práctica en el desempeño docente, tanto en la formación inicial docente (FID) (Oonk, 2020; Potari, 2021), como en profesores en servicio (Jaworski, 2023). En su investigación, Jaworski se refiere a la exigencia hacia los profesores de trasladar lo que adquirieron teóricamente a sus prácticas en el aula, y a la urgente necesidad de que este problema sea atendido, señalando que un posible camino es que las teorías emerjan de manera genuina de la observación de la práctica docente.

Tradicionalmente, en los programas de formación de profesores, el acercamiento formal a las aulas de clases está considerado en las asignaturas de prácticas, las que funcionan como una bisagra entre la universidad y la escuela, y son una oportunidad para ir conciliando la teoría adquirida en la universidad con el quehacer profesional (Huong et al., 2020; Muñoz-Martínez et al., 2021). Pese a que las evidencias encontradas en la literatura insisten en la importancia de estrechar los vínculos entre el sistema universitario y el escolar, los estudios señalan que aún existen importantes carencias en las relaciones entre ambas instituciones relacionadas con las prácticas.

En los programas de FID, la colaboración entre universidad y escuela se encuentra formalizada a través de la conformación de la triada formativa, compuesta por el profesor en formación (PF), el profesor supervisor (PS) y el profesor guía (PG)–, cada uno con diferentes roles: el PG es quien se desempeña en la escuela y acompaña al PF; y el PS es un formador de profesores y es encargado de monitorear y evaluar la práctica del PF. Además de tener cada uno de ellos un rol distinto, es posible afirmar que poseen conocimientos diferentes (Jaworski y Huang, 2014). Romero-Jeldres y Maturana-Castillo (2012) declaran que, para fortalecer la FID, se requiere de una triada coordinada, que contribuya a los procesos reflexivos dados por la colaboración entre quienes la integran.

En nuestra investigación atendemos a la persistente necesidad de tender puentes eficaces entre los conocimientos teóricos y prácticos en la formación inicial, y abordamos el problema en un escenario destacado, que es la práctica profesional que realizan los PF. Nuestra pregunta de investigación es ¿Cuáles son los conocimientos teóricos y prácticos que se despliegan en el escenario compartido de la triada formativa?, y como objetivo nos proponemos estudiar la articulación de la teoría con la práctica y cómo esta permite enriquecer el trabajo de los docentes en el aula a partir de un trabajo de colaboración en la triada formativa.

Aspectos teóricos

En esta investigación entendemos por conocimiento teórico en la educación aquellos “conceptos, marcos, principios e ideas que pueden utilizarse para interpretar, explicar o juzgar intenciones, acciones y experiencias en entornos educativos o relacionados con la educación" (Eraut, 2003, p. 60, traducción propia). Estos conceptos pueden provenir tanto de la matemática como de la didáctica de la matemática. El autor considera como práctica "un conjunto o secuencia explícita de acciones que puede reproducir cualquier profesional con la competencia necesaria" (p. 63, traducción propia). Así, en nuestro trabajo buscamos en el diálogo que se da en la triada, elementos indicativos de conocimiento teórico o práctico que se hacen explícitos en el escenario de colaboración.

Para comprender cómo las interacciones y articulaciones que se dan entre los conocimientos teóricos y prácticos en el escenario colaborativo enriquecen al quehacer docente, utilizamos la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2022), la cual se plantea como una manera de explicar los procesos presentes en la actividad matemática y su articulación, y nos permite estudiar el trabajo de los profesores, tanto en fases lectivas como no lectivas.

La teoría propone que en un trabajo matemático están presentes dos planos: el plano epistemológico, relacionado con los objetos, su naturaleza y la estructura matemática, y el plano cognitivo, relacionados con la acción que realiza el sujeto, los usos y las interpretaciones. En el plano epistemológico se encuentran tres componentes: representamen (referido a los signos), artefactos (referido a las herramientas) y referencial teórico (referido a los conocimientos); y en el plano cognitivo se encuentran tres procesos: visualización (interpretación de los signos), construcción (utilización de los artefactos) y prueba (discurso articulando los conocimientos). Las componentes del plano epistemológico y las del plano cognitivo se articulan una a una a través de tres génesis: la génesis semiótica, que articula al representamen con la visualización; la génesis instrumental, que articula los artefactos con la construcción; y la génesis discursiva, que articula al referencial teórico con la prueba. Según la teoría, el espacio de trabajo matemático se opera cuando es posible realizar una articulación consistente de tales génesis, estimuladas por una tarea. (Kuzniak et al., 2022)

Para poder estudiar un ETM es relevante situarlo en un dominio matemático específico. Además, existe una distinción de los ETM según la relación con el saber, en términos didácticos y según el sujeto que aborda una tarea. Nuestro foco en este trabajo es el ETM idóneo potencial y real (Henríquez-Rivas, et al., 2022), que es el que se refiere a términos didácticos, es decir, en este espacio se concibe una reorganización didáctica del saber para ser llevado al aula por el profesor.

Bajo la teoría descrita, la riqueza del ETM desarrollado dependerá de la diversidad de elementos puestos en juego, de la coordinación y articulación de los procesos y de la calidad de los discursos (Kuzniak, et al., 2022).

Aspectos metodológicos

Metodológicamente, utilizamos la investigación de diseño intervencionista (Gravemeijer y Cobb, 2006), pues creamos un escenario de planificación, implementación y análisis de clases de enseñanza secundaria, en el cual ubicamos a la tríada, inicialmente con recursos proporcionados por los investigadores. La elección del tema lo hizo uno de los profesores guías, pues para él es un tema complicado de abordar en el aula. El rol de los investigadores fue de mediadores y el trabajo estuvo dirigido por preguntas activadoras. En particular, para el tratamiento del logaritmo en base diez, quisimos indagar en los fundamentos para el uso de un algoritmo para calcular decimales de valores del logaritmo, y en el rol que se le daría en la clase a la calculadora, por lo que las preguntas tuvieron una intención particular. Las actividades fueron escogidas por los investigadores, a partir de una indagación en la literatura sobre logaritmos y su enseñanza.

Seguimos las tres fases que los autores describen para la investigación de diseño: 1) Fase de preparación del experimento, 2) Fase de experimentación y 3) Fase de análisis retrospectivo.

En la primera fase, revisamos material correspondiente al logaritmo en base diez y organizamos el trabajo en tres actividades (A, B y C), estableciendo algunas preguntas guías para el trabajo. La actividad A consistió en analizar tareas propuestas para el tratamiento del logaritmo en un texto de tercer año de secundaria relacionada con los terremotos, y en el programa de estudios del mismo nivel. Se les pide a los participantes que respondan sin utilizar la tecla “log” de la calculadora. La actividad B consistió en comprender un algoritmo para la obtención del logaritmo de 2022 en base diez (figura 2). La actividad C consistió en analizar las cuatro nociones básicas (*Basic Model*) sobre logaritmo, presentadas en Weber (2016).

La fase 2 de la investigación de diseño se llevó a cabo en cinco sesiones: tres sesiones previas a la clase y dos sesiones posteriores a la clase. En la primera sesión participaron triadas repartidas en diferentes grupos. En las siguientes sesiones no hubo separación por grupos. Los investigadores asistieron a la clase que se implementó en el liceo por una de las profesoras guías, la cual fue videograbada. En la sesión posterior a la implementación, los participantes del taller observaron el video de la clase y reflexionaron sobre aspectos que les resultaron relevantes. En la última sesión del taller, los investigadores plantearon dos temas que identificaron como importantes de discutir: el uso de la calculadora y por qué enseñar el algoritmo.

La fase 3 de la investigación corresponde a un análisis retrospectivo que realizaron los investigadores posterior a la implementación. En este análisis establecieron temas y episodios en los vídeos que tuvieron relevancia en cuanto a la reflexión y a la bidireccionalidad de la colaboración entre los participantes.

Para los análisis, nos guiamos por Nechache y Gómez-Chacón (2022), para considerar las interacciones e identificar cómo estas van influyendo en la construcción del ETM. Los autores presentan una manera de relacionar metodológicamente la interacción, propia de ambientes de colaboración. En esta investigación identificamos si el conocimiento que se despliega es teórico o práctico, según Eraut (2003). Para atender a la componente de colaboración, identificamos episodios en los vídeos de las sesiones donde se observaba la reflexión sobre algún asunto específico, los aportes de dos o más sujetos en esa reflexión, y la verbalización de algún conocimiento nuevo generado a partir del diálogo. Los instrumentos de análisis tienen una validez interna, pues corresponde a la elaboración por parte de dos especialistas en el área, con más de quince años trabajando en la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático.

Resultados

Determinamos episodios en cada sesión, para identificar en ellos la activación de planos verticales, de manera de caracterizar la construcción de conocimiento en el trabajo matemático desarrollado. A continuación mostramos un episodio del inicio de la fase 2, a modo de ejemplo.

El primer episodio corresponde a una discusión sobre la actividad A, que se dio en un grupo compuesto por tres profesores en formación (PF), a quienes llamaremos Andrés, Beltrán y César. En el momento de la sesión los tres cursaban práctica intermedia (intervención de una unidad en el aula escolar). Se da el siguiente diálogo:

1. Andrés: Yo apliqué la fórmula y cuando despejé la E me quedó con una potencia, porque hay un logaritmo.

2 Beltrán: Ah, a mí me quedó lo mismo, eso, $3{,}6 \cdot 10^{24{,}55}$.

3 César: Ya, pero y ¿qué es esa potencia? (señalando la potencia de $10^{24{,}55}$). El 24 lo puedo entender, pero ¿el coma 55?, ese no sé qué es.

4 Beltrán: A lo mejor es por el coma 6 que nos dio antes (haciendo referencia al resultado que era $3{,}6 \cdot 10^{24{,}55}$). 0,55 se aproxima a 0,6.

5 Andrés: Ya, pero ¿qué tiene que ver eso con el resultado de lo otro?, yo no creo que sea eso, pero no sé qué es. Lo que sí, el estudiante debe saber la relación entre logaritmo y exponencial. Ya, ¿y la otra?, ¿cómo calculamos el logaritmo de esos números?

6 César: Yo estuve intentando, pero no pude, no llegué a nada, no se me ocurre…

El diálogo permite observar que existen tres activaciones en el ETM construido por los PF, motivados por la colaboración que se da entre ellos. La primera es la de la génesis instrumental acompañada de elementos discursivos, pues Andrés, además de aplicar la fórmula, justifica su resultado con el hecho de que el logaritmo en base diez es la inversa (en un sentido funcional) a la potencia de diez. Acá se observa el uso de un conocimiento teórico interpretado como un artefacto simbólico. La segunda activación es la de la génesis discursiva. La activación de esta génesis es motivada por una pregunta que realiza César, quien intenta interpretar el exponente 24,55, y destaca que el 24 es posible de interpretar, mientras que entrega una respuesta errada sobre la interpretación de la potencia 0,55. Andrés hace ver que la respuesta de César no es válida. En todo el diálogo se puede identificar la activación del plano [Ins-Dis], activado por la intención de interpretar un signo producido por la aplicación de una fórmula, en el plano [Sem-In]. Cuando Andrés hace referencia a lo que el estudiante debería saber, se observa un conocimiento práctico. Para esta parte del trabajo se comienza a observar una conexión inicial entre los conocimientos teóricos y prácticos, pues lo que Andrés manifiesta sobre lo que los estudiantes deben saber tiene relación con lo que los PF observan en el resultado del logaritmo.

El tercer episodio corresponde a la segunda sesión del taller, en la cual se comienza a planificar la clase. En este episodio intervienen cuatro PF –dos de ellos cursaban práctica inicial (Ana y Daniel) y dos práctica intermedia (Andrés y Carlos) y la profesora supervisora (PS). Los participantes discuten acerca del uso del algoritmo en la clase, estableciéndose el siguiente diálogo:

1 Ana: Queríamos ver cómo podríamos incluir lo del algoritmo, porque hay ciertas partes que no son muy intuitivas, como las de multiplicar por un uno conveniente.

2 Andrés: Sí, de hecho van a aplicar un algoritmo sin saber lo que es un algoritmo. Por ejemplo, cuando dividen por diez, no va a saber por qué tiene que dividir por diez.

3. PS: Es importante que lo grafiquen para que les haga sentido.

En esta interacción se discute sobre la necesidad de incluir el algoritmo en la clase. El cuestionamiento sobre la dificultad para comprender el “ uno conveniente“ es un indicador de conocimiento práctico. Lo que plantea Andrés, sobre lo que los estudiantes van a aplicar sin saber lo que están haciendo, indica una reflexión sobre los fundamentos matemáticos en el tratamiento del algoritmo, lo que nos sugiere una articulación de lo teórico con lo práctico.

Conclusiones

Este estudio presenta resultados sobre algunas sinergias que se producen en el trabajo compartido de docentes, cuando tienen un compromiso y objetivo común de preparar una clase exitosa sobre logaritmo en base diez. En este proceso, se puede observar cómo se presentan conocimientos teóricos y prácticos, y cómo la colaboración ayuda a articularlos, tal como propone Jaworski (2023). Además, el objetivo común ayuda a disminuir la relación jerárquica que se puede presentar en la tríada. El uso del artefacto calculadora es crucial para activar los conocimientos de los participantes y para poder analizar su ETM idóneo potencial. Además, el uso de este artefacto, al ser en ocasiones controversial en la enseñanza escolar, permite generar una discusión que promueve la articulación de conocimientos teóricos y prácticos en el desarrollo del ETM idóneo. Esta metodología de trabajo puede ser replicada para tratar otros objetos de la matemática, especialmente aquellos donde el artefacto calculadora es utilizado como una caja negra, y no se conocen los procedimientos para obtener un resultado; esta contribución también revela cómo el comprender lo que hace la calculadora es un buen aliciente para desarrollar las propiedades de los objetos en la sala de clases.

Referencias

Eraut, M. (2003). The many meanings of theory and practice. *Learning in Health and Social Care, 2*(2), 60- 65. 10.1046/j.1473-6861.2003.00045.x

Gravemeijer, K. y Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In: Van den Akker, J., Gravemeijer, K, McKenney, S. & Nieveen, N. (Eds). (2006). *Educational design research*. London: Routledge, 17-51.

Henríquez-Rivas, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transitional stage between personal and referencie Mathematical Work. In Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Richard, Ph. (Eds.), *Mathematical Work in educational context. The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces*. (pp. 121–147). Cham, Switzerland: Springer Nature.

Huong, V., Tung, N., Hong, T. y Hung, D. (2020). Partnerships Between Teacher Education Universities And Schools In Practicum To Train Pre-Service Teachers Of Vietnam. *International Journal of Higher Education, 9*(5), 134–152. https://doi.org/10.5430/ijhe.v9n5p134

Jaworski, B. (2023). A Golden Braid: * Weaving Terry Wood's unique threads of humanity in theory and practice, *Theory Into Practice, 62*(1), 90-101. http://doi.org/10.1080/00405841.2022.2135899

Jaworski, B. y Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM Mathematics Education*, 46, 173–188.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Richard, Ph. (2022). *Mathematical Work in educational context. The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces*. Cham, Switzerland: Springer Nature.

Muñoz-Martínez, Y., Domínguez-Santos, S., Madarova, S., De La Sen Pumares, S., y García Laborda, J. (2021). Inclusive Practicum: Creating Networks of Learning and Collaboration between Students, Teachers, and the Faculty of Education. *Revista Interuniversitaria de Formacion del Profesorado, 96*(35), 205–224. https://doi.org/10.47553/rifop.v96i35.3.89093

Nechache, A. y Gómez-Chacón, I. (2022). Methodological aspect in the theory of Mathematical Working Spaces. In Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Richard, Ph. (Eds.), *Mathematical Work in educational context. The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces*. (pp. 73–90). Cham, Switzerland: Springer Nature.

Oonk, W., Verloop, N. y Gravemeijer, K.P.E. (2020). Analyzing student teachers' use of theory in their reflections on mathematics teaching practice. *Mathematics Education Research Journal, 32* (4), 563– 588.

Potari, D. (2021). Mathematics teacher professional learning and teacher education practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24*(3), 227–230. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-021-09501-8

Romero-Jeldres, M. y Maturana-Castillo, D. (2012). La supervisión de prácticas pedagógicas: ¿cómo fortalecer la tríada formativa?. Magis, *Revista internacional de investigación en educación, 4*(9), 653- 667. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m4-9.sppc

Weber, C. (2016). Making Logarithms Accesible – Operational and Structural Basic Models for Logarithms, Journal für Mathematik–Didaktik, 37(1), 69–98.

Weber, C. (2019). Making Sense of Logarithms as Counting Divisions, The Mathematics Teacher, 112(5), 374-380

PROPUESTA DE EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA PARA PROFESORES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Álvaro Figueroa L., Universidad de Santiago de Chile

Melanie Cubillos D., Universidad Católica Silva Henríquez

Abstract:

En el proceso de ingreso a carreras de pedagogía, se ha implementado un sistema que exige una evaluación inicial, responsabilidad de la institución universitaria a la que ingresan. Esta investigación presenta una propuesta de evaluación diagnóstica para estudiantes que ingresan a la carrera de pedagogía en matemática, con el fin de identificar las competencias iniciales en el área disciplinar que poseen. El objetivo de este estudio es caracterizar el perfil de competencias dominadas presentes en el perfil de ingreso de estudiantes de pedagogía en matemática por medio del Modelo de Clasificación Diagnóstica Loglineal para generar adecuaciones y recomendaciones en sus cursos iniciales del programa formativo. La metodología se basó en la aplicación del software R-Commander a través del paquete CDM, utilizando la estimación bayesiana del Modelo Reducido Reparametrizado Unificado. La muestra fue seleccionada por conglomerado y estuvo compuesta por estudiantes que ingresaban al primer semestre de la carrera. Se buscará identificar tanto el desempeño general de los estudiantes como sus perfiles de habilidades dominadas y no dominadas. Estas habilidades, denominadas latentes, incluyen áreas fundamentales como aritmética, álgebra, funciones, geometría, estadística. Los resultados de este estudio permitirán diseñar intervenciones pedagógicas más ajustadas a las necesidades del estudiantado al inicio de su formación en Pedagogía en Matemática.

[Evaluación Diagnóstica, Modelo de Clasificación Diagnóstica Loglineal, Pedagogía en Matemática]

INTRODUCCIÓN Y PROBLEMÁTICA

Con el objetivo de garantizar el fortalecimiento de la profesión docente, la ley N° 20.903 introduce requisitos más exigentes para el ingreso a carreras de pedagogía y un sistema de dos evaluaciones obligatorias, la primera, como evaluación inicial que es responsabilidad de la institución universitaria a la que se ingresa y la segunda, de carácter nacional a cargo del Centro de Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP) del Ministerio de Educación. Además, esta ley asigna a la Comisión Nacional de Acreditación (CNA) como responsable de evaluar a las carreras de pedagogía de forma directa, incluyendo en sus criterios, las evaluaciones diagnósticas que deben realizarse, como ámbitos a revisar y analizar en la toma de decisión respecto de la acreditación (Maturana & Castillo, et al, 2023).

En línea con lo anterior, Vera (2020) menciona la relevancia de la evaluación diagnóstica para la toma de decisiones por parte del docente respecto de los procesos de enseñanza y aprendizaje; a su vez, Vega, López & Abrahante (2020), Galleano & Robello (2021), Muñoz & Vergara (2022) señalan la importancia de la evaluación diagnóstica a nivel universitario, puesto que contribuye al diseño de ajustes curriculares para un desarrollo integral de los estudiantes permitiendo potenciar a cada individuo con ciclos de nivelación al inicio de su formación profesional. También, Vega, López & Abrahante (2020) proponen realizar diagnósticos a nivel de carrera, ya que beneficiaría la calidad de la educación en aula.

Hoy en día este tipo de evaluación es obligatoria para las carreras de pedagogía, sin embargo, Giaconi et al. (2021) observaron que existe una desarticulación con los programas de formación docente o perfil de ingreso, respecto de las competencias que miden los diagnósticos presentados por las instituciones de educación superior para el general del estudiantado.

Nieto y Cacheiro (2021) indican que una de las dificultades en la medición de competencias radica en la complejidad de medir constructos que no son observables directamente, a su vez Morales, Hershberger y Acosta (2020) presentan la necesidad de operacionalizar las competencias por medio de acciones específicas que permitan inferir su logro mediante criterios previamente establecidos relacionados a los aprendizajes esperados o características deseadas.

Para el inicio de la formación profesional, las universidades han creado el Perfil de Ingreso, que se define como el conjunto de conocimientos, actitudes y habilidades que debe reunir el aspirante para garantizar el éxito en su formación profesional (Torres et al, 2019).

En este marco, Gu y Xu (2020) y Martínez & Templin (2023) mencionan que la información obtenida desde los Modelos de Clasificación Diagnóstica (MCD) puede ser utilizada en una variedad de inferencias en el contexto educativo, ya que permiten establecer tanto el desempeño general de cada estudiante como también determinar su perfil de habilidades dominadas y las aún no dominadas. Dichas habilidades, llamadas habilidades (atributos o variables) latentes, no son observables directamente, pero se pueden deducir y construir a partir de otras variables que sí son observables y, por lo tanto, medibles utilizando un modelo estadístico (Rupp, Templin & Henson, 2010).

Los MCD han ganado relevancia en la evaluación educativa en los últimos años (Chen et al, 2015; Gu & Xu, 2020), donde un test diagnóstico en base a los MCD es una herramienta estadística que permite generar un perfil de cada participante el cual detalla los conocimientos, actitudes y habilidades que el individuo domina y la probabilidad de responder correctamente cada ítem según su perfil de habilidades dominadas. Con esta información, es posible generar recomendaciones precisas y pertinentes para cada estudiante. Asimismo, los MCD respaldan la validez de estas interpretaciones. En pocas palabras, la medición diagnóstica constituye el proceso de analizar los datos de un test con el fin de tomar decisiones basadas en la clasificación de los individuos según su perfil de dominios.

Para construir una evaluación diagnóstica bajo los MCD, Rupp, Templin & Henson (2010) presentan la existencia de elementos característicos, tales como:

9. Vector de Respuesta de los ítems $\left(R = (R^1, \dots, R^L)\right)$: es el vector que representa el estado verdadero de cada respuesta, donde se asigna un 1 si la respuesta es correcta y un 0 de lo contrario.
10. Vector de Atributos o Dominios $\left(\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^K)\right)$: es el vector que representa el perfil de dominio de cada atributo, donde se asigna un 1 si domina la habilidad y un 0 de lo contrario. Este vector es también llamado vector de habilidades o competencias.
11. Matriz Q (Q_{LxK}): en ella se especifica la relación entre los ítems de la prueba y las habilidades que se miden en el ítem.

Uno de los MCD que ha adquirido mayor relevancia en los últimos años es el Modelo de Clasificación Diagnóstica Loglineal (MCDL) (Figueroa, 2022), el cual es parte de los Modelos de Clasificación Diagnóstica Conjuntista que establecen la posibilidad de que múltiples habilidades pueden interactuar de manera conjunta dentro de la función del ítem y, además, las habilidades individuales conservan efectos aditivos separables en la probabilidad de acierto al ítem.

El MCDL permite relacionar variables latentes categóricas y continuas, sin embargo, para ítems que miden más de dos competencias las interacciones de alto nivel son posibles pero difíciles de estimar. Como una solución, Culpepper & Hudson (2018) demostraron que utilizando el Modelo Reducido Reparametrizado Unificado las soluciones de las estimaciones convergen con menos iteraciones. Finalmente, la forma general del MCDL propuesta por Templin (2016) aparece en la literatura bajo la siguiente definición:

En el MCDL, los log-odds (logit) de una respuesta correcta condicionada a un patrón de dominios de un encuestado α_r están dados por:

$$Logit(Y_{ri} = 1|\alpha_r) = \ln\left(\frac{P(Y_{ri} = 1|\alpha_r)}{1 - P(Y_{ri} = 1|\alpha_r)}\right)$$

El logit se utiliza porque las respuestas son binarias, es decir, los ítems se respondieron correctamente (1) o incorrectamente (0). La función inversa convierte al logit sin límites en una probabilidad, es decir:

$$P(Y_{ri} = 1|\alpha_r) = \frac{\exp\Big(Logit\big(P(Y_{ri} = 1|\alpha_r)\big)\Big)}{1 + \exp\Big(Logit\big(P(Y_{ri} = 1|\alpha_r)\big)\Big)}$$

Un ejemplo del MCDL para la construcción del logit de un ítem i que relaciona dos habilidades latentes de un examinado con un perfil α_r de dominios es:

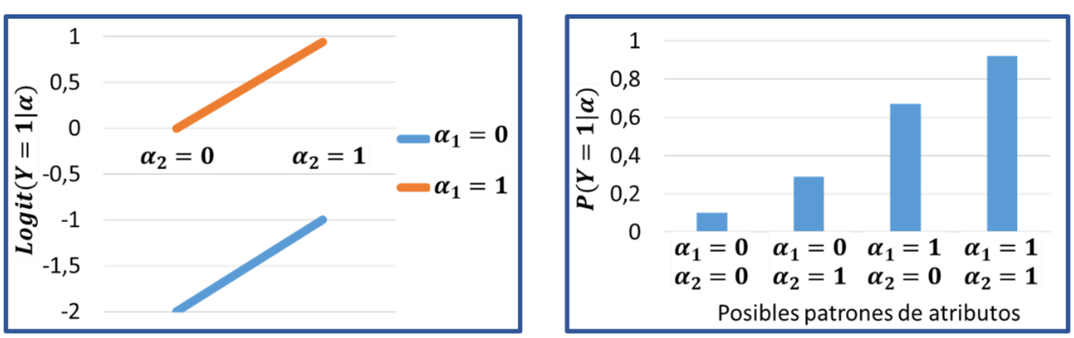
$$Logit(Y_{ri} = 1|\alpha_r) = \lambda_{i,0} + \lambda_{i,1,(1)}\alpha_{r1} + \lambda_{i,1,(2)}\alpha_{r2} + \lambda_{i,2,(1,2)}\alpha_{r1}\alpha_{r2}$$

Donde:

12. $\boldsymbol{\lambda_{i,0}}$: es el intercepto, es decir, el logit para los examinados que no dominan los atributos ($\alpha_{r1} = \alpha_{r2} = 0$), también llamado grupo de referencia.
13. $\boldsymbol{\lambda_{i,1,(1)}}$**:** efecto principal condicional para el atributo 1, marca el incremento del logit cuando el entrevistado domina el primer atributo.
14. $\boldsymbol{\lambda_{i,1,(2)}}$**:** efecto principal condicional para el atributo 2, marca el incremento del logit cuando el entrevistado domina el segundo atributo.
15. $\boldsymbol{\lambda_{i,2,(1,2)}}$**:** es la interacción entre los dos atributos, marca el cambio en el logit para la maestría tanto en el primer como en el segundo atributo.

Finalmente, una representación del aumento del *Logit* y de la Probabilidad de responder correctamente el ítem según el dominio de las habilidades latentes r ($\alpha_r = 1$) se muestra en la imagen 1.

Imagen 1: *Aumento de Logit y de la Probabilidad de responder correctamente el ítem*



Objetivo

Caracterizar el perfil de competencias dominadas presentes del perfil de ingreso de estudiantes de pedagogía en matemática por medio del Modelo de Clasificación Diagnóstica Loglineal para generar adecuaciones y recomendaciones en sus cursos iniciales del programa formativo.

Objetivos Específicos

1. Detectar patrones de raciocinio que involucren competencias presentes en el Perfil de ingreso de la carrera Pedagogía en Matemática.
2. Caracterizar las habilidades latentes que aumenten el éxito de estudiantes de primer año en el inicio de su formación profesional en una carrera de Pedagogía en Matemática.
3. Generar Modelo de Clasificación Diagnóstica Loglineal para estudiantes de primer año según sus habilidades latentes relacionadas al Perfil de ingreso de la carrera de Pedagogía en Matemática.

METODOLOGÍA

El enfoque del estudio es Cuantitativo y el alcance es Descriptivo, por otra parte, para generar el análisis de datos se utilizó el software RStudio a través del Pakage CDM (Robitzsch, Kiefer, George & Uenlue, 2022), utilizando la estimación bayesiana del Modelo Reducido Reparametrizado Unificado trabajado por Culpepper y Hudson (2018), el cual relaciona el efecto de la interacción de los atributos con el producto de los efectos principales.

Muestra

La elección de la muestra fue probabilística por conglomerado y está compuesta por estudiantes que estén ingresando al primer semestre del primer año de una carrera de Pedagogía en Matemática.

Habilidades Latentes

Cada habilidad latente se relaciona con una competencia deseada al inicio del proceso formativo de los estudiantes en la asignatura introductoria de cada línea disciplinar de la carrera Pedagogía en Matemática. En detalle, las habilidades latentes construidas son:

16. Aritmética (H_1): Aplica propiedades relacionadas con las operaciones suma, resta, multiplicación, división, raíces, potencias y logaritmos en los distintos sistemas numéricos.
17. Algebra (H_2): Resuelve problemas que implican el uso de expresiones algebraicas, los procesos de generalización y el análisis de situaciones.

18. Función (H_3): Resuelve problemas que requieran el análisis de situaciones que se modelan a través de una función lineal y/o cuadrática.
19. Geometría (H_4): Extrae información de representaciones gráficas para aplicar teoremas y propiedades de la geometría euclidiana que le permiten solucionar diversos problemas en el plano o el espacio.
20. Estadística (H_5): Argumenta la toma de decisiones a partir del análisis crítico de un conjunto de datos a través de gráficas, frecuencias y medidas de tendencia central y dispersión.
21. Actitud (H_6): Mostrar interés y una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas para comprender la realidad y la vida cotidiana.

Diseño, implementación y validación del Instrumento

El instrumento de recolección de datos es un cuestionario con 24 ítems de selección múltiple con cuatro alternativas donde sólo una es correcta y el resto son distractores. Los ítems fueron generados a partir de instrumentos validados y utilizados en evaluaciones de ingreso a estudios universitarios donde los ítems fueron modificados para mejorar su comprensión en el contexto de la muestra.

Finalmente, la aplicación de la evaluación es presencial a través de la plataforma Moodle y bajo la supervisión de un equipo de docentes. La evaluación tendrá un tiempo máximo de 90 minutos.

Matriz Q

La matriz que relaciona cada ítem con la o las habilidades latentes que mide es:

Imagen 2: *Matriz Q*

ITEM	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
ITEM 1	1	0	0	0	0	1
ITEM 2	0	0	1	0	0	0
ITEM 3	0	0	0	1	0	1
ITEM 4	0	0	0	0	1	0
ITEM 5	1	0	0	0	1	0
ITEM 6	0	1	0	0	0	0
ITEM 7	1	0	0	0	0	1
ITEM 8	1	0	0	0	0	0

ITEM	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
ITEM 9	1	1	0	0	0	0
ITEM 10	0	1	1	0	0	0
ITEM 11	0	1	0	0	0	0
ITEM 12	1	0	0	0	1	0
ITEM 13	0	0	1	1	0	0
ITEM 14	0	0	1	0	0	0
ITEM 15	1	0	0	1	0	0
ITEM 16	1	0	0	0	0	0

ITEM	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
ITEM 17	0	1	0	0	0	0
ITEM 18	0	0	1	0	0	0
ITEM 19	0	0	0	0	1	0
ITEM 20	0	0	0	1	0	0
ITEM 21	1	0	0	0	0	1
ITEM 22	0	0	1	0	0	1
ITEM 23	0	0	0	1	0	0
ITEM 24	0	0	0	0	1	1

CONCLUSIONES

La investigación resalta la importancia y la necesidad de generar evaluaciones diagnosticas pertinentes al grupo de estudiantes que inician su formación profesional, donde debe existir un compromiso desde la institución educativa para garantizar la educación de calidad.

Estas evaluaciones y las recomendaciones que se generan desde sus resultados deben ser específicas, atingentes y de rápido acceso para las y los docentes a cargo de las asignaturas iniciales de la carrera. En este marco, el MCDL emerge como una herramienta robusta para generar un perfil detallado de habilidades dominadas, permitiendo generar recomendaciones personalizadas. Asimismo, la validez y potencia de la inferencia es mayor en comparación con métodos tradicionales, lo que contribuye con decisiones pedagógicas más precisas y alineadas con los objetivos del programa formativo. Por ejemplo, si un estudiante presenta el perfil de dominios [111101] significa que domina todas las habilidades latentes excepto las relacionadas con Estadística, por lo tanto, sería recomendable que realizara un taller de reforzamiento que le permita argumenta la toma de decisiones a partir del análisis crítico de un conjunto de datos a través de gráficas, frecuencias y medidas de tendencia central y dispersión.

Finalmente, el software empleado en esta investigación, de acceso libre y fácil implementación, permite procesar los resultados en plazos breves, garantizando que las recomendaciones se traducen rápidamente en ajustes curriculares y metodológicos.

En síntesis, el análisis diagnóstico realizado mediante el Modelo de Clasificación Diagnóstico Loglineal ofrecen una base confiable y potente para optimizar la nivelación de los cursos iniciales de pedagogía en matemática, asegurando una formación ajustada a las necesidades individuales de cada futuro docente.

REFERENCIAS

Culpepper, S., & Hudson, A. (2018). An Improved Strategy for Bayesian Estimation of the Reduced Reparameterized Unified Model. Applied Psychological Measurement, 42, 99-115. Obtenido de https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5978651/pdf/10.1177_0146621617707511.pdf

Chen, Y., Liu, J., Xu, G., & Ying, Z. (2015). Statistical Analysis of Q-Matrix Based Diagnostic Classification Models. Journal of the American Statistical Association, 110(510), 850–866. https://doi.org/10.1080/01621459.2014.934827

Figueroa, Á. (2022). ¿Cómo Podemos Determinar Las Habilidades Dominadas Por Las Y Los Docentes De Matemática Y Sus Estudiantes? Experimentando Con Inferencia Estadística. XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática SOCHIEM.

Galleano, M., & Robello, E. (2021). Análisis de una evaluación diagnóstica como mejora de la práctica educativa. Campo Universitario, 2(3), 1-19. https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/137064

Giaconi, V., Gómez, G., Jiménez, D., Gareca, B., Durán del Fierro, F., & Varas, M. L. (2021). Evaluación diagnóstica inicial en la formación inicial docente en Chile y su relación con contextos institucionales. Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 59(1), 1-16. http://dx.doi.org/10.7764/pel.59.1.2022.4

Gu, Y., & Xu, G. (2020). Partial identifiability of restricted latent class models. The Annals Of Statistics, 48(4), 2082-2107. https://doi.org/10.1214/19-aos1878

Martinez, A., Templin, J. (2023). Approximate Invariance Testing in Diagnostic Classification Models in the Presence of Attribute Hierarchies: ABayesian Network Approach. Psych, 5, 688–714. https:// doi.org/10.3390/psych5030045

Maturana & Castillo et al. (2023). La Evaluación Nacional Diagnóstica y su efecto en la gestión académica de los planes de estudio de las carreras de Pedagogía en Chile. Santiago, Comisión Nacional de Acreditación, CNA-Chile

Morales, S., Hershberger, R., & Acosta, E. (2020). Evaluación por competencias: ¿cómo se hace?. Revista de la Facultad de Medicina (México), 63(3), 46-56.https://doi.org/10.22201/fm.24484865e.2019.63.3.08

Muñiz, J. (2018). Introducción a la Psicometría: teoría clásica y TRI. Pirámide.

Muñoz, L., Vergara, P., (2022). Caracterización de los estudiantes que ingresan a la Carrera de tecnología médica en la Universidad de Talca, Cohortes 2016 – 2020. [Tesis]. Universidad de Talca.

Nieto, J., & Cacheiro, M. (2021). La evaluación de las competencias en la formación profesional desde un enfoque basado en los resultados de aprendizaje. Revista Internacional De Organizaciones, (27), 173–196. https://doi.org/10.17345/rio27.173-196

Robitzsch, A., Kiefer, T., George, A., & Uenlue, A. (2022). Package Cognitive Diagnosis Modeling. Obtenido de https://cran.r-project.org/web/packages/CDM/CDM.pdf

Rupp, A., Templin, J., & Henson, R. (2010). Diagnostic Measurement: Theory, Methods, and Applications. Guilford Press.

Templin, J. (2016). Psychometric Models: The Loglinear Cognitive Diagnosis Model. Obtenido de Psychometrics and Statistics as a Way of Life: http://jonathantemplin.com/files/dcm/dcm16ncme/dcm16ncme_section03.pdf.

Torres, A., Acuña, J., Acevedo, G.& I., & López Ramos, V. M. (2019). Caracterización del perfil de ingreso a la universidad. Consideraciones para la toma de desiciones. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 9(18), 539-567. https://www.scielo.org.mx/pdf/ride/v9n18/2007-7467-ride-9-18-539.pdf

Vega, M., López, T., & Abrahante, A. (2020). El diagnóstico: concepción necesaria en el enfoque integral para la labor educativa en la universidad. Innovación Tecnológica, 26(2), 1-9. http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/442/4422329009/index.html

Vera, F. (2020). La importancia del proceso de enseñanza- aprendizaje y la evaluación diagnostica. Revista Atlante Cuadernos de Educación y Desarrollo. https://www.eumed.net/rev/atlante/2020/08/evaluacion-diagnostica.html

Xu, G. (2013). Statistical Inference for Diagnostic Classication Models [Tesis Doctorado]. Columbia University. https://doi.org/10.7916/D81R6XR7

REDISEÑO DE TAREAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO QUE INVOLUCRAN LA TRASLACIÓN DE FIGURAS PLANAS

Javiera Valdivia-González, Universidad Católica del Maule; Paula Verdugo-Hernández, Universidad de Talca; Carolina Henríquez-Rivas, Universidad Católica del Maule

Resumen:

Esta investigación aborda la formación inicial docente, enfocándose en la resolución de tareas matemáticas relacionadas con la traslación de figuras planas, con el fin de contribuir a la formación de profesores de educación primaria. Diversos estudios subrayan la carencia de conocimientos matemáticos profundos entre los futuros maestros, especialmente en la elaboración y enseñanza de tareas que involucren conceptos geométricos. En este contexto, se examina el trabajo matemático de los futuros docentes mediante la perspectiva del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), un modelo que permite analizar tanto el contenido matemático como los procesos cognitivos implicados en la enseñanza. La metodología adoptada es cualitativa con enfoque interpretativo, utilizando un estudio de caso instrumental. Participaron cinco futuros profesores de educación primaria, quienes desarrollaron y rediseñaron tareas emblemáticas. La investigación se centró en dos momentos clave: la resolución inicial de las tareas y su posterior rediseño colaborativo, con el objetivo de mejorar la enseñanza del concepto de traslación. Los datos fueron recolectados mediante producciones escritas y grabaciones audiovisuales, y se analizaron utilizando técnicas de análisis de contenido, basadas en las categorías del ETM. Los resultados buscan caracterizar cómo los futuros profesores integran sus conocimientos matemáticos y pedagógicos en el rediseño de tareas, con miras a mejorar su competencia en la enseñanza de conceptos geométricos en la educación primaria.

[Formación inicial docente, traslación de figuras planas, trabajo matemático]

INTRODUCCIÓN

En la presente investigación se muestran los análisis de tareas resueltas en la formación inicial docente (FID), asociadas con el concepto de traslación de figuras planas. Se pretende aportar especialmente a la formación de profesores de educación primaria.

En cuanto a la FID en matemática, diversos autores señalan la falta de conocimiento por los futuros profesores para la enseñanza de conceptos matemáticos (e.g. Aké y Páez, 2024; Burgos et al., 2024). Específicamente, relativo a la formación del profesorado de educación primaria en matemática, investigaciones resaltan la dificultad notoria para la elaboración de tareas que involucren un concepto matemático en profundidad (Burgos y Hernández, 2023; Wang et al., 2023; Alsina y Vásquez, 2024), por lo que el presente estudio pone atención a la resolución de tareas matemáticas por futuros maestros de primaria.

Además, el diseño de tareas se define como un ámbito de interés en la formación de profesores, dada su incorporación en el ámbito educativo para el análisis de una noción matemática (Rojas-Bello, 2020). La investigación sobre este tópico como recurso de enseñanza por parte de profesores es un objeto de estudio en desarrollo (e.g. Otero y Gazzola, 2022). No obstante, en este campo, la investigación sobre tareas geométricas aún es exiguo.

En particular, en el dominio geométrico, se destacan las investigaciones con integración de la tecnología, las cuales constituyen una mayoría relevante que permite analizar la interacción con los recursos (Pedersen et al., 2021) y los procesos de retroalimentación en los docentes (Bywater et al., 2023). Así mismo, se ha integrado en la formación de profesores, dando el énfasis en el diseño de tareas en un entorno de geometría dinámica (Gulkilik, 2020), en perspectivas de modelado (Guerrero-Ortiz y Camacho-Machín, 2022) y la relación con tareas en papel y lápiz (Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021).

Antecedentes de contexto

La educación primaria en Chile responde a un modelo pedagógico basado en objetivos (Tapia et al., 2023), los cuales poseen contenidos específicos y perspectivas actitudinales (Amorim y Ferri, 2021), que desarrollan en el nivel de octavo básico las transformaciones isométricas en el Objetivo de Aprendizaje [OA] 13 y OA 14. Por ende, dada su incorporación en los objetivos de educación primaria a través de su descripción y aplicación, se sustenta su integración en las tareas diseñadas.

Las investigaciones nacionales e internacionales que abarcan las transformaciones isométricas como objeto de estudio analizan esta noción en estudiantes mediante la justificación, representaciones simétricas o en esquemas argumentativos (e.g. Morales Ramírez et al., 2021a; Morales Ramírez et al., 2021b; Villarroel et al., 2023). Por lo tanto, los antecedentes que estudian las transformaciones isométricas han sido escasamente reportados, pese al potencial de la noción para trabajar visualización, argumentación y demostración (Labra Peña y Vanegas Ortega, 2022).

El profesor en formación debe procurar conducir el aprendizaje de cada objetivo. Al contrario, según un informe basado en la aplicación de una evaluación para medir los conocimientos disciplinarios y pedagógicos con que se espera cuenten los profesionales de la educación una vez que hayan finalizado su formación inicial, los futuros docentes de educación primaria presentan su mayor dificultad en la capacidad de conducir el aprendizaje de las figuras geométricas con todos elementos (Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas [CPEIP], 2021).

De lo presentado anteriormente, se destaca la necesidad de implementar tareas que incorporen un concepto geométrico, resueltas desde la perspectiva de profesores en educación primaria en formación que reflexionen con base en sus conocimientos matemáticos y disciplinares. En tal contexto, el objetivo de la presente investigación es caracterizar el trabajo matemático que favorece tareas rediseñadas por futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de la traslación de figuras planas. Las preguntas específicas que se abordan a partir de ello son:

1. ¿Qué características posee el trabajo matemático de los futuros profesores de educación primaria, al resolver una tarea basada en la traslación de figuras planas?
2. ¿Qué características posee el trabajo matemático de los futuros profesores de educación primaria, al rediseñar colaborativamente una tarea basada en la traslación de figuras planas?

MARCO TEÓRICO

Espacio de Trabajo Matemático

El Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011), tiene como propósito comprender, desde el punto de vista didáctico, aquello que se pone en juego alrededor del trabajo matemático, precisamente designado en el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos (Kuzniak y Richard, 2014). Aun cuando no fuese un modelo pensado como una herramienta para la formación del profesorado, esta perspectiva didáctica permite ver como el docente adquiere las concepciones matemáticas y realiza la transposición de estas para generar propuestas didácticas (Gómez-Chacón et al., 2016).

Considera la perspectiva epistemológica y cognitiva, aludiendo al estudio del contenido matemático y su organización (plano epistemológico) como al pensamiento del individuo (plano cognitivo) (Ticse et al., 2023). Sin embargo, con el fin de caracterizar la dimensión epistemológica, el modelo del ETM postula tres criterios puramente matemáticos que están relacionados: uno remitido a elementos teóricos matemáticos (referencial), otro que observa el objeto matemático (representante) y uno que hace referencia sistema simbólico utilizado (artefacto) (Henríquez y Montoya, 2015).

En conjunto con lo anterior, contempla así mismo la faceta cognitiva (Kuzniak y Nechache, 2021) caracterizada por el componente de visualización (la representación del espacio), construcción (asociado a los instrumentos y técnicas utilizadas) y la prueba (proceso discursivo de validación) (Kuzniak et al., 2016). En este sentido, se generan tres génesis que los articulan: génesis semiótica (Flores González y Montoya Delgadillo, 2016), la génesis instrumental (Flores Salazar y Carrillo Lara, 2019) y la génesis discursiva (Kuzniak et al., 2016).

Dado que el desarrollo del trabajo matemático en el ambiente escolar se enmarca desde la perspectiva de la institución educativa y la supervisión de los docentes, se logran introducir tres tipos de ETM: ETM de referencia, ETM idóneo y ETM personal. En común, cada uno de los tipos de ETM se caracteriza por la incorporación de una actividad matemática que es desarrollada en una tarea específica (Gaona, 2022). De esta forma, Kuzniak y Nechache (2016) han investigado el rol de las tareas en la configuración mencionada, caracterizando lo que han denominado como tareas emblemáticas. Estas tareas deben cumplir con tres condiciones para facilitar la exploración del trabajo matemático: poseer un reconocimiento de la institución y/o de la investigación en didáctica; formar parte de las tareas que se proponen en los ETM idóneos definidos por los libros de texto, y potenciar un trabajo matemático completo (Kuzniak et al., 2016).

Diseño de Tareas en Educación Matemática

Una tarea, en educación matemática, es considerada por Kuzniak et al. (2016) en un sentido amplio, como un problema matemático con suposiciones y preguntas claramente formuladas. Dado su enfoque, fomenta la participación de los estudiantes en actividades para la consolidación y conexión de conceptos (Trigueros y Oktaç, 2019), e impulsa el progreso del conocimiento pedagógico de los docentes para la enseñanza de las matemáticas (Marco y Palatnik, 2024). Por ende, las tareas desempeñan un papel crucial en el sistema educativo general (Yang y Ball, 2024).

Del mismo modo, el diseño de tareas o de materiales curriculares para la enseñanza, es un componente indispensable del trabajo de investigación en el ámbito señalado (García, 2019). Mas bien, en el contexto educativo, es relevante para la enseñanza de las matemáticas, beneficiando o dificultando el aprendizaje de los estudiantes (Tekkumru-Kisa et al., 2020). Debido a ello, desarrollar una práctica basada en tareas ricas de resolución es desafiante para los docentes (Gustafsson, 2024), por lo que se destaca el rol clave del diseño de tareas para un aprendizaje eficaz de las matemáticas (Radmehr, 2023).

METODOLOGÍA

Características generales

El presente estudio es de carácter cualitativo con orientación interpretativa (Hernández-Sampieri y Mendoza Torres, 2018). Específicamente, se adopta un estudio de caso instrumental (Simons, 2011) y la unidad de análisis se centra en el desarrollo de una actividad formativa de los futuros profesores de educación primaria al rediseñar y mejorar tareas relacionadas con la traslación de figuras planas.

Por ende, los casos fueron seleccionados a partir de la experiencia de 5 profesores (entre 22 y 35 años) de formación inicial de la carrera de Pedagogía General Básica con mención en Matemática, los cuales podrán enseñar a estudiantes de 1°a 8° básico. Los futuros profesores (FP) se encontraban en una etapa avanzada de su formación y desarrollaron cursos de didáctica disciplinar en módulos anteriores. La selección de los casos se centró en su participación en los dos momentos involucrados en el desarrollo de las tareas y, de manera relevante, la precisión y claridad en el trabajo desarrollado a lo largo del estudio implementado.

La tarea desarrollada fue adaptada del Programa de Estudio Octavo Básico – Matemática (p.153). Los criterios utilizados para la selección de la actividad se basaron en las características de una tarea emblemática (Kuzniak y Nechache, 2016). La implementación de la tarea involucró dos momentos: *Momento 1: Práctico.* Se desarrolló una sesión presencial exponiendo la tarea emblemática para que luego, en formato individual, la resolvieran utilizando como fuente sus conocimientos previos. *Momento 2: Rediseño*. Se efectuó una sesión presencial en la cual, de manera colaborativa, generaron una propuesta de rediseño justificando su propuesta con base en lo anteriormente desarrollado.

Para el análisis del presente estudio, fueron consideradas las producciones de los dos momentos, los FP firmaron un consentimiento de participación en el estudio, resguardando su anonimato y voluntariedad. Además, la nula compensación y evaluación por el trabajo realizado.

Recolección y análisis de datos

Para la recolección de datos, se utilizaron como técnicas principales los materiales escritos y la grabación de audio de uno de los momentos, mostrando los resultados obtenidos en base a lo mencionado anteriormente. Para analizar las respuestas y propuestas de los futuros profesores en base a las tareas desarrolladas, se empleó análisis de contenido (López-Noguero, 2002). Específicamente, los datos obtenidos del *Momento* 2, fueron analizados en base a dos ejes, siendo uno de ellos la interacción que se produjo entre los participantes, y por otro lado los rediseños obtenidos del trabajo grupal. Con el objetivo de concretar esta última acción, se especifican categorías de análisis que provienen de los elementos del ETM (Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández, 2022) y que favorecen el análisis de los componentes con enfoque en la activación del trabajo matemático completo.

Agradecimientos:

Paula Verdugo-Hernández agradece a ANID, Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Iniciación 2023, Folio 1123024.

Carolina Henríquez-Rivas agradece a ANID, Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Iniciación 2023, Folio 11230523.

Referencias

Aké, L.P. y Páez, D.A. (2024). Towards a Characterization Algebraic Competence on Teachers' Training. *PNA*, *18*(3), 223-253.

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2024). Professional development and teacher agency in Mathematics Teacher Education for Sustainability. *Mathematics Education Research Journal*, 1-24.

Amorim, R. y Ferri, C. (2021). Formação humana integral no ensino médio: um estudo das legislações e orientações curriculares nacionais no Brasil, Chile e Argentina. *ETD Educação Temática Digital*, *23*(3), 739-756.

Arancibia Rojas, R.H. (2024). *Guía Digital del Docente Matemática 8º básico - Tomo 2*. Santillana.

Burgos, M., y Chaverri Hernández, J. (2023). Creation of proportionality problems for the training of prospective primary school teachers. *Uniciencia, 37*(1), 254-277.

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2024). A model for problem creation: implications for teacher training. *Mathematics Education Research Journal*, 1-30.

Bywater, J. P., Lilly, S. y Chiu, J. L. (2023). Examining technology-supported teacher responding and students' written mathematical explanations. *Journal of Mathematics Teacher Education, 26*(6), 785-807.

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas CPEIP. Ministerio de Educación. (2021). *Informe Resultados Nacionales Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2021.*

Flores Salazar, J.V. y Carrillo Lara, F.I. (2019). Espacio de Trabajo Matemático Personal de profesores en relación a la función definida por tramos. *Uni-pluriversidad, 19*(2), 144-160.

Gaona, J. (2022). Task design in an online assessment system, a view from the theory of mathematical working spaces. *PädiUAQ, 5*(10), 1-18.

García, F. J. (2019). Introducción a 'Diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos'. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (15), 1-4.

Guerrero-Ortiz, C. y Camacho-Machín, M. (2022). Characterizing tasks for teaching mathematics in dynamic geometry system and modelling environments. *Mathematics*, *10*(8), 1239.

Gulkilik, H. (2020). Analyzing preservice secondary mathematics teachers' prompts in dynamic geometry environment tasks. *Interactive Learning Environments, 31*(1), 22-37.

Gustafsson, P. (2024). Productive mathematical whole-class discussions: A mixed-method approach exploring the potential of multiple-choice tasks supported by a classroom response system. *International Journal of Science and Mathematics Education, 22*(4), 861-884.

Henríquez, C. y Montoya, E., (2015) Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2),51-70.

Hernández-Sampieri, R. y Mendoza Torres, C. P. (2018). *Metodología de la Investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* Mc Graw Hill Education.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. [El espacio de trabajo matemático y su génesis]. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME , 17*(4-1), 5-39.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(15), 237-251.

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM, 48*(6), 721-737.

Labra Peña, J. A. y Vanegas Ortega, C. M. (2022). Desarrollo del Razonamiento Geométrico de estudiantes de Enseñanza Media cuando abordan el concepto de Homotecia. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 25*(1), 93-120.

Li, Y. (2023). The Construction of Informatization System of Internet Technology Mathematics Teacher Education Course. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences, 9*(1), 1-14.

López-Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI Revista de educación*, (4), 167-180.

Marco, N. y Palatnik, A. (2024). Teachers pose and design context-based mathematics tasks: what can be learned from product evolution? *Educational Studies in Mathematics, 115*(2), 223-246.

Ministerio de Educación. (2016). *Programa de Estudio Octavo Básico – Matemática.* Mineduc.

Morales Ramírez, G., Larios Osorio, V. y Rubio Goycochea, N. (2021b). Esquemas de argumentación de estudiantes de bachillerato al usar GeoGebra en el contexto de teselados. *Uniciencia, 35*(2), 253-270.

Morales Ramírez, G., Rubio Goycochea, N. y Larios Osorio, V. (2021a). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 35*(70), 664-689.

Otero, M. R. y Gazzola, M. P. (2022). Instruments and schemes of in-service mathematics teachers during the design of teaching based on questioning. *Review of Science, Mathematics and ICT Education, 16*(2), 5-25.

Pedersen, M. K., Bach, C. C., Gregersen, R. M., Højsted, I. H. y Jankvist, U. T. (2021). Mathematical representation competency in relation to use of digital technology and task design-a literature review. *Mathematics, 9*(4), 1-24.

Radmehr, F. (2023). Toward a theoretical framework for task design in mathematics education. *Journal on Mathematics Education, 14*(2), 189-204.

Rojas-Bello, R.R. (2020). Introducción del GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría a docentes en formación. *Revista Caribeña de Investigación Educativa, 4*(1), 124-134.

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Ediciones Morata.

Tapia, C., Singh, P., Whatman, S. y Bargallie, D. (2023). Teacheractivism: struggles over public education in Chile. *British Journal of Sociology of Education, 44*(6), 963-977.

Tekkumru-Kisa, M., Stein, M. K. y Doyle, W. (2020). Theory and research on tasks revisited: Task as a context for students' thinking in the era of ambitious reforms in mathematics and science. *Educational Researcher, 49*(8), 606–617.

Ticse, M., Flores Salazar, J. V. y Vivas-Pachas, J. (2023). Trabajo matemático de estudiantes de secundaria en tareas sobre tasa de variación con el uso de GeoGebra. *PNA, 17*(4), 425-452.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2019). Task Design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 15*, 43-55.

Verdugo-Hernández, P., Espinoza-Vásquez, G. y Carrillo-Yáñez, J. (2022). Análisis de una tarea sobre sucesiones desde el uso de las herramientas y el conocimiento matemático del profesor. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 40*(2), 125-145.

Vidal, N. y Sánchez, J. (2022). Geometric Thinking and Learning Through Educational Video Gaming in Learners with Visual Disabilities. En Antona, M. y Stephanidis, C. (Eds), *Universal Access in Human-Computer Interaction. User and Context Diversity* (pp. 541–555). Springer, Cham.

Villarroel, J. D., Merino, M. y Antón, A. (2023). Young children's spontaneous use of isometric and non-isometric symmetries: A study regarding their unprompted depictions of plant life. *Journal of Biological Education, 57*(5), 971-985.

Wang, Y., Wang, J. T., Raymond, F. T., & Wang, J. T. (2023). Elementary pre-service teachers' horizon knowledge for teaching addition and subtraction: An analysis of video presentations. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(6), 2276.

Yang, K. L. y Ball, L. (2024). STEM teacher education programs for preservice and in-service secondary mathematics teachers: a review study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 27*(2), 185-207.

ANÁLISIS DE LA PENDIENTE DE UNA RECTA: UNA MIRADA DESDE TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Sebastián Cantallopts Rauld, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Gonzalo Martínez Riquelme, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

La enseñanza del cálculo diferencial presenta grandes dificultades para los estudiantes universitarios, principalmente debido a la falta de comprensión de conceptos previos necesarios para abordar el curso, conceptos como la pendiente de una recta.. La teoría de *los registros de representación semiótica de Duval ofrece un enfoque que promueve la coordinación entre distintos tipos de representaciones. El objetivo de esta objetivo describir de qué manera identifican la pendiente de una recta estudiantes de educación media desde la teoría de registros de representación semiótica en el contexto de un estudio de clase. La metodología de esta investigación es de enfoque cualitativo, desarrollada en un colegio de dependencia particular subvencionada en Santiago de Chile, y dirigida a estudiantes de 17 y 18 años. Se aplicarán entrevistas basadas en tareas, antes y después de la implementación de la clase, para evaluar los procesos de conversión y tratamiento entre registros por los estudiantes al abordar el concepto de pendiente. Los resultados evidenciaron que el registro algebraico fue el más comprendido, tanto en el pretest como en el postest, mientras que las conversiones hacia el lenguaje natural presentaron mayores dificultades, incluso tras la intervención.*

Pendiente de una recta, Teoría de Registros de Representación Semiótica

ANTECEDENTES Y PROBLEMATICA

Introducción

La enseñanza del cálculo diferencial ha sido históricamente una de las áreas más desafiantes en la educación matemática, tanto a nivel secundario como universitario. La derivada, un concepto central en este campo, presenta numerosas dificultades de comprensión para los estudiantes. Según Artigue (1995) la enseñanza tradicional del cálculo, especialmente en lo que respecta a las derivadas, a menudo se centra en la realización mecánica de cálculos de derivadas y en la resolución de problemas estándar.

La enseñanza del cálculo diferencial presenta grandes dificultades para los estudiantes universitarios, principalmente debido a la falta de comprensión de conceptos previos necesarios para abordar el curso (Fiallo y Parada, 2014). Font (2000) subraya la existencia de problemas que surgen por un aprendizaje deficiente conceptos previos, como el concepto de función y el límite. En relación con el concepto de función, Contreras et al. (2003) concluye que se tiende a algebrizar el concepto de derivada, sin profundizar en su interpretación como razón de cambio y pendiente de la recta tangente. Por su parte, Azcárate (1990) analizó la comprensión del concepto de derivada en estudiantes de secundaria, caracterizando las dificultades, errores y esquemas conceptuales asociados a tres conceptos, uno de los cuales era la pendiente de una recta.

Desde un análisis epistemológico, comprender la pendiente de una recta como razón de cambio constante es fundamental para entender la derivada como una tasa de cambio instantánea. Thomas et al. (2010) describe la pendiente de una recta como $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ que indica cómo varía y con respecto a x. En términos generales, el concepto de derivada se entiende como una extensión de la idea de pendiente como tasa de cambio, al medir esa tasa en un instante específico de una función. De hecho, según Thomas (2010), la tasa de cambio instantánea de una función f respecto a x en un punto x_0 es $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, siempre que ese límite exista.

Antecedentes de la investigación

A continuación, se presentan investigaciones relevantes sobre la comprensión y enseñanza de la pendiente. Stump (1999) prosiguió la línea investigativa de Barr (1981) y Azcárate (1992). Específicamente Blaya et al. (2020), mencionan que Barr (1981) exploró el conocimiento de los estudiantes sobre la pendiente y reportó las dificultades o confusiones, y que, Azcárate (1992) investigó los esquemas conceptuales y perfiles de estudiantes preuniversitarios.

Stump (1999) investigó las múltiples formas en que los profesores de matemáticas de secundaria conceptualizan la pendiente. Identificó siete categorías relativas a las definiciones de pendiente: razón geométrica (G), razón algebraica (A), propiedad física (P), propiedad funcional (F), coeficiente paramétrico (PC), trigonométrica (T) y cálculo (C). Luego en 2001 la misma autora (Stump) propuso una octava conceptualización llamada situaciones del mundo real (R). Posteriormente, Moore-Russo et al. (2011), citado en Blaya et al. (2020), propusieron otras dos conceptualizaciones, las cuales fueron: propiedad determinante (D), constante lineal (L) e indicador de comportamiento (B).

Estas conceptualizaciones fueron construidas a partir de las investigaciones de distintos autores. No obstante, desde la perspectiva de Duval (1999) hay que evitar que los estudiantes perciban la pendiente con sus conceptualizaciones como objetos matemáticos distintos. Para la comprensión del objeto matemático se hace necesario transitar entre los distintos registros de representación semiótica.

Teniendo en cuenta lo anterior, resulta pertinente plantear una investigación la cual tiene por objetivo describir de qué manera identifican la pendiente de una recta estudiantes de educación media desde la teoría de registros de representación semiótica en el contexto de un estudio de clase.

ELEMENTOS TEORICOS

La siguiente investigación tiene como base la Teoría de Registros de Representación Semiótica, propuesta por Duval (2017). En la teoría se plantea que resulta fundamental el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático. Se sostiene que la única manera de tener acceso a los objetos matemáticos es mediante la producción de representaciones semióticas, y que cada registro de representación es cognitivamente parcial en relación con aquello que representa. Un registro de representación debe posibilitar las tres actividades asociadas a la sémiosis, que comprenden la formación de una representación identificable, tratamiento y conversión (Rodríguez, et al., 2017).

El tratamiento consiste en una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro. Por otro lado, la conversión consiste en la transformación de un registro distinto al de la representación inicial (Duval, 1999).

Algunos ejemplos de registro de representación semiótica según D'Amore (2006) son el rregistro de lenguaje común; el registro aritmético; el registro figural; registro Gráfico; y registro algebraico.

Cada representación es, en parte, cognitiva con respecto a aquello que representa. Además, al cambiar de un registro a otro, no son los mismos aspectos del objeto lo que se representa, por lo tanto, los distintos registros son complementarios. La conceptualización requiere coordinar estos registros de representación, de modo que la comprensión de un objeto matemático requiere la coordinación de al menos dos tipos de registro (De Herrero, 2004).

ELEMENTOS METODOLOGICOS

La presente investigación se realizó desde un enfoque cualitativo, en un colegio de dependencia particular subvencionada, ubicado en la ciudad de Santiago. Los sujetos de estudio corresponden treinta estudiantes, provenientes del curso IV E, cuyas edades oscilan entre los 17 y 18 años.

La metodología se organizó en tres fases: cuestionario inicial, secuencia didáctica y cuestionario final. Este enfoque permitió evaluar el nivel de comprensión de los estudiantes sobre el concepto de pendiente de una recta antes y después de la secuencia didáctica.

Categorías de análisis

Se ha planteado la siguiente categorización deductiva, con la finalidad de explorar las producciones escritas de los sujetos informantes para analizar e interpretar los datos recopilados. En particular se crearon 10 categorías, las cuales responden a los distintos tipos de tratamientos y/o conversiones que realizan los estudiantes para identificar o no la pendiente.

A continuación, se presenta un cuadro que corresponde a las categorías y siglas creadas con base en el tipo de tratamiento y/o conversión los sujetos informantes hayan realizado (véase Tabla 1).

Tabla 1

Categorización

Año	No. de estudiantes

C1	Tratamientos en registro algebraico.
C2	Conversión desde registro tabular hacia registro algebraico
C3	Tratamiento en registro gráfico
C4	Conversión desde registro gráfico hacia el registro algebraico
C5	Conversión desde registro figural hacia el lenguaje natural
C6	Conversión desde registro algebraico hacia el lenguaje natural
C7	Conversión desde el registro gráfico al registro lenguaje natural
C8	Conversón desde el registro tabular al registro gráfico.
C9	Conversión desde registro gráfico hacia el registro figural
NL	No logrado

Análisis y resultados

En la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos en el pretest (resultados iniciales) y el postest (resultados finales) para cada ítem evaluado. Los datos están separados por un "/". El valor a la izquierda del "/" corresponde al porcentaje o número de estudiantes que lograron identificar correctamente la pendiente en el pretest, mientras que el valor a la derecha indica el porcentaje o número obtenido tras la implementación de la secuencia didáctica en el postest.

Inicial/Final

Categoría	Respuestas cuestionario inicial/final
Tratamiento en el registro algebraico.	El 70,5%/82,7% de los estudiantes identificaron la pendiente dados dos puntos.
	El 76,5%/89,3% de los estudiantes identificaron la pendiente dada la ecuación principal de la recta.
	El 52,9%/64,3% de los estudiantes identificaron la pendiente dada la ecuación general de la recta.

Conversión desde registro tabular hacia registro algebraico.	El 41,2%/64,3% de los estudiantes identificaron la pendiente dado una tabla de valores.
Tratamiento en el registro gráfico	El 17,7%/21,4% identificaron la pendiente desde el gráfico de una recta decreciente y con pendiente distinta a 1.
	El 23,5%/28,6% identificaron la pendiente desde el gráfico de una recta creciente y con pendiente 1.
Conversión desde registro gráfico hacia registro algebraico.	El 35,3%/39,3% determinaron la pendiente a partir de dos puntos, los cuales corresponden a la intersección de la recta con los ejes coordenados.
Conversión desde registro figural hacia el registro de lenguaje natural.	El 47%/82,1% de los estudiantes identificaron que, dadas dos rectas paralelas, sus pendientes son iguales.
	El 47%/85,7% de los estudiantes identificaron que, dadas dos rectas secantes, sus pendientes son distintas.
Conversión desde registro algebraico hacia el registro de lenguaje natural.	El 23,5%/60,7% de los estudiantes identificaron la pendiente en el modelamiento de un problema que involucra una función afín en su forma algebraica.
Conversión desde el registro gráfico al registro de lenguaje natural	El 23,5%/39,3% de los estudiantes identificaron la pendiente en el modelamiento de un problema que involucra la gráfica de una función afín.
Conversión desde registro tabular hacia registro gráfico.	El 0%/7,14% de los estudiantes identificaron la pendiente dado una tabla de valores.
Conversión desde registro gráfico hacia registro figural	0%/14,3% de los estudiantes identificaron la pendiente como la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

Nota: Aproximación a la decima

CONCLUSIONES

Esta investigación destacó cómo los estudiantes de educación media abordan la identificación de la pendiente de una recta desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval. Los resultados evidencian avances significativos en la comprensión de este concepto tras la implementación de una secuencia didáctica diseñada específicamente para fomentar la coordinación entre distintos registros semióticos.

En comparación con el pretest, el postest reflejó mejoras en las producciones de los estudiantes, no solo en términos de cantidad de respuestas correctas, sino también en la calidad del lenguaje matemático empleado. Un hallazgo relevante es que los estudiantes, además de utilizar tratamientos y conversiones tradicionales entre registros tabular, algebraico y gráfico, comenzaron a emplear conversiones más complejas, como desde el registro gráfico al figural, utilizando herramientas como la tangente de 45° para interpretar razones de cambio.

Los resultados evidencian que el registro algebraico fue el más comprendido, tanto en el pretest como en el postest. Por otro lado, las conversiones hacia el lenguaje natural presentaron mayores dificultades, incluso tras la intervención didáctica. Aunque se observaron mejoras significativas, estas dificultades persistieron, limitando la capacidad de los estudiantes para coordinar múltiples registros representacionales.

En consecuencia, cuando los estudiantes enfrenten cursos avanzados, como cálculo diferencial, esta limitación podría dificultar la conceptualización de la derivada como una razón de cambio o variación.

Referencias

Artigue M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 97-140). México D.C.: Grupo editorial Iberoamérica.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: Introducción al concepto de derivada.* [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Barr, G. (1981). Some Student Ideas on the Concept of Gradient. *Mathematics in School*, *10*(1), 17.

Blaya, R. A., Dolores-Flores, C., Santiesteban, J. L. S., & Sigarreta, J. M. (2020b). El concepto de pendiente: estado de la investigación y prospectivas. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *103*, 81-98. http://200.4.134.60/handle/uagro/1960

Cho, P., & Nagle, C. (2017a). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students‟ mistakes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, *3*(1), 135–150.

De Herrero, S. M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa-relime, 7(1), 49-78

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Springer International Publishing.

Fiallo-Leal, J. E., and Parada-Rico, S. E. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento varacional-Pre calculus course in using supported geogebra for the development of variational thinking. *Revista Científica*, *20*(3), 56–71.

Font, V. (2000). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada. Tesis doctoral (no publicada), Universidad de Barcelona. España.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación*, *29*(4), 1109-1131.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517–545).

Moore-Russo, D., Conner, A., & Rugg, K. I. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 3–21.

Nagle, C., & Moore-Russo, D. (2014b). Slope Across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and Common Core State Standards. *The Mathematics Educator*, *23*(2), 40–59.

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 124-144. https://doi.org/10.1007/bf03217065.

PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA FAVORECER EL APRENDIZAJE DE FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA EN ESTUDIANTES DE CUARTO MEDIO

Constanza Paz Sánchez Sánchez, Universidad San Sebastián

Sofía Catalina Escobedo Aránguiz, Universidad San Sebastián

Patricio Alejandro Delgado Donoso, Universidad San Sebastián

Esta investigación se centra en la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas seno y coseno, con un enfoque en las dificultades que enfrentan los estudiantes de cuarto año de enseñanza media al pasar de las razones trigonométricas a las funciones propiamente dichas. Estas dificultades suelen estar relacionadas con la contextualización de los conceptos y la comprensión del tránsito entre ellos. Para abordar estos desafíos, se propone una intervención educativa basada en un análisis histórico-epistemológico, que busca *conectar la evolución de las ideas trigonométricas con el aprendizaje actual. La propuesta utiliza el Recorrido de Estudio e Investigación (REI) de Chevallard como una herramienta metodológica que facilita un aprendizaje más activo y significativo. Este enfoque invita a los estudiantes a participar en un proceso de investigación colaborativa, donde exploran y redescubren las funciones trigonométricas en un contexto histórico y práctico. La propuesta se fundamenta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que proporciona un marco teórico sólido para analizar y diseñar situaciones de enseñanza. Con esta aproximación, se busca no solo superar las dificultades en la comprensión de las funciones trigonométricas, sino también fomentar un aprendizaje profundo y duradero que conecte el conocimiento matemático con su desarrollo histórico.*

Funciones trigonométricas, TAD, REI, Paradigmas, Cuestionamiento del Mundo

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las funciones trigonométricas en la educación media en Chile enfrenta diversas dificultades, como la conversión de grados a radianes y el tránsito de razón a función trigonométrica. Méndez (2007) y Meneses (2010) atribuyen estos problemas a la falta de contextualización, mientras que señalan el enfoque limitado en problemas específicos, sin explorar las características fundamentales de las funciones trigonométricas. Este estudio propone una intervención basada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que aborda estas dificultades a través de una reconstrucción histórico-epistemológica de las funciones trigonométricas (Méndez et al., 2007; Meneses, 2010).

La presente investigación puede resultar en una innovadora propuesta para implementar la enseñanza de la función seno y coseno de forma contextualizada para que además de obtener una comprensión del objeto matemático, logren dar sentido a las justificaciones pertinentes de éste. Esta investigación viene a romper el Paradigma de Visita a las Obras y a sugerir el Paradigma de Cuestionar al Mundo de forma que los estudiantes sean agentes activos de su aprendizaje.

ANTECEDENTES

En el ámbito educativo, persisten dificultades en la enseñanza de funciones trigonométricas. Méndez (2007) y Meneses (2010) destacan problemas en la conversión de grados a radianes, la comprensión de los radianes como números reales y la transición de razón a función trigonométrica, atribuidos a una enseñanza descontextualizada y memorística. Maldonado (2004) critica la limitación de las razones trigonométricas a problemas explícitos, y Castro y Cárcamo (2023) señalan que estos errores persisten en la educación superior, proponiendo revisar las prácticas pedagógicas para reforzar los fundamentos conceptuales (Castro y Cárcamo, 2023; Maldonado, 2004; Méndez et al., 2007; Meneses, 2010).

En los últimos quince años, las bases curriculares chilenas han modificado significativamente la enseñanza de la trigonometría. En 2005, el Ministerio de Educación (MINEDUC) distinguió dos momentos en su enseñanza: razones trigonométricas en tercer año de educación media y funciones trigonométricas en el plan diferenciado del mismo año. En 2009, se eliminaron las razones trigonométricas del plan común, dejando solo las funciones. En 2015, se reintrodujo el estudio de las razones trigonométricas en segundo medio, y en 2019, las funciones trigonométricas se trasladaron al cuarto año medio plan común (MINEDUC, 2005; 2009; 2015; 2019).

Un análisis cualitativo de dos libros de texto de cuarto medio, utilizando la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), reveló diferencias significativas en los enfoques. El libro licitado por el MINEDUC muestra un enfoque autotecnológico, implicando técnicas a partir de definiciones incompletas, mientras que el libro comercial aborda con mayor profundidad las dificultades, incluyendo más elementos y representaciones del objeto matemático. Ambos libros evidencian una desconexión en el contenido que intensifica las dificultades observadas (Delgado et al., 2024).

Por ello, proponemos diseñar una propuesta de enseñanza que aborde las dificultades señaladas en la literatura, facilitando la transición entre razones y funciones trigonométricas. Este estudio cualitativo tiene como propósito crear una propuesta de enseñanza basada en la TAD para fortalecer el aprendizaje de la función trigonométrica en estudiantes de 17 a 18 años. Para esto, surge la siguiente pregunta de investigación: **¿Cómo se puede introducir el concepto de función trigonométrica en estudiantes de IV año de educación media en establecimientos chilenos?**

MARCO TEÓRICO

Marco didáctico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard sitúa la matemática dentro de contextos sociales e institucionales, como el currículum y los libros de texto. La TAD describe las actividades humanas a través de Praxeologías, que incluyen tareas y técnicas (praxis), y tecnologías y teoría (logos). Además, introduce la Transposición Didáctica, que transforma el conocimiento experto en conocimiento enseñado, manteniendo su esencia a través de la vigilancia epistemológica (Chevallard, 1985; 1999).

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Chevallard diferencia entre dos paradigmas educativos: el *Paradigma de Visita a las Obras*, donde el docente presenta los conceptos matemáticos como verdades absolutas sin contexto, y el *Paradigma de Cuestionamiento al Mundo*, que posiciona al estudiante como protagonista, guiando su aprendizaje mediante preguntas propias. Chevallard critica las reformas educativas actuales por enfocarse en aprender respuestas sin contexto, limitando la comprensión profunda. Para contrarrestar esto, los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) se presentan como herramientas que sustituyen el Paradigma de Visita a las Obras, fomentando el Paradigma de Cuestionamiento al Mundo. Los REI guían a los estudiantes, con el apoyo de los docentes, en un proceso colaborativo para explorar y responder preguntas, distribuyendo la responsabilidad del aprendizaje entre todos los miembros de la comunidad educativa y promoviendo una construcción activa del conocimiento matemático (Chevallard, 2015).

Marco Conceptual

Para la definición de la función se utilizó el libro de Caerols y Pelliecer denominado "Geometría", en el cual se define función trigonométrica a partir de la circunferencia unitaria donde el seno y el coseno de un ángulo corresponde a las coordenadas de un punto P que describe la circunferencia, en este caso se define la función seno como la coordenada del eje y y la función coseno como la coordenada del eje x, para cualquier ángulo (Caerols & Pellicer, 2020).

La historia y epistemología de la trigonometría se remonta a civilizaciones antiguas donde se dividió el círculo en 360 partes para resolver problemas agrícolas. Matemáticos como Tales de Mileto y Aristarco la aplicaron a la astronomía, calculando distancias celestes. Más tarde, la India aportó nuevos conceptos y formalizó tablas trigonométricas, y en el siglo XIV, matemáticos como Müller y Euler definieron y formalizaron las razones y funciones trigonométricas como las conocemos hoy (Montiel, 2005; Tello, 2016).

METODOLOGÍA

Para abordar esta interrogante, se establecieron lineamientos teóricos que permitieron sustentar esta investigación, a partir de una caracterización de libro de textos escolares, tomando en referencia el desarrollo Histórico-Epistemológico de la función trigonométrica y estableciendo una propuesta de enseñanza, desde la Teoría Antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999).

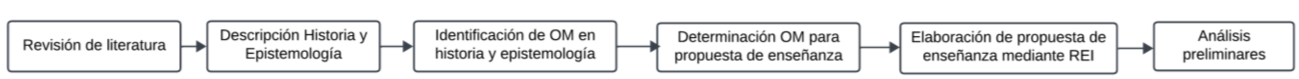
Se realizó un análisis de la literatura, el Currículum chileno y los libros de textos escolares presentes en la enseñanza-aprendizaje de estudiantes de segundo y cuarto año de enseñanza media al conceptualizar la función seno. Para esto se utilizó un enfoque cualitativo que permite indagar y profundizar en torno al proceso educativo en la enseñanza del objeto matemático, utilizando el análisis proporcionado por la TAD, en particular, revisando la Organización Matemática de los libros escolares.

Según Hernández, Fernández y Baptista (2014), el enfoque cualitativo se basa en la descripción, comprensión e interpretación de fenómenos y procesos mediante percepciones y significados descritos antes de forma cuantitativa, que no pueden describirse numérica. Este enfoque, se caracteriza por ser de carácter flexible y adaptable a los cambios que se generen en el transcurso de la investigación (Hernández et al., 2014).

Esta investigación, se basa en el diseño de una propuesta de enseñanza para favorecer el proceso de aprendizaje de la función Seno en estudiantes de cuarto año de enseñanza media de los establecimientos chilenos. Para ello, se llevó a cabo la siguiente metodología:

Figura 1:

Esquema de metodología de la investigación.



(Elaboración propia)

Esta investigación revisó la literatura y documentos del MINEDUC sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas en Chile. Se analizó la evolución histórica de la trigonometría para entender su impacto en la enseñanza actual. Con esta base, se diseñó una propuesta educativa utilizando la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y el Recorrido de Estudio e Investigación (REI) para mejorar la transición entre razón y función trigonométrica. Finalmente, se ajustó la propuesta tras un análisis preliminar para garantizar su adecuación teórica y práctica.

RESULTADOS

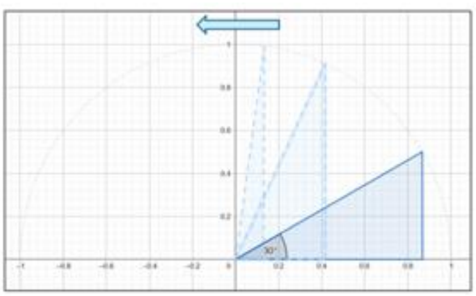
La propuesta de enseñanza está dividida en 4 fases:

Fase I: Activación de conocimientos previos

El profesor realiza una breve activación de conocimientos partiendo con una representación de un triángulo rectángulo en un plano cartesiano en el primer cuadrante, que posteriormente se irá ampliando a medida que variamos la medida del ángulo α, llegando a representaciones poco estereotípicas del mismo triángulo.

Figura 2:

Representaciones del triángulo rectángulo en la activación de conocimientos previos



(Elaboración propia)

Esta activación tiene como objetivo que logren visualizar que la medida de un cateto es ahora una posición del punto en el plano cartesiano y que, por ende, los valores resultantes pueden ser positivos o negativos dependiendo del cuadrante en el que se ubique.

Fase II: Contextualizar mediante la historia.

En las antiguas civilizaciones, la agricultura era la base de la vida cotidiana. Los agricultores dependían por completo de la naturaleza para alimentar a sus comunidades, y para ello necesitaban comprender tanto los secretos de la tierra como los misterios del cielo.

Uno de los mayores desafíos que enfrentaban era comprender la relación entre la Tierra y el Sol y como esta relación afectaba la agricultura. Querían comprender los cambios estacionales y así poder determinar con mayor exactitud cuando sembrar y cosechar.

Pero ¿cómo lo lograron? Los antiguos astrónomos, con ingenio y observación se enfrentaron a este enigma y encontraron formas de entender cómo se movían estos cuerpos celestes.

Respecto a cuando era más productivo cultivar, desde esta perspectiva histórica, podemos reconocer ciertos momentos clave. Por ejemplo, en las civilizaciones antiguas la llegada de la primavera era importante ya que este evento significaba que era el momento adecuado para comenzar a sembrar, debido a que las temperaturas y condiciones del suelo eran óptimas para el crecimiento de los cultivos. Por otro lado, cuando el Sol estaba en su punto menos distante de la Tierra, y, por lo tanto, con mayor luz solar, podía significar que ya era hora de cosechar ciertos cultivos antes de que llegaran las temperaturas más frías del año.

Entonces, ¿En qué momento del año es más productivo sembrar y cosechar desde la mirada histórica descrita anteriormente?

Fase III: Indagación en la web y surgimiento de preguntas.

El relato entregado por el profesor al inicio de la actividad da un contexto y un pretexto al estudiante para investigar cómo las antiguas civilizaciones determinaron con tal precisión los momentos adecuados para la siembre y la cosecha de alimentos, es decir, cuando la Tierra está en un punto particular para cada evento. Durante este momento, surgirán diversas preguntas según lo indagado en la web y la situación ideal es que surjan las siguientes preguntas:

(P_1) ¿Cuál es la posición exacta de la Tierra para este momento determinado (verano)?

(P_2) ¿De qué manera se puede modelar este cálculo para cualquier momento o estación del año?

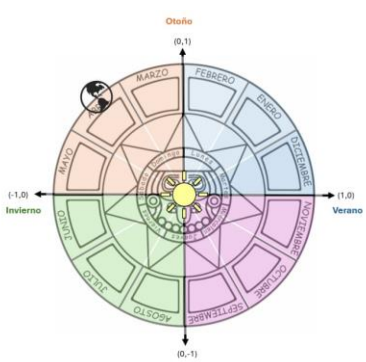
Es en esta instancia en la que el docente debe procurar un ambiente propicio para la curiosidad, que del espacio para que los estudiantes discutan las posibles respuestas y discutan cada una de ellas.

Fase IV: Resolución de preguntas generadas.

En esta fase se espera que los estudiantes junto con el profesor logren validar la definición de función seno y coseno, a partir de la resolución de preguntas generadas. El docente debe guiar a los estudiantes dentro del contexto para que se genere la transición de razones trigonométricas a funciones trigonométricas mediante un calendario solar.

Figura 3:

Adaptación de calendario solar azteca a calendario gregoriano.



(Elaboración propia)

CONCLUSIONES

Actualmente, los estudiantes tienen dificultades al aprender sobre funciones trigonométricas. La abstracción del concepto y la falta de conexión con aplicaciones prácticas y cotidianas generan desinterés y confusión. El enfoque tradicional en los textos escolares a menudo se centra en la memorización y el paradigma de visita a las obras. Además, la transición desde razones trigonométricas en triángulos rectángulos a funciones trigonométricas en el plano cartesiano no siempre se realiza de manera efectiva.

La presente propuesta tiene la finalidad de fomentar el trabajo autónomo y desarrollar el tránsito entre las razones trigonométricas $sen(\alpha)$ y cos (α) a la concepción de funciones trigonométricas $sen(x)$ y cos (x) basada en el recorrido de estudio e investigación propuesto por Chevallard en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Esta propuesta viene a cambiar el paradigma de *visita a las obras* a el paradigma de *cuestionamiento del mundo*.

Esta investigación sugiere que, al involucrar a los estudiantes en la exploración de funciones trigonométricas, surgen técnicas primitivas que, aunque rudimentarias, son esenciales para entender conceptos matemáticos. Este proceso de descubrimiento fomenta el pensamiento crítico y la creatividad, y es valioso no solo por los resultados obtenidos, sino por cómo enriquece la comprensión de las matemáticas y promueve un enfoque más integral en su aprendizaje.

REFERENCIAS

Caerols, H., & Pellicer, R. (2020). *Geometría* (Vol. 1).

Castro, T. & Cárcamo, A. (2023). Errores en la resolución de Ecuaciones trigonométricas. *Bolema – Mathematics Education Bulletin*, 37(75), 336-351.

Chevallard, Y. (1985). *La transposición didáctica*.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 19*(2), 211–266.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, 173–187. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13ï

Delgado, P., Escobedo, S., & Sánchez, C. (2024). *Caracterización de Organizaciones Matemáticas de las funciones trigonométricas en libros de textos escolares chilenos [Sesion de conferencia], Jornada de matemática de la zona sur, Temuco, Chile*.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. del P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6th ed.).

Méndez, C., Martínez, G., & Maldonado, E. (2007). Sobre la construcción escolar de la función trigonométrica: La transición reales - radianes -grados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *20*, 573–578.

Meneses, H. (2010). *La transición grados - Radianes - Reales en la construcción de la función trigonométrica: Un análisis sistemico*. http://www.fayerwayer.com/tag/matematicas/

MINEDUC. (2005). *Curriculum de la Educación Media Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios*.

MINEDUC. (2009). *Curriculum: Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media*.

MINEDUC. (2015). *Bases Curriculares 7° a 2° medio Ministerio de Educación Gobierno de Chile*.

MINEDUC. (2019). *Bases Curriculares 3º y 4º medio Ministerio de Educación Gobierno de Chile*.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Tello, J. F. (2016). *Surgimiento de la función trigonométrica: Aspectos histórico-epistemológicos*. Universidad del valle.

DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN AULAS NEURODIVERSAS: UNA PROPUESTA DIDÁCTICO - MATEMÁTICA BASADA EN LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS Y EN LA TEORÍA DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Romina Rossi Yumha, Universidad San Sebastián

Freddy Molina Dotte, Universidad San Sebastián

Yocelyn Parra Urrea, Universidad San Sebastián

Resumen:

El objetivo de esta investigación es diseñar una propuesta didáctico-matemática sobre la noción de función para favorecer en estudiantes con Trastorno de Defícit Atencional (TDA) la construcción de conocimiento en el contexto de un aula neurodiversa. La propuesta está dirigida a estudiantes que cursan octavo año básico y considera las características de estudiantes diagnosticados con TDA Inatento. Esta investigación es de carácter cualitativa (Creswell, 2012) y se sustenta en la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 2017) y en la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2007). Como resultado del estudio se diseña una herramienta con orientaciones específicas para la enseñanza y aprendizaje de

estudiantes con TDA sobre la noción de función en un aula neurodiversa. Además, se presenta la propuesta didáctica que promueve el uso de diversas representaciones y el trabajo desde lo concreto a lo abstracto.

Inclusión, Concepto de función, Aulas neurodiversas, Teoría de las Situaciones Didácticas.

ANTECEDENTES

El aula debe ser un espacio inclusivo que atienda la diversidad de sus estudiantes, promoviendo el aprendizaje y el desarrollo de habilidades de todos los educandos. Según Ortiz (2022) una persona neurodiversa o neurodivergente es aquella que tiene algún trastorno del neurodesarrollo, que posee un trastorno de déficit atencional (con o sin hiperactividad) o que se encuentra dentro del espectro autista. El concepto de neurodiversidad emerge como una manera de identificar las características neurológicas diferenciales para llevar a cabo procesos de instrucción que favorezcan la inclusión. El aula neurodiversa busca promover el desarrollo de cada uno de los estudiantes mediante adaptaciones curriculares y diversas estrategias de enseñanza (Steiner, 1922; Booth y Ainscow, 2002)

Según Bugueño (2009) los estudiantes con Trastorno de Déficit Atencional Hiperactivo TDA/H pueden presentar rasgos como la impulsividad que los lleva a procesar información de manera superficial y rápida afectando la memoria de trabajo. Asimismo, el Manual Diagnóstico y Estadístico de los Trastornos Mentales (DSM-5) (2014) describe que aspectos como la inatención y desorganización, la hiperactividad e impulsividad, impacto en la comunicación y participación, son características frecuentes en estudiantes con TDA/H, los que se pueden presentar en el rasgo del subtipo inatento.

En Chile la política pública busca promover la diversidad y la inclusión mediante la Ley General de Educación (LGE), Decreto Supremo N°83, Ley de Inclusión N°20845 y Decreto Supremo N°67 que garantizan la capacidad de adaptación curricular, la eliminación de barreras en la enseñanza, una educación inclusiva de calidad que asegure condiciones para el acceso y permanencia de estudiantes con Necesidades Educativas Especiales (NEE), y la actualización de normativas sobre la evaluación con el fin de responder a las necesidades de todos y cada uno de los estudiantes.

Las NEE son un factor que podría dificultar el acceso de los estudiantes a la Educación Matemática, particularmente nos interesa indagar las complejidades que se suscitan en los procesos de instrucción sobre la noción de función dado su carácter unificante y modelizador (Parra-Urrea y Pino-Fan, 2022). De acuerdo con Even (1993) y Trujillo et al. (2023) los profesores conceptualizan las funciones sin enfatizar sus características esenciales: existencia, univalencia y arbitrariedad. Además, Panaoura et al. (2017) señalan que la falta de comprensión para transitar por las múltiples representaciones asociadas a la noción de función es otro aspecto que podría obstaculizar la aprehensión significativa de dicho objeto matemático.

En virtud de lo descrito anteriormente surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué estrategias didáctico-matemáticas favorecen el proceso de enseñanza de la noción de función y permite a los estudiantes con TDA construir su conocimiento en el contexto de un aula neurodiversa? Para responder la pregunta, el objetivo de la investigación es "Diseñar una propuesta didáctico-matemática sobre la noción de función para favorecer en estudiantes con TDA la construcción de conocimiento en el contexto de un aula neurodiversa".

MARCO TEÓRICO

Esta investigación se sustenta en tres enfoques teóricos: 1) La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), 2) La Teoría de las Representaciones Semióticas (TRS), y 3) Aspectos generales de estudiantes con TDA.

La TSD es una metodología de enseñanza basada en el constructivismo que permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase concebidas por el profesor con el propósito de disponer de un medio que favorezca la construcción de conocimiento y permita alcanzar el aprendizaje matemático (Brousseau, 2007). La TSD define aspectos: 1) Situación didáctica, 2) Situaciones a-didácticas, 3) Medio didáctico, 4) Contrato didáctico (Chavarría, 2006) y Fases que orientan la estructura metodológica de la clase: 1) Fase de acción, 2) Fase de formulación, 3) Fase de validación y 4) Fase de institucionalización (Brousseau, 2007).

Por su parte, la TRS enfatiza la importancia de las representaciones dado que constituyen el medio que permite acceder a los objetos matemáticos (Duval, 2006). De este modo, los procesos de instrucción requieren utilizar diferentes sistemas de representación: lenguaje natural, algebraico, gráfico, geométrico, tabular, icónico, entre otros (Duval, 1999). Asimismo, Duval enfatiza la importancia de no confundir el objeto matemático con sus representaciones y se refiere a la importancia de fomentar actividades cognitivas como: 1) Tratamiento (transitar de una representación a otra que se encuentra en el mismo registro, por ejemplo, sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\, definida\, por\, f(x) = x^2 + 3x + 2$ y luego $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\, definida\, por\, f(x) = (x+2)(x+1)$) y 2) Conversión (transitar de una representación a otra que se encuentra en un registro diferencia, por ejemplo, una transformación que va desde una representación algebraica a una gráfica).

Finalmente, para describir factores, prevalencia y/o características de estudiantes con TDA se han considerado las orientaciones que provienen del DSM-5 y la guía sobre déficit de atención de Bugueño (2009).

MARCO METODOLÓGICO

Esta investigación es de carácter cualitativo (Creswell, 2012) dado que pretende diseñar una propuesta didáctico-matemática sobre la noción de función efectiva y adecuada a las necesidades educativas de estudiantes con TDA inatento en el contexto de aulas neurodiversas.

La propuesta de enseñanza está dirigida a estudiantes de octavo básico (13-14 años) de establecimientos educacionales regulares que poseen aulas neurodiversas con estudiantes diagnosticados con TDA. De este modo, el diseño didáctico-matemático está configurado para asegurar la participación de estudiantes con TDA y de aquellos que no poseen dicha condición.

Para cumplir con el objetivo del estudio se realizó una exhaustiva revisión de literatura científica en torno a las siguientes temáticas: 1) Aula neurodiversa, 2) Características de los estudiantes con TDA, 3) Orientaciones para la enseñanza y aprendizaje de estudiantes con TDA, y 4) Dificultades que se suscitan en los procesos de instrucción sobre funciones. Esto permitió diseñar una herramienta de análisis que proporciona orientaciones para planificar y diseñar la enseñanza de la noción de función para estudiantes con TDA. La figura 1 ilustra las características de dicha herramienta.

Características del estudiante con TDA	Dificultad en el aprendizaje del concepto de función que surge de esta característica	Orientaciones	Cómo se aborda en la propuesta
Dificultades para mantener la atención en clases	Proporcionar una definición clara y precisa utilizando lenguaje matemático abstracto sin acudir a diversas representaciones. Carácter algorítmico y procedimental en el tratamiento de la noción de función (ejemplos y actividades propuestas). Dificultad para percibir la utilidad de las funciones.	Utilizar material concreto y/o aplicaciones digitales en actividades de corta duración. Promover el desarrollo de actividades en que la noción de función modele fenómenos propios de la vida cotidiana y/o de otras ciencias y que a su vez sean de interés para los estudiantes. Promover diversas representaciones asociadas a la noción de función. Fomentar actividades de corta duración, con uso de material interactivo, destacando información relevante y/o aspectos medulares.	
Impulsividad	Asociar la noción de función […]	Se sugiere utilizar diversas […]	
Dificultades en la selección de información relevante	Dificultades en la distinción […]	Desarrollar actividades en que […]	
Evitan tareas que requieren esfuerzo mental sostenido	Conocer la evolución histórica […]	Promover problemáticas de interés […]	

Figura 1. Herramienta de análisis propuesta en el estudio

RESULTADOS Y ANÁLISIS

El diseño y análisis de la propuesta didáctico-matemática para la enseñanza inclusiva de la noción función ha contemplado las orientaciones que emanan de la herramienta de análisis presentada en el apartado de metodología. Además, su estructura se sustenta en la TSD y en la TRS descritas en el apartado de marco teórico.

La propuesta de enseñanza contempla la definición de los conocimientos previos requeridos para el estudio de funciones (regularidades, patrones, expresiones algebraicas, ecuaciones, proporcionalidad directa, entre otros). Además, se indican los recursos requeridos (pizarra, proyector, material concreto, softwares, entre otros) y se proporcionan instrucciones claras y explicitas enfatizando acuerdos de convivencia escolar (elementos propios del contrato didáctico). Asimismo, se explicita el objetivo de la clase “Comprender el concepto de función a través del uso de material concreto y actividades que requieren de trabajo colaborativo”.
El diseño didáctico-matemático posee: 1) Actividades de motivación, 2) Orientaciones para el docente, 3) Pausas activas, 4) Actividades que requieren acudir a los conocimientos previos y movilizar diversas representaciones (*Fase de acción*), 5) Respuestas esperadas, 6) Instancias de discusión para consensuar la pertinencia de las respuestas otorgadas (*Fase de formulación y validación*), y 7) Formalización del objeto matemático bajo estudio (*Fase de institucionalización*).
Por motivos de espacio, a continuación se presentan algunas de los aspectos descritos anteriormente. La figura 2 ilustra la una de las actividades de la fase de acción.

Figura 2. Parte 1 actividad 2 individual (Fase de acción)

Con esta actividad se espera instroducir el concepto de relación. El material está diseñado para no encontrar más características que permitan la separación en dos conjuntos. Los estudiantes podrían clasificar usado otros criterios tales como, animales con hábitat acuático y animales con hábitat no acuático, pero bajo ese criterio, los conjuntos no quedarían con la misma cantidad de elementos, por lo que, frente a consultas, se sugiere al Docente no caer en errores como el efecto Topaze o Jourdan, dando las respuestas correctas y/o aprobando respuestas imprecisas. Además, se sugiere no establecer previamente un acuerdo de orden para los conjuntos determinados, de manera que ellos determinen los conjuntos de salida y llegada en la relación que van a establecer.

Para favorecer la atención del estudiantado, luego de cada actividad se incorporan pausas activas o pasivas, de manera de no sobreexigir la memoria de trabajo. (Cubero, 2006). La figura 3 ilustra uno de los modelos de pausa activa utilizados para pasar de una fase a otra de la TSD.

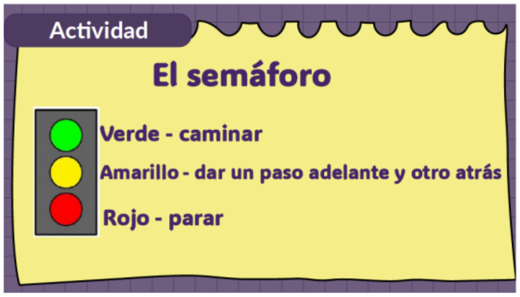


Figura 3. Ejemplo de pausa activa. Fuente: Elaboración propia

La institucionalización de la función enfatiza las características claves del objeto, esto es las nociones de existencia, uvivalencia y arbitrariedad. Además, se intenciona reforzar que el dominio y codominio son elementos inherentes a la definición de función y que la representacón gráfica de funciones discretas corresponde a una colección de puntos.
Finalmente señalar que la herramienta de análisis permitió mostrar explicitamente la contribución que realiza la investigación (mediante la propuesta didáctico-matemática) a la problematica relativa a las dificultades que se suscitan en los procesos de instrucción (aulas neurodiversas) sobre funciones. La figura 4 ilustra dicha contribución.

Características del estudiante con TDA	Dificultad en el aprendizaje del concepto de función que surge de esta característica	Orientaciones	Cómo se aborda en la propuesta
Dificultades para mantener la atención en clases	Proporcionar una definición clara y precisa utilizando lenguaje matemático abstracto sin acudir a diversas representaciones. Carácter algorítmico y procedimental en el tratamiento de la noción de función (ejemplos y actividades propuestas). Dificultad para percibir la utilidad de las funciones.	Utilizar material concreto y/o aplicaciones digitales en actividades de corta duración. Promover el desarrollo de actividades en que la noción de función modele fenómenos propios de la vida cotidiana y/o de otras ciencias y que a su vez sean de interés para los estudiantes. Promover diversas representaciones asociadas a la noción de función. Fomentar actividades de corta duración, con uso de material interactivo, destacando información relevante y/o aspectos medulares.	Presentar ruta de aprendizaje al inicio de la propuesta para que el estudiante conozca de antemano los tiempos de cada actividad. Fase de acción con uso de material concreto y atractivo para el estudiante en las partes 1, 2 y 3 de la actividad 2. Alternancia en el uso de representaciones gráficas, tabular y par ordenado para el concepto de función en la fase de acción, en las actividades 2 y 3, también en la fase de comunicación. Las imágenes incorporadas en las partes 1, 2 y 3 de la actividad 2 son atractivas visualmente y consideran instrucciones verbales e icónicas.
Impulsividad	Asociar la noción de función […]	Se sugiere utilizar diversas […]	Incorporación de pausas activas […]
Dificultades en la selección de información relevante	Dificultades en la distinción […]	Desarrollar actividades en que […]	[…]
Evitan tareas que requieren esfuerzo mental sostenido	Conocer la evolución histórica […]	Promover problemáticas de interés […]	[…]

Figura 4. Herramienta de análisis que explicita contribución de la investigación

CONCLUSIONES

La problemática inicial planteada en esta investigación se relaciona con la enseñanza inclusiva del concepto de función, considerando aulas neurodiversas. En este sentido, fue necesario realizar una exhaustiva revisión de literatura sobre 1) neurodiversidad y aula neurodiversa, 2) las complejidades de los procesos de instrucción sobre funciones, 3) las políticas públicas que rigen en Chile y cómo las llevan a cabo las instituciones educacionales, y 4) teorías propias de la didáctica de la matemática como la TSD y la TRS que sustentaran la propuesta didáctico-matemática que buscaba resolver la problemática. De este modo, las principales contribuciones de esta investigación versan en dos aspectos: 1) tabla como herramienta de análisis de la propuesta didáctica en donde se identifican y conectan las distintas las características de estudiantes con TDA con las distintas dificultades en el proceso de instrucción del concepto de función y 2) la propuesta didáctico-matemática que considera las principales características de los estudiantes con TDA y, además, incorpora el concepto de relación para ir construyendo el aprendizaje del concepto de función en los estudiantes; basándose en la TSD para la incorporación de los conceptos claves y, en la TRS para ir alternando entre una representación a otra. Así, se subsanan las dificultades que se suscitan en la enseñanza del concepto de función de acuerdo con la literatura científica elegida. La propuesta tiene importantes ventajas al integrar un enfoque inclusivo que contempla las necesidades de estudiantes con TDA, facilitando esta manera su acceso al aprendizaje del concepto de función. Además, su diseño fundamentado en la TSD y TRS permite abordar las dificultades típicas en el aprendizaje de este objeto matemático, como el asociar la noción de función en términos estrictamente metafóricos. En cuanto a las proyecciones del trabajo, está la reutilización de la tabla de análisis para diseñar propuestas didáctico-matemáticas aplicables a otros objetos matemáticos, ampliando así su contribución a la didáctica desde una perspectiva inclusiva. Y también, el implementar la propuesta diseñada permitiría evaluar y enriquecer su efectividad en la práctica educativa.

REFERENCIAS

Armstrong, T. (2012). *El poder de la neurodiversidad*. Ediciones Paidós.

Asociación Americana de Psiquiatría. (2014). *Manual Diagnóstico y Estadístico de los Trastornos Mentales (DSM-5)* (5a Ed. Arlington). Asociación Americana de Psiquiatría.

Booth, T., & Ainscow, M. (2002). *Guía para la educación y mejora de la educación inclusiva*. FUHEM.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*

Bugueño, X. (2009). *Déficit atencional: Guía para su Comprensión y Desarrollo de Estrategias de Apoyo desde un Enfoque Inclusivo, en el Nivel de Educación Básica*. Ministerio de Educación.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las Situaciones Didácticas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 1(1).

Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking - The registers of semiotic representations. En *Understanding the Mathematical Way of Thinking - The Registers of Semiotic Representations*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registro semiótico y aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(2), 94–116.

Parra-Urrea, Y., Pino-Fan, L., & Gallegos, C. (2023). *Criterios de idoneidad epistémica para la enseñanza de las funciones: el caso de la función inversa en contexto de microenseñanza*.

Parra-Urrea, Y., Pino-Fan, L. (2022). Proposal to Systematize the Reflection and Assessment of the Teacher's Practice on the Teaching of Functions. *Mathematics*, 10(18), 3330.

Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., Elia, I.,& Philippou, A. (2017). A Structural Model Related to the Understanding of the Concept of Function: Definition and Problem Solving. International *Journal of Science and Mathematics Education*, 15(4), 723-740.

Prigogine, I. (1999). *Espejo y Reflejo*. Ediciones Santiago.

Trujillo, M., Atarés, L., Canet, M. J., & Pérez-Pascual, M. A. (2023). Learning Difficulties with the Concept of Function in Maths: A Literature Review. En *Education Sciences*, 13(5).

Ugalde, W. J. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. En *Setiembre − Febrero* (Vol. 14, Número 1).

MODELOS DEL MÉTODO DE EULER DESARROLLADOS POR ESTUDIANTES Y ANALIZADOS DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

Juan Felipe Medina-Mendieta, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Carolina Guerrero-Ortiz, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

El método de Euler constituye un método numérico que permite resolver ecuaciones diferenciales y que tiene gran valor desde el punto de vista didáctico debido a que sienta las bases para comprender otros métodos numéricos de mayor complejidad. En este sentido cobra interés analizar los diferentes modelos que construyen los estudiantes cuando reinventan este método para dar solución a problemáticas. Desde la Educación Matemática Realista (EMR) se analiza el proceso de reinvención guiada por parte de los estudiantes lo cual permite evidenciar la matematización progresiva y los diferentes modelos de los estudiantes cuando transitan por los niveles de matematización. El propósito de este trabajo es identificar los modelos que construyen los estudiantes y describir los mismos cuando reinventan el método de Euler en una situación en contexto y desde la mirada de la EMR. En la investigación se analiza el trabajo matemático producido por dos estudiantes universitarios de ingeniería en una universidad pública de Chile. Se implementa una actividad de setenta y cinco minutos de duración asociado a un contexto de una cuenta bancaria de ahorro con un interés compuesto y se recaban datos a partir de las respuestas, opiniones y material escrito dado por ambos estudiantes. Los estudiantes construyen modelos que son clasificados desde la EMR y experimentan un proceso de matematización progresiva donde tiene lugar la reinvención del método de Euler, transitando desde un nivel

asociado al contexto (situacional) hasta un nivel donde se obtienen modelos aplicables a otros contextos (general).

Método de Euler, Educación Matemática Realista, reinvención, matematización progresiva

INTRODUCCIÓN

Este trabajo, que parte de una investigación más amplia, se apoya en la teoría de Educación Matemática Realista (EMR) la cual considera que las matemáticas deben estar conectadas con la realidad y deben ser relevantes para la sociedad. Una idea central en la EMR es que la enseñanza de la matemática debe permanecer cercana a los alumnos (Freudenthal, 1991) y que estos tengan alguna forma de actividad estructurante u organizadora de matematización que está a su alcance (Freudenthal, 1973). En la EMR se busca estudiar cómo los alumnos pasan del conocimiento informal, al preformal y de allí al formal, profundizando en el proceso de matematización progresiva en el cual transitan por distintos niveles de comprensión, caracterizados por distintos tipos de actividades mentales y/o la construcción de diferentes modelos (Freudenthal, 1973, 1991; Gravemeijer, 1994).

Diversos estudios han investigado los procesos de matematización progresiva y la creación de modelos por parte de los estudiantes. Por ejemplo, Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) examinó cómo los modelos evolucionan desde representaciones contextualizadas hasta herramientas abstractas para el razonamiento matemático en problemas que involucran porcentajes. Riyanto et al. (2017), en un enfoque similar, exploraron el desarrollo de modelos matemáticos en el marco de la EMR, concluyendo que los problemas de modelado diseñados bajo esta teoría son efectivos para mejorar la comprensión y las habilidades matemáticas de los estudiantes.

En la EMR, las estructuras matemáticas no son estáticas; emergen y se desarrollan en los procesos de aprendizaje individuales y colectivos, integrando la realidad como punto de partida (Freudenthal, 1991). Desde esta óptica, los estudiantes son participantes activos en el aprendizaje dentro del contexto social del aula. Estudios recientes han explorado la matematización progresiva en torno al método de Euler, abordándola desde concepciones individuales y colectivas, así como desde prácticas matemáticas y disciplinarias compartidas (Rasmussen et al., 2015, 2024; Rasmussen & Blumenfeld, 2007). Estos trabajos refuerzan la visión dinámica del aprendizaje, coherente con los principios de la EMR (Rasmussen & Blumenfeld, 2007). No obstante, estos estudios no han explorado los modelos que los estudiantes desarrollan al reinventar el método de Euler. Por ello, resulta de interés investigar ¿qué tipos de modelos emergen durante este proceso en contextos situados? y ¿cómo estos modelos evolucionan a lo largo de la matematización progresiva, desde representaciones informales a formales? El presente trabajo tiene como objetivo analizar, desde la perspectiva de la EMR, los modelos que construyen los estudiantes al reinventar el método de Euler en situaciones contextualizadas.

ELEMENTOS TEÓRICOS

La matematización de la EMR consiste en un proceso que involucra: reconocer características esenciales en situaciones, descubrir características comunes, ejemplificar ideas generales, asimilar nuevos objetos mentales y operaciones, abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, y reflexionar acerca de la propia actividad matematizadora, considerando los fenómenos en cuestión desde diferentes perspectivas (Freudenthal, 1991). En este trabajo se prestará atención a las formas de matematizar de este marco (matematización horizontal y vertical), a los diferentes niveles de matematización que se pueden identificar, y los diferentes modelos que los estudiantes puedan construir en su tránsito por estos niveles cuando se enfrentan a situaciones en contexto utilizando el método de Euler.

El método de Euler es elemental dentro de los métodos numéricos (MN) para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Este método parte de un modelo en la forma de Cauchy que considera el punto inicial $(x_0; y_0)$ de la solución para determinar el campo de direcciones en ese punto: $f(x_0; y_0)$. Para hallar el segundo punto de la solución aproximada $(x_1; y_1)$ se sigue una trayectoria rectilínea en esa dirección hasta alcanzar la abscisa x_1. En general, tomando un paso h como incremento de la variable independiente, resulta: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$, $x_{i+1} = x_i + h$. El error relativo del método de Euler, mediante doble cálculo, es: $e_h \approx y_h - y_{2h}$.

El proceso de búsqueda de contextos, situaciones, actividades y modelos, desde la EMR, que den lugar a la matematización progresiva y que permita la reinvención guiada es conocido como fenomenología didáctica (Freudenthal, 1983, 1991). En este trabajo se diseñaron actividades que fomentaran el proceso de reinvención guiada del método de Euler por parte de los alumnos.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Los datos reportados en este informe provienen de respuestas, opiniones y material escrito dado por estudiantes durante el desarrollo de una actividad en el aula de setenta y cinco minutos de duración, referente a un semestre de un curso de matemática en una universidad pública de Chile. Se analizó el trabajo realizado por dos estudiantes: Maximiliano y Fernanda (los nombres son seudónimos). Ambos estudiantes trabajaron de manera individual (aunque no tuvieron restricción para trabajar en conjunto). Sin embargo, en las preguntas realizadas al profesor, participaron ambos y se retroalimentaron de las respuestas y discusión generada. Los datos fueron analizados a partir del marco teórico de la EMR. La actividad estuvo organizada en diferentes momentos. En un primer momento se buscó que los estudiantes se posicionaran en el nivel situacional de la EMR y experimentaran una matematización horizontal familiarizándose con la situación y generando diferentes modelos para describir y entender la matemática asociada a la misma. El docente les suministró la siguiente información:

> Momento 1. Las cuentas de ahorro son un servicio que los bancos ofrecen a los clientes para que guarden su dinero en la entidad. Como incentivo, brindan una tasa de interés que permite que el monto guardado aumente con el tiempo. ¿Qué puedes comentar sobre lo que conoces de las cuentas de ahorro que proponen los bancos?

En el segundo momento, se buscó que los estudiantes alcanzaran el nivel referencial de la EMR mediante la matematización vertical, desarrollando modelos-de estimación del monto de la cuenta bancaria. Estos modelos podían representarse en tablas o mediante cálculos aritméticos, siempre que reflejaran correctamente la estimación. Para ello, el docente presentó la siguiente situación:

> Momento 2. Se conoce que una cuenta de ahorro va aumentando el monto de tal manera que este se ha duplicado pasado 10 años. Si un cliente decide abrir esta cuenta con un depósito inicial de 50 000 pesos chilenos; describa numéricamente el comportamiento de esta cuenta y estime el monto de la misma en diferentes momentos.

El tercer momento buscó que los estudiantes alcanzaran el nivel general de la EMR (matematización vertical), promoviendo reflexiones sobre problemas análogos que trascendieran el contexto y desarrollaran un modelo-para resolverlos. La superación del contexto se evidenció cuando los estudiantes comprendieron cambios como variaciones en la tasa de interés o en el monto inicial depositado. Para ello, el docente solicitó que:

> Momento 3. Estime las ganancias de la cuenta: a) pasado 1 año y pasado 2 años; b) pasado medio año (0,5 año), 1 año, un año y medio (1,5 año) y 2 años.

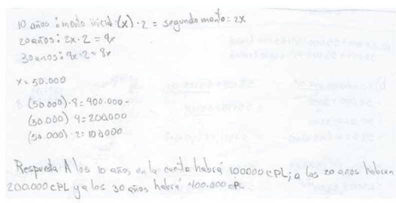
RESULTADOS

En el primer momento de la actividad, Fernanda y Maximiliano discutieron sobre cuentas bancarias. Fernanda describió una cuenta en la que se deposita dinero y se utiliza según necesidad, concluyendo junto con Maximiliano que este tipo de cuenta no genera interés porque el saldo no aumenta. Ante la pregunta del profesor sobre el significado del interés como beneficio, Fernanda señaló que era una pequeña proporción calculada del monto que se sumaba al saldo. Sin embargo, ninguno propuso cómo calcular el monto con una tasa de interés hipotética, pese a la sugerencia del profesor. Esta discusión evidenció la matematización horizontal en el nivel situacional de la EMR, ya que los estudiantes interpretaron la situación y usaron estrategias contextuales para identificar elementos matemáticos.

En el Momento 2 ambos estudiantes utilizaron modelos similares debido a que estimaron el monto en períodos de 10 años (en la Figura 1 se muestra el trabajo de Fernanda). De esta manera encontraron un modelo de estimación del monto para esta situación específica que planteaba que pasado 10 años el monto de la cuenta se duplicaba.

Figura 1

Trabajo escrito y transcripción en el Momento 2 sobre la descripción del monto de la cuenta



(a) Trabajo escrito de Fernanda

10 años: monto inicial (x)·2=segundo monto=2x
20 años: 2x·2=4x
30 años: 4x·2=8x

x=50.000
(50.000)·8=400.000
(50.000)·4=200.000
(50.000)·2=100.000

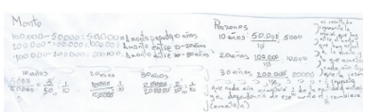
Respuesta. A los 10 años en la cuenta habrá 100.000 CPL; a los 20 años habran 200.000 CPL y a los 30 años habrá 400.000 CPL

(b) Transcripción del trabajo escrito de Fernanda

Tras discutir el análisis, el profesor solicitó a los estudiantes establecer relaciones entre el monto de la cuenta (D), su variación (ΔD), la razón de cambio ($\Delta D/\Delta t$) y la tasa de interés. Ambos identificaron la proporcionalidad entre D y $\Delta D/\Delta t$, así como interpretaciones clave sobre estas magnitudes. Maximiliano señaló verbalmente que, a medida que crecía el monto, también aumentaban ΔD y la $\Delta D/\Delta t$. Fernanda, en su material escrito (Figura 2), expresó: "… $\frac{1}{10}$ representa que cada año aumentará 1/10 de la cantidad anterior…".

Figura 2

Trabajo escrito y transcripción en el Momento 2 sobre relaciones de diferentes cantidades



(a) Trabajo escrito de Fernanda

Monto
100.000-50.000=50.000=Δ monto pasado 10 años
200.000-100.000=100.000=Δ monto entre 10-20 años
400.000-200.000=200.000=Δ monto entre 20-30 años

Razones
10 años $\frac{50.000}{10}$ = 5000
20 años $\frac{100.000}{10}$ = 10000
30 años $\frac{200.000}{10}$ = 20000

El resultado representa la relación que hay entre el monto que hay actual en la cuenta y lo que aumentará cada año O sea que la razón $\frac{1}{10}$ representa que cada año aumentará $\frac{1}{10}$ de la cantidad anterior y en dependencia de ese monto el $\frac{1}{10}$ cambiará (aumentará)

10 años $\frac{5000}{50000}=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$
20 años $\frac{10000}{100000}=\frac{1}{10}$
30 años $\frac{20000}{200000}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

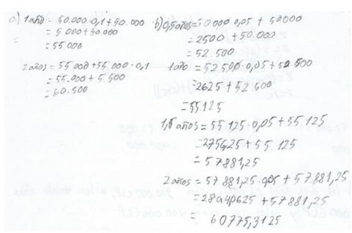
(b) Transcripción del trabajo escrito de Fernanda

En este Momento 2, los estudiantes demostraron una matematización vertical al estimar el monto cada diez años, desarrollando un modelo-de cálculo específico para esta situación ($2 \cdot D_i$ cuando $\Delta t_i = 10$) y avanzando hacia el nivel referencial de la EMR. Utilizaron correctamente las estimaciones previas para calcular nuevos valores, un aspecto clave del método de Euler y de los MN. Además, identificaron una relación de proporcionalidad directa entre D, ΔD y la $\Delta D/\Delta t$; extendiendo este razonamiento a problemas similares con diferentes tasas de interés o depósitos iniciales. Esta capacidad de interpretar relaciones matemáticas más allá del contexto inicial transformó su modelo en un modelo-para el razonamiento matemático en otros escenarios. Esta generalización superó las expectativas previstas en el análisis a priori del diseño de la actividad.

En el Momento 3, los estudiantes emplearon modelos similares para resolver ambos incisos. Identificaron la tasa de interés calculada (0,1) como parte del modelo de estimación del monto asociado a cada unidad de tiempo, reconociendo un año como unidad de tiempo en lugar de una década. Aplicaron un proceso iterativo característico del método de Euler, utilizando cada estimación previa para calcular la siguiente (Figura 3 se muestra el trabajo de Maximiliano). Los estudiantes transformaron progresivamente sus modelos hasta construir el modelo: $\mathrm{D}_{i+1} = \mathrm{D}_i + \Delta\mathrm{t} \cdot \frac{1}{10} \cdot \mathrm{D}_i$; $\Delta\mathrm{t} = \Delta\mathrm{t}_1 = \Delta\mathrm{t}_2 = \cdots$, expresado desde sus propias notaciones y trabajo matemático. La emergencia de este modelo, consistente con el método de Euler, refleja la reinvención, por parte de ambos estudiantes, de este método, su tránsito por los niveles de matematización de la EMR y la evolución de diversos modelos hasta llegar al mismo. Tanto Maximiliano como Fernanda, mediante su trabajo escrito y la discusión con el profesor, reconocieron las adaptaciones necesarias en el modelo para diferentes intervalos de tiempo ($\Delta\mathrm{t} = 1$ o $\Delta\mathrm{t} = 0{,}5$) o tasas de interés distintas (sustituyendo 0,1 por otra tasa). Esto evidenció su capacidad para construir un modelo-para estimar el monto en otros contextos.

Figura 3

Trabajo escrito y transcripción en el Momento 3



(a) Trabajo escrito de Maximiliano

a) 1 año= 50 000·0,1+50 000
= 5 000+50 000
= 55 000
2 año= 55 000+55 000·0,1
= 55.000+5 500
= 60 500

b) 0,5 años = 50 000·0,05+50 000
= 2 500+50 000
= 52.500
1 año = 52 500·0,05+52 500
= 2625+52.500
= 55.125
1,5 años = 55 125·0,05+55 125
= 2756,25+55 125
= 57 881,25
2 año = 57881,25·0,05+57881,25
= 2894,0625+57881,25
= 60775,3125

(b) Transcripción del trabajo escrito de Maximiliano

Los hallazgos resaltan la importancia de diseñar actividades basadas en contextos que conecten con los intereses de los estudiantes, facilitando su transición desde modelos situacionales hacia modelos matemáticos formales. Estas actividades deben incluir tareas progresivas que promuevan la abstracción y permitan explorar diferentes parámetros, como tasas de interés o intervalos de tiempo. Además, la interacción docente-estudiante, mediante preguntas y discusiones reflexivas, resulta clave para consolidar el razonamiento matemático. Este enfoque no solo apoya el aprendizaje en MN, sino que también puede adaptarse a otras áreas matemáticas, favoreciendo la transferencia de conocimientos a nuevos contextos.

CONCLUSIONES

La trayectoria de enseñanza y aprendizaje mostrada en el trabajo, donde los estudiantes reinventaron el método de Euler, ilustra cómo los alumnos construyen diferentes modelos y los transforman experimentando el proceso de matematización progresiva. Estos modelos de los estudiantes pueden ser utilizados como herramientas didácticas para enseñar matemáticas. Bajo esta idea, se presenta un enfoque en el que se busca que los estudiantes aprendan los contendidos matemáticos haciendo o creando ellos mismos las matemáticas, en vez de ser sujetos menos activos que escuchan y analizan las explicaciones dadas por el profesor. El contenido que se aborda en la investigación: solución de problemas en contexto mediante ecuaciones diferenciales utilizando MN, y de la cual se presenta una pincelada en este trabajo, tiene relevancia puesto que, debido al nivel de complejidad de estos temas, su enseñanza se lleva a cabo desde enfoques tradicionales fundamentalmente. Un reto importante de este trabajo y de la investigación consiste en lograr que de los estudiantes surja la formalización del modelo, utilizando el lenguaje, definiciones y procesos propios de las matemáticas institucionalizadas.

Los resultados de este estudio no solo confirman la eficacia de la EMR en la enseñanza de MN, sino que también abren nuevas posibilidades para adaptar este enfoque a otras áreas matemáticas. El diseño de actividades similares podría incluir contextos financieros o científicos, adaptados a los intereses y niveles de los estudiantes, con el fin de fomentar la transferencia de aprendizajes y la autonomía en la construcción del conocimiento matemático

Reconocimiento

La siguiente investigación forma parte de los estudios de postgrado del autor Juan Felipe Medina-Mendieta financiados por ANID-Subdirección de Capital Humano/Doctorado en Didáctica de la Matemática/2023-21230167

Referencias

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (Vol. 1). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education* (Vol. 9). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for research in Mathematics Education*, *25*(5), 443-471. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.25.5.0443

Rasmussen, C., & Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. *The*

Journal of Mathematical Behavior, *26*(3), 195-210. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.09.004

Rasmussen, C., Wawro, M., & Zandieh, M. (2015). Examining individual and collective level mathematical progress. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 259-281. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9583-x

Rasmussen, C., Wawro, M., & Zandieh, M. (2024). An Integrated Methodological Approach for Documenting Individual and Collective Mathematical Progress: Reinventing the Euler Method Algorithmic Tool. *Education Sciences*, *14*(3), Article 3. https://doi.org/10.3390/educsci14030335

Riyanto, B., Zulkardi, Putri, R. I. I., & Darmawijoyo. (2017). Mathematical modeling in realistic mathematics education. *Journal of Physics: Conference Series*, *943*(1), 012049. https://doi.org/10.1088/1742-6596/943/1/012049

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 9-35. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Microenseñanza, un contexto para explorar en el pensamiento estadístico de futuros profesores de matemática

Camila Cisterna Alarcón, Universidad Central de Chile, Chile

Armin Kauer Suazo, Universidad Central de Chile

Daniela Araya Bastías, Universidad Central de Chile, Chile

Nicolás Sánchez Acevedo, Universidad Central de Chile

Abstracto:

La enseñanza de la estadística ha cobrado un interés creciente durante los últimos años, debido a la necesidad de desarrollar la alfabetización estadística en la enseñanza escolar, con el fin de formar ciudadanos críticos y reflexivos. Lo anterior implica que la formación de profesores de matemática debe desarrollar conocimientos y habilidades para que éstos promuevan una enseñanza de la estadística de manera contextualizada y significativa para sus aprendices. En este sentido, la propuesta de investigación busca adentrarse en el proceso de la formación estadística de docentes en formación, explorando cómo estos movilizan los elementos del pensamiento estadístico en contextos de microenseñanza. Específicamente el objetivo de la investigación es caracterizar los elementos del pensamiento estadístico que profesores en formación promueven en la enseñanza de la estadística, mediante el ciclo Investigativo PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis, Conclusiones). Para ello se utilizó un enfoque cualitativo cuyo diseño metodológico es un estudio de caso múltiple, del que damos cuenta en este reporte de unos de ellos en contexto de microenseñanza. Tras analizar el caso de estudio se evidenció una preponderancia en el elemento "conclusión" sin ser

conscientes del "problema estadístico", en donde el docente promueve que sus aprendices infieran a partir de los datos. Por otra parte, se observó que ninguno de los profesores en formación promovió la recolección y la indagación de datos.

Pensamiento estadístico, Docentes en formación, Ciclo investigativo, Cualitativo, Microenseñanza

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la estadística ha tenido gran relevancia en el ámbito de las investigaciones educativas durante los últimos 10 años, por ejemplo, (Pino et al., 2014; Vázquez y Alsina, 2017; Pallauta y Gea, 2019). Diversos autores han señalado las razones de este interés, por ejemplo, Ottaviani (1998) indica que estudiar estadística favorece el desarrollo personal, fomenta el razonamiento crítico basado en la evidencia objetiva, y permite usar datos cuantitativos para guiar nuestros juicios e interpretarlos. Asimismo, es crucial adquirir un sentido de los métodos que transforman estos datos en soluciones para la toma de decisiones y predicciones. Batanero (2001) destaca que la estadística no es solo una herramienta técnica, sino que también es esencial para los profesionales y ciudadanos que deben interpretarla y tomar decisiones basadas en ella. Estos puntos resaltan la importancia de la enseñanza estadística para promover decisiones informadas bajo incertidumbre, lo que se alinea con la definición de pensamiento estadístico de Wild & Pfannkuch (1999).

Las investigaciones sobre el pensamiento y conocimiento estadístico se han focalizado mayormente en profesores de educación primaria (Estrella et al., 2015; Estrella y Olfos, 2015), pero en el contexto de la educación secundaria, los estudios son escasos. En este ambito los estudios que podemos destacar, es el de Rodríguez y Sandoval (2012), quienes compararon las habilidades de decodificación e interpretación de información gráfica en una muestra de 47 profesores en ejercicio y 44 en formación de enseñanza media en Chile. Basados en los niveles de comprensión gráfica de Curcio (1989), encontraron que ambos grupos operan en niveles básicos de descodificación, lo cual sugiere que sus habilidades están por debajo de lo esperado.

Pallauta y Gea (2019) realizaron un estudio que caracterizó las actividades propuestas en los libros de texto de Matemática entregados a estudiantes de quinto a octavo básico en Chile. Basados en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), analizaron cualitativamente estos textos y descubrieron que las tareas más frecuentes requerían leer y realizar cálculos en tablas de frecuencia, priorizando esto sobre la comprensión y construcción de gráficos.

Estos estudios reflejan parte del problema en la enseñanza de la estadística en Chile, posiblemente debido a lo que Cardona (2011) describe como la adopción de un enfoque similar al de la matemática, dado que la estadística surgió bajo el amparo de esta última. Este panorama motiva el siguiente objetivo general de investigación: Identificar los elementos del pensamiento estadístico que movilizan los docentes en formación de matemática al cursar una asignatura de estadística.

MARCO TEÓRICO

El proceso de pensamiento estadístico, propuesto por Wild & Pfannkuch (1999), plantea que ésta es una habilidad cognitiva fundamental que permite a las personas comprender, analizar y tomar decisiones basadas en datos y evidencia. Para su caracterización, elaboraron un modelo de cuatro dimensiones; ciclo investigativo, tipos de pensamiento, ciclo interrogativo, y disposiciones. Estas dimensiones buscan organizar las formas de llevar a cabo una estadística en contexto (Leiria et al., 2015).

Ciclo investigativo como parte del pensamiento estadístico

Como parte del pensamiento estadístico, el ciclo investigativo PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones), permite identificar etapas, momentos y las decisiones en la forma cómo uno actúa y lo que se piensa en el contexto del desarrollo de una investigación estadística en contexto.

En particular, la primera dimensión es conocida como ciclo investigativo o PPDAC. En el Problema, el docente define el propósito de aprendizaje para los estudiantes y visualiza las posibles problemáticas que pueden surgir en sus clases. Luego, en base a la identificación del problema comienza el Plan, el docente elabora una estrategia didáctica que sirva como guía durante la clase, anticipando dudas y promoviendo el desarrollo del pensamiento estadístico. El docente en los Datos menciona la obtención, registro y organización de la información durante la actividad propuesta en la clase. Posteriormente el Análisis consiste en la interpretación y examen crítico de los datos recolectados, permitiendo al docente identificar dificultades en la comprensión de los problemas por parte de los estudiantes y hacer ajustes en futuras clases. Finalmente, la Conclusión es la presentación clara y precisa de los hallazgos obtenidos, lo que facilita la comunicación de los resultados del aprendizaje y permite que otros puedan entender y evaluar el proceso.

METODOLOGÍA

Esta investigación sigue una metodología de tipo cualitativa (Creswell,1998), basado en un estudio de caso instrumental (Stake, 2007).

La investigación se lleva a cabo con profesores en formación de matemática de una Universidad privada de la región metropolitana de Chile que cursan la asignatura Didáctica de la Estadística (8° semestre de un total de 10), tras haber cursado toda la línea curricular de Estadística (estadística descriptiva, probabilidades e inferencia). Para efectos de este reporte mostramos los resultados de uno de los casos bajo estudio.

En la asignatura Didáctica de la Estadística se solicitó realizar una microenseñanza sobre cualquier contenido estadístico incluido en las bases curriculares del Ministerio de Educación (Mineduc, 2021) y debían tener una duración de máximo 25 minutos. Para la recolección de los datos se realizaron las grabaciones de cada una de ellas (por medio una cámara de video), las que posteriormente fueron transcritas , para identificar y caracterizar los elementos presentes del ciclo investigativo movilizados por los futuros profesores de matemáticas.

RESULTADOS

A continuación, describimos la microenseñanza del caso de análisis de un profesor en formación que tuvo una duración de 30:53 minutos. Los resultados evidencian la movilización de cuatro elementos del Ciclo Investigativo propuesto: Problema, Plan, Análisis y Conclusiones. Las que se describen a continuación:

Problema: El elemento Problema fue abordado al comienzo de la actividad realizada durante la microenseñanza, donde se plantearon preguntas del ámbito de medidas de posición bien definidas que guiaron el propósito de la actividad.

Plan: El plan para llevar a cabo la resolución de la actividad también estuvo presente. A continuación, se relata lo que realizo el profesor para promover este elemento:

Docente: Primero ¿Se puede representar como un diagrama de cajón? ¿El tipo de variable que estamos usando nos sirve para eso? Porque habíamos dicho que hay que ordenar las cosas ¿cierto? Entonces ¿podemos poner cualquier cosa en esto?

Como se puede observar el docente solicitó a los estudiantes que identificaran el tipo de variable involucrada en el ejercicio y discutieron las técnicas estadísticas más apropiadas para analizarla, siendo este el plan propuesto por el docente.

Análisis: El elemento de análisis estuvo presente durante la resolución de las preguntas planteadas en la actividad. A continuación, se detalla cómo el docente promovió este elemento

Docente 1: Aja y entonces como decía 'Alumno 3' aquí se marca el cuartil 1 ¿cierto? Entonces ahora ¿a qué hace alusión esta pregunta? ¿De dónde nos tenemos que ubicar para responderla? Alumnos: En el cuartil 3.

En esta etapa, los estudiantes participaron activamente en la aplicación de técnicas estadísticas descriptivas para interpretar los datos proporcionados. El análisis no solo se limitó a la ejecución de procedimientos estadísticos, sino que también implicó una reflexión crítica sobre los resultados obtenidos.

Conclusiones: Finalmente, el elemento Conclusiones estuvo presente al dar respuesta a las preguntas formuladas en la actividad.

Docente 1: Ok, entonces, ¿alguien podría contestar la primera pregunta? O ¿A qué hace alusión la primera pregunta?

Alumno 3: Se refiere al área izquierda de donde empieza el cuadrado.

Docente 1: Aja, y entonces como decía “Alumno 3”, aquí se marca el cuartil 1 ¿cierto?

Alumnos: Si.

Docente 1: Entonces, ¿Qué valor sería el 60? ¿Y ese valor que sería? Respondiendo a la pregunta en el contexto de la pregunta.

Alumno 5: Yo creo que es … 60.

Aquí, los estudiantes fueron guiados a reflexionar sobre los resultados del análisis, estableciendo relaciones entre los hallazgos y el problema inicial. La capacidad de llegar a conclusiones informadas a partir del análisis es un indicador de que los estudiantes han comprendido no sólo los métodos, sino también su aplicación en la resolución de problemas reales.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados del caso, se puede establecer que el docente en formación logró incorporar varios elementos clave del Ciclo Investigativo, pero no cubrió todos los aspectos del proceso de investigación estadística.

Se identificó los elementos de Problema, Plan, Análisis y Conclusiones. Esto incluyó la formulación de preguntas, la planificación de un enfoque de resolución, la realización del análisis y la obtención de conclusiones fundamentadas.

Sin embargo, la ausencia del elemento Datos, específicamente en la etapa de recolección y manipulación, representa una limitación importante. El docente proporcionó los datos necesarios sin involucrar a los estudiantes en su recolección, lo que redujo la oportunidad de desarrollar habilidades en el manejo de información y la comprensión de la variabilidad inherente a los datos reales. Este componente es esencial para una experiencia completa en el proceso investigativo.

En resumen, el docente por medio de la microenseñanza cumplió con gran parte de los requerimientos del Ciclo Investigativo, pero para ofrecer una experiencia más enriquecedora, es necesario incluir la fase de recolección de datos, fomentando así una participación de los estudiantes en todas las etapas del proceso.

Referencias

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Cardona, L. Z. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? *Revista virtual Universidad Católica del Norte, No 33*(Mayo-Agosto de 2011, Colombia).

Cardona, Lucia Zapata. (2014). Alcance de las tareas propuestas por los profesores de estadística. *Universidad de Antioquia*, 53–62.

Centro de Perfeccionamiento, E. e. I. P. (2021). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática*. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2021/08/Matematica-Media.pdf

Creswell, J. W. (1998). Qualitative Inquiry and Research Design, Chosing Among Five Traditions. SAGE Publications.

Curcio, F. R. (1989). Developing graph comprehension. Reston: N.C.T.M.

Estrella, S. Olfos R. Mena-Lorca A. (2015). El Conocimiento Pedagógico del Contenido de Estadística en Profesores de Primaria. *Revista Educação e Pesquisa.*, 477-493.

Estrella, S., & Olfos, R. (2015). Transnumeración de los datos: el caso de las tablas de frecuencia.

Leiria, A., González, M., & Pinto, J. (2015). Conocimiento del profesor sobre pensamiento estadístico. PNA, 10(1), 25-52.

Mineduc. (2019). Bases Curriculares 3° y 4° medio. *Bases Curriculares*. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/14364Ottaviani, M.G. (1998). Developments and perspectives in statistical education, Proceedings IASS/IAOS Joint Conference, Statistics for Economic and Social Development, Aguascalientes, Mexico, 1-4 September 1998 (CD-ROM).

Pallauta, J. D., Gea Serrano, M. M., & Guerrero, A. V. (Eds.). (2019). *Las actividades sobre tablas estadísticas en textos escolares chilenos de educación básica*. Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.

Pino, C., Díaz-Levicoy, D. y Piñeiro, J.L. (2014). Los gráficos estadísticos como articuladores del currículo escolar. *Revista Chilena de Educación Científica,* 13(2), 9-18.

Rodríguez. A, F., & Sandoval Rubilar, P. R. (2012). Habilidades de codificación y decodificación de tablas y gráficos estadísticos: Un estudio comparativo entre profesores y alumnos de pedagogía en enseñanza básica. *Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior, 17*(1), 207-235.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudios de casos*. Ediciones Morata.

Vazquez, C. O., & Alsina, Á. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Bolema Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 454–478. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a22

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. Revue Internationale de Statistique [International Statistical Review], 67(3), 223–248. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

SITUACIONES-PROBLEMA DE CORRELACIÓN Y REGRESIÓN EN

LIBROS DE TEXTO DE CHILE Y COLOMBIA

Audy Salcedo, Universidad Autónoma de Chile.

Danilo Díaz-Levicoy, Universidad Católica del Maule.

Jaime I. García-García, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

Abstract:

Este estudio analiza las situaciones-problema sobre los temas de correlación y la regresión en dos libros de texto de matemática de educación secundaria de Chile y Colombia. El libro de texto es uno de los principales recursos para la enseñanza en la educación formal, y su análisis puede dar una aproximación de los enfoques a los que podrían optar los profesores en sus clases. Se utilizó el análisis de contenido de las situaciones-problema para caracterizar los objetos matemáticos involucrados en las unidades de correlación y regresión, así como identificar similitudes y diferencias entre libros respecto a ese tema. Los resultados indican que ambos libros hacen énfasis en el análisis de la existencia de relación entre variables, con poca presencia de situaciones-problema que lleven al cálculo de los parámetros de las rectas de regresión, su trazado o la estimación de la variable dependiente. Los dos priorizan la correlación por encima de la regresión y presentan semejanzas en cuanto a la distribución de los tipos de situaciones-problema que contienen, aunque con enfoques distintos. Mientras que en el libro de Chile se trabaja de manera más intuitiva, el de Colombia tiene una visión más tradicional, con base en el cálculo de coeficientes y parámetros de las rectas de regresión.

Correlación, Educación Secundaria, Libros de texto, Regresión, Situación-problema.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones reportan que el libro de texto de matemática influye en los enfoques que utilizan los profesores para presentar el contenido, como en el tipo de actividades que deben hacer los estudiantes (Fan y Zhu, 2000; Qi et al., 2018). Además, son un recurso importante para los profesores (Lepik et al., 2015), orientan sobre la matemática a enseñar (Rezat y Strässer, 2014) y definen las oportunidades de aprendizaje que se proponen a los estudiantes (Stein et al., 2007). En la educación formal, el libro de texto es uno de los recursos pedagógicos usados para desarrollar la competencia estadística del ciudadano.

Por otra parte, el estudio de las distribuciones bidimensionales está entre las ideas fundamentales de la estadística (Batanero y Borovcnik, 2016). Países como Australia, Chile, Colombia, Inglaterra, Ecuador, Nueva Zelanda y Estados Unidos la han incorporado a la educación secundaria. Se considera que el estudio de la correlación y la regresión es esencial, dado que constituyen la base de diversos métodos estadísticos (Engel y Sedlmeier, 2011) y amplían los conocimientos previos sobre distribuciones univariadas y funciones matemáticas (Batanero y Gea, 2020). Además, la covariancia facilita la comprensión de modelos estadísticos en el mundo actual (Gal, 2024).

En este contexto, el presente tiene por objetivo analizar las situaciones-problema sobre los temas de correlación y la regresión en libros de texto de matemática de educación secundaria de Chile y Colombia.

MÉTODO

Se analizó el tema de correlación y regresión en dos libros de texto de matemática de educación secundaria, uno de Chile y uno de Colombia. Se seleccionaron libros vigentes y autorizados por el Ministerio de Educación respectivo, atendiendo a una muestra no probabilística, de tipo intencional. Además, son los únicos grados donde se estudia la correlación y regresión en esos países.

Para el análisis se siguió una metodología cualitativa, mediante el método de análisis de contenido de las situaciones-problema que se incluyen en cada libro (Ver Tabla 1). En cada una se analizaron las situaciones-problema, vale decir, cualquier tarea, ejercicio o actividad que se ofrece a los estudiantes que favorezca el aprendizaje de la matemática (Godino et al., 2007), en particular de la regresión y la correlación.

Tabla 1

Libros de texto analizados

País	Título	Autores (año)	Grado (edad)
Chile	Matemática. Texto del estudiante. 1ro. Medio	Fresno, Torres y Ávila (2020)	1ro de educación secundaria (15 años)
Colombia	Vamos a aprender matemáticas. Libro del estudiante 9	Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2017)	9no de educación básica secundaria (15 años)

Para la clasificación de las situaciones-problema se siguió la propuesta de Gea (2014), quien las agrupa en las siguientes categorías:

P0. *Organización/representación de datos bidimensionales*. Son actividades donde se busca resumir o representar el conjunto de datos bivariantes mediante gráficos o tablas estadísticas. Se incluye la interpretación de las representaciones.

P1. *Analizar la existencia de relación entre variables*. Son actividades que permiten advertir la posible existencia de asociación entre las variables y se pueden diferenciar los siguientes subtipos: P1.1. *Análisis de las variables que conforman la variable estadística bidimensional*. Donde se analiza la variable estadística bidimensional. El estudiante debe delimitar cada una de las dos variables que se van a estudiar, a partir de un texto, un gráfico o una tabla; P1.2. *Analizar la existencia de una dependencia funcional o estadística*. Decidir si se trata de una función, una dependencia estadística o si no existe relación. Generalmente, se parte del diagrama de dispersión para que el estudiante analice la posible asociación de variables y luego proponga alguna función de ajuste; P1.3. *Medida de la intensidad de la relación entre las variables*. Se debe cuantificar la intensidad de la relación, la cual puede variar desde la independencia hasta la dependencia funcional. Además, se incluyen aquellas actividades donde se debe calcular el coeficiente de correlación lineal, la estimación de la correlación a partir de representaciones de datos o cuando se pide asignar un coeficiente de correlación a un diagrama de dispersión; P1.4. *Determinar la dirección de la relación entre variables*. Se estudia el sentido de la relación, distinguiendo la relación directa o inversa.

P2. *Predecir una variable en función de otra*. Actividades donde el interés se centra en encontrar alguna función que permita obtener una de las variables a partir de la otra. Implica el cálculo de los coeficientes que determinan las rectas de regresión, trazar las rectas de regresión o hacer estimaciones en función de ellas. Se suele descomponer en los siguientes subtipos: P2.1. *Analizar el ajuste lineal entre variables*. Se solicita el cálculo de los parámetros de las rectas de regresión o el trazado de ellas, de forma aproximada, a partir de un diagrama de dispersión; P2.2. *Realizar estimaciones mediante el modelo de regresión*. Se solicita hacer la estimación de la variable dependiente, a partir de un valor de la variable independiente.

Los tres investigadores clasificaron, de forma independiente, todas las situaciones-problema presentes en el capítulo de correlación y regresión de los libros y luego se discutieron hasta llegar a acuerdos por consenso y generar una única clasificación.

RESULTADOS

A continuación, se exponen los resultados del análisis de las situaciones-problema de correlación y regresión de los libros de texto considerados.

Tabla 2

Frecuencia (y porcentaje) de situaciones-problema en el estudio de la correlación y regresión

Situación-problema		Chile	Colombia
Representación de datos bidimensionales (P0)		24 (28,9)	19 (34,5)
Análisis de existencia de relación entre variables (P1)			
Variable estadística bidimensional	P1.1	9 (10,8)	5 (9,1)
Dependencia funcional o estadística	P1.2	16 (19,3)	12 (21,8)

Medida de la intensidad de la relación	P1.3	2 (2,4)	10 (18,2)
Dirección de la relación	P1.4	26 (31,3)	0 (0,0)
Predicción de una variable en función de otra (P2)			
Ajuste lineal entre variables	P2.1	6 (7,2)	3 (5,5)
Estimaciones mediante el modelo	P2.2	0 (0,0)	6 (10,9)
Total		83 (100)	55 (100)

En general, las situaciones-problema del tipo P1 son las más frecuentes en ambos libros. En el libro de Chile son la mayoría y en el caso de Colombia son casi la mitad de las actividades. Asimismo, en los dos libros, el tipo P2 es la de menos presencia y las P0 son las segundas más frecuentes, solo que en el texto de Chile las P1 son más de doble que las P0, mientras que en Colombia hay una diferencia de 15% a favor de las P1.

En la Tabla 2, también se observa que los dos libros hacen énfasis en las actividades del tipo P1.2, donde el estudiante debe decidir si se trata de una función, una dependencia estadística o no hay relación. En la Figura 1, se expone un ejemplo de este tipo de situaciones-problema.

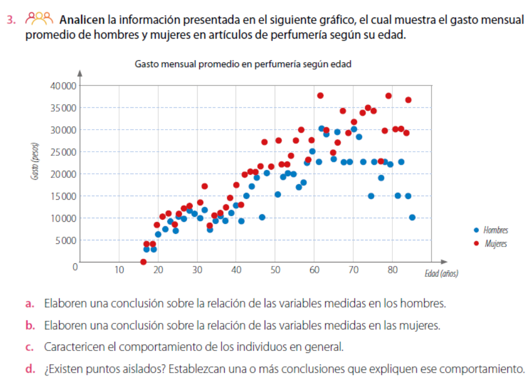


Figura 1. Situación-problema P1 (Fresno Ramírez et al., 2020, p. 158)

En las tareas a y b, el estudiante debe emitir conclusiones sobre la relación entre la edad y los gastos mensuales en perfumería de hombres y mujeres, respectivamente. El ejercicio asume la existencia de la relación, por lo que el estudiante debe expresar una conclusión sobre su intensidad (P1.3) y su sentido (P1.4). En c, deben caracterizar la relación entre las variables del grupo completo. Como no conocen los coeficientes de correlación, las respuestas son intuitivas, sin hacer cálculos.

Pareciera entonces que los libros analizados podrían ofrecer una introducción a la correlación, de una forma más intuitiva que formal, así como manejar nociones básicas como correlación fuerte, débil, positiva, negativa o nula. Sin embargo, esto sólo es cierto en el caso del libro de Chile. El libro de texto colombiano brinda el enfoque tradicional, lo cual se expresa, por ejemplo, en una mayor presencia de las situaciones P1.2, que se combina con las del tipo P1.3 (medir la intensidad de la relación) y se estudia cómo calcular el coeficiente de correlación de Pearson, cuestión que no se hace en el texto de Chile. En este último, las situaciones P1.2 se conjugan con aquellas que piden estudiar la dirección de la relación entre variables (P1.4), con pocas actividades para establecer la intensidad de la relación (P1.3), pero sin calcular algún coeficiente de correlación.

Las situaciones-problema del tipo P0 son las segundas en cuanto a frecuencia de aparición en ambos libros. La Figura 2 presenta un ejemplo.

Los valores de una variable bidimensional (x, y) son los siguientes: (2, 2), (4, 2), (4, 4), (4, 3), (7, 5), (7, 7), (7, 6), (5, 6), (5, 5), (5, 4), (8, 6) y (9, 7).

a. Dibuja el diagrama de dispersión.

b. Indica el tipo de dependencia entre ambas variables.

Figura 2. Situación-problema P0 (Ministerio de Educación Nacional, 2017, p. 19)

En la actividad se presenta un conjunto de pares ordenados y se indica que es una variable bidimensional. Los estudiantes deben dibujar el diagrama de dispersión (P0) y luego indicar el tipo de dependencia que se da entre las variables (P1), específicamente, deben señalar si se trata de una relación funcional o estadística (P1.2). Identificar y diferenciar las posibles relaciones estadísticas entre variables es importante para que el estudiante desarrolle la compresión de las ideas de correlación y regresión. Por ello, se podría esperar un mayor número de situaciones-problema P0, las necesarias para el desarrollo de P1 y P2. En relación con las situaciones-problema del tipo P2, en el libro de Chile son para el ajuste/trazado de las rectas a partir del diagrama de dispersión (P2.1), sin calcular los parámetros que las definen. En contraste, en el libro de Colombia, en esas situaciones solicitan el ajuste de las rectas mediante el cálculo de sus parámetros (P2.1) y hacer estimaciones (P2.2) a partir de ellas, ratificando así un enfoque tradicional.

La mayor presencia de situaciones-problema P1 coinciden con los resultados de Gea et al. (2013), pero se diferencian en la representación de los tipos P0 y P2. En los libros de texto de Chile y Colombia, las situaciones-problema P2 son las de menor representación, mientras que en el trabajo de Gea et al. (2013) son las del tipo P0.

No et al. (2016) señalan que la mayoría de los estudiantes, al analizar un diagrama de dispersión, distinguían si las variables tienen o no correlación, así como su sentido. Pero presentaron problemas para juzgar la fuerza de la correlación. Los estudiantes pensaban que la relación de las variables era mayor cuando más pronunciada era la pendiente de la posible recta o cuando más cercanos estuvieran los puntos entre ellos. Según los autores, este error puede deberse a que únicamente habían aprendido la definición informal de correlación, sin estudiar formalmente el coeficiente de correlación y la línea de regresión; tal como lo plantea el libro de Chile.

Estepa y Sánchez Cobo (2003) señalan que la mayoría de los estudiantes pueden calcular correctamente el coeficiente de correlación, pero también tienen problemas para interpretar los parámetros de las rectas de regresión y muestran confusiones entre las variables predictoras y explicativas en problemas de regresión. Este tipo de resultado es indicador de las dificultades que pueden existir al trabajar las situaciones-problema P2 y la necesidad de su inclusión en los libros de texto para su tratamiento en las aulas.

Conclusiones

La inclusión del tema de correlación y regresión en la educación secundaria de Chile y Colombia es un paso importante para la formación estadística de los ciudadanos de esos países. La distribución de las situaciones-problema de ambos libros es semejante. La diferencia se presenta en el enfoque, dado que el texto de Chile tiene un enfoque intuitivo, mientras que el texto de Colombia ofrece la visión tradicional, basada en el cálculo de coeficientes y los parámetros de las rectas de regresión.

Ambos libros muestran una clara inclinación hacia el análisis de la existencia de relación entre variables, lo cual significa que se le da importancia a la correlación sobre la regresión. Esto podría parecer lógico por ser la primera vez que estudia el análisis de datos bivariantes. No obstante, también significa ofrecer una visión limitada de la regresión, con lo cual se sacrifica la oportunidad de introducir a los estudiantes a la modelización predictiva, que está al alcance de la escuela secundaria (Fergusson y Pfannkuch, 2022).

Referencias

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers.

Batanero, C. y Gea, M.M. (2020). Making sense of correlation and regression. En K. Villalba-Condori, A. Aduríz-Bravo, J.L. Lavonen, H. Wong y T.H. Wang (Eds.), *Education and Technology in Sciences. CISETC 2019. Communications in Computer and Information Science* (pp. 22-35). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-45344-2_3

Engel, J. y Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE study* (pp. 247-258). Springer.

Estepa, A. y Sánchez Cobo, F.T. (2003). Evaluación de la comprensión de la correlación y regresión a partir de la resolución de problemas. *Statistics Education Research Journal, 2*(1), 54-68.

Fan, L. y Zhu, Y. (2000). Problem solving in Singaporean secondary mathematics textbooks. *The Mathematics Educator*, *5*(1/2), 117-141.

Fergusson, A. y Pfannkuch, M. (2022). Introducing high school statistics teachers to predictive modelling and APIs using code-driven tools. *Statistics Education Research Journal*, *21*(2), 1-25. https://doi.org/10.52041/serj.v21i2.49

Gal, I. (2024). Adult education in mathematics and numeracy: a scoping review of recent research. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01549-z

Gea, M.M. (2014). *La correlación y regresión en bachillerato análisis de libros de texto y del conocimiento de los futuros profesores*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada].

Gea, M.M., Batanero, C., Cañadas, G.R. y Contreras, J.M. (2013). Un estudio empírico de las situaciones-problema de correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 283-291). SEIEM.

Lepik, M., Grevholm, B. y Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom – the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3), 129-156.

No, AR., Han, SY. y Yoo, Y.J. (2016). Korean High School students' understanding of the concept of correlation. En D. Ben-Zvi y K. Makar (Eds.), *The Teaching and Learning of Statistics* (pp. 71-81). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23470-0_7.

Qi, C., Zhang, X. y Huang, D. (2018). Textbook use by teachers in junior high school in relation to their role. En L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S., Rezat y J. Visnovska (Eds.), *Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources. ICME-13 Monographs* (pp. 29-51). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4

Rezat, S. y Strässer, R. (2014). Mathematics textbooks and how they are used. In P. Andrews, & T. Rowland (Eds.), *Master class in mathematics education: International perspectives on teaching and learning* (pp. 51-62). Bloomsbury.

Stein, M. K., Remillard, J. y Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Information Age Publishing.

TAREAS PARA EL ENCUENTRO DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA CON EL CONCEPTO DE n! EN SITUACIONES DE AZAR

Kevin Rojas-Hernández, Universidad Arturo Prat

Juan Luis Prieto-González, Universidad Arturo Prat

Irene V. Sánchez-Noroño, Universidad Arturo Prat

Abstract:

Dentro de la elaboración de propuestas de enseñanza, el diseño de tareas matemáticas resulta fundamental dentro de la formación inicial de profesores en el área. Nutrir este proceso a partir de principios teóricos y metodológicos propios del campo de la Educación Matemática es tanto un desafío como una oportunidad para la concepción de actividades de enseñanza-aprendizaje innovadoras, que busquen responder de manera éticamente responsable a las diferentes demandas que impone la labor docente. Este trabajo resume el esfuerzo que realizamos en este sentido, mostrando cómo el principio de actividad de la Teoría de la Objetivación (como Tätigkeit) ha guiado el diseño de tareas en el eje temático de Probabilidad y Estadística para el encuentro con el factorial de un número n *(*$n!$*) y su uso en técnicas de conteo, dentro de situaciones azarosas, para un curso de segundo año de enseñanza media. En esta oportunidad, presentamos el diseño de dos tareas del diseño (formada por problemas de complejidad creciente), que demanda la reflexión, el posicionamiento crítico y la aplicación de los conocimientos sobre* $n!$ *en una situación de cálculo de permutaciones de una serie de objetos concretos, con y sin repetición, en dos situaciones diferentes. Una, a través de la aparición de estudiantes en fotografías que se posicionan en ordenes determinados y, otra, a través del uso de tarjetas especiales y su colaboración.*

Diseño de tareas, actividad de enseñanza-aprendizaje, permutaciones, labor conjunta, azar

INTRODUCCIÓN

Elaborar propuestas de enseñanza es una actividad característica de la práctica docente. En la formación inicial de profesores de matemáticas, esta actividad es clave en tanto permite un acercamiento de los futuros profesores con los saberes disciplinares y didácticos que han de orientar su práctica profesional futura (MINEDUC, 2021). Sin embargo, algunos autores reconocen lo complicado que puede resultar para un futuro profesor la producción de propuestas de enseñanza si se tiene en cuenta la variedad de aspectos que inciden en la actividad matemática del aula, entre ellos el contenido matemático tratado, las expectativas de aprendizaje sobre este contenido, las capacidades de los aprendices, las dificultades que podrían enfrentar los estudiantes en su encuentro con el contenido, las interacciones sociales y las estrategias de enseñanza con que se dispone (Lupiáñez, 2009). Ante esta realidad, el diseño de tareas matemáticas para los estudiantes surge como una línea de investigación que busca, entre otras cuestiones, aportar al desarrollo de las capacidades de losfuturos profesores para pensar y actuar profesionalmente al enfrentar las demandas de la elaboración, implementación y evaluación de propuestas de enseñanza (Godino, 2013; Llinares, 2011).

En nuestro caso, el diseño de tareas hace parte de una estrategia de formación de futuros profesores en cursos de didáctica de las matemáticas. Si bien, el diseño de tareas matemáticas conlleva dificultades y demandas que deben ser atendidas por los docentes, consideramos importante reflexionar sobre el modo en que los principios teóricos y metodológicos elegidos han guiado nuestro trabajo de producción de las tareas descritas. En este sentido, formulamos la siguiente pregunta de investigación: **¿Cómo determinados principios teóricos y metodológicos, propios de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, orientan y estructuran el diseño de tareas matemáticas en el eje temático de Probabilidad y Estadística, enfocado en la enseñanza y aprendizaje del concepto de $n!$ y su uso en situaciones azarosas?**

Asimismo, nuestro objetivo es **describir el proceso de elaboración de tareas en el eje temático de Probabilidad y Estadística para estudiantes de segundo año de enseñanza media (15-16 años), enfocado en el aprendizaje del concepto de $n!$ y su uso en el cálculo de permutaciones dentro de situaciones azarosas**. Para ello, las decisiones instruccionales se fundamentan en una perspectiva histórico-cultural de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que coloca la atención tanto en los saberes matemáticos que circulan en el aula como en los seres que aprenden estos saberes, particularmente en sus formas de interacción y colaboración mutua.

CONSIDERACIÓN TEÓRICAS DEL DISEÑO

Durante el desarrollo del curso de didáctica de las matemáticas, las decisiones sobre el diseño de tareas de Estadística y Probabilidad para estudiantes de segundo medio se han soportado en el concepto de *actividad de enseñanza-aprendizaje* propuesto por la Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2023). En la perspectiva de la TO, lo que hace posible el aprendizaje es una actividad humana, sensual y práctica (Radford, 2020); una actividad con un sentido distinto de las concepciones habituales que le asumen como una serie de acciones encaminadas al logro de un objetivo. Según Radford (2023), la actividad (*Tätigkeit*, en alemán) “se refiere a un sistema dinámico en el que los individuos interactúan colectivamente en un fuerte sentido social, lo que hace que los productos de la actividad sean también colectivos” (p. 36). Para distinguir la actividad como *Tätigkei* de otras acepciones, el autor se refiere a ésta como *labor conjunta*, esto es, una única y misma actividad en la cual estudiantes y profesores trabajan juntos en la producción de una *obra común*, propiciando con ello la toma de conciencia crítica y reflexiva de las formas de pensamiento matemático constituidas cultural e históricamente (Radford, 2020). El diseño de las tareas descritas en este documento se basa en la idea de actividad como *Tätigkeit*, lo que ha supuesto pensar en estas tareas como elementos consubstanciales de una *labor conjunta* encaminada al encuentro de estudiantes de segundo medio con saberes necesarios para sentar las bases en el estudio del azar y la probabilidad, concretamente con el concepto de $n!$ aplicado a situaciones que involucran permutaciones lineales, con y sin repetición.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS DEL DISEÑO

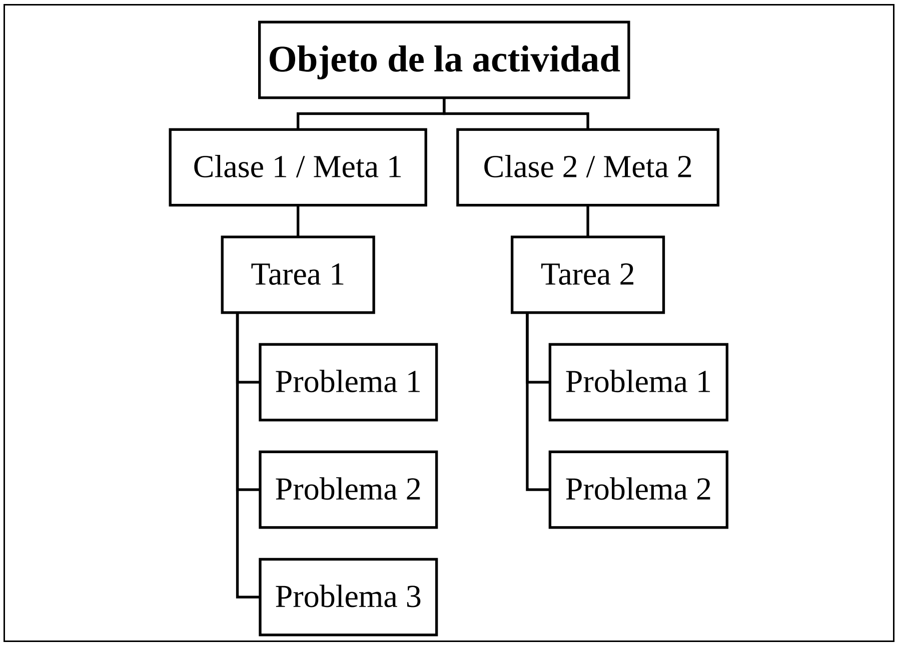
Radford (2023) establece pautas para la elaboración de problemas matemáticos que sustentan el diseño de nuestras tareas. Desde la perspectiva de la TO, toda actividad de enseñanza-aprendizaje descansa en dos componentes que le configuran: la estructura Φ y la estructura

Θ. Nos centraremos en la estructura Φ. Esta se refiere a la organización didáctica de la actividad que se quiere realizar. Las decisiones al respecto dan forma al proyecto de enseñanza del profesor que contempla tres aspectos interconectados: el *objeto* (aquello que se desea alcanzar con la actividad), las *metas* (objetivos intermedios que orientan la actividad hacia su objeto) y las *tareas* (propuestas de logro de las metas, expresadas como una serie de problemas de complejidad conceptual creciente).

En nuestro caso, definimos un objeto de la actividad de enseñanza-aprendizaje a partir de las demandas del *Programa de Estudio de Matemática* para segundo año de enseñanza media (MINEDUC, 2016), en lo concerniente a la unidad de Datos y Azar. Específicamente, tuvimos en cuenta el objetivo de aprendizaje OA 11 (Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas) y uno de sus indicadores asociados (Aplican el término $n!$ en la resolución de problemas azarosos). Con base en estos elementos, definimos como *objeto* de la actividad *el encuentro de los estudiantes con una forma histórico-cultural de pensar matemáticamente en el número de ordenamientos de* n *elementos, con y sin repetición*. Para que la actividad se mueva hacia su objeto, proponemos dos *metas* que buscan orientar la labor conjunta de los estudiantes y el profesor: *(1) deducir, de manera colaborativa, un sentido cotidiano para el uso del término* $n!$ *en problemas de permutación de elementos* y *(2) aplicar, de manera colaborativa, el término* $n!$ *en la resolución de problemas de permutación de elementos*. En nuestro caso, definimos dos tareas con sus respectivos problemas, los cuales contienen preguntas y acciones de complejidad conceptual creciente, orientadas al logro de estas metas para acercar a los estudiantes al objeto de la actividad.

Cada meta se formuló como un objetivo de clase, de modo que, junto con su respectiva tarea, se diseñaron para implementarse en una sesión de 90 minutos (2 horas pedagógicas) en el aula, estimando una cantidad promedio de 40 estudiantes asistentes. En conjunto, conforman una secuencia didáctica de dos clases, tal y como se ilustra en la siguiente figura.

Figura 1: Plan de implementación del diseño



En el siguiente apartado, presentamos la dos tareas de la secuencia, la cuales se retroalimentan entre sí, particularmente con la segunda tarea integrando aspectos de la primera y convergiendo en cuanto a sus elementos clave.

RESULTADOS

La tarea 1 del diseño

La tarea 1, asociada a la meta 1, consta de tres problemas (con sus respectivas preguntas) que demandan la reflexión y el posicionamiento crítico ante una situación que involucra el intercambio de posiciones de los estudiantes en determinados órdenes para aparecer en una fotografía tomada por ellos mismos. Este contexto es favorable para el logro de la meta 1 si consideramos que los estudiantes de segundo medio han adquirido habilidades digitales que les permiten hacer de la fotografía un medio idóneo para la conservación de recuerdos e instantes de sus vidas, desde muy jóvenes.

La narrativa de la cual derivan los problemas de la tarea 1 es la siguiente:

> *Las fotografías se caracterizan por inmortalizar momentos cualesquiera de la vida, en ellas se muestran muchas posibilidades de conservar un mismo recuerdo, desde el cómo se obtiene la foto y el cómo se posicionan a los protagonistas de la foto, sean objetos o personas. Seguramente parte de su identidad está grabada en una foto en forma de recuerdo, ¿les interesa saber cómo este hecho se relaciona con su aprendizaje de las matemáticas?*

Esta tarea consta de tres problemas. Cada uno contiene preguntas que los estudiantes deben responder colectivamente y cuya progresión induce la necesidad de emplear n! para resolver situaciones que involucran el calculo de permutaciones en diferentes niveles de representación y dificultad (progresando desde $n = 2$ hasta $n = 6$) empleando tanto estrategias sugeridas por el docente como las propias, para analizar las diferentes posibilidades en el orden de una disposición de elementos. Por ejemplo, el primer problema (ver Figura 1) motiva al grupo de estudiantes a organizarse y llevar a cabo experiencias concretas, mediante la toma de fotografías, con las diferentes maneras de ordenarse entre sí para un arreglo determinado, como lo es estar sentados en sillas dispuestas en filas.

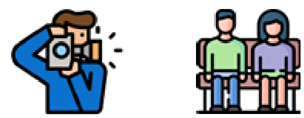
Figura 2: Problema 1 de la tarea 1

Sigan las siguientes instrucciones:

- Analicen los problemas que se proponen a continuación y respondan ampliamente las preguntas propuestas en esta guía.
- Reúnanse en grupos de 3 estudiantes para hacerlo.

Materiales:

- Cámara de celular (solo uno)



Problema 1. Vamos a crear recuerdos mientras exploramos conceptos matemáticos, siendo ustedes las y los protagonistas. En primer lugar, organicen un grupo de tres estudiantes y juntos elijan un lugar del aula que les guste y piensen que los representa, y que consideren apropiado para fotografiar con un teléfono celular.
Una vez que hayan elegido el lugar, designen a un "fotógrafo/a" encargado/a de capturar una fotografía en la que aparezcan los demás miembros del grupo. Si no desean aparecer en las fotografías, reemplacen las personas por objetos de su interés que puedan cumplir con lo solicitado en cada problema.
El requisito para que la fotografía sea considerada válida es que quienes aparezcan en la misma, estén ordenados en una fila y sentados, uno al lado del otro, cada uno en una silla. Además, **es esencial que el fondo (lugar) elegido para todas las fotografías sea siempre el mismo.** El profesor les proporcionará un ejemplo.

A través de preguntas y acciones, el primer problema induce experiencias para reflexionar con las permutaciones para $n = 2$ y $n = 3$, donde la cantidad de estudiantes que aparecen en las fotografías determinan el valor de n. El segundo problema motiva a que diferentes grupos colaboren entre sí para elevar la experiencia y estudiar el caso para $n = 4$ en el que comencien a desprenderse del calculo extensivo uno a uno de las permutaciones utilizando otras estrategias, como tablas o diagramas. Finalmente, el tercer problema concreta el trabajo previo realizado en los dos primeros problemas para que los diferentes grupos abstraigan la situación a un nivel símbolico, empleando $n!$, para determinar la cantidad de permutaciones para los casos $n = 5$ y $n = 6$, sin depender de fotografías.

La tarea 2 del diseño

La tarea 2, asociada a la meta 2, consta de una narrativa (ver Figura 2) y dos problemas (con sus respectivas preguntas y acciones), las cuales demandan la reflexión, el posicionamiento crítico y la aplicación de los conocimientos sobre permutaciones y $n!$ ante una situación que involucra la determinación de ordenamientos para cuatro símbolos distintos entre sí, dispuestos de izquierda a derecha, los cuales conforman una contraseña específica que se desconoce. La obtención de los diferentes ordenamientos para hallar la contraseña correcta cumple con brindar el acceso a una llave especial destinada a abrir una caja misteriosa (de contenido desconocido) presentada por el profesor.

Figura 3: Narrativa de la tarea 2

Imaginemos que en el aula aparece una caja misteriosa que, para conocer su contenido, necesita ser abierta con una ***llave especial****. Para acceder a esta llave se necesita una contraseña compuesta de 4 símbolos: ♠ (pica), ♣ (trébol), ♥ (corazón) y ♦ (diamante). Para formar la contraseña, se deben introducir estos símbolos, uno tras otro, de manera que no se repita ningún símbolo. Además, nadie, salvo el profesor, conoce aquello que se esconde en esa caja. Quien logre abrir la caja, no se arrepentirá de haberlo hecho.*

Para averiguar lo que se esconde en la caja, resolvamos los siguientes problemas que nos entregan pistas para descifrar la contraseña y, con ella, resolver este misterio.

El primero de los problemas, propone una experimentación y reflexión por medio del uso de materiales concretos, en esta ocasión, el uso de tarjetas (ver Figura 3) que en su centro contienen uno de los símbolos descritos en la narrativa, para enumerar y listar la cantidad de ordenamientos para el conjunto de cuatro símbolos que se disponen en un orden lineal de izquierda a derecha. El segundo, plantea reflexiones teóricas basadas en el uso de estas tarjetas que no solo contienen símbolos, sino también un fondo de tres colores diferentes en el que uno de estos se repite con mayor frecuencia para aproximar a los grupos de estudiantes al concepto de permutaciones con repetición.

Figura 4: Ejemplo de tarjetas descritas en la tarea 2.

En ambos problemas se espera la aplicación del término $n!$, así como reflexiones teóricas importantes acerca de su manipulación para obtener la cantidad total de ordenamientos, elevando las experiencias previas de los estudiantes a otros niveles de consciencia (Radford, 2023).

Estas tareas, al proponer un acercamiento intuitivo y sensible a las permutaciones lineales, ofrecen flexibilidad para ser adaptadas a las características del grupo de estudiantes y sus conocimientos previos. Si el docente lo considera pertinente, puede ampliar estas tareas al estudio de otros conceptos matemáticos, como la comprensión sobre espacio muestral, regla de Laplace o, una introducción a las combinaciones mediante la reformulación de preguntas relacionadas a los materiales utilizados.

CONCLUSIONES

El diseño de tareas matemáticas bajo principios teóricos y metodológicos provenientes de una teoría específica del campo de la Educación Matemática, como lo es la Teoría de la Objetivación (TO), impregnan las decisiones instruccionales de los futuros profesores en cursos de didáctica de las matemáticas de un fundamento conceptual importante que puede redundar en mejores condiciones para que sus estudiantes aprendan los contenidos escolares. En los contextos formativos, esta práctica resulta esencial para lograr que los futuros profesores elaboren propuestas de enseñanza debidamente informadas, tendiendo puentes entre la formación disciplinaria y didáctica que ellos reciben en la universidad y las necesidades institucionales de los contextos escolares en los que ellos se insertarán a futuro.

Aunque presentamos sólo el diseño de las tareas, estas fueron concebidas para implementarse en cursos con una gran cantidad de estudiantes, como es habitual en las aulas chilenas. Para garantizar su éxito, sugerimos como estrategia un trabajo previo que fortalezca la confianza y el trabajo colaborativo entre estudiantes y con el profesor, ya que nuestro diseño contempla una participación activa y constante del docente en las clases. Asimismo, dadas sus características, presentar estas tareas como una introducción al estudio de las técnicas de conteo y, eventualmente, del azar y la probabilidad, potenciaría su impacto en el aprendizaje de los estudiantes debido al nivel de reflexión que se desea lograr.

Contrario a otras perspectivas educativas previas y contemporáneas, cuyas teorías conciben el aprendizaje como un resultado, la TO ofrece, en cambio, entender el aprendizaje de las matemáticas como una toma de consciencia activa y creativa de sistemas históricos y culturales de pensamiento y acción, a través de la actividad, en un proceso colectivo que busca la creación de individuos reflexivos y éticos, posicionados de manera crítica, sobre sus prácticas matemáticas (Radford, 2023). Reconociendo el importante papel que tiene el principio teórico y metodológico de actividad en la perspectiva de la TO, en este trabajo describimos el diseño de tareas de probabilidad y estadística que buscan favorecer el encuentro de estudiantes de segundo año de enseñanza media con una forma histórico-cultural de pensar en el número de permutaciones de n elementos, con y sin repetición. Específicamente, compartimos dos tareas con las cuales pretendemos que los estudiantes deduzcan colaborativamente un sentido cotidiano para el uso del término $n!$ y lo apliquen en situaciones que invitan a pensar en el orden de una disposición establecida de elementos, inicialmente de naturaleza concreta, para llegar a su uso abstracto en resolución de problemas azarosos.

Referencias

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. Probabilidad Condicionada. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4770136

Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 78, 5-16.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* [tesis de doctorado, Universidad de Granada]. Depósito de investigación de la UG. https://digibug.ugr.es/handle/10481/2726

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2016). *Programa de estudio de Matemática 2° Medio*. MINEDUC. Recuperado de: https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Programas/34360:Programa-de-Estudio-Matematica-2-Medio

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2021). *Estándares de la profesión docente para carreras de Pedagogía en Matemática de Educación Media*. MINEDUC. Recuperado de: https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2023/05/Matematica-Media.pdf

Radford, L. (2020). Un recorrido a través de la Teoría de la Objetivación. En S. Takeco-Gobara & L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 15–42). Livraria da Física.

Radford, L. (2023). *La teoría de la objetivación: Una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Uniandes.

UNA PROPUESTA DE SECUENCIA DE CLASE PARA LA DISTRIBUCION NORMAL

Elizabeth Toro Barbieri, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Nicolas Sánchez Acevedo, Universidad Alberto Hurtado

Abstract:

La educación estadística y probabilística ha transitado de un enfoque tradicional, basado en cálculos, hacia uno moderno que promueve la alfabetización probabilística. Este tránsito ha sido considerado en las actuales bases curriculares para la enseñanza de la estadística, con el fin de promover la comprensión de ideas, más que lo procedimental. Es por ello que se diseñó e implementó una secuencia didáctica de cuatro sesiones, mediada por Excel, con estudiantes chilenos de secundaria (15-16 años) para mejorar su comprensión de la distribución normal. Este trabajo se desarrolló bajo un enfoque cualitativo-interpretativo, centrado en la integración de conocimientos matemáticos, estadísticos y contextuales, *esenciales para la alfabetización probabilística. Los resultados indican que, aunque los estudiantes inicialmente mostraron una tendencia hacia una comprensión calculista de la probabilidad, la secuencia didáctica fue efectiva en promover una comprensión más profunda, en relación con la distribución normal. Este éxito se atribuye principalmente al enfoque de problematización empleado, que incluyó actividades prácticas, como juegos de tiro al blanco y mediciones de muestras de sangre y pulsaciones por minuto. El uso de Excel como herramienta mediadora no solo facilitó la organización y visualización de datos, sino que también promovió una comprensión más contextualizada de los conceptos probabilísticos. En conclusión, la secuencia didáctica implementada, apoyada en herramientas TIC como Excel, logró que los estudiantes avanzaran en la comprensión de aspectos clave de la probabilidad y la distribución normal, contribuyendo al desarrollo de la alfabetización probabilística, resaltando elementos como identificar situaciones que pueden modelarse mediante una distribución normal con su respectiva justificación. Estos hallazgos subrayan la importancia de enfoques didácticos que integren problematización y tecnología en la enseñanza de la probabilidad y la estadística.*

Palabras clave: Distribución Normal, Alfabetización Probabilística, Educación Secundaria, Probabilidad y Estadística Inferencial.

INTRODUCCION

El enfoque tradicional del cálculo de probabilidades puede limitar el análisis probabilístico a una actividad algorítmica, mientras que enfocarse en el desarrollo de la alfabetización probabilística sostiene que el conocimiento matemático implica significación contextual de diversas situaciones asociadas a la incertidumbre. La probabilidad es esencial para el desarrollo de conceptos estadísticos y la inferencia estadística, siendo, tanto un modelo matemático, como una herramienta para el razonamiento estadístico. La probabilidad abarca varios significados interrelacionados, como intuición, enfoque clásico, frecuencia, creencia personal y enfoque axiomático, facilitando la comprensión de la realidad, que tiene puntos en común en el contexto de la comprensión de la probabilidad como una medida de la incertidumbre.

Algunas investigaciones han dado cuenta de dificultades en la comprensión de ideas estadísticas, en general, y probabilísticas, en particular. Por ejemplo, Estrada (2013) señala que los profesores en formación presentaron errores conceptuales en aspectos fundamentales de estadística, como media, mediana y moda, así como en la aplicación del algoritmo de la media y conceptos de muestreo, sugiriendo mejorar los métodos de enseñanza para abordar estas deficiencias. Liu y Thompson (2009) explican que los profesores tienen dificultades en comprender e implementar la inferencia estadística debido a su conocimiento fragmentado de probabilidad e inferencia estadística, lo que resulta en una falta de comprensión de distribuciones de estadísticas muestrales y probabilidad asociada. Muñiz y Rodríguez (2021) indican que los profesores de educación secundaria perciben la estadística como parte de las matemáticas en lugar de una disciplina independiente, identificando dificultades en la enseñanza, como limitaciones de tiempo y espacio en el currículo, así como también una falta de formación y resistencia a la integración de tecnología debido a la falta de evaluación sobre la competencia de los estudiantes en su uso. Se destaca la necesidad de abordar estas limitaciones y promover una mayor integración de herramientas tecnológicas.

Se llevó a cabo un trabajo de revisión de libros de texto de 4° medio donde se observa que los registros de representación semiótica de la distribución normal y cómo las formas de representación eran coherentes con los objetivos de aprendizaje. Desarrollando una observación de contenido, se logra concluir que las actividades que se proponen en los libros de texto sobre la distribución normal presentan rupturas en cuanto a la coherencia semántica y la univocidad generando algunas inconsistencias con los objetivos de aprendizaje, lo que puede limitar la comprensión en la promoción del razonamiento probabilístico.

Si bien se puede apreciar que hay trabajos en diversos ámbitos de la estadística, como medidas de centro, inferencia y probabilidad, en el contexto de la distribución normal son más escasos. De acuerdo con esto, el objetivo de este trabajo es analizar la implementación de una secuencia de clases, mediada por Excel, para promover la alfabetización probabilística sobre la distribución normal en un contexto de aula escolar

ELEMENTOS TEORICOS

Para efectos de este trabajo, se considerará el modelo propuesto por Gal (2005), quien propone que los componentes básicos de la alfabetización probabilística son conocimientos y disposiciones, que interactúan entre sí de manera compleja durante el comportamiento o aprendizaje real. Esto significa que un enfoque de instrucción sólo en uno de los elementos no será suficiente para desarrollar un comportamiento probabilísticamente alfabetizado. Los elementos de conocimiento son:

- Las grandes ideas de variación, aleatoriedad, independencia, previsibilidad e incertidumbre.
- El cálculo de probabilidades: las distintas maneras de encontrar o estimar la probabilidad de un evento
- El lenguaje: los términos y los métodos utilizados para comunicar el azar
- El contexto: entender el papel y las implicancias de las cuestiones probabilísticas y los mensajes en diferentes contextos y en el discurso público y personal (Contreras, et al.,2015).

Desde la premisa que, la cultura estadística está estrechamente vinculada con la alfabetización probabilística, Gal (2002) la define como la capacidad de las personas para interpretar, evaluar críticamente, y cuando sea pertinente, expresar opiniones respecto a la información estadística, los argumentos relacionados con los datos, o fenómenos estocásticos. Para este autor, el comportamiento alfabetizado estadísticamente exige la activación conjunta de los componentes cognitivos y disposicionales. La componente cognitiva implica cinco tipos de conocimientos:

1. Habilidades de alfabetización,
2. Conocimientos estadísticos (incluyendo un cierto conocimiento de la probabilidad),

3. El conocimiento matemático,
4. Contextual o el conocimiento del mundo
5. Conocimiento de las cuestiones fundamentales que hay que formular.

Esta noción de alfabetización se caracteriza por dos rasgos definitorios que son el contexto social y el uso individual. La caracterización, dependiendo del contexto social, está relacionada con la noción de alfabetización funcional del adulto, al considerar que ésta varía y depende del entorno y del contexto de cada sociedad o comunidad en un momento concreto. Esta definición le permite a Gal separar a los adultos alfabetizados en dos grupos: los productores de datos (que están implicados en la producción y el análisis de los datos), y los consumidores (que participan en la lectura, escucha o visualización de datos estadísticos y las interpretaciones que de ellos se dan).

Esta caracterización de *consumidor estadístico*, enfatiza el carácter pasivo de la actuación ante la producción y análisis de datos. Pasividad que no se refiere a la puesta en juego de capacidades de definición, discusión y comunicación de lo opinado de forma crítica de la interpretación y análisis de lo leído, sino que se refiere a la comunicación de los datos ya producidos para que estos sean consumidos por otros.

Los componentes básicos de la alfabetización probabilística, según Gal (2002), son ciertos conocimientos y ciertas disposiciones, que interactúan entre sí de manera compleja durante el comportamiento o aprendizaje real. Esto significa que un enfoque de instrucción sólo en uno de los elementos no será suficiente para desarrollar un “comportamiento alfabetizado probabilísticamente”.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

La investigación de tipo cualitativa de corte interpretativo (Biddle & Anderson, 1989), se llevó a cabo en un curso diferenciado de matemática[2] con estudiantes entre 16 y 17 años. El curso está compuesto por 45 estudiantes. En la tabla 1 se presentan las sesiones junto con su respectiva descripción.

Para el análisis de la actividad y la secuencia de datos, se seleccionó una muestra de 16 respuestas, las cuales corresponden a estudiantes quienes mantuvieron una asistencia constante a las 4 sesiones. Las actividades se validaron frente a un grupo de expertos los cuales incluyen 14 estudiantes de Magister en Didáctica de la Matemática:

Tabla 1

Secuencia de clases y la descripción de la implementación

[2] El diferenciado de matemática hace alusión a los electivos que se componen de 4 cursos Limites y Derivadas, Probabilidad y estadística Inferencial, geometría 3D y Pensamiento computacional, donde los estudiantes deben elegir a que curso asistir. Se dictan durante 6 horas pedagógicas en los últimos dos años de escolaridad.

Clase	Descripción de la actividad
1- Recolección de datos	En esta primera sesión, de manera individual a los estudiantes se les entrega un tablero, donde la instrucción es: *Con un lápiz y a ciegas, pon un punto en el tablero de tal manera que el punto coincida con el centro del tablero. Luego, toma la distancia entre el punto efectuado y el centro. Repite el experimento 20 veces para tener una muestra. Se necesitan 10 de éstas. Representa los datos en una tabla (las columnas representan las muestras y las filas los ensayos)*
2- Trabajo en Excel	Tabulan y graficar los datos inicialmente de forma individual y luego en grupos de cuatro. Comparan las gráficas obtenidas para identificar similitudes y diferencias. Posteriormente desarrollan simulaciones en Excel utilizando parámetros como la media y la desviación estándar, y si realizan una nueva comparación de las gráficas. Finalmente, discuten sus conclusiones en conjunto. Además, se solicita a 7 estudiantes que registren sus pulsaciones por minuto durante 5 días en 3 momentos distintos.
3- Acercamiento a la normal	Se analizaron resultados de muestras de sangre con un enfoque en los parámetros clave. Estos resultados se compararon con el trabajo desarrollado previamente en el tablero, lo que permitió extraer conclusiones sobre el comportamiento observado y formular hipótesis relacionadas con la curva obtenida. Adicionalmente, se evaluaron las pulsaciones por minuto de 7 estudiantes utilizando Excel para generar gráficos y simulaciones. Cada estudiante aportó un total de 15 muestras, lo que permitió un análisis detallado de las variaciones en sus datos.
4- Conclusiones respecto a la curva	Se desarrolla evaluación de preguntas abiertas respecto a las pulsaciones por minuto y actividades anteriores.

Nota: Elaboración propia

ANALISIS Y RESULTADOS

Para esta investigación, se analizaron específicamente los resultados de la clases 2 y 4 ya que en ellas se dio cuenta de una riqueza de elementos de conocimiento probabilístico en contraste con las clases 1 y 3, las cuales se centraron en la experimentación y recolección de datos.

En relación con la clase 2 de la actividad de elección de gráfico, se observó que los estudiantes tendieron a seleccionar incorrectamente un gráfico asociado a la variable en estudio. Específicamente, optaron por un gráfico de puntos, observar figura 1. Este hallazgo sugiere una posible falta de comprensión sobre la relación entre la variable que representa el contexto y su grafico asociado. Esto indica una deficiencia en el componente de conocimiento estadístico del modelo de Gal, donde los estudiantes podrían tener dificultades para reconocer y utilizar eficazmente diferentes tipos de gráficos en función de la naturaleza de los datos.

Figura 1: Grafico seleccionado por estudiantes

Nota: Las imágenes fueron tomadas durante el desarrollo de la clase. En la clase 4 se observó un uso excesivo de la media aritmética sin considerar otras medidas de tendencia central, lo que sugiere una posible deficiencia en el conocimiento estadístico. A pesar de esto, las simulaciones ayudaron a los estudiantes a comprender mejor la distribución normal, destacando la efectividad de un enfoque práctico y visual en la enseñanza estadística. Además, el análisis de respuestas abiertas reveló que los estudiantes usaron el contexto en su argumentación, mostrando una sólida comprensión y capacidad para aplicar conceptos estadísticos en situaciones reales, alineándose con la importancia de la comprensión contextual según el modelo de Gal. Sin embargo, persisten ideas centradas en el trabajo numérico. Las respuestas obtenidas se pueden observar en la figura 2.

Figura 2: Respuestas obtenidas

Pregunta	Respuesta Experta	Tipos de respuestas
¿Qué se observó en la experimentación?	Hace referencia al parámetro de la variable observada, aporta interpretación.	5 estudiantes hacen relación directa a los datos sin interpretar, mencionando el promedio
		4 estudiantes identifican la variable observada, sin mencionar la determinación del promedio
		7 estudiantes relacionan la variable observada con la determinación del promedio
¿Qué se observó en la simulación?	La respuesta se orienta a describir lo que pasaría si hubiesen llevado a cabo el experimento con mil muestras. Desarrolla interpretación de los datos. Menciona las frecuencias más que el grafico en sí.	4 hacen referencia a la utilidad misma de la herramienta "generar números aleatorios"
		5 desarrollan énfasis únicamente a la representación de los datos
		5 hacen relación a la proyección que nos aportan los datos
		2 entregan una respuesta sin contexto
En relación con lo observado en el experimento del tablero y las pulsaciones por minuto ¿Qué características tienen los gráficos?	Hace relación explicita a la forma acampanada de estos dos experimentos.	10 estudiantes hacen relación que, a medida que aumenta la cantidad de datos, la gráfica tiende a una forma acampanada
		6 no responden.
Para ambos casos ¿Qué fue necesario desarrollar?	Hacen relación a la necesidad de tener una mayor cantidad de datos, para observar el fenómeno.	2 hacen relación al trabajo realizado con los comandos utilizados en Excel sin dar interpretación de estos
		14 hacen relación a la necesidad de obtener una mayor cantidad de datos para comprender la distribución de estos
¿Qué podrías decir respecto al promedio?	Visualizan que la media se encuentra al centro de la distribución y hace referencia a la frecuencia del dato por sí solo o bien, comenta además respecto a la frecuencia de los datos cercanos.	6 hacen relación a la posición del promedio en el grafico
		2 hacen comparaciones respecto a los promedios determinados, enfocándose en el aspecto numérico
		8 relacionan la posición del promedio en el grafico junto a la frecuencia del promedio como también, a los datos cercanos a el
¿Qué podrías decir respecto a los extremos?	Hace referencia a la frecuencia de los datos relacionándolos con el contexto en cuestión.	5 hacen relación únicamente a la frecuencia
		10 hacen relación a la frecuencia y aportan interpretación
		1 responde sin contexto

Nota: Elaboración propia.

1. Conclusiones

A partir de los resultados de la secuencia, se puede concluir que la implementación de estrategias pedagógicas basadas en el marco teórico propuesto, permitió movilizar el desarrollo de la alfabetización estadística, pues en lo que respecta a la comprensión de la curva de Distribución Normal, los estudiantes lograron identificar la relación entre sus actividades en el tablero y la representación gráfica, no solo interpretando el gráfico, sino también contextualizando sus observaciones. En relación con las preguntas de respuesta abierta, los resultados sugieren que hay un nivel variable de comprensión entre los estudiantes. Algunos han logrado proporcionar respuestas que van más allá de la simple descripción de datos, demostrando una comprensión más profunda de los conceptos. Referido a la interpretación de experimentación y simulación, los estudiantes muestran habilidades para interpretar datos tanto de experimentación como de simulación. Se destaca la capacidad de algunos para vincular la utilidad de la simulación y la interpretación de datos, así como para proyectar resultados a partir de las frecuencias obtenidas. Por otra parte, la mayoría de los estudiantes logran identificar la forma acampanada en los gráficos relacionados con experimentos en el tablero y pulsaciones por minuto. También, comprenden la necesidad de una mayor cantidad de datos para comprender la distribución de estos, mostrando una comprensión sólida de la teoría detrás de la representación gráfica, así mismo, los resultados demuestran una comprensión visual del promedio, relacionándolo con la posición en el gráfico y la frecuencia de los datos circundantes.

En resumen, los resultados indican un avance significativo en la alfabetización estadística y probabilística de los estudiantes, respaldando la idea de que la incorporación de este enfoque contribuye positivamente al proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y estadística.

REFERENCIAS

Biddle, B. J., & Anderson, D. S. (1989). Teoría, métodos y conocimientos de investigación sobre la enseñanza. En M.C. Wittrock (Ed.), La investigación en la enseñanza. Barcelona: Paidós-MEC

Contreras, J. M., Batanero, C., Godino, J. D., Cañadas, G. R., Arteaga, P., Molina, E., Gea, M. M., & López, M. M. (Eds.). (2015). Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 355-362). Granada.

Estrada. A. (2021). *Evaluación del conocimiento estadístico en la formación inicial del profesorado*. Uno. [Versión electrónica]. Revista Uno 45

Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. International Statistical Review, 70(1), 1–25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

GAL, I. (2005). ""Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas". En G. JONES (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning, pág. 39-63. New York: Springer.

Liu, Y., & Thompson, P. W. (2009). Mathematics Teachers' Understandings of Proto-Hypothesis Testing. *Pedagogies: An International Journal*, *4*(2), 126-138. https://doi.org/10.1080/15544800902741564

Muñiz-Rodríguez, Laura; Rodríguez-Muñiz, Luis José (2021). *Análisis de la práctica docente en el ámbito de la educación estadística en educación secundaria.* Revista Paradigma, 42(Extra-1), pp. 191-220

Dificultad en la definición y representación de la altura de un triángulo Un estudio exploratorio

Elizabeth Toro Barbieri, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Tamara Siles Vega, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Gabriela Escalona Kojic, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen:

Las representaciones figurales en geometría juegan un papel fundamental en el desarrollo de una compresión profunda de los conceptos matemáticos. No obstante, el uso de representaciones repetitivas y simplificadas pueden generar interpretaciones equivocadas. Este estudio tiene como objetivo conocer cómo los estudiantes de tercer año medio de distintos establecimientos educacionales de Santiago entienden el concepto altura en triángulos, especialmente en situaciones donde las representaciones visuales no son las prototípicas, es decir, cuando la base del triángulo no se encuentra paralela a la base de la hoja. Para ello, se recopiló información mediante un cuestionario aplicado a 34 estudiantes de diferentes colegios, que consistía en dos actividades enfocadas en identificar cómo definen y representan el segmento altura de un triángulo. Las respuestas fueron analizadas utilizando categorías derivadas de estudios previos (Hernández et al., 2014; Corredor et al., 2014; Watson y Mason, 2002) las cuales se adaptaron según los resultados obtenidos, lo que permitió identificar patrones en las percepciones y definiciones que los estudiantes tienen sobre este concepto. Los resultados revelan que solo un estudiante fue capaz de proporcionar una definición completa del concepto, seis muestran una definición incompleta y otros dieciséis estudiantes definen incorrectamente o fuera de contexto. Además, en el trazado de alturas, solo un estudiante logra hacerlo correctamente para triángulos obtusángulos. Estos hallazgos destacan la necesidad de profundizar en las causas subyacentes de estas dificultades de comprensión en el ámbito de la educación secundaria.

Palabras claves: Altura de un triángulo, definición de altura, representaciones prototípicas, educación secundaria, Geometría.

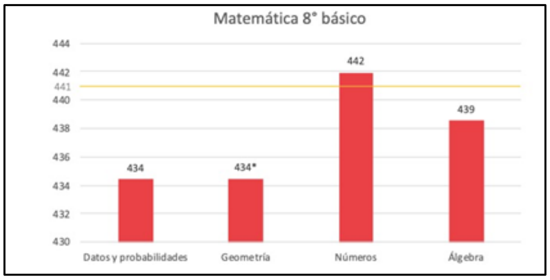
INTRODUCCIÓN

Gamboa, R., & Ballestero, E. (2009) señalan que en la educación formal, la geometría suele enseñarse como un producto finalizado, dejando de lado los procesos de construcción y razonamiento. Este enfoque tradicional se centra en la memorización mediante practicas mecanicistas y descontextualizadas. Según García y López (2008), esta aproximación ha generado una distorsión en el aprendizaje de la geometría, subestimando su importancia y provocando dudas sobre su relevancia en la enseñanza.

En Chile, el currículo divide los contenidos matemáticos en cuatro ejes: Números, Álgebra, Geometría, y Probabilidad y Estadística. Sin embargo, debido a la limitada cantidad de horas y la gran cantidad de contenidos, los docentes suelen priorizar otros ejes sobre la geometría. Como resultado, la geometría queda relegada, especialmente en la planificación de las últimas unidades del año escolar (Gómez y Andrade-Molina, 2022). Esta tendencia se refleja en los bajos rendimientos en evaluaciones estandarizadas como TIMSS 2020, donde los estudiantes chilenos de octavo básico mostraron un rendimiento significativamente menor en geometría en comparación con los dominios de Números y Álgebra.

Figura 1

Rendimiento en matemática de estudiantes de octavo básico en prueba TIMSS según dominio de contenido (Agencia de la Calidad de la Educación, 2020).



Dado este contexto, resulta necesario prestar atención a los procesos de enseñanza y aprendizaje en la disciplina, pues en las propias prácticas pedagógicas de las investigadoras se ha podido evidenciar un detrimento en cuanto al manejo de los conceptos básicos de la geometría euclidiana por parte de los estudiantes. Particularmente, nos centraremos en el estudio de una de las rectas notables del triángulo, la altura, elemento que es utilizado en la resolución de problemas que involucran el cálculo de áreas de figuras geométricas, pero que rara vez se define con formalidad.

De acuerdo con la problemática planteada, el objetivo de este estudio es conocer cómo estudiantes de tercero medio definen y trazan la altura de un triángulo. Además, estudiar cómo las representaciones geométricas estereotipadas del triángulo y su altura se relacionan con la imagen mental del objeto matemático. Entenderemos las representaciones geométricas estereotipadas como aquellas imágenes que cumplen con determinadas características propias del dibujo, que son utilizadas habitualmente (Scaglia y Moriena, 2005).

MARCO CONCEPTUAL

Proceso de definir

De Villiers (1998, 2004) sostiene que definir conceptos es tan esencial en matemática como resolver problemas o hacer conjeturas. Distingue entre definiciones descriptivas y constructivas. Las descriptivas sistematizan conocimientos existentes seleccionando propiedades conocidas, mientras que las constructivas generan nuevos conocimientos al modificar o añadir propiedades para crear conceptos nuevos. Aunque suelen diferenciarse, ambos tipos de definición pueden entrelazarse en la construcción de conceptos. Definir promueve una comprensión profunda del concepto, más allá de solo conocer su definición.

Imágenes mentales desde el espacio de ejemplos

Watson y Mason (2002) señalan que el aprendizaje de la matemática se da principalmente a través de ejemplos, más que mediante definiciones formales. Las definiciones matemáticas adquieren significado a través de ejemplos que ilustran conceptos, problemas, técnicas de resolución, y formas de responder. Aprender matemática es un proceso de generalización a partir de estos ejemplos concretos; cuanto más variados sean los ejemplos, mayor será la capacidad de generalizar y establecer conexiones, lo que fortalece la comprensión conceptual.

El "espacio de ejemplos" se refiere a la representación mental de ejemplos, ya sea en forma de imágenes, expresiones matemáticas o técnicas de resolución. Este espacio es personal y varía según el individuo. Cuando los estudiantes enfrentan una tarea, utilizan sus propios espacios de ejemplos, tratando de encajar la instrucción del profesor en ellos. A veces, esto implica reestructurar el contenido de ese espacio o ampliarlo para incorporar nuevos elementos.

MÉTODO

Para esta investigación, se opta por desarrollar un Estudio de Caso (Yin, 2014) de tipo exploratorio pues, los investigadores no tienen influencia sobre los eventos y se encuentra bajo un contexto real y cotidiano. Contando con la participación de 34 sujetos informantes, correspondientes a estudiantes de tercer año de enseñanza media (16-17 años) de tres establecimientos educacionales particulares subvencionados, ubicados en la zona norte, oriente y sur de la Región Metropolitana, quienes cursan el plan común de matemática.

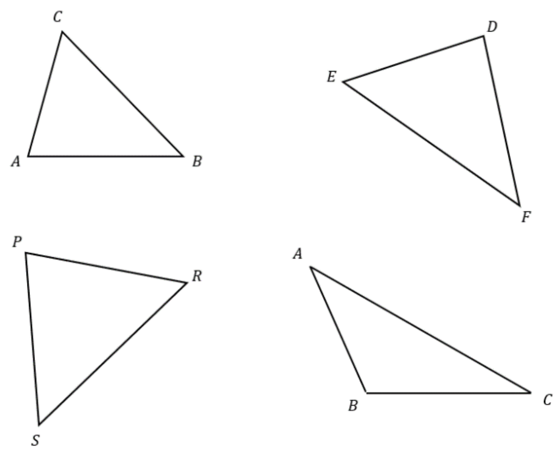
Diseño, elaboración y validación del instrumento

Para alcanzar el objetivo de estudio se diseñó un cuestionario compuesto por dos tareas matemáticas. Este cuestionario fue validado a través del juicio de expertos (Hernández et al., 2014), en el que participó una didacta de la matemática y catorce estudiantes del programa de Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, quienes analizaron la claridad, pertinencia y relevancia de cada tarea. Además, para asegurar la validez del cuestionario, se realizó un pilotaje en un grupo de tres estudiantes de educación media pertenecientes a los establecimientos mencionados.

El cuestionario se diseñó para ser completado de manera autónoma por los estudiantes, sin intervención o asistencia del docente. Esta metodología se implementó para asegurar que las respuestas reflejaran genuinamente el nivel de comprensión y los conceptos propios de cada estudiante, sin influencias externas que pudieran alterar sus respuestas. Cada tarea del cuestionario fue entregada individual y secuencialmente a los estudiantes; es decir, los estudiantes recibían la siguiente tarea únicamente después de haber finalizado la anterior. Este enfoque paso a paso buscaba evitar que los estudiantes utilizaran información de tareas posteriores para resolver las tareas actuales, promoviendo así un análisis más fiel de sus conocimientos previos y comprensión espontánea. Presentamos a continuación las tareas del cuestionario que se utilizaron para recolectar los datos de esta investigación.

Tarea 1: *según lo que recuerdas, define la altura de un triángulo.*

Tarea 2: *identificación de altura: Trace las alturas de cada triángulo.*



TÉCNICA DE ANÁLISIS Y RESULTADOS

Para el análisis de los datos se realizaron categorías del contenido de las respuestas (Hernández et al., 2014) basadas en los trabajos de Corredor et al. (2014) y Watson y Mason (2002), haciendo mínimas modificaciones para esta investigación. Las categorías son las siguientes:

Para el caso de la definición:

- Definición Completa (dc): Se hacen explícitos los invariantes del concepto altura de un triángulo, en el contexto de la geometría euclidiana y no en el de medida. Es decir, se determina la altura de un triángulo como *el segmento de recta perpendicular trazado desde un vértice del triángulo hasta el lado opuesto o hasta su prolongación, sin hacer alusión a la medida del segmento.*
- Definición Incompleta (di): No hace referencia explícita a la posición de los extremos del segmento altura, es decir, puede mencionar la perpendicularidad, pero no precisa la posición del segmento dentro del triángulo.
- Definición Incorrecta (i): Bajo esta categoría están aquellas definiciones que restringen la posición de uno de los extremos del segmento altura al segmento opuesto al vértice que es el otro extremo del segmento, en vez de considerarlo como un punto de la recta que contiene a dicho lado, las que no incluyen la condición de perpendicularidad del segmento o que refieren a elementos geométricos relacionados con otros conceptos.
- Definición fuera de contexto (dfc): Se hace referencia a la medida de manera explícita o implícita.

Para la representación:

- Espacio completo (ec): Incluye representaciones de todos los posibles casos de la altura de un triángulo relativa a la recta que contiene el lado opuesto, es decir, traza correctamente las tres alturas del triángulo.

- Espacio incompleto (ein): Incluye representaciones de la altura de un triángulo relativa a la recta que contiene el lado opuesto, indica a lo más dos alturas.
- Espacio incorrecto (ei): Representa de manera errónea la altura de un triángulo, ignorando el hecho de que el segmento debe ser perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto o bien, no contiene al vértice opuesto.
- Espacio fuera de contexto (efc): Asignación de números a los segmentos que componen el triángulo o a la altura, en caso de trazarlas.

5. ANÁLISIS Y RESULTADOS

De las respuestas obtenidas, solamente un sujeto informante establece una dc respecto al concepto de altura de un triángulo, mencionando la perpendicularidad, la prolongación del lado y la consideración de las tres alturas. Por otro lado, seis estudiantes evidencian una di, ya que no consideran la prolongación del lado que la contiene para trazar la recta perpendicular desde cada vértice. Además, un estudiante menciona la condición de perpendicularidad, mientras que los restantes hacen alusión a ella de manera indirecta, pues utilizan los conceptos de distancia o medida angular de noventa grados, considerando la base y su vértice opuesto.

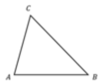
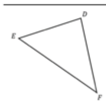
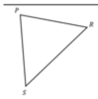
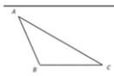
Definiciones incorrectas (i) fueron brindadas por 13 estudiantes; entre ellos, seis definen la altura como “la línea que une el punto más bajo con el punto más alto del polígono”, cuatro estudiantes la definen como “el segmento que une un vértice del triángulo con otro” y otros tres estudiantes la definen como “una medida entre la base y el punto más alto”.

Otras siete respuestas se categorizan como dfc. Tres de ellas se refieren a la altura como “las medidas de un triángulo”, dos realizan un dibujo de un triángulo con la base paralela al borde inferior de la hoja señalando que, un lado de este es la altura y dos hacen referencia directa a la expresión de área de un triángulo.

Los resultados del análisis de la tarea 2 se organizan en la Tabla 1, que sintetiza las respuestas de los 34 sujetos informantes. Cabe señalar que, en cada uno de los triángulos, hubo estudiantes que no proporcionaron ningún tipo de respuestas, los cuales fueron 3, 4, 4 y 5 sujetos informantes, respectivamente.

Tabla 1

Categorización de las respuestas de los estudiantes de la tarea 2

Triángulo	Espacio completo	Espacio incompleto	Espacio incorrecto	Espacio f.d.c
	6 s.i , 4 de ellos señalaron el ángulo recto	-7 indicaron una única altura. -5 trazaron las tres alturas deteniendo el trazado en el punto de intersección	-3 indicaron la altura como el lado AC -3 señalaron los lados del triángulo. -2 trazaron el segmento perpendicular a AB que contiene a A.	-3 asignaron medidas a los lados. -2 asignaron medidas para utilizar la expresión del área.
	-5 s.i de los cuales 3 señalaron el ángulo recto.	-12 s.i, de los cuales 11 señalaron solo una única altura, correspondiente a EF.	-3 indicaron la altura como el lado DF. -3 trazaron la altura como los tres lados del triángulo. -2 trazaron un segmento vertical desde F.	-3 asignaron medidas a los lados. -2 asignaron medidas para utilizar la expresión del área.
	5 s.i, 3 señalaron el ángulo recto con su respectivo símbolo	10 s.i, 8 señalaron solo una altura respectiva al lado RS	-3 trazaron la altura como el lado PS. - 2 trazaron la altura como el lado PR. -3 trazaron los lados del triángulo. -2 trazaron un segmento vertical desde P.	-3 asignaron medidas a los lados. -2 asignaron medidas para utilizar la expresión del área.
	1 s.i	12 s.i, trazaron una única altura, correspondiente al lado AC.	-3 s.i trazaron las alturas con la intersección dentro del triángulo. -3 señalaron la altura como el lado AB. -3 señalaron los lados del triángulo. -4 trazaron un segmento "perpendicular" a BC, que en realidad son ángulos obtusos (segmento AB).	-3 asignaron medidas a los tres lados del triángulo -1 efectuó el tratamiento de la expresión de área.

CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación fue conocer cómo estudiantes de secundaria definen y trazan la altura de un triángulo y cómo las representaciones geométricas estereotipadas influyen en su construcción mental del concepto. Los resultados indican que la definición que manejan los estudiantes sobre la altura de un triángulo está fuertemente influenciada por los aspectos figurales predominantes en los textos escolares, donde se utilizan mayoritariamente triángulos equiláteros, en donde la altura coincide con "el segmento que va desde la base hasta el punto más alto" del triángulo. Esta interpretación, además, está centrada en el uso de la altura para el cálculo del área, lo cual refleja un entendimiento parcial y restringido del concepto, resultando en una visión reduccionista que limita la aplicación de la medida de la altura a contextos específicos.

Se observó que, al enfrentarse con triángulos no prototípicos, los estudiantes mostraron mayores dificultades para trazar las alturas correctamente. La mayoría de los estudiantes no logró trazar las tres alturas en triángulos no estereotipados u obtusángulos, lo que sugiere que su comprensión está condicionada por la familiaridad con representaciones geométricas tradicionales, como las que muestran triángulos con la base paralela al borde inferior de la hoja.

Atribuimos esta escasa comprensión a la falta de diversidad en las representaciones geométricas presentes en los textos escolares y en los ejemplos utilizados en las clases. Las representaciones geométricas estereotipadas parecen moldear significativamente la imagen mental y la interpretación que los estudiantes tienen del concepto de altura, restringiendo su capacidad para definir, representar y aplicar el concepto en diferentes contextos geométricos.

Con base en estos hallazgos, se sugiere investigar si profesores de matemáticas en formación experimentan dificultades similares y explorar en mayor profundidad la relación entre la definición conceptual y la representación figural en la formación matemática geométrica inicial. Esta investigación podría arrojar luces sobre cómo las concepciones iniciales de los docentes influyen en la enseñanza de conceptos geométricos y, en última instancia, en la comprensión de sus futuros estudiantes.

Referencias

Agencia de la Calidad de la Educación. (2020). *TIIMS 2019 Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias. Presentación Nacional de Resultados.* [Archivo PDF] https://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_TIMSS_2019_version_extendida_final.pdf.

Corredor, O., Echeverry, A. y Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. *Tecné Episteme y Didaxis: TED* (35), 63-86. https://doi.org/10.17227/01213814.35ted63.86.

De Villiers, M. (1998). *To Teach Definitions In Geometry Or Teach To Define?* En A. Olivier y K. Newstead (Eds), Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Stellenbosch.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(5), 703-724. https://doi.org/10.1080/0020739042000232556.

Espinosa Pérez, H., (2012). La enseñanza de la Geometría (2008). Silvia García y Olga Leticia López. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. México. Segunda edición, 2011, 174 pp.. Educación Matemática, 24(2), 135-140.

Gamboa, R., & Ballestero, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *4*(5), 113-136. Costa Rica

Gómez, J. y Andrade-Molina, M. (2022). Discordancias del currículo escolar: Homotecia más allá de la proporcionalidad. *Revista Chilena de Educación Matemática, (14)*1, 31-42. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.105

Hernández, R., Fernández C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. McGraw Hill.

Scaglia, S., y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*. 17(3), 105-120.

Watson, A. y Mason, J. (2002). *Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics.* En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 377-385. Norwich.

Yin, R. (2014). *Case Study Research: Design and Methods.* https://doi.org/10.3138/cjpe.30.1.108.

Razonamiento Geométrico en un ciclo de modelación matemática: Análisis de la aplicación en el contenido de Homotecia en estudiantes de primero medio

Marco Maulén Araya; Ariel Osorio Saavedra; Claudio Zamorano Sánchez

Universidad Central de Chile

Abstract

El aprendizaje de la geometría, en la enseñanza media, ejerce un papel fundamental en el desarrollo cognitivo en los estudiantes, buscando que adquieran habilidades espaciales y comprensión sobre el espacio y las formas. En el contexto de la enseñanza, se observa que existe una tendencia a la algebrización de geometría. Ello consiste en que el uso de conceptos geométricos se aborda principalmente a través de enfoques algebraicos que no representan una forma de razonar geométricamente. Dada esta dificultad, el objetivo de la investigación es analizar el desarrollo del razonamiento geométrico en estudiantes de primero medio en relación con el concepto de homotecias. Para ello, el diseño de investigación se aborda en tres fases, (1) construir un instrumento de análisis que muestre indicadores de razonamiento geométrico en el tema de homotecias, de esta forma se podrá (2) diseñar y aplicar un instrumento de evaluación de homotecias para evidenciar los razonamientos geométricos en las respuestas de los estudiantes, y con los resultados del instrumento de evaluación se buscará (3) analizar las respuestas de los estudiantes bajo los indicadores que describen la evidencia del razonamiento geométrico para develar los razonamientos presentes al resolver problemas en el tema de homotecias, en un ciclo de modelación.

Palabras Claves: Razonamiento Geométrico, Ciclo de Modelación Matemática, Geometría, Resolución de Problemas, Enseñanza de la Geometría.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la geometría en la educación media desempeña un papel fundamental en el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Según el currículum nacional, evidenciado en sus programas de estudio, el aprendizaje de la geometría busca que los estudiantes desarrollen habilidades espaciales, la comprensión del espacio y sus formas, más allá de lo que es la resolución algebraica de los problemas propuestos.

Con base en nuestra experiencia de aula, se evidencia que una de las dificultades para lograr el aprendizaje de los conceptos de la geometría es la tendencia a la algebrización de la geometría, como se menciona en la investigación de Quiroga et al. (2022) nos mencionan que en la mayoría de instrumentos evaluativos estandarizados se rigen por la taxonomía de Bloom, el cual no ayuda a los estudiantes a un desarrollo de su razonamiento geométrico y solo promueve la algebrización de la geometría en el aula, la mecanización del contenido como tal. Esto consiste en que el uso de conceptos geométricos se aborda principalmente a través de enfoques algebraicos, obstaculizando significativamente el razonamiento geométrico utilizado por los estudiantes. Lo anterior apunta a una dificultad en el desarrollo del razonamiento geométrico, junto a lo que se espera que los estudiantes sean capaces de lograr para garantizar el aprendizaje de la geometría.

La dificultad radica en que los métodos de aprendizaje de la geometría, los cuales no logran los objetivos del programa de estudio debido a un desequilibrio en la relación entre Álgebra y Geometría. En la actualidad, muchos métodos de aprendizaje dan prioridad al álgebra por sobre la geometría, lo que obstaculiza la comprensión de los conceptos geométricos.

Debido a esta situación, nace la motivación en profundizar el estudio y el aprendizaje de la geometría, donde se busca analizar cómo la dificultad en cuestión afecta en el proceso de aprendizaje de la geometría, específicamente en la comprensión del concepto, cálculo, visualización e interpretación de la Homotecia en el espacio.

ANTECEDENTES

La homotecia es un concepto fundamental en la geometría, Ortiz y Angulo (2010) han proporcionado una definición de la homotecia, la cual nos deja claro el cómo se aplica la homotecia a puntos en el espacio. Según los autores, “Se llama homotecia de centro O y razón k ($k \neq 0$) a la transformación que hace corresponder a un punto A otro A', alineado con A y O, tal que: $OA' = k \cdot OA$. Si $k > 0$ se llama homotecia directa y si $k < 0$ se llama homotecia inversa” Según ellos la homotecia se refiere a la transformación geométrica de puntos los cuales pertenecen al espacio. La homotecia no es una excepción cuando hablamos que la geometría se trabaja bajo la idea de aplicación a la vida real, en donde se busca enseñar la homotecia bajo esta misma idea.

A partir de lo mencionado por Battista (2001) y Fischbein (1993) quienes hablan de las dinámicas conceptuales e imaginativas, muestran que el razonamiento geométrico es un proceso mental que implica la aplicación de conceptos y principios de la geometría para resolver problemas y tomar decisiones relacionadas con las formas, tamaños, posiciones y propiedades de los objetos en el espacio. Puede caracterizarse, en dicho caso, según enfoques referentes a la visualización espacial, el uso de conceptos y axiomas, la deducción lógica y la construcción de argumentos.

Los autores Blum y Niss (1990) describen la modelación matemática como un proceso que transita desde un problema planteado en una situación real hacia un modelo matemático, y luego regresa a la situación real para validar los resultados obtenidos y evaluar el modelo. Este proceso implica el desarrollo por etapas, comenzando con la identificación y análisis del problema, seguido de la formulación, validación y ajuste del modelo según su capacidad para explicar o predecir en el contexto del problema inicial.

Finalmente, como menciona Fischbein (1993) el razonamiento geométrico en situaciones de la vida diaria necesita de una interacción permanente entre dinámicas conceptuales e imaginativas, lo que da como resultado el razonamiento geométrico.

En base a esto, la pregunta planteada que busca responder esta investigación corresponde a:

¿Cómo se evidencia el razonamiento geométrico a través de la implementación de un ciclo de modelación matemática de enseñanza para el aprendizaje del concepto de Homotecia, en estudiantes de Primero de enseñanza media?

MARCO TEÓRICO

Para llevar a cabo esta investigación, se tomará como referencia la caracterización del razonamiento geométrico empleada por Seah y Horne (2021), quienes a partir de la teoría de Van Hiele y la definición de Battista, postulan una definición de razonamiento geométrico.

Seah y Horne (2021) se encargan de utilizar la teoría de Van hiele con sus respectivos niveles del razonamiento geométrico, junto a la extensión empleada por Battista (2007), para realizar una adaptación de aquellos niveles de razonamiento, otorgándoles subniveles descriptivos. Añadiendo que estos niveles se consideran interconectados y se desarrollan progresivamente con diversos grados de énfasis e importancia dependiendo de la demanda de la tarea, es decir, la dificultad de cada nivel se puede ver afectada según lo que se está intentando hacer.

Dados estos subniveles descriptivos se realiza una triangulación con los investigadores, en la cual se discuten los indicadores evaluativos adaptados al concepto de homotecias para cada subnivel dado por Seah y Horne.

Por otro lado, se realiza un análisis al ciclo de modelación realizado por Blum y Borromeo-Ferri (2010), quienes proponen un enfoque a la modelación matemática basado en la dialéctica entre el mundo real y el mundo matemático. Durante este análisis se realiza una vinculación de los indicadores creados a través de la tabla adaptada de Seah y Horne con el ciclo de modelación de Blum y Borromeo-Ferri. De esta manera se identifican los indicadores de la tabla extendida que transitan por cada fase del ciclo de modelación.

METODOLOGÍA

El diseño de esta investigación se enmarca en el ciclo metodológico ACE (Actividad - Clase - Entrevista) adaptado. A partir de este marco, se desprenden tres acciones investigativas para el cumplimiento del objetivo general. Estas acciones comprenden: (1) un análisis teórico, que implica la construcción de un instrumento de análisis de razonamiento geométrico según el marco conceptual propuesto por Seah y Horne (2021) para el objeto de homotecias; (2) El diseño de un cuestionario y una entrevista semiestructurada de investigación, fundamentados en los momentos de modelación matemática indicados por Borromeo-Ferri (2010); y (3) el análisis de datos, orientado a caracterizar los razonamientos geométricos evidenciados en las respuestas de los estudiantes y a identificar el tránsito de los estudiantes entre los niveles de razonamiento geométrico y el ciclo de modelación matemática.

Para la recolección de datos, se llevó a cabo un estudio de caso múltiple utilizando un cuestionario diseñado para medir el razonamiento geométrico de los estudiantes. Este instrumento fue aplicado a tres estudiantes voluntarios, con edades comprendidas entre los 14 y 16 años. La implementación se realizó en la clase de matemáticas, donde los participantes resolvieron el cuestionario en un periodo de 90 minutos. Ese enfoque permitió analizar en profundidad las respuestas individuales en cada caso

LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Para este reporte de investigación, se selecciona la respuesta de un estudiante a una pregunta en específico del instrumento de evaluación. A partir de la respuesta realizada por el informante, se analiza qué indicadores de evaluación de cada nivel de razonamiento se logran identificar, de esta manera se realiza una descripción de la respuesta.

A continuación, se presenta la situación contextualizada, con lo cual se espera evidenciar el tránsito del estudiante por la vinculación de los niveles de razonamiento geométrico y el ciclo de modelación a través de los indicadores de evaluación.

Contexto: *Una empresa de servicio de aires acondicionados visita tu colegio para evaluar si es posible instalar sus productos en el edificio principal de tu colegio. Para ello, se necesita conocer la altura del edificio, sin embargo, el encargado de las herramientas de medición no trajo el equipo.*

Por lo tanto, se le ha encargado a usted y su grupo de trabajo, medir la altura del edificio principal para determinar si se cumplen con la altura necesaria para instalar el equipo (considerar que la altura mínima es de 5 metros)

A partir de este contexto, el informante responde a preguntas que encaminan a un resultado final de la situación, durante estas preguntas se le solicita al informante realizar un bosquejo de la situación planteada.

Pregunta: b) Describe tu estrategia a través de un bosquejo gráfico.

RESULTADOS

En el siguiente apartado se presenta un resultado obtenido al analizar las respuestas de tres estudiantes. El análisis se realiza en concordancia con los indicadores de evaluación vinculados al ciclo de modelación matemática y sus seis fases específicas.

En este sentido, cuando el estudiante responde a una de las preguntas planteadas, se puede evidenciar que a través del bosquejo propuesto por el estudiante, él representa al celular y al edificio como dos estructuras paralelas entre sí que interactúan para generar una situación proporcional. Es decir, el estudiante es capaz de observar la interacción de las formas produce la proyección de las sombras, lo que le permite asignar medidas a la distancia de cada una de ellas y, de este modo, establecer una situación proporcional, tal como se muestra en la Fig. 1.

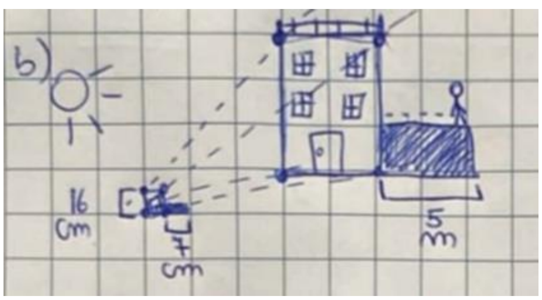


Fig. 1 Representación de bosquejos

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

De acuerdo con la respuesta señalada por el informante, se observa que está utilizando el bosquejo para generar un modelo de la realidad a escalas proporcionales, situándose en la fase del modelo real del ciclo de modelación propuesto por Blum y Borromeo-Ferri (2010). En esta fase el informante identifica elementos clave de la situación, como puntos y rectas, y los representa a través de un bosquejo, lo que permite una interacción inicial con elementos geométricos que conectan con el indicador 2b de la tabla adaptada. Este proceso refleja la utilización del razonamiento visual descrito por Seah y Horne (2021).

Por otro lado, el informante es capaz de representar mediante el bosquejo de la situación distintos elementos geométricos que subyacen de la homotecia de manera informal. En este caso, se observa que ha transitado hacia la fase del modelo matemático del ciclo de modelación, utilizando el bosquejo para comprender y trabajar con la proporcionalidad en las medidas de los trazos generados por los puntos homotéticos, esto corresponde al indicador 3d, asociado al razonamiento descriptivo según Seah y Horne (2021), en el cual la comprensión y representación proporcional de los elementos geométricos son esenciales.

De esta manera, se evidencia como el informante transita dentro de las primeras fases del ciclo de modelación, construyendo inicialmente un modelo real, hacia la formulación de un modelo matemático, conectando este progreso con el razonamiento visual y razonamiento descriptivo respectivamente.

Referencias

Quiroga, F., González, J., Méndez, C., & Serrano, P. (2022). Evidencias de razonamiento geométrico en estudiantes de primero medio de enseñanza media en un colegio de la provincia de Concepción. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18(64), 1-16. Recuperado de: http://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/190.

Ortíz, J. A., & Angulo, J. J. (2010). La homotecia, un tema casi olvidado en la enseñanza de la educación matemática en Buenaventura: una propuesta desde el punto de vista algebraico. http://funes.uniandes.edu.co/1176/

Battista, M. (n.d.). The Development of Geometric and Spatial Thinking. En: F. K. Lester (ed). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 843-908.

Battista, M. T. (2001). *A research-based perspective on teaching school geometry*. J. Brophy. https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1016/S1479-3687(01)80026-2/full/html

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics. 24 (2)*, 139-162.

Blum, W. & Niss, M. (1990). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22(1)*, 37-68.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour. *Journal für Mathematikdidaktik*, *31 (1)*, 99- 118.

Seah, R., & Horne, M. (n.d.). Developing reasoning within a geometric learning progression: Implications for curriculum development and classroom practices. *Australian Journal of Education*, *65*(3), 248-264.

CREACIÓN Y USO DE TAREAS GEOMÉTRICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE CUADRILÁTERO SEGÚN EL MODELO DE VINNER

Francesca Morecchio J., Universidad de Concepción

Fabián Quiroga M., Universidad de Concepción

Abstract:

Este reporte presenta la primera parte de la investigación que busca elaborar e implementar tareas geométricas que favorezcan la conceptualización del cuadrilátero, usando el modelo de Shlomo Vinner como fundamento principal. Dada la importancia del tema y su presencia transversal en diferentes niveles de los planes de formación escolar chilena, se espera que estas tareas sean útiles en diferentes niveles educativos, incluso si este conocimiento geométrico no es el central en un semestre específico. Las tareas elaboradas serán un complemento a las experiencias escolares tradicionales, que priorizan la memorización por sobre la visualización, la construcción y el razonamiento, elementos centrales en la propuesta de Vinner y también de otros como Adela Jaime, Ángel Gutiérrez y José Carrillo quienes también han sido considerados en esta investigación por su aporte a la comprensión de los elementos que rodean la comprensión de un concepto geométrico.

Tareas geométricas, Conceptualización, Cuadrilátero, modelo Vinner

ANTECEDENTES

Históricos y epistemológicos

Es común asociar a la matemática como la responsable de crear el lenguaje en qué está expresado el universo y todas sus leyes. El ámbito geométrico no se escapa a la relación antes descrita. Un ejemplo clásico de ello es la forma hexagonal de los panales de abeja (Fernández-Nieto, 2018), puntualmente es la matemática y geometría, la ciencia que guía el estudio y el modelamiento de la relación que existe entre el objeto geométrico (las figuras) y la realidad (los panales). Lo anterior se ve reforzado por indicado por Mariscal "El desarrollo de las diferentes disciplinas científicas a lo largo de la historia ha sido producto de la curiosidad e interés del ser humano por entender los fenómenos que le rodean" (Mariscal, 2020, p. 77).

En sus inicios, la geometría más primitiva surge a partir del "deseo de nuestros antepasados de representar el mundo circundante, decorar sus pertenencias, diseñar motivos ornamentales, construir sus viviendas, etcétera" (Camargo y Acosta, 2012, p.4). La palabra geometría, proveniente del griego, significa medida de la tierra, pues se le atribuye el descubrimiento de esta a los habitantes del antiguo Egipto (3000 a.C.), ya que, en escritos antiguos, se describe como sus reyes cobraban impuestos a los agricultores basándose en el área de las parcelas de cultivo (Bauzá, 2016).

Es con los griegos que la geometría comienza su avance hacia la constitución de una ciencia, pues surgió la idea de otorgar fundamentos teóricos a este tipo de conocimiento. En el 300 a.C., el matemático Euclides, con su obra titulada Los Elementos, recopila y continúa los trabajos de los griegos Apolonio, Arquímides y Tolomeo, es decir, todos los conocimientos de Geometría existentes hasta su época, y los presenta a través de un modelo que los sistematiza basándose en la deducción formal (Bauzá, 2016).

Investigaciones previas

Si bien no se cuestiona la relevancia de la geometría en el mundo que nos rodea, diversas investigaciones previas muestran "las dificultades que tienen los estudiantes para comprender las figuras geométricas, principalmente a la hora de reconocer sus atributos, establecer relaciones y clasificarlas" (Bernabeu y Llinares, 2017). Similarmente, Barrantes y Zapata (2008), mencionan que "un problema que se plantea desde la primaria y que los alumnos arrastran hasta la universidad, en particular los estudiantes para maestros, es la clasificación de figuras planas, tanto de triángulos como de cuadriláteros" (p. 65).

Una dificultad que se da en los primeros años de formación en geometría es la comprensión de las figuras geométricas y su clasificación. Según Barrantes y Zapata (2008), el problema asociado a la clasificación de triángulos y cuadriláteros recae en el hecho de tener la clasificación por partición y la por inclusión. Por partición sería considerar por separado tres tipos de triángulo según sus lados: equilátero, isósceles y escaleno. Es decir, aparece la definición de isósceles como el triángulo que tiene solo dos lados iguales o que tiene dos lados iguales y uno desigual. En una clasificación inclusiva el isósceles sería aquel triángulo que tiene dos lados iguales, pudiendo considerarse isósceles el triángulo equilátero. Similarmente, esto ocurre con los cuadriláteros al considerar una clasificación por partición del cuadrado, rectángulo y rombo.

Si bien esta situación ocurre para ambos tipos de figura, Carreño y Climent (2019), recopilan lo mencionado por otros autores para concluir que el interés sobre la enseñanza y aprendizaje de un concepto como el de cuadrilátero reside en la poca atención que se pone al estudio de la geometría en general, a la relevancia que tiene el tópico dentro del currículum escolar de diferentes países y al hecho de que el desarrollo de la definición y clasificación de estos conceptos sigue siendo un área poco investigada.

Al profundizar en la búsqueda de referencias asociadas a los temas antes tratados, se destacan los aportes de Pilar Turégano (2006), que presenta una propuesta basada en Vinner para trabajar la enseñanza y aprendizaje del concepto de polígono, y el de Adela Jaime y Ángel Gutiérrez (1996) que presentan una propuesta basada en Vinner para la enseñanza del concepto de altura de un triángulo. Con el desafío de favorecer la conceptualización del cuadrilátero en el contexto escolar chileno, se describen los principales avances asociados a la elaboración de una propuesta de tareas geométricas que, basadas en los elementos teóricos descritos, entreguen nuevos antecedentes sobre las formas y estrategias que actualmente podrían ser de ayuda para lograr los aprendizajes relacionados con este tema.

PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

Para lograr la competencia en geometría es necesario desarrollar de forma sinérgica tres clases de procesos cognitivos: los procesos de visualización, los procesos de construcción y el razonamiento, que guarda estrecha relación con los procesos discursivos como la demostración y la explicación (Fernández-Nieto (2018). Sin embargo, “en el sistema de educación formal, usualmente los contenidos de geometría son presentados a los estudiantes como el producto acabado de la actividad matemática, que deja en segundo plano los procesos implícitos de la construcción y de razonamiento en este conocimiento” (Gamboa y Ballestero, 2009, p. 114).

Sobre este tema, Barboza (2013), indica que el desarrollo de la geometría en el aula “se ha supeditado a la exposición y repetición de definiciones... evocando a Vygotsky, se expresa que la enseñanza directa de conceptos es imposible y estéril, y que los docentes no lograran nada, sino un vacío verbalismo (p. 369). De forma similar, Mariscal (2020) indica que: “el estudio de esta rama de las matemáticas en el contexto de la escuela primaria se ha simplificado, de forma que en los primeros grados se le asocia simplemente a la identificación de figuras prototípicas con sus nombres, y en los grados superiores, a la sistematización de fórmulas convencionales para calcular elementos como el área o perímetro” (p. 78).

Según esto, aparentemente habría un problema en lo que respecta a la enseñanza tradicional de la geometría escolar, pues no se logran desarrollar plenamente los tres procesos cognitivos necesarios para asegurar la competencia en geometría. Para solucionar esto, se ha llegado a un acuerdo generalizado, entre profesores y didactas de la matemática, sobre que las metodologías utilizadas para enseñar geometría en los niveles de primaria y secundaria deben basarse en actividades que faciliten la exploración y el descubrimiento por parte de los estudiantes (Jaime y Gutiérrez, 2020).

Los profesores Ángel Gutiérrez y Adela Jaime hacen un aporte al conocimiento didáctico en geometría, mediante el planteamiento de algunos modelos didácticos de la enseñanza de la geometría para los diversos niveles educativos. Sintetizan los modelos de Van Hiele y Vinner, y reflexionan sobre la necesidad de que los profesores tengan en cuenta las presentaciones físicas y mentales en la enseñanza, por el importante papel que cumple la visualización en el aprendizaje de la geometría (Camargo y Acosta, 2012, p. 8).

Ahora, en lo que respecta específicamente a la conceptualización de figuras geométricas, Barboza (2013) indica que el principal aporte a la didáctica de la matemática en ese ámbito ha sido el modelo de Vinner. Similarmente, Jaime y Gutiérrez (2012), señalan que “S. Vinner ha definido un modelo que explica cómo se produce el aprendizaje de conceptos matemáticos con fuerte contenido gráfico o visual, y propone a los profesores formas de prevenir o corregir aprendizajes erróneos” (p. 56).

Es debido a esto, que para efectos de esta investigación se decidió tomar como referente este modelo para elaborar experiencias geométricas que permitan contribuir a la comprensión del concepto de cuadrilátero. Esperando dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué factores del modelo de Vinner permiten superar las dificultades asociadas a la clasificación inclusiva y por partición de los cuadriláteros? Y ¿Qué impacto tiene la integración de tareas geométricas basadas en el modelo de Vinner en el desarrollo de la imagen conceptual de los cuadriláteros?.

MARCO TEÓRICO

Shlomo Vinner es profesor émerito de la Universidad Hebrea de Jerusalén en Israel. Allí enseña matemática y educación científica. El plantea un modelo que tiene por objetivo de explicar los procesos cognitivos que tienen lugar en los estudiantes durante el aprendizaje de conceptos matemáticos nuevos, en particular de los geométricos, bien sea como conceptos aislados o bien como ampliaciones de campos conceptuales ya formados (Jaime y Gutiérrez, 1996, p. 144)

Es así como se postula la existencia de dos celdas diferentes en nuestra estructura cognitiva: una para la definición del concepto y otra para la imagen conceptual (Mariscal, 2020, p. 81). Vinner y Hershkowitz (1983) llaman definición de un concepto a la definición verbal que un estudiante tiene en su memoria y que recita cuando se le pide (Jaime y Gutiérrez, 2012, p. 64). Es decir, es descripción de un concepto que suele dar el profesor en clases y el alumno anota en su cuaderno.

Por otro lado, según Vinner, cuando leemos o escuchamos el nombre de un concepto conocido, se estimula nuestra memoria y se evoca algo, que raramente es la definición del concepto, sino un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias, esto es lo que se conoce como imagen conceptual. Esta última es correcta cuando le permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociadas (no necesariamente matemáticas) son relevantes. (Gutiérrez y Jaime, 2012, p. 64).

Sin embargo, la definición de un concepto no tiene por qué estar ligada operativamente a la imagen de ese concepto en el momento de realización de tareas (Gutiérrez y Jaime, 2012, p. 62). Debido a esto, Turégano (2006) presenta tres esquemas de interacción mental, donde el ideal sería aquel donde la definición y la imagen conceptual interactuaran entre sí a la hora de dar respuesta a una tarea. Lamentablemente, la evidencia muestra que los alumnos al realizar una tarea, por lo general, entregar una respuesta intuitiva pues solamente recurren a la imagen conceptual que han formado, lo que puede llevar a errores.

Según lo propuesto por Vinner, para evitar este tipo de errores, se debe trabajar sobre la imagen conceptual y mejorarla. Carrillo et. Al (2016) realiza un análisis de este modelo y presenta una serie de pasos a seguir que permitirían mejorar la conceptualización de un determinado objeto matemático, los cuáles principalmente se centrarían en la elección de buenos ejemplos y contraejemplos, los que serían utilizados para identificar las propiedades características del concepto y los atributos no necesarios de este, los que suelen llevar a que el alumno se confunda.

Teniendo en cuenta lo anterior, estudiando a fondo este modelo y siguiendo los ejemplos presentados por Pilar Turégano (2006), Adela Jaime y Ángel Gutiérrez (1996, 2012) y José Carrillo et. Al (2016), es posible crear un conjunto de tareas geométricas no concatenadas que permitan trabajar la conceptualización de los cuadriláteros.

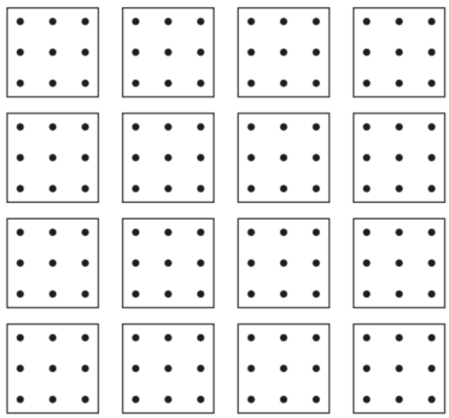
A continuación, se adjunta la Tabla 1, en cuya primera columna se presenta un ejemplo de tarea geométrica que de manera preliminar incorporaría las ideas principales del modelo de Vinner. En la segunda columna se presentan posibles modificaciones a los requerimientos de la tarea que permitirían aplicarla en diferentes niveles educativos y de diferentes formas.

Esta tarea fue extraída del Manual para la Implementación de Actividades CEAMA en el Eje de la Geometría elaborado por Luis Cortés Vega, Leonardo Medel, Ximena Paniagua, Leidy Bautista, Richard Merino, Sebastián Albornoz, Eugenio Chandía, Fabián Quiroga, Mauricio Gamboa, Patricia Fuentes, Julia Marfán y Cristián Reyes.

Tabla 1

Ejemplo de tarea geométrica para trabajar el concepto de cuadrilátero

Tarea	Otros requerimientos
Explorando Cuadriláteros	• Solicitar clasificar los cuadriláteros según su forma: cóncavos o convexos. • Solicitar clasificar los cuadriláteros según su cantidad de lados paralelos:

En cada geoplano de 3x3 se debe trazar una figura de cuatro lados, de tal manera que sus vértices sean cuatro de los puntos. En total hay 16 figuras diferentes, encuéntralas todas y clasifícalas de acuerdo con algún criterio. 	paralelógramos, trapecios y trapezoides.

Esta tarea podría ser adaptada a distintos contextos y niveles educativos incorporando alguno de los requerimientos presentados o, disminuyendo la cantidad de geoplanos y figuras solicitadas. Además, dependiendo de la gestión de clase llevada a cabo por el docente, podrían surgir la identificación de propiedades características (por ejemplo, la medida) y atributos no necesarios (por ejemplo, la orientación espacial) para poder justificar por qué las figuras son diferentes o no, y también para poder clasificar cada una de ellas dependiendo del criterio utilizado.

METODOLOGÍA

De acuerdo con lo mencionado por Hernández, Fernández y Baptista (2014), en el paradigma cualitativo “se concibe que la realidad es creada por los sujetos y se analizan las formas en que estos entienden un contexto, explican, actúan y manejan las situaciones cotidianas a las que se enfrentan” (p. 10). Así, la elección de este enfoque nos permitiría como investigadores poder documentar y analizar el tipo de razonamiento que los estudiantes presentan al realizar las tareas geométricas.

Teniendo en cuenta lo anterior, el tipo de muestra sería no probabilística, pues, como indican Hernández, Fernández y Baptista (2014) “no pretende que los casos sean estadísticamente representativos de la población”. De esta manera, la elección de los participantes sería por conveniencia y accesibilidad, siendo la prioridad aplicar las tareas al menos en un curso de cada nivel educativo: enseñanza básica, enseñanza media, pregrado y postgrado universitario.

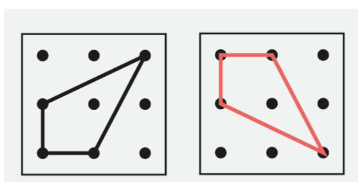
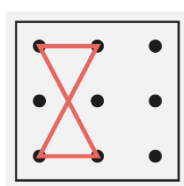
La recolección de datos consistiría principalmente en las grabaciones obtenidas durante la implementación y las respuestas escritas de los alumnos. El análisis de los datos resultantes de la implementación se haría teniendo en cuenta el modelo de Vinner y cómo este describe la conceptualización de un concepto y las interacciones que ocurren entre la definición e imagen conceptual a la hora de dar las respuestas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Al aplicar tareas geométricas como la presentada en la Tabla 1 se espera que durante su desarrollo los estudiantes discutan y concluyan, por ejemplo, el cómo podrían determinar si una figura es igual a otra, surgiendo así el tema de la medida de una figura y luego, el cómo determinar si un par de lados (o de ángulos) son de igual medida. A continuación, se adjunta la Tabla 2 que presenta algunas de las construcciones y estrategias de discriminación que se esperan observar:

Tabla 2

Ejemplo de respuesta esperada a la tarea Explorando Cuadriláteros

Construcción	Respuesta
	• Los estudiantes concluyen que estas dos figuras son iguales pues si bien tienen una orientación espacial diferente, estas tienen la misma forma y la cantidad de puntos que está fuera de cada figura es igual.
	• Los estudiantes concluyen que este tipo de figuras no son de cuatro lados, pues dos de ellos se inter

Referencias

Barboza, J. (2013). Explorar y descubrir para conceptualizar en Geometría. *Scientia et Technica XVIII*, *18*(2), 369-375. Recuperado de: https://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/issue/view/497

Barrantes, M., y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, *27*(1), 55-71. Recuperado de: https://revista-campoabierto.unex.es/index.php/campoabierto/article/view/1985

Bauzá, G. (2016). La base del conocimiento geométrico en la etapa de Educación Primaria: Materiales para desarrollarla. *Publicaciones Didácticas*, (76), 369-411.

Bernabeu, M., y Llinares, S. (2017). Comprensión de las figuras geométricas en niños de 6-9 años. *Educación Matemática*, *29*(2), 9-35. http://dx.doi.org/10.24844/EM2902.01

Camargo, L., y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis*, (32), 4-8. Recuperado de: https://isidore.science/document/10670/1.2ul54l

Carreño, E., y Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA*, *14*(1) 23-53. https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.9265

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero, D. I., y Flores, E. (coords.) (2016) Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primaria. Ediciones Paraninfo, S. A.: España, Madrid.

Fernández-Nieto, E. (2018). La geometría para la vida y su enseñanza. *AiBi Revista de Investigación*, Administración e Ingeniería, *6*(1), 33-61. https://doi.org/10.15649/2346030X.475

Gamboa, R. y Ballestero, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *4*(5), 113-114. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6915

Hernández Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). Metodología de la investigación (6° ed.). México: McGraw Hill Education.

Jaime, A., y Gutiérrez, A (1996) Uso de Definiciones e Imágenes de Conceptos Geométricos por los Estudiantes de Magisterio. En J. Gímenez (Ed.), El proceso de llegar a ser profesor de primaria: cuestiones desde la educación matemática (colección Mathema n°8, 143-170). Comares: Granada.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, (32), 55-70. Recuperado de: https://revistas.upn.edu.co/index.php/TED/article/view/1859

Mariscal, G. (2020). La formación de conceptos geométricos a partir de la integración de significados. *Revista Electrónica TicALS,* *1*(6), 76-100. Recuperado de: http://als.edu.co/revistaticals/index.php/ticals/article/view/123

Turégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos*, (21), 35-48. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2280879

COMUNICACIÓN BREVE

HABILIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN TERCERO BÁSICO. UNA REALIDAD POSTPANDEMIA

[Cecilia Marambio Carrasco], [Universidad Andrés Bello]

Abstract:

El estudio se centra en el análisis de la habilidad de resolución de problema con el objetivo de identificar los procesos del pensamiento lógico y estratégico que los/as estudiantes desarrollan al resolver problemas simples de sustracción para el nivel d e3° año básico de un colegio de la comuna de Maipú, en postpandemia. Los resultados evidencian que los procesos cognitivos logran ser alcanzados por los/as estudiantes en un nivel de muy bueno y bueno, pero con el dominio de los aprendizajes esperados del nivel 1° básico. Lo que amerita trabajar estrategias de aceleración para llegar a completar la cobertura curricular de su nivel y elevar su calidad educativa.

[aprendizaje, educación básica, matemáticas, resolución de problemas, pensamiento crítico]

INTRODUCCIÓN

El Problema Matemático requiere del pensamiento crítico y la exploración, para llegar a una solución que no es inmediatamente evidente, pues se debe analizar lógicamente, en este proceso el estudiante debe convertir el lenguaje verbal en lenguaje algebraico, así identificar la operación matemática que debe resolver y llegar al resultado final (Pérez, 2009).

El Ejercicio Matemático, se centra en la práctica de procedimientos y técnicas conocidas, la solución es directa y sigue un método claro, la operación algebraica viene dada.

Ambos son esenciales en la educación matemática, ya que los ejercicios ayudan a construir una base sólida de habilidades, mientras que los problemas fomentan el desarrollo de habilidades avanzadas de pensamiento lógico matemático y resolución de problemas.

Las Bases Curriculares de 1° a 6° básico explicitan que las habilidades del pensamiento matemático a potenciar entre los estudiantes de Educación Básica, son: resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar (MINEDUC, 2018, p.218), En la habilidad de resolución de problemas, enfatizan en que es tanto un medio como un fin para el dominio del aprendizaje matemático, además indican que es colocar a los/as estudiantes en situación problemática para que comparen diferentes posibles formas de dar solución al desafío. No obstante dar solución a un problema requiere de identificar la incógnita, determinar la estructura algebraica y comprender el proceso matemático de solución, es decir los/as estudiantes deben ser orientados en la comprensión de cómo obtener la solución, mediante una reflexión cognitiva, lo que implica un "desempeño cognitivo de la comprensión textual a la solución de problemas aritmético" (Pérez, 2020, p.885).

Los aprendizajes esperados en Matemática para la Educación Básica se encuentran estipulados en las actuales bases curriculares en el eje de numeración y operaciones. Los dominios de aprendizaje matemático en 1° básico se ubican en la representación numérica del 0 al 100, en segundo y tercero básico se amplía del 0 al 1000. En los tres niveles se advierte que se espera logren resolver problemas integrados a las operaciones matemáticas básicas.

En los distintos tipos de problemas, los/as estudiantes establecen relaciones de equivalencia para encontrar su solución, esto se traduce en realizar un proceso cognitivo de razonamiento lógico donde se desarrollan relaciones funcionales para identificar el algoritmo a aplicar hasta llegar a la resolución del problema (García-Cruz, & Falcón-Rodríguez, 2018).

METODOLOGÍA

La metodología de la investigación es estudio de caso único, dado que se realiza en un curso de primaria de un establecimiento educativo. Para analizar los datos se aplica el método inductivo, el cual se explica cómo: "un sistema para organizar hechos conocidos y extraer conclusiones" (Dávila, 2006, p.184).

El presente estudio tiene por objetivo identificar los procesos del pensamiento lógico y estratégico de los/as niños/as, en la resolución de problemas matemáticos estructurados simples con sustracción, mediante rúbrica de evaluación que considera los principios y acciones para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de la National Council Teachers of Matematychs (NCTM, 2014).

Contexto de la muestra

El estudio se realiza el año 2022, en un colegio localizado en Chile, en la Provincia de Santiago, Región Metropolitana, comuna de Maipú. La estrategia de resolución de problemas estructurados simples se aplica al 3° básico que tiene una matrícula de 43 estudiantes, de las cuales 26 son mujeres y 17 varones, 16 estudiantes han sido evaluados con Necesidades Educativas Especiales (NEE), de los cuales 11 presentan problemas de trastorno del lenguaje (4 afasia, 3 disfasia, 4 retraso simple del lenguaje) y 4 con problemas de orden cognitivo y 1 con problemas de autismo. La asistencia promedio entre los meses marzo abril del año 2022 fue de 87,5% y entre los meses mayo junio bajó a un 78%. Debido a contagio de Covid-19 por 5° básico y las bajas temperaturas en la Región Metropolitana.

Características del curso en estudio

Los estudiantes de 3° año básico se encuentran en un proceso incompleto de sus aprendizajes, debido a que el año 2020 sus clases fueron bajo sistema online debido a la pandemia de COVID-19, lo que no permitió el dominio de los aprendizajes matemáticos, por no completar la cobertura curricular y el no dominio de las destrezas de pensamiento lógico y de pensamiento estratégico de segundo básico.

Durante el mes de marzo de 2022 se realizó la unidad de reforzamiento de contenidos del ámbito numérico del o al 100, y ordenamiento, composición y descomposición numérica, ubicación espacial, dado que, durante los 2 años de pandemia. Se evidencia en la observación de clase que los /as estudiantes, no completaron la cobertura curricular de segundo año básico, por tanto, demuestran dominio en el eje de numeración en el ámbito del 0 al 100. La estructura de clase es tradicional docente realiza modelación de las operaciones matemáticas y luego los estudiantes desarrollan guías de trabajo, no realizan actividades en el libro de clase ni aplicación de Tics.

RESULTADOS

Se aplica una guía de trabajo con problemas estructurados simple de sustracción. La muestra está constituida por 43 estudiantes perteneciente a tercer año básico, de los cuales 32 resolvieron la guía en clases, correspondiendo al 74,5% de los estudiantes del curso de los cuales 34,5% corresponden a estudiantes de género masculino y 39,6% a estudiantes de género femeninos, el 9,3% son estudiantes atendidos por PIE.

Los resultados obtenidos en el análisis de problemas estructurados simple de sustracción por el 74,5 % de los estudiantes, se observan en la Tabla 1

Tabla 1

Tabulación de problemas estructurados de sustracción en datos porcentuales

Criterio	4 Muy Bueno	3 Bueno	2 Regular	1 En Desarrollo
Razonamiento	39,5	30,2	4,7	
Procedimientos	39,5	25,6	9,3	
Estrategia	39,5	25,6	7,0	2,3
Conocimientos	41,9	25,6	7,0	
Notación	41,9	20,9	2,3	9,3
Promedio	40,5	25,6	6,0	5,8

Nota. Elaboración propia

En la interpretación de la tabla 4 se indica que un alto porcentaje de los estudiantes se encuentran en los niveles 4 y 3 mostrando un alto grado de razonamiento matemático. Sin embargo, hay una pequeña proporción en el nivel 2, y ninguno en el nivel 1. Similar al razonamiento, la mayoría de los estudiantes están en los niveles 4 y 3 en la destreza en los procedimientos, con una menor proporción en el nivel 2, y ninguno en el nivel 1. Aunque la mayor parte de estudiantes se encuentra en los niveles 4 y 3, hay un pequeño porcentaje en los niveles 2 y 1, indicando que algunos estudiantes tienen dificultades con la capacidad estratégica. La comprensión de conceptos matemáticos es fuerte, con la mayoría en los niveles 4 y 3 y un pequeño grupo en el nivel 2. No hay estudiantes en el nivel 1. La notación matemática muestra más variabilidad. Aunque una buena proporción está en el nivel 4, hay una cantidad notable en el nivel 1, lo que indica problemas significativos con la terminología y la notación matemática.

En promedio, los estudiantes tienden a estar en los niveles 4 y 3 en términos de resolución de problemas matemáticos, con menores porcentajes en los niveles 2 y 1.

Conclusión

Según los análisis de puede inferir que los /as estudiantes tienen un logro efectivo en el dominio de resolución de problemas de sustracción, pero se identifica que siendo un tercer año básico presentan atrasos en sus aprendizajes dado que el registro de resultados obedece a una guía con problemas matemáticos en el ámbito numérico del 0 al 100, aprendizaje esperado para primero básico. Es necesario aplicar estrategias de aceleración de los aprendizajes para que logren completar los aprendizajes esperado de su nivel.

Para potenciar las habilidades matemáticas de capacidad estratégica necesaria para resolver problemas matemáticos se propone implementar ejercicios adicionales enfocados en notación matemática, según Pérez (2009) es significativo para el estudiante al desarrollar ejercicios matemáticos, para que comprenda los conceptos matemáticos, y pueda realizar presentación algebraica de forma correcta en la resolución de problemas.

El docente debe fortalecer su capacidad de construir y transformar problemas matemáticos complejos (Chico et al., 2022) que requieran la aplicación de las habilidades de razonar lógicamente para establecer estrategias que permitan planificar organizar, sistematizar y ejecutar un enfoque eficaz para resolver problemas matemáticos aplicados a estudiantes de educación primaria (NCTM, 2014).

REFERENCIAS

Alsina, A. (2010). La «pirámide de la educación matemática» Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa* 189, pp. 12-16.

Chico, J., Montes,M. & Badillo, E.(2022) Teachers' professional competence to pose school problems: the case of transformation of existing problems. Twelfth Congress of the *European Society for Research in Mathematics Education* (CERME12), Bozen-Bolzano, Italy. hal-03748718

Dávila, G. (2006). El razonamiento inductivo y deductivo dentro del proceso investigativo en ciencias experimentales y sociales. *Laurus*, vol. 12, núm. Ext, 2006, pp. 180-205.

García-Cruz, M., & Falcón-Rodríguez, C. (2018). Clasificación de problemas de matemáticas enfocada al desarrollo de la creatividad. *Revista Caribeña de Investigación Educativa (RECIE)*, 2(2), 107-119. https://doi.org/10.32541/recie.2018.v2i2.pp107-119

MINEDUC (2018). Bases Curriculares de 1° a 6° básico. Unidad de Currículo y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

NCTM (2014). De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos. Editorial 3D.

Pérez, P. (2009). Problemas y ejercicios matemáticos. *Revista Innovación y Experiencias Educativas* 45, pp.1-9.

Pérez Ariza, K. (2020). El diagnóstico de la comprensión de problemas aritméticos en la educación primaria. *MENDIVE Revista de Educación* 18 (4), p. 883-892. Cuba.

SUBCOMPETENCIAS DE MODELACIÓN Y PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO ESTUDIANTES CON TALENTO ACADÉMICO

Mg. Esteban Aros Sánchez, Liceo Bicentenario Los Ángeles

Dra. Andrea Vergara Gómez, Universidad Católica del Maule

Dra. María Aravena Díaz, Universidad Católica del Maule
Dra. Marianela Castillo Fernández, Universidad de Concepción

ANID/FONDECYT/Regular 1230865 Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo, Programa de Becas, Tipo de beca, Folio 22191142

Abstract:

Este estudio explora la co-presencia y relaciones implicativas entre las Subcompetencias de modelación matemática y los Propósitos del pensamiento probabilístico que manifiestan estudiantes con talento académico pertenecientes a un programa de enriquecimiento extracurricular al momento de desarrollar dos actividades de modelación matemática en un contexto probabilístico orientado a la toma de decisiones. Se asume un enfoque *cualitativo, con alcance exploratorio descriptivo y como método de análisis la estadística implicativa. Los resultados señalan que la Subcompetencia de Interpretar junto con el propósito de Optimización de recursos son los mejor logrados. En contraste, la Subcompetencia de Matematizar junto con el propósito de Expresar el conocimiento cualitativo por medio de probabilidades y actualizarlo por medio de datos son los menos logrados. Las co-presencias obtenidas por medio de los árboles de similaridad señalan que los estudiantes suelen evaluar de forma implícita el riesgo antes de Tomar decisiones bajo situaciones de incertidumbre y de Exponer sus juicios, además, para Optimizar sus recursos demuestran una conexión con las Subcompetencias de Simplificar, Modelar y Validar.*

Finalmente, destaca la Optimización de recursos, implicando a múltiples Subcompetencias (Simplificar, Modelar, Interpretar, Validar y Exponer).

[Subcompetencias de Modelación, Pensamiento Probabilístico, Análisis Implicativo, Talento académico]

INTRODUCCIÓN

Con el paso del tiempo las investigaciones en Didáctica de la Matemática han mantenido interés en trabajar con un grupo específico de estudiantes, en concreto, aquellos que demuestran talento académico, es decir, aquéllos con una capacidad matemática claramente superior a la media (Jaime y Gutiérrez, 2017), estudios enfatizan que este tipo de estudiante se caracteriza por lograr un desempeño exitoso en distintos tipos de actividades matemáticas (Singer et al., 2016). Investigaciones analizan las características de sus estrategias de resolución de problemas en matemática (Rodríguez et al., 2017) y la importancia de los retos en la formación de este tipo de estudiantes (Castro et al., 2014). A lo anterior se puede añadir que la mayoría de las investigaciones llevadas a cabo con estos estudiantes se centran en la resolución de problemas (Jaime y Gutiérrez, 2017).

Resulta interesante profundizar las habilidades que estos estudiantes ponen en juego al momento de resolver problemas más aún, al momento de enfrentar situaciones de modelación matemática, puesto que se ha probado que este enfoque promueve capacidades de pensamiento de alto nivel (Aravena, 2011). En los últimos años se ha mostrado un creciente interés por el desarrollo de la investigación acerca de la modelación y las aplicaciones matemáticas (Villa et al., 2017). Dicho interés se fundamenta en varias razones: la presencia de los modelos y la modelación en diversas actividades sociales, la conexión de la modelación con la tecnología y la necesidad de preparar a los estudiantes en actitudes y competencias matemáticas. Se puntualiza además los aportes de la modelación en los procesos formativos para el ejercicio de una ciudadanía responsable y la participación en los desarrollos de la sociedad (Blum, 2011). Particularmente en Chile el Ministerio de Educación destaca que, los estudiantes descubren regularidades o patrones y son capaces de expresar esas características fluidamente con sus propias palabras o usando un lenguaje más formal desarrollando la creatividad y la capacidad de razonamiento y de resolución de problemas (Ministerio de Educación, 2015).

Por su parte, el estudio del pensamiento probabilístico orientado a la toma de decisiones ha sido explorado a nivel escolar especialmente en tareas asociadas a juegos (Vergara et al., 2020), evidenciando creencias y contra intuiciones que conducen a la elaboración de juicios probabilísticos sesgados o erróneos. Estas dificultades asociadas a la toma de decisiones en contextos probabilísticos han sido identificadas incluso en el profesorado (An et al., 2023). Dado lo anterior, adquiere relevancia indagar estos aspectos en estudiantes con talento académico, sobre todo teniendo en cuenta que este tipo de estudiantes se caracteriza por lograr un desempeño exitoso en distintos tipos de actividades matemáticas (Singer et al., 2016). Nos preguntamos ¿cómo se relacionan los procesos de modelado con las funciones del pensamiento probabilístico en estudiantes con talento académico de 12 a 14 años? En este sentido, el objetivo de la investigación es explorar y describir estas relaciones. Para ello se analiza el desempeño de 7 estudiantes pertenecientes a un programa de enriquecimiento extracurricular de la Región del Biobío al enfrentar dos actividades de modelación en un contexto probabilístico orientado a la toma de decisiones.

El Pensamiento Probabilístico y el propósito de la probabilidad

El pensar probabilísticamente es mucho más que calcular probabilidades; en su trabajo, Borovcnick (2016), describe su propósito y comenta que revestir la probabilidad de un carácter significativo suele ser una tarea compleja para los profesores, debido a que existen concepciones divergentes en la manera en que piensan los estudiantes y analizar el propósito de las aplicaciones de la probabilidad, es decir, resaltar las características clave de situaciones en las que se utilizan para resolver un problema, tal vez ayude a comprender el concepto de probabilidad y pensamiento probabilístico. Según Borovcnik (2006), la probabilidad puede servir para cinco propósitos, de los cuales hemos considerado los cuatro primeros, pues el quinto se escapa a los propósitos de las actividades implementadas: “Para tomar decisiones bajo incertidumbre de una manera más transparente”, “Para expresar el conocimiento cualitativo por medio de probabilidades y actualizarlo por medio de datos”, “Para evaluar riesgos” y “Para optimizar los recursos”.

Subcompetencias de Modelación:

La modelación matemática es un proceso complejo y su análisis se puede llevar a cabo fragmentando en Subcompetencias, las cuales, si se trabajan en conjunto, permiten al estudiante realizar el tránsito por el ciclo completo. Para el caso de esta investigación, el sustento teórico lo entrega el modelo de Blum y Leiss (2007). Es a partir de esta propuesta que Greefrath y Vorhölter (2016, p.19) definen las Subcompetencias de Modelación como sigue:

Construir	Los estudiantes construyen su propio modelo mental a partir de un problema dado y así formula una comprensión de su problema.
Simplificar	Los estudiantes identifican información relevante e irrelevante de un problema real.
Matematizar	Los estudiantes traducen situaciones reales específicas y simplificadas en modelos matemáticos.
Interpretar	Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos de la manipulación dentro del modelo a la situación real y así obtienen resultados reales.
Validar	Los estudiantes juzgan los resultados reales obtenidos en términos de plausibilidad
Exponer	Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos en el modelo situacional con la situación real y obtienen así una respuesta al problema.

METODOLOGÍA

Se asume un enfoque cualitativo, con un alcance exploratorio descriptivo. Se utiliza la estadística implicativa para reconocer las relaciones y los informantes claves. Además, el marco conceptual brinda soporte para describir e interpretar dichas relaciones. La investigación se desarrolla con estudiantes con Talento Académico pertenecientes a un programa de enriquecimiento extracurricular de una Universidad de la región del Biobío. La selección de la muestra se realiza de manera intencionada y corresponde a 7 estudiantes chilenos pertenecientes al segundo ciclo de formación del programa. Las edades de los estudiantes van desde los 12 a los 14 años, es decir, cursan los niveles de 7mo básico a 1° año medio.

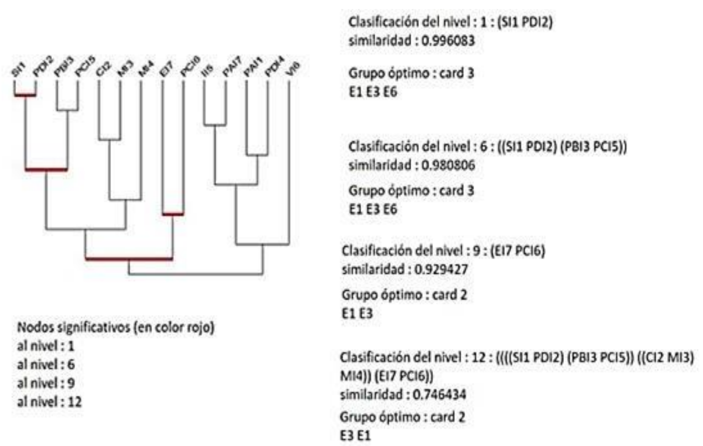
La investigación realizada se sitúa en tiempos de pandemia, lo cual ha condicionado en gran manera la forma de trabajo con los estudiantes que asisten al programa de enriquecimiento extracurricular. Se desarrollan sesiones de clases online, por lo que la recolección de datos se realizó por medio de la plataforma Google Classroom y las producciones de los estudiantes, orientado por el material de trabajo que se entrega en las sesiones experimentales. Bajo la autorización de la directora del programa, se realizan las sesiones de trabajo, dirigiendo algunas de las actividades de los participantes, pero no todas. Además, las etapas de intervención se rigen según la normativa ética presentada por el programa de Talento Académico de la Universidad. Finalmente, la conexión con los estudiantes en cada una de las etapas se lleva a cabo por medio de videollamadas en Google Meet, donde se conectan mediante sus cuentas institucionales.

CONCLUSIONES

Para facilitar la comprensión de las conclusiones se incorpora una breve muestra de los resultados obtenidos en una de las actividades del estudio. La figura 1 muestra el árbol de similaridad de la Actividad 1, donde se observa la co-presencia de subcompetencias y propósitos de la probabilidad.

Figura 1

Árbol de Similaridad de la Actividad 1.



A partir de la figura y considerando las probabilidades superiores a 0.90, se puede observar que existen las siguientes co-presencias:

Subcompetencia *Simplificar* con el propósito de *Optimización de recursos*, siendo los estudiantes E1, E3 y E6 quienes aportan mayoritariamente a esta asociación. Esto podría interpretarse como una relación beneficiosa entre la Subcompetencia *Simplificar* de Modelación y el propósito de *Optimización de recursos*, ya que, estas se manifiestan juntas para una buena parte de los estudiantes, muy posiblemente tenga relación con el hecho de que la Subcompetencia de *Simplificar* implica la elección precisa de elementos para optimizar el tiempo y el uso de recursos en la resolución de problemas.

Con base en los resultados obtenidos se puede concluir que para este grupo de estudiantes la Subcompetencia de Interpretar junto con el propósito de Optimización de recursos son los mejor logrados. En contraste, la Subcompetencia de Matematizar junto con el propósito de Expresar el conocimiento cualitativo por medio de probabilidades y actualizarlo por medio de datos son los menos logrados, debido a que los estudiantes limitaron en gran medida su trabajo matemático a la elaboración de tablas y construcción de gráficos, a partir de los cuales infieren la información.

Las co-presencias obtenidas por medio de los árboles de similaridad en ambas actividades, señalan que los estudiantes suelen evaluar de forma implícita el riesgo previo a la Toma de decisiones bajo situaciones de incertidumbre y la Exposición de sus juicios, además de que para Optimizar sus recursos demuestran una conexión fuerte con la Subcompetencia de Simplificar y también las de Modelar y Validar. En cuanto a las relaciones implicativas, destaca en este grupo de estudiantes la Optimización de recursos, puesto que aparece implicando a múltiples Subcompetencias (Simplificar, Modelar, Interpretar, Validar y Exponer), así como también a la Toma de decisiones bajo situaciones de incertidumbre y Evaluación de riesgos, la Optimización destaca como rasgo distintivo de este grupo de estudiantes. Por otro lado, en concordancia con las co-presencias, aparece la Evaluación de riesgos implicando a la Toma de decisiones y se observa cómo, con una alta probabilidad, la

Subcompetencia de Validar implica tanto la Interpretación como la Exposición, resaltando en los estudiantes una actitud reflexiva y objetiva de sus procedimientos y emisión de juicios.

Finalmente, es importante resaltar que los estudiantes solo reciben la guía y trabajan de manera autónoma con las indicaciones que la misma otorga. En cuanto a las proyecciones, extender el estudio a muestras más grandes de estudiantes permitiría validar las co-presencias e implicancias identificadas. Del mismo modo, podría ajustarse la actividad para presentar en una sola secuencia el problema, de tal manera de mantener la demanda cognitiva conforme avanzan las tareas. Asimismo, reestructurar algunas preguntas podría ayudar a intencionar mejor aquellas subcompetencias y propósitos más descendidos.

Referencias

Aravena, M. (2011). Resolución de problemas y modelización geométrica en la formación inicial de profesores. En A. Ruiz (Pres), *Acta XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (pp. 1-12). Recife, Brasil.

An, S., Hachey, A., Tillman, D., Divis, D., y Birdwell, B. (2023). Larger versus Luckier: preservice teachers' exploration of probabilistic reasoning through an aleatoric music activity. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 54(3), 325-350. https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1953628.

Blum W., y Leiss D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems?. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Horwood Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221.

Borovcnik, M. (2006). Probabilistic and statistical thinking. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* (pp.484- 506). European Society for Research in Mathematics Education. https://www.researchgate.net/publication/247256709_Probabilistic_and_Statistical_Thinkin g.

Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(3), 1491-1516. http://funes.uniandes.edu.co/26685/1/Borovcnik2016Probabilistic.pdf.

Cárcamo, A. (2017). *Una Innovación Docente Basada en los Modelos Emergentes y la Modelización Matemática para Conjunto Generador y Espacio Generado* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad Autónoma de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/458629

Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J., y Catro-Rodríguez, E. (2014). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. Aula, 21, 85-104. http://dx.doi.org/10.14201/aula20152185104.

Greefrath, G., y Vorhölter, K. (2016). Teaching and Learning Mathematical Modelling. Approaches and Developments from German Speaking Countries. Springer International Publishing http://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1.

Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). Zaragoza: SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/21/ActasXXISEIEM.pdf.

MINEDUC. (2015). *Matematica, Programa de Estudio Tercer año medio*, Actualización 2009. Santiago: MINEDUC.

Singer, F. M., Sheffield, L. J., Freiman, V., y Brandl, M. (2016). Research on and activities for mathematically gifted students. In: Research On and Activities For Mathematically Gifted Students. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-39450-3_1.

Vergara, A., Estrella, S., y Vidal-Szabó, P. (2020). Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de decisiones. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 23(1), 7-36. https://doi.org/10.12802/relime.20.2311

Villa, J., Castrillón, A., y Sánchez, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. *Espaço Plural*, *36*(1), 219-251. https://www.redalyc.org/pdf/4459/445955647011.pdf.

ANÁLISIS DE LAS HABILIDADES MATEMÁTICAS Y SOCIOEMOCIONALES DE PÁRVULOS DE NIVEL DE TRANSICIÓN 1 Y TRANSICIÓN 2

Sandra Catalán, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; Joaquín Cubillos, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; Raimundo Olfos, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Abstract:

El presente estudio aborda la relación entre las habilidades matemáticas y socioemocionales en niños y niñas de educación parvularia (NT1 y NT2) de establecimientos de educación pública de la Región de Valparaíso y Región de O'Higgins en Chile. Se destaca la *importancia de ambas competencias para el desarrollo integral de los niños, enfatizando que estas habilidades no solo influyen en el rendimiento académico, sino también en el desarrollo personal y social. Las habilidades matemáticas, que incluyen competencias como la comprensión del concepto de número, el conteo y la comprensión de conceptos espaciales, se presentan como predictoras del éxito académico posterior. Por otro lado, las habilidades socioemocionales, como la gestión de emociones y la capacidad de interactuar positivamente con otros, son fundamentales para el aprendizaje en un entorno educativo. La investigación empleó una metodología cuantitativa, con un diseño no experimental, transeccional y descriptivo-correlacional, utilizando los tests TEMA3 y TADI para evaluar las competencias matemáticas y socioemocionales, respectivamente. Los resultados sugieren una correlación positiva entre ambas variables, lo que subraya la necesidad de un enfoque educativo holístico que promueva simultáneamente el desarrollo cognitivo y emocional en los niños. Este enfoque equilibrado es esencial para preparar a los niños para los desafíos futuros, tanto académicos como sociales.*

Habilidades matemáticas, habilidades socioemocionales, Educación Parvularia, TEMA 3, Test de Aprendizaje y Desarrollo Integral (TADI)

INTRODUCCIÓN

La educación parvularia se refiere a la educación formal que reciben los niños y niñas antes de ingresar a la educación básica, generalmente en los niveles de transición 1 (NT1) y Transición 2 (NT2). Durante estos primeros años se establecen las bases para el aprendizaje futuro y el desarrollo integral de las y los párvulos (MINEDUC, 2018). En este contexto, las habilidades matemáticas y socioemocionales emergen como pilares fundamentales, que no solo contribuyen al desarrollo cognitivo, sino que también facilitan la adaptación y el bienestar en entornos escolares y sociales. La interrelación entre estos dos dominios es relevante, ya que un desarrollo socioemocional robusto puede potenciar el aprendizaje matemático al permitir que los niños enfrenten desafíos de manera resiliente y colaborativa. No obstante, en la práctica educativa estas dos dimensiones suelen considerarse de forma aislada, sin contemplar las posibles oportunidades de interacción entre ambas (Chaves et al., 2008).

Visto lo anterior, la pregunta de investigación que prendía responder la presente investigación es la siguiente: ¿Cómo se relacionan las habilidades matemáticas y socioemocionales de niños y niñas de Nivel de Transición I y Nivel de Transición II provenientes de establecimientos de educación pública?

Este análisis permitirá aportar evidencia empírica sobre su interconexión, resaltando la necesidad de un enfoque educativo holístico que promueva simultáneamente el desarrollo cognitivo y emocional en los niños y niñas del nivel de educación parvularia.

MARCO TEÓRICO

El desarrollo de habilidades matemáticas en la educación parvularia abarca un conjunto de competencias que los niños comienzan a adquirir desde edades muy tempranas, entre 0 y 6 años. Estas habilidades son fundamentales para la formación del pensamiento lógico-matemático, estableciendo las bases para un aprendizaje matemático posterior más complejo (Ormeño et al., 2013). Estas competencias incluyen la noción de número y conteo, la comprensión de conceptos espaciales, patrones y relaciones (Cárdenas et al., 2017; Castro et al., 2013). Según la teoría de Piaget, el desarrollo cognitivo en los niños pequeños sigue una secuencia de etapas en las que el pensamiento lógico-matemático se desarrolla progresivamente (Piaget, 1975). Durante los niveles de NT1 y NT2, los niños construyen una comprensión básica de estos conceptos a través de experiencias concretas y manipulativas.

Estas habilidades tempranas no solo son predictoras del éxito académico en matemáticas, sino también en otras áreas del conocimiento (Gospodinov et al., 2024). Aspectos como la familiaridad con los números, la capacidad de resolver problemas sencillos y la comprensión de relaciones espaciales son esenciales durante esta etapa de desarrollo.

Paralelamente, las habilidades socioemocionales en la educación parvularia son igualmente cruciales. Estas incluyen la capacidad de los niños para identificar y gestionar sus emociones, establecer relaciones positivas con los demás y tomar decisiones responsables (Gallardo – Vázquez et al., 2022). El desarrollo socioemocional permite a los niños conocerse tanto a sí mismos como a los demás, interactuar adecuadamente con sus compañeros, seguir instrucciones, manejar conflictos y desarrollar una autoestima positiva, con el fin de resolver problemas con flexibilidad y creatividad (Cohen, 2003). Asimismo, la teoría de Vygotsky (1978) subraya la importancia de la interacción social en este desarrollo, destacando el papel del entorno educativo y de las interacciones con pares y educadores. Durante los niveles NT1 y NT2 los párvulos desarrollan un conjunto de aprendizajes para enfrentar sus interacciones desde la confianza, seguridad, y valoración positiva de sí mismos y de los demás (MINEDUC, 2018).

Es importante señalar que las habilidades matemáticas y socioemocionales están estrechamente interrelacionadas. Las competencias socioemocionales, como la capacidad para concentrarse, manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje, expresar una actitud positiva frente a sí mismo y sus capacidades, demostrar una actitud de esfuerzo y perseverar ante desafíos, además de colaborar con otros, son esenciales para el desarrollo de habilidades matemáticas (Allende y Villar, 2016). La investigación sugiere que los niños con un desarrollo socioemocional saludable están mejor preparados para aprender conceptos matemáticos, ya que son capaces de manejar la frustración, seguir instrucciones y trabajar en equipo (Mora, 2013).

A su vez, el desarrollo de habilidades matemáticas puede contribuir al bienestar socioemocional de los niños. El éxito en tareas matemáticas refuerza la autoestima y el sentimiento de validez en la sociedad. La capacidad para usar este conocimiento tiene consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas MINEDUC (2012). Además, las actividades matemáticas grupales pueden mejorar habilidades y capacidades psíquicas que contribuyen a la educación hacia valores positivos, actitudes y cualidades morales (Santos, 2010).

En la práctica educativa, es crucial adoptar un enfoque holístico que integre el desarrollo de habilidades matemáticas y socioemocionales. Las actividades de aprendizaje deben estar diseñadas para promover tanto el desarrollo cognitivo como emocional de los niños. Esto se puede lograr mediante juegos y actividades grupales, enseñanza emocional explícita, creación de ambientes de aprendizaje positivos y el uso del refuerzo positivo.

La relación entre las habilidades matemáticas y socioemocionales es bidireccional y complementaria y, por lo tanto, juegan un rol fundamental en su aprendizaje y enseñanza (Blanco et al., 2005). Un enfoque educativo que considere esta interrelación promoverá el desarrollo integral en los niños preparándolos, no solo para el éxito académico, sino también para enfrentar los desafíos de la vida. Es fundamental que los educadores y diseñadores de currículos presten atención a ambas áreas, creando experiencias de aprendizaje que fomenten el desarrollo cognitivo y emocional desde los primeros años de vida (Esquivel et al., 2016).

METODOLOGÍA

Este estudio, enmarcado en el Proyecto FONDEF IT23i0067, tiene un enfoque cuantitativo, con un diseño de investigación no experimental, transeccional y de tipo descriptivo-correlacional.

La muestra es no probabilística por conveniencia, conformada por 77 niños y niñas de NT1 y NT2, cuyas edades oscilan entre los 4 y 5 años de edad, pertenecientes a establecimientos de educación pública de 3 comunas de la Región de Valparaíso y 1 comuna de la Región de O'Higgins.

Para recoger los datos, se utilizaron dos instrumentos, los cuales fueron inicialmente aplicados en el proyecto FONDEF ID20i10070 (Olfos, 2023) titulado Sistema de Andamiaje en el desarrollo del pensamiento matemático y de la sociabilidad y afectividad de los párvulos, a saber: el Test de Competencia Matemática Básica (TEMA) que se utilizó para la identificación del nivel de desarrollo de la competencia matemática temprana de niños y niñas entre 3 y 8 años. Por su parte, para identificar el nivel de desarrollo de las habilidades socioemocionales se aplicó el Test de Aprendizaje y Desarrollo Integral (TADI), que está dirigido a párvulos de 3 meses a 6 años de edad y conformado por cuatro dimensiones: cognición, motricidad, lenguaje y socioemocionalidad. Para dar respuesta a los objetivos del presente estudio, se aplicó solo esta última dimensión para medir el nivel de desarrollo socioemocional en este grupo. La decisión de utilizar estos instrumentos nuevamente, obedece a que en el proyecto anterior permitieron dar cuenta, de forma clara, del desarrollo de las habilidades evaluadas (Olfos, 2023).

La aplicación de los instrumentos se llevó a cabo en los establecimientos educacionales de origen de los párvulos, en un espacio destinado para esta tarea y de forma individual. La evaluación fue realizada por personal preparado especialmente para esta actividad, quienes han demostrado experiencia en el trabajo con niños y niñas.

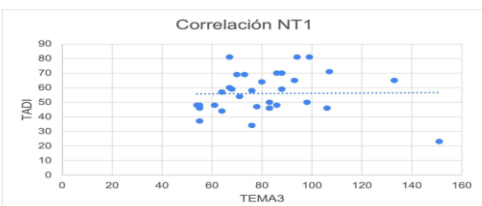
El análisis de datos consideró el uso de estadística inferencial con análisis correlacional. Para evaluar la relación lineal simple entre ambas variables, se utilizó el coeficiente de correlación de Pearson.

RESULTADOS

En los gráficos 1 y 2 se presentan los resultados obtenidos al realizar un diagrama de dispersión con los datos analizados, distinguiendo el nivel educativo NT1 y NT2 respectivamente.

Gráfico 1

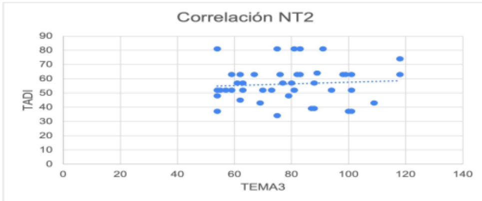
Gráfico de dispersión correspondiente a TEMA3 y TADI en párvulos de NT1



El gráfico 1 sugiere que existe una correlación positiva moderada entre TEMA3 y TADI. Esto se observa por la tendencia ascendente de los puntos de datos, aunque con cierta dispersión. La línea de tendencia (línea punteada) muestra una ligera inclinación ascendente, lo que indica que, en general, a mayores valores de TEMA3 corresponden mayores valores de TADI.

Gráfico 2

Gráfico de dispersión correspondiente a TEMA3 y TADI en párvulos de NT2



El gráfico 2 muestra una correlación positiva débil entre TEMA3 y TADI. Esto se evidencia por la ligera inclinación ascendente de la línea de tendencia (línea punteada). La pendiente de la línea es baja, lo que indica que el incremento en TEMA3 no se asocia claramente con un aumento significativo en TADI.

CONCLUSIONES

Se revela una correlación positiva moderada entre las habilidades matemáticas y socioemocionales en niños de educación parvularia de NT1, sugiriendo que los niños con un desarrollo socioemocional saludable tienen una mejor mayor probabilidad de tener éxito para aprender y comprender conceptos matemáticos, lo cual también mejora su autoestima y actitudes hacia el aprendizaje.

En NT2 se observa una correlación positiva débil, lo que sugiere que la relación entre TEMA3 y la dimensión socioemocional del TADI no es consistente, por lo tanto, el incremento en una variable no se relaciona claramente con un aumento en la otra. Una posible explicación de este resultado es que ambos instrumentos han sido diseñados para evaluar dominios específicos y no fueron creados para obtener una mirada holística de las infancias a partir de la integración de sus resultados.

A nivel de NT1, el éxito en tareas matemáticas podría contribuir al desarrollo de habilidades socioemocionales, como la cooperación y la gestión de emociones en este grupo. No obstante, en NT2 la posibilidad es más remota. Si bien, las investigaciones señalan que las habilidades socioemocionales son fundamentales para el aprendizaje a lo largo de la vida (Bisquerra y Mateo, 2019), en este grupo de estudiantes habría que contemplar la influencia de otros factores, tales como el contexto familiar, las oportunidades de acceso a estimulación oportuna para el desarrollo de las habilidades matemáticas, la escolarización previa, entre otros.

Se deben considerar variables adicionales, como el tipo de establecimiento educativo, características demográficas y otras, para entender mejor la relación entre estas habilidades en diferentes contextos. Asimismo, es necesario pensar en posibles estudios que profundicen sobre la relación entre estos u otros test que estudien factores asociados a los contemplados para este estudio, que capturen de manera holística las complejas interacciones entre habilidades matemáticas y socioemocionales en la educación inicial.

Finalmente, es importante resaltar que el estudio subraya la relevancia de estimular a los niños y niñas por un lado, en tareas asociadas al pensamiento lógico-matemático, y por otro en el autoconocimiento y sus interacciones con los demás. Esta mirada holística del desarrollo permite que los párvulos se preparen, no solo para el rendimiento escolar -específicamente a nivel de razonamiento matemático- sino también para enfrentar los desafíos sociales y emocionales en su vida futura.

Referencias

Allende, A. y Villar, V. (2016). La autoestima y su efecto en el aprendizaje de las habilidades de la asignatura de matemáticas en los estudiantes del 2do año básico en dos establecimientos educacionales: un colegio particular en la comuna de la Reina y un colegio subvencionado en la comuna de Lo Barnechea. *Universidad Academia de Humanismo Cristiano, Santiago, Chile*.

Bisquerra, R., y Mateo, A., (2019). Competencias emocionales para un cambio de paradigma en educación. Horsori.

Blanco, L. J., Gil, N. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Union.Revista iberoamericana de educación matemática*, 2(1), 157 - 171. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1385

Cárdenas-Soler, R. N., Piamonte-Contreras, S., & Gordillo-Catellanos, P. (2017). Desarrollo del pensamiento numérico. Una estrategia: el animaplano. *Pensamiento y Acción, (23), 31–48.* https://revistas.uptc.edu.co/index.php/pensamiento_accion/article/view/8447

Castro, E., Cañadas, M. C. y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Educación Matemática en la Infancia, 2(2), 1-11*

Chaves, E., Gamboa, R. y Castillo, M. (2008). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 3(4), 29-44. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6906/6592

Cohen, J. (2003). *La inteligencia emocional en el aula: Proyectos, estrategias e ideas.* Troquel

Esquivel; M.L., Gutiérrez, M., Mercado, A., Pachón, Y. y Ortega , G. (2016). Relación del clima de aula y las emociones morales: culpa y empatía. *Educación y Ciudad*, 31, 59 - 70. https://doi.org/10.36737/01230425.v.n31.2016.1609

Gallardo-Vázquez, R.; Gallardo, F. y Gallardo-López, J. (2022). Desarrollo de habilidades socioemocionales y de los valores en Educación Infantil y Primaria. Octaedro Editoria

Gospodinov, A., Mercader, J., Andrés, C., y Abellán, L. (2024). "Early numeracy skills" y rendimiento matemático: un estudio longitudinal de 7 años. Revista INFAD De

Psicología. *International Journal of Developmental and Educational Psychology., 1(1), 413–420.* https://doi.org/10.17060/ijodaep.2024.n1.v1.2634

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2018). *Bases Curriculares Educación Parvularia*

Olfos, R. (2023) Reporte final FONDEF ID20i10070. Manuscrito no publicado.

Ormeño, C., Rodríguez,S. y Bustos, V., (2013). Dificultades que presentan las educadoras de párvulos para desarrollar el pensamiento lógico matemático en los niveles de transición. *Páginas de Educación, 6(2), 55-71*. http://www.scielo.edu.uy/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1688-74682013000200003&lng=es&tlng=es.

Mora, F. (2013). *Neuroeducación: sólo se puede aprender aquello que se ama*. Alianza.

Piaget, J. (1975). *El desarrollo del pensamiento*. Paidós.

Santos Alejo, P. M. (2010). *Actividades grupales dirigidas a la educación del colectivismo en escolares de sexto grado desde la clase de Matemática* (Doctoral dissertation, Universidad de Ciencias Pedagógicas Capitán Silverio Blanco Núñez).

Vygotsky, L. S. *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. M. Cole, V. Jhon-Steiner, S. Scribner y E. Souberman (eds. y traducs.), p. 87 (Harvard University Press, Cambridge MA, 1978).

Vision de los docentes sobre las Dificultades de comprensión de las pruebas de hipótesis

María Lidia Retamal, Universidad Católica de la Santísima Concepción.

Abstract:

The study of hypothesis tests is essential in the training of engineers. We present, from the teachers' perspective, the difficulties and errors exhibited by engineering students, the teaching methodologies and the resources available in relation to hypothesis testing. 19 teachers participated, and among the main results we have that, students have great difficulties with the approach of statistical hypotheses and the study of parameters in two populations.

[pruebas de hipótesis, formación de ingenieros, enseñanza de la estadística]

INTRODUCCIÓN

La inferencia estadística es uno de los tópicos clásicos en cursos de estadística orientada a las distintas carreras universitarias, especialmente nos interesa analizar la emergencia de los test estadísticos de hipótesis en el contexto de las ingenierías. En particular, la elaboración de hipótesis es fundamental en las aplicaciones en ciencias de la ingeniería, sin embargo, su implementación y apropiación han sido parciales, debido a constantes ajustes curriculares. Una tarea pendiente es el fortalecimiento de la apropiación y aplicación correcta de los conocimientos estadísticos, transitando del análisis de datos a la inferencia estadística, siendo uno de los temas relevantes la omnipresencia de las pruebas de hipótesis en el trabajo profesional de los ingenieros.

Las investigaciones resaltan las dificultades de los estudiantes universitarios en las pruebas de hipótesis estadísticas por su complejidad y reducidos tiempos didácticos en que es abordada (e.g., López-Martín et al., 2019; Vera, 2019). Inzunza y Jiménez (2013) hacen mención de los siguientes elementos emergentes y relacionados con las pruebas de hipótesis: población, muestra, estadístico de prueba, distribución muestral del estadístico de prueba, nivel de significancia, hipótesis nula, hipótesis alternativa, valor-p, regiones de rechazo y regiones de no rechazo. Inferir el valor que puede tomar el parámetro poblacional implica aplicar los procedimientos de la estimación puntual, la estimación por intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis.

El estudio de las pruebas de hipótesis es esencial en la formación de los ingenieros y aunque en los últimos años se ha investigado el conocimiento de los estudiantes, es necesario desarrollar estudios desde la perspectiva de los profesores que imparten esta materia en ingeniería. Por ello, en este trabajo se presentan, desde la perspectiva de los profesores, las dificultades y errores que presentan los estudiantes de ingeniería, las metodologías de enseñanza y los recursos disponibles en relación con los test de hipótesis. Nos planteamos la pregunta ¿Cuáles son la dificultades y errores que manifiestan los docentes de los futuros ingenieros acerca de las pruebas de hipótesis?

MARCO CONCEPTUAL

En los últimos años en Educación Estadística los especialistas han dado cuenta de experiencias de enseñanza e investigación sobre un Razonamiento Estadístico para la Inferencia; por ejemplo, estudiando niveles de razonamiento estadístico sobre pruebas de hipótesis con estudiantes de matemática (Inzunza y Jiménez, 2013) y el impacto de ambientes de aprendizaje con uso de las tecnologías. Otras investigaciones están referidas al uso incorrecto de los test estadísticos de hipótesis, interpretaciones erróneas de los resultados, confusión entre hipótesis nula y alternativa, confusión de los estudiantes entre las hipótesis estadísticas y de investigación, conflicto en la lógica del proceso de los test de significación de Fisher y contraste de hipótesis de Neyman Pearson, confusiones entre prueba bilateral y unilateral, y las regiones de aceptación y rechazo (Vera, 2019), dificultades de comprensión del nivel de significación α y valor-p (Batanero et al., 2017; López- Martín, et al., 2019).

También, han surgido propuestas de niveles de razonamiento inferencial sobre las pruebas de hipótesis, donde se plantea resolver problemas de inferencia estadística inicialmente con aspectos de inferencia informal y avanzar progresivamente hacía las nociones y métodos formales de la inferencia estadística (Lugo-Armenta y Pino-Fan, 2021).

Por su parte Vera (2019), en su investigación sobre pruebas de hipótesis, propone que un elemento de significado para la inferencia estadística es la interpretación de resultados. La investigación de Figueroa y Baccelli (2019) analizan las producciones de dos problemas sobre pruebas de hipótesis por estudiantes de estadística de carreras de ingeniería, descubriendo que un grupo de ellos no logran identificar las hipótesis adecuadas según el parámetro y no discriminan las hipótesis nula y alternativa. La inferencia estadística es uno de los tópicos clásicos en cursos de estadística orientada a las distintas carreras universitarias, especialmente nos interesa analizar la emergencia de los test estadísticos de hipótesis en el contexto de las ingenierías.

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo esta investigación se consideró un diseño exploratorio comparativo, analizando las dificultades en la enseñanza de las pruebas de hipótesis desde la figura institucional. Se elaboraron dos pautas de cuestionario dirigidas a docentes que enseñan y utilizan la estadística. Para la elaboración de las pautas, recurrimos a las investigaciones relacionadas y descritas previamente en la sección de Marco Conceptual obteniendo un banco de ítems sobre pruebas de hipótesis que nos devele errores frecuentes en el aprendizaje de pruebas de hipótesis. Para la validación de estos instrumentos realizamos un análisis de contenido y triangulación de expertos, en la cual participaron dos académicos de estadística y dos de educación estadística.

El procedimiento para llevar a cabo la investigación cualitativa consideró, en primer lugar, un estudio exploratorio comparativo de análisis de contenido a través de una muestra de libros de texto universitarios de estadística, y posteriormente un análisis de las dificultades en la enseñanza de las Pruebas de Hipótesis desde la perspectiva institucional. Para el análisis de contenido de las pruebas de hipótesis, se seleccionaron 13 textos con capítulos directamente relacionados con el tema de las pruebas de hipótesis; considerando 6 libros del área de ingeniería, 2 libros de introducción a la ingeniería, 3 libros del área de negocios y economía, y 2 libros de enseñanza de estadística. El proceso de análisis fue inductivo, revisando continuamente los capítulos relacionados con la asignatura orientada a la ingeniería; lo que dio una visión aproximada de lo que reciben los estudiantes en la formación universitaria, y permitió la elaboración de un conjunto de ítems.

Paralelamente, se analizaron ítems de pruebas de hipótesis aplicadas en investigaciones afines, que junto con el análisis de contenido permitieron determinar un significado institucional de referencia del tema. Las investigaciones son variadas con diferentes enfoques; dan cuenta de la forma de abordar la prueba de hipótesis, significados del contraste de hipótesis, orientaciones y niveles de estudio, dificultades encontradas y alcances e implicaciones.

Debido a la contingencia sanitaria se elaboró un cuestionario orientativo para profesores que enseñan y utilizan la estadística; otorgando un tiempo adecuado de un mes a los docentes para responder de forma reflexiva los ítems propuesto del cuestionario. Para la seleccionar a los participantes se recurrió al muestreo no probabilístico por voluntarios. Así, la muestra de participantes se conforma por 19 académicos, de los cuales 10 son docentes de estadística en los primeros cursos universitarios y 9 son docentes ingenieros, quienes aplican la estadística en diversas situaciones problemas de las especialidades. Si bien, hay ítems similares en los dos cuestionarios las principales diferencias son el énfasis conceptual de pruebas de hipótesis en el primero y en la necesidad de formulación de hipótesis en proyectos de investigación de ciencias de la ingeniería en el segundo cuestionario. En la siguiente sección destacaremos algunas respuestas que nos brindaron los participantes mediante los diversos ítems de los cuestionarios.

RESULTADOS

A continuación, presentamos los resultados de uno de los ítems, ¿Dónde se observan los mayores errores en Pruebas de Hipótesis por los estudiantes? La Tabla 1 muestra las respuestas de 10 docentes de estadística y 9 ingenieros referente a los errores de aprendizaje sobre pruebas de hipótesis. El ítem fue adaptado de López-Martín et al., 2019).

Tabla 1 *Errores en pruebas de hipótesis declarados por los docentes e ingenieros*

Pruebas de hipótesis	Docentes	Ingenieros
Errores en la selección o planteamiento	8	4
Errores conceptuales	4	7
Errores procedimentales	1	3
Errores de interpretación del resultado de los cálculos matemáticos	5	6

Los mayores errores en que incurren los estudiantes se observan en la selección o planteamiento de hipótesis (8 docentes), mismo error que es destacado en el estudio de Figueroa y Baccelli (2019); seguido de la interpretación de resultados (5) y errores conceptuales (4). Este resultado es contrario al estudio de López-Martín et al., (2019) con profesores de matemática en formación; donde encontraron que los errores procedimentales y de interpretación de resultados superaron a los conceptuales y de planteamiento de pruebas de hipótesis. Los ingenieros destacaron como mayores errores de los estudiantes: los conceptuales (7) y la interpretación de resultados (6). Los ingenieros no destacaron los errores procedimentales entendiendo que como usuarios de la estadística se apoyan con recursos informáticos, por lo cual la interpretación del resultado de salida del software se vuelve una parte fundamental del trabajo estadístico. Efectivamente, la interpretación de una hipótesis es una acción fundamental en el proceso mismo para la toma de decisiones. No obstante, a veces descuidamos el significado que tiene no rechazar una hipótesis nula, que suele entenderse erróneamente como la aceptación de la hipótesis nula. Más precisamente,

"una hipótesis consiste en un enunciado condicional simple o complejo internamente coherente con un antecedente que es aquello que realmente se propone hipotéticamente y un consecuente relacionable con hechos verificados o verificables. La falsedad del consecuente implica la del antecedente e invalida la hipótesis, mientras que la verificación del consecuente no permite establecer la necesaria verdad del antecedente y, por tanto, no modifica su carácter hipotético" (Muñoz y Velarde, 2000).

Los docentes han destacado errores en el planteamiento debido a la carencia de comprensión lectora e interpretación en pruebas de hipótesis no redactando bien las conclusiones, algunos ejemplos de respuestas se presentan en la Tabla 2:

Tabla 2 *Respuestas sobre los errores en pruebas de hipótesis declarados por los docentes*

Respuestas de los docentes al ítem
D1: "Los errores surgen cuando plantean incorrectamente las hipótesis; si bien identifican el parámetro no se mantiene una coherencia al identificar una prueba bilateral o unilateral con el planteo de la hipótesis alternativa y la zona de rechazo de la hipótesis nula".
D3: "Muchas veces los estudiantes no redactan la conclusión de los resultados obtenidos".
D4: "Cuesta definir las hipótesis de manera correcta. A veces concluyen de manera correcta pero interpretan mal la información que el problema les brinda.
D9: Errores de selección o planteamiento que se deben a la falta de comprensión del texto.

Las argumentaciones de los ingenieros que utilizan la estadística están referidas a errores conceptuales y la dificultad en tomar decisiones al aplicar la prueba, en la Tabla 3 podemos ver tres respuestas de ingenieros.

Tabla 3 *Respuestas sobre los errores en pruebas de hipótesis declarados por los ingenieros*

Respuestas de los ingenieros al ítem
I1: Es un tema que les cuesta mucho, yo diría que en "todas las anteriores", si estuviera esa opción: plantean al revés las hipótesis, tienen errores procedimentales (por ejemplo, cuándo usar α o α/2), les cuesta mucho sacar conclusiones correctas en base a la información disponible… pero sin duda los mayores errores son conceptuales.
I2: Errores en la selección o planteamiento/Conceptuales. He notado que los alumnos son buenos realizando labores procedimentales y captan rápidamente la idea de la

interpretación del resultado de la prueba, pero tienen mucha dificultad en tomar la decisión de realizar la prueba, solamente la realizan cuando el académico la solicita explícitamente. De este modo, se evidencia que no existe una claridad en los conceptos ni las bondades de realizar la prueba de hipótesis.
I9: Existen debilidades conceptuales y planteamiento; el análisis e interpretación de los resultados extraído desde el procesamiento de data en los softwares no son correctos.

Lo anterior, sugiere para la mejora de la enseñanza de pruebas de hipótesis, tener en cuenta el planteamiento de hipótesis en contexto y enfatizar las interpretaciones de los resultados para la toma de decisiones (Lugo-Armenta y Pino-Fan,2021). En Ciencias de la Ingeniería, son importantes las interpretaciones de los resultados para la toma de decisiones y debe existir conexiones evidentes entre el curso de estadística y los de especialidad. Un ingeniero señala errores en todas las alternativas, que corrobora la investigación de Inzunza y Jiménez (2013) destacando dificultades de los estudiantes desde el planteamiento de hipótesis hasta la interpretación de los resultados.

CONCLUSIONES

La investigación evidenció avances en identificar cuáles son los posibles componentes críticos de las pruebas de hipótesis revelados por los docentes que enseñan y utilizan la estadística en ingeniería, obteniendo una visión más amplia para proporcionar orientaciones de mejora en los procesos de estudio de las pruebas de hipótesis y la mejora de la enseñanza de la estadística en la Escuela de Ingeniería. El estudio ha mostrado, por las respuestas de los docentes, que efectivamente hay errores en el aprendizaje de pruebas de hipótesis, destacando como una de las mayores dificultades la elaboración de hipótesis como componente crítico y su alcance para la toma de decisiones en problemáticas propias del ingeniero. Uno de los retos para los docentes es iniciar el trabajo metodológico de elaboración de hipótesis estadística, competencia de análisis de datos y su correcta comunicación en los primeros niveles

Referencias

Batanero, C., Díaz, C. y López Martín, M. (2017). Significados del contraste de hipótesis, configuraciones epistémicas asociadas y algunos conflictos semióticos. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre EOS.

Figueroa, S. y Baccelli, S. (2019). Significados personales sobre los contrastes de hipótesis en estudiantes de ingeniería. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.

Inzunza, S. y Jiménez, J. (2013). Caracterización del razonamiento estadístico de estudiantes universitarios acerca de las pruebas de hipótesis. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 16(2), 179-211.

López- Martín, M., Batanero, C. y Gea, M. (2019). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en inferencia estadística? Bolema 33(64), 672-693.
Lugo-Armenta, J. G., & Pino-Fan, L. R. (2021). Inferential Reasoning of Secondary School Mathematics Teachers on the Chi-Square Statistic. Mathematics, 9(19), 2416. https://doi.org/10.3390/math9192416
Muñoz, J. y Velarde, J. (2000). Compendio de Epistemología. Editorial trotta. ISBN:84-8164-327-0.
Vera, O. (2019). Un elemento de significado en el contraste de hipótesis: La interpretación de los resultados. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.

RECONFIGURACIÓN DE LAS PRÁCTICAS DOCENTES EN EL CONTEXTO DE LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES Y SUS OPERACIONES: UN ANÁLISIS DESDE EL MODELO DE PONTE

Javier Vera Carvacho, Universidad de Santiago de Chile.

Resumen:

El objetivo de la investigación es caracterizar la reconfiguración de las prácticas docentes de cuatro profesores de un colegio de Quilicura respecto a la enseñanza de los números racionales y sus operaciones. Para ello, se desarrollará una secuencia de actividades integrando las prácticas colaborativas, reflexivas y el conocimiento didáctico de los profesores de matemática. Los sujetos de estudio corresponden a docentes de matemática de un colegio de Quilicura y el estudio se abordará mediante una metodología cualitativa, guiada por un modelo de investigación – acción, con un alcance exploratorio – descriptivo y un diseño no experimental, longitudinal, de panel. Para alcanzar el objetivo de la investigación se propone una estructura de trabajo subdividida en tres fases caracterizadas por: i) la planificación colaborativa y diseño de la secuencia a partir de las propias experiencias de los docentes, ii) la implementación de la secuencia en contextos reales de aula y, en paralelo, iii) la reflexión sobre las implementaciones. Los resultados que se esperan obtener decantan en que las acciones realizadas de manera conjunta, además de contribuir en la mejora de las prácticas docentes, facilite una transformación estructural en su enfoque de la enseñanza de los números racionales y, como resultado, potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: números racionales, formación docente, trabajo colaborativo, práctica reflexiva

PROBLEMÁTICA

Diversos autores (Peregrina et al., 2017; Busch, 2021; Naidoo y Harajee, 2021; Valle et al., 2021) concluyen que resulta difícil para los estudiantes el aprender los conceptos asociados a números racionales, ya sea por la cantidad de subconstructos diferentes que poseen, o bien, por el insuficiente dominio de los conocimientos previos necesarios.

Ahora bien, centrando la atención en las operaciones aritméticas y en las relaciones entre fracciones y decimales, Aguilar et al. (2022) señalan que existe una vasta cantidad de ejemplos que muestran las dificultades que experimentan los estudiantes al momento de operar números racionales, entre ellos: i) en la suma de fracciones, sumar numeradores y denominadores entre sí, es decir, uso del modelo lineal aditivo como algoritmo; ii) aplicar mal las propiedades de la suma y de la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación, en problemas y operaciones aritméticas; iii) no identifican el uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación.

Distintas fuentes (León, 2011; Fernández et al., 2013; Castaño y García, 2014; Ratnasari, 2018; Ríos-Cuesta y Aspirilla-Mena, 2022) afirman que los estudiantes cometen errores que sugieren una falta de comprensión sobre cómo resolver operaciones que implican sumar, restar, multiplicar o dividir entre fracciones. Estos errores son:

1. **Sumar y restar fracciones como si fueran números enteros:** Los estudiantes suman numerador con numerador y denominador con denominador sin considerar las reglas adecuadas para estas operaciones.
2. **Dificultad con fracciones de diferente denominador:** Los estudiantes presentan dificultad en el cálculo del mínimo común múltiplo, confusión al trabajar con fracciones equivalentes y simplificación de fracciones.
3. **Inercia en la forma de operar:** Los estudiantes tienden a aplicar las mismas reglas que utilizan para sumar números naturales/enteros y a memorizar reglas sin comprender el razonamiento detrás de las operaciones con fracciones.

A nivel nacional, la Agencia de la Calidad de la Educación (2018) destaca dentro de los errores más comunes al operar números racionales corresponde a la comprensión y a la operatoria entre fracciones y números decimales.

Un caso de lo anterior se vivencia en un colegio de la comuna de Quilicura evidenciado en el diagnóstico integral de aprendizajes (DIA) intermedio, el cual da cuenta que las preguntas orientadas a las operaciones entre números racionales resultan ser más desafiantes para los estudiantes, pues cuentan con un porcentaje menor de logro al establecido por el manual de evaluación de dicho establecimiento (<80% de logro). Por consiguiente, y para determinar los principales problemas a nivel de rendimiento y logro de objetivos de aprendizaje, se realizó una reunión grupal con docentes en la que se concluye que uno de los problemas son las pocas instancias disponibles y destinadas para el trabajo colaborativo y la reflexión sobre la práctica pedagógica.

Investigaciones previas (Franco-Mariscal et al., 2021; Loes y An, 2021; Simónovic, 2021; Almeida y Bastos, 2023), han mostrado que existen diferentes beneficios para los profesores al utilizar el trabajo colaborativo en su enseñanza. Por otra parte, la reflexión sobre la práctica docente, entendida como un proceso de análisis y evaluación crítica de la propia práctica, es fundamental para el desarrollo profesional continuo (Burgos y Céspedes, 2021; Simónovic, 2021). Lo anterior refuerza dos ideas centrales a trabajar: i) estudiar los efectos que provocan el desarrollo del trabajo colaborativo en conjunto con su respectiva reflexión disciplinar por parte de los docentes de matemática; ii) abordar la preocupación emergente por la formación continua de los profesores de matemática.

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación tiene por objetivo general caracterizar la reconfiguración de las prácticas docentes de cuatro profesores de un colegio de Quilicura respecto a la enseñanza de los números racionales y sus operaciones, cuando se desarrolla una secuencia de actividades integrando las prácticas colaborativas, reflexivas y el conocimiento didáctico de las y los profesores de matemática.

MODELO DE FORMACIÓN PARA EL DESARROLLO PROFESIONAL Y DIRECTIVO

El desarrollo profesional docente como el proceso formativo, establecido como un derecho, cuyo ejercicio enriquece las capacidades docentes y directivas, logra una comprensión más compleja de la profesión, el desarrollo o actualización de las habilidades para pensar, planificar y actuar con niños, jóvenes y profesores en cada una de las etapas y aspectos de la vida profesional (CPEIP, 2017)

El modelo publicado por CPEIP (2017) presenta un marco conceptual, en el cual se definen diferentes aspectos que influyen en la formación de docentes y directivos y a la vez caracteriza los principios orientadores del modelo de formación para el desarrollo docente. En concreto, los principios orientadores para el desarrollo profesional son: profesionalidad docente, autonomía profesional, responsabilidad ética y profesional; desarrollo continuo, innovación, investigación y reflexión pedagógica; colaboración, equidad, participación, compromiso con la comunidad y, finalmente, apoyo a la labor docente.

CPEIP (2021) define la formación local como el conjunto de acciones de desarrollo profesional docente que ocurren dentro de la escuela o liceo, a través de la implementación de estrategias de trabajo colaborativo y/o de retroalimentación de prácticas pedagógicas, con el objetivo de fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje. Este tipo de formación promueve el desarrollo de dos áreas esenciales: el trabajo colaborativo y la retroalimentación de las prácticas pedagógica.

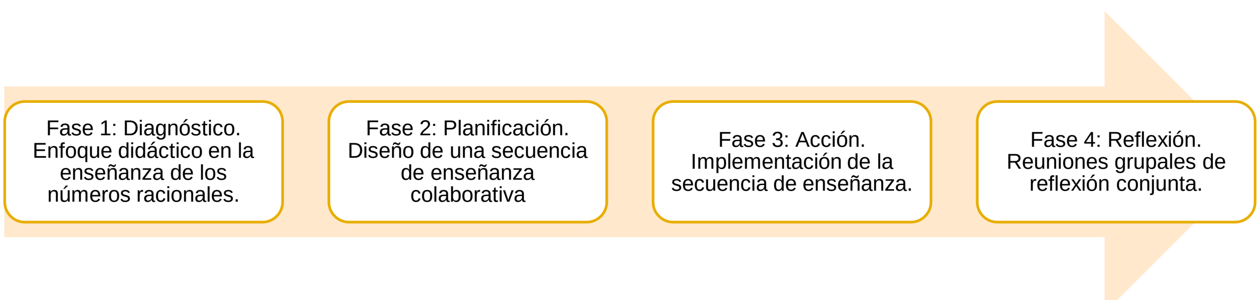
DISEÑO METODOLÓGICO

La investigación tiene una metodología cualitativa guiado por un modelo de investigación – acción cooperativo (Berrocal y Expósito, s.f; Saltos-Rodríguez, Loor-Salmon y Palma-Villavicencio, 2018), el cual se caracteriza una actividad que se lleva a cabo por profesores e investigadores para indagar en equipo, compartiendo la responsabilidad en la toma de decisiones y en las tareas de investigación, aquellas cuestiones y problemas que se dan en el marco escolar, logrando como resultado de dicha actividad reflexiva, una comprensión mayor de la práctica educativa, la mejora de la misma y el desarrollo profesional de los educadores.

La metodología de investigación – acción cuenta con cuatro fases principales (Berrocal y Expósito, s.f; CPEIP, 2022) las cuales son caracterizadas por: i) diagnóstico y formulación del problema, explicitar creencias, definir preguntas de investigación y recoger y analizar datos; ii) planificar, definir y desarrollar un plan de acción en el que el equipo proponga cambios concretos a realizar en sus prácticas pedagógicas; iii) implementar y evaluar las acciones recogiendo evidencia para monitorear el impacto del plan de acción; iv) reflexionar, evaluar, interpretar y sacar conclusiones con la finalidad de responder a si al implementar el plan de acción se producen los cambios deseados.

En ese sentido, para fines de esta investigación la figura 2 presenta la relación entre las fases de la metodología con los elementos que buscan cumplir el objetivo general:

Figura 2. Fases de la metodología de investigación – acción (elaboración propia)



El alcance de la investigación es exploratorio – descriptivo y con un diseño no experimental, longitudinal, de panel (Hernández et al., 2014). En concreto, para alcanzar el objetivo de la investigación, se propone estructurar las fases de la metodología de investigación en las siguientes actividades:

- **Hito Nº1 – Diagnóstico inicial:** Se entrevista a cada docente participante de la investigación de forma individual con el objetivo de conocer sus percepciones respecto a su experiencia, conocimiento didáctico, el trabajo colaborativo y práctica reflexiva a modo de estructurar un esquema didáctico de su práctica docente.

- **Fase 1 – Planificación:** Se realizan cuatro reuniones grupales y grabadas para realizar la toma de decisiones respecto al contenido a abordar, el material a utilizar y la elaboración de los dispositivos a implementar (guías y ticket de salida).
- **Fase 2 – Implementación:** Los docentes implementan las actividades diseñadas, y distribuidas en cuatro sesiones, en base a la planificación realizada. Los dispositivos que permiten recoger información corresponden a los ticket de salida, la grabación de la clase y un autorreporte docente previamente diseñado y validado. Esta fase se realiza de forma paralela a la Fase 3.
- **Fase 3 – Reflexión:** Se realizan cuatro reuniones grupales y grabadas para realizar la reflexión respecto de la implementación de las actividades. Se analizan los puntos críticos de la clase y se utilizan para la eventual reestructuración de la secuencia de actividades. Los dispositivos que permiten recoger información son preguntas orientadoras en la discusión, el autorreporte del docente y una rúbrica de observación de clase previamente diseñada y validada. El proceso paralelo de la fase 2 y fase 3 tienen por objetivo evidenciar el progreso hacia una reconfiguración de las prácticas docentes de las y los profesores participantes.
- **Hito Nº2 – Grupo focal:** Se realiza un grupo focal en conjunto con los participantes, cuyo objetivo está en discutir los aspectos abordados en el desarrollo de las actividades. Se busca contrastar lo evidenciado en el Hito Nº1 con respecto a las experiencias vividas en la fase 1, fase 2 y fase 3. El objetivo que se persigue es reafirmar que, por medio de la metodología utilizada, se evidenció una reconfiguración de las prácticas docentes de las y los profesores participantes.

REFLEXIONES FINALES

El trabajo colaborativo entre docentes se presenta como una oportunidad para que los futuros profesores interactúen, exploren posibles problemas pedagógicos y reciban retroalimentación inmediata sobre su desempeño (Parra-Urrea y Pino-Fan, 2022). Dado que el trabajo se encuentra en proceso de implementación, aún no se cuenta con conclusiones, pero a la fecha de las jornadas nacionales de educación matemática ya se tendrán los hallazgos que permitan argumentar que el desarrollo colaborativo de la secuencia didáctica para la enseñanza de los números racionales y sus operaciones, su implementación y su reflexión sobre la puesta en práctica conlleve a una mejoría en las prácticas docentes de las y los docentes de matemática del establecimiento de la comuna de Quilicura.

Referencias

Agencia de Calidad de la Educación. (2018). Aprendiendo de los errores: Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas SIMCE y sus implicancias pedagógicas. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/14941/Aprendiendo_de_los_errores_Web_24may.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Aguilar, D., Sánchez, J., y Salgado, G. (2022). Aprendizaje de números racionales a partir de representaciones semióticas. Revista Chilena de Educación Matemática, 14(2), 69-99. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i2.102

Almeida, C., y Bastos, C. (2023). Reflections on the Documentational Work of Two Teachers in a Remote Collaborative Environment for Compound Interest Teaching. Revista de Ensino de Ciência e Matemática, 25(2), 98-123. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7546

Berrocal, E., Expósito, J. (s.f). Unidad 3. El proceso de investigación educativa II: Investigación – acción. https://www.ugr.es/~emiliobl/Emilio_Berrocal_de_Luna/Master_files/UNIDAD%202%20Investigacio%CC%81n%20-%20Accio%CC%81n.pdf

Burgos, M., y Céspedes, M. (2021). Suitability criteria used by future primary school teachers in the assessment of math educational videos. Uniciencia, 35(2), 1-17. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.19

Bush, J. (2021). Software-based intervention with digital manipulatives to support student conceptual understandings of fractions. British journal of educational technology, 52(6), 2299-2318. https://doi.org/10.1111/bjet.13139

Castaño-Arbeláez, N., y García-Castro, L.I. (2014). Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria. Magistro, 8(16), 123-158. https://doi.org/10.15332/s2011-8643.2014.0016.05

CPEIP. (2017). CAF. Modelo de formación para el desarrollo profesional y directivo. https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2018/03/modelo_formacion_completo.pdf

CPEIP. (2021). Orientaciones para el diseño del plan local de formación para el desarrollo profesional docente. https://cpeip.cl/wp-content/uploads/2021/09/ORIENTACIONES_DISENO_PLAN_LOCAL_DPD.pdf

CPEIP. (2022). CPEIP. Investigación acción. Serie trabajo colaborativo para el desarrollo profesional docente. https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2022/03/Investigacion_accion-1.pdf

Fernández, Y., Riffo, J., y Sandoval, L. (2013). Errores más frecuentes de los estudiantes en el desarrollo de la unidad de fracciones en un 5º año básico [Tesis de licenciatura, Universidad del Bio Bio]. Repositorio Digital Sistema de Bibliotecas Universidad del Bio-Bio.

http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/1845/1/Fernandez_Jara_Yimmy.pdf

Franco-Mariscal, AJ., Cebrián-Robles, D., y Rodríguez-Losada, N. (2023). Impact of a Training Programme on the e-rubric Evaluation of Gamification Resources with Pre-Service Secondary School Science Teachers. Tech Know Learn, 28, 769–802. https://doi.org/10.1007/s10758-021-09588-1

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). Metodología de la investigación. Mc Graw Hill

León, G. (2011). Unidad Didáctica: Fracciones [Tesis de maestría, Universidad de Granada]. Repositorio DIGIBUG. https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Gloria_Leon.pdf

Loes, C., y An, B. (2021). Collaborative Learning and Need for Cognition: Considering the Mediating Role of Deep Approaches to Learning. The Review of Higher Education, 45(2), 149-179. https://www.researchgate.net/publication/357336749

Naidoo, J., y Hajaree, S. (2021). Exploring the perceptions of Grade 5 learners about the use of videos and PowerPoint presentations when learning fractions in mathematics. South African Journal of Childhood Education, 11(1), a846. https://doi.org/10.4102/sajce.v11i1.846

Parra-Urrea, Y., y Pino-Fan, L. (2022). Proposal to Systematize the Reflection and Assessment of the Teacher's Practice on the Teaching of Functions. Mathematics 2022, 10(18), 3330. https://doi.org/10.3390/math10183330

Peregrina, I., Bothelo da Costa, E., y Vargas, B. (2017) The comprehension of numerical relationships in the learning of fractions: a comparative study with Brazilian and Portuguese children. Revista brasileira de estudos pedagógicos, 98(249), 251-269. https://doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.98i249.3043

Ratnasari (2018). Errores e ideas erróneas de los estudiantes sobre las operaciones de fracciones en una escuela primaria de Indonesia. Revista de Educación Matemática del Sudeste Asiático, 8(1), 83-97.

Ríos-Cuesta, W., y Aspirilla-Mena, O. (2022). Errores asociados a operaciones aditivas con fracciones: Un estudio exploratorio con estudiantes de secundaria. Revista Boletín REDIPE, 11(11), 86-98. https://doi.org/10.36260/rbr.v11i11.1909

Simónovic, N. (2021). Teachers' key competencies for innovative teaching. International Journal of Cognitive Research in Science, Engineering and Education (IJCRSEE), 9(3), 331-345. https://ijcrsee.com/index.php/ijcrsee/article/view/1067

Saltos-Rodríguez, L., Loor-Salmon, L., y Palma-Villavicencio, M. (2018). La investigación acción como una estrategia pedagógica de relación entre lo académico y lo social. Polo del conocimiento, 3(12), 149.159. https://doi.org/10.23857/pc.v3i12.822

Valle, W., Álvarez, J., y Camacho, C. (2021). La enseñanza de los números fraccionarios en sexto grado. Mendive, 19(2), 570-577. https://mendive.upr.edu.cu/index.php/MendiveUPR/article/view/2062

DESAFÍOS EN LA ENSEÑANZA DE INFERENCIA ESTADÍSTICA EN CHILE: UN ESTUDIO DE METODOLOGÍAS NO TRADICIONALES

Isadora Navarro Pérez, Universidad de Valparaíso

Carlos Henríquez Roldán, Universidad de Valparaíso

Felipe Ruz Ángel, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

En las últimas décadas, la estadística ha cobrado cada vez más relevancia en diversos campos, aumentando la necesidad de fortalecer las habilidades estadísticas en la sociedad. En Chile, la incorporación de la inferencia estadística al programa de esutdio de Matemática, presenta un desafío importante para los profesores de dicha asignatura. La Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2020-2021 reveló que solo un tercio de los profesores domina esta área, lo que destaca la necesidad de una formación estadística más robusta para mejorar el desempeño pedagógico. Esta investigación tiene como objetivo analizar el conocimiento del contenido estadístico de los profesores de educación media mediante un programa de desarrollo profesional basado en metodologías no tradicionales y simulación computacional. Se utilizará la Investigación Basada en el Diseño (IBD) para adaptar, implementar y evaluar módulos de enseñanza que cubran conceptos clave de inferencia estadística. Se espera que las sesiones propuestas sirvan como modelos de buenas prácticas para los docentes, facilitando la enseñanza de estadística mediante metodologías innovadoras y simulaciones. Además, se identificarán dificultades potenciales que los estudiantes puedan enfrentar al aprender inferencia estadística, proporcionando directrices valiosas para la mejora continua del proceso educativo. Esta investigación contribuirá a la formación de docentes y a la calidad de la enseñanza estadística en la educación media.

[inferencia estadística, formación docente, metodologías no tradicionales, simulación computacional]

INTRODUCCIÓN

La estadística ha adquirido una creciente importancia en nuestra sociedad, facilitando la toma de decisiones informadas y el análisis de datos (Ocaña-Riola, 2017). Esta relevancia se refleja en la actualización de los programas educativos en diversos países. En Estados Unidos, los

"Lineamientos para la Enseñanza y Evaluación en Educación Estadística" *(GAISE II)* promueven la alfabetización estadística a través de un enfoque integral que incluye el pensamiento probabilístico y el uso de tecnología (Bargagliotti et al., 2021). Chile, siguiendo esta tendencia, ha incorporado contenidos de estadística y probabilidad en sus currículos de educación básica y media, con un énfasis particular en la inferencia estadística.

A pesar de estos avances, se observa una preocupación significativa en la preparación de los profesores de matemáticas para enseñar inferencia estadística. Investigaciones, como la de Ruz et al. (2021), muestran que, aunque la mayoría de los futuros docentes han completado cursos de estadística, su dominio del contenido es deficiente. La Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente (END-FID) de 2020 y 2021 revela que la competencia en inferencia estadística es baja, con porcentajes de respuestas correctas de solo 35% y 34%, respectivamente.

El déficit en la formación estadística de los docentes resalta la necesidad de actualizar y reforzar su conocimiento disciplinar mediante estrategias innovadoras. Diversos enfoques han conceptualizado la estadística como un proceso dinámico y estructurado. Entre ellos destacan el ciclo PPDAC (Wild & Pfannkuch, 1999), el modelo de enseñanza de estadística del GAISE II (Bargagliotti et al., 2021) y el Proceso de Investigación Estadística (PIE) desarrollado por Tintle et al. (2016), siendo este último el marco utilizado en este estudio.

El propósito de la presente investigación es analizar cómo un programa de desarrollo profesional, diseñado con metodologías no tradicionales que conciben la estadística como un proceso, y apoyado en simulación computacional, puede fortalecer el conocimiento estadístico de los profesores de matemáticas de educación media en Chile. Este enfoque busca, además, proporcionar herramientas prácticas e innovadoras para optimizar la enseñanza de la inferencia estadística, destacando el papel central de los programas de desarrollo profesional en la actualización y consolidación de las competencias docentes, lo que resulta fundamental para elevar la calidad educativa en este ámbito clave.

METODOLOGÍA

Enfoque metodológico

La investigación se clasifica como un estudio de tipo mixto con un alcance exploratorio y se enmarca específicamente en la categoría de Investigación Basada en el Diseño (IBD). Según Easterday et al. (2014), este tipo de investigación se divide en cuatro etapas principales: análisis preliminar del problema, diseño de una solución, implementación de la solución y evaluación de la solución. En el presente estudio, se abordaron las tres últimas etapas: se adaptaron sesiones previamente aplicadas, se implementaron en un entorno real y se evaluaron los resultados de dicha implementación.

Participantes y contexto

El estudio se realizó a través de un diplomado en educación estadística dirigido a profesores de matemáticas de enseñanza media. Participaron ocho docentes en total. El diplomado incluyó un primer módulo enfocado en el conocimiento del contenido para la enseñanza de la estadística. Este módulo consistió en cuatro sesiones que explicaron el PIE como marco referencial y su aplicación a distintos tipos de variables. El objetivo era que los profesores no solo comprendieran el contenido, sino que también adquirieran habilidades para enseñar el proceso a sus estudiantes.

Instrumentos

Para evaluar el impacto del diplomado, se utilizaron dos tipos principales de instrumentos:

- Evaluación Diagnóstica: Incluyó una pregunta abierta sobre la comprensión de la inferencia estadística ("¿Qué entiende por inferencia estadística?") y 33 preguntas de selección múltiple para evaluar el conocimiento previo de los docentes.
- Evaluaciones Tipo Tarea: Se realizaron después de cada sesión para evaluar la asimilación del contenido y la aplicación práctica de los conceptos enseñados.

RESULTADOS

Evaluación diagnóstica

La evaluación diagnóstica inicial reveló que los docentes participantes presentaban bajos porcentajes de logro en los temas relacionados con inferencia estadística. En particular, se obtuvo un 42,8% de respuestas correctas en intervalos de confianza y un 42,5% en simulación. Además, la capacidad de explicar el concepto de inferencia estadística en una pregunta abierta fue limitada, con solo 3 de los 8 participantes logrando proporcionar una explicación adecuada.

Principales hallazgos para cada etapa del PIE

En la aplicación del PIE se observaron diferencias en el desempeño en las diversas fases. En la primera etapa, referente al planteamiento de preguntas de investigación, los docentes lograron formular preguntas de investigación pertinentes y claras. Sin embargo, en la segunda etapa, relacionada con el planteamiento de las hipótesis a contrastar, se observaron dificultades. Los participantes a menudo tuvieron problemas para expresar hipótesis en símbolos matemáticos, lo que indica una brecha en la conversión de descripciones verbales a representaciones simbólicas. Durante la tercera etapa, que involucra el análisis descriptivo y la evaluación de la conjetura de investigación, los docentes no encontraron grandes dificultades para realizar análisis descriptivos de los datos, pero sí enfrentaron problemas significativos para evaluar si la evidencia apoyaba o refutaba las conjeturas, lo que sugiere una comprensión deficiente del concepto de conjetura. En la cuarta etapa, dedicada a la realización de inferencias con simuladores (applets), se presentaron desafíos iniciales en el ingreso de los datos. En la quinta etapa, que implica responder a la pregunta de investigación, los docentes lograron realizar esta tarea correctamente, sin embargo, en la sexta etapa, que es la revisión retrospectiva, se observó que los docentes enfrentaron dificultades para generalizar los resultados a la población debido a una falta de consideración sobre la aleatoriedad de la muestra, lo que afectó la validez de sus conclusiones.

Aspectos generales

Las evaluaciones tipo tarea realizadas durante el diplomado mostraron una mejora progresiva en el desempeño de los docentes. A medida que avanzaba el programa, las calificaciones reflejaron una asimilación más efectiva de los conceptos y una aplicación más competente de los mismos.

DISCUSIÓN

El estudio sobre metodologías no tradicionales revela que el uso del PIE puede ser efectivo para diseñar clases que integren contenidos de estadística descriptiva, probabilidades e inferencia. Esta integración muestra un impacto positivo en el conocimiento estadístico de los docentes, evidenciando mejoras progresivas en su desempeño a lo largo del programa.

Entre los hallazgos principales, se destaca que los docentes lograron avances significativos en la formulación de preguntas de investigación y en el uso del PIE para estructurar procesos estadísticos. Sin embargo, enfrentaron dificultades en etapas críticas como la formulación de hipótesis y la generalización de resultados debido a limitaciones en el manejo de conceptos fundamentales como la aleatoriedad y la validez. Estos resultados subrayan la importancia de reforzar estas áreas en futuros programas de formación.

Asimismo, el enfoque metodológico del estudio cumplió con su objetivo de fortalecer el conocimiento estadístico de los profesores a través de herramientas prácticas e innovadoras. Las mejoras observadas en el uso de simuladores y en la comprensión del proceso estadístico reflejan que las metodologías no tradicionales no solo son viables, sino también efectivas para superar barreras en la enseñanza de la estadística.

Aunque se alcanzaron los objetivos propuestos, el estudio presenta limitaciones en cuanto a la generalización de resultados debido al tamaño y la composición de la muestra. Aun así, estos hallazgos ofrecen una base sólida para continuar investigando cómo estas metodologías pueden impactar el aprendizaje de los estudiantes.

Referencias

Bargagliotti, A., Arnold, P., & Franklin, C. (2021). GAISE II: Bringing Data into Classrooms. *Mathematics Teacher Learning And Teaching PK-12*, *114*(6), 424-435. https://doi.org/10.5951/mtlt.2020.0343

Easterday, M. W., Lewis, D. R., & Gerber, E. M. (2014). Design-Based Research Process: Problems, Phases, and Applications. *International Conference Of Learning Sciences*, *1*, 317-324. https://doi.org/10.22318/icls2014.317

Ocaña-Riola, R. (2017). La necesidad de convertir la Estadística en profesión regulada. *Estadística Española/Estadística Española*, *59*(194), 193-212. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6772451

Ruz, F., Chance, B., Medina, E., & Contreras, J. M. (2021). Content Knowledge And Attitudes Towards Stochastics And Its Teaching In Pre-Service Chilean Mathematics Teachers. *Statistics Education Research Journal*, *20*(1), 5. https://doi.org/10.52041/serj.v20i1.100

Tintle, N., Chance, B., Cobb, G., Rossman, A., Roy, S., Swanson, T., & VanderStoep, J. (2016). *Introduction to statistical investigations*. John Wiley & Sons.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-248. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

EL ROL DE LA MOTIVACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS MUJERES EN MATEMÁTICAS

Catalina Fernández Ibáñez, Camila Muñoz San Martín, Sebastián Orellana Muñoz, Javiera Riquelme Ancal, Jorge Miranda Ossandón

Universidad Católica de Temuco

Resumen:

El objetivo de la presente investigación es explorar el rol de la motivación en el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes mujeres de tercer año de enseñanza media, en la región de La Araucanía, basándonos en las Teorías de Expectativa-Valor y Autodeterminación. Se realizó un estudio exploratorio de carácter mixto en el que se contemplaron establecimientos municipales, particulares pagados y particulares subvencionados, empleando una encuesta con escala de tipo Likert y una entrevista en profundidad para la recolección de datos. A través de un análisis de clúster, se diferenciaron dos grupos de estudiantes: el clúster 1, con estudiantes con altos grados de percepción de autoeficacia, asignación de valor al aprendizaje

de la matemática y satisfacción de necesidades psicológicas básicas; versus el clúster 2, con estudiantes que muestran resultados deficientes en la mayoría de estos aspectos. Lo anterior se complementa con una diferencia significativa en el promedio de las estudiantes de cada clúster. Se reconocen, finalmente, los factores de expectativa, disfrute y competencia como potenciales influyentes en la motivación de las estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

Aprendizaje en matemática, motivación, brecha de aprendizaje matemático por sexo

Antecedentes

El rendimiento en matemáticas ha disminuido considerablemente en los últimos años, tanto a nivel internacional, según la prueba PISA aplicada a estudiantes de 15 años (Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD], 2023), como a nivel nacional en Chile, según los resultados del SIMCE en 2° medio (Agencia de Calidad de la Educación, 2024). Resulta relevante destacar que, en la región de la Araucanía, área de interés para este estudio, por su relevancia en nuestro contexto laboral como futuros docentes de matemática en educación media, los datos de SIMCE evidencian una brecha en el rendimiento de matemáticas según la variable sexo. Los resultados de ambas evaluaciones, particularmente las aplicadas el año 2023 a estudiantes de segundo nivel de enseñanza media, reflejan un desempeño inferior de las mujeres respecto del obtenido por los hombres.

Factores como la autopercepción, el interés, sentimiento de satisfacción y la ansiedad matemática, analizados desde un paradigma motivacional, se establecen como componentes influyentes en la brecha académica que existe entre ambos sexos (Milovanovic, 2020). Son estos elementos, incrementados por los estereotipos de género presentes en el entorno familiar y social (Msambwa et al., 2023), los que se asocian, además, a la falta de motivación de las mujeres hacia el aprendizaje de la matemática.

En virtud de lo expuesto, esta investigación se realizó con el objetivo de comprender el rol de la motivación en el aprendizaje de las matemáticas en las estudiantes de tercer año de enseñanza media, en la región de La Araucanía, desde las Teorías de Expectativa-Valor (EVT; Eccles y Wigfield, 2000) y Autodeterminación (SDT; Ryan y Deci, 2000). Se incorporaron ambos constructos teóricos en la investigación, dada su utilidad en el análisis de metas, creencias (respecto a actividades a realizar), rendimiento, esfuerzo y perseverancia; factores que, a su vez, se vinculan con la autopercepción, influenciada por experiencias previas y el entorno social.

Con el fin de dar respuesta a la pregunta de ¿cómo la motivación influye en el aprendizaje de las matemáticas en las estudiantes de tercero medio de la región de La Araucanía?, se plantean dos objetivos específicos: identificar los factores que influyen en la motivación de las mujeres hacia el aprendizaje de las matemáticas y analizar cómo lo hacen, en función del rendimiento académico de las estudiantes en la asignatura de matemáticas.

Metodología

Este estudio exploratorio, de carácter mixto, se centró en analizar el fenómeno de la motivación y el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de sexo femenino. Se empleó, en primer lugar, una encuesta que aborda afirmaciones relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje, así como sus consecuencias en el marco de su experiencia con la educación matemática escolar. Dicho instrumento incluía tres preguntas demográficas, además de otras 29 presentadas en una escala de tipo Likert de 1 a 6 (1: Muy en desacuerdo, y 6: Muy de acuerdo), siendo 18 relativas a la EVT, distribuidas según los conceptos de expectativa, valor y costo; y 11 a la SDT, clasificadas en base a las necesidades psicológicas básicas: autonomía, relación y competencia. La escala utilizada es una adaptación de un instrumento previamente validado, que ha mostrado características psicométricas adecuadas (Valenzuela et al., 2024).

En segundo lugar, se realizó una entrevista en profundidad voluntaria, en la que se abordaron temas como la implicancia del aprendizaje de las matemáticas y la relación de la estudiante con la disciplina. El tipo de muestreo es no probabilístico y por conveniencia, pues se tomó una muestra de la población que estaba disponible y al alcance.

A partir de estos datos se realizó un análisis de clúster, haciendo uso del programa RStudio, para identificar patrones que permitan relacionar elementos específicos de la EVT y SDT, con el aprendizaje de las matemáticas.

Resultados

El análisis de clúster arrojó la existencia de dos grupos, identificados como clúster 1 (43 estudiantes) y clúster 2 (145 estudiantes). La distribución de estos grupos en función de cada una de las variables no es normal, por lo que se usó la mediana como medida de tendencial central representativa. En este sentido, la prueba U de Mann-Whitney permitió reconocer si las diferencias entre las medianas de cada pregunta, clasificadas por clúster, era o no significativa.

A partir de esto se obtuvo que las estudiantes del primer clúster se caracterizan por sus altas percepciones de capacidad, su disposición a brindar tiempo y energía al aprendizaje, y una sensación de bajo costo de este, ya sea en cuanto a tiempo, esfuerzo o energía. También le brindan utilidad, por considerarlo fundamental en su formación personal y profesional. Igualmente, estas estudiantes declaran por satisfechas la totalidad de sus necesidades psicológicas básicas.

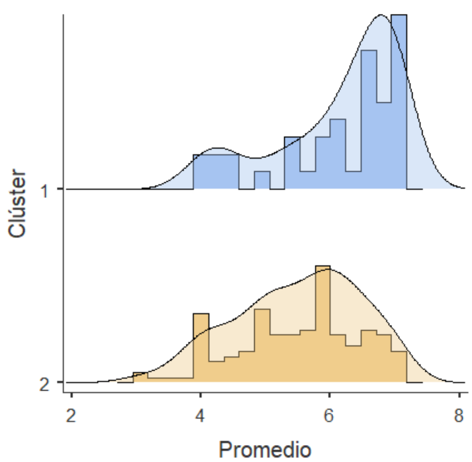
Por otra parte, las estudiantes del clúster 2 se caracterizan por poseer una percepción de autoeficacia intermedia, evidenciando un grado de inseguridad en cuanto a las propias capacidades para aprender matemáticas. Lo mismo sucede con el valor que le asignan a la asignatura, visualizándose un bajo nivel de disfrute respecto al aprendizaje de la misma, pese a que se reconoce su importancia y utilidad; lo anterior se puede derivar a lo demandante -tiempo, energía y trabajo- que puede ser dicha actividad. Finalmente, por medio de la entrevista, se observa que gran parte de las estudiantes pertenecientes al clúster 2 explicitan tener dificultades al momento de autorregularse y dedicarse al estudio de la materia, comentarios contrarios a los que se pueden visualizar en el apartado de autonomía de la encuesta.

En comparativa, las estudiantes pertenecientes al clúster 2 evidencian resultados significativamente más bajos en cuanto a percepción de autoeficacia, a la asignación de valor al aprendizaje de la matemática; que las estudiantes del primer clúster. Además, atribuyen un costo similar o superior a las tres dimensiones propuestas en la EVT: esfuerzo de la tarea, esfuerzo externo y pérdida de una alternativa valiosa. De igual manera, la satisfacción de las necesidades psicológicas básicas, en materia de la SDT, se muestra deficiente para las estudiantes del segundo clúster en comparación a las del primero.

Todo lo anterior se complementa con los promedios declarados por las estudiantes de cada grupo (figura 1). En este sentido, el gráfico evidencia que las estudiantes del clúster 1 tienen promedios más altos que las del clúster dos, con medianas de 6.5 y 5.6 respectivamente, significativamente diferentes según lo señalado por la prueba U de Mann-Whitney.

Figura 1

Histogramas de promedio por clúster



Discusión

A modo de síntesis, el aprendizaje de las matemáticas de las estudiantes de 3° medio, de la región de La Araucanía, estudiado en función del rendimiento académico, se ve determinado por dos agrupaciones, cuyas principales diferencias se enmarcan en la EVT, particularmente en la percepción de autoeficacia, el disfrute de la matemática y competencia.

Otro factor de relevancia es que la diferencia entre los promedios de cada grupo es significativa. Por tanto, es posible concluir que existe una relación positiva entre los factores motivacionales de la EVT, pues son los que evidencian una mayor variación entre cada grupo, y el desempeño académico.

Los resultados obtenidos se relacionan de forma positiva con lo expuesto por López (2024) en su trabajo de investigación en el que se concluye que existe un vínculo entre la motivación y el desempeño educativo en los estudiantes de educación secundaria, aunque resulta importante destacar que lo mencionado por dicho investigador corresponden a una visión general de la implicancia de la motivación, sin un análisis particular en función del sexo. Por otra parte, existen investigaciones tales como las de Valencia y Martínez (2023), cuyos resultados obtenidos son contrarios a los expuestos en la presente investigación.

Estas conclusiones están dirigidas a las y los profesionales de la educación, quienes podrán dar mayor énfasis a los factores que provocan esta desigualdad en el aprendizaje de la matemática y, de esta manera, contribuir a su erradicación. Por lo mismo, las proyecciones de esta investigación apuntan a la proposición de estrategias concretas, que permitan contrarrestar las deficiencias evidenciadas, con acciones como el aprendizaje invertido y la gamificación del aprendizaje.

Agradecimientos

La investigación fue realizada bajo el Proyecto FONDECYT N°11240073: *Factores motivacionales del cambio de enfoque en la evaluación de los aprendizajes en la formación inicial docente, expectativa y valor*.

Referencias bibliográficas

Agencia de Calidad de la Educación (2024). *Resultados Educativos 2023*. Agencia de Calidad de la Educación. https://s3.amazonaws.com/archivos.agenciaeducacion.cl/Entrega+Resultados+Nacionales+SImce+2023.pdf

Eccles, J. y Wigfield, A. (2000). Expectancy–Value Theory of Achievement Motivation. *Contemporary Educational Psychology*, *25*(1), 68-81. https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1015

López, E. (2024). *Motivación y rendimiento académico del área curricular de matemática en estudiantes de secundaria de la I.E. Virgen de la Merced-Sayán 2023* [Tesis para Optar a Grado de Licenciada Nivel Secundaria Especialidad: Matemática, Física e Informática]. Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión.

Milovanović, I. (2020). Math Anxiety, Math Achievement and Math Motivation in High School Students: Gender Effects. *Croatian Journal of Education*, *22*(1), 175-206. https://doi.org/10.15516/cje.v22i1.3372

Msambwa, M., Daniel, K., Lyanyu, C. y Fute, A. (2023). A systematic review of the factors affecting girls' participation in science, technology, engineering, and mathematics subjects. *Computer Applications in Engineering Education*, *32*(2). https://doi.org/10.1002/cae.22707

OECD (2023). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education.* OECD. https://doi.org/10.1787/53f23881-en

Ryan, R. y Deci, E. (2000). Self-Determination Theory and the Facilitation of Intrinsic Motivation, Social Development, and Well-Being. *American Psychologist*, *55*(1), 68-78. https://doi.org/10.1037/0003-066X.55.1.68

Valencia, A. y Martínez, A. (2023). Relación entre las experiencias óptimas, motivación y rendimiento académico de los Estudiantes de Bachillerato. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, *7*(2), 4340-4365. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i2.5647

Valenzuela, J., Miranda, J., Muñoz, C., Precht, A., Del Valle, M., & Vergaño, J. (2024). Learning-oriented motivation: Examining the impact of teaching practices with motivational potential. *PLOS ONE*, *19*(2), e0297877. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0297877

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS CON PERSPECTIVA DE GÉNERO EN MATEMÁTICAS

Makarena Paz Vidal Delquen, Universidad de Los Lagos

Ana Milena Mujica-Stach, Universidad de Los Lagos

Karina Estefany Ebner Araya, Universidad de Los Lagos

Verónica Yuliana Vidal Barrientos, Universidad de Los Lagos

Abstract:

En Chile, la incorporación de la perspectiva de género en las instituciones educativas ha cobrado relevancia en las últimas décadas, especialmente desde los años 2000. Las políticas y programas educativos implementados buscan promover la igualdad de género y prevenir la violencia de género en las escuelas (Ministerio de Educación, 2017). La Guía para la inclusión del enfoque de género en el PME-EP (Ministerio de Educación, 2024) destaca la educación parvularia como una etapa importante para fomentar la igualdad y el respeto desde temprana edad.

Por lo tanto, el objetivo del estudio es indagar si las educadoras de párvulos en la ciudad de Osorno implementan estrategias didácticas con perspectiva de género en la enseñanza de matemáticas en educación parvularia.

Cabe destacar que, adoptar enfoques pedagógicos inclusivos desde una edad temprana es esencial para garantizar el éxito de todo el estudiantado. La percepción errónea de que las matemáticas son solo para niños puede afectar la confianza y el interés de las niñas en esta materia. La educación parvularia es un ámbito privilegiado para intervenir y generar cambios significativos (Del Ríos, 2023). Este estudio contribuirá a entender mejor las prácticas actuales y a diseñar estrategias más efectivas para la inclusión de género en la enseñanza de matemáticas desde la primera infancia.

Palabra clave: educación parvularia, recursos didácticos, estrategias didácticas, perspectiva de género, inclusión.

INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas, el sistema educativo chileno ha trabajado para integrar la perspectiva de género y garantizar la igualdad de oportunidades. Sin embargo, en asignaturas como matemáticas, se observan desafíos persistentes. Diversos estudios indican que los estereotipos de género afectan tanto la confianza como el rendimiento de niñas en matemáticas desde una edad temprana (Ministerio de Educación, 2017). Esta investigación busca conocer si las educadoras de párvulos en Osorno aplican estrategias de enseñanza inclusivas en matemáticas, contribuyendo así a reducir la brecha de género en esta área desde las primeras etapas educativas

ELEMENTOS TEÓRICOS O CONCEPTUALES

El marco conceptual de este estudio se basa en la teoría constructivista y el enfoque de género. Según el constructivismo, los niños construyen activamente su conocimiento a través de la exploración y el juego, lo que resulta en un aprendizaje significativo (Sánchez, 2020). Las políticas chilenas, como la Ley de Inclusión Escolar N° 20845, promueven espacios de aprendizaje libres de discriminación, alentando la aplicación de métodos didácticos que desafíen estereotipos y roles de género predefinidos. Estudios recientes han mostrado que, desde los cinco años, los niños y niñas ya poseen creencias sobre las matemáticas que impactan sus actitudes y rendimiento en esta disciplina (Del Río, 2023).

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

La investigación utiliza un enfoque cualitativo con un diseño exploratorio-descriptivo, que permite comprender en profundidad las experiencias y prácticas de las educadoras de párvulos respecto a la inclusión de género en la enseñanza de matemáticas. El estudio se desarrolla en dos centros educativos de la ciudad de Osorno, seleccionados por su representatividad dentro del sistema educativo municipal. Los sujetos de estudio son 6 educadoras de párvulos de los niveles de transición seleccionadas a conveniencia, a este grupo de educadoras se les proporciono el consentimiento informado.

Las técnicas de recolección de datos incluyen entrevistas semiestructuradas y observación directa. Las entrevistas constan de 10 preguntas diseñadas para explorar cómo las educadoras de párvulos implementan estrategias didácticas con perspectiva de género en matemáticas, así como los desafíos y oportunidades que enfrentan en este proceso. La observación directa se centra en registrar las interacciones entre las educadoras y el estudiantado durante las actividades matemáticas, con el objetivo de identificar prácticas inclusivas y posibles sesgos de género.

El análisis de los datos se realiza mediante codificación temática, lo que permite identificar patrones en las respuestas de las educadoras y en las observaciones en las salas. Se utiliza la triangulación para garantizar la validez de los resultados, comparando los hallazgos de las entrevistas con lo observado en las salas.

RESULTADOS PRELIMINARES

Los datos preliminares revelan que, aunque las educadoras son conscientes de la importancia de una educación inclusiva y han participado en capacitaciones, enfrentan diversas barreras para implementar efectivamente estrategias didácticas con perspectiva de género. La falta de formación específica y de materiales didácticos adecuados son limitantes significativas.

En las observaciones se detectaron prácticas constructivistas en las que los estudiantes exploran conceptos matemáticos mediante el juego, pero también una tendencia a brindar más apoyo a los niños durante actividades complejas, lo cual refuerza el estereotipo de que las matemáticas son un área masculina. Aunque algunas educadoras intentan desafiar estos estereotipos, estas acciones son esporádicas y dependen de la motivación personal de cada educadora

En cuanto a las prácticas en las salas de clase, se observa que las educadoras tienden a utilizar enfoques constructivistas, promoviendo actividades que permiten al estudiantado explorar conceptos matemáticos a través del juego y la manipulación de objetos. Sin embargo, la retroalimentación diferenciada fue un tema recurrente, las educadoras brindan más atención y apoyo a los varones en actividades matemáticas complejas, lo que refuerza la idea de que las matemáticas son un área más masculina.

Las observaciones también destacan algunos esfuerzos por parte de las educadoras de párvulos para desafiar los estereotipos de género. Estas iniciativas no son sistemáticas y dependen en gran medida de la experiencia y las motivaciones personales de cada educadora.

Otro hallazgo importante es la falta de materiales educativos que promuevan la equidad de género en las matemáticas. Las educadoras de párvulos expresan que los recursos disponibles no suelen reflejar modelos de rol no estereotipados, lo que dificulta la integración de una perspectiva de género en las actividades diarias.

REFLEXIÓN FINAL

Los hallazgos preliminares de este estudio sugieren que, aunque existe una conciencia creciente sobre la importancia de la inclusión de género en la enseñanza de matemáticas, persisten barreras significativas que impiden su implementación efectiva. La falta de formación, actualización o capacitación y la escasez de materiales didácticos inclusivos son dos de los principales desafíos que enfrentan las educadoras de párvulos. Sin embargo, las estrategias pedagógicas observadas, como el uso de actividades colaborativas y el fomento de un ambiente de respeto, representan pasos en la dirección correcta.

Es necesario que las instituciones educativas brinden un mayor apoyo en términos de formación continua y provisión de recursos didácticos inclusivos. Asimismo, es primordial desarrollar políticas que incentiven la aplicación sistemática de prácticas inclusivas en las salas de clase, garantizando que todo el estudiantado es, independientemente de su género, tengan acceso a oportunidades equitativas de aprendizaje.

REFERENCIAS

Del Rio. M. (2023, 09 de marzo). Matemática y Género: La educación parvularia es el lugar privilegiado para intervenir y generar los cambios necesarios. https://www.udp.cl/m-francisca-del-rio-la-educacion-parvularia-es-el-lugar-privilegiado-para-intervenir-y-generar-los-cambios-necesarios/

Ley 20.845 de Inclusión Escolar que Regula la Admisión de los y las Estudiantes. (2015, 29 de mayo). Biblioteca del Congreso Nacional de Chile.

Ministerio de Educación de Chile. (2017). Unidad de Equidad de Género. Cartilla de la Unidad de Equidad de Género.

Sánchez, M. (2020). Matemáticas en la educación parvularia: Un enfoque constructivista. Revista de Educación, 16(1), 1-15.

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS CON PERSPECTIVA DE GÉNERO EN MATEMÁTICAS

Makarena Paz Vidal Delquen, Universidad de Los Lagos

Ana Milena Mujica-Stach, Universidad de Los Lagos

Karina Estefany Ebner Araya, Universidad de Los Lagos

Verónica Yuliana Vidal Barrientos, Universidad de Los Lagos

Abstract:

En Chile, la incorporación de la perspectiva de género en las instituciones educativas ha cobrado relevancia en las últimas décadas, especialmente desde los años 2000. Las políticas y programas educativos implementados buscan promover la igualdad de género y prevenir la violencia de género en las escuelas (Ministerio de Educación, 2017). La Guía para la inclusión del enfoque de género en el PME-EP (Ministerio de Educación, 2024) destaca la educación parvularia como una etapa importante para fomentar la igualdad y el respeto desde temprana edad.

Por lo tanto, el objetivo del estudio es indagar si las educadoras de párvulos en la ciudad de Osorno implementan estrategias didácticas con perspectiva de género en la enseñanza de matemáticas en educación parvularia.

Cabe destacar que, adoptar enfoques pedagógicos inclusivos desde una edad temprana es esencial para garantizar el éxito de todo el estudiantado. La percepción errónea de que las matemáticas son solo para niños puede afectar la confianza y el interés de las niñas en esta materia. La educación parvularia es un ámbito privilegiado para intervenir y generar cambios significativos (Del Ríos, 2023). Este estudio contribuirá a entender mejor las prácticas actuales y a diseñar estrategias más efectivas para la inclusión de género en la enseñanza de matemáticas desde la primera infancia.

Palabra clave: educación parvularia, recursos didácticos, estrategias didácticas, perspectiva de género, inclusión.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, Chile ha hecho esfuerzos significativos para integrar la perspectiva de género en la educación a fin de garantizar la igualdad de oportunidades entre niñas y niños. A pesar de estos avances, persisten desafíos, especialmente en áreas tradicionalmente vistas como masculinas, como las matemáticas. Los estudios muestran que las niñas tienden a obtener resultados inferiores a los niños en esta disciplina, influenciadas por estereotipos de género que comienzan a formarse desde la primera infancia (Ministerio de Educación de Chile, 2017).

Esta ponencia tiene como objetivo indagar si las educadoras de párvulos en la ciudad de Osorno implementan estrategias didácticas con perspectiva de género en la enseñanza de matemáticas en educación parvularia., contribuyendo al cierre de la brecha de género desde las primeras etapas educativas.

ELEMENTOS TEÓRICOS O CONCEPTUALES

El marco conceptual de esta investigación se basa en la importancia de la inclusión de la perspectiva de género desde la primera infancia. Las políticas chilenas, como la Ley de Inclusión Escolar N° 20845 (2015), han buscado transformar las escuelas en espacios inclusivos y libres de discriminación. Además, estudios como los de Del Río (2023) y Martínez et al. (2022) han mostrado que los estereotipos de género asociados a las matemáticas se consolidan desde temprana edad, afectando la confianza y el rendimiento de las niñas. Según Del Río (2023), desde tan temprano como el nivel de transición (alrededor de los 5 años), los niñas y niños ya desarrollan creencias sobre las matemáticas como una disciplina más adecuada para los varones, lo que refuerza una desmotivación progresiva en las niñas.

Otro elemento teórico clave es la teoría del constructivismo en la enseñanza de las matemáticas. Según Sánchez (2020), los enfoques constructivistas en la educación parvularia promueven un aprendizaje significativo y la construcción activa del conocimiento por parte de los niñas y niños. Este enfoque es esencial para eliminar los estereotipos de género, ya que permite que todo el estudiantado explore sus capacidades sin las limitaciones de roles predefinidos.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

La investigación utiliza un enfoque cualitativo con un diseño exploratorio-descriptivo, que permite comprender en profundidad las experiencias y prácticas de las educadoras de párvulos respecto a la inclusión de género en la enseñanza de matemáticas. El estudio se desarrolla en dos centros educativos de la ciudad de Osorno, seleccionados por su representatividad dentro del sistema educativo municipal. Los sujetos de estudio son 6 educadoras de párvulos de los niveles de transición.

Las técnicas de recolección de datos incluyen entrevistas semiestructuradas y observación directa. Las entrevistas constan de 10 preguntas diseñadas para explorar cómo las educadoras de párvulos implementan estrategias didácticas con perspectiva de género en matemáticas, así como los desafíos y oportunidades que enfrentan en este proceso. La observación directa se centra en registrar las interacciones entre las educadoras y el estudiantado durante las actividades matemáticas, con el objetivo de identificar prácticas inclusivas y posibles sesgos de género.

El análisis de los datos se realiza mediante codificación temática, lo que permite identificar patrones en las respuestas de las educadoras y en las observaciones en las salas. Se utiliza la triangulación para garantizar la validez de los resultados, comparando los hallazgos de las entrevistas con lo observado en las salas.

RESULTADOS PRELIMINARES

Los resultados preliminares revelan que las educadoras de párvulos están conscientes de la necesidad de incluir la perspectiva de género en sus prácticas pedagógicas, pero enfrentan diversas barreras. Estas educadoras señalan que la falta de formación específica en género limita su capacidad para implementar estrategias efectivas. Aunque han participado en algunos cursos de capacitación, estos no siempre abordan de manera adecuada la relación entre género y enseñanza de matemáticas.

En cuanto a las prácticas en las salas de clase, se observa que las educadoras tienden a utilizar enfoques constructivistas, promoviendo actividades que permiten al estudiantado explorar conceptos matemáticos a través del juego y la manipulación de objetos. Sin embargo, la retroalimentación diferenciada fue un tema recurrente, las educadoras brindan más atención y apoyo a los varones en actividades matemáticas complejas, lo que refuerza la idea de que las matemáticas son un área más masculina.

Las observaciones también destacan algunos esfuerzos por parte de las educadoras de párvulos para desafiar los estereotipos de género. Estas iniciativas no son sistemáticas y dependen en gran medida de la experiencia y las motivaciones personales de cada educadora.

Otro hallazgo importante es la falta de materiales educativos que promuevan la equidad de género en las matemáticas. Las educadoras de párvulos expresan que los recursos disponibles no suelen reflejar modelos de rol no estereotipados, lo que dificulta la integración de una perspectiva de género en las actividades diarias.

REFLEXIÓN FINAL

Los hallazgos preliminares de este estudio sugieren que, aunque existe una conciencia creciente sobre la importancia de la inclusión de género en la enseñanza de matemáticas, persisten barreras significativas que impiden su implementación efectiva. La falta de formación, actualización o capacitación y la escasez de materiales didácticos inclusivos son dos de los principales desafíos que enfrentan las educadoras de párvulos. Sin embargo, las estrategias pedagógicas observadas, como el uso de actividades colaborativas y el fomento de un ambiente de respeto, representan pasos en la dirección correcta.

Es necesario que las instituciones educativas brinden un mayor apoyo en términos de formación continua y provisión de recursos didácticos inclusivos. Asimismo, es primordial desarrollar políticas que incentiven la aplicación sistemática de prácticas inclusivas en las salas de clase, garantizando que todo el estudiantado es, independientemente de su género, tengan acceso a oportunidades equitativas de aprendizaje.

REFERENCIAS

Del Rio. M. (2023, 09 de marzo). Matemática y Género: La educación parvularia es el lugar privilegiado para intervenir y generar los cambios necesarios. https://www.udp.cl/m-francisca-del-rio-la-educacion-parvularia-es-el-lugar-privilegiado-para-intervenir-y-generar-los-cambios-necesarios/

Ley 20.845 de Inclusión Escolar que Regula la Admisión de los y las Estudiantes. (2015, 29 de mayo). Biblioteca del Congreso Nacional de Chile.

Martínez, J., González, P., & Rodríguez, M. (2022). Integración curricular de las matemáticas en la educación parvularia en Chile: un análisis longitudinal. Journal of Early Childhood Education Research, 8(1), 112-130.

Ministerio de Educación de Chile. (2017). Unidad de Equidad de Género. Cartilla de la Unidad de Equidad de Género.

Sánchez, M. (2020). Matemáticas en la educación parvularia: Un enfoque constructivista. Revista de Educación, 16(1), 1-15.

DESAFÍOS Y POSIBILIDADES PARA EL DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS CULTURALMENTE RELEVANTES: VOCES DE TRES PROFESORAS EN FORMACIÓN.

Natalia Gómez Maripán, Universidad Católica de Temuco.

Evania Vergara Jaramillo, Universidad Católica de Temuco.

Paula Sandoval Quidel, Universidad Católica de Temuco.

Abstract:

El objetivo central de este trabajo es presentar nuestras experiencias y reflexiones como docentes en formación, en torno al proceso de aprender a diseñar y/o adaptar tareas matemáticas culturalmente responsables (CRMT, por sus siglas en inglés). Usando un *enfoque autoetnográfico, las autoras exploramos cómo nuestras experiencias, creencias e identidades como personas mapuche y campesinas configuran este aprendizaje, los desafíos y oportunidades. El trabajo destaca la importancia de integrar los fondos culturales de los estudiantes para promover la resolución de problemas de alta demanda cognitiva. De esta manera, subrayamos que las tareas matemáticas deben desafiar cognitivamente a los estudiantes, respetando y valorando sus identidades culturales. El proceso autoetnográfico nos brindó la oportunidad de reflexionar sobre nuestras propias trayectorias y cómo nuestras identidades influyen en la práctica pedagógica, reconociendo la enseñanza de las matemáticas como un espacio creativo y colaborativo, donde cada estudiante desde su historia enriquece la experiencia de aprendizaje robusteciendo su autoestima y sentido de pertenencia hacia su comunidad. El artículo concluye relevando la importancia de utilizar las matemáticas como una herramienta para tensionar las desigualdades sociales y las problemáticas comunitarias de los niños y jóvenes por medio de la legitimación de sus estrategias individuales y conocimientos previos.*

[Palabras clave: autoetnografía, educación matemática, cultura, diseño de tareas]

Introducción

Nuestro ímpetu por escribir nace de nuestra necesidad por dialogar y tensionar nuestras creencias pedagógicas para mejorar la enseñanza de las matemáticas y nuestras propuestas de acción (Goñi et al., 2011) para el aprendizaje de todo el estudiantado desde un lugar de enunciación propio y los marcos de las Pedagogías Culturalmente Sensibles (Ladson-Billings 2005; Civil, 2016). Este proceso se genera a través de un cuerpo de preguntas que nos ayudarán a descifrar de qué manera nuestra identidad y sentir personal influye en nuestros intereses por la cultura, la justicia social y las matemáticas, siendo nuestro deseo abrir y colectivizar el debate sobre su naturaleza y el impacto las tareas de los docentes para dicha asignatura sobre la autoestima e identidad de los niños y jóvenes en el tiempo. Creemos pertinente compartir cómo ha sido el proceso de re-pensar la clase de matemáticas bajo los paradigmas de la equidad, la justicia social, la diversidad cultural en miras del acceso de todos los niños, niñas y jóvenes. La autoetnografía (Ellis et al., 2011), como método de investigación cualitativa, nos permite como investigadoras entrelazar nuestra experiencia personal con nuestra práctica profesional, proporcionando una narrativa íntima y reflexiva que trasciende la simple observación..

Marco conceptual

Diseño de tareas matemáticas culturalmente relevantes

La definición que adoptamos de enseñanza de las matemáticas culturalmente sensible (CRMT, por sus siglas en inglés) se vincula con aspectos del conocimiento pedagógico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés) (Shulman, 1987) y la pedagogía culturalmente responsable (CRP, por sus siglas en inglés) (Ladson-billing, 1995; Gay, 2018). Este enfoque se preocupa de utilizar los fondos culturales de los niños y adolescentes (González et al., 2006) para fortalecer el aprendizaje matemático (Civil, 2016). La literatura indica que los profesores pueden aumentar su comprensión del pensamiento matemático de los niños y niñas mediante el fortalecimiento de meta-habilidades como la resolución de problemas donde se privilegia y legitima las experiencias y estrategias previas de quienes aprenden (Turner, et al, 2016) para dar paso la construcción de significados matemáticos. De esta manera, la CRP se posiciona como una oportunidad didáctica para trascender aproximaciones y nociones pedagógicas basadas en el déficit sobre lo que los estudiantes pertenecientes a comunidades marginalizadas pueden lograr (Kird et al., 2008) para dar paso a una matematización consciente de los múltiples usos de la matemática y de las implicaciones epistemológicas y sistémicas del aprendizaje (Aguirre y Zavala, 2013).

Las tareas matemáticas y su demanda cognitiva

En este escrito, nos referimos a los problemas matemáticos como ‘‘tareas matemáticas’’ que se definen como las propuestas de acción que los profesores y profesoras plantean a sus estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas, pudiendo ser un conjunto de problemas o un único problema complejo (Hong y Kyong, 2018; Goñi gget al., 2011) las que representan oportunidades que el docente proporciona a sus estudiantes para aprender y desarrollar el pensamiento matemático. La literatura nos indica que existen distintos tipos de tareas matemáticas y pueden responder a diferentes objetivos según nuestra intencionalidad e intervención (Goñi et al., 2011). Cuando las tareas son de alta demanda cognitiva, se pide a los estudiantes que identifiquen y exploren ideas y nociones matemáticas, razonen con y sobre dichas nociones y comuniquen su pensamiento, lo que puede conducir a la construcción de una rica comprensión de las matemáticas. Por otro lado, las tareas de baja demanda cognitiva exigen que los estudiantes mayoritariamente memoricen y usen procedimientos rutinarios (Roth & Garnier, 2006; Weiss, Pasley, Smith, Banilower, & Heck, 2003)

Metodología

El siguiente escrito es un trabajo compartido que une nuestros testimonios y experiencias. Somos tres profesoras en formación cursando nuestro internado pedagógico de Pedagogía en Educación Básica con mención en Matemáticas en una escuela rural intercultural perteneciente a la región de La Araucanía. Para este estudio adoptamos una metodología cualitativa y autoetnográfica, la cual utiliza la narrativa personal de los participantes para comprender fenómenos culturales reconociendo la subjetividad y emociones como elementos válidos dentro del proceso de investigación (Ellis et al., 2011). Es decir, se reconoce valor epistémico en las historias personales y a través de las cuales se construye y re-construye significado sobre el mundo social. En esta ponencia, buscamos indagar y compartir nuestro pensamiento sensible y creativo, los desafíos y oportunidades en el proceso de aprender a diseñar y/o adaptar tareas matemáticas desafiantes con un enfoque culturalmente relevante para el aula culturalmente diversa. Para nuestra recolección de datos construimos preguntas con base en nuestro marco de referencia, respondimos individualmente a cada una de ellas y luego analizamos los productos etnográficos de manera conjunta para presentar una reflexión compartida y sustentada en autores según creímos pertinente de acuerdo a cada tópico.

Resultados

¿Quienes somos?

La primera pregunta que nos hicimos fue ¿Quienes somos? Nosotras somos hijas de la tierra y del esfuerzo campesino, tres mujeres con ascendencia mapuche conscientes de la sangre que corre por nuestras venas y de la historia que nos une ‘‘Soy una mujer mapuche de 24 años de edad, proveniente de la región de La Araucanía de la comuna de Padre las Casas, sector Truf - Truf y pertenezco a la comunidad mapuche Huenchu-Sandoval’’ (Paula Sandoval-Quidel). Las tres crecimos en regiones del sur de Chile, escuchando los consejos de nuestros mayores y siendo enseñadas a valorar nuestras raíces y la naturaleza. Desde pequeñas conocimos la discriminación en la escuela y sin darnos cuenta fuimos renunciando a aquello que nos conectaba con el corazón de nuestras familias y comunidades. Por ejemplo, Natalia y Evania no hablamos la lengua mapuche. Hoy, nuestras memorias y experiencias de infancia nos lleva a ser profesoras comprometidas con la educación pública para el buen vivir de los niños que desean abrazar su diferencia.

¿Por qué nuestro interés por la cultura y la enseñanza de las matemáticas?

Escribir acerca de nuestro interés por la cultura y la enseñanza de las matemáticas significó introducirnos hacia una parte sensible de nuestra historia. Nuestras trayectorias escolares y profesionales nos hicieron conscientes de que las matemáticas son utilizadas como un instrumento que separa y categoriza a los niños y niñas en ‘‘buenos y malos’’ para aprender esta disciplina. ‘‘Mi interés por la cultura y la enseñanza de las matemáticas surge del reconocimiento de que estas ocupan una posición de estatus y poder, que tienden a privilegiar a estudiantes de contextos culturales dominantes’’ (Natalia Gómez-Maripan).

En ese sentido, el aprendizaje de las matemáticas se establece como un lenguaje único e impenetrable para el acceso al éxito y la democracia, afectando la autoestima e identidad de los jóvenes y su diversidad. Las matemáticas, por el contrario, creemos, son parte del imaginario compartido y creativo de la humanidad, de nuestra brillante capacidad de objetivación (Bishop, 1988) y nos ayudan a anticipar nuestras decisiones. ''Aprender que las matemáticas son una construcción situada y humana me ha permitido romper con los estereotipos dañinos sobre quienes pueden aprender y alcanzar bienestar haciendo matemáticas'' (Evania Vergara-Jaramillo).

¿Por qué nos interesa la justicia social y la enseñanza de las matemáticas?

Nuestro interés por la justicia social nace a partir de nuestras incursiones en la pedagogía crítica y culturalmente sensible (Ladson-Billings 2005; Gay, 2018). ''Me interesa la justicia social, porque creo que las matemáticas nos abren una posibilidad inmensa para tensionar problemáticas comunitarias de los estudiantes'' (Evania Vergara-Jaramillo). Desentrañar la naturaleza de las matemáticas nos da la oportunidad de cuestionar las estructuras de poder y las desigualdades sistémicas (Civil, 2016). Por lo tanto, ''incorporar la justicia social en la educación matemática ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades de pensamiento crítico, permitiéndoles entender y desafiar las múltiples inequidades de su entorno y en el mundo en general'' (Natalia Gómez-Maripan) sin caer en la estereotipación de la diversidad cultural.

¿Qué ha sido para nosotras lo más desafiante para diseñar tareas matemáticas culturalmente relevantes?

Durante el diseño de tareas culturalmente relevantes nos hemos enfrentado con el reto de construir actividades matemáticas que además de valorar las identidades y conocimientos culturales de los estudiantes, logren encontrar armonía con la exigencia cognitiva que requiere el aprendizaje matemático. ''Lo más desafiante de diseñar tareas culturalmente relevantes es que puedan estar acompañadas de una alta demanda cognitiva'' (Paula Sandoval-Quidel). Nuestro desafío más grande, por lo tanto, ha sido desafiar cognitivamente a los niños y niñas, al tiempo que honre y enriquezca las historias y trayectorias individuales, evitando cualquier distorsión o exotización de sus saberes. Se trata de un delicado acto de balance donde las matemáticas y la cultura se potencian mutuamente.

Para nosotras una tarea matemática culturalmente relevante es aquella que integra de manera significativa las experiencias, conocimientos y prácticas culturales de los niños y niñas dentro del proceso de aprendizaje, valorando y reforzando su identidad cultural y empoderándoles para aplicar conocimientos personales y familiares en la resolución de problemas reales de sus comunidades.

> Una tarea culturalmente relevante es aquella que involucra en su contextualización una actividad que sea propia de la familia del estudiante o de la comunidad a la que pertenece, actividades que realiza día a día o que sean de utilidad para ellos, de esta manera los niños y jóvenes toman conciencia de su participación y el sentido que tienen sus prácticas (Paula Sandoval-Quidel).

Oportunidades que surgen…

Para nosotras enseñar matemáticas ha significado crear un espacio en el aula donde los conocimientos culturales de los estudiantes cobran vida e importancia, siendo un acto de resistencia y transformación contra las barreras de discriminación y exclusión que alguna vez también nos marcaron. Diseñar y/o adaptar problemas matemáticos desafiantes ha hecho posible comprender la enseñanza matemática como una propuesta valórica para tensionar nuestras creencias y el modelo pedagógico tradicional. Sabemos que no es un camino sencillo. Equilibrar el diseño de tareas que honren la cultura y desafíen intelectualmente es un reto constante, especialmente cuando se trata de identificar prácticas culturales relevantes y usarlas para tensionar problemáticas comunitarias, sin embargo, cuando logramos unir armoniosamente estos dos elementos, vemos que las matemáticas se convierten en algo más, en una herramienta poderosa para interpretar y transformar la realidad.

Hoy, nuestra práctica docente es un reflejo de nuestro compromiso con la educación pública y las comunidades educativas, lo que nos permite comprender nuestra labor como acto de justicia para el reconocimiento y auto enunciación propia de los niños y niñas en contextos de diversidad.Las propuestas que surgen al respecto son reencontrarse con la comunidad desde una perspectiva dialógica, abierta al debate crítico, autocrítico y corresponsable para resignificar el ‘‘lente’’ a partir del cual accionamos en la escuela, y así contrastar los impulsos y nudos del modelo colonial imperante en nuestra subjetividad individual y colectiva. Se debe procurar que la escuela, en tanto institución para la transformación, reflexione sobre las urgencias culturales, sociales y políticas que presenta la macroestructura en la que se inserta ya sea con jornadas de discusión pedagógica, diseño de tareas culturalmente responsables, desafiantes y/o en colaboración con las familias dentro y fuera de la escuela.

Referencias Bibliográficas

Aguirre, J. M., & Del Rosario Zavala, M. (2013). Making culturally responsive mathematics teaching explicit: A lesson analysis tool. Pedagogies: An International Journal, 8(2), 163-190. https://doi.org/10.1080/1554480X.2013.768518

Bishop, A. J. (1988). Mathematical Enculturation. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-2657-8

Ellis, C., Adams, T. E., & Bochner, A. P. (2011). Autoethnografie: Ein ÜberblickAutoethnography: An Overview. Historical Social Research, 36, 273290. https://doi.org/10.12759/HSR.36.2011.4.273-290

Gay, G. (2018). Culturally responsive teaching: Theory, research, and practice (Third edition). Teachers College Press, Teachers College, Columbia University.

Gonzalez, N., Moll, L. C., & Amanti, C. (Eds.). (2006). Funds of Knowledge (0 ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410613462

Goñi, J. M. (2011). Formación del profesorado, Educación secundaria, Didáctica de la matemática. Barcelona, España: Graó.

Hong, D. S., & Kyong Mi Shoi. (2018). Challenges of maintaining cognitive demand during the limit lessons: understanding one mathematician's class practices. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(5), 856–882. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1543811

Kidd, J. K., Sánchez, S. Y., & Thorp, E. K. (2008). Defining moments: Developing culturally responsive dispositions and teaching practices in early childhood preservice teachers. Teaching and Teacher Education, 24(2), 316-329. https://doi.org/10.1016/j.tate.2007.06.003

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard educational review, 57(1), 1-23 https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Turner, E. E., Foote, M. Q., Stoehr, K. J., Roth McDuffie, A., Aguirre, J. M., Bartell, T. G., & Drake, C. (2016). Learning to Leverage Children's Multiple Mathematical Knowledge Bases in Mathematics Instruction. Journal of Urban Mathematics Education, 9(1). https://doi.org/10.21423/jume-v9i1a279

Weiss, I. R., Pasley, J. D., Smith, P. S., Banilower, E. R., & Heck, D. J. (2003). Looking inside the classroom: A study of K–12 mathematics and science education in the United States. Chapel Hill, NC: Horizon Research, Inc.

Esta investigación se realiza en el marco del proyecto Fondecyt de Iniciación (ANID) Nº11240575 Desarrollo profesional de profesores de matemáticas que inician su carrera docente en contextos escolares rurales, migrantes e indígenas.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO A TRAVÉS DE LAS DESIGUALDADES NUMÉRICAS

Jorge Jiménez-Gutiérrez, Universidad de Córdoba (España)

Eder Pinto, Universidad de O'Higgins (Chile)

Natividad Adamuz-Povedano, Universidad de Córdoba (España)

Elvira Fernández-Ahumada, Universidad de Córdoba (España)

Abstract:

Esta investigación explora desde el marco de Blanton et al. (2018) cómo estudiantes de 3º de primaria justifican desigualdades numéricas en el contexto del pensamiento algebraico. El objetivo principal es describir las justificaciones que los niños aportan a una pregunta sobre desigualdades numéricas de un cuestionario que incluía tareas en situaciones de equivalencia numérica. Se llevó a cabo un estudio exploratorio-descriptivo con 83 estudiantes de una escuela pública en Córdoba (España), quienes participaron en seis sesiones de trabajo. El análisis de sus respuestas se centra en tres aspectos: (i) la identificación de expresiones como verdaderas o falsas, (ii) los niveles de justificación según el esquema de Embid (2022) y (iii) el lado de la expresión al que refieren los estudiantes en sus justificaciones. Los resultados muestran un predominio de cómputo directo, aunque algunos estudiantes alcanzan el nivel relacional, que principalmente se observan en tareas con estructura multiplicativa. Además, hay indicios de que el pensamiento relacional surge solo cuando la tarea lo requiere cognitivamente. Estos hallazgos sugieren la necesidad de profundizar en tareas que promuevan el desarrollo del pensamiento relacional y refuerzan la importancia de analizar cómo los estudiantes refieren a ambos lados de la expresión para alcanzar niveles superiores de justificación.

Pensamiento algebraico, equivalencia numérica, desigualdades, educación primaria

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre el álgebra escolar en la educación primaria (6-12 años) ha evidenciado que la actividad algebraica no se reduce al uso exclusivo del simbolismo algebraico ni se limita a ciertos contenidos específicos (Blanton et al., 2018). Por el contrario, el interés está puesto en guiar a estudiantes en el desarrollo de su pensamiento algebraico, lo que implica generalizar relaciones y hechos matemáticos, profundizando en los conceptos ya presentes en el currículo para promover una comprensión más profunda y coherente de las matemáticas (Blanton, 2008). Aunque diversas investigaciones han documentado cómo estudiantes de primaria interactúan con distintos contenidos algebraicos (muchas de ellas presentadas en versiones anteriores de las JNEM), los estudios que se centran en el trabajo con desigualdades en este nivel educativo son limitados (Pacheco et al., 2023). Por tanto, nuestro interés está puesto en las maneras en que niños interactúan con desigualdades numéricas. Para ello, en esta investigación nos proponemos describir cómo niños de 3º de primaria observan y justifican desigualdades numéricas al responder un cuestionario escrito.

EXPRESIONES, ECUACIONES Y DESIGUALDADES

En esta comunicación entendemos el pensamiento algebraico como un proceso complejo de simbolización cuyo objetivo es la generalización y el razonamiento con esas generalizaciones. Para ello, el pensamiento algebraico se articula en torno a cuatro prácticas clave: *generalizar*, *representar*, *justificar* y *razonar* con estructuras y relaciones matemáticas (Blanton et al., 2018). Estas prácticas deben estar presentes en cualquier contenido algebraico que se aborde, como expresiones, ecuaciones y desigualdades. Específicamente, el trabajo con desigualdades busca que los estudiantes vean las expresiones como objetos matemáticos en lugar de una simple secuencia de cálculos. Las expresiones se comparan o restringen por medio de los símbolos de desigualdad "mayor que" (>) o "menor que" (<) (Pacheco et al., 2023).

Nuestro interés está puesto en las maneras en que niños justifican expresiones de desigualdad. La justificación favorece que los niños determinen y expliquen la verdad de una conjetura o afirmación (Blanton, 2008). Diversas investigaciones han abordado las maneras en que niños justifican ideas algebraicas. Nos centramos en las ideas de Embid (2022), quien establece los distintos niveles en que se clasifican la variedad de justificaciones de ideas matemáticas generales que proporcionan niños al trabajar con contenidos algebraicos: un nivel base no concluyente (J0), un nivel basado en respuestas con enfoque no estructural (J1), un nivel con enfoque estructural (J2) y un nivel con indicios de razonamiento lógico (J3).

METODOLOGÍA

Llevamos a cabo un estudio cualitativo de carácter exploratorio-descriptivo con 83 estudiantes de tercero de Educación Primaria (8-9 años de edad) de un colegio público de Córdoba (España), seleccionado intencionalmente por su apertura a los investigadores. Los estudiantes participaron en seis sesiones de trabajo no formativas, cada una con una duración de 60 minutos, y que tuvo por propósito explorar cómo se acercan los estudiantes al pensamiento relacional cuando trabajan en tareas de aritmética generalizada, que incluye actividades con igualdades y desigualdades numéricas. Los investigadores y maestros tuvieron el rol de supervisores.

Los datos que analizamos aquí provienen del cuestionario inicial que respondieron los niños durante la primera sesión. Se trata de un cuestionario compuesto por seis preguntas, el cual buscaba recoger evidencias de su comprensión sobre propiedades aritméticas y relaciones de equivalencia entre números o expresiones que representan números. Específicamente, nos centramos en analizar las respuestas de los niños a la pregunta 2, la cual indicaba "En cada expresión rodea si (V) verdadero o (F) falso, según corresponda, explicando en cada caso". Presentamos cuatro desigualdades: a) $19 + 4 < 20$, b) $23 < 30 – 5$, c) $7 \cdot 4 > 7 \cdot 3$, d) $9 : 1 < 7 : 1$. Por un lado, las respuestas son cerradas en cuanto a la comprobación de cumplimiento de la desigualdad (verdadero/falso) y, por otro, permite respuestas abiertas (justificar razonamientos).

Considerando nuestros propósitos de investigación, analizamos las respuestas escritas de los 83 niños siguiendo dos partes. En primer lugar, analizamos si los estudiantes perciben las expresiones de desigualdad como (i) verdaderas o falsas, analizamos las (ii) justificaciones que dieron los niños distinguiendo los niveles de justificación que proporcionaron los niños (Embid, 2022) y, de forma complementaria, analizamos (iii) el lado de la expresión a la que hacen referencia en sus justificaciones: izquierda (I), derecha (D), ambos lados (A), no relacionada la justificación con la pregunta (NE) y no responde (NR).

RESULTADOS PRINCIPALES

Organizamos los resultados siguiendo nuestro propósito de investigación. Para ello, describimos las maneras en que los niños observan las igualdades numéricas al marcar como verdadero o falso la expresión dada (Figura 1.a) y, posteriormente, profundizamos en las justificaciones que ellos proporcionan (Figura 1.b).

Figura 1.a

Ítem de verdaderos o falsos

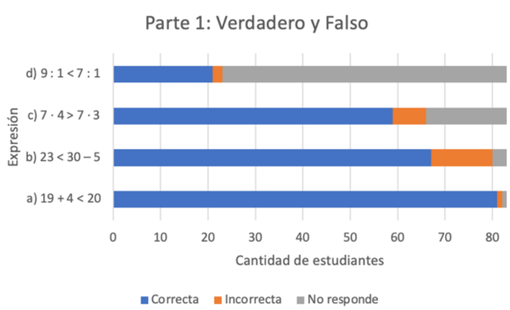
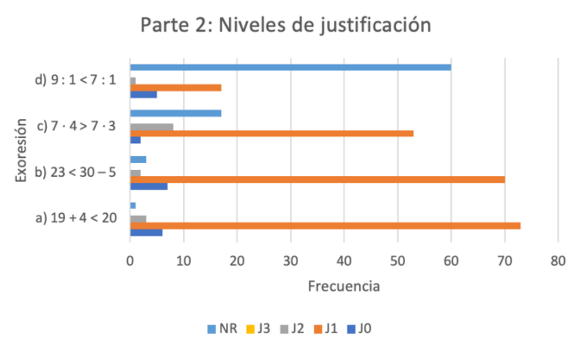


Figura 1.b

Niveles de justificación



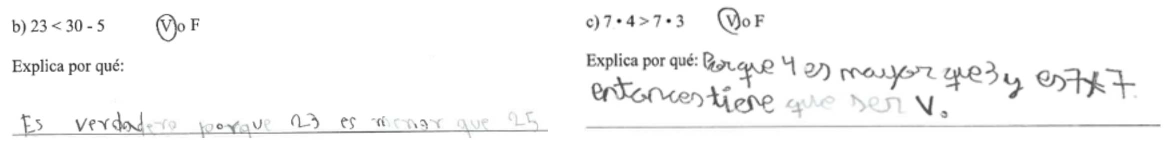
Sobre las respuestas de los niños a la veracidad de las expresiones (Figura 1.a), se observa un aumento significativo de respuestas incorrectas al pasar de tener a uno de los lados una suma a una resta del primer al segundo apartado. Del segundo al tercero, aumentan las no respondidas y se reducen las incorrectas, teniendo ahora multiplicaciones a ambos lados. Del tercero al cuarto, las no respondidas se disparan y las incorrectas se mantienen cercanas a cero, habiendo división en ambos lados.

Figura 2

Ejemplo de justificación J1

Figura 3

Ejemplo de justificación J2



En la Figura 1.b, los niveles de justificación muestran similitudes en los dos primeros apartados, destacando el nivel J1. Aunque hay un descenso de J1 (ver Figura 1) del primer al tercero, es más marcado del segundo al tercero, con un aumento de no respondidas y más respuestas en J2 (ver Figura 2). Del tercero al último, las frecuencias en J1 disminuyen notablemente, registrándose hasta sesenta no respondidas. En el tercer apartado, hay 9 respuestas en J2 sobre estructura multiplicativa, mientras que en los dos primeros, suma y resta, hay 3 y 2 respuestas, respectivamente. No se registró justificación en el nivel estructural J3. Analizando a qué lado se refieren en sus justificaciones (izquierda [I], derecha [D], ambos lados [A], no relacionada [NE], o no responde [NR]), en el primer apartado (a) $19 + 4 < 20$), 14 justifican refiriéndose a I, 1 a D, 62 a A, 4 en NE y 1 NR. En el segundo (b) $23 < 30 - 5$), 1 refiere a I, 14 a D, 58 a A, 6 en NE y 4 NR. En el tercero (c) $7 \cdot 4 > 7 \cdot 3$), 8 refieren a I, 0 a D, 55 a A, 2 en NE y 18 NR. En el último (d) $9 : 1 < 7 : 1$), 1 refiere a I, 0 a D, 18 a A, 4 en NE y 60 NR. Una de las respuestas del primer apartado no se pudo categorizar: "porque 23 mallor que 23". Al no haber escrito correctamente los números no podemos decir con certeza si se refiere solo a uno de los lados.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La mayoría de las respuestas de los estudiantes están en el nivel J1 o cómputo directo. Sin embargo, algunos se acercaron al nivel J2, como un alumno que dijo en la Figura 2 "porque 4 es mayor que 3 y es 7x7 entonces tiene que ser V". El tercer apartado, sobre estructura multiplicativa, acumuló más respuestas en J2. Ocho de los nueve que justificaron en J2 en el tercer apartado, respondieron en J1 en el primero, lo que podría sugerir que el pensamiento relacional solo aparece en tareas que lo exigen. Esto plantea si las justificaciones de nivel relacional surgen cuando los estudiantes trabajan estructuras conocidas, pero aún poco dominadas, ya que recurrieron a argumentos de cálculo directo en aquellas tareas de estructuras que ya manejan. Esto podría influir en el diseño de cuestionarios más específicos sobre el pensamiento relacional. También se vio que de las catorce justificaciones en J2 de entre todos los apartados, solo una no refirió a ambos lados. Parece que este cambio, que es necesario para alcanzar el nivel estructural J3, ya ocurre del nivel de justificación J1 al J2 y podría ser un factor importante para acercar a los estudiantes al pensamiento relacional. En cuanto a los lados de la expresión, la mayoría refiere a ambos lados al justificar en todos los apartados. Por otra parte, de entre los catorce que refirieron al lado izquierdo en el primer apartado, nueve (de otros catorce) mencionan luego en el segundo apartado el lado derecho, y en el tercero, cuatro (de ocho) siguen refiriendo al izquierdo. En otras palabras, hay un grupo de estudiantes que, aunque va disminuyendo, refiere a uno de los lados desde el comienzo y lo mantiene en los apartados siguientes.

REFERENCIAS

Blanton, M. (2008). Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice. Heinemann.

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., et al. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice. (pp. 27-49). Springer.

Embid, S. (2022). Una Mirada a los Números Pares, Impares e Igualda-des Numéricas: ¿Cómo Justifican Generalizaciones los Niños de 9-10 años según su Pensamiento Algebraico? (Trabajo de Fin de Máster). Universidad de Granada.

Pacheco, E., Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2023). Caracterización de tareas de inecuaciones propuestas en textos escolares de Educación Primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVI (pp. 427-434). SEIEM.

INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN INFANTIL. LAS METODOLOGÍAS EXHIBIDAS

Olga Casanova Cárdenas 1, Universidad de Los Lagos

Ismenia Guzmán Retamal 2, Independiente

Jesús Lugo Armenta 3, Universidad de Los Lagos

Abstract:

La enseñanza de la geometría en educación infantil, es un proceso fundamental en el desarrollo de habilidades matemáticas y cognitivas. Es necesario, por lo tanto, que la geometría entre en contacto en la vida de los párvulos, y que se produzca un acercamiento lo más pronto posible al lenguaje de la geometría, incluyéndola en las rutinas diarias, jugar a juegos que requieran el uso de formas, espacios y ubicaciones. Conocer las estrategias metodológicas utilizadas por educadoras de párvulos para iniciar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en niñas y niños, en la región de Los Lagos, Chile. La investigación se realizó bajo el enfoque cualitativo y considera la metodología de la Ingeniería Didáctica (ID). Se destacan diversas estrategias y actividades lúdicas utilizadas por las educadoras para enseñar geometría, así como una variedad de materiales. Se puede identificar cómo las educadoras plantean la presentación de la geometría en el contexto del nivel inicial, considerando los objetivos de enseñanza, los contenidos geométricos a abordar y las estrategias pedagógicas utilizadas para introducir los conceptos geométricos a los niños. Si bien las educadoras de infantil diseñan experiencias de aprendizajes interactivas

que permiten a los párvulos explorar y experimentar con formas geométricas, fomentando la participación activa en el aprendizaje, existen espacios, como la naturaleza, que no son considerados para la enseñanza de la geometría.

Geometría, educación infantil, estrategias metodológicas, ingeniería didáctica, figuras geométricas

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la geometría se encuentra presente como parte de la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles educativos, en el nivel infantil, de primaria y secundaria ya que estos son contenidos de matemática obligatorios y, en el sistema superior, como materia específica para la práctica de sus profesiones, como por ejemplo, educación, arquitectura, ingeniería, entre otras. En educación infantil, la enseñanza de la geometría es un proceso fundamental en el desarrollo de habilidades matemáticas y cognitivas ya que permite a las niñas y niños comprender mejor el espacio que les rodea y construir un pensamiento espacial para hacer frente a los constantes retos que se les presentan en su vida cotidiana. Para lograr que las niñas y los niños se interesen en la geometría, hay que tener presente que el medio que los rodea esté lleno de elementos geométricos, luego necesitan un poco de observación dirigida para apreciarlos; en consecuencia, el aprendizaje de la geometría se hace más fácil y entretenido, si los párvulos pueden trabajar con materiales concretos, tener la experiencia de tocar y palpar (Geometría en infantil, s.f.).

El objetivo de investigación es conocer las estrategias metodológicas utilizadas por educadoras de párvulos para iniciar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en niñas y niños, en la región de Los Lagos, Chile.

Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)

El marco teórico que apoya esta investigación es la TSD de Guy Brousseau (1998/2007), esta teoría considera la hipótesis de que los conocimientos matemáticos no se construyen espontáneamente, sino en la interacción con otros y socialmente, por esta razón busca situaciones problemas que condicionen una génesis artificial de los conocimientos pertinentes al nivel de las niñas y los niños. Se propuso, entonces, la necesidad para la didáctica de utilizar un modelo propio de actividad matemática en el que el objetivo fundamental fuera definir un conocimiento matemático mediante una situación, que les permitiera a los estudiantes aprender de forma indirecta. En la TSD, para cada objeto matemático existe una situación matemática que puede dar sentido a ese objeto.

Una situación es didáctica cuando un individuo (profesor) tiene la intención de enseñar a otro individuo (estudiante) un saber matemático dado. Una situación es a-didáctica cuando se da interacción entre un sujeto y un medio para resolver un problema. Como el medio es impersonal, no tiene ninguna intención didáctica: no desea enseñarle nada al estudiante. Por eso este tipo de situación recibe el nombre de adidáctica (Brousseau, 1998/2007).

La Geometría en educación infantil (0 a 6 años de edad)

En cualquier etapa educativa, pero más aún en las primeras edades (0 a 6 años), el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, debería comenzar por la manipulación, la exploración, la propia experiencia, para, de forma progresiva y mediante acciones cada vez más autónomas, poder llegar a integrar conocimientos realmente significativos en las niñas y los niños. En educación infantil, la geometría ocupa un lugar muy importante en la vida de los más pequeños, los cuales están inmersos en experiencias visuales y táctiles de los objetos geométricos que continuamente se encuentran a su alrededor en la vida cotidiana. Tales objetos, tienen formas geométricas que pueden ser muy diversas, que son el cuadrado, el círculo, la forma de cilindro, entre otros (Geometría en infantil, s.f.).

METODOLOGÍA

La investigación se hizo bajo la modalidad cualitativa de tipo descriptivo-exploratoria. Se trabajó con 5 docentes de educación inicial que atendían a la población de niñas y niños con edades entre los 5 y 6 años; una perteneciente a colegio particular subvencionado de Chiloé, otra a escuela de Servicio Local de Educación Pública (SLEP) de Llanquihue y tres de escuelas municipales de Osorno, todas comunas de la Región de los Lagos. De igual manera se llevaron a cabo 4 observaciones de aula, de aproximadamente una hora y media cada una de ellas. Dichas observaciones se hicieron a dos educadoras de escuela municipal de Osorno.

La recopilación de datos se hizo mediante un grupo focal integrado por las 5 educadoras de párvulos con un tiempo de duración de una hora y treinta minutos en forma online, considerando la dispersión geográfica de las participantes. El proceso de enseñar y aprender geometría en educación infantil puede ser un tema complejo, y un grupo focal ofrece un espacio en el que las educadoras pueden profundizar en los desafíos, necesidades y soluciones que enfrentan, así como compartir recursos y prácticas efectivas (Hernández et al., 2014). Además las 4 observaciones de aula utilizando una lista de cotejo para identificar y caracterizar las estrategias metodológicas que utilizaban las docentes en la enseñanza de la geometría, en cuanto a cinco grandes categorías: espacios interiores, espacios exteriores, recursos materiales y mobiliario, planificación y factor humano.

RESULTADOS

A continuación se destacan alguno de los resultados más relevantes en cuanto a las estrategias metodológicas utilizadas por las educadoras para iniciar la enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación infantil; se plantean no solo los criterios que las docentes manifiestan utilizar en cuanto a estrategias, sino que también se contrastan con los datos recopilados a partir de las 4 observaciones de aula.

Según las respuestas, el principal criterio que consideran las educadoras de inicial al seleccionar las estrategias metodológicas adecuadas para la enseñanza y aprendizaje de la geometría son las necesidades de los párvulos. Es importante mencionar que los planteamientos teóricos señalan que al planear han de considerarse las características de desarrollo de las niñas y los niños, quienes exploran el medio mediante su cuerpo, el lenguaje, actividades físicas y mentales y que a esta edad, disfrutan de participar en actividades lúdicas como la imitación, el juego, que es la actividad que más les entretiene, mediante éste le dan significado a la realidad, pues utilizan su creatividad e iniciativa para investigar el mundo que los rodea (Mineduc, 2018).

Por las razones anteriores, puede decirse que lo planteado por las educadoras de inicial coincide ampliamente con el referente teórico. No obstante, en las observaciones realizadas se denota que en su mayoría, las experiencias de aprendizaje planteadas se basan en la decisión de las educadoras dando cuenta de la poca participación de las niñas y los niños en la toma de decisiones. En este sentido se deduce que la dinámica de clase se enfatiza en el cumplimiento de un plan establecido por los adultos.

En cuanto a la enseñanza de la geometría, las educadoras promueven la relación de los conceptos geométricos con situaciones concretas de su vida cotidiana. Es preciso recordar que gran parte de los estudios de Piaget se realizaron con niños menores de 2 años, que no están escolarizados ni pueden comunicarse por medio del lenguaje, por lo tanto, Brousseau recuperó este concepto de aprendizaje biológico y lo adaptó al análisis de las actividades escolares. Según este enfoque, en el aprendizaje por adaptación se considera esencialmente la interacción de un sujeto con un medio (que en muchos casos es material). El concepto alrededor del cual se construye la TSD es el aprendizaje por adaptación, concepto heredado de la teoría piagetana del aprendizaje.

De igual forma, las observaciones de aula revelaron que las niñas y los niños interactúan con el medio pero siempre con la mediación de la educadora, lo que se denomina situación didáctica. Sin embargo, tanto en las respuestas de las educadoras como en las observaciones, las docentes no presentan situaciones problemas a los párvulos para que interactúen solos con el medio y se produzca el aprendizaje por adaptación, lo que se denomina situación adidáctica en la TSD de Brousseau.

CONCLUSIONES

Según los resultados y la información obtenida, se concluye que la estrategia metodológica más utilizada por las educadoras de párvulos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría son las situaciones didácticas, Esto se revela con claridad en la realidad, pues las docentes presentan situaciones problemas sobre las figuras geométricas e interactúan con los párvulos, adaptando el lenguaje y las actividades al nivel de comprensión de los párvulos, buscando una comunicación efectiva y actividades interactivas.

Por el contrario, la estrategia menos utilizada es el juego; si bien lo mencionan las educadoras en la práctica se privilegian de hecho no se emplea o percibe como la principal estrategia de aprendizaje de la geometría. Esta situación demuestra el poco valor didáctico que se le proporciona a la principal y más interesante actividad para las niñas y los niños.

Así mismo, la mayoría de las educadoras de párvulos utiliza como estrategia metodológica el espacio del aula para las situaciones didácticas, así como los materiales utilizados provienen del interior de la sala. Por el contrario, no se mencionaron ni se observaron experiencias de aprendizajes al aire libre, en contacto con la naturaleza, lo que brindaría la oportunidad a los párvulos de observar y la manipular diversos materiales, donde pueden identificar y comparar las formas geométricas presentes en la naturaleza y conectar los conceptos geométricos con el entorno que los rodea.

REFERENCIAS

Brousseau, G. (2007). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage (primera edición en francés, 1998).

Castro, E. y Castro, E. (2022). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil*. Editorial Pirámide. ISBN 978-84-368-3511-3

Edo i Basté, M. (1999). Reflexiones para una propuesta de geometría en el parvulario. *Suma, 32*, 53-60. https://revistasuma.fespm.es/revistas-revistas/revista-32.html

Fabres, R. (2016). Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, utilizadas por docentes de segundo ciclo, con la finalidad de generar una propuesta metodológica atingente a los contenidos. *Estudios pedagógicos*, *42* (1), 87-105. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000100006

Fernández, E. (2018). La geometría para la vida y su enseñanza. *Investigación, Administración e Ingeniería, 6*, 33-61. DOI: https://doi.org/10.15649/2346030X.475

Geometría en infantil. (s.f). file:///C:/Users/ocasa/Downloads/geometria_en_infancia.pdf

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V. ISBN: 978-1-4562-2396-0

Ministerio de Educación Subsecretaría de Educación Parvularia. (2018). *Bases Curriculares Educación Parvularia*. Ministerio de Educación. https://parvularia.mineduc.cl/wp-content/uploads/2019/09/Bases_Curriculares_Ed_Parvularia_2018-1.pdf

UN CURSO PARA EL DESARROLLO DEL NOTICING SOBRE SENTIDO NUMÉRICO EN PROFESORES DE ESTUDIANTES SORDOS

Juan Luis Piñeiro G., Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Ximena Acuña R., Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Eder Pinto M., Universidad de O'Higgins

Jorge Zúñiga M., Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Abstract:

En este trabajo presentamos el diseño de un curso de desarrollo profesional dirigido a docentes de primaria que enseñan matemáticas a estudiantes sordos. Nos basamos en la perspectiva del Noticing para guiar a los docentes en la identificación y atención a las ideas matemáticas de los niños. El curso se estructura en torno a Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje y el uso de la lengua de señas, dentro del contexto de la educación bilingüe. En esta comunicación, ejemplificamos el diseño de una sesión centrada en el sentido numérico, la cual tiene como objetivo reconceptualizar la intervención pedagógica, facilitando a los docentes la atención a las características propias y diversas de sus estudiantes sordos en el aprendizaje de las matemáticas escolares.

Noticing, Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, Sentido Numérico, Lengua de Señas Chilena

A lo largo de los años, la mayoría de las investigaciones sobre la educación de personas sordas se han centrado en la pérdida de audición, la comunicación y el lenguaje, y el aprendizaje del lenguaje escrito. Quizás por esta razón se estudia mucho menos en otras áreas académicas que también resultan difíciles para estos estudiantes, incluidas las matemáticas. La literatura informa dificultades en matemáticas para los estudiantes sordos, cuyo desempeño es de 2 a 3,5 años más tardío que el de sus compañeros oyentes (Swanwick et al., 2005).

Este trabajo pretende contribuir a la enseñanza de las matemáticas en educación básica de estudiantes sordos con enfoque en educación bilingüe. Particularmente, se enfoca en el desarrollo de la Mirada Profesional o *Noticing* (Jacobs et al., 2010) del educador especial cuando enseña matemáticas y que se encuentra mediada por el uso de la Lengua de Señas Chilena (LSCh), i.e., el manejo de los recursos léxico-gramaticales que son de naturaleza visual. Concretamente, el objetivo de este trabajo es mostrar el diseño de un curso para el desarrollo profesional sobre sentido numérico que fomenta *Noticing* en docentes de estudiantes sordos.

PERSPECTIVA TEÓRICA

Noticing

La competencia docente Noticing se relaciona con "un método sistemático de investigación de la propia práctica" (Mason, 2020, p. 231). Esta puede describirse como la competencia respecto a formas especializadas en que profesores observan y dan sentido a los acontecimientos del aula y a los detalles de la enseñanza (van Es y Sherin, 2021). En este trabajo asumimos las ideas de Jacobs y colaboradores (2010), quienes caracterizan esta competencia a través de tres componentes interrelacionadas: a) prestar atención a las estrategias de los estudiantes; b) interpretar la comprensión de los y las estudiantes; y c) decidir cómo responder sobre la base de las comprensiones de los estudiantes.

Trayectoria Hipotéticas de Aprendizajes (THA)

Una THA se refiere a una secuencia teórica de pasos por los cuales se espera que los estudiantes progresen en su comprensión de un concepto matemático determinado (Clements y Sarama, 2015). Las THA están diseñadas para guiar la enseñanza, proporcionando a los docentes un marco de referencia sobre las estrategias y errores comunes de los estudiantes en diferentes niveles de comprensión (Ivars et al., 2020). Las THA articulan tanto las posibles dificultades que los estudiantes pueden enfrentar como las experiencias de instrucción que podrían ayudarlos a avanzar en su comprensión matemática.

Sentido numérico

El sentido numérico puede ser entendido como una forma especial de pensar sobre los números; la que es flexible y no determinada, que permite relacionar conceptos y resolver tareas numéricas complejas (Castro y Segovia, 2015). Particularmente, el sentido numérico se puede definir como "un conjunto de capacidades que permite a las personas utilizar los números de forma desenvuelta" (Castro y Segovia, 2015, p. 111). Esta utilización debe ser flexible y relacionar conceptos y métodos como un medio para comunicar, procesar e interpretar información que carguen de sentido a la matemática. Respecto a las THA relativas al sentido numérico, este trabajo toma en consideración las ideas de Clements y Sarama (2015) e Ivars y colaboradores (2020).

Educación Intercultural Bilingüe

El profesorado que trabaja con estudiantes sordos debe adherir a todos los principios generales de la educación regular, pero, además, necesita adaptar su enseñanza a las características de sus estudiantes para alcanzar prácticas exitosas en el aula (Marschark y Spencer, 2010). Ello implica asumir la naturaleza bilingüe de las personas sordas, cuya lengua natural es la lengua de señas. En este contexto, y entendiendo que la sordera no es causa del desarrollo rezagado que muestran en el aprendizaje de las matemáticas (Barbosa, 2014), resulta imprescindible atender y establecer nuevas formas de intervención en el ámbito pedagógico. Este curso pretende poner al centro el papel preponderante que desempeña la lengua de señas en la construcción de las ideas matemáticas de los y las estudiantes Sordas (Healy et al., 2015) y, a partir de ella, los rasgos que le son propios por su naturaleza visual gestual, entre ellos, el uso de la iconicidad y del espacio.

ESTRUCTURA GENERAL DE CURSO

Las sesiones del curso tienen como meta el desarrollo del *Noticing* de docentes de estudiantes sordos sobre sentido numérico a través de THA en una escuela especial. En este sentido, el sentido numérico y sus THA nos ofrece la secuencia de las ideas matemáticas que se desarrollaran. Particularmente, se utilizarán las ideas de Clements y Sarama (2015) sobre número natural, sistema de numeración decimal, estructuras aritméticas aditivas, estructuras aritméticas multiplicativas, estrategias de cálculo mental e Ivars y colaboradores (2020) sobre fracción (parte-todo).

En segundo lugar, la estructura general de cada sesión del curso de desarrollo profesional es una adaptación de las ideas planteadas por Ivars y colaboradores (2020). Esto significa que cada sesión se compone de 4 momentos: a) THA; b) Resolución de una tarea relativa al sentido numérico e identificación de las ideas matemáticas subyacentes; c) análisis de respuestas hipotéticas de estudiantes a la tarea; y d) reflexión respecto al pensamiento matemático de los estudiantes que respondieron la tarea en función de las habilidades del *Noticing*. En este encuadre, la mediación a través de la LSCh tiene un rol transversal en los cuatro momentos, al menos, desde tres perspectivas: a) la modalidad visual – gestual presente en la construcción del discurso matemático en LSCh; b) el nivel de competencia lingüística para la expresión de conceptos matemáticos; y c) la interacción de códigos y modalidades comunicativas que ocurren en las interacciones para la construcción del sentido y el significado matemático.

En tercer lugar, que las tareas presentadas se corresponden con una adaptación de los principios propuestos por Ivars y colaboradores (2019). En primer lugar, consideramos a la THA como: a) una herramienta para que los docentes puedan sostener un marco para centrar la atención e interpretar el pensamiento matemático de estudiantes sordos y puedan responder en concordancia para lograr desarrollarlo; y como b) una fuente para poseer un lenguaje matemático para describir el pensamiento de sus estudiantes. En segundo lugar, una perspectiva sociocultural del lenguaje, que según Krausse y Farsani (2022), permite a los docentes atender a la diversidad lingüística y cultural de las matemáticas en el aula y explorar cómo esta diversidad favorece el acceso epistemológico, entregando diferentes visiones sobre aspectos matemáticos. Finalmente, las tareas potencian una humanización de las matemáticas escolares, i.e., tratar a los estudiantes con discapacidad con dignidad en sus capacidades inherentes para pensar y hacer matemáticas (Tan et al., 2020).

Finalmente, señalar que para evaluar el impacto del curso se realizaron entrevistas individuales al inicio y al finalizar el curso con una hora de duración. Dichas entrevistas exploran las habilidades de atender, interpretar y decidir a respuestas hipotéticas de estudiantes sordos.

Sesión 1: un ejemplo

La primera clase parte con lo que hemos llamado momento 1, y en el que se discute con los profesores y profesoras respecto a una de las THA que Clements y Sarama (2015) señalan como componente del Número Natural: el conteo. En objetivo de este momento es que los participantes puedan familiarizarse con las THA relativa al conteo. Además, en este momento se discuten los tres elementos transversales de la LSCh que juegan un rol relevante en la enseñanza de las matemáticas. Luego, se presenta una tarea relativa al conteo y su respectivo objetivo de aprendizaje para que los participantes puedan resolverla y describirla señalando cuáles son los elementos matemáticos que el estudiante necesita conocer para resolverla.

Posteriormente, los participantes analizan respuestas hipotéticas de estudiantes a la tarea presentada previamente. Dichas respuestas consideran diferentes niveles de la THA del conteo que sean lo suficientemente diferentes para que profesores principiantes las diferenciaran. Concretamente, las respuestas correspondían a los niveles Contador progresivo y regresivo, Contador progresivo usando patrones, y Contador y productor (Clements y Sarama, 2015). Finalmente, el cuarto momento considera tres preguntas que apuntan a las habilidades situadas del Noticing. Particularmente, se les pregunta: a) que describan cómo han resuelto la tarea los estudiantes hipotéticos y cómo se han utilizado los elementos matemáticos involucrados; b) que analicen cuáles son las características de la comprensión de cada estudiante relacionada con los niveles de la trayectoria de aprendizaje; y c) cómo cambiarían la tarea para desarrollar una comprensión más profunda del conteo.

REFLEXIÓN FINAL

El diseño y la implementación de este curso han proporcionado una plataforma para resaltar la complejidad de promover sentido numérico en la educación primaria en general, y en la educación de personas sordas en particular. Mientras que muchos estudios se centran en la enseñanza del sentido numérico en la formación inicial docente, es crucial reconocer que los desafíos enfrentados por los docentes en ejercicio, y particularmente los profesores que enseñan a estudiantes sordos, son distintos y merecen atención específica. Este curso de desarrollo profesional ha permitido a los docentes reflexionar sobre su práctica, abordar desafíos únicos y adaptar estrategias para desarrollar el sentido numérico en estudiantes sordos, atendiendo a sus necesidades individuales a través de la discusión y análisis de videos.

Agradecimientos: Trabajo financiado por DIUMCE 20-2024-EFA y Fondecyt Iniciación 11240835.

Referencias

Barbosa, E. (2014). Early mathematical concepts and language: A comparative study between deaf and hearing children. *Educação e Pesquisa, 40*(1), 163-178.

Castro, E. y Segovia, I. (2015). Sentido numérico. En L. Rico y P. Flores (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 109-126). Pirámide.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad: El Enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools.

Healy, L. (2015). Hands that see, hands that speak: Investigating relationships between sensory activity, forms of communicating and mathematical cognition. En S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from ICME 12* (pp. 298-316). Springer.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2019). Principles in the design of tasks to support pre- service teachers' noticing enhancement. En M. Graven, H. Venkat, A. Essien y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the IGPME* (Vol. 2, pp. 408-415). PME.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020). A learning trajectory as a scaffold for pre-service teachers' noticing of students mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*, 529-548.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Mason, J. (2020). Learning about noticing, by, and through, noticing. *ZDM, 53*(1), 231-243.

Swanwick, R., Oddy, A. y Roper, T. (2005). Mathematics and deaf children: An exploration of barriers to success. *Deafness and Education International, 7*(1), 1-21.

Tan, P., Padilla, A., Mason, E. N. y Sheldon, J. (2020). *Humanizar la discapacidad en la educación matemática*. NCTM.

van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2021). Expanding on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM - Mathematics Education, 53*(1), 17-27.

Un diseño didáctico sobre secuencias y patrones: articulación entre el dua y la educación matemática

[Ingrid Janeth Jácome Anaya], [Universidad de Los Lagos]

[Sandra Evely Parada Rico], [Universidad Industrial de Santander]

Abstract: *[En este trabajo se describe un diseño didáctico centrado en el desarrollo del pensamiento algebraico en la educación básica y media en Colombia con la finalidad de* *promover la atención a la diversidad en clase de matemáticas. El diseño está basado en una propuesta curricular flexible y adaptable fundamentada en el Diseño Universal de Aprendizaje y en aspectos epistemológicos y didácticos de los objetos matemáticos. En ella se propone el estudio de los objetos matemáticos en cuatro niveles distintos de profundidad, cada uno ajustado a las capacidades de los estudiantes. Las actividades presentadas en el diseño están contextualizadas en los Juegos Olímpicos de Tokio 2020 Estas actividades utilizan secuencias numéricas y figurales para promover la comprensión del álgebra, empleando desde materiales concretos hasta llegar a la generalización de patrones. Se destaca la importancia de la mediación docente y la flexibilidad en la enseñanza para atender la diversidad en el aula y asegurar un aprendizaje inclusivo. Este diseño didáctico busca proporcionar herramientas conceptuales que los profesores puedan utilizar para fomentar un enfoque inclusivo en la enseñanza de las matemáticas]*

[DUA, atención a la diversidad, propuesta curricular, pensamiento algebraico]

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del pensamiento algebraico ha sido un tema de interés en varios países incluyendo Colombia, que se ha alineado con las discusiones internacionales y las directrices del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), para mejorar la formación matemática en la educación básica y media. Diversos investigadores han señalado la importancia de introducir el álgebra en la edad temprana con tareas que incluyan el establecer relaciones entre cantidades, generalización, resolución de problemas, modelización y otros aspectos clave, dado que tareas podrían preparar mejor a los estudiantes para las matemáticas en grados superiores (Radford, 2014; Bojorque y Gonzales, 2021). Dreyfus (1991) enfatiza la necesidad de promover el pensamiento variacional a través del estudio de patrones en secuencias numéricas y figurales desde una edad temprana, aunque este contenido no siempre se incluye explícitamente en currículos como el de Colombia. Autores como Aké et al. (2021) destacan la importancia de caracterizar el uso y desarrollo del pensamiento algebraico en personas con discapacidad, y la necesidad de actividades inclusivas que promuevan la actividad matemática en todos los estudiantes, ya que esto permite crear un marco de referencia funcional del conocimiento matemático.

La Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad (ONU, 2006) establece la inclusión educativa como un derecho fundamental, lo que es respaldado por la Constitución Política de Colombia (1991, Art. 67). Sin embargo, este derecho aún se vulnera en muchas instituciones educativas debido a la falta de recursos adecuados y formación docente (Saenz, 2012; Claro, 2007; y Padilla, 2011).

En consecuencia, en esta comunicación tiene por objetivo describir un diseño didáctico emergente de un proyecto de investigación más amplio que construyó diseños didácticos de matemáticas para la educación básica, ajustados a una estructura curricular flexible y adaptable, en los que se haga uso de variadas tecnologías que permitan el acceso a estudiantes con Necesidades Educativas". El diseño está basado en una propuesta curricular que plantea el estudio de los objetos matemáticos en cuatro niveles de profundidad distintos (Jácome et al, 2024) y está enmarcado en los Juegos Olímpicos de Tokio 2020 con el fin de desarrollar el pensamiento algebraico y atender la diversidad en el aula.

ASPECTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

Los profesores de matemáticas enfrentan dificultades para cumplir con los requerimientos sobre la atención de la diversidad en el aula, principalmente debido a su falta de preparación para atender adecuadamente a estudiantes con diferentes capacidades. Aunque algunos profesores buscan recursos para abordar esta diversidad, a menudo se encuentran con directrices curriculares rígidas, diseñadas para estudiantes sin dificultades. Jácome et al (2024) reportan una propuesta curricular flexible y adaptable (enmarcada en el proyecto de investigación mencionado anteriormente) basada en documentos del Ministerio de Educación Nacional Colombiano, el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), los lineamientos curriculares, los estándares básicos en matemáticas (MEN, 1998, 2006) y la evolución histórica y epistemológica de los objetos matemáticos. Estos documentos son considerados guías adecuadas para desarrollar competencias matemáticas que se alineen con las necesidades y habilidades de los estudiantes en su contexto. El diseño didáctico se interpreta como una planificación estructurada que incluye actividades y materiales para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de temas específicos (Amaro, 2011; Berger y Kam, 1996). En la propuesta curricular, los autores proponen abordar los objetos matemáticos en 4 niveles de profundidad distintos, los cuales se sintetizan en la tabla 1.

Tabla 1.

Características diseños de profundidad 1, 2 ,3 y 4

DISEÑO DE PROFUNDIDAD 1 (N1)	DISEÑO DE PROFUNDIDAD 2 (N2)	DISEÑO DE PROFUNDIDAD 3 (N3)	DISEÑO DE PROFUNDIDAD 4 (N4)
Proporciona múltiples representaciones del objeto matemático de estudio, especialmente representaciones concretas que permiten evidenciar atributos de los números y de las formas. Las situaciones problemas para este nivel llevan instrucciones sencillas, con poco texto, con mayor contenido visual o auditivo que proporcionan múltiples formas de acción y expresión como el uso de palabras claves mediante texto alternativo (imágenes, tablas, bits de información, video, fotografía, material físico o digital, títeres, etc.) con el fin de activar la percepción auditiva, visual y/o táctil de los estudiantes, por lo que se requiere acompañamiento permanente del profesor, por ejemplo, ayudándolo a hacer conexiones y recordándole reiterativamente información.	Se priorizan actividades de resolución de problemas que impliquen la interpretación de información presentada de forma verbal, numérica o gráfica, mediante material visual, auditivo y/o concreto. El diseño proporciona múltiples formas de acción y expresión al utilizar situaciones culturalmente significativas de los estudiantes. Las situaciones problemas para este nivel contienen instrucciones sencillas con texto moderado que implican la conexión de información para comprender y resolver una situación. El diseño proporciona, variadas formas de acción y expresión dando lugar a las expresiones orales, gestuales, pictóricas, entre otras posibilidades de producción, en las que propone la mediación del docente que permita ir valorando el logro del propósito previsto.	Se priorizan actividades de resolución de problemas que implican la abstracción de información presentada de forma verbal, numérica, gráfica, tabular con diversas y variadas tecnologías (como pueden ser los entornos virtuales interactivos o software) permitiendo la manipulación, variedad de feedback y estrategias de resolución de problemas. Las actividades están mayormente diseñadas para que los estudiantes construyan expresiones numéricas o algebraicas que permitan modelar una situación problema del contexto, que posibilitan el desarrollo de procesos matemáticos abstractos y con un lenguaje matemático preciso	Se privilegian actividades de resolución, deducción y planteamiento de conjeturas matemáticas con el uso de lenguaje matemático formal haciendo uso de diversas y variadas tecnologías (como pueden ser los entornos virtuales interactivos o software) permitiendo la visualización, variedad de feedback, argumentación y desarrollo de estrategias de resolución de problemas. Las actividades están mayormente diseñadas pero que los estudiantes modelen situaciones del contexto (matemático y no matemático) justificando y argumentando sus procedimientos y deducciones haciendo uso del lenguaje matemático formal propio del objeto matemático de estudio.

DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO REALIZADO

Para la construcción de los diseños didácticos se tuvo en cuenta el proceso metodológico propuesto por Diaz et al. (1984) quienes establecen: i) Análisis previo. Estuvo centrado en identificar los estándares y pensamientos matemáticos a trabajar en cada cartilla, ii) Análisis didáctico. Estuvo centrado en el análisis epistemológico y didáctico del objeto matemático de estudio desde diferentes perspectivas teóricas y metodológicas con la finalidad de seleccionar el contexto adecuado para abordarlo y plantear preguntas orientadoras para su estudio, iii). Planteamiento del diseño didáctico. Consta de una malla curricular, hoja de trabajo para el estudiante y orientaciones para el profesor.

Malla curricular. En esta se plantea la pregunta que problematiza el diseño didáctico. Consta de los propósitos de las actividades en cada nivel de profundidad propuestos por Jácome et al (2024), asociados con los procesos matemáticos planteados en los estándares de matemáticas y los lineamientos curriculares colombianos (MEN, 1998, 2006).

Hoja de trabajo del estudiante para cada nivel de profundidad. Se divide en cuatro momentos:

- Primer momento: introducción de un objeto matemático a partir del contexto con actividades dinámicas para la valoración y conexión con conocimientos previos.
- Segundo momento: se construyen conceptos matemáticos emergentes de la situación planeada en el primer momento. Aquí se busca construir o deducir propiedades, relaciones, representaciones y conexiones del objeto matemático de estudio con el contexto.
- Tercer momento: espacio donde los estudiantes ponen en práctica y afianzan los saberes construidos mediante actividades dinámicas, de ejercitación, aplicación, problematización, juegos, proyectos, etc.
- Cuarto momento: tiempo para valorar los desempeños de los estudiantes, reconociendo las diferencias en los ritmos y maneras de aprender, esto puede ser mediante el desarrollo de actividades retadoras, dinámicas o problemas que permitan valorar los aprendizajes.

Indicaciones para el profesor. Dado que el éxito de los objetivos está relacionado con las intervenciones del docente, se elaboró un documento que incluye recomendaciones didácticas, teóricas y metodológicas para implementar el diseño. Este documento tiene como propósito guiar y adaptar el desarrollo del diseño didáctico según las características de los estudiantes.

EL DISEÑO

En esta comunicación se describe una parte del primer momento de la hoja de trabajo para el estudiante en los 4 niveles de profundidad distintos del diseño didáctico (Tabla 1). El diseño comienza con un texto sobre nado sincronizado acompañado de un video para contextualizar a los estudiantes en los Juegos Olímpicos y la natación. En los niveles N1 y N2, se proponen preguntas para guiar la comprensión de la situación y se sugiere al docente realizar una lluvia de ideas sobre el texto. Luego, los estudiantes organizan equipos de natación en parejas, usando la información de las primeras competencias.

En N1, los estudiantes utilizan material concreto, como stickers, para completar términos de una secuencia numérica basada en el número total de nadadores en las primeras cinco competencias. En N2, los estudiantes deben completar una secuencia numérica con la información de las dos primeras competencias. En los niveles N3 y N4, se trabaja tanto con secuencias numéricas como figurales. Los estudiantes reciben información visual sobre las cinco primeras competencias y deben predecir los términos de las competencias 6 y 7 (Kieran, 2004; Radford, 2010; Blanton y Kaput, 2005). En N4, se les pide predecir más términos que en N3.

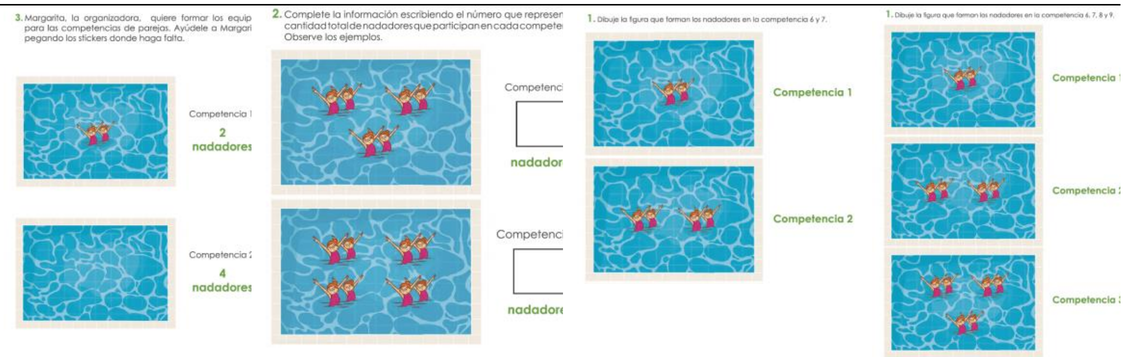
En actividades posteriores, se realizan preguntas que direccionan a los estudiantes a identificar el patrón de variación, teniendo en cuenta las capacidades cognitivas definidas en cada nivel de profundidad. Al finalizar cada momento, se posibilita la discusión de resultados para promover habilidades comunicativas como la explicación, justificación y argumentación.

Tabla 1.

Contexto y problema presentados en los diseños de nivel 1, 2 3 y 4

M 1	Diseño Nivel 1	Diseño Nivel 2	Diseño Nivel 3 y 4	Diseño Nivel 4
C O N T E X T O				

P
R
O
B
L
E
M
A



ALGUNAS REFLEXIONES

El diseño sobre secuencias y patrones, es un ejemplo de la propuesta curricular planteada por Jácome et al (2024) con la que se espera ofrecer herramientas conceptuales a los profesores para promover la atención a la diversidad en clase de matemáticas en Colombia, a través del estudio de un objeto matemático en cuatro niveles de profundidad distintos. Las actividades del diseño ofrecen diferentes formas de preguntas y solicitan diferentes opciones de respuestas con el fin de proporcionar múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y simbólicas; y proporcionar múltiples opciones para la comprensión, pues en los distintos momentos se introducen problemas presentados mediante texto escrito, pictórico, tabular, etc

Referencias

Aké, L., Hernández, J., Ordaz, M., Larios, J., y Parada, S. (2021). Formación de profesores de matemáticas: Avances para promover aulas de matemáticas inclusivas. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 6, 01-21.

Bojorque, G. y Gonzales, N. (2021). Patrones matemáticos en los niveles Inicial y Preparatoria: Análisis del currículo. *INNOVA Research Journal*, 6 (1), 47-60.

Blanton, M., y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.

González, P. (2005). La respuesta educativa a la diversidad desde el enfoque de las escuelas inclusivas: una propuesta de investigación. *Revista de Psicodidáctica*, 10(2), 97-109.

Jácome, I., Parada, S. y Fiallo, J. (2024). Curricular proposal to address diversity in mathematics class: A design on sequences and patterns. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20 (6), em2458. https://doi.org/10.29333/ejmste/14630

López-Mojica, J., Méndez, C., Ávila, M., y Olvera, B. (2017). Matemática Educativa y Educación Especial: Experiencias en investigación y del aula. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 2, 38-50.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.

UNA REVISIÓN DE LA LITERATURA SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES EN EL ESPECTRO CON FOCO EN EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

Sofía Salazar S., Colegio Santa María Lo Cañas; Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Juan Luis Piñeiro G., Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Abstract:

Esta investigación aborda la poca preocupación que ha existido sobre el conocimiento matemático para la enseñanza necesario para enseñar a estudiantes con Trastorno del Espectro Autista (TEA). Concretamente, se realiza una revisión de la literatura a través de bases de datos como SCOPUS, Web of Science y ERIC. Los resultados muestran la importancia de una formación especializada para profesores de educación especial, destacando que su conocimiento matemático es crucial para desarrollar estrategias de enseñanza adaptadas a estudiantes con TEA. Concluimos que es necesario mejorar la preparación de los docentes en las escuelas especiales para proporcionar una enseñanza de las matemáticas más inclusiva y efectiva, reconociendo la neurodiversidad y adaptando las intervenciones educativas.

Conocimiento del profesor, estudiantes TEA, revisión de la literatura

El conocimiento matemático para la enseñanza es entendido como el conocimiento profesional necesario para realizar las tareas recurrentes al enseñar matemáticas. La literatura ha mostrado que este conocimiento es crítico para fomentar el aprendizaje de las matemáticas escolares (e.g. Blömeke et al., 2022). No obstante, para los profesores de educación especial y principales encargados de atender a estudiantes con barreras en su aprendizaje, no se encuentra claramente delimitado (Piñeiro y Calle, 2021). Además, existe un grupo de estos docentes que se desempeñan en escuelas especiales en las que no hay docentes con formación en matemáticas escolares, por lo que las y los profesores de educación especial son los principales encargados de enseñar matemáticas. En este contexto, nos hemos preguntado ¿qué evidencia recoge la literatura sobre el conocimiento matemático para la enseñanza necesitan los docentes de educación especial para enseñar matemáticas a estudiantes con TEA? Para dar respuesta a la pregunta de investigación, nos planteamos sistematizar la literatura sobre las conocimiento profesional para profesores de educación especial que enseñan a estudiantes con TEA, con el fin de identificar necesidades de formación docente y estrategias pedagógicas más inclusivas y efectivas.

METODOLOGÍA

La revisión de la literatura de este trabajo ha seguido un Enfoque Hermenéutico (Boel y Cecez-Kecmanovic, 2014). En este enfoque, el proceso de revisión de antecedentes es entendido como un continuo en el tiempo, en el que el investigador interactúa con la investigación reportada de acuerdo a su contexto. Particularmente, la revisión de la literatura fue llevada a cabo mediante la exploración de tres bases de datos reconocidas: SCOPUS, Web of Science (WOS) y ERIC. Este proceso implicó una recopilación meticulosa y prolongada de información relevante en cada una de estas fuentes, combinando palabras clave como: («math*» or «mathematics» or «special education» or «profesor diferencial o “differential teacher” o “special teacher training” o “special educator”o “special educator training”) AND (“autism” o “ASD” o “autistic” o ”TEA” o “asperger”). Se incluyeron artículos publicados en revistas, así como capítulos de libros. Los resultados se limitaron por año de publicación, considerando los estudios publicados a partir del 2000, para posteriormente realizar una búsqueda manual de citas en revisiones anteriores.

Tras la primera etapa de búsqueda, se aplicó un filtro basado en el análisis de los resúmenes, lo que permitió reducir de manera significativa el número de documentos seleccionados. Un desafío destacado fue la escasa cantidad de publicaciones disponibles, de las cuales una proporción considerable aborda la temática "Matemáticas, educación especial y TEA" desde un enfoque predominantemente médico, apartándose de la perspectiva educativa. Estas últimas fueron excluidas de la presente revisión.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados los hemos organizado en tres apartados que se corresponden con los tres patrones que hemos identificado en la revisión realizada.

Diagnóstico

La reformulación de lo que se entiende por discapacidades y la comprensión de las barreras educativas, dentro y fuera del aula, es fundamental para proporcionar una educación matemática de calidad a estudiantes con discapacidad, reconociendo las diferencias neurológicas y el concepto de neurodiversidad (Tan et al., 2019). Según Martos-Pérez y Paula-Pérez (2011), el TEA es una alteración del neurodesarrollo, descrita en el DSM-5, que se caracteriza principalmente por dificultades en la interacción social y conductas repetitivas. Aunque estas características no son uniformes en todas las personas con TEA, es posible clasificarlas en diferentes grupos según su nivel de funcionalidad, como en el caso del HFA (Acevedo-Rincón, 2023). Estudios previos han explorado las diferencias entre el diagnóstico de Kanner y la concepción moderna del TEA, destacando las variaciones sintomatológicas y su impacto en la comprensión del autismo (Rodríguez et al., 2018).

Sin embargo, se ha prestado poca atención al rol de los profesores educación especial en la enseñanza de las matemáticas a estudiantes con TEA en escuelas especiales. Esto pues este grupo de estudiantes desafía el estereotipo de que tienen habilidades superiores en matemáticas pues aunque su rendimiento se sitúa dentro de la media normativa, es generalmente inferior al de sus compañeros con desarrollo típico (TD). La investigación muestra resultados inconsistentes debido a factores como las medidas utilizadas y las características de los participantes. Se destaca la importancia de intervenciones educativas personalizadas y tempranas para cerrar la brecha en el rendimiento matemático entre alumnos con TEA y TD (Rodríguez et al., 2018; Tonizzi y Usai, 2023; Schnepel y Aunio, 2021; Gevarter et al., 2016). Asimismo, es posible identificar diversas líneas de aprendizaje en base a este diagnóstico como, el estudio de Gevarter et al. (2016) se enfoca en el análisis de estrategias de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos en estudiantes diagnosticados con TEA, subrayando la necesidad de adaptar las estrategias de enseñanza a las características individuales de los estudiantes. Otro trabajo significativo es el de Schnepel y Aunio (2022), cuyos resultados sugieren que las intervenciones efectivas incluyen instrucción sistemática y explícita con retroalimentación y el uso de materiales manipulativos. Gersten et al. (2009) señalan que componentes de la enseñanza de matemáticas, tales como la instrucción explícita, el uso de representaciones visuales y manipulativas, y la enseñanza de estrategias metacognitivas, son significativamente más efectivos para mejorar el rendimiento de los estudiantes con discapacidad.

Formación profesores de educación especial

Por otra parte, se destaca la necesidad de abordar el rol de los docentes en la educación diferencial. Feng y Sass (2015 citado en Acevedo-Rincón et al.,2023) analizan las características que diferencian a los profesores de educación especial, centrándose en cómo la formación docente influye en el rendimiento académico de los estudiantes con discapacidades. Los resultados subrayan la relevancia de una formación especializada y continua en educación especial para optimizar el desempeño académico de estos estudiantes, resaltando la importancia de una capacitación constante de los educadores (Acevedo-Rincón et al,2023). En esto último, la literatura plantea limitaciones en la formación de profesores de educación especial en didácticas específicas, particularmente en matemática, así como en el conocimiento de las bases curriculares oficiales (Piñeiro y Calle, 2021). De hecho, la formación docente en educación especial se ha focalizado principalmente en un enfoque médico con especialidades por tipo de discapacidad (Rojas et al. 2021).

Conocimiento del profesor y aprendizaje de los estudiantes TEA

El conocimiento matemático es fundamental para los profesores que enseñan matemáticas, y en particular para los educadores especiales, ya que les permite diseñar e implementar estrategias de enseñanza efectivas (Sheppard y Wieman, 2020). Tan y colaboradores (2019) destacan que la formación profesional no solo mejora las prácticas inclusivas, sino que también ayuda a combatir el capacitismo en la enseñanza de la matemática. Schnepel y Aunio (2021) enfatizan que la inclusión debe ir más allá de agrupar a los estudiantes en un mismo espacio, enfocándose en alcanzar los objetivos dentro de un contexto de diversidad. Dado lo planteado es importante conocer el modo en que los docentes realizan las elecciones pedagógicas en escuelas especiales. En definitiva, a medida que se responsabiliza más a los estudiantes con TEA de cumplir con estándares académicos similares a los de sus compañeros (Schaefer-Whitby, 2013), la investigación sobre sus capacidades académicas, especialmente en matemáticas, ha cobrado relevancia. Sobre esto, destaca la necesidad de intervenciones específicas en matemáticas (Gevarter et al., 2016).

REFLEXIÓN FINAL

Este trabajo presenta tres grandes ideas sobre la enseñanza de las matemáticas a estudiantes TEA. Primero, el conocimiento sobre el diagnóstico es esencial para adaptar las estrategias pedagógicas a las necesidades de los estudiantes con TEA, permitiendo intervenciones más efectivas. Segundo, los profesores de educación especial suelen carecer de formación en enseñanza de la matemática, lo que limita su capacidad para diseñar estrategias de enseñanza inclusivas y efectivas. Tercero, la falta de preparación perpetúa métodos de enseñanza que no promueven el desarrollo del pensamiento matemático, ni una verdadera inclusión, afectando negativamente las oportunidades educativas y sociales de los estudiantes con TEA. Así, esta revisión inicia una reflexión crítica sobre las prácticas educativas inclusivas, destacando la necesidad de nuevas contribuciones que mejoren la preparación docente en escuelas especiales y la efectividad de los profesores de educación diferencial en la enseñanza de la matemática.

Agradecimientos

Trabajo financiado por Fondecyt Iniciación 11240835.

Referencias

Acevedo-Rincón, J., Flórez-Pabón, C. y Lizarazo-Cárdenas, E. (2023). Investigaciones sobre trastorno del espectro autista: un análisis de los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. *Revista Colombiana de Educación, 87*, 71-92.

Blömeke, S., Jentsch, A., Ross, N., Kaiser, G. y König, J. (2022). Opening up the black box: Teacher competence, instructional quality, and students' learning progress. *Learning and Instruction, 79,* 101600.

Boell, S. K. y Cecez-Kecmanovic, D. (2014). A hermeneutic approach for conducting literature reviews and literature searches. *Communications of the Association for Information Systems, 34*, 257-286.

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P. y Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research, 79*(3), 1202-1242.

Gevarter, C., Bryant, D. P., Bryant, B., Watkins, L., Zamora, C. y Sammarco, N. (2016). Mathematics interventions for individuals with autism spectrum disorder: A systematic review. *Review Journal of Autism and Developmental Disorders, 3*(3), 224-238.

Martos-Pérez J. y Paula-Pérez I. (2011). Una aproximación a las funciones ejecutivas en el trastorno del espectro autista. *Revista de Neurología, 52*(Supl. 1), S147-S153.

Piñeiro, J. L. y Calle, J. P. (2023). Mathematical knowledge for teaching in the initial education of special education teachers. *Acta Scientiae, 25*(5), 118-143

Rodrigues, I. B. y Angelucci, C. B. (2018). Estado da arte da produção sobre escolarização de crianças diagnosticadas com TEA. *Psicologia Escolar e Educacional*, *22*(3), 545-555.

Rojas, F., San Martín, C., Cáceres, A., Ramírez, C., Vega, V., Martínez, M. y Paniagua, X. (2021). Oportunidades de aprendizaje matemático para estudiantes con discapacidad intelectual en escuelas de educación especial. *Revista Brasileira de Educação Especial, 27*, 53-72.

Schaefer-Whitby, P. J. (2013). The effects of Solve It! on the mathematical word problem solving ability of adolescents with autism spectrum disorders. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities, 28*(2), 78-88.

Schnepel, S. y Aunio, P. (2021). A systematic review of mathematics interventions for primary school students with intellectual disabilities. *European Journal of Special Needs Education, 37*(4), 663-678.

Sheppard, M. y Wieman, R. (2020). What do teachers need? Math and special education teacher educators' perceptions of essential teacher knowledge and experience. *Journal of Mathematical Behavior, 59*, 100798.

Tan, P., Lambert, R., Padilla, A. y Wieman, R. (2019). A disability studies in mathematics education review of intellectual disabilities: Directions for future inquiry and practice. *The Journal of Mathematical Behavior, 54*, 100672. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.09.001

Tonizzi, I. y Usai, M. C. (2023). Math abilities in autism spectrum disorder: A meta-analysis. *Research in Developmental Disabilities, 139*, 104559. https://doi.org/10.1016/j.ridd.2023.104559

CURIOSIDAD EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO EN EL CONTEXTO DEL RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL

Rocío García Ambiado, Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles.

Monserratt Pinto Grandón, Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles.

Sergio Morales Candia, Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles.

Abstract:

La investigación busca estudiar la manifestación de la curiosidad en el contexto del razonamiento inferencial informal en educación básica e identificar aspectos de una lección que la promueven en el aula. Para ello, se optó por un enfoque metodológico de carácter cualitativo orientado por teoría fundamentada. Los participantes son estudiantes chilenos de quinto básico, con quienes se implementó una lección diseñada en el contexto del Estudio de Clases. Para abordar el estudiar la curiosidad la lección fue filmada y transcrita en su totalidad, para luego ser codificada mediante los procesos de codificación, abierta, axial y selectiva. Como resultado de este estudio en desarrollo, se espera identificar desde los datos la estructura teórica de la curiosidad manifestada por los estudiantes en el contexto de tareas de razonamiento inferencial informal y a su vez identificar aspectos de la lección y de la gestión del docente que la promueven en el aula.

Palabras clave: Curiosidad, Razonamiento Inferencial Informal, Incertidumbre, Estudio de Clases

INTRODUCCIÓN

La matemática es accesible a los niños desde la educación básica, convirtiéndose en una herramienta esencial para el desarrollo del pensamiento crítico, analítico y lógico de los estudiantes (MINEDUC, 2018). Sin embargo, Rahayuningsih et al. (2023) reportan la existencia de formas de trabajo en el aula que obstaculizan el desarrollo de esta disciplina. Por ejemplo, Jirout et al. (2022), indican que las tareas de instrucción planteadas tradicionalmente en la escuela a menudo se enfocan en obtener respuestas correctas, limitando la exploración y cuestionamiento de los estudiantes, aspectos fundamentales para el desarrollo de la curiosidad. De acuerdo con Hidi y Renninger (2020) la curiosidad se ha considerado durante mucho tiempo un importante motivador del aprendizaje. Fomentar la curiosidad conlleva beneficios a largo plazo, ya que esta actitud motiva a las personas a buscar más información sobre un objeto o fenómeno (Kupor et al., 2020). Sin embargo, existe una preocupación respaldada por investigaciones que sugieren una disminución de la curiosidad en la escuela conforme los estudiantes avanzan en los grados, posiblemente debido a las prácticas educativas (Jirout, 2020; Huang et al., 2024), siendo muy bajos en 1°grado, y casi completamente ausentes en 5° grado (Engel y Randall, 2009) Aunque la escuela debería constituir un ambiente propicio para fomentar la curiosidad, la evidencia indica que esto no siempre ocurre (Evans et al., 2023). Por otro lado, de acuerdo con Dewey (1989), los docentes deben proporcionar las condiciones y materiales necesarios para orientar la curiosidad hacia investigaciones con objetivos definidos. En este contexto el razonamiento inferencial informal podría ser una oportunidad para promover la curiosidad en aula, pues, como indica

Estrella et al. (2023) en su estudio, al incitar a los estudiantes a cuestionar los datos y las inferencias informales que surgían, mediante el fomento de la curiosidad intelectual de los niños la docente hizo posible que expresaran su razonamiento en desarrollo con respecto al estocástico. En el ámbito educativo, se destaca la importancia del razonamiento inferencial informal definido por Pfannkuch (2006) como "la extracción de conclusiones a partir de datos que se basa principalmente en observar, comparar y razonar a partir de distribuciones de datos". De esta manera se plantean las siguientes preguntas de investigación ¿Cómo se manifiesta la curiosidad en estudiantes de quinto grado en el contexto de clases basadas en el razonamiento inferencial informal? ¿Qué prácticas de enseñanza, asociadas al razonamiento inferencial informal, promueven la curiosidad en estudiantes de quinto grado?

Para atender las preguntas de investigación planteamos como objetivo investigar la manifestación de la curiosidad en estudiantes como resultado de su participación en lecciones de quinto grado asociadas a tareas de razonamiento inferencial informal.

ELEMENTOS TEORICOS O CONCEPTUALES

La curiosidad, según Jirout y Klahr (2012), se caracteriza por el deseo humano de buscar información para resolver vacíos de conocimiento causados por la incertidumbre o la ambigüedad. Surge al percibir una discrepancia entre lo que sabemos y lo que queremos saber e impulsa la exploración y la búsqueda de información, facilitando así el aprendizaje (Kupor et al., 2020; Wang y Huang, 2018). La curiosidad no solo es un estado emocional de búsqueda, sino también un impulso vital que motiva a las mentes a explorar, descubrir y aprender, fomentando así el crecimiento del conocimiento y la flexibilidad ante nuevas situaciones (Goupil y Proust, 2022). La curiosidad se caracteriza por ser multidimensional incluyendo procesos afectivos, cognitivos, motivacionales, fisiológicos y expresivos, impulsando a las personas a actuar cuando se encuentran con un objeto importante que capta su atención y genera curiosidad (Chamorro, 2020; Jirout y Klahr, 2012; Jirout et al., 2022). Román (2016), señala cuatro indicadores que evidencian a un niño curioso: reacciona de forma positiva ante cosas nuevas, misteriosas o extrañas en su entorno (se acerca, observa, escucha y manipula); expresa la necesidad o deseo de saber más sobre sí mismo o su entorno, formulando preguntas y afirmaciones; busca nuevas experiencias en su entorno; y persiste en explorar y examinar las cosas, con el objetivo de aprender más sobre ellas.

ELEMENTOS METODOLOGICOS

Para estudiar la manifestación de la curiosidad en el contexto del razonamiento inferencial informal empleamos como método de investigación la teoría fundamentada descrita por Glaser (1992), en que la recolección de datos y la aplicación sistemática de métodos se llevan a cabo simultáneamente para generar una teoría inductiva sobre un área específica. La investigación se estructura en dos fases: La fase 1 que consiste en el diseño e implementación de lecciones de aprendizaje a partir de las etapas del Estudio de Clases propuestas por Isoda et al. (2012) compuesto por un grupo de estudio de clases de tres investigadores; y la fase 2, en que se operacionalizarán las tres etapas de la teoría fundamentada, las cuales son codificación abierta, codificación axial y codificación selectiva, para investigar la manifestación de la curiosidad en estudiantes como resultado de su participación en la lección asociadas a tareas de razonamiento inferencial informal. Participan de este estudio estudiantes de dos cursos de 5to básico de 20 alumnos aproximadamente cada uno, pertenecientes a dos escuelas de la Región del Biobío en las cuales las dos investigadoras realizaron práctica profesional. El estudio de Clases contempló el diseño de un plan de la lección que fue implementado y mejorado, para luego ser implementado en un nuevo curso. Se consideran como fuentes de datos (i) videograbación de la lección mejorada de 45 minutos a analizar.

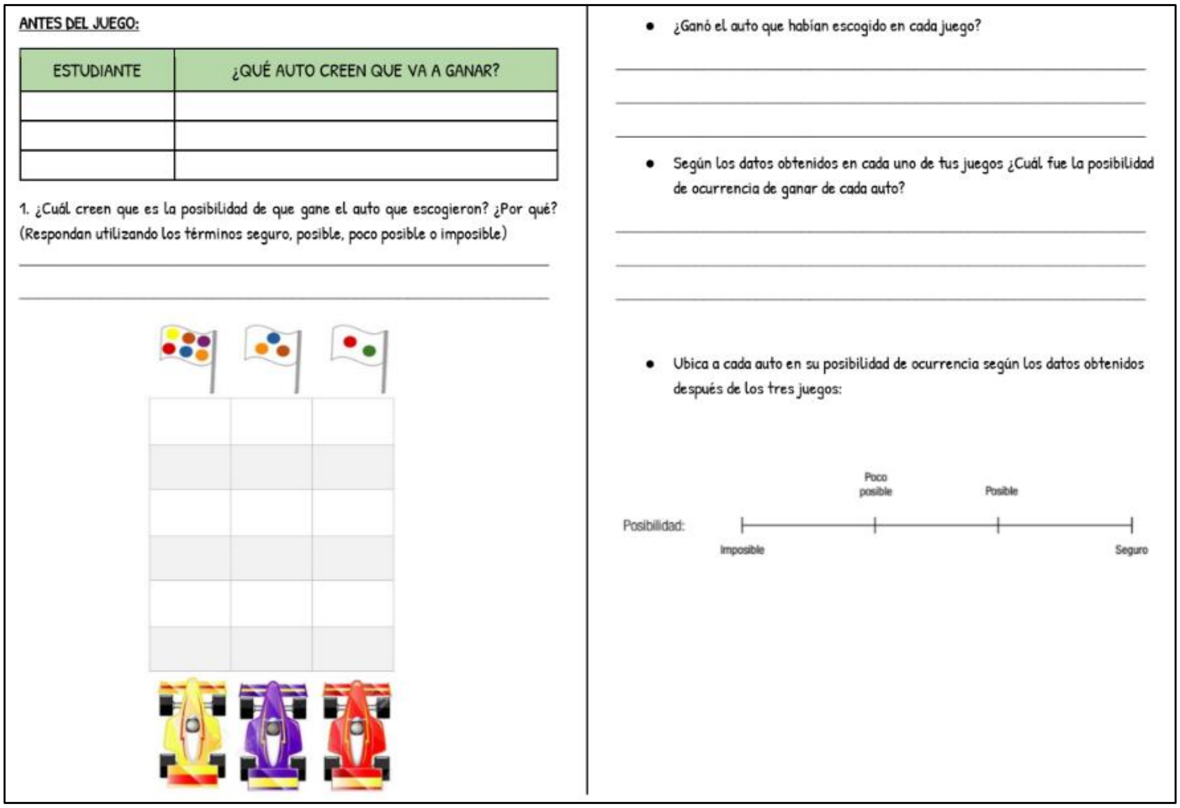
RESULTADOS

En la fase l, el Grupo de Estudio de Clases diseñó el plan de la lección, con dos implementaciones que permitieron la reformulación de este, con foco en MA05 OA24 [3]y OA25[4] del eje datos y probabilidades de 5º grado. A continuación, se presenta la tarea central (Figura 1) “te invitamos a jugar en la siguiente pista de carrera de posibilidad de ocurrencia en donde se encuentran 3 autos que harán una carrera para llegar a la meta. Para conocer cuál es el auto ganador, debes experimentar lanzando un dado de 6 colores en el que obtendrás un color y avanzará el auto que tenga el color en su bandera. Repítelo hasta llegar a la meta y ¡ENCONTRARÁS EL GANADOR!, marca con una X cada vez que un auto avance”.

Figura 1

Tarea de la lección para promover la curiosidad en contextos de razonamiento inferencial informal

[3]MA05 OA24: Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando los términos seguro – posible - poco posible - imposible.
[4]MA05 OA25 Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.



ANTES DEL JUEGO:

ESTUDIANTE	¿QUÉ AUTO CREEN QUE VA A GANAR?

1. ¿Cuál creen que es la posibilidad de que gane el auto que escogieron? ¿Por qué? (Respondan utilizando los términos seguro, posible, poco posible o imposible)

- ¿Ganó el auto que habían escogido en cada juego?
- Según los datos obtenidos en cada uno de tus juegos ¿Cuál fue la posibilidad de ocurrencia de ganar de cada auto?
- Ubica a cada auto en su posibilidad de ocurrencia según los datos obtenidos después de los tres juegos:

La fase 2 de este trabajo se encuentra en procesos iniciales de desarrollo, sin embargo, preliminarmente es posible comentar que, a través esta tarea lúdica, se observa cómo los estudiantes se involucran y muestran interés activo en el aprendizaje, lo que sugiere que la propuesta de enseñanza innovadora puede incentivar la curiosidad. Así mismo, las revisiones preliminares indican que la retroalimentación docente, como la valoración del proceso por sobre el resultado, la aclaración del contenido y el refuerzo positivo, en el proceso educativo juega un rol fundamental en la promoción de la curiosidad. La posterior presentación de este trabajo contemplará la incorporación de los resultados y conclusiones asociadas a la operacionalización de la fase 2 de este trabajo.

CONCLUSIONES

A partir de los análisis exploratorios preliminares, se concluye que la planificación cuidadosa de las lecciones mediante el Estudio de Clases permite no solo el desarrollo académico de los estudiantes, sino también la manifestación de su curiosidad natural. Las modificaciones realizadas en los planes de lecciones producto de implementaciones previas reflejan la importancia de la retroalimentación en el proceso educativo y facilitaron la identificación de errores comunes y la adaptación de los materiales y métodos, lo que condujo a un desarrollo más efectivo de las actividades en implementaciones subsiguientes. La investigación evidenció que la curiosidad de los estudiantes se tradujo en un razonamiento inferencial activo, a pesar de los errores cometidos en las primeras implementaciones, la predisposición de los estudiantes hacia el análisis y la toma de decisiones basadas en datos se hizo evidente y se incrementó en la siguiente lección. Esto sugiere que la curiosidad puede ser un motor poderoso para el aprendizaje matemático cuando se apoya con estrategias adecuadas.

Referencias

Chamorro, E. (2020). Curiosidad e interés por aprender en los estudiantes en el aula de clase [Tesis de maestría]. UASB. UASB-Digital: Curiosidad e interés por aprender en los estudiantes en el aula de clase

Estrella, S., Méndez-Reina, M., y Vidal-Szabó, P. (2023). Exploring informal statistical inference in early statistics: a learning trajectory for third-grade students. *Statistics Education Research Journal*, *22*(2), 10. https://doi.org/10.52041/serj.v22i2.426

Evans, N., Burke, R. W., Vitiello, V. E., Zumbrunn, S., y Jirout, J. (2023). Curiosity in classrooms: An examination of curiosity promotion and suppression in preschool math and science classrooms. *Thinking Skills and Creativity*, 49, 101333. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2023.101333

Goupil, L., y Proust, J. (2022). Curiosity as a metacognitive feeling. PsyArXiv. https://doi.org/10.31234/osf.io/c8a6t

Huang, H., Tang, X., y Salmela-Aro, K. (2024). Facilitating Youth's Curiosity in Learning: Needs-based Ecological Examinations. *Journal of youth and adolescence*, *53*(3), 595-608. https://doi.org/10.1007/s10964-023-01936-x

Jirout, J., y Klahr, D. (2012). Children's scientific curiosity: In search of an operational definition of an elusive concept. *Developmental Review*, *32*(2), 125-160. https://doi.org/10.1016/j.dr.2012.04.002

Jirout, J., Zumbrunn, S., Evans, N., y Vitiello, V. E. (2022). Development and Testing of the Curiosity in Classrooms Framework and Coding Protocol. *Frontiers In Psychology*, 13. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.875161

Kupor, D., Jia, J. S., y Tormala, Z. L. (2020). Change Appeals: How Referencing Change Boosts Curiosity and Promotes Persuasion. *Personality & Social Psychology Bulletin*, *47*(5), 691-704. https://doi.org/10.1177/0146167220941294

MINEDUC. (2018). Bases Curriculares Primero a Sexto Básico. Currículum Nacional. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Bases-curriculares/

Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. IASE — Conference Proceedings: ICOTS 7 2006

Rahayuningsih, S., Ikram, M., y Indrawati, N. (2023). Learning to promote students' mathematical curiosity and creativity. *Uniciencia, 37*(1), 1-13. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.6

PERCEPCIÓN DEL ERROR EN EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA BÁSICA. UN ESTUDIO DE CASO MÚLTIPLE

Matías Arellano Salinas y Víctor Díaz Bocaz

Universidad del Bío-Bío

Abstract:

Este estudio explora las nociones de error en matemáticas desde la perspectiva de los estudiantes. Mientras que autores como Socas (2007), Radatz (1979) y Movshovitz (1987) han abordado los errores comunes en el aprendizaje, sus definiciones no incorporan las ideas de los propios estudiantes, quienes son los protagonistas en estas situaciones. A través de cuestionarios aplicados a estudiantes de sexto básico, se analizó cómo perciben y enfrentan los errores en matemáticas. Los resultados revelan que los estudiantes tienden a vincular sus nociones de error con las teorías establecidas, mostrando una postura positiva hacia la retroalimentación como un medio clave para aprender. Sin embargo, también se evidenciaron dificultades en la articulación y comunicación de ideas, así como una fuerte dependencia de ejercicios anteriores, lo que puede llevar a errores si estos contienen procedimientos inadecuados. Además, se identificó que muchos errores se deben a la rigidez del pensamiento, al mal uso de datos y al empleo incorrecto de teoremas o definiciones. En conclusión, el estudio subraya la necesidad de considerar las perspectivas de los estudiantes sobre el error para desarrollar estrategias pedagógicas más efectivas en el aprendizaje de las matemáticas

Error, Percepción, Retroalimentación, Estrategias

INTRODUCCIÓN

En pedagogía, el error es una herramienta de retroalimentación valiosa que permite desarrollar estrategias para reconstruir el proceso de aprendizaje y corregir errores. No obstante, la definición del error es compleja y varía según el contexto, especialmente en matemáticas, donde se asocia con procedimientos incorrectos en la resolución de problemas.

Este estudio tiene como objetivo principal analizar la percepción del error en matemáticas desde la perspectiva de los estudiantes de Sexto Básico, evaluando cómo estos entienden y reaccionan ante sus propios errores en contextos de aprendizaje. Además, se busca identificar que tipos de errores son más comunes y cómo estos impactan su proceso de aprendizaje, con el fin de proponer estrategias pedagógicas que aprovechen el error como una oportunidad para el desarrollo cognitivo y la reflexión crítica. Este trabajo busca definir el error desde la perspectiva de los estudiantes, quienes lo generan y experimentan directamente. Según Gamboa Araya et al. (2019), los estudiantes poseen conocimientos previos que pueden facilitar o entorpecer la construcción de nuevos conocimientos, mostrando errores en el proceso.

Aunque en la literatura se ha documentado ampliamente el papel de los errores en la retroalimentación del proceso de enseñanza-aprendizaje se subraya la necesidad de explorar cómo los estudiantes perciben y manejan sus propios errores, un área que, aunque mencionada, a menudo no se aborda con suficiente profundidad, lo que nos llevó a preguntarnos para la investigación ¿Qué percepción tienen los estudiantes sobre el error en las matemáticas?

ELEMENTOS TEÓRICOS

Se aborda el concepto de error en el aprendizaje de las matemáticas desde diferentes perspectivas. Se destaca la definición de Socas (2007), quien ve el error como un esquema cognitivo inadecuado, más allá de simples fallos de conocimiento. Briceño (2009) añade que el error suele ser penalizado en entornos educativos, siendo visto como un acto disfuncional.

La investigación, desde una perspectiva constructivista, considera el error como una oportunidad para el desarrollo del conocimiento, no como una deficiencia. Siguiendo a Martínez-Artero y Checa (2016), se plantea que los errores, más que ser culpados, deben anticiparse y utilizarse para fomentar el pensamiento crítico y pedagógico.

Siguiendo a Radatz (1979), los errores en el aprendizaje se deben a una base conceptual frágil, estrategias inadecuadas o problemas en el procesamiento de la información. Aunque en este estudio no se exploran factores emocionales como el estrés, se reconoce que los errores no controlados pueden generar rechazo y frustración. El profesorado puede utilizar los errores para mejorar el aprendizaje y evaluar el estado cognitivo de los estudiantes. Parra y Santos (2016) vinculan el error a situaciones problemáticas cotidianas y lo ven como un generador de autoanálisis.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Esta investigación cualitativa y adopta un diseño de estudio de caso para profundizar en la percepción de los errores en matemáticas. Participaron 47 estudiantes de sexto básico de un colegio particular subvencionado en Chillán. Se usa un muestreo no probabilístico por conveniencia con sujetos seleccionados por su accesibilidad (McMillan y Schumacher, 2010). Siguiendo a Balcázar Nava et al. (2013) y utilizando la teoría fundamentada de Heath y Cowley (2004), se estructuró un cuestionario en dos partes: la primera aborda la noción del error con preguntas abiertas, y la segunda, a través de una actividad matemática dividida en cinco categorías de errores (lenguaje, información espacial, aprendizajes deficientes, rigidez del pensamiento y reglas irrelevantes). El cuestionario fue validado mediante prueba piloto y revisión por par experto.

Para el análisis de datos se elaboraron dos rúbricas, una para cada cuestionario. La primera rúbrica (Noción de error) analiza las definiciones conceptuales, el reconocimiento del error, su interpretación y las propuestas de uso del mismo. Dentro de ello, además de estudiar las respuestas se aprecia que los estudiantes implementen en sus respuestas factores del aula y ejemplos.

La segunda rúbrica (Presencia de errores) analiza los cinco tipos de error de Radatz (1979), considera a nivel general la elaboración apropiada de diagramas, explicación de procesos, recolección de información a partir del enunciado o imágenes, uso de lenguaje matemático y por supuesto cálculos adecuados.

Teniendo un análisis bajo la rúbrica de cada estudiante, se construyen síntesis interpretativas que consideren las conductas más reiteradas o significativas de los estudiantes para cada item.

RESULTADOS

A continuación, se presentan resultados generales de la investigación resumidos en dos tablas que contienen la síntesis interpretativa de las dos categorías centrales de la investigación; noción de error y tipos de errores.

Tabla 1

Síntesis interpretativa de la noción de error

Categorías	Síntesis Interpretativa
Definición conceptual	La noción del error se asocia principalmente a fallas procedimentales, implicando que la matemática se centra solo en resolver ejercicios. Esto limita la concepción del error en aspectos conceptuales, como el aprendizaje de nuevos contenidos o la falta de abstracción en modelos matemáticos presentados en clase.
Reconocimiento del error	Los estudiantes reconocen principalmente sus errores procedimentales y señalan a compañeros al identificar errores ajenos, sugiriendo que perciben al profesor como intachable o que sus errores pasan desapercibidos.

Interpretación del error	Los estudiantes perciben el error como una oportunidad de retroalimentación positiva, asociándolo con el aprendizaje cuando se les corrige. Aunque reconocen que "de los errores se aprende", no profundizan en otras cualidades del error. El profesor es visto como clave en la justificación y explicación durante la retroalimentación.
Propuesta de uso	Como la mayoría de las respuestas consistió en sugerencias que consideraban actividades de retroalimentación, es bastante probable que el docente no tome en cuenta este tipo de procedimientos, esto fue señalado en algunas respuestas.

Tabla 2

Síntesis interpretativa de los tipos de errores

Categorías	Síntesis Interpretativa
Falta de aprendizaje	Los estudiantes comprenden bien los diagramas, especialmente los de puntos, pero cometen más errores en los de tallo y hojas. Los errores se deben a la mala representación de datos y falta de atención a los enunciados. Se observa buena capacidad de inferencia, pero falta profundizar en las justificaciones de los procedimientos.
Dificultades del lenguaje	Los estudiantes manejan bien los datos y conceptos matemáticos, hay un buen control ante el paso de situaciones matemáticas a situaciones reales y viceversa. Es necesario mejorar la redacción y practicar la escritura, puesto que, si bien se atendieron la mayoría de las situaciones, fueron respuestas muy breves y puntuales.
Dificultades espaciales	Los estudiantes asimilan situaciones gráficas con contenido matemático, infieren información y generan problemas básicos y se interpretan características principales. No se maximiza la inferencia, las interpretaciones son limitadas y la presentación de datos de manera simple sugiere las mismas dificultades mencionadas en el caso anterior.
Reglas irrelevantes	Aunque algunos estudiantes aplican reglas correctamente, la mayoría arrastra errores de ejemplos previos y muestra resistencia a nuevas reglas, limitando la adaptación a ejercicios no tradicionales. La falta de detalles en los procedimientos también dificulta una comprensión flexible de los conceptos.
Rigidez del pensamiento	La mayoría de los estudiantes se adapta bien a nuevas estrategias y representaciones, infiere información y elige métodos adecuados, aunque algunos dependen de ejercicios previos y tienen dificultades con la transformación de unidades de medida.

CONCLUSIONES

La investigación recopiló y analizó las percepciones de los estudiantes sobre el concepto de error, proporcionando una perspectiva desde la posición de estudiantes de sexto básico.

Aunque las definiciones de Socas (2007), Radatz (1979) y Movshovitz (1987) se centran en los errores comunes, no consideran directamente las voces de los estudiantes. Los resultados mostraron que las nociones de error de los estudiantes, si bien están alineadas con las teorías existentes, muestran matices importantes desde la experiencia personal de los estudiantes.

Se pudo observar que la noción de error de los estudiantes se asocia predominantemente a fallas procedimentales, lo que refleja una visión matemática centrada en la resolución de ejercicios y no en aspectos conceptuales o de aprendizaje más profundo. Aunque los estudiantes reconocen sus errores procedimentales y los de sus compañeros, perciben al profesor como una figura intachable, lo que podría limitar la percepción de la retroalimentación como algo bidireccional y colaborativo.

Los estudiantes demostraron una postura positiva hacia los errores, valorando la retroalimentación como una herramienta clave para aprender, pero esto ciertamente no profundiza con las otras dimensiones del error según varios autores (Socas, 2007; Radatz, 1979; Movshovitz, 1987). La mayoría entiende bien los contenidos, aunque los errores suelen surgir por datos mal registrados más que por falta de aprendizaje. Sin embargo, los estudiantes enfrentan dificultades para articular y comunicar ideas de forma clara y dependen mucho de ejercicios anteriores, lo que puede ser problemático si estos contienen errores. Se sugiere implementar estrategias de retroalimentación activa, como el análisis colectivo de errores (Radatz, 1979), que permita a los estudiantes identificar, reflexionar y corregir sus propios procedimientos. Además, fomentar la revisión crítica mediante actividades guiadas puede transformar los errores en herramientas clave para el desarrollo cognitivo (Parra y Santos, 2016).

Estos hallazgos subrayan la importancia de considerar la perspectiva estudiantil en la gestión de los errores y sugieren estrategias pedagógicas que promuevan una comunicación más clara y la revisión crítica de los ejemplos previos podrían ser clave para mejorar el aprendizaje.

Referencias

Balcázar Nava, P., González-Arratia López-Fuentes, N. I., Gurrola Peña, G. M., & Moysén Chimal, A. (2013). *Investigación cualitativa*. México: Trillas.

Briceño, M. (2009). *El uso del error en los ambientes de aprendizaje: Una visión transdisciplinaria*. Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Gamboa Araya, R., Castillo Sánchez, M., y Hidalgo Mora, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades investigativas en educación*, *19*(1), 104–136

Heath, H., y Cowley, S. (2004). Developing a grounded theory approach: a comparison of glaser and strauss. *International journal of nursing studies*, *41*(2), 141–150.

Martínez-Artero, R. N., & Checa, A. N. (2016). Resolución de problemas, errores y dificultades en el grado de maestro de primaria. *Revista de investigación educativa*, *34*(1), 103-117.

McMillan, J., & Schumacher, S. (2010). *Investigación educativa: Una introducción conceptual.* Madrid: Pearson Educación.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in mathematics Education*, *18*(1), 3-14.

Parra, F. V., & Santos, S. A. G. (2016). El error como oportunidad para reflexionar y tomar decisiones asertivas en el aprendizaje de las matemáticas. *Journal for Research in mathematics Education*, *10*(16), 34-42.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in mathematics Education*, *10*(3), 163-172.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En *Investigación en educación matemática: Comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM* (pp. 19-52). SEIEM.

Integrar el conocimiento matemático mapuche en la formación docente

Javiera Barría Rivas, Universidad Católica de Temuco

Víctor Figueroa Hernández, Universidad Católica de Temuco

David Martínez Martínez, Universidad Católica de Temuco

Constanza Montesino Hernández, Universidad Católica de Temuco

Anahí Huencho Ramos, Universidad Católica de Temuco

Resumen:

Hace dos siglos, la educación monocultural eurocentrista desplazó el conocimiento matemático mapuche, una tendencia que ha perdurado hasta hoy, afectando todos los niveles de enseñanza básica, media y superior en Chile. A pesar de los esfuerzos por integrar estos saberes ancestrales mediante decretos y leyes, estas medidas no han logrado una incorporación efectiva y significativa en el sistema educativo. En el contexto actual, caracterizado por una creciente diversidad cultural presente en todas las regiones, especialmente en la Araucanía, es crucial equilibrar el conocimiento matemático mapuche con el dominante en las aulas escolares. Sin embargo, uno de los mayores desafíos radica en la falta de políticas que promuevan una enseñanza culturalmente responsable desde la formación inicial docente, además del desconocimiento de los profesores de matemáticas sobre la tecnología y los modelos de enseñanza mapuche. Esto impide atender de manera adecuada las diversas demandas de los estudiantes, particularmente aquellos de origen mapuche. Por lo tanto, es urgente balancear ambos conocimientos en la formación de futuros docentes e investigar las implicancias de esta integración en la práctica educativa. Solo de esta manera se podrá avanzar hacia una educación más inclusiva, equitativa y respetuosa, que valore la rica diversidad cultural presente en el país.

Formación inicial docente, conocimiento matemático mapuche, matemática culturalmente responsable, Educación Intercultural.

Antecedentes.

La escolarización de los pueblos indígenas de Chile, en concreto, el pueblo mapuche, comienza en el siglo XVIII y XIX, cuando se formaron escuelas monoculturales. Como consecuencia inmediata, el conocimiento indígena fue desplazado (Huencho et al., 2021). Fue la exclusión de los conocimientos educativos mapuches, tanto de forma explícita como implícita lo que perpetuó un modelo de supremacía (Quilaqueo y Torres, 2013).

En el campo de la educación matemática, una de las limitantes al incorporar los conocimientos matemáticos mapuches, son los programas de estudios del sistema educativo chileno, de este mismo modo no se dispone del espacio necesario para poder incorporar otros tipos de conocimientos que no estén previamente establecidos en el currículum (Peña-Rincón y Hueitra-Santibañez, 2016).

En la formación inicial docente, gran parte de las instituciones no están capacitadas para integrarlo en la formación profesional, por lo tanto uno de los mayores desafíos para incorporar una educación matemática culturalmente responsable es su ausencia en el programa de formación inicial docente (Aroca et al., 2016).

El objetivo principal de este estudio es comprender las implicancias de integrar el conocimiento matemático mapuche en la formación inicial docente, a través de diversas entrevistas las cuales sus focos principales serán, la Formación Inicial Docente (FID), conocimiento matemático mapuche, programas, empaquetamiento y la pertinencia. Para esto se plantean preguntas de investigación ¿Cuáles son las implicancias de integrar el conocimiento matemático mapuche en la formación inicial docente?, ¿Cuáles son las categorías de las implicancias de integrar el conocimiento matemático mapuche en la formación inicial docente?, y ¿Cómo las categorías de las implicancias influyen en la integración del conocimiento matemático mapuche en la formación inicial docente?

Enseñanza matemática culturalmente responsable.

Parker et al., (2017), propone que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva cultural comienza al reconocer que la clase de matemáticas es parte del sistema educativo y del contexto educacional. Con base en lo anterior, Nasir et al., (2008) sostiene que el conocimiento matemático se vincula naturalmente con las prácticas culturales, identificando tres niveles de conexión. Primero, las matemáticas se ven como una actividad cultural, contrastando las matemáticas de prácticas habituales con las matemáticas escolares y formalizadas. Segundo, el aprendizaje de las matemáticas se presenta como una empresa cultural, generando tensiones entre el aula y la comunidad de los estudiantes. Tercero, la estructura de la educación matemática se considera un sistema cultural, enfocándose en las oportunidades y la ubicación en el área de las matemáticas. Gracias a estos niveles de relación, Bonner (2014) define la enseñanza matemática culturalmente responsable como aquella que introduce los conceptos sofisticados de las teorías matemáticas a través de las costumbres e identidad cultural del estudiante.

Dado que los docentes no están formados culturalmente, los educandos indígenas pueden sentirse desconectados de su entorno, ya que viven día a día luchando entre dos mundos: el indígena y el no indígena (Handayani et al., 2018). Por lo tanto, es evidente que preparar a los profesores para enseñar a estudiantes de diferentes orígenes raciales, étnicos, sociales y lingüísticos es una prioridad en la formación docente actual y continuará siéndolo en el futuro.

Aunque existe una resistencia a los efectos homogeneizadores y normalizadores de la globalización y descentrar las epistemologías occidentales (Hogarth, 2022), esta homogeneidad se enfrenta a obstáculos significativos.

Esto se debe a que la formación inicial docente, tradicionalmente se ha seguido una concepción platónica de la matemática, en la que se supone que los seres humanos descubren nociones matemáticas preexistentes en el mundo de las ideas, esta perspectiva se ha mostrado como la única opción posible, sin detallar el origen y la evolución de los conceptos matemáticos tratados, ni considerar otras formas de matematización (Peña-Rincón y Hueitra-Santibañez, 2016).

Desde la investigación se llama al incorporar saberes ancestrales contextualizados al territorio a los programas, desde el análisis cualitativo se puede concluir que una buena manera de transversalizar la educación mediante la interacciones de carreras que compartan e intercambien conocimientos. Un ejemplo concreto de esto es una actividad realizada entre la carrera Pedagogía en Educación Básica Intercultural en Contexto Mapuche y Pedagogía en Educación Física.

Conocimiento matemático mapuche.

La construcción del conocimiento cultural mapuche depende de las relaciones parentales, la historia y territorio local, pues articulan la educación del hogar en el periodo que conlleva desarrollar el ser mapuche (Quintriqueo et al., 2015). Los roles como maestro y aprendiz se practican de forma bidireccional y su relación está fundada en distintas actividades culturales típicas del pueblo mapuche donde se observan tópicos conceptuales, procedimentales y valóricos-actitudinales. (Quilaqueo et al., 2016). Por tanto, desde una perspectiva de las matemáticas, el hacer matemáticas tiene sentido en sí mismo y estas se construyen dentro de espacios donde los conceptos y prácticas matemáticas se ubican histórica y culturalmente en lógicas de relatos o actividades en distintos grupos socioculturales (Sierpinska y Lerman, 1996).

Metodología.

Este escrito busca integrar el conocimiento matemático mapuche en la formación inicial docente mediante un enfoque cualitativo, utilizando la investigación participativa basada en comunidad (IPBC) y la etnografía visual. La IPBC permite la colaboración equitativa entre la comunidad mapuche, docentes y académicos en el proceso de investigación, enfatizando la copropiedad del diseño, evaluación y ejecución (Simpson y Mendenhall, 2022). La etnografía visual, por su parte, facilita que los participantes expresen detalladamente sus percepciones mediante medios visuales, reflejando sus realidades (Thompson, 2019).

Respecto a los participantes de la investigación se centrará en sabios mapuches, tomadores de decisiones, académicos de educación (de ascendencia mapuche y no mapuche), profesores de matemática y estudiantes universitarios. Se busca un equilibrio entre participantes mapuche y no mapuche, seleccionados según su conocimiento y experiencia en su rol, así como su participación laboral y social en el territorio de estudio. Lo cual es triangulado con foco en la participación comunicativa, en donde todos los participantes se reunieron para conversar el tema, reforzando las ideas previas. Por último, el equipo de investigación está compuesto por estudiantes de pregrado y una doctora en educación.

Para la validación de datos se genera una comprobación de unicidad en las conversaciones, donde todos los participantes, mapuche, no mapuche, académicos y no académicos tiene una misma visión sobre la incorporación de conocimientos mapuche en la formación docente, en concreto se observa la necesidad y el acuerdo en programas que no caigan en folclorizar la cultura mapuche.

Resultados preliminares.

La recolección de datos en esta investigación se realizó mediante grabaciones de voz y video, que fueron transcritas y analizadas utilizando un enfoque de análisis de contenido inductivo, adecuado para fenómenos poco conocidos (Elo y Kyngäs, 2008). Este análisis consta de tres etapas: preparación, organización e informe. En la fase de preparación, se revisaron exhaustivamente las transcripciones para familiarizarse con los datos. En la organización, se llevó a cabo una codificación abierta mediante el uso de software "ATLAS.ti" para identificar conceptos clave y crear categorías. Luego, los investigadores discutieron y jerarquizaron estas categorías antes de compartirlas con una mediadora para recibir retroalimentación (Dubnewick et al., 2018).

Finalmente, en la fase del informe, se destacan "uno de los profes que trabaja, que también es profe, pero él es lonko yo lo traje más que porque fuera profe (…) lo traje más por su conocimiento como lonko de su comunidad, (...) cosa que yo no tenía. Entonces creo que eso implica tener que incorporar otros actores en el proceso educativo que no están actualmente. Si existen educadores tradicionales, vuelvo a insistir, en las carreras de básica y de lengua cultural, pero la pregunta es, ¿por qué no podíamos tener apoyos las otras carreras con ese tipo?" y "nosotros en plan común nos toca clases con profesores, claro, de otras áreas y todo, y hay mucho desconocimiento de lo que son las temáticas interculturales. Entonces, ¿la universidad no tiene docentes capacitados para formar personas interculturalmente?". Dando cuenta de que el incorporar el conocimiento matemático mapuche debe venir de sabios y de la comunidad , donde se empaquete este conocimiento para poder ser enseñando en la FID, de igual manera se visualiza por parte de estudiantes mapuche el desconocimiento que cuentan sus docentes en temáticas interculturales.

Referencias.

Aroca, A., Blanco-Álvarez, H. y Gil Chaves, D. (2016). Etnomatemática y formación inicial de profesores de matemáticas: el caso colombiano. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 9(2), 85-102. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/2740/274046804006.pdf

Bonner, E. P. (2014). Investigating practices of highly successful mathematics teachers of traditionally underserved students. Educational Studies in Mathematics, 86(3), 377-399. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9533-7

Dubnewick, M., Hopper, T., Spence, J. C. y McHugh, T.-L. F. (2018). "There's a Cultural Pride Through Our Games": Enhancing the Sport Experiences of Indigenous Youth in Canada Through Participation in Traditional Games. Journal of Sport and Social Issues, 42(4), 207-226. https://doi.org/10.1177/0193723518758456

Elo, S., & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. Journal of advanced nursing, 62(1), 107–115. https://doi.org/10.1111/j.1365-2648.2007.04569.x

Handayani, R. D., Wilujeng, I. y Prasetyo, Z. K. (2018). Elaborando el conocimiento indígena en el currículo de ciencias para la sostenibilidad cultural. Journal of Teacher Education for Sustainability, 20(2), 74-88. https://doi.org/10.2478/jtes-2018-0016

Hogarth, M. (2022). An analysis of education academics' attitudes and preconceptions about Indigenous Knowledges in initial teacher education. The Australian Journal of Indigenous Education, 51(2). https://doi.org/10.55146/ajie.v51i2.41

Huencho, A., Chandía, E., Rojas, F. y Williamson, G. (2021). Model of the development of mathematical knowledge from the Knowing and Doing of the Mapuche people. In Educación Matemática, 33(2), 7–36. Mexican Society for Research and Dissemination of Mathematics Education. https://doi.org/10.24844/EM3302.01

Nasir, N. S., Hand, V. M. y Taylor, E. (2008). Culture and Mathematics in School: Boundaries Between "Cultural" and "Domain" Knowledge in the Mathematics Classroom and Beyond. Review of Research in Education, 32 (1), 187-240. https://doi.org/10.3102/0091732X07308962.

Parker, F., Bartell, T. G. y Novak, J. D. (2017). Developing culturally responsive mathematics teachers: secondary teachers' evolving conceptions of knowing students. Journal of Mathematics Teacher Education, 20(4), 385-407. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9328-5.

Peña-Rincón, P. y Hueitra-Santibañez, Y. (2016). Conocimientos [matemáticos] mapuche desde la perspectiva de los educadores tradicionales de la comuna de El Bosque. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 9(1), 8-25.

Quilaqueo, D., Quintriqueo, S. y Torres, H. (2016). Características epistémicas de los métodos educativos mapuches. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 18(1), 153–165.

Quilaqueo, D. y Torres, H. (2013). Multiculturalidad e interculturalidad: desafíos epistemológicos de la escolarización desarrollada en contextos indígenas. Alpha (Osorno), (37), 285-300.

Quintriqueo, S., Quilaqueo, D., Peña-Cortes, F. y Muñoz, G. (2015). Conocimientos culturales como contenido de la educación familiar mapuche. Alpha, 1(40), 131–146. https://doi.org/10.4067/S0718-22012015000100010

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp. 827-876), HL, Kluwer, A.P.

Simpson, J. y Mendenhall, T. (2022). Community-based participatory research with Indigenous youth: a critical review of literatura. AlterNative An International Journal of Indigenous Peoples, 18(1). https://doi.org/10.1177/11771801221089033

Thompson, A. (2019). Why visual ethnography should be used to incorporate tradicional knowledge into health promotion in remote aboriginal communities. SAGE Open, 1-7. https://doi.org/10.1177/2158244019856950

DESAFÍOS EN LA FORMACIÓN DOCENTE FRENTE A LA ACTUALIZACIÓN CURRICULAR: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Daniela Olivares, Universidad de La Serena

Paola Armijo, Universidad de La Serena

Abstract:

Este estudio exploratorio examina de qué manera los énfasis propuestos en la actualización curricular del Ministerio de Educación en 2024 están presentes en las preferencias de un grupo de estudiantes de Pedagogía en Educación Básica en la asignatura de Didáctica para la Enseñanza de la Geometría y la Medición, a través de la aplicación de un diagnóstico con pregunta abierta. Las respuestas de los estudiantes fueron analizadas mediante análisis de contenido. Los resultados muestran una fuerte inclinación hacia el uso de contextos cotidianos, lo que sugiere la importancia de conectar el aprendizaje con el entorno diario de los estudiantes. También se destaca el interés en utilizar instancias lúdicas y la exploración activa del entorno, sugiriendo una cercanía con metodologías que motiven y *activen la participación estudiantil. Sin embargo, enfoques como el Método COPISI y las actividades para argumentar y comunicar fueron menos mencionados, lo que podría indicar la necesidad de un mayor énfasis en su internalización. Además, la ausencia de referencias al uso responsable de las TIC subraya una posible área de mejora en la formación docente. En conclusión, aunque los estudiantes se alinean en gran medida con los nuevos enfoques curriculares, es crucial fortalecer la preparación en el uso de tecnologías y habilidades argumentativas.*

Formación inicial docente, currículo, medición, énfasis curriculares

INTRODUCCIÓN

La propuesta de actualización curricular presentada por el Ministerio de Educación en 2024 introduce la articulación de tres enfoques clave: el Socio Histórico-Cultural, el Modelo de Competencias Matemáticas y la Ciudadanía Digital. Esta propuesta abarca diversos enfoques a ser trabajados en los cursos de Educación Básica. En 1° y 2° básico, se plantea promover el uso de contextos cotidianos y lúdicos en el aprendizaje matemático, utilizando el método COPISI y materiales concretos para la formación de conceptos abstractos. Además, se busca desarrollar habilidades de argumentación y comunicación colaborativa mediante tecnologías digitales. De 3° a 6° básico, el enfoque se amplía hacia la aplicación de conocimientos en situaciones cotidianas y sociales, tales como el manejo del dinero y las mediciones, con un énfasis en la modelación matemática y la resolución de problemas, manteniendo la colaboración y el uso de tecnologías para la comunicación (Ministerio de Educación, 2024). Estos aspectos son cruciales para que sean comprendidos, internalizados y manejados naturalmente por los profesores de educación básica. Si la propuesta del Ministerio de Educación es aceptada, se empezará a implementar en 2026, lo que hace vital que los futuros profesores estén familiarizados con estos énfasis. Este trabajo explora de manera preliminar cuáles de estos énfasis emergen de forma espontánea en un grupo de estudiantes de Pedagogía General Básica al responder un diagnóstico para la asignatura de Didáctica para la Enseñanza de Geometría y Medición.

MARCO CONCEPTUAL

Aunque la propuesta de actualización del Ministerio es reciente, sus énfasis han sido relevados previamente en investigaciones sobre didáctica de la matemática. Por ejemplo, Castro y Castro (2016) destacan el juego como esencial para la indagación matemática en niños. Asimismo, Gasteiger (2015) resalta la importancia de asegurar la coherencia y continuidad en los procesos de aprendizaje matemático durante la transición del jardín de infancia a la escuela, señalando que las situaciones de juego son fundamentales para este desarrollo. Además, Novita y Herman (2021) subrayan que la era digital del siglo XXI demanda que el ámbito educativo incorpore las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje, especialmente en matemáticas, aunque esto representa un reto significativo en términos de alfabetización matemática. En cuanto a las habilidades de comunicación matemática, son consideradas importantes para que los estudiantes organicen su pensamiento matemático y se comuniquen eficazmente en el proceso de aprendizaje (Umar, 2012).

MÉTODO

El estudio realizado fue de tipo cualitativo-interpretativo con un alcance exploratorio. La muestra consistió en un curso de segundo año de Pedagogía General Básica, compuesto por 37 estudiantes. La asignatura en que se llevó a cabo fue Didáctica para la Enseñanza de la Geometría y Medición. En esta asignatura se realizó una prueba de diagnóstico al inicio del semestre la cual incorporó al final la siguiente pregunta de respuesta abierta: Elige un tema del eje de Medición y plantea cómo diseñarías una clase ideal para trabajar ese tema con estudiantes de Educación Básica. Se consideró esta pregunta abierta para acceder a los conocimientos, creencias y preconcepciones de los estudiantes, de forma que estos surgieran de manera espontánea. A partir de las respuestas obtenidas, se realizó un análisis de contenidos, con categorías establecidas a priori, las cuales corresponden a los énfasis propuestos por el Ministerio de Educación:

1. **Contextos cotidianos**: se refiere a la utilización de situaciones y escenarios reales y cercanos a la vida diaria de los estudiantes como marco para el aprendizaje.

2. **Uso de los conocimientos matemáticos en instancias lúdicas**: se refiere a la incorporación de juegos y actividades recreativas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

3. **Exploración activa del entorno**: implica que los estudiantes se involucren directamente con su entorno para aprender, investigar y descubrir.

4. **Enfoque COPISI** (concreto pictórico y simbólico): busca facilitar la comprensión de conceptos abstractos mediante la transición desde lo concreto hacia lo simbólico.

5. **Argumentar y comunicar**: se refiere al desarrollo de habilidades para expresar ideas, razonamientos y soluciones de manera clara y coherente, tanto de forma oral como escrita.

6. **Uso responsable de las TIC**: se refiere a la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el proceso educativo de manera ética y efectiva.

7. **Modelar y resolver problemas**: se enfoca en la capacidad de los estudiantes para representar situaciones del mundo real mediante modelos matemáticos y utilizar esos modelos para resolver problemas.

Las respuestas al diagnóstico fueron categorizadas por una de las investigadoras en conjunto con una asistente. Cada una categorizó por separado y luego se discutió caso por caso cuando se produjo discordancia. La participación de dos personas en el análisis de las respuestas aseguró que las interpretaciones no dependieran de un único punto de vista, disminuyendo el impacto de sesgos individuales. Por lo tanto, la validación de las categorías se basó en la fundamentación otorgada por el marco conceptual, los énfasis del Ministerio de Educación, el análisis con codificación independiente y la discusión de discrepancias.

RESULTADOS

La siguiente tabla muestra una síntesis de los resultados obtenidos.

Tabla 1

Resultados de la categorización

Categoría	f	Ejemplo cita
Contextos cotidianos	23	El concepto a trabajar sería la medición. Yo lo explicaría usando objetos de la vida cotidiana, buscaría que aprendieran a través de cosas que ya reconocen para hacer que sea más sencillo.
Uso de los conocimientos matemáticos en instancias lúdicas	11	En una clase sobre la medición de longitudes, haría que los estudiantes participaran en un juego de búsqueda del tesoro. Para esto los dividiría en grupos, y los haría encontrar y medir objetos específicos, como, por ejemplo, "un objeto que mida 10 cm" o "la longitud de dos mesas", utilizando reglas y cintas métricas.
Exploración activa del entorno	13	Para trabajar perímetro y área, primero les explicaría el contenido. Después, para aplicar lo aprendido, los llevaría al patio con una huincha de medir y en grupos los haría medir el largo y el ancho de la cancha.
Método COPISI	9	Haría una clase de estimación de cantidades, usando material concreto. Con fichas de colores, de distintos tamaños y formas, les pediría que realizaran una calificación de las figuras, luego estimar en cuál de las 3 clasificaciones hay más fichas, anotando después los resultados con números.
Argumentar y comunicar	5	La discusión entre compañeros sobre las diferencias entre los resultados de medición, además del movimiento dentro del aula, haría que los estudiantes comprendieran de manera más profunda los conceptos de medición.
Uso responsable de las TIC	0	

Modelar y resolver problemas	5	Presentaría a los estudiantes una serie de problemas de medición que involucren situaciones para modelar, que tengan relación con sus conocimientos.

En numerosas respuestas, los estudiantes prefieren actividades prácticas, como medir con reglas, cintas métricas, manos o pies, para visualizar y aplicar conceptos de medición en contextos reales. Valoran el uso de objetos familiares y entornos conocidos, facilitando la comprensión. Reconocen la importancia de conectar los conceptos matemáticos con la vida cotidiana, proponiendo clases más motivadoras con dinámicas grupales y juegos que fomenten la participación. Sugieren actividades colaborativas, como medir en la cancha o usar elementos cotidianos para enseñar conceptos de perímetro, área y volumen. Destacan la comparación entre medidas estandarizadas y no estandarizadas, y el uso de materiales concretos, vinculándolos con el enfoque COPISI. Proponen finalizar con discusiones sobre la precisión en la medición y su aplicación en la vida diaria, aunque no se menciona el uso de tecnología.

CONCLUSIONES

Este estudio exploratorio reveló que los estudiantes de Pedagogía General Básica valoran los enfoques de la actualización curricular del Ministerio de Educación de 2024, destacando la importancia de contextos cotidianos en matemáticas, lo que sugiere una preferencia por conectar el aprendizaje con el entorno. También se observa interés en instancias lúdicas y la exploración activa del entorno, indicando la apreciación por metodologías que fomenten la participación. Aunque se mencionaron el Método COPISI y argumentar y comunicar, su menor frecuencia sugiere una mayor necesidad de internalización. La falta de referencias al uso de las TIC subraya una posible área de mejora, especialmente dada su creciente importancia. Aunque se reconoce la relevancia de modelar y resolver problemas, este enfoque no fue tan prominente, indicando que, aunque los estudiantes se alinean con los nuevos enfoques, es crucial fortalecer la formación en tecnologías y habilidades argumentativas.

Referencias

Castro, E. y Castro, E. (2016). Enseñanza y aprendizaje de las matematicas en Educación Infantil. Pirámide.

Gasteiger, H. (2015). **Early mathematics in play situations: Continuity of learning.** En *Mathematics and transition to school: International perspectives* (pp. 255-271). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-287-215-9_15

Ministerio de Educación (2024). Propuesta de actualización para consulta pública 2024.

Novita, R., y Herman, T. (2021). **Digital technology in learning mathematical literacy, can it helpful?** En *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1776, No. 1, p. 012027). IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1776/1/012027

Umar, W. (2012). Membangun kemampuan komunikasi matematis dalam pembelajaran matematika. Infinity Journal, 1(1), 1-9.

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DESDE LA MIRADA DE LAS EDUCADORAS DE PÁRVULOS

Leidy Caterine Bautista Galeano, Universidad Santo Tomás
Víctor Michael Pérez Fernández, Universidad de Chile

Abstract:

En el presente trabajo se muestran los resultados preliminares de una investigación en curso, sobre los conocimientos matemáticos para la enseñanza que consideran necesarios educadoras de párvulos de dos centros educacionales chilenos que abordan los tres niveles de Educación Parvularia: sala cuna, niveles medios y transición. A partir el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza en Educación Infantil y por medio de entrevistas semiestructuradas, las educadoras de párvulos reconocen la importancia de las matemáticas iniciales para el desarrollo de la autonomía de las niñas y niños, no obstante consideran que necesitan conocer más estrategias que les permitan abordar experiencias matemáticas sobre todo en el nivel de sala cuna y que respondan adecuadamente a las características de niñas y niños, especialmente después de la pandemia, dado que encuentran diferentes desafíos que las ha llevado a limitar la frecuencia con que desarrollan experiencias en sala. Los resultados preliminares de esta investigación –en curso– permiten visualizar una problemática en torno a la enseñanza de las matemáticas en Educación Parvularia. A partir del cuestionamiento sobre los conocimientos necesarios para su abordaje en el aula, las educadoras entrevistadas, dan cuenta de la necesidad de conocer estrategias acordes a las características de las niñas y niños que les permitan trabajar las matemáticas desde los niveles de sala cuna.

Educación Parvularia, enseñanza de las matemáticas, conocimiento matemático.

1. INTRODUCCIÓN

Las habilidades matemáticas tempranas juegan un rol importante en el desempeño escolar de niños, niñas y jóvenes, así como en el éxito en diferentes áreas de la vida adulta. En particular, las experiencias matemáticas que los niños reciben durante la educación parvularia tienen consecuencias a largo plazo y marcan diferencias importantes tanto en los aprendizajes, como en el rendimiento académico futuro (Watts et al., 2018). Así, diversos estudios señalan que, a la edad de 5 años, las/los niños que no cuentan con habilidades matemáticas fundacionales no logran construir conocimiento matemático al mismo ritmo de sus pares, lo que se expresa en brechas en el rendimiento matemático que no solo se conservan, sino que además se amplían a lo largo de la escolaridad (Garon-Carrier et al., 2018). La evidencia internacional muestra que mucho antes de ingresar a la escuela los niños cuentan con competencias matemáticas informales (Baroody, 2000), que les permiten realizar tareas cuantitativas desde muy temprana edad, las cuales pueden ampliarse y expandirse mediante actividades matemáticas informales y formales propias del hogar y la escuela (Susperreguy et al., 2020). Es así como el ambiente de educación parvularia, se convierte en un espacio prodigioso para proveer conocimientos y habilidades matemáticas fundacionales, donde las educadoras juegan un rol importante en la medida que son las encargadas de la preparación, diseño e implementación de experiencias que apunten a los aprendizajes clave de la etapa (Baroody et al., 2019).

En Chile, han sido escasos los estudios que indagan sobre el conocimiento especializado del contenido en educación parvularia, pero se ha logrado evidenciar que las dificultades presentadas para el desarrollo de las habilidades matemáticas tempranas, se relacionan con los escasos conocimientos disciplinares y didácticos que les permitan a las educadoras, intencionar y orientar adecuadamente sus prácticas en esta etapa, esto implica desconocimiento de los contenidos matemáticos, desconocimiento de estrategias pertinentes, incluida la organización del ambiente de aprendizaje, y dificultades para interpretar y llevar a la práctica las orientaciones curriculares.

2. Modelos de conocimiento matemático para la enseñanza

De acuerdo con la evidencia sobre el potencial de los niños y niñas para desarrollar habilidades matemáticas desde edades tempranas, se hace necesario una formación de educadoras de párvulos sólida que responda a esta necesidad. En este sentido, las educadoras de párvulos deberían poseer conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales que les permitan alfabetizar a niños y niñas para que puedan usar los conocimientos matemáticos que aprenden en la escuela en los diferentes contextos de la vida cotidiana donde son necesarios (Alsina y Delgado, 2022). Siguiendo los aportes de Shulman (1986), el conocimiento de los docentes en el sistema escolar, contiene tres dominios: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido (CPC) y conocimiento curricular. El CPC se identificó como la parte central del conocimiento de los docentes que se relaciona directamente con el conocimiento de la materia para la enseñanza efectiva. Ball et al. (2008) desarrollaron aún más el concepto CPC de Shulman e identificaron dos subdominios discernibles (1) conocimiento del contenido y los estudiantes, que combina saber sobre los estudiantes y saber sobre las matemáticas y (2) conocimiento de contenido y enseñanza, que combina saber sobre enseñar y saber sobre matemáticas. Además, identificaron otro subdominio del conocimiento del contenido, a saber, (3) el conocimiento especializado del contenido, que es un tipo de conocimiento matemático que normalmente no se necesita para fines distintos a la enseñanza. Es este conocimiento el que permite caracterizar al docente como un profesional distinto de otro que también puede manejar los conceptos matemáticos, además, este conocimiento al ser una habilidad, indica las exigencias de la labor de enseñanza de las matemáticas y pone de manifiesto la necesidad de crear un cuerpo de conocimiento matemático especializado para la enseñanza (Ball et al., 2008). Por otra parte, Schön, (1983), se añade que se debería incluir tres actividades: notar las situaciones matemáticas en el juego o las actividades cotidianas de las niñas y niños; interpretar estas situaciones matemáticas basadas en el contenido matemático propio de la educación parvularia y mejorar el pensamiento matemático de los niños (Lee, 2017).

Alsina y Delgado (2022) afinan aún más la mirada sobre la complejidad de la enseñanza de las matemáticas en edad preescolar y reflexionan sobre los conocimientos requeridos por el profesorado para llevar a cabo esta tarea. Así, consideran que al igual que las otras aproximaciones teóricas el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil requiere el dominio de conocimientos matemáticos dentro de los cuales se destacan los conocimientos matemáticos intuitivos e informales, el conocimiento de los contenidos y el conocimiento de los procesos matemáticos. Por otra parte, se reconocen los conocimientos didáctico-matemáticos, dentro de los cuales se aprecian el conocimiento de las formas de aprendizaje de las matemáticas en la infancia, el conocimiento sobre la gestión y la planificación y el conocimiento del currículo.

3. Descripción del trabajo realizado

Tomando en cuenta la necesidad de indagar sobre las percepciones que tienen las educadoras y educadores de párvulos en ejercicio sobre las necesidades formativas y los desafíos para promover el desarrollo de habilidades matemáticas desde edades tempranas, el presente estudio se orientó a indagar los conocimientos que ellas consideran necesarios para llevar a cabo esta labor en sus aulas. De esta manera se reclutaron seis educadoras de párvulos pertenecientes a dos centros de educación pública de la Región Metropolitana de Santiago. Las educadoras participantes, seleccionadas a conveniencia, abarcaban los niveles de sala cuna, niveles medios y transición, los cuales corresponden a los tres niveles en que se divide la educación Parvularia en Chile. Para levantar la información se realizaron entrevistas semiestructuradas a partir de categorías definidas desde la aproximación teórica del conocimiento matemático para la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil. Si bien al momento de la presentación de esta comunicación la investigación se encuentra en curso, a continuación, se presentan algunos resultados preliminares a partir del análisis inicial de las entrevistas realizadas.

4. Resultados preliminares

Con base en lo reportado por las educadoras entrevistadas surgen tres temas de interés: valoración de las matemáticas iniciales, necesidades formativas y desafíos para su abordaje en el aula.

En cuanto a la valoración de las matemáticas iniciales, las educadoras entrevistadas reconocen es la importancia de las matemáticas iniciales como un conocimiento esencial para niños y niñas. En este sentido, relacionan los conocimientos matemáticos iniciales con conocimientos cotidianos e informales que permiten a los niños ciertos grados de autonomía para desarrollar una variedad de actividades en su entorno. Por otra parte, manifestaban que, si bien tenían un dominio de esos contenidos, sentían que su mayor necesidad formativa se encontraba en las actividades y estrategias propicias para abordarlos, sobre todo en el nivel de sala cuna. Esto dado que lo consideraban como uno de los niveles donde tienen mayores desafíos dadas las características de las niñas y niños quienes recién se están iniciando en la caminata y el lenguaje y de acuerdo con su percepción, más que experiencias matemáticas como tal el foco está en el desarrollo paulatino de habilidades motrices y lingüísticas que les permita autonomía, participación y comunicación con sus pares y adultos significativos. Finalmente, en cuanto a los desafíos, se destaca la percepción de las educadoras sobre las características de las niñas y niños que hacen parte de la Educación Parvularia en una época postpandemia. Aquí las educadoras destacan que, si bien las matemáticas son importantes y hacen parte de los conocimientos esenciales, se han encontrado con la necesidad de abordar otras problemáticas particulares en las niñas y niños ocasionadas por la no asistencia a centros de Educación Parvularia durante la pandemia.

5. Reflexiones finales

A partir del cuestionamiento sobre los conocimientos necesarios para su abordaje en el aula, las educadoras entrevistadas, dan cuenta de la necesidad de conocer estrategias acordes a las características de las niñas y niños que les permitan trabajar las matemáticas desde los niveles de sala cuna. Esto sobre todo en un momento donde el estar apartados de la educación inicial ha generado dificultades en lo que respecta al desarrollo socioemocional, y que las ha llevado a disminuir la frecuencia de las experiencias matemáticas que desarrollan en sus salas. De aquí se desprende que, aunque los resultados no son generalizables, un limitado conocimiento sobre estrategias que permitan trabajar las matemáticas junto a otras áreas del desarrollo infantil, podría estar limitando las oportunidades de aprendizaje de conocimientos matemáticos fundacionales, generando así posibles obstáculos futuros en conocimientos matemáticos formales que aprenden niñas y niños en su escolaridad. A partir de esto surgen interrogantes sobre, ¿cuáles son las características de la formación didáctico-matemática que reciben las futuras educadoras de párvulos y en general el equipo pedagógico que tendrá que llevar a cabo la tarea de enseñar matemáticas en este nivel? De esta manera, a futuro, se propone orientar la mirada hacia la formación matemática de las futuras educadoras de párvulos para poder reflexionar en torno a las necesidades formativas que dan lugar a una escasez de experiencias matemáticas en los ambientes de Educación Parvularia.

6. Referencias

Alsina, Á. y Delgado, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 5(1), 18-37.

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389– 407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baroody, A. (2000). Research in review: Does mathematics instruction for three- to five-year-olds really make sense? *Young Children*, 55(4), 61- 67.

Garon-Carrier, G., Boivin, M., Lemelin, J., Kovas, Y., Parent, S., Séguin, J., Vitaro, F., Tremblay, R., y Dionne, G. (2018). Early developmental trajectories of number knowledge and math achievement from 4 to 10 years: Low-persistent profile and early life predictors. *Journal of School Psychology*, 68, 84-98. doi: 10.1016/j.jsp.2018.02.004

Lee, J. (2017). Preschool teachers' pedagogical content knowledge in mathematics. International *Journal of Early Childhood*, 49(4), 229–243. https://doi.org/10.1007/s13158-017-0189-1

Schön, D. (1983). *The Reflective Practitioner: How professionals think in action*. Aldershot: Ashgate.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15(2), 4–14.

Susperreguy, M. I., Douglas, H., Xu, C., Molina-Rojas, N., y Le Fevre, J. A. (2020). Expanding the Home Numeracy Model to Chilean children: Relations among parental expectations, attitudes, activities, and children's mathematical outcomes. *Early Childhood Research Quarterly* 50(3), 16-28. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.06.010

Watts, T., Duncan, G., Clements, D. y Sarama, J. (2018). What Is the Long-Run Impact of Learning Mathematics During Preschool? *Child development*, 89, 539–555. 10.1111/cdev.12713.

¿CÓMO SE HAN ESTUDIADO LOS CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DEL FUTURO PROFESOR DE MATEMÁTICAS DURANTE SU PRÁCTICA PROFESIONAL?

José Luis Morales Reyes, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Diana Zakaryan, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

La práctica profesional es una fase crucial de la formación del profesorado. En esta etapa se establece la primera conexión formal entre teoría y realidad. Sin embargo, no existen revisiones bibliográficas enfocadas en el profesorado de matemáticas durante estas asignaturas. El objetivo de esta investigación es explorar cómo se han estudiado los conocimientos y competencias de los futuros profesores de matemáticas en su práctica profesional, a partir de artículos con revisión por pares, y examinar los enfoques teóricos y metodológicos empleados en estos estudios. A través del método PRISMA, se realizó una revisión sistemática en las bases de datos Web of Science, Scopus y Scielo, incluyendo estudios en español, inglés y portugués, y sin restricciones en cuanto a la fecha de publicación. Los resultados muestran que las investigaciones son predominantemente de corte cualitativo, utilizando una variedad de técnicas e instrumentos, aunque con pocas observaciones de clases. Además, los estudios recurren a diversos enfoques teóricos, siendo los más representados aquellos que abordan la competencia noticing y el Enfoque Ontosemiótico. Los hallazgos coinciden en señalar la influencia significativa de la práctica profesional en el desarrollo de los conocimientos y competencias de los futuros docentes, y sugieren la necesidad de incrementar la presencia de esta asignatura a lo largo de la formación inicial de los profesores.

formación inicial, conocimiento matemático, conocimiento didáctico, práctica docente, competencias.

INTRODUCCIÓN

Los programas de formación docente deben ofrecer oportunidades de aprendizaje a los futuros profesores (FT) para que puedan desarrollar los conocimientos y las competencias necesarias para su desempeño profesional (Bastian et al., 2024). Sin embargo, ha sido reportado en la literatura una separación entre la etapa universitaria y su realidad como docentes; en particular, el profesorado en formación demanda más contacto con el aula y cursos orientados a la práctica para aliviar la tensión entre teoría y realidad (Ulrich et al., 2020). Uno de los espacios en que los FT tienen oportunidad de conectar teoría y realidad son las prácticas profesionales (Lozano et al., 2022).

Estos espacios consisten en actividades prácticas de larga duración, integradas en la formación universitaria del profesorado, donde entran en contacto con la realidad educativa, conocen las múltiples restricciones del contexto en el que tiene lugar la enseñanza, así como también aplican y desarrollan los conocimientos teóricos adquiridos en su formación (Posadas y Godino, 2017). De esta manera, las prácticas profesionales se han convertido en una etapa cada vez más importante y necesaria en la formación del profesorado, pero también difícil y costosa, siendo aún requeridos estudios empíricos en este ámbito (Bastian et al., 2024).

Realizar una revisión bibliográfica puede proporcionar un panorama de las principales cuestiones de interés y las áreas aún sin abordar en las prácticas profesionales. En la literatura se encuentran estudios de este tipo enfocados en la enseñanza del inglés (Cabaroğlu y Öz, 2023), en las implicaciones generales de la práctica profesional en el periodo de 1996-2009 (Cohen et al., 2009), sobre los instrumentos, metodologías y temas de interés entre los años 2000 y 2012 (Lawson et al., 2015), así como análisis de sus efectos en Alemania (Ulrich et al., 2020) y Canadá (McNeilly et al., 2020). Más recientemente, se han abordado los desafíos en el proceso de supervisión de sus fases (Bjørndal et al., 2024), pero aún no hay estudios enfocados en la enseñanza de la Matemática.

Por lo que, en este estudio se ha optado por una metodología basada en la revisión sistemática de la literatura científica para dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿cómo se han estudiado el conocimiento y/o las competencias docentes del futuro profesorado de matemáticas en el periodo de práctica profesional? ¿qué perspectivas teóricas/metodológicas se han utilizado?

Es importante destacar que la versión completa de este trabajo está disponible en Morales-Reyes y Zakaryan (2024).

MÉTODO

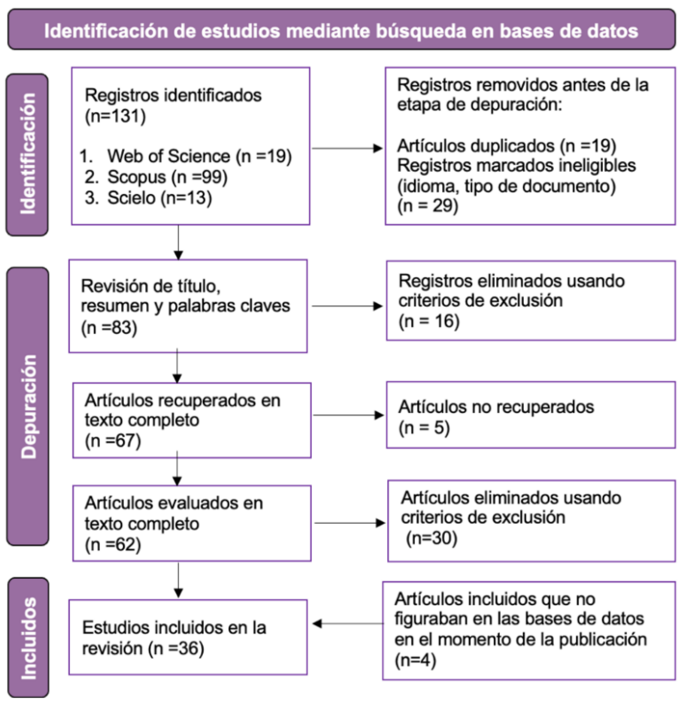
Los procedimientos aplicados en este estudio se basan en los criterios del Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses [PRISMA] (Page et al., 2021). Se consultaron las bases de datos Scopus, Web of Science Core Collection (WoS) y Scielo. Las primeras dos bases de datos fueron elegidas por su impacto significativo en Educación Matemática, en las normas internacionales de indexación científica y por incluir revistas especializadas de alto nivel (Cevikbas et al., 2024); la base de datos Scielo fue seleccionada con la intención de visibilizar las investigaciones latinoamericanas dentro del estudio y por ser la única de la región que permite una búsqueda avanzada a través de conectores booleanos.

Cada búsqueda se realizó utilizando las opciones avanzadas de las bases de datos, sin que se estipulara un plazo de publicación y utilizando los siguientes términos de búsqueda: practicum - internship, preservice teacher - future teacher - prospective teacher - student teacher - teacher in initial training y mathematics - mathematic - math.

En general, se utilizaron dos criterios de inclusión: (1) artículos enfocados en conocimientos y/o competencias y (2) publicación en español, inglés o portugués. Como criterios de exclusión se establecieron: (1) publicaciones fuera de revistas científicas, (2) estudios no enfocados en el futuro profesor de matemáticas e (3) idioma distinto a los establecidos. La última búsqueda se realizó en junio de 2024. Posteriormente, se siguió un análisis de casos, donde cada uno de los manuscritos fue considerado como una unidad de análisis. De los 131 artículos detectados inicialmente, los criterios de exclusión conllevaron al análisis a texto completo de 62 documentos (ver Figura 1), se volvieron aplicar los criterios de exclusión y la revisión contempló 36 artículos. El análisis incluyó la creación de una tabla en Excel con diferentes categorías (conocimiento o competencia estudiada, tipo de investigación, método, nivel educativo, ubicación geográfica, muestra, conclusiones principales). Para realizar la síntesis cualitativa, se compararon todas las categorías buscando similitudes y diferencias entre ellos.

Figura 1

Diagrama de flujo del proceso de selección de manuscritos



RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El primero de los artículos es de 2005 y hasta 2015 se reportan solo siete artículos, de los cuales, tres usan como referente un enfoque propio de la Educación Matemática, mientras que en la última década ha crecido este interés, teniendo 28 artículos con una diversidad de enfoques teóricos (ver Tabla 1).

Tabla 1

Fundamentos teóricos o conceptuales utilizados en las últimas dos décadas

Perido	Fundamentos teóricos o conceptuales	Cantidad de artículos
2005-2015	Conocimiento didáctico del profesor de Matemática	3
	Enfoques generales	4
2016-2024	Noticing	6
	Enfoque Ontosemiótico	5

Espacio de Trabajo Matemático	2
Clearly Pedagogical Content Knowledge	1
Análisis Didáctico	1
Mathematics Knowledge for Teaching (MKT)	2
Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)	1
Enfoques generales	10

Además, hay una clara preferencia en el uso de métodos cualitativos con una diversidad de instrumentos para la recolección de datos. Los artículos incluyeron especialmente entrevistas (n=14), observaciones (n=9, tres de ellas participantes) y reflexiones escritas (n=9). La mayoría de los artículos cuentan con menos de siete participantes (54%, de los cuales 34% corresponden a estudios de caso único), lo que confirma lo reportado por Bastian et al. (2024), quienes señalan que a pesar de que los periodos de prácticas son los componentes más costosos y difíciles desde el punto de vista organizativo de la formación inicial del profesorado, los datos empíricos sobre sus efectos son algo limitados y en general se basan en conjuntos de datos extraídos de universidades individuales.

Finalmente, basados en los hallazgos, se identifican vacíos en la literatura en relación con investigaciones comparativas sobre el estudio de conocimientos en prácticas profesionales de los futuros profesores de diferentes universidades e incluso países, así como análisis en relación con la cantidad de asignaturas de práctica profesional y el progreso o no de los diferentes conocimientos y competencias. Un desafío es aumentar la aplicación – presencia de los modelos y teorías propias de la Educación Matemática en la formación inicial del profesorado de matemáticas.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por ANID: Beca de Doctorado Nacional 2024 [folio: 21210589] y proyecto FONDECYT regular No. 1230434.

Referencias

Bastian, A., König, J., Weyers, J., Siller, H.S., y Kaiser, G. (2024). Effects of teaching internships on preservice teachers' noticing in secondary mathematics education. *Frontiers in Education*, *9*, 1–15. https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1360315

Bjørndal, C., Mathisen, P., Wennergren, A., y Thornberg, F. (2024). Challenges of the supervision process in the teacher education practicum – A qualitative research review. *Teaching and Teacher Education*, *146*, 1-24. https://doi.org/10.1016/j.tate.2024.104619

Cevikbas, M., Kaiser, G. y Schukajlow, S. (2024). Trends in mathematics education and insights from a meta-review and bibliometric analysis of review studies. *ZDM Mathematics Education*, 56, 165–188. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01587-7

Cabaroğlu, N., y Öz, G. (2023). Practicum in ELT: a systematic review of 2010–2020 research on ELT practicum. *European Journal of Teacher Education*, *46*, 1–20. http://doi.org/10.1080/02619768.2023.2242577

Lawson, T., Çakmak, M., Gündüz, M., y Busher, H. (2015). Research on teaching practicum – a systematic review. *European Journal of Teacher Education*, *38*(3), 392–407. http://doi.org/10.1080/02619768.2014.994060

Lozano, I., Iglesias, M. J., Arroyo, S., Camús, M. D. M., y Giner, A. (2022). What teaching models do Pre-Service teachers learn during placements? *Cogent Education*, *9*(1). https://doi.org/10.1080/2331186X.2022.2034393

Morales-Reyes, J.L., y Zakaryan, D. (2024). *Theoretical and methodological elements for the study of the knowledge and competencies of preservice mathematics teachers in their practicum*. [Unpublished manuscript]. Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Page, M. J., McKenzie, J. E., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hoffmann, T. C., Mulrow, C. D., Shamseer, L., Tetzlaff, J. M., Akl, E. A., Brennan, S. E., Chou, R., Glanville, J., Grimshaw, J. M., Hróbjartsson, A., Lalu, M. M., Li, T., Loder, E. W., Mayo, E., McDonald, S., … Moher, D. (2021). The PRISMA 2020 statement: An updated guideline for reporting systematic reviews. *BMJ*, *372*(71), 1-9. https://doi.org/10.1136/bmj.n71

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

Ulrich, I., Klingebiel, F., Bartels, A., Staab, R., Scherer, S., y Gröschner, A. (2020). How Does the Practical Semester in the Teacher Training Program Affect Students? A Systematic Review. In: I. Ulrich & A. Gröschner (Eds.), *Praxissemester im Lehramtsstudium in Deutschland: Wirkungen auf Studierende* (pp. 1-66). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-24209-1_1

La matemática escolar desde la perspectiva estudiantil en la región de la Araucanía

Karla Ignacia Cocio Caniulao, Universidad Católica de Temuco

Benjamín Adrián Reyes Riquelme, Universidad Católica de Temuco

Francisca Belén Vidal Acosta, Universidad Católica de Temuco

Abstract:

Este estudio investiga las percepciones de estudiantes de enseñanza media en la Araucanía sobre la matemática escolar y los factores que influyen en estas. Existe una notable diversidad en las opiniones de los estudiantes sobre esta asignatura, lo que destaca la importancia de que docentes y futuros educadores comprendan sus percepciones para contextualizar el aprendizaje. Para esto se utilizó un enfoque mixto anidado con predominio cuantitativo, combinando encuestas estructuradas con escala Likert y preguntas abiertas, con una muestra de 355 estudiantes de 13 a 19 años de tres instituciones. Los resultados revelan que las percepciones de los estudiantes se dividen en tres grupos, cuyas opiniones varían entre considerar las matemáticas útiles, difíciles, indiferentes, frustrantes, entusiastas, fascinantes, entre otras. Los factores más influyentes en estas percepciones incluyen la metodología docente, la dificultad de los ejercicios y la relación práctica de los contenidos con la vida diaria. Esto resalta que, aunque los estudiantes comparten algunas

características, también existen diferencias en sus percepciones, lo que sugiere que factores individuales y contextuales influyen en cómo cada grupo valora las matemáticas.

Percepciones, Factores de la percepción, Impacto de las percepciones, Matemática escolar, Enseñanza Media.

MARCO DE ANTECEDENTES

A lo largo de la historia, las matemáticas han sido fundamentales para el progreso humano, impactando significativamente en los ámbitos científico, social y cultural (Maass, 2020). En el mundo moderno y digitalizado, las matemáticas son esenciales en prácticamente todos los aspectos de nuestra vida, con aplicaciones que van desde la inteligencia artificial hasta innovaciones en software, maquinaria e ingeniería (UNESCO, 2021).

En Chile, los resultados en matemáticas han sido insatisfactorios. Evaluaciones como el SIMCE y PISA revelan que los puntajes en esta área han mostrado escasas mejoras en la última década. Esta situación se agrava por la preferencia de muchos estudiantes por otras materias, lo que afecta su motivación hacia las matemáticas, influenciada por sus percepciones sobre esta asignatura (Novelo et al., 2021).

Investigar las percepciones de los estudiantes en la Araucanía es fundamental para adaptar las estrategias pedagógicas a las características culturales de la región. Comprender estas percepciones permitirá a docentes y futuros educadores ajustar sus métodos de enseñanza de manera más efectiva, lo que puede incrementar la motivación y el compromiso de los estudiantes hacia las matemáticas (Hossein-Mohand y Hossein-Mohand, 2023). En este contexto, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las percepciones de los estudiantes de educación media en la región de la Araucanía sobre la matemática escolar?

La percepción es un proceso cognitivo crucial que organiza e interpreta la información sensorial para comprender el entorno, el cual está influenciado por nuestras creencias y experiencias previas, que moldean cómo interpretamos la información (Seitz, 2022). Aunque las percepciones nos ayudan a entender nuestro mundo, pueden estar sesgadas debido a adaptaciones evolutivas que priorizan la utilidad sobre la precisión objetiva (Paulson et al., 2019).

En la educación matemática, la percepción integra atención, memoria y pensamiento, y está influenciada por esquemas individuales y marcos lingüísticos (Volkov, 2021), pueden tener consecuencias significativas en su aprendizaje y desarrollo, jugando un papel crucial en su involucramiento con la materia y en su desarrollo académico y profesional (Finell et al., 2022).

Las actitudes hacia las matemáticas, ya sean positivas o negativas, están condicionadas por diversos factores. Las percepciones negativas pueden aumentar la ansiedad y llevar a una mayor evasión de la materia, disminuyendo la motivación y reduciendo el compromiso (Kunwar, 2021). En contraste, las percepciones positivas de autoeficacia pueden mejorar el rendimiento y la participación, reforzar la confianza y reducir el estrés académico. Estas percepciones también incrementan la motivación y el compromiso, lo que mejora la comprensión de la materia (Kalla et al., 2023). En definitiva, las percepciones influyen de tal manera que determinan las decisiones vocacionales, llevando a los estudiantes a evitar las matemáticas o inclinándose hacia carreras STEM (Shin y Shim, 2021).

Por último, es importante entender que las percepciones de los estudiantes sobre las matemáticas están influenciadas por una variedad de factores. Entre ellos, las creencias personales, la calidad de la enseñanza y un ambiente de aprendizaje positivo, el apoyo del profesor y la percepción de la utilidad práctica de las matemáticas, entre otros factores (Seitz, 2022).

METODOLOGÍA

Este estudio se enmarca en un enfoque de investigación educativa mixto anidado con predominio cuantitativo, combinado a su vez con algunos métodos cualitativos, para así obtener una comprensión integral de las percepciones de los estudiantes sobre la matemática escolar. La investigación utilizará encuestas estructuradas con escalas Likert para recopilar datos precisos y generalizables sobre estas percepciones (Likert, 1932), asimismo, preguntas abiertas para explorar en profundidad las percepciones individuales y sus influencias. Este enfoque permite capturar tanto la amplitud de las percepciones generales como las experiencias individuales, enriqueciendo la investigación de manera significativa.

El instrumento aplicado busca obtener información clave sobre las percepciones de los estudiantes, a través de una serie de preguntas estructuradas, los estudiantes evaluaron su nivel de acuerdo o desacuerdo con afirmaciones sobre la utilidad, dificultad y relevancia de las matemáticas en su vida diaria, en el proceso de aprendizaje en el aula y en su futuro. Además, se indagaron los factores que influyen en estas percepciones, como las estrategias pedagógicas del docente, ambiente físico de la clase y el apoyo familiar. También se realizaron preguntas abiertas para complementar este enfoque, permitiendo que los estudiantes expresaran de manera más detallada sus pensamientos y sentimientos sobre la asignatura.

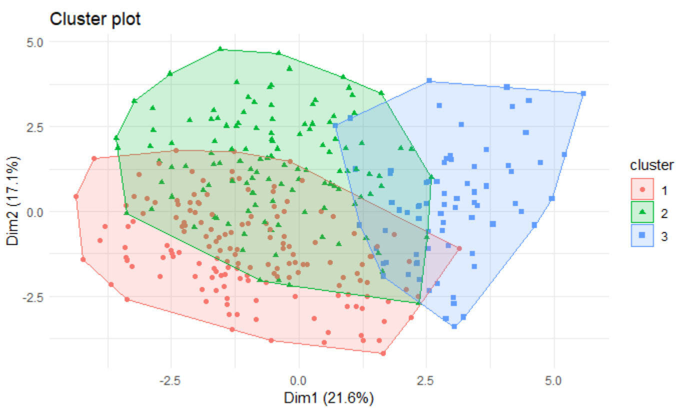
La población de estudio está formada por 355 estudiantes, con edades comprendidas entre 13 y 19 años, de tres establecimientos educativos ubicados en la Región de la Araucanía. Se seleccionó un curso de cada nivel educativo, desde 1° medio hasta 4° medio, en todos los establecimientos. Se firmaron consentimientos y asentimientos informados por cada participante. Las encuestas tuvieron en promedio una duración de 30 minutos aproximadamente.

El análisis de los datos se realizó con los softwares Jamovi y RStudio, enfocándose en las tendencias observadas en los gráficos de frecuencia generados y un proceso de clusterización de los datos. Este enfoque permitió identificar patrones significativos en las percepciones de los estudiantes sobre las matemáticas y destacar los factores que influyen en estas.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

El análisis de los datos recopilados permitió identificar tres grupos principales en las percepciones estudiantiles hacia la matemática escolar, tal como se observa en la figura 1. En primer lugar, se encuentran los estudiantes clasificados como "interesados pero frustrados", quienes constituyen el 44% de la muestra. Este grupo valora positivamente la utilidad y relevancia de las matemáticas tanto en su vida cotidiana como para su futuro “... pienso que van a ser muy importantes para mi en un futuro” (E7). Sin embargo, a pesar de este reconocimiento, experimentan frustración debido a factores como las metodologías empleadas por los docentes, el ritmo acelerado de las clases y la falta de contextualización práctica en los contenidos“...se podrá enseñar con distintos métodos, ya que al ser ejercicios desmotiva…" (E326). Esta frustración afecta negativamente su motivación y compromiso con la asignatura, aunque mantienen cierto interés por aprender.

Por otro lado, el 35% de los estudiantes pertenece al grupo de los "indiferentes". Estos jóvenes muestran una postura neutra hacia las matemáticas: reconocen su importancia en términos generales, pero no manifiestan un interés activo ni un rechazo evidente. Su falta de motivación parece estar vinculada a una desconexión emocional con la asignatura, lo que disminuye el impacto de factores como las metodologías docentes o el ambiente físico del aula"...es una materia importante en lo escolar, pero fuera de eso no me interesa mucho" (E31). Para ellos, las matemáticas no generan ni entusiasmo ni frustración, lo que los coloca en una posición de apatía hacia el aprendizaje de esta disciplina.



Finalmente, un 21% de los estudiantes conforma el grupo de los "entusiastas autónomos". Este segmento destaca por su actitud positiva hacia las matemáticas, que consideran una asignatura interesante, útil y fácil de comprender "me encantan las matemáticas, son fáciles para mí…" (E244). Para estos estudiantes, la matemática es incluso su materia favorita, y disfrutan del proceso de aprendizaje "...me gustan y disfruto del proceso de aprender de ellas." (E130). Aunque factores como la metodología docente y la conexión práctica de los contenidos influyen ligeramente en su percepción, su motivación y entusiasmo por la asignatura parecen ser intrínsecos y están poco condicionados por elementos externos.

Figura 1.

Visualización gráfica de la clusterización de los datos.

CONCLUSIONES

A pesar de tener características similares, las percepciones de los estudiantes hacia las matemáticas muestran una notable diversidad, influenciada por factores individuales y contextuales. Esto resalta que aspectos como la metodología docente y la forma en que se presenta la asignatura a los educandos son clave en la formación de estas percepciones. Por lo tanto, es crucial revisar las estrategias de enseñanza, adaptándolas a las necesidades específicas de los estudiantes, con el fin de fomentar una relación más positiva con las matemáticas y mejorar su motivación e interés por la asignatura.

Referencias

Carrasco, F. N. (2018). Factores que influyen en el bajo rendimiento académico y poca disposición hacia las matemáticas en un 2° EM de un colegio particular subvencionado de la comuna de Los Ángeles: Un estudio de caso [Tesis de licenciatura, Universidad de Concepción].

Finell, J., Sammallahti, E., Korhonen, J., Eklöf, H. y Jonsson, B. (2022). Working Memory and Its Mediating Role on the Relationship of Math Anxiety and Math Performance: A Meta-Analysis. Frontiers In Psychology, 12. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.798090

Kalla, R., Faridah, K. y Vincent, K. (2023). Students' Perception and Academic Performance in Mathematics in Secondary Schools in Handeni District – Tanga, Tanzania. International Journal Of Research And Innovation In Social Science, VII(IV), 1007-1013. https://doi.org/10.47772/ijriss.2023.7484

Kunwar, R. (2021). A Study on Low Performing Students Perception towards Mathematics: A Case of Secondary Level Community School Students of Nepal. Deleted Journal, *5*(1), 125-137. https://doi.org/10.3126/researcher.v5i1.4138

Likert, R. (1932). A Technique for the Measurement of Attitudes.

Maass, A. (2020). Las matemáticas para una mejor sociedad. CMM.

Novelo, V., Pinto, J. y González, A. (2021). Percepción de las matemáticas por estudiantes de secundaria.

Paulson, S., Hoffman, D. y O'Sullivan, S. (2019). Reality is not as it seems. Annals Of The New York Academy Of Sciences, 1458(1), 44-64. https://doi.org/10.1111/nyas.14194

Seitz, R. J. (2022). Believing and Beliefs—Neurophysiological Underpinnings. Frontiers In Behavioral Neuroscience, 16. https://doi.org/10.3389/fnbeh.2022.880504

Shin, D. y Shim, J. (2021). Students' Perceived Mathematics Teacher Competence: Longitudinal Associations with Learning Outcomes and Choice of College Major. *Education Sciences*, *11*(1), 18. https://doi.org/10.3390/educsci11010018

UNESCO. (2021, 12 marzo). 14 de marzo: Matemáticas para un mundo mejor.

Volkov, A. (2021). NATURE OF COGNITIVE EXPERIENCE: UNITY OF PERCEPTION, THINKING, BODY AND LANGUAGE. Studia Humanitatis Borealis, 20(3), 4-14. https://doi.org/10.15393/j12.art.2021.3761

PROFESORES NÓVELES EN MATEMÁTICA: FACILIDADES YDIFICULTADES

Esteban Alarcón, Christian Puentes, Fernando Sepúlveda, Carlos Reyes

Universidad Católica de Temuco

RESUMEN:

El estudio aborda las facilidades y dificultades que enfrentan los profesores nóveles de pedagogía media en matemática de la Universidad Católica de Temuco durante sus primeros dos años de ejercicio docente. Se utilizó una metodología mixta que combina instrumentos cuantitativos, como una escala Likert y una tabla de cotejo, junto con entrevistas semiestructuradas para obtener una visión completa de sus experiencias. Entre los resultados, los encuestados se siente preparado para implementar métodos de aprendizaje diferenciado, lo que contrasta con estudios previos quesugieren un mayor dominio en esta área. Sin embargo, se considera competente en el uso de recursos educativos y tecnológicos, a pesar de la literatura que indica lo contrario. En cuanto al manejo curricular, la mitad de los docentes adopta una postura neutra. Los encuestados han realizado clases particulares o mentorías, lo que ha fortalecido sus competencias pedagógicas. Aunque la mayoría planea continuar en la docencia, un 22% proyecta un cambio de rol en el futuro, lo que resalta la necesidad de atender sus expectativas profesionales para asegurar la retención en el sector educativo.

Profesor Novel, Matemática, Dificultades, Facilidades

EL PROBLEMA

El análisis de la situación de los profesores nóveles revela que, en general, requieren varios años paraasumir plenamente las responsabilidades pedagógicas (Vaillant y Marcelo, 2015). Áreas como la gestión del clima escolar, el diseño de actividades y el uso de recursos educativos suelen ser desafíosdebido a la falta de experiencia al iniciar su carrera. Además, expresan sentirse insuficientemente preparados para desarrollar materiales de aprendizaje, interactuar con colegas o superiores, y abordarproblemas sociales en el aula (Solís et al., 2016). A pesar de las dificultades, estos profesores también demuestran habilidades importantes relacionadas con su perfil de egreso, como la evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje, la promoción del trabajo en equipo y la implementación de enfoques centrados en el estudiante. Son competentes en la enseñanza de matemáticas en educación media, utilizando métodos didácticos especializados, dominando el contenido curricular exigido y diseñando estrategias que consideren la diversidad estudiantil (Guevara, 2023). Por lo tanto, este estudio tiene como objetivo analizar y responder la siguiente interrogante ¿Cuáles son las facilidades y dificultades que enfrenta el profesorado novel de pedagogía media en matemática de la Universidad Católica de Temuco durante su primer y segundo año de ejercicio docente?

MARCO DE ANTECEDENTES

El presente marco de antecedentes aborda cuatro subtemas relacionados con los profesores nóveles: sus dificultades y fortalezas, la deserción, las estrategias sugeridas y la formación inicial docente. Los profesores nóveles son definidos como aquellos jóvenes recién graduados, con menos de tres años de experiencia. Según Feixas (2002), atraviesan un proceso de aprendizaje continuo, adquiriendo experiencia en la enseñanza y la gestión del aula. Herrera y colaboradores (2011) identifican dos etapas en la carrera docente: una primera, centrada en la enseñanza y el desarrollo personal, y una segunda, enfocada en el aprendizaje del estudiante, reflejando un cambio de perspectiva a medida que el docente adquiere experiencia.

En cuanto a la formación docente en Latinoamérica, las décadas de 1960 y 1970 vieron programas acelerados que redujeron la calidad educativa (Elacqua et al., 2018). En Chile, la "revolución pingüina" de 2006 impulsó mejoras en la formación inicial, abordando problemas curriculares y de acreditación (Ávalos, 2014). A pesar de las reformas, persisten desafíos como la construcción de una identidad pedagógica, la aplicación de didácticas efectivas y la desconexión entre teoría y práctica (Vargas, 2019; Bustos, 2021; Álvarez, 2015).

METODOLOGÍA

La metodología de esta investigación adopta un enfoque mixto, integrando métodos cuantitativos y cualitativos con el fin de proporcionar una comprensión integral de las experiencias de los profesores nóveles de pedagogía media en matemática de la Universidad Católica de Temuco. Este enfoque es pertinente para abordar la complejidad de las preguntas de investigación, permitiendo analizar tanto los aspectos medibles como las vivencias subjetivas de los docentes en sus primeros años de ejercicio profesional.

Para la recolección de datos se emplearán tres instrumentos los cuales fueron validados a través de un pilotaje, para evaluar la claridad y la comprensión de las preguntas e indicadores, lo que permitió ajustar elementos ambiguos y asegurar la consistencia (DeVellis y Thorpe, 2012). La elección de una escala Likert se basó en su capacidad fundamental para obtener datos de calidad, permitiendo estudiar las percepciones de los encuestados en relación con el objetivo de investigación (Matas, 2018). Por otra parte, la tabla de cotejo nos permite valorar la ausencia o presencia de acciones frente a múltiples contextos (Pérez, 2018) pudiendo ser adaptada según las necesidades para cumplir el objetivo de la investigación. Estos instrumentos permitirán cuantificar las percepciones de los docentes en relación con distintas variables, como su percepción sobre la preparación académica y la gestión de aula. Por otro lado, las entrevistas semiestructuradas ofrecerán una oportunidad para explorar los desafíos, aprendizajes y estrategias que los profesores nóveles han desarrollado durante su práctica docente, ya que estas entregan una recolección

de datos cualitativos eficiente, permitiendo mejorar la calidad de la información recopilada (Flick, 2007).

La población objetivo de este estudio está compuesta por egresados de la carrera de pedagogía mediaen matemática, correspondientes a las cohortes de los años 2022 y 2023. En total 37 participantes. La combinación de estos métodos permite triangular los datos, enriquecer el análisis y alcanzar una comprensión más amplia de la realidad que enfrentan los profesores nóveles.

Este enfoque metodológico busca, identificar tanto las fortalezas como las áreas de mejora en la formación inicialdocente, con el objetivo de ofrecer sugerencias que optimicen el apoyo institucional a estos profesionales en sus primeros años de docencia.

RESULTADOS PRELIMINARES

De acuerdo con los resultados preliminares obtenidos a partir de la aplicación de los instrumentos, seidentificaron aspectos relevantes en diversas áreas. En cuanto a la didáctica, los profesores participantes no se percibieron ni plenamente preparados ni con grandes carencias en su formación universitaria. Uno de los participantes expresó que “la universidad nos dio una buena base, pero al momento de estar frente a una clase, te das cuenta de que hay mucho más por aprender” (P13). De manera similar, en la dimensión curricular, la percepción de los docentes fue neutral, indicando que no se sienten significativamente desventajados, pero tampoco altamente capacitados por su formación inicial en este ámbito.

En la dimensión ética, los docentes manifestaron sentirse bien preparados para enfrentar los desafíosde su vida profesional, reconociendo que la universidad les proporcionó una sólida base en este aspecto. Como afirmó un profesor, “enfrentar situaciones difíciles con los estudiantes fue más sencillo gracias a las herramientas éticas que nos enseñaron” (P2). Asimismo, los entrevistados destacaron su capacidad para realizar tareas de manera autónoma, atribuyendo parte de este desarrollo a laformación universitaria, que potenció su independencia profesional.

Por otro lado, las entrevistas semiestructuradas revelaron que los profesores enfrentan diversas dificultades en áreas como el manejo del aula, la planificación de clases, la adaptación de contenidosy la organización general de su trabajo docente. Sin embargo, un aspecto positivo que sobresalió fuela mención de las experiencias en clases particulares, ayudantías o mentorías, donde los docentes nóveles lograron fortalecer tanto sus habilidades disciplinares como pedagógicas, lo que también contribuyó a reforzar su confianza en la práctica profesional. Como uno de los entrevistados explicó,"las ayudantías que hice durante la universidad fueron clave para afianzar mis conocimientos y sentirme seguro al enseñar" (P31).

DISCUSIONES

Se destacan varias áreas clave en las que los profesores nóveles enfrentan desafíos, lo que justifica las siguientes propuestas prácticas para fortalecer su formación y acompañamiento. Los resultados muestran que solo el 45,8% de los encuestados se siente preparado para implementar métodos de aprendizaje diferenciado, lo que indica una necesidad urgente de reforzar esta competencia. Para abordar esta brecha, se propone implementar talleres prácticos y continuos enfocados en el aprendizaje diferenciado, que se centren en estrategias específicas adaptadas a la diversidad estudiantil y basadas en ejemplos reales del aula.

Los docentes nóveles enfrentan dificultades significativas para aplicar estas metodologías en contextos reales, lo que subraya la necesidad de fortalecer sus habilidades y confianza en este ámbito (Vaillant y Marcelo, 2015). Además, las entrevistas revelaron que las experiencias previas de clases particulares y mentorías fueron cruciales para fortalecer las competencias pedagógicas y aumentar la confianza de los docentes nóveles. Como se destacó en los resultados, estas experiencias previas contribuyeron al desarrollo de habilidades pedagógicas y a una mayor confianza (Solís et al., 2016).

Finalmente, el estudio mostró que los docentes nóveles adoptaron una postura neutral respecto al manejo curricular, lo que sugiere que hay una brecha en la preparación para la planificación de clases, enfrentando dificultades en esta área junto a la organización de su trabajo docente (Guevara, 2023). Por lo tanto, se propone reforzar estas competencias mediante espacios colaborativos para la construcción y análisis de secuencias didácticas, con el objetivo de proporcionar herramientas prácticas para enfrentar los desafíos del aula. Estas estrategias buscan abordar las dificultades identificadas y potenciar las fortalezas de los docentes nóveles, asegurando una transición más fluida y efectiva hacia la práctica docente.

REFERENCIAS

Álvarez Álvarez, C. (2015). Teoría frente a práctica educativa: Algunos problemas y propuestas de solución.

Perfiles educativos, 37(148), 172-190. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2015.148.49320

Ávalos, B. (2014). La formación inicial docente en Chile: Tensiones entre políticas de apoyo y control.

Estudios Pedagógicos, *40*(ESPECIAL), 11-28. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052014000200002

Bustos, D. (2021). Percepciones de los maestros de educación primaria en inserción profesional sobre su formación inicial: un estudio de caso. *Perspectiva Educacional*, *60*(3), 84-109. http://dx.doi.org/10.4151/07189729-vol.60-iss.3-art.1210

DeVellis, R. y Thoepe, C. (2012). *Scale development: Theory and applications* (3rd ed.). SAGE Publications.

Elacqua, G.,Hincapié, D., Vegas, E. y Alfonso, M. (2018). Profesión: Profesor en América Latina. http://dx.doi.org/10.18235/0001172

Feixas, M. (2002). El profesorado novel: Estudio de su problemática en la Universidad Autónoma de Barcelona. *Revista de Docencia Universitaria, REDU, 2*(1).

Flick, U. (2007). *Introducción a la Investigación cualitativa*. Madrid, España: Morata.

Guevara, G., Castillo, P. y Del Campo, L. (2023). Seguimiento a egresados de la carrera de Pedagogía en Matemática en educación media. El caso de la Universidad Católica del Norte, Chile. *Revista Innovación Educativa*, *59*(1), 127-142. https://doi.org/10.31619/caledu.n59.1278

Herrera, L., Fernández, A. M., Caballero, K. y Trujillo, J. M. (2011). Competencias docentes del profesorado novel participante en un proyecto de mentorización. Implicaciones para el desarrollo profesional universitario. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *15*(3), 213-241.

Matas, A. (2018). Diseño del formato de escalas tipo Likert: un estado de la cuestión. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 20(1), 38-47. https://doi.org/10.24320/redie.2018.20.1.1347

Pérez, C. (2018). Uso de listas de cotejo. Una guía para el profesor. Universidad Tecnológica Metropolitana. Vicerrectoría Académica. Unidad de Mejoramiento Docente. Recuperado de https://vrac.utem.cl/wp-content/uploads/2018/10/manua.Lista_Cotejo-1.pdf

Solís, M., Núlez, C., Contreras, V., Vázquez, N. y Ritterhaussen, S. (2016). Inserción profesional Docente: problemas y éxitos de los profesores principiantes. *Estudios Pedagógicos*, *42*(2), 331-342. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000200019

Vaillant, D. y Marcelo, C. (2015). El ABC y D de la formación docente Editorial Narcea.

Vargas, A. (2019). Innovaciones en la formación inicial docente y los desafíos para el desarrollo profesional docente. Revista Saberes Educativos, (2), 103-119. https://doi.org/10.5354/2452-5014.2019.52120

¿QUÉ SABEMOS DE LAS FRACCIONES?

INVESTIGACIÓN ACERCA DEL CONOCIMIENTO DE LOS PROFESORES EN FORMACIÓN DE EDUCACIÓN BÁSICA SOBRE LAS INTERPRETACIONES DE LAS FRACCIONES

Francisca Espinoza Guerrero, Universidad Alberto Hurtado

Abstract:

La siguiente investigación se desenvuelve en el marco de los Números Racionales, específicamente, las fracciones. Este busca visualizar el avance en el saber de los docentes en formación inicial sobre las distintas interpretaciones de las fracciones. Se concluye la existencia de un dominio más diverso de los significados en aquellos que cursan la mitad de la carrera y la necesidad de fortalecer el aprendizaje para el desarrollo conceptual en estudiantes de pedagogía.

Fracciones, profesores en formación, significados y trayectoria académica.

INTRODUCCIÓN

Son, quizás, las fracciones el concepto matemático que más jaqueca ha generado en estudiantes de educación básica y, por qué no decir, en profesores en formación. Frente a ello, se decide problematizar la interrogante *¿Cómo se puede definir este concepto polisémico?* con **el propósito de visualizar la trayectoria académica de los docentes en formación inicial por medio de los distintos significados de la fracción** y —con la vaga ilusión— de aportar al conocimiento de la formación inicial docente. En función de ello, se plantea una pregunta a los y las estudiantes de la carrera de Educación Básica de la Universidad Alberto Hurtado, cuya muestra se concreta en aquellos recién ingresados (primer año), quienes cursan la asignatura Didáctica de las Matemáticas (tercer año) y en quienes están pronto a egresar (quinto año).

ANTECEDENTES

El estudio de Vula y Kingji-Kastrati (2018) evaluó el conocimiento de los profesores en formación sobre fracciones y su capacidad para demostrar tanto conocimientos procedimentales como conceptuales en situaciones aditivas de fracciones. Los resultados mostraron que muchos de los futuros docentes tenían una comprensión errónea de las fracciones, incluso en la interpretación más común, como parte de un todo. La investigación encontró que tenían un dominio procedimental del 79.3%, pero solo un 11.7% de conocimiento conceptual. Los autores destacan la necesidad de mejorar los cursos de matemáticas en los programas de formación docente.

Por otro lado, las profesoras e investigadoras Reyes y Sosa (2013), mediante el modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), buscaron identificar el conocimiento conceptual de las fracciones de los docentes en formación inicial de primaria. En su estudio, concluyen que en preguntas que intentan recoger información acerca **del Conocimiento Específico del Contenido (**SCK **siglas en inglés)**, los encuestados recurren a las concepciones que gozan sobre el **Conocimiento Común del Contenido (**CCK **siglas en inglés)**. Por lo tanto, se demostraron la parvedad en relación con el dominio de los diferentes significados del objeto matemático.

Por último, Castro-Rodríguez y Rico (2021) de acuerdo con la revisión de diversos estudios, afirman que los docentes en formación presentan dificultades, una de las cuales es de gran interés de la investigación, es decir, la interpretación de las fracciones casi exclusivamente como la relación de una parte de un todo, aun cuando su dominio no es claro. Inclusive, se expresa que los obstáculos enfrentados por la población de interés, en gran parte de los casos, se alinean con las limitaciones que muestran el estudiantado de educación básica.

ELEMENTOS CONCEPTUALES

Los autores Lewin, López, Martínez, Rojas Y Zanocco (2013), en el conocido libro de Recurso para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica (REFIP), afirman que la abstracción de la concepción de fracción es más compleja de lo que sería en el caso de los Números Naturales. Entender que hay 6 lápices es más intuitivo que comprender que hay $\frac{1}{2}$ de ellos. Por lo que, estiman fundamental la consideración de las interpretaciones de las fracciones para dar sentido a tal abstracción. Ante ello, se describen las cinco maneras más comunes de considerar las fracciones:

Fracción como parte de un todo

Permite expresar partes iguales que conforman una unidad. En esta interpretación, el denominador indica cuántas partes iguales forman el entero, mientras que el numerador señala cuántas de esas partes se toman en cuenta. Esta concepción puede aplicarse tanto a “todos continuos” como a “todos discretos”.

Fracción como cociente o reparto equitativo

Se refiere a situaciones de reparto equitativo de elementos, donde se distribuyen sin dejar restos. Permite ampliar la percepción de división, ya que no siempre el resultado de una división es un número entero. En síntesis, la fracción representa el cociente de dos números naturales.

Fracción como medida

Propicia la expresión de una medida continua, como longitud, tiempo, masa, temperatura, entre otras, mediante una unidad de patrón. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ kilómetro de maratón, $\frac{7}{9}$ centímetros de tela, $\frac{1}{4}$ litros de bebida, etc.

Fracción como razón o razón de cambio

Permite la comparación entre dos cantidades, discretas o continuas. Por su parte, *fracción como razón* otorga la comparación entre dos cantidades de la misma categoría. Por otro lado, *fracción como razón de cambio* favorece la comparación entre dos cantidades de diferentes clases.

Fracción como operador

Esta concepción define que fracción no es medida ni cantidad, sino que actúa sobre una medida o cantidad y la modifica.

METODOLOGÍA

El objetivo de esta investigación es identificar cómo conciben las fracciones los profesores en formación inicial de la carrera de Educación Básica de la Universidad Alberto Hurtado. Para ello, se decide como muestra a aquellos estudiantes que cursan su primer, tercer y último año de carrera. Asimismo, esta indagación será de carácter cualitativa.

De este modo, con la finalidad de recoger la información, se aplica un cuestionario de una pregunta abierta:

¿Qué es una fracción en el conjunto de los números racionales?

Para el análisis de los datos, en una primera parte, se dividieron las respuestas entre las que responden alguna de las significaciones de aquellas que no. Posterior a ello, se consideró el primer grupo para crear una subdivisión entre la cantidad de significados que considera cada respuesta. En función de ello, se crean las clases: 1 sig. (un significado), 2 sig. (dos significados), 3 sig. (tres significados), 4 sig. (cuatro significados) y 5 sig. (cinco significados).

Por último, desde este mismo grupo se presentará la tendencia de los significados, de las cuales se categorizarán en: Parte-todo, Cociente, Razón, Medida y Operatoria.

Para ello, se tabulará la información por generación en dos tablas que condensan la información.

RESULTADOS

La totalidad de los encuestados es de 36 personas, 12 por generación, de los cuales se evidencia que un 58,3% sobre un 41,7% de las estudiantes mencionan a lo menos un significado para la definición de la fracción. El porcentaje menor se dispersa en respuestas en la que expresan procedimiento de resolución de sumas de fracciones, representación simbólica de una fracción o estructura de las fracciones. Así bien, solo se consideran las respuestas del 58,3% para organizar los datos en según la cantidad de significados por respuesta en cada generación y en la frecuencia de interpretación por año.

Tabla 1

Cantidad de significados por persona de cada generación

Año de carrera	1 sig.	2 sig.	3 sig.	4 sig.	5 sig.	Total, respuestas
Primer año	1	0	0	0	0	1
Tercer año	5	1	2	1	0	9
Quinto año	10	1	0	0	0	11
Total	16	2	2	1	0	21

Tabla 2

Frecuencia de los significados por generación

Año de carrera	Parte-todo	Cociente	Razón	Medida	Operatoria
Primer año	1	0	0	0	0
Tercer año	7	5	4	1	1
Quinto año	10	1	0	0	0
Total	18	7	2	0	0

CONCLUCIONES

De acuerdo con lo investigado, los resultados permiten observar ciertas transformaciones en el conocimiento de los docentes en formación sobre el contenido de las interpretaciones de las fracciones. En primer lugar, los estudiantes que inician su proceso de formación presentan mayores dificultades al momento de enfrentarse a la interrogante conceptual. En segundo lugar, estudiantes de tercer año ha mostrado mayores conocimientos de las distintas interpretaciones, de las cuales surgen respuestas no presentes en ninguna otra generación. Por último, las personas que están cursando su último año, son quienes casi en su totalidad contestaron con a lo menos una interpretación, aun cuando tienen tendencia al significado *parte de un todo*.

Por otro lado, se deduce que la investigación logró cumplir su objetivo. No obstante, surge una nueva pregunta sobre por qué los estudiantes de quinto año se centran casi exclusivamente en la interpretación de fracción como "parte de un todo". Aunque no se puede responder ahora debido a la falta de información, se plantean posibles explicaciones, uno, el fenómeno se basa en que el contenido propio de la investigación se aborda solo en curso menores a este; dos, no se discriminaron los sujetos según su especialidad (humanista o científico), por consiguiente, tal caso puede significar que, la presencia de docentes en formación que no han profundizado en la disciplina presenten una mayor inclinación en la significación más común de las fracciones.

Para finalizar, se concluye y propone una necesidad en que los estudiantes de pedagogía posean un adecuado conocimiento de las fracciones, ya que, ello posibilita que los estudiantes de educación básica, incluso para profesionales de la educación, cobre sentido una idea tan abstracta y poco intuitiva como lo son este contenido matemático.

Referencias

Carrasco, E., Ramírez, A., Rojas, D., Salinas, R., & Zamorano, A. (S.f.). Interpretaciones de Fracciones.

Castr-Rodríguez, E., y Rico, L. (2021). Conocimiento sobre fracciones de docentes de primaria en formación. Uniciencia Vol. 35(2), pp. 1-18. https://www.scielo.sa.cr/pdf/uniciencia/v35n2/es_2215-3470-uniciencia-35-02-144.pdf

Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D. y Zanocco, P. (2013). Refip matemática: Números para futuros profesores de educación básica. Recurso para la formación de profesores de educación básica. Centro de modelamiento matemático Universidad de Chile, Santiago: SM.

Reyes, A., & Sosa, L. (2013). Las fracciones y los profesores en formación inicial de primaria. Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza. XIV EIME 1. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1161667/Reyes2013Las.pdf

Vula, Eda & Kingji-Kastrati, Jeta. (2018). Pre-service Teacher Procedural and Conceptual Knowledge of Fractions. 10.1007/978-3-319-68342-3_8.

SIGNIFICANDOS DE LA ANSIEDAD EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA: UN ESTUDIO CUALITATIVO CON PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA EN CHILE

Andrea Pinto-Vergara, Universidad Católica de Córdoba

Daniver Morales Nejaz, Diplomado en Neurociencia del Aprendizaje. Departamento de Biología, Universidad de Santiago de Chile.

Resumen:

Esta investigación aborda la experiencia de la ansiedad en profesores de matemática de enseñanza media en ejercicio docente dentro del contexto educativo chileno. Se centra en comprender cómo los profesores significan y experimentan esta emoción, utilizando un enfoque fenomenológico. Los resultados revelan varias dimensiones de la ansiedad, tales como su impacto personal y laboral, estrategias de afrontamiento, presiones externas y relaciones interpersonales en el entorno escolar. Los hallazgos destacan la falta de liderazgo educacional y las expectativas externas como factores que también contribuyen a la ansiedad. Abordar plenamente la ansiedad en la educación requiere estrategias para abordar la presión por los resultados académicos, apoyar la gestión del comportamiento de los estudiantes, fortalecer el apoyo institucional, revisar las políticas educativas y promover estrategias de afrontamiento. Estos hallazgos ofrecen perspectivas importantes para mejorar el bienestar de los profesores de matemática en Chile.

[Profesores de Matemática, Ansiedad, Regulación Emocional, Agotamiento Docente]

INTRODUCCIÓN

La enseñanza, más que una simple transmisión de conocimiento, es una actividad comunicativa liderada por los docentes, cuyo bienestar laboral y personal desempeña un papel central en el contexto educativo (Cullen, 1997). El proceso de enseñanza-aprendizaje enfrenta múltiples desafíos, donde las emociones y las interacciones sociales dentro del ámbito educativo estarían influenciadas por las emociones y sentimientos de cada uno de los participantes (García Retana, 2012).

La pandemia intensificó diversos agentes estresores percibidos por los docentes, lo que los llevó a adaptar sus prácticas pedagógicas (Fernández y Shaw, 2020), incluso transformándose en fuentes de apoyo, contención y colaboración para sus estudiantes y a la comunidad educativa (Wang et al., 2020). Como consecuencia se realizaron estudios para evaluar el impacto de la pérdida de conocimientos de los estudiantes, revelando un panorama preocupante en cuanto al retroceso en los logros educativos (UNESCO, UNICEF y CEPAL, 2022). En Chile, el prolongado cierre de los establecimientos escolares durante la pandemia COVID-19 conllevó que el Ministerio de Educación de Chile realizará la implementación de la Política de Reactivación Educativa Integral – Seamos Comunidad (Ministerio de Educación, 2022), la cual posee tres pilares fundamentales, entre los cuales se encuentre el eje de Convivencia y Salud Metal, orientado a abordar aspectos socioemocionales. Además, existe preocupación por los bajos resultados en matemáticas, tanto en pruebas nacionales como internacionales. Esto conlleva a que los profesores de matemática estén sometidos constantemente al escrutinio público a nivel nacional.

Una de las emociones universales que experimentan las personas es la ansiedad. La Asociación Estadunidense de Psicología (APA) la define como "una emoción caracterizada por sentimientos de tensión, pensamientos de preocupación y cambios físicos como la presión arterial". Numerosos estudios realizados durante y después de la pandemia COVID-19 han revelado que la ansiedad es un problema de salud metal ampliamente reportado entre los docentes. Jones-Rincon y Howard (2019) descubrieron que existen diversos factores demográficos, ocupacionales y psicosociales asociados con la ansiedad en un grupo de profesores de escuelas públicas en Estados Unidos. Chang et al. (2022) examinaron en un estudio cómo la promoción de un entorno de empoderamiento docente y la regulación emocional en el agotamiento docente en la era de la pandemia COVID-19, el cual consistió en fomentar un ambiente en el que los docentes tuvieran la libertad de tomar decisiones sobre su trabajo y enseñanza, valorando sus necesidades individuales, alentándolos a participar en la toma de decisiones, ofreciéndoles opciones en su trabajo y proporcionando retroalimentación significativa.

Diversos estudios indican que el agotamiento profesional de los docentes, así como el estrés asociado a su labor, están relacionado con un bajo rendimiento académico y una disminución en la motivación de los estudiantes que reciben su enseñanza (Madigan y Kim, 2021). Los resultados obtenidos por Herrera et al. (2019) sugieren la presencia de fatiga residual, malestar psicológico, diversos trastornos tanto físicos como psicológicos, así como la experiencia de agotamiento emocional, burnout y satisfacción laboral comprometida entre los docentes, tienen un impacto negativo en la calidad de la educación impartida por estos profesionales.

El contexto educativo actual ha puesto de manifiesto la importancia de significar la experiencia de ansiedad dentro del contexto de la enseñanza de las matemáticas, especialmente en los docentes que imparten esta materia. Esta investigación se enfoca en explorar las vivencias emocionales de los profesores estudiando cómo perciben la ansiedad y le dan sentido a está, en torno a la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo significan la experiencia de ansiedad los profesores de matemática que enseñan en educación media en Chile en el año 2024? Lo que implica el estudio del contexto cultural y social, permitiendo profundizar en la influencia de posibles factores culturales y sociales en la experiencia de los docentes participantes.

METODOLOGÍA/ TÉCNICA DE ANÁLISIS

Se empleó un enfoque cualitativo, que busca obtener información detallada y variada que refleje la complejidad y variedad de vivencias humanas (Taylor y Bogdan, 1984). Se adoptó un enfoque fenomenológico (Taylor y Bogdan, 2000), para captar los significados implícitos que los profesores atribuyen a sus experiencias con la ansiedad. Se realizaron entrevistas en profundidad, validadas por dos expertos en Ciencia Política y Sociología, a cuatro profesores de enseñanza media de un establecimiento municipal en Rancagua, Región del Libertador Bernardo O'Higgins, quienes fueron seleccionados por su experiencia profesional. El análisis de los datos siguió un enfoque fenomenológico interpretativo y se cumplieron todos los estándares éticos vigentes a nivel nacional e internacional.

RESULTADOS

Los resultados de este estudio revelan varias dimensiones en las que la ansiedad se manifiesta en los docentes de matemática. Una de las categorías identificadas es el impacto personal y laboral de la ansiedad, como se evidencia en la frase "Como he tenido esos días malos, he pensado, mi hija necesita comer". Además, en la frase "Mira, yo cuando me estreso, yo me nota en la voz cuando ya estoy muy cansada y empiezo a ponerme disfónica". Lo que debela la forma en que la ansiedad afecta la vida personal y laboral de los profesores, afectando tanto el estado de ánimo y afectaciones en la salud de estos. Respecto de las estrategias de afrontamiento, la cual agrupa diferentes estrategias que los profesores utilizan para lidiar con la ansiedad, como tomar medicamentos, jugar juegos en línea, escuchar música clásica, entre otras, se evidencia en la frase del profesor 2, que señala: "Para sacar la ansiedad yo la verdad es que me empastillo".

La presión y sobrecarga laboral experimentados por los profesores influyó en la ansiedad que experimentaron incluyendo comentarios sobre el peso de las responsabilidades laborales y la sensación de tener que cumplir con las expectativas, como lo dice el profesor 3: "Nosotros trabajamos con dos escaleras distintas, porque una nos exigen el SIMCE, el SIMCE, el SIMCE, pero tú ves los planes y programas ¡Que no es lo que pregunta el SIMCE! entonces ¿O trabajamos con los planes prueba o trabajamos hacia el SIMCE y tenemos más encima las famosas pruebas DIA. Que una tercera escalera que tampoco tiene que ver con la otras dos".

La confianza y vínculo con los estudiantes, se ve en la afirmación del profesor 2, quien señaló que "[…] y ellos me cuentan todo, no sé si estará bien o estará mal, no sé si es bueno o es malo, pero me cuentan todo y me contó una alumna que la habían violado ¿Ya?... y fue algo súper fuerte para mí, fue como porque era una de mis regalonas... y quede así como me causó mucha ansiedad.[…]".

La falta de liderazgo de los directivos de la institución educativa puede contribuir a la ansiedad de los profesores, se constató en la frase del profesor 4: " […]No me interesa un jefe simpático o buena onda o pesado[…]Entonces te dice que va a ser A y hace Z, entonces para un matemático eso es terrible". Las expectativas y presiones externas que enfrentan los profesores, como las políticas educativas, los padres de familia y la sociedad en su conjunto en influyen en el trabajo de los profesores, desencadenando la ansiedad en ellos, como se evidencia en la frase: "[…] Porque necesito sacar puntaje, la presión es fuerte. Porque estoy trabajando en eso: puntaje puntaje…".

CONCLUSIONES

Esta investigación examina cómo los profesores de educación media que enseñan matemática en un establecimiento educacional municipal de la comuna de Rancagua, Región de O'Higgins, experimentan y significan la ansiedad en el contexto educativo chileno durante el año 2024. Los resultados revelan dimensiones complejas de la ansiedad que afectan significativamente su bienestar y desempeño laboral, abarcando desde el impacto personal y laboral hasta las estrategias de afrontamiento, la presión laboral y las expectativas externas.

Estos hallazgos subrayan la necesidad de abordar la ansiedad en el ámbito educativo de manera integral, considerando tanto aspectos individuales como instituciones, implementando estrategias dirigidas a los profesores, así como promover un liderazgo escolar que fomente un ambiente laboral saludable y colaborativo. Además, es necesario reconocer y abordar las expectativas y presiones externas que enfrentan los profesores, así como promover prácticas pedagógicas que fomenten la confianza y el vínculo con los estudiantes. Aunque el propósito de este estudio no es proponer estrategias para abordar la ansiedad en el ámbito escolar, podemos realizar sugerencias incipientes como reconocimiento y valoración del trabajo docente, además de apoyar la gestión del Comportamiento de los estudiantes En resumen, esta investigación ofrece avenidas de investigación valiosas para en el futuro diseñar intervenciones que mejoren el bienestar y la salud mental de los profesores, así como la calidad de la educación impartidas en las aulas.

Referencias

Chang, M.-L., Gaines, R. E., & Mosley, K. C. (2022). Effects of Autonomy Support and Emotion Regulation on Teacher Burnout in the Era of the COVID-19 Pandemic. Frontiers in Psychology, 13, 846290. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.846290

Cullen, Carlos A. Crítica De Las Razones De Educar: Temas De Filosofía De La Educación. Buenos Aires: Paidós, 1997.

Fernández, A., & Shaw, G. (2020). Academic leadership in a time of crisis: The coronavirus and Cóvid-19. Journal of Leadership Studies, 39-45.

García Retana, J. Á. (2012). La educación emocional, su importancia en el proceso de aprendizaje. Revista Educación, 36(1). https://doi.org/10.15517/revedu.v36i1.455

Jones-Rincon A, Howard KJ Ansiedad en el lugar de trabajo: una evaluación integral de salud ocupacional del trastorno de ansiedad en maestros de escuelas públicas. Revista de investigación bioconductual aplicada. (2019);24: (1): e12133. https://doi.org/10.1111/jabr.12133 _

Madigan, D. Y Kim, L. (2021). Does Teacher Burnout Aect Students? A Systematic Review Of Its Association With Academic Achievement And Student-Reported Outcomes. International Journal Of Educational Research.

Ministerio De Educación. (2022). Política De Reactivación Educativa Integral "Seamos Comunidad".

Taylor, S.J. y Bogdan, R. (1984): Introducción a los Métodos cualitativos de investigación.

Taylor, S. y Bogdan, R. (2000) Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Barcelona: Paidós. Cap. 5 “Descubriendo métodos”. Pp. 133-150.

Unesco, CEPAL, y Unicef. (2022). La Encrucijada De La Educación En América Latina Y El Caribe Informe Regional De Monitoreo Ods4-Educación 2030 (Vol. 16). Organización De Las Naciones Unidas Para La Educación, La Ciencia Y La Cultura.

Wang, Z., & Tang, K. (2020). Combating Cóvid-19: HEALTH EQUITY MATTERS. Nature Medicine, 458.

DISEÑO DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA PROBABILIDAD FRECUENTISTA

Carolina Fernández, Universidad de Concepción

Abstract:

Esta investigación surge de la necesidad de abordar el contenido de probabilidad frecuentista para el nivel de Séptimo Básico de una escuela Básica en Talcahuano, en el análisis de las respuestas de los estudiantes frente a la Evaluación Diagnóstica Inicial de Aprendizajes (Evaluación DIA) el eje de aprendizaje que presenta un mayor porcentaje de respuestas erradas fue el de probabilidades específicamente las relacionadas con probabilidad frecuentista. Para corregir este error se diseña una Propuesta Didáctica, con el fin de subsanar la carencia de conocimientos de los estudiantes, las actividades requieren de material concreto debido a la realidad del curso en el cual se implementará. Siete de un total de veintiséis estudiantes pertenecen al Programa de Integración Escolar (PIE), con diversos diagnósticos dentro de ellos, Trastorno del Espectro Autista (TEA), Dificultades

Especificas de Aprendizaje (DEA) y Discapacidad Intelectual Límite (DIL) por tanto estos estudiantes requieren de adecuaciones en matemáticas, los cuales consideran Adecuaciones de Acceso, el Plan de Apoyo Individual (PAI) y el Plan de Apoyo Curricular Individualizado (PACI), lo anterior lleva a la necesidad de material concreto y tangible disponible en todo momento para los estudiantes, en donde ellos puedan experimentar con el contenido y entender de dónde provienen las probabilidades.

Probabilidad Frecuentista, Propuesta Didáctica, Programa de Integración, Evaluación Diagnóstica.

ANTECEDENTES

En la Evaluación Diagnóstica Inicial de Aprendizaje de Séptimo Básico, la pregunta número 31 es la que tiene mayor relación con la probabilidad frecuentista la que se presenta a continuación.

Se realiza un experimento usando un simulador de lanzamientos de una moneda.

En la siguiente tabla se resumen la cantidad de lanzamientos y cuántas veces salió cara y sello:

Figura 1

Tabla adjunta de la pregunta 31 de la Evaluación Diagnóstica Inicial de Aprendizaje para Séptimo Básico.

Cantidad de lanzamientos	Resultados	
	Cara	Sello
5	4	1
10	4	6
100	45	55
1000	498	502
5000	2499	2501

Al observar los resultados de la tabla, una persona dice lo siguiente: “si se simula el lanzamiento de la moneda 10 000 veces, saldrán más sellos que caras”. ¿Es correcta la afirmación de la persona?

Sí, No, Justifica tu respuesta utilizando los resultados de la tabla.

La evaluación fue contestada por 23 de un total de 26 estudiantes, la plataforma nos entrega un detalle de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas, de acuerdo a la asignación según el código de categoría de la respuesta entregadas por los estudiantes. Por un lado se tiene un 4,35% de respuestas correctas, lo que equivale a un estudiante de los 23 que dieron respuesta a la evaluación, por otro lado, se tiene un 30,43% de respuestas parcialmente correctas, el cual equivale a 7 estudiantes y un 65,22% de respuestas incorrectas que equivale a 15 estudiantes.

De lo anterior surge la una propuesta didáctica que aborda el objetivo 18 de Séptimo Básico.

OA18 Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo:

- Estimándolas de manera intuitiva.
- Utilizando frecuencias relativas.
- Relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje.

Respecto al estándar 18, de los estándares orientadores para carreras de Pedagogía en Educación Media en Matemáticas, tenemos que el futuro profesor es capaz de conducir el aprendizaje de las probabilidades discretas, el que se manifiesta cuando planifica actividades para introducir el concepto de probabilidades, utiliza los diagramas de árbol, recursos tecnológicos y juegos en los procesos de enseñanza facilitando y motivando el aprendizaje de las probabilidades. (MINEDUC, 2012)

Juegos en la enseñanza de las probabilidades

En cuanto a la revisión bibliográfica realizada tenemos los siguientes puntos como una evidencia de lo favorecedor que es involucrar juegos en el aula de clases al enseñar el concepto de probabilidad, se evidencia por un lado una **mejora en la comprensión y el compromiso**, un estudio encontró que el uso de juegos históricos para enseñar probabilidad en la escuela primaria mejoró la comprensión de los estudiantes sobre eventos aleatorios y conceptos de probabilidad. A pesar de las dificultades iniciales, los errores de los estudiantes permitieron a los profesores ajustar sus métodos para facilitar una mejor adquisición de conocimientos (Kian et al., 2022). Un experimento con estudiantes de séptimo grado en Australia mostró que los juegos de probabilidad mejoraron las actitudes de los estudiantes hacia la probabilidad, redujeron las supersticiones sobre la suerte y aumentaron su apreciación de la relevancia del tema. Los estudiantes comenzaron a ver la probabilidad como algo útil y aplicable en el mundo real (Williams & Nisbet, 2014).

Por otro lado, **cambios actitudinales positivos**, los métodos de aprendizaje cooperativo, como los Equipos-Juegos-Torneos (TGT), han demostrado mejorar significativamente las actitudes y logros de los estudiantes en el aprendizaje de la probabilidad, un estudio en Indonesia reveló que los estudiantes que participaron en TGT mostraron mejoras significativas en su actitud hacia la probabilidad y en su rendimiento académico en comparación con aquellos que recibieron enseñanza tradicional (Veloo & Chairhany, 2013). El uso de juegos y simulaciones en la enseñanza de la probabilidad resultó en mayores tasas de éxito, mejor comprensión de conceptos y actitudes más positivas entre los futuros maestros. Un estudio con 94 futuros profesores de matemáticas demostró que aquellos que participaron en entornos de aprendizaje basados en juegos y simulaciones obtuvieron mejores resultados en pruebas de logro y conceptos, y mostraron actitudes más positivas hacia la enseñanza de la probabilidad (Koparan, 2021).

METODOLOGÍA

El enfoque principal de la investigación es el desarrollo de una propuesta didáctica que permita a estudiantes de séptimo básico comprender la probabilidad frecuentista con material concreto. Se investigan los conocimientos previos de los estudiantes y se genera una propuesta didáctica siguiendo una secuencia de acuerdo a las clases en las que se abordará. Se implementará la propuesta didáctica en una escuela básica de Talcahuano (muestra por conveniencia). La investigación es de tipo cualitativa, empleando un diseño de estudio de caso en una escuela básica de Talcahuano.

Se genera un juego de mesa con la ayuda de CANVA para su diseño visual, contiene un tablero numerado, en el que cada número va asociado a una pregunta de probabilidad frecuentista, los estudiantes trabajaran en grupos de 3 a 4 estudiantes, se les entrega un tablero, una ficha para cada uno, un dado y el listado de preguntas a cada grupo. Se da como instrucción al curso que solo pueden avanzar en el tablero si dan una respuesta correcta a la pregunta, la que él o la docente deberá monitorear. (Se sugiere tener en el aula de clases los materiales que utilizan algunas de las preguntas de forma concreta con el fin de que los estudiantes que requieran de ellos puedan tener el acceso a estos en todo momento, a medida que lo necesiten.)

Se propone un juego del lanzamiento de un dado, cada estudiante en forma individual deberá lanzar un dado normal de seis caras y registrar los resultados de los lanzamientos. Deberán escoger un número del 1 al 6 y predecir cuantas veces aparecerá el número en un total de 60 lanzamientos, luego deben registrar los números obtenidos en los 60 lanzamientos.

Se propone también El Torneo de las Monedas, en grupos de 2 a 3 estudiantes, deberán en la primera ronda, lanzar su moneda 10 veces, después de cada lanzamiento, anotarán si salió "Cara" o "Sello" en su hoja de registro. En la segunda ronda lanzarán la moneda 40 veces adicionales. En cada ronda, los grupos contarán cuántas veces salió "Cara" y cuántas veces salió "Sello". Cada grupo calculará la frecuencia relativa para "Cara" y "Sello" después de la primera ronda (de los primeros 10 lanzamientos) y después de la segunda ronda (de los 50 lanzamientos). Se finalizará buscando lograr una discusión con el curso en donde ellos puedan dar respuesta a lo siguiente; ¿Cómo se ajustan a la probabilidad teórica de 0.5 para cada evento? ¿Hubo variación en las frecuencias relativas respecto al número de lanzamientos? ¿Qué se puede concluir al respecto de las frecuencias relativas y el número de lanzamientos?

Respecto al análisis de los resultados al aún no ser aplicada esta propuesta, no se puede entregar un análisis como tal, sin embargo se puede anticipar que los datos serán recopilados mediante audios de voz y fotografías de la interacción de los estudiantes con las actividades propuestas.

RESULTADOS ESPERADOS.

Se espera que los estudiantes que pertenecen al Programa de Integración Escolar (PIE) al ver los dados logren comprender que el espacio muestral es de seis datos, que cuando se solicite calcular la probabilidad de obtener un número mayor a 4 puedan asociar que su resultado es $\frac{2}{6}$, que al realizar el lanzamiento del dado 60 veces vean el comportamiento cada vez más similar de las frecuencias que se registran para cada valor. Con respecto al lanzamiento de la moneda se espera que los estudiantes por medio de la interacción que requiere la actividad propuesta concluyan que la probabilidad de obtener sello o de obtener cara son equiprobables y que ambas son de $\frac{1}{2}$. Respecto al juego de mesa creado, este lleva a incluir el juego como una herramienta llamativa para responder preguntas de probabilidades y espacios muestrales, en donde al disponer del material concreto como cajitas con la cantidad de pelotitas, dados, monedas, ruleta, etc., los estudiantes del PIE logren dar respuesta a lo solicitado.

LIMITACIONES Y PROYECCIONES

Una limitación es el enfoque en una sola realidad, no se logrará aplicar en más establecimientos con distintas realidades sociales, económicas, con menor o mayor cantidad de estudiantes pertenecientes al programa de integración escolar. En cuanto a las proyecciones de esta investigación propongo generar propuestas didácticas de probabilidad para otro nivel educativo, generar propuestas didácticas en donde se incluya la tecnología y los softwares en la enseñanza de la probabilidad.

Referencias

Kian, F., Júnior, A., Barão, K., & Morais, A. (2022). Contributions of a Historical Game Presented Through a Story as a Support to the Teaching of Probability in Elementary School in Brazil. Bridging the Gap: Empowering and Educating Today's Learners in Statistics. Proceedings of the Eleventh International Conference on Teaching Statistics. https://doi.org/10.52041/iase.icots11.t6d1.

Koparan, T. (2021). The impact of a game and simulation-based probability learning environment on the achievement and attitudes of prospective teachers. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53, 2319 - 2337. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1868592.

MINEDUC. (2012). Estándares Orientadores para las carreras de pedagogía en educación media. Santiago: Ministerio de Educación.

Veloo, A., & Chairhany, S. (2013). Fostering students' attitudes and achievement in probability using teams-games-tournaments. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 93, 59-64. https://doi.org/10.1016/J.SBSPRO.2013.09.152.

Williams, A., & Nisbet, S. (2014). Primary School Students' Attitudes To and Beliefs About Probability. , 683-708. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_36.

TRADUCCIÓN DE GRÁFICO A TABLA DE DOBLE ENTRADA POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Jocelyn D. Pallauta, jocelyn.diaz@ulagos.cl, Universidad de Los Lagos

Pedro Arteaga, parteaga@ugr.es, Universidad de Granada

Abstract:

La traducción entre diferentes tipos de representaciones, como tablas y gráficos estadísticos, es un aspecto importante de la alfabetización estadística. El objetivo de este trabajo es evaluar la traducción de gráfico a tabla de doble entrada junto a la interpretación de dichas representaciones. En el estudio participaron 277 estudiantes españoles de 1º y 3º curso de secundaria (14 a 16 años) quienes resolvieron de manera individual una tarea, la cual forma parte de un cuestionario más amplio validado por juicio de expertos, que involucraba la traducción de gráfico de barras a tabla de doble entrada. El análisis de contenido de las respuestas del estudiantado mostró similares resultados en ambos cursos. La mitad de los y las estudiantes traducen correctamente de gráfico de barras a tabla de doble entrada. Respecto a la interpretación, en 3º curso se presentó una mayor porcentaje de respuestas correctas en la identificación de la frecuencia marginal solicitada, mientras que en la interpretación de una frecuencia condicional en 1º curso se observó un mayor porcentaje de respuestas correctas. La traducción de gráfico a tabla de doble entrada no fue sencilla para los participantes reafirmado lo advertido en la literatura. En consecuencia, se requiere reforzar la enseñanza de este tema en el aula considerando la estructura de la tabla de doble entrada junto a las diferentes frecuencias posibles de representar a través de ella.

tablas estadísticas, educación secundaria, transnumeración, interpretación

INTRODUCCIÓN

La representación gráfica y tabular son utilizadas con frecuencia para resumir y comunicar información en los medios de comunicación y en el ámbito profesional. Asimismo, en el estudio de las ciencia naturales y sociales las tablas estadísticas son un medio para representar y comunicar conceptos abstractos (Feinberg y Wainer, 2011), dado que facilitan la visualización de los datos y la obtención de conclusiones. Por tanto, la capacidad de leer, interpretar y utilizar diferentes tipos de representaciones de datos para comprender fenómenos cotidianos forma parte de las alfabetización estadística que todo ciudadano debería tener (Gal, 2002).

En las directrices curriculares de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (12 a 15 años) de España (MEFP, 2022), de 1º a 3º curso se plantea la interpretación y construcción de tablas de distribución de una variable que representen variables cualitativas, cuantitativas discretas y continuas, mientras que en 4º curso se presentan las tablas de contingencia con sus correspondientes frecuencias marginales y condicionadas.

Por otra parte, la traducción de gráfico a tabla, es un tipo de transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999) que implica un cambio de registro de representación de los datos, y que involucra procedimientos de contrucción, lectura e interpretación de la estructura de estas representaciones estadísticas, lo cual no siempre es sencillo para el estudiantado (Koschat, 2005). Las investigaciones centradas en la traducción de gráficos a tablas con estudiantes de secundaria son escasas. Así el objetivo de este trabajo es evaluar la traducción de gráfico a tabla de doble entrada junto a la interpretación de dichas representaciones en un grupo de estudiantes españoles de ESO.

ELEMENTOS CONCEPTUALES

La tabla de doble entrada es una herramienta utilizada para resumir y organizar información sobre dos variables estadísticas, X e Y, con diferentes valores (Gea et al., 2020). Su estructura permite representar la distribución de frecuencias de las variables en filas y columnas, correspondientes a cada modalidad de X y Y. En la tabla de doble entrada se representan distintos tipos de frecuencias absolutas: a) *frecuencias dobles*, referidas al número de elementos que coinciden en un valor específico de ambas variables; b) *frecuencias marginales,* puede ser por filas o columnas; c) *frecuencias condicionales,* requiere fijar un valor de una variable para determinar cuántos sujetos cumplen con otra condición, aunque es similar a las frecuencias dobles, su interpretación es más compleja, dado que requiere considerar la condición previa (el total del cual es parte no es igual) dificultando su identificación y comprensión. Adicionalmente, en la tabla de doble entrada es posible representar variados tipos de frecuencias relativas (dobles, marginales y condicionales). Asimismo, se pueden calcular probabilidades, aunque en este caso, las frecuencias relativas dobles no coinciden con las relativas condicionales. Identificar las variables en una tabla de doble entrada es simple, dado que es suficiente con observar las categorías en la primera fila y columna. Sin embargo, las frecuencias vinculadas a dichas variables no se presentan de forma directa, porque cada cruce entre las variables refleja la frecuencia conjunta, absoluta o relativa, de los datos.

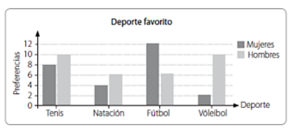
METODOLOGÍA

La muestra se compone de 277 estudiantes españoles de la ESO de dos centros públicos de la Comunidad Autónoma de Andalucía, de ellos 149 cursaban 1º (12 a 13 años), mientras que 128 cursaban 3º (14 a16 años). Los participantes resolvieron de manera individual la tarea (Figura 1) que fue adaptada de un texto escolar chileno (Castro, 2017), y que forma parte de un cuestionario más amplio validado por juicio de expertos. La tarea consiste en traducir de gráfico a una tabla de doble entrada (parte a), e identificar una frecuencia marginal (parte b) y una condicional (parte c).

Figura 1.

Tarea propuesta al estudiantado

El gráfico de barras muestra la cantidad de hombres y mujeres que practican determinados deportes en un centro deportivo de la ciudad. Representa esta información en la tabla, luego responde las preguntas planteadas.



Cantidad de hombres y mujeres que practican diferentes deportes

	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres					
Hombres					
Total					

Responde
a) ¿Cuál es el deporte que menos se practica? ¿ Por qué?
b) ¿Cuál es el deporte que más practican las mujeres?

La tarea consiste en traducir la información de un gráfico de barras a una tabla de doble entrada (parte a), e identificar una frecuencia marginal (parte b) y una condicional (parte c). Se realizó un análisis de contenido (Neuendorf, 2016) de las respuestas, evaluando las cuestiones planteadas en la tarea, según las categorías: correctas, parcialmente correctas e incorrectas. Las respuestas de los participantes que se han codificado como Ex, donde x indica el número de estudiante.

RESULTADOS

Parte a: Traducir de gráfico de barras a tabla de doble entrada

A partir de la aplicación de los conceptos de: variable bidimensional, modalidades y frecuencias conjuntas, marginales y condicionadas para resolver la tarea, se obtuvieron las siguientes respuestas:
R. Correcta. Se registran correctamente en la tabla los valores de las frecuencias conjuntas.
R. Parcialmente correcta. Algunos valores particulares son incorrectos en las celdas o en los totales.
R. Incorrecta. Se presentan valores que no se corresponden con el gráfico, como números decimales.

Parte b : Lectura de una frecuencia marginal

Las respuestas en la identificación de la frecuencia marginal pedida fueron las siguientes:
R. Correcta. Se identifica correctamente la modalidad con menor frecuencia (natación).
R. Parcialmente correcta. Se realiza una lectura parcial de los datos, como E75: "mujeres: voleibol; hombres: fútbol y natación", no identificando la frecuencia mínima a nivel global.
R. Incorrecta. Por ejemplo, E37 señala: "el voleibol porque en los datos sale que el voleibol es el menos practicado" no considerando el conjunto de valores, según género y tipo de deporte.

Parte c : Lectura de una frecuencia condicional

Para identificar la frecuencia condicional solicitada, se requería comparar los diferentes valores de una categoría (mujeres) de la variable (género). Las respuestas se describen a continuación:
R. Correcta. Se identifica correctamente que frecuencia condicional solicitada (fútbol).
R. Parcialmente correcta. Se indican las modalidades con mayor frecuencia, como E78 "tenis y fútbol", no considerando la prevalencia de uno sobre el otro.
R. Incorrecta. Manifiesta una inadecuada traducción o interpretación de la pregunta, como E10 que indica "tenis y voleibol".

RESULTADOS

Tabla 1

Porcentaje de respuestas

Respuesta	Parte a Traducir gráfico a tabla		Parte b Leer F. marginal		Parte c Leer F. condicional	
	1º ESO	3º ESO	1º ESO	3º ESO	1º ESO	3º ESO
Correcta	56.4	50.8	77.9	85.9	87.2	83.6
Parcialmente correcta	27.5	28.2	2.0	1.6	0.7	
Incorrecta	9.4	14.1	11.4	5.5	4.0	9.4
No responde	6.7	7.0	8.7	7.0	8.1	7.0

La Tabla 1 presenta los resultados del análisis de las respuestas del estudiantado a la Tarea. En la parte a, el 1º curso obtuvo un porcentaje ligeramente superior de respuestas correctas, no obstante esta diferencia no fue estadísticamente significativa ($t = -0.185$, $p=0.82$). En la parte b aunque la mayoría respondió correctamente, el 3º curso mostró un mayor porcentaje de respuestas correctas, siendo esta diferencia estadísticamente significativa ($t=-3.821$, $p=0.04$). Finalmente, en la parte c, en 1º curso hubo un mayor porcentaje de respuestas correctas, mientras que en 3º curso se presentó un mayor porcentaje de respuestas incorrectas, esta diferencia no era estadísticamente significativa ($t = 0.101$, $p = 0.80$).

CONCLUSIONES

Esta investigación evaluó la traducción de gráfico a tabla de doble entrada junto a la interpretación de dichas representaciones en una muestra de estudiantes de secundaria. La traducción de gráfico a tabla de doble entrada presentó las mayores dificultades, coicidiendo con lo advertido por Koschat (2005). En la interpretación de la información, aunque se presentaron mejores resultados, algunos estudiantes manifiestaron dificultades en distinguir las frecuencias marginales y condicionadas. Estos resultados indican la necesidad de prestar atención a los diferentes componentes y tipos de frecuencias de las tablas de doble entrada, así como a los procesos de transnumeración entre diferentes tipos de representaciones. Finalmente, estos resultados tienen una generalizabilidad limitada, dado el tamaño de la muestra y el contexto particular. De allí la necesidad de continuar esta investigación, ampliando la muestra e incorporando otros tipos de tareas con este tipo de tabla estadística y abordando este tema en la formación de profesores.

Agradecimientos: Proyecto PID2022-139748NB-I00, y Beca ANID Folio: 72190280.

Referencias

Castro, C. (2017). *Cuaderno de ejercicios Matemática 6º Básico*. Grupo Santillana.

Feinberg, R. A. y Wainer, H. (2011). Extracting Sunbeams from Cucumbers. *Journal of Computational and Graphical Statistics, 20*(4), 793-810. https://doi.org/10.1198/jcgs.2011.204a

Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Gea, M.M., Gossa, A., Batanero, C., y Pallauta, J.D. (2020). Comprensión de tablas de doble entrada por profesores de educación primaria en formación. *Educação Matemática Pesquisa, 22*(1), 348-370. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i1p348-370

Koschat, M. (2005). A case for simple tables. *The American Statistician, 59*(1), 31-40. https://doi.org/10.1198/000313005X21429

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP). (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. MEFP.

Neuendorf, K. (2016). *The content analysis guidebook*. Sage.

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-248. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

EXPERIENCIA DE FUTUROS DOCENTES AUTISTAS EN SU FORMACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Daniela Olivares, Universidad de La Serena

Génesis Ahumada, Universidad de La Serena

Abstract:

Desde una perspectiva neurodiversa, el autismo no se percibe como una discapacidad, sino como una variación natural del neurodesarrollo, lo que implica una forma única de percibir y procesar la información. La mayor parte de la investigación sobre autismo se ha centrado en estudiantes en edad escolar, pero se ha prestado poca atención a grupos como los futuros docentes autistas. Este estudio busca explorar en profundidad las experiencias de futuros docentes autistas en su formación en Didáctica de la Matemática, con el fin de identificar áreas clave que requieren investigación y proponer mejoras que optimicen su preparación pedagógica. A través de un enfoque cualitativo-interpretativo, se realizaron entrevistas a tres estudiantes de Pedagogía en Educación General Básica, seleccionados intencionalmente por su condición de autistas. Los resultados revelan que los estudiantes enfrentan desafíos relacionados con la comprensión de conceptos abstractos y la necesidad de recibir instrucciones claras y estructuradas. Sin embargo, también presentan fortalezas destacadas como el reconocimiento de patrones, pensamiento lógico y creatividad en la creación de materiales didácticos. Estas habilidades, si se potencian adecuadamente, pueden contribuir significativamente a la enseñanza de las matemáticas. El estudio subraya la necesidad de diseñar programas formativos inclusivos que beneficien a todos los estudiantes y sugiere líneas de investigación futura para adaptar entornos y estrategias pedagógicas más inclusivas.

autismo, formación docente, didáctica de la matemática, neurodiversidad, educación inclusiva

INTRODUCCIÓN

Según la Asociación Americana de Psiquiatría (APA), el autismo es una condición de desarrollo que involucra desafíos persistentes en la comunicación social, intereses restringidos y comportamientos repetitivos (APA, 2013). De acuerdo con la comunidad autista, el autismo se entiende como una forma particular de ser persona, debido a un neurodesarrollo diferente al de la mayoría, lo que se expresa en la forma de pensar, entender el mundo, moverse, comunicarse, aprender y relacionarse (Wasiliew y Montero, 2022). En el ámbito educativo, estas diferencias pueden generar desafíos específicos, por ejemplo, en el aprendizaje de matemáticas, donde los enfoques tradicionales no siempre responden a sus necesidades (Polo et al., 2024). Sin embargo, también se identifican fortalezas, como la habilidad para reconocer patrones y un pensamiento lógico estructurado (Sabaruddin et al., 2020). La mayor parte de la investigación sobre autismo se ha centrado en niños y jóvenes en edad escolar, pero se ha prestado poca atención a otros grupos, como los futuros docentes autistas (Wood y Happé, 2020). En particular, la formación en Didáctica de la Matemática ha sido poco explorada para estos estudiantes, quienes enfrentan desafíos específicos. Este estudio busca abordar esa brecha, explorando las experiencias de futuros profesores autistas en su formación. En concreto, el objetivo de este trabajo es identificar áreas clave para la investigación en torno a la formación de futuros docentes autistas en el área de la Didáctica de la Matemática, mediante la exploración de sus experiencias como estudiantes de Pedagogía en Educación General Básica.

ANTECEDENTES TEÓRICOS

Desde una perspectiva neurodiversa, el autismo no se ve como una discapacidad absoluta, sino como una variación natural del neurodesarrollo (Wasiliew y Montero, 2022). Esto implica que las personas autistas tienen una forma única de percibir, interactuar y procesar información, lo que debe entenderse como una particularidad y no como un déficit (De Jaegher, 2021). Las barreras que enfrentan no solo provienen de sus características, sino de un entorno poco adaptado a sus necesidades. El sistema educativo tradicional presenta desafíos para los estudiantes autistas, especialmente en la interacción social y la comunicación, ya que las prácticas pedagógicas suelen estar orientadas a neurotípicos (Wolfberg y Buron, 2024). En matemáticas, los enfoques tradicionales pueden no coincidir con sus necesidades, requiriendo más apoyo visual e instrucciones claras (Polo et al., 2024). Sin embargo, se han identificado fortalezas como el reconocimiento de patrones y el pensamiento lógico (Sabaruddin et al., 2020), que pueden ser aprovechadas si el entorno está adaptado. Aunque se ha investigado sobre autismo en niños y adolescentes, falta explorar la situación de futuros docentes autistas. Estos enfrentan desafíos en su formación, especialmente en Didáctica de la Matemática, donde las expectativas tradicionales pueden no ajustarse a sus estilos de aprendizaje. Sin embargo, también aportan una visión única, destacando su enfoque estructurado y habilidad para identificar patrones (Cope y Remington, 2022). Esto resalta la necesidad de adaptar los programas de formación para aprovechar sus fortalezas y brindar apoyo donde surgen dificultades.

MÉTODO

El estudio, de enfoque cualitativo interpretativo, explora las experiencias de futuros docentes autistas en su formación en Didáctica de la Matemática. Utiliza un diseño de casos múltiples, centrado en tres estudiantes de Pedagogía en Educación General Básica, seleccionados de diferentes niveles académicos por su condición de autistas, aportando diversas perspectivas sobre su aprendizaje en la Didáctica de la Matemática. Para la recolección de datos, se empleó la técnica de entrevista en profundidad, elegida por su flexibilidad para que los participantes compartieran sus experiencias sin las limitaciones de preguntas cerradas o estructuradas. Se utilizó una pauta que cubría cuatro dimensiones principales: creencias sobre las matemáticas, estrategias de enseñanza y aprendizaje, desafíos en su formación como docentes y fortalezas en la enseñanza de las matemáticas. Cada estudiante asistió a una reunión inicial para explicar el propósito de la investigación y firmar el consentimiento informado. Posteriormente, se citó a una segunda reunión para responder la entrevista, grabada y transcrita para el análisis. El análisis de contenido incluyó: transcripción, codificación de categorías emergentes, identificación de patrones comunes, y comparación detallada de resultados para resaltar las similitudes. A partir de estos hallazgos, se formularon preguntas clave que sugieren oportunidades para investigaciones futuras, enfocadas en profundizar en las experiencias de los estudiantes autistas y fomentar estrategias pedagógicas inclusivas.

RESULTADOS

Los elementos afectivos que destacan en el análisis de las entrevistas incluyen: a) Autoeficacia: los estudiantes muestran preocupación por su capacidad para aprender y enseñar matemáticas. Aunque algunos expresan inseguridad inicial, reconocen que la práctica y el apoyo les ayudarían a mejorar. Este factor está vinculado a su percepción de competencia como futuros docentes. b) Actitudes hacia las matemáticas: las opiniones son mixtas. A veces expresan una visión negativa, influenciada por profesores que "no explicaban bien", mientras que en otras muestran motivación positiva, especialmente cuando se usan métodos prácticos o concretos. c) Confianza en el docente: la confianza en el profesor es clave. Señalan que un docente que brinde apoyo influye directamente en su percepción de la materia y en su disposición para participar. d) Preferencias personales: mencionan la importancia de conectar las matemáticas con intereses personales, como la música, la naturaleza y el juego, utilizando materiales concretos, lo que favorece un aprendizaje más significativo.

Las estrategias clave para aprender matemáticas incluyen: a) Uso de materiales concretos: los estudiantes autistas destacan que los materiales tangibles, como representaciones físicas o software, ayudan a comprender conceptos abstractos. b) Práctica y repetición: la práctica constante es fundamental para consolidar conocimientos. c) Instrucciones claras y organización: los estudiantes prefieren instrucciones estructuradas y un enfoque paso a paso. d) Personalización del aprendizaje: es importante adaptar las estrategias a las necesidades individuales, como trabajar en grupos pequeños o usar tecnología. Para enseñar matemáticas, los estudiantes entrevistados proponen las siguientes estrategias: a) Diversificación de actividades: combinar experiencias concretas con enfoques teóricos, como el uso de objetos y la relación de conceptos abstractos con la realidad. b) Adaptación y planificación: los futuros docentes deben ser flexibles y modificar sus planes según las necesidades de los estudiantes. c) Paciencia y apoyo individual: es crucial brindar apoyo individualizado y adaptarse a los distintos ritmos de aprendizaje. d) Creación de un ambiente propicio: generar un ambiente de confianza donde los estudiantes se sientan cómodos para participar y expresar dudas.

Respecto a los desafíos que enfrentan los futuros docentes autistas, se destacan varios aspectos: a) Dificultades con álgebra y representaciones abstractas: el álgebra es una de las áreas más desafiantes. La comprensión de representaciones simbólicas, como el uso de letras para variables, es compleja, y la falta de conexión lógica entre representaciones numéricas y literales provoca confusión. b) Instrucciones ambiguas: necesitan instrucciones claras, ya que las vagas generan frustración. c) Autoeficacia en la enseñanza: expresan inseguridades sobre su capacidad para enseñar matemáticas, especialmente en áreas difíciles. d) Desafíos del entorno educativo: además de los desafíos matemáticos, enfrentan problemas de atención y sobrecarga sensorial en el entorno, así como dificultades en las relaciones interpersonales con colegas y estudiantes, lo que afecta su capacidad para enseñar eficazmente. En cuanto a las fortalezas, se destacan varios aspectos: a) Identificación de patrones: los estudiantes muestran una habilidad destacada para identificar patrones, fundamental en el aprendizaje y enseñanza de matemáticas. b) Pensamiento lógico: su inclinación natural hacia el razonamiento estructurado les impulsa a buscar el sentido detrás de las explicaciones. c) Creatividad y creación de material didáctico: su capacidad creativa es clave para diseñar materiales, especialmente en dos estudiantes. d) Claridad al explicar: en los temas que dominan, se sienten seguros al explicar claramente los conceptos matemáticos. e) Planificación estructurada: destacan en planificación y organización de clases, considerando planes alternativos si es necesario.

CONCLUSIONES

Este estudio muestra que las experiencias de los futuros docentes autistas no son radicalmente diferentes de las de sus compañeros neurotípicos. Las diferencias observadas están más relacionadas con el entorno educativo que con el autismo en sí. El entorno emerge como un factor clave, y al ser una variable manipulable, ofrece oportunidades para mejorar la formación de futuros docentes autistas. Las necesidades de estos estudiantes, como instrucciones claras, organización paso a paso, materiales concretos y oportunidades para aplicar lo aprendido, benefician a cualquier estudiante, independientemente de su neurodiversidad. Estas estrategias, ya reconocidas en la Didáctica de la Matemática, adquieren mayor relevancia cuando se aplican a estudiantes autistas, destacando la importancia de una educación inclusiva. El estudio sugiere varias líneas de investigación futuras: explorar cómo el ambiente educativo influye en el aprendizaje de estudiantes autistas y cómo adaptarlo para optimizarlo; desarrollar estrategias pedagógicas inclusivas, con instrucciones claras y materiales concretos que mejoren la enseñanza de matemáticas; crear materiales didácticos específicos para docentes autistas que aprovechen su creatividad y reconocimiento de patrones; y, por último, diseñar intervenciones que refuercen la confianza de los futuros docentes autistas, especialmente en áreas abstractas de las matemáticas.

Referencias

Asociación Americana de Psiquiatría. (2013). *DSM-5. Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales.* (5.ª ed.). Editorial Médica Panamericana.

Cope, R., & Remington, A. (2022). The strengths and abilities of autistic people in the workplace. *Autism in Adulthood*, *4*(1), 22-31. https://doi.org/10.1089/aut.2021.0037

De Jaegher, H. (2023). Seeing and inviting participation in autistic interactions. *Transcultural Psychiatry*, *60*(5), 852-865. https://doi.org/10.1177/13634615211009627

Wood, R., & Happé, F. (2023). What are the views and experiences of autistic teachers? Findings from an online survey in the UK. *Disability & Society*, *38*(1), 47-72. https://doi.org/10.1080/09687599.2021.1916888

Polo-Blanco, I., Suárez-Pinilla, P., Goñi-Cervera, J., Suárez-Pinilla, M. y Payá, B. (2024). Comparison of mathematics problem-solving abilities in autistic and non-autistic children: The influence of cognitive profile. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, *54*(1), 353-365. https://doi.org/10.1007/s10803-022-05802-w

Sabaruddin, S., Mansor, R., Rusmar, I. y Husna, F. (2020). Student with Special Needs and Mathematics Learning: A Case Study of an Autistic Student. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, *5*(3), 317-330. https://doi.org/10.23917/jramathedu.v5i3.11192

Wasiliew, A. y Montero, M. (2022). *El autismo en la escuela desde una perspectiva de aceptación y valoración: Guía breve* (1ª ed.). https://www.wazu.cl/descargar-guia-autismo

Wolfberg, P. y Buron, K. (2024). *Learners on the autism spectrum.* Routledge

UN ACOMPAÑAMIENTO DOCENTE PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA: UNA PRÁCTICA REFLEXIVA

Tamara Del Valle Contreras, UCSH

Mariela Carvacho Bustamante, UMCE

Claudio Opazo Arellano, UACH

Abstract:

Es habitual que en la enseñanza de la geometría prevalezca una centración en el objeto matemático, materializado en ejercicios rutinarios de la matemática escolar que dejan en segundo plano el saber de quién aprende. Para recuperar este saber, y, en paralelo, favorecer una relación recíproca y horizontal con otros saberes de la matemática, es fundamental trastocar la práctica educativa del que enseña matemáticas.

Esta comunicación busca presentar un modelo de acompañamiento docente, donde se valora la problematización del saber escolar y la experiencia docente que define la trayectoria profesional desde la construcción social del conocimiento matemático. Los datos que se

presentan son sustentados desde la teórica socioepistemológica y atendidos con una metodología de estudio de casos.

Acompañamiento docente; problematización del saber; reflexión docente.

LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO DE LA GEOMETRÍA

No es ajeno que la educación está en crisis y es común escuchar que los y las estudiantes necesitan “buenos profesores”, pero muchos sistemas educativos prestan poca atención a qué saben las y los profesores y qué hacen en el aula. Con este sentir, esta comunicación breve, enfoca la problemática en la enseñanza de la geometría, identificando un uso de fórmulas en ejercicios rutinarios de la matemática escolar, dificultando, por ende, el aprendizaje significativo de los y las que aprenden matemáticas.

Respecto a lo anterior, por una parte, Jorquera Molina (1982) señala que existe un deterioro de la enseñanza de la geometría en la Enseñanza Media, pero, también, en los cursos de matemática en la educación superior. Por otra, Barrantes y Blanco (2004) reconocen que las actividades geométricas -en general- corresponden a la resolución de ejercicios y problemas rutinarios, donde el enfoque está en identificar fórmulas específicas y aplicarlas con datos particulares, lo que sin duda tensiona la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas. De ahí que, se han reportado experiencias que buscan revertir la tendencia antes expuesta. En este sentido está la investigación de Hernández y Villalba (2001), donde se propone una visión de la geometría que demanda transitar de un discurso informal basado en una argumentación descriptiva, a un discurso formal, el cual, apoyado en la visualización, el estudiante desarrolla un razonamiento más allá de la descripción de una figura (Castiblanco et al., 2004).

Estos antecedentes preliminares, de alguna forma, manifiestan cómo en lo habitual de la enseñanza de la matemática escolar, la geometría, se ha caracterizado por habitar un discurso hegemónico de carácter utilitario y lineal. Nos referimos al discurso Matemático Escolar (dME). Mismo que, por sus características, está normado por un sistema de razón que soslaya la problematización del saber escolar cuando se planifica, realiza y evalúa la enseñanza de la matemática, lo que provoca una exclusión de la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM) de los estudiantes, a través de una “violencia simbólica”, expresada en la imposición de significados, argumentos y procedimientos matemáticos (Soto, D. y Cantoral, R. (2014).

Lo descrito en el párrafo anterior, describe una enseñanza hegemónica donde el docente de matemáticas adopta el saber escolar soslayando otras argumentaciones. Al respecto, Silva-Crocci (2014) y Cordero et al. (2015), señalan que existe un fenómeno de adherencia. Una consecuencia al respecto es que docentes y estudiantes no cuestionan la matemática escolar, lo que conlleva aceptar el argumento soslayando los significados que están asociados.

En la actualidad se busca un currículum inclusivo, de ahí que en el área de educación matemática se propone desarrollar una matemática funcional en las aulas de matemáticas en Chile. Sin embargo, la tarea no es sencilla, ya que gran parte de los docentes de matemáticas están adheridos al dME. Por lo tanto, existe la necesidad de repensar los escenarios de construcción de conocimientos desde las experiencias docentes. Por ende, valorizando al otro, su conocimiento y experiencia se muestra un avance del significado de acompañar al docente de matemáticas desde un proceso de reflexión, donde una manifestación del resultado está en la construcción de co-planeaciones, a fin de potenciar aprendizajes de la geometría desde el saber del que aprende.

Cabe señalar que esta investigación tiene como hilo conductor acompañar a docentes de matemáticas a partir de un proceso de reflexión que favorezca una transformación de su práctica al problematizar el conocimiento de la geometría y que dé espacio para promover una resignificación del conocimiento geométrico e incluya el saber del o la estudiante desde la CSCM. Pero ofrecer este espacio a los profesores no es fácil, pues demanda un cambio en la forma de comprender y articular el conocimiento matemático, donde el acompañamiento involucra realizar e implementar clases planeadas entre profesores de escuela y especialistas de educación matemática, utilizando diseños para la enseñanza de la geometría construidos desde dicha perspectiva.

UN ACOMPAÑAMIENTO CENTRADO EN LA PRÁCTICA REFLEXIVA

El proyecto se lleva a cabo a través de un estudio de caso, el cual es un método intensivo de investigación, ya que en él se busca analizar la particularidad y complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes (Stake, 2007); se destacan las diferencias sutiles, secuenciando los acontecimientos del contexto y la globalidad de las situaciones personales. El caso de estudio de esta investigación se construye a partir de los elementos que emergen en la transformación de 3 profesores/as de matemáticas cuando problematiza el conocimiento de la geometría desde la historia, la cultura y/o la interdisciplinariedad.

El trabajo de investigación ha cumplido con 2 de 3 etapas que tiene contempladas, la de estudio de los participantes y el acompañamiento docente. De esta manera, queda pendiente la categorización del proceso de transformación de las prácticas de cada profesor/a. Información que se está triangulando para conseguir la confirmación necesaria, aumentar el crédito de la interpretación y para demostrar lo común de una afirmación o proposición.

LA EXPERIENCIA

Esta comunicación se centra en la etapa del acompañamiento docente, donde el propósito está en promover la reflexión sobre la propia práctica, fomentando transformaciones hacia una construcción social del conocimiento matemático. Para ello, se estructuró un trabajo articulado con 4 momentos:

<u>El de reuniones reflexivas</u>: Se atiende el autoconocimiento, el análisis y reflexión de modelos de enseñanza, el análisis y reflexión de la propia docencia.

Imagen 1. Reuniones Reflexivas

<u>El de reuniones creativas</u>: Se trabaja en las co-planeaciones y las co-docencias con cada profesor/a participante, diseñando las actividades que se realizarán en los colegios participantes, situaciones de aprendizaje dado los aspectos socioculturales de los colegios y organizando los momentos de la clase, entre otros.

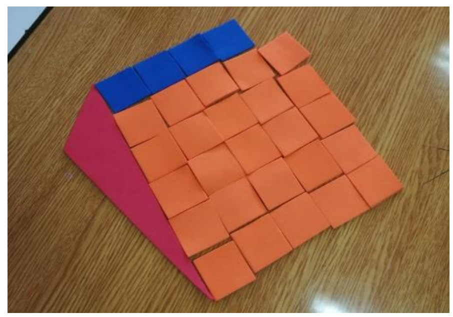


Imagen 3. Propuestas de aula

<u>El de talleres de profundización</u>: Se participa de talleres realizado por expertos en didáctica de la geometría, con el fin de problematizar y profundizar el conocimiento de la geometría escolar.

Imagen 3. Taller n°10 impartido por Dra. Especialista.

El de implementaciones: Se aplican las actividades planeadas en los cursos de cada participante, incorporando los aspectos discutidos en las reuniones reflexivas y creativas.


Imagen 4. Co-docencias

Reflexiones de la experiencia: Con dichas instancias, se ha procurado diseñar situaciones de aprendizaje, para los y las estudiantes, que contemplen vínculos significativos entre la geometría que se aprende en la escuela con las diversas situaciones ligadas a su vida cotidiana, como también la interdisciplinariedad con otras asignaturas escolares, como por ejemplo la física, la música o el arte, entre otras. Esto se logra al entender la Geometría como un desarrollo conjunto de formalismos y quehaceres prácticos, ayudando a que no solo los estudiantes entiendan la matemática, sino que también la disfruten. Estos procesos, como sostiene Cantoral (2013), son necesarios para avanzar hacia la democratización del aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Barrantes, M. y Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. Enseñanza de las Ciencias, 22(2), 241-250.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa S. A.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Enlace Editores Ltda.

Cordero, F., Gómez, K., Silva, H. y Soto, D., (2015). El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad. Barcelona, España: Gedisa S. A.

Hernández, V. &; Villalba, M. (2001). Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original. Recuperado el 18 de octubre de 2007 en http://www.euclides.org/menu/ articles/article2.htm

Jorquera Molina F. (1982). Crisis de la enseñanza de la geometría, Proyecciones (Antofagasta, On line), vol. 1, no. 1, pp. 26-32.

Silva-Crocci, H. (2014). La identidad disciplinar en un programa de investigación latinoamericano de matemáticos educativos: Adherencia, resistencia y organización. Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemologica. Bolema- Boletim de Educação matemática.

Stake, R. (2007). Investigación con estudio de casos. Cuarta Edición. Madrid: Morata.

"DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DE MODELACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES UTILIZANDO COMO HERRAMIENTA EPISTEMOLÓGICA EL ALGORITMO DE CLASIFICACIÓN DE RELEVANCIA DE PÁGINAS WEB PAGE RANK: UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE BLOMJØH Y HØJGAARD-JENSEN"

Néstor Gajardo, Universidad de Santiago de Chile

Andrés Navas, Universidad de Santiago de Chile

Abstract:

El presente trabajo de investigación tiene por objeto la elaboración, aplicación y evaluación de una secuencia didáctica de modelación usando como herramienta epistemológica el "algoritmo de selección de páginas web Page Rank, orientada a la enseñanza de sistemas de ecuaciones a través del uso de representaciones figurativas (grafos) y algebraicas. Se elaboró una secuencia de tres clases siguiendo el modelo didáctico-cognitivo de Blomhøj y Højgaard-Jensen para el proceso de modelización matemática. Dicho modelo, junto con elementos de la Teoría APOE, se utilizará para analizar los resultados obtenidos en tres intervenciones realizadas con estudiantes en formación de la carrera de pedagogía en matemática. La metodología de investigación utilizada será la ingeniería didáctica y los resultados proyectan un incremento en la comprensión matemática y habilidades de modelización y resolución de problemas entre los estudiantes. La teoría de grafos, aplicada en un contexto educativo, promoverá una comprensión más profunda de conceptos matemáticos complejos y fortalecerá habilidades de pensamiento crítico y analítico.

Teoría de Grafos, Modelización Matemática *(Blomhøj y Højgaard-Jensen)*, Teoría APOE, Algoritmo Page Rank, Sistemas de Ecuaciones

INTRODUCCIÓN

En el campo de la investigación, la resolución de problemas (RP) es un elemento fundamental en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Kilpatrick et al., 2009; Niss, 2002). Promueve el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático avanzado, tales como: abstraer, analizar, conjeturar, modelar, representar o sintetizar (NCTM, 2000). Por ello, de acuerdo al ajuste curricular del año 2009, se establece que "resolver problemas (RP), formular conjeturas, verificar la validez de procedimientos y relaciones [...] están en el núcleo de las experiencias de aprendizaje deseables" (Mineduc, 2009, pp. 146-147) como actividades que promueven el razonamiento matemático.

Por otro lado, la modelación matemática se destaca en las bases curriculares del año 2013 (Mineduc 2013), como un pilar fundamental para la comprensión unificada de conceptos matemáticos, actua como facilitador en el desarrollo de habilidades para resolver problemas en situaciones reales y aplica las matemáticas a nuevos contextos (Vera & Cortez, 2024).

Modelar y RP están categorizadas como habilidades a desarrollar en los planes de estudio del currículum chileno. Por tanto, es una demanda que los profesores de matemática de enseñanza media deben atender en sus prácticas profesionales.

Sin embargo, de Singer, Ellerton, & Cai (2015, citado en: Felmer, 2014) establece que "poco énfasis se le ha dado al estudio de cómo los profesores hacen el planteamiento de esos problemas, o sobre qué competencias y conocimientos requieren para el planteamiento o diseño de estos mismos. Por lo tanto, los profesores en formación y nóveles, no solo deben considerar en la planificación de sus clases el desarrollo del pensamiento matemático disciplinar, sino también, la adquisición de las cuatro habilidades fundamentales, que son: modelar, resolver problemas, representar y argumentar (Mineduc, 2015). Por ello, este trabajo se centrará en la elaboración, aplicación y evaluación de una secuencia didáctica de modelación orientada a la enseñanza de sistemas de ecuaciones a través del uso de representaciones figurativas, como grafos, y algebraicas, empleando la herramienta teórica de Blomhøj y Højgaard-Jensen y usando como herramienta epistemológica el "algoritmo de selección de relevancia de páginas web, Page Rank".

A raíz de la problemática del presente estudio, se plantea como objetivo general: Diseñar y validar localmente una situación de aprendizaje de sistemas de ecuaciones dirigida a estudiantes en formación inicial de pedagogía en matemática, que fomente el uso del registro geométrico y algebraico en la construcción del concepto, tomando como referente teórico el modelo didáctico cognitivo de Blomjøh y Højgaard-Jensen

De acuerdo a lo anterior se plantean los siguientes objetivos específicos:

O1: Identificar las competencias y habilidades clave requeridas por las nuevas Bases Curriculares (MINEDUC, 2019) relacionadas con la resolución de problemas en el contexto de la enseñanza de matemáticas en estudiantes de pedagogía en matemática.

O2: Aplicar una propuesta didáctica de modelación, utilizando la herramienta epistemológica "algoritmo de selección de relevancia de páginas web Page Rank", desde la teoría de registro de Blomjøh y Højgaard-Jensen .

O3: Analizar las evidencias del diseño de modelación y verificar la presencia y/o ausencia de elementos de la teoría APOE.

Para complementar los objetivos declarados, en este estudio se plantean dos preguntas de investigación:

P1: ¿Cuáles son las características didácticas esenciales que debe incluir una clase de modelación para que los estudiantes puedan alcanzar las etapas correspondientes al proceso de modelización matemática?.

P2: ¿En qué medida el proceso de modelización matemática contribuye al aprendizaje del concepto de sistemas de ecuaciones?

ELEMENTOS TEÓRICOS

1. Teoría de modelización matemática: Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003

La modelización matemática es un proceso mediante el cual se intenta explicar la realidad mediante un modelo matemático (Ledezma). Se entiende como el proceso que sigue un modelo matemático para representar de manera específica un fenómeno o un objeto real. Este proceso incluye diversas etapas, como la identificación de las variables que describen el fenómeno, la elaboración de hipótesis, la obtención de soluciones, su validación y la interpretación de los resultados (Villarreal & Mina, 2020).

En este sentido, esta situación de modelación está diseñada para 3 lecciones de 1,5 hrs c/u y cada sesión proyecta la implementación de 6 sub-procesos (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003). **Ver Figura 1.**

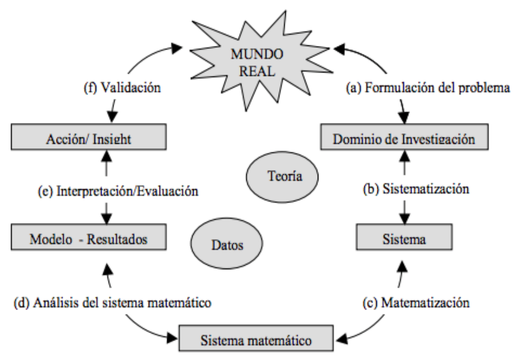


Figura 1: *Un modelo gráfico de un proceso de modelización matemática.*

2. Teoría APOE:

Es un modelo que describe cómo se pueden aprender los conceptos matemáticos involucrados en un problema, proporcionando un marco para explicar las construcciones mentales implicadas en su comprensión (Arnon et al., 2014). Esta teoría se basa en cuatro construcciones mentales fundamentales que le dan nombre: acción, proceso, objeto y esquema (APOE en español/APOS en inglés).

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

El presente trabajo de investigación es cualitativo exploratorio, al estar centrado en el diseño y validación de una situación de aprendizaje en "sistemas de ecuaciones", cuya validación es local al ser experimentada en un grupo determinado de estudiantes en formación inicial de pedagogía en matemática, los cuales son los sujetos de estudio y la población para la que cobra sentido esta investigación. El proceso de recolección de datos se realiza mediante el análisis de las producciones de los estudiantes. Con la intención de establecer la validación del diseño se establece como metodología de investigación a la Ingeniería Didáctica, que vigilará el uso del registro geométrico y algebraico en la construcción del concepto de “sistemas de ecuaciones”. Una característica crucial de esta metodología permite la validación interna de un diseño en sus procesos de análisis a priori y posteriori, generando una comparación de los resultados obtenidos.

ELEMENTOS DEL DISEÑO

Un ejemplo del diseño es el siguiente: *¿Qué página web es más relevante?*

Un motor de búsqueda en internet tiene la tarea de clasificar la relevancia de cuatro páginas web que ha indexado: **Página 1**, **Página 2**, **Página 3** y **Página 4.**

Las páginas web están conectadas entre sí mediante enlaces. Los enlaces entre las páginas son:

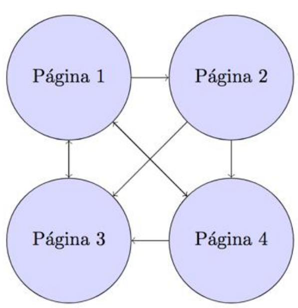
Página 1 : enlaza a las páginas 2, 3 y 4 ; Página 2 enlaza a las páginas 3 y 4 ; Página 3 enlaza solo a la página 1; Página 4 enlaza a las páginas 1 y 3.

De acuerdo a lo anterior, ¿Cómo podemos calcular la importancia relativa de cada página web en un motor de búsqueda utilizando el algoritmo PageRank, considerando los enlaces entre un conjunto limitado de páginas? (**Formulación del problema**).

Para el análisis se espera que los estudiantes representen gráficamente el enunciado, obteniendo a través de un “regístro gráfico” (**sistematización**)

Figura 2

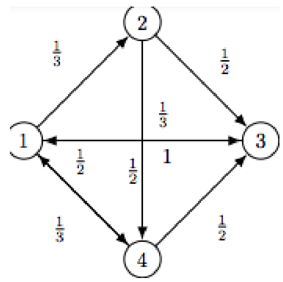
Representación Grafo problema inicial



Luego de asignar un orden de relevancia a las páginas (idealmente 1) y su distribución, el tratamiento y conversión de la situación didáctica es la siguiente:

Figura 3

Conversión grafo



La asignación de relevancia establecida en el inicio da pie a lo siguiente:

Página A = $\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ (la relevancia de 3 y 4 hacia 1) ; Página B= $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ (la relevancia de 1) ; Página C= $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$ (la relevancia de 1, 2 y 4 hacia 3); Página D= $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$ (la relevancia de 1 y 2 hacia 4). Donde los valores tienen como significado el conteo de las "referencias" señaladas por las otras páginas (**matematización**). Idealmente, a través del diseño, la conversión y tratamiento de la asignación de relevancia dará origen al siguiente esquema algebraico: $\boldsymbol{x_1}=\boldsymbol{x_3}+\frac{\boldsymbol{x_4}}{\mathbf{2}}$; $\boldsymbol{x_2}=\frac{\boldsymbol{x_1}}{\mathbf{2}}$; $\boldsymbol{x_3}=\frac{\boldsymbol{x_1}}{\mathbf{3}}+\frac{\boldsymbol{x_2}}{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{x_4}}{\mathbf{2}}$; $\boldsymbol{x_4}=\frac{\boldsymbol{x_1}}{\mathbf{3}}+\frac{\boldsymbol{x_2}}{\mathbf{2}}$. (**análisis e interpretación del modelo)**. Por ser ecuaciones linealmente dependientes los resultados obtenidos serán los siguientes: $\boldsymbol{x_1}=\frac{\mathbf{48}}{\mathbf{31}}$; $\boldsymbol{x_2}=\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{31}}$; $\boldsymbol{x_3}=\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{31}}$; $\boldsymbol{x_4}=\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{31}}$. Se concluye que la página más relevante es la página A (**conclusiones y validación de resultados).**

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El presente trabajo de investigación está en una fase preliminar de diseño a priori, previo a su implementación, por lo que no es posible conjeturar una conclusión sobre la competencia didáctica del diseño. Sin embargo, a partir de los objetivos específicos y las preguntas de investigación planteadas, podemos proyectar algunos resultados. De acuerdo al O1, Se espera identificar un conjunto de competencias clave para la resolución de problemas, tales como: competencias de pensamiento crítico y analítico, competencias comunicativas, competencias tecnológicas y competencias de metacognición. En base al O2, la implementación de la herramienta epistemológica mediante el algoritmo PageRank debería permitir a los estudiantes experimentar un enfoque novedoso de modelización, promoviendo la comprensión de sistemas de ecuaciones desde una perspectiva de redes. Finalmente, en relación al O3, el análisis de las evidencias del diseño de modelización revelará si los elementos de la teoría APOE (Análisis de la Práctica Orientada a la Enseñanza) están presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tales como: práctica reflexiva, adaptación al contexto e integración de diversas representaciones.

En relación a las preguntas de investigación, los resultados proyectados de acuerdo a P1, permiten declarar que una clase de modelación debe incluir las siguientes características didácticas: enfoque interactivo y participativo, uso de herramientas tecnológicas, desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y reflexivo y trabajo colaborativo. En relación a P2, El proceso de modelización matemática proyecta una contribución significativa al aprendizaje del concepto de sistemas de ecuaciones al facilitar una comprensión más profunda, promover el aprendizaje contextualizado, fomentar habilidades de resolución de problemas y abordar problemas de manera sistemática y estructurada.

Referencias

- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2009). The Strands of Mathematical Proficiency. Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics (7th ed.), 115-155. Washington, DC: National Academy Press.
- Mineduc (2009). Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media. Actualización 2009. Santiago: Ministerio de Educación, República de Chile.
- Mineduc (2012). Bases Curriculares 2012. Educación Básica. Matemática. Santiago: Ministerio de Educación, República de Chile.
- Mineduc (2013). Bases Curriculares 2013. Educación Media. Matemática. Santiago: Ministerio de Educación, República de Chile.
- Mineduc (2015). Bases Curriculares 7° a 2° medio. Obtenido de Currículum Nacional: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf
- Blomhøj, M. y Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. Teaching mathematics and its applications 22 (3), 123-139.
- Vera, I. E. P. & Cortez, P. S. (2024). Diseño de un curso de formación inicial para profesores, que integra la modelación matemática escolar con evaluación de tecnologías. El cálculo y su enseñanza. recacym.org
- Castillo Céspedes, M. J., Burgos Navarro, M., & Díaz Godino, J. (2022). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. Uniciencia, 36(1), 234-252. scielo.sa.cr
- Ledezma, C. (). Modelización Matemática desde un Enfoque Semiótico-Cognitivo. researchgate.net. researchgate.net
- Villarreal, M. E. & Mina, M. (2020). Actividades experimentales con tecnologías en escenarios de modelización matemática. Bolema: Boletim de Educação Matemática. scielo.br

APRENDIZAJE UBICUO EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE DE MATEMÁTICA PARA LA ENSEÑANZA MEDIA

Samuel Benjamín Beñaldo Catalán, Universidad Católica de Temuco

Alexis Alejandro Fuentes Tapia, Universidad Católica de Temuco

Abstract:

Este trabajo de titulación presenta un estudio cualitativo sobre la incorporación de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) y los entornos virtuales de aprendizaje (EVA) en la carrera de Pedagogía en Matemática para la Enseñanza Media, en una institución de educación superior de la región de La Araucanía. El objetivo es analizar cómo el aprendizaje ubicuo, apoyado por estas tecnologías, impacta en la formación del futuro profesor de matemáticas y su preparación para la práctica docente, considerando las necesidades actuales de estudiantes y docentes. La investigación utiliza entrevistas en profundidad durante la formación inicial docente (FID) y un análisis de datos mediante el método de comparación constante. Los resultados muestran que las TIC y los EVA facilitan la visualización de conceptos y optimizan el tiempo de aprendizaje, aunque su uso inapropiado puede generar distracciones. Se destaca la importancia de la autonomía, condiciones de piso y capacitaciones breves para docentes y estudiantes. Finalmente, se resalta la necesidad de entornos virtuales bien estructurados, con conectividad y actualización tecnológica, para garantizar un proceso educativo eficiente y adaptado a las exigencias actuales.

Tecnologías de la información y comunicación (TIC), entornos virtuales de aprendizaje (EVA), ubicuidad, matemática, educación superior.

ANTECENDENTES

Un desafío en el aprendizaje de las matemáticas radica en la transición entre diferentes representaciones conceptuales, como las abstractas, concretas o visuales, en áreas como la Geometría, el Álgebra, las Probabilidades y el Cálculo (Jantjies y Joy, 2017). El uso de tabletas facilita la interacción táctil multisensorial entre el usuario y el ordenador, ofreciendo un apoyo interactivo que favorece el aprendizaje. Esto permite a los docentes adaptar tareas transversales que promuevan el desarrollo de competencias de orden superior, relacionadas con los dominios cognitivo, psicomotor y socioafectivo, mejorando los resultados educativos (Rani, 2017; Hwang et al., 2023; Shuguang et al., 2021). En este contexto, el aprendizaje ubicuo, que responde a las demandas del siglo XXI, se presenta como una herramienta clave en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Arancibia et al., 2019).

Para un aprendizaje ubicuo fluido, los EVA actúan como andamiajes (Lino et al., 2022; Pinos-Coronel et al., 2020). En matemáticas, el aprendizaje ubicuo tiene diversas aplicaciones, destacando la robótica como una herramienta que mejora las experiencias educativas y las capacidades en estos sistemas (Mota et al., 2023). Los docentes pueden desarrollar software educativo adaptado al aula, crear actividades recreativas con TIC y diseñar prácticas para facilitar el aprendizaje de las matemáticas.

El aprendizaje ubicuo se diferencia del aprendizaje híbrido, m-learning y e-learning por su enfoque en la flexibilidad total de tiempo y espacio. Mientras que el u-learning permite aprender en cualquier momento y lugar gracias a dispositivos móviles e internet, el aprendizaje híbrido combina el aprendizaje presencial con el online, estructurado en tiempo y lugar. El m-learning se centra en el uso de dispositivos móviles para aprender de manera flexible, pero no necesariamente en todos los lugares y momentos. El e-learning es el aprendizaje completamente en línea, sin interacción presencial, a través de plataformas digitales (Báez y Clunie, 2019; Guerrero-Quiñonez et al., 2023)

Según los Estándares de la Profesión Docente para las carreras de Pedagogía (CPEIP, 2021), el enfoque en tecnología y computación se encuentra principalmente en la especialidad de Matemática.

Por ello, la capacitación es esencial para el futuro profesor de educación media en matemática, a fin de integrar eficazmente las TIC en el aula. Los docentes deben recibir formación continua en el uso de herramientas tecnológicas, estrategias pedagógicas digitales y buenas prácticas que permitan una incorporación significativa de las TIC en sus clases, optimizando su potencial para fomentar la participación activa y colaborativa de los estudiantes. Además, con la inclusión de la computación como área de formación pedagógica en los Estándares de la Profesión Docente para la carrera de Pedagogía en Matemática para Educación Media (CPEIP, 2021), es crucial que los programas de FID se actualicen.

METODOLOGÍA

Como investigadores y futuros profesores de matemáticas, nos proponemos analizar el impacto del aprendizaje ubicuo en la FID. Este análisis busca comprender cómo el aprendizaje ubicuo influye en la preparación del profesorado y cómo las TIC, a través de los EVA, pueden integrarse de manera más efectiva en este proceso. En este marco, surgen preguntas clave: ¿De qué manera las TIC y los EVA pueden potenciar el aprendizaje ubicuo en la formación docente? ¿Qué competencias debe desarrollar el futuro profesor de Matemáticas para incorporar estas tecnologías de manera significativa en su práctica pedagógica?¿Qué condiciones son necesarias para que su implementación sea fluida?

Para eso, el diseño de investigación se centrará en un enfoque cualitativo en base a entrevistas en profundidad. Este tipo de estudio se caracteriza por su claridad, consistencia y rigor, permitiendo, a través de preguntas abiertas, identificar patrones clave para responder a las interrogantes planteadas (Smart, 2005). La investigación incluye una muestra de 25 estudiantes (12 hombres y 13 mujeres), 5 de cada nivel desde 1ero a 5to año y 3 profesores (2 mujeres y 1 hombre) de una carrera de Pedagogía Media en Matemática. El objetivo es recolectar información relevante y detectar patrones clave que permitan comprender el impacto del aprendizaje ubicuo en la formación de profesores. Se formularán preguntas específicas para profesores y para estudiantes, con una duración aproximada de 15 a 30 minutos, cubriendo 2 temas principales: la percepción sobre la incorporación de las TIC en el aula y la necesidad de entornos virtuales para la enseñanza de la matemática.

Se seleccionó a los estudiantes de cada nivel mediante un muestreo aleatorio, mientras que los profesores fueron elegidos específicamente de las áreas de cálculo, geometría y pensamiento computacional. La triangulación de los datos se fundamentará en la experiencia con el uso de TIC y entornos virtuales de aprendizaje (EVA), tanto en el contexto universitario como en las aulas de práctica. El análisis de los datos se llevó a cabo utilizando el método de comparación constante, con el propósito de garantizar la credibilidad y la confiabilidad de los resultados obtenidos.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Respecto a la percepción sobre la incorporación de las TIC en el aula, los entrevistados declaran que “(…) la incorporación de las TIC facilitan tareas y optimizan el tiempo (…) sin embargo, pueden causar distracción si no se orientan de buena manera” (E8). Además, gran parte de los participantes coinciden en que las matemáticas se comprenden mejor con el uso de las TIC, pues existen más formas de representarlas, se declara que “(...) en matemática tienes que dibujar, y obtener un dibujo de mejor calidad en GeoGebra, de manera rápida con el que puedas interactuar, permite al estudiante aprender más rápido" (P2). En relación con esto, se concluye que "(…) las TIC sirven mucho para que una clase sea dinámica y participativa (…) y en mi experiencia, puedes tener el control de las respuestas de manera instantánea de los estudiantes" (E5). Como desafío, se resalta la necesidad de ofrecer capacitaciones breves tanto a profesores como a estudiantes sobre el uso de dispositivos y aplicaciones, ya que "(...) sin una capacitación previa, los estudiantes tienden a distraerse" (E1), así como la de establecer software educativos a la carrera, pues es "(..) algo que nos ayudaría (...) sería bueno intencionar el uso de 2 o 3 software científico-matemático (..) uno para cálculo, uno para geometría, uno para estadística por ejemplo" (P2).

El segundo tema abordado se centra en la necesidad de entornos virtuales para la enseñanza de la matemática. Un aspecto destacado fue la importancia de contar con ciertas condiciones mínimas para asegurar el funcionamiento óptimo de los EVA. Entre estas condiciones, se mencionó que "los estudiantes deben tener conocimientos básicos, como saber utilizar Windows" (E25) y que la infraestructura de las instituciones debe ser adecuada. Como se señaló, "no las he estado utilizando tanto, pero por las condiciones del colegio (…) si tuviera una conexión fija, las utilizaría más" (E21). Esto resalta la necesidad de una "mayor inyección de dinero" (E18) para garantizar una conectividad más estable y accesible, ya que las instituciones que carecen de estas condiciones no pueden ofrecer un aprendizaje fluido. Las limitaciones de infraestructura no solo afectan la implementación de herramientas digitales, sino que también restringen su potencial para transformar la educación, especialmente en contextos vulnerables. Por ello, la conectividad y la antigüedad de los dispositivos son factores cruciales para asegurar que el aprendizaje ubicuo se desarrolle de manera efectiva. A pesar de estas dificultades, se reconoció que los entornos virtuales pueden ser beneficiosos para un aprendizaje más estructurado. Al estar diseñados específicamente para las instituciones, estos entornos contienen solo aplicaciones de interés educativo, lo que ayuda a evitar distracciones y a enfocar el aprendizaje.

CONCLUSIÓN

Aunque el uso de las TIC en el aula puede hacer las clases más dinámicas y atractivas para los estudiantes, aún es necesario investigar si realmente mejora los resultados educativos. El simple hecho de emplear tecnologías no garantiza que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea superior al tradicional. Sin embargo, se ha observado que los estudiantes tienden a mostrar un mayor interés y participación al interactuar con herramientas tecnológicas, lo que puede aumentar su motivación y compromiso. Este involucramiento activo podría tener un impacto positivo en el aprendizaje, aunque es esencial evaluar su efecto en el desarrollo de habilidades cognitivas a largo plazo. Para superar los desafíos asociados al uso de las TIC y asegurar su efectividad, es fundamental implementar estrategias concretas. En primer lugar, se debe ofrecer capacitación continua a los docentes, asegurando que puedan integrar las TIC de manera pedagógica. Además, es crucial evaluar de manera constante el impacto de estas herramientas en el aprendizaje profundo, no solo en la interacción superficial. Para ello, las instituciones deben contar con infraestructura adecuada, incluyendo dispositivos modernos y una conectividad estable. También es importante fomentar el pensamiento crítico y la resolución de problemas mediante actividades que desarrollen habilidades cognitivas complejas. Finalmente, aprovechar el concepto de aprendizaje ubicuo, permitiendo a los estudiantes aprender en cualquier momento y lugar, fortalecerá su preparación en áreas como la programación y el pensamiento computacional, habilidades esenciales para su futuro académico y profesional.

Referencias

Arancibia M. L., Cabero J. y Valdivia, I. (2019). Comparative study between teachers and students on acceptance and use of technologies for educational purposes in the Chilean context. *Apertura, 11(1)*, 104-119. https://doi.org/10.32870/ap.v11n1.1440

Báez Pérez, C. I., y Clunie Beaufond, C. E. (2019). Una mirada a la educación ubicua. *RIED-Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 22(1), 325–344. https://doi.org/10.5944/ried.22.1.22422

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. (2021). *Guía para la implementación del currículo en Educación Media*. https://www.cpeip.cl/guia-educacion-media

Guerrero-Quiñonez, A., Bedoya-Flores, M., Mosquera-Quiñonez, E., Ango-Ramos, E., y Lara-Tambaco, R. (2023). Educación híbrida: desafíos actuales. *Revista Iberoamericana de Investigación en Educación y Sociedad*. https://doi.org/10.56183/iberoeds.v3i1.629

Hwang, W., Nurtantyana, R., Purba, S., Hariyanti, U., y Suprapto. (2023). Augmented Reality With Authentic GeometryGo App to Help Geometry Learning and Assessments. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, 16, 769-779. https://doi.org/10.1109/TLT.2023.3251398

Jantjies, M., y Joy, M. (2017). Teaching Through Mobile Technology: A Reflection From High School Studies in South Africa, 1022-1035. https://doi.org/10.4018/978-1-5225-2399-4.CH026

Lino, L.C.C., Roque, R.H.O., Rivera, L.H., y Tintaya, A.N.P. (2022). Aprendizaje Ubicuo y entornos virtuales durante la pandemia por COVID-19 en Perú. *Horizontes*, 6(26), 2004-2018. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i26.469

Mota, F., Kalbermatter, R., Oliveira, L., y Lima, J. (2023). A Ubiquitous Learning Approach on Robotics. 2023 Latin American Robotics Symposium (LARS), 2023 Brazilian Symposium on Robotics (SBR), and 2023 Workshop on Robotics in Education (WRE), 615-619. https://doi.org/10.1109/LARS/SBR/WRE59448.2023.10332963

Pinos-Coronel, P. C., García-Herrera, D. G., Erazo-Álvarez, J. C., y Narváez-Zurita, C. I. (2020). Las TIC como mediadoras en el proceso enseñanza – aprendizaje durante la pandemia del COVID-19. *Revista Arbitrada Interdisciplinaria Koinonía*, *5(1)*, 121. https://doi.org/10.35381/r.k.v5i1.772

Rani, V., y Sattanathan, P. (2017). LEARN MATHEMATICS THROUGH UBIQUITOUS LEARNING. *Abhinav-National Monthly Refereed Journal Of Research In Arts & Education*, 6, 9-12.

Shuguang, L., Xingxing, Z., Wuyang, C., y Wenpu, Z. (2021). Construction of Intelligent Adaptive Learning Platform in Ubiquitous Environment. *2021 10th International Conference on Educational and Information Technology (ICEIT)*, 56-60. https://doi.org/10.1109/ICEIT51700.2021.9375613

Smart, J. (2005). Attributes of Exemplary Research Manuscripts Employing Quantitative Analyses. *Research in Higher Education*, 46, 461-477. https://doi.org/10.1007/S11162-005-2970-5

EVALUACIÓN DE UN PROYECTO STEM: CALIDAD DE LA PROPUESTA Y LA PRESENCIA DE LA MATEMÁTICA EN ÉL

Gladys Osorio Railef, Universidad de Granada

José Luis Lupiáñez, Universidad de Granada

José Miguel Vílchez, Universidad de Granada

Abstract:

Este trabajo tiene dos objetivos: el primero consiste en evaluar una propuesta STEM correspondiente a un proyecto de octavo año básico de enseñanza chilena mediante una rúbrica que indique si este se adecúa a los estándares que demanda la educación STEM, y el segundo, analizar la presencia de la matemática y el rol que esta disciplina cumple en la propuesta. Utilizando una metodología cualitativa se analizaron las secciones y orientaciones del proyecto por medio de los indicadores de la rúbrica, además de identificar la presencia de los elementos característicos del proceso de modelización matemática. Los resultados mostraron que el proyecto analizado a nivel teórico solo alcanza a ser pseudo-STEM y a nivel práctico se limita a un nivel básico, evidenciándose en las dimensiones de finalidad y evaluación de proyecto. Con respecto a la presencia de los elementos de modelización matemática, existe una ausencia de aquellos que conectan el mundo real y el mundo matemático de este proceso cíclico. De esta forma, es importante que la matemática no se relegue a un plano inferior que el resto de las disciplinas que componen el acrónimo STEM, debiendo profundizar aún más en su desarrollo competencial en vez de solo la presencia de cálculos.

educación STEM, alfabetización STEM, modelización matemática, educación básica, proyecto

INTRODUCCIÓN

Actualmente el acrónimo STEM ya no es un concepto desconocido en la educación. Sin embargo, la manera de cómo implementarlo en el aula ha sido uno de los grandes desafíos ya que muchas de las actividades que se catalogan bajo la etiqueta "STEM" no cumplen con todos los requisitos mínimos para que sea llamada como tal (Martín-Páez et al., 2019). Por otra parte, algunos estudios indican que cuando se implementan actividades STEM no se visibiliza la matemática como ocurre con el resto disciplinas STEM (Maas et al., 2019). Este trabajo tiene dos finalidades: evaluar la calidad de una propuesta para 8º básico correspondiente a un proyecto científico mediante una rúbrica que indique si se adecúa a los estándares que demanda la educación STEM, y el segundo, analizar la presencia y el rol que cumple la matemática en el proyecto.

ELEMENTOS TEÓRICOS O CONCEPTUALES

Educación STEM

Diversas investigaciones destacan los beneficios de la educación STEM ya que conlleva un desarrollo de capacidades, habilidades y conocimientos disciplinarios para que un individuo pueda resolver problemas en contexto real (Falloon et al., 2020). En este trabajo se definirá la educación STEM como el "enfoque educativo que integra conocimientos y/o habilidades de las cuatro disciplinas implicadas en el acrónimo, orientado a la resolución de problemas y contextualizado en situaciones con diferentes niveles de realidad y autenticidad" (Aguilera et al., 2022, p.13).

Modelización matemática

Blum y Leiss (2007) establece un esquema para modelización matemática que parte de un problema con contexto real, el cual luego de analizarse mediante preguntas, se presenta un modelo matemático cuya solución luego debe ser interpretada dentro del contexto del problema para que tenga sentido. Siguiendo esta línea, Maass et al. (2019) propone un modelo más detallado, el cual se compone de los siguientes elementos: situación real como situación de origen, simplificación, modelo real, matematización, trabajo matemático, solución matemática, interpretación, solución interpretada y validación. De esta manera, en este trabajo se consideraron la presencia de estos elementos para analizar el rol que cumple la matemática dentro de la propuesta STEM.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Diseño y método

Este trabajo corresponde a un estudio cualitativo de tipo descriptivo. Por medio de un análisis del contenido de la propuesta se ha evaluado en qué medida cumple con los estándares de calidad en términos de STEM y cuál es el papel que cumple la matemática en esta propuesta.

Propuesta analizada e instrumento

La propuesta analizada es un proyecto del Centro de Innovación del MINEDUC y CEPPE UC (2021) llamado "Lab: propiedades físico-químicas" enmarcado en 8º año básico. Este se acompaña de orientaciones docentes de cómo implementar aulas STEAM. Esta propuesta fue escogida debido a que se enmarca en el último curso antes de iniciarse la enseñanza media. Este punto es fundamental, considerando que los últimos cambios incorporados en las Bases Curriculares para 3º y 4º año de enseñanza media incorporan a la educación STEM dentro de sus indicaciones. Para estudiar la calidad de la propuesta se empleó la rúbrica RubeSTEM (Aguilera et al., 2022) compuesta por 19 indicadores agrupados en dos niveles: práctico y teórico. La Tabla 1 muestra su sistema de valoración.

Tabla 1

Sistema de valoración de RubeSTEM (Aguilera et al., 2022, p.21)

Dimensiones	Valores	Descriptores	Nivel
Para qué	0-4 5-9	Propuesta Pseudo-STEM Propuesta STEM	Teórico
Qué Cómo	0-15 16-31 32-47 48	En vías de desarrollo Básica Avanzada Sofisticada	Práctico

RESULTADOS

Para evaluar la calidad de la propuesta en términos de STEM, se utilizaron como categoría de análisis los indicadores de la rúbrica RubeSTEM. Como este instrumento posee cuatro niveles de logro valorados de 0 a 3 (0 en vías de adquisión, 1 básico, 2 avanzado y 3 sofisticado), mediante un análisis de contenido se identificó el nivel de logro de los indicadores según las secciones de la propuesta. La figura 1 muestra el nivel que alcanza cada uno de los 19 indicadores de la rúbrica aplicada a la propuesta.

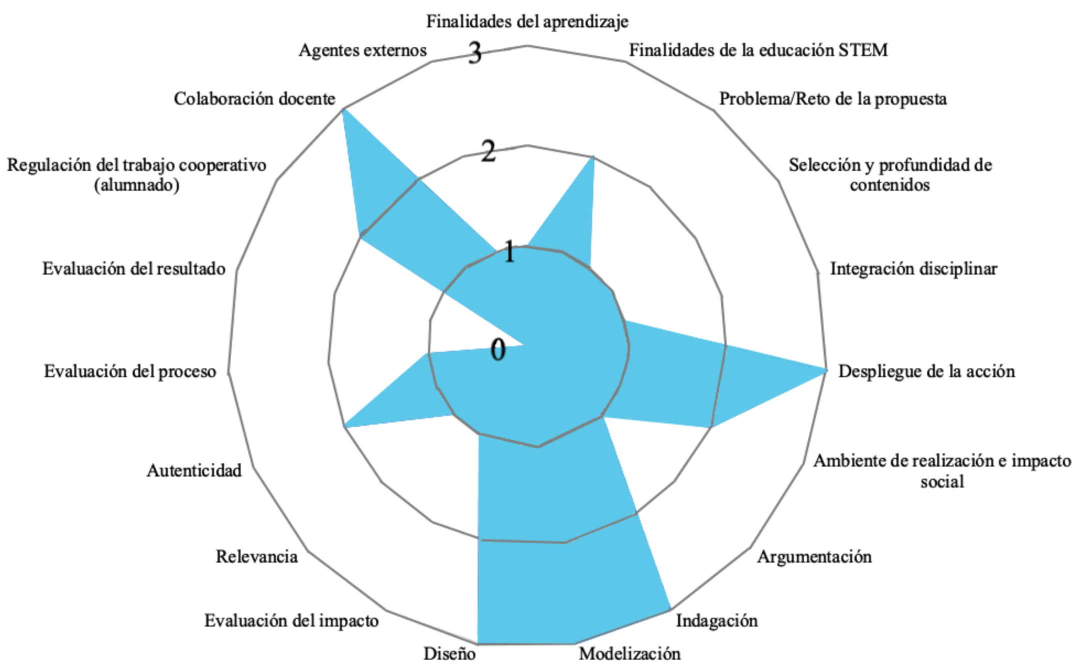


Figura 1. Resultados de la evaluación del proyecto mediante RubeSTEM

Considerando el sistema de valoración de la Tabla 1, la propuesta analizada alcanzó 4 puntos, lo que corresponde a una propuesta de nivel teórico pseudo-STEM. Respecto a su nivel práctico, la propuesta alcanzó 28 puntos, lo que equivale a una propuesta básica. Con respecto a la presencia de la matemática, la Tabla 2 muestra la presencia de sus elementos en la propuesta analizada.

Tabla 2

Presencia de los elementos del proceso de modelización en el proyecto

Presencia	Elemento							
	A	B	C	D	E	F	G	H
Sí	X				X	X	X	
No		X	X	X				X

Nota: (A) situación real como situación de origen, (B) simplificación, (C) modelo real, (D) matematización, (E) trabajo matemático, (F) solución matemática, (G interpretación, (H) solución interpretada, y (I) validación.

CONCLUSIONES

El proyecto analizado en su aspecto teórico corresponde a una propuesta pseudo-STEM. A pesar de que en las orientaciones se les invita al profesorado a identificar las disciplinas presentes, no existe una articulación más profunda entre ellas que promueva el desarrollo de la alfabetización STEM en los estudiantes con el problema planteado. Tampoco se alude a la perspectiva de género ni a las vocaciones que el estudiantado podría presentar durante la realización del proyecto. Con respecto a su nivel práctico, la propuesta presenta elementos claves del método científico, cumpliendo con los indicadores de indagación y modelización al predecir escenarios. Sin embargo, las debilidades se muestran en la evaluación, ya que, aunque se invite a diversificar los tipos de evaluaciones, estas orientaciones son generales y no se identifican en las secciones del proyecto. Con respecto a la argumentación, aunque se hace el llamado a promoverla, no existen preguntas específicas que potencien las habilidades comunicativas, la creatividad y el pensamiento crítico. Con respecto a la presencia y rol de la matemática en la propuesta STEM, existe una ausencia de los elementos que conectan el mundo real con el mundo matemático en el proceso de modelización matemática (simplificación, modelo real y matematización). Esto conlleva a que el papel de la matemática se reduzca al uso de cálculos o análisis más superficiales. Es importante destacar la importancia de realizar este tipo de análisis de propuestas para que el docente evalúe si las actividades que la componen realmente se alinean con los objetivos que dirigen su diseño.

Hay un gran interés de las políticas educativas chilenas por implementar la educación STEM entre sus niveles de escolaridad, sin embargo, es importante que una actividad catalogada como STEM atienda a todas las dimensiones de este enfoque educativo, de tal manera que la integración de las cuatro disciplinas STEM desarrollen las habilidades necesarias para que un individuo pueda resolver problemas complejos en contextos reales.

REFERENCIAS

Aguilera, D., García-Yeguas, A., Perales Palacios, F. J. y Vílchez-González, J. M. (2022). Diseño y validación de una rúbrica para la evaluación de propuestas didácticas STEM (RUBESTEM). *Revista Interuniversitaria De Formación Del Profesorado. Continuación De La Antigua Revista De Escuelas Normales, 97*(36.1). https://doi.org/10.47553/rifop.v97i36.1.92409

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), Mathematical modelling: Education, engineering and economics—ICTMA 12 (pp. 222–231). Chichester: Horwood.

Falloon, G., Hatzigianni, M., Bower, M., Forbes, A. y Stevenson, M. (2020). Understanding K-12 STEM education: a framework for developing STEM literacy. *Journal of Science Education and Technology, 29*, 369–385. https://doi.org/10.1007/s10956-020-09823-x

Maass, K., Geiger, V., Ariza, M.R. y Goos, M. (2019). The role of mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM, 51*(6), 869–884. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5

Martín-Páez, T., Aguilera, D., Perales-Palacios, F. J. y Vílchez-González, J. M. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature. *Science Education, 103*(4), 799-822. https://doi.org/10.1002/sce.21522

Ministerio de Educación y Centro de Políticas y Prácticas de Educación de la Universidad Católica de Chile (2021). *Aulas innovadoras: STEAM y maker. Implementar nuestra aula STEAM. Recuperado el 22 de* agosto de 2024 de https://drive.google.com/file/d/1GePLzQdyw8aNnIdmkpXQbndm_eC8hKYf/view

PROPUESTA DE PROYECTO DE AULA INTERDISCIPLINARIO ENTRE MATEMÁTICA Y ARTES VISUALES: EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS DESDE EL ENFOQUE EDUMÉTRICO

Jorge Erices, Universidad de Playa Ancha

Auristela Hormazábal, Universidad de Playa Ancha

Abstract:

El presente trabajo presenta una propuesta de proyecto de aula interdisciplinario que integra Matemática y Artes Visuales, dirigida a estudiantes de Primero Medio en Chile. Utilizando el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), se busca promover el aprendizaje de la geometría proporcional a través de la apreciación del patrimonio arquitectónico local y el diseño urbano. Los estudiantes aplicarán conceptos geométricos como la homotecia y el *teorema de Tales en observaciones de arquitectura contemporánea, apoyados por herramientas tecnológicas.*

El proyecto se organiza en cuatro fases: 1) reflexión inicial sobre los objetivos del proyecto y formulación de preguntas esenciales, 2) investigación y diseño en 2D, 3) elaboración de modelos 3D con fundamentación geométrica, y 4) presentación final del portafolio. A lo largo de estas fases, se implementa una evaluación criterial o edumétrica que sigue los lineamientos del Decreto 67/2018, centrada en el logro individual de los objetivos de aprendizaje sin comparaciones normativas. Se prepararon instrumentos como listas de cotejo, escalas de apreciación y rúbricas para monitorear el progreso y proporcionar retroalimentación continua. Los resultados esperados indican que esta integración interdisciplinaria no solo incrementa la motivación estudiantil, sino que también mejora la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos en contextos reales, enfatizando en la importancia de un enfoque interdisciplinario en la educación secundaria.

Proyectos interdisciplinarios, Aprendizaje Basado en Proyectos, geometría proporcional, evaluación criterial, edumetría

INTRODUCCIÓN

Varios estudios han sugerido una relación positiva entre la implementación de metodologías activas en proyectos interdisciplinarios y la motivación de los estudiantes (Botella y Ramos, 2020a, 2020b; Carcelén González, 2019; Sánchez-Rivas et al., 2023). En particular, el método de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) resulta especialmente relevante, permitiendo que los alumnos aborden un objetivo desde diferentes áreas curriculares (Ruiz Hidalgo y Ortega-Sánchez, 2022). Este enfoque fomenta un rol más investigativo por parte del estudiante, promoviendo la construcción activa del conocimiento; mientras que el docente actúa como mediador en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Ruiz-Peralta y Zambrano-Pineda, 2023). Por otra parte, el uso de herramientas tecnológicas innovadoras en el aula no solo incrementa la motivación del alumnado hacia el aprendizaje (Medeiros et al., 2019), sino que también los familiariza con el entorno tecnológico actual (Ruiz Hidalgo y Ortega-Sánchez, 2022). La promoción de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en el currículo chileno proporciona un marco para comprender y resolver problemas del conocimiento matemático, así como para elaborar trabajos visuales, entre otras actividades (Ministerio de Educación, 2015).

Con base en la experiencia de los autores, los estudiantes de Primero Medio en Chile a menudo expresan dificultades para comprender la relevancia de conceptos como la homotecia y el teorema de Tales, y qué aplicaciones tienen estos contenidos en la vida real. Esta desconexión limita su motivación y el aprendizaje significativo. En ese sentido, la presente propuesta de proyecto interdisciplinario busca abordar esta problemática, promoviendo el aprendizaje de la geometría proporcional a través de la apreciación del patrimonio arquitectónico local y el diseño urbano. Si bien recientemente se han diseñado algunas propuestas de intervención pedagógica que contextualizan problemas de la geometría a través de la arquitectura, estas se han enfocado, más bien, en estudiantes españoles de tercero de educación secundaria obligatoria (Soler Vela, 2022) y bachillerato (Camacho

Molina, 2019). Empleando el enfoque de Aprendizaje Basado en Proyectos y mediado por las TIC, se integran en una misma unidad objetivos de aprendizaje de Matemática y Artes Visuales. Se sugiere implementar una evaluación criterial que acompañe la ruta de aprendizaje del ABP, que incluye diversas formas de evaluación, adoptando un enfoque constructivo que se ajusta a los lineamientos del Decreto 67/2018, con el objetivo de favorecer la inclusión y la equidad de los estudiantes.

El objetivo general de esta investigación es evaluar la efectividad de un proyecto interdisciplinario basado en ABP para promover el aprendizaje significativo de la geometría proporcional mediante la integración de Matemática y Artes Visuales. Entre los objetivos específicos se encuentra diseñar actividades de aprendizaje interdisciplinarias que vinculen la geometría proporcional con la apreciación del patrimonio arquitectónico local; implementar una evaluación criterial o edumétrica que permita monitorear el logro individual de los estudiantes sin comparaciones normativas; y analizar la motivación y la comprensión de los conceptos geométricos en contextos prácticos mediante el uso de herramientas tecnológicas.

METODOLOGÍA

Las preguntas que guiaron la propuesta son las siguientes: ¿Puede la apreciación de la arquitectura pública contemporánea, los espacios y el diseño urbano, apoyar el aprendizaje de la geometría proporcional?, ¿la implementación de la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) logra aprendizajes significativos en matemática?, ¿la evaluación criterial es un medio eficaz para monitorear el aprendizaje en matemática?

En líneas generales, el proyecto se estructura en cuatro fases, distribuidas en 8 sesiones de clase (8 horas lectivas), siguiendo la propuesta de García y Pérez (2018) para el diseño de actividades mediante ABP:

1. Reflexión inicial en torno al objetivo del proyecto y formulación de preguntas esenciales sobre geometría y patrimonio arquitectónico.

2. Investigación y diseño 2D: observación de estructuras locales y creación de representaciones bidimensionales.

3. Construcción de modelos 3D con fundamentación geométrica.

4. Presentación del proyecto y reflexión sobre los aprendizajes

Los estudiantes relacionarán formas geométricas en la arquitectura local con conceptos de la geometría proporcional, como la homotecia y el teorema de Tales, siendo guiados en sus observaciones en terreno, fotografías, dibujos y modelos 3D. En ABP, el proyecto culmina con la elaboración y presentación pública de un producto, a saber, algún objeto, aparato, informe, estudio, ensayo, disertación oral, escrita, visual, audiovisual o multivisual (Ministerio de Educación, 2019). En la presente propuesta, las evidencias serán organizadas en un portafolio digital, carpeta donde los estudiantes, en forma grupal, guardarán sus trabajos visuales. Para facilitar la ejecución del proyecto, se preparó una ficha completa con los diferentes componentes del mismo.

RESULTADOS PROYECTADOS

Se espera que la propuesta incremente la motivación y la comprensión de los estudiantes al aplicar conceptos geométricos en contextos prácticos, mejorando su capacidad para transferir aprendizajes a situaciones reales. Además, se proyecta un desarrollo de habilidades como el pensamiento crítico, la creatividad y el trabajo colaborativo, junto con una mejor apreciación del patrimonio cultural local.

DISCUSIÓN: ASIGNATURISMO VS. INTERDISCIPLINARIEDAD

La educación tradicional, caracterizada por la fragmentación del conocimiento a través del asignaturismo, no se alinea con un modelo educativo orientado al desarrollo de competencias en los educandos. Para revertir esta situación desde la formación inicial docente, Iturbe-Sarunic y Silva-Hormazábal (2022) han propuesto la integración interdisciplinar y la co-docencia como los mecanismos que favorecen la formación de docentes capaces de diseñar e implementar itinerarios didácticos basados en las conexiones disciplinares que permiten a los estudiantes comprender el mundo. En ese sentido, si bien "la organización en asignaturas se considera como un recurso para favorecer la organización escolar, … la integración interdisciplinaria favorece la comprensión profunda y la aplicación de los conocimientos" (Ministerio de Educación, 2018, p. 26), "le otorga relevancia al currículum, destaca los lazos entre las disciplinas y facilita un aprendizaje más holístico" (Ministerio de Educación, 2015, p. 220).

En particular, el ABP genera instancias que promueven esta interdisciplinariedad por medio del trabajo colaborativo, al abordar cuestiones desde diversas perspectivas (Ministerio de Educación, 2019b). Finalmente, la combinación de ABP, geometría proporcional y apreciación del patrimonio arquitectónico local promete ser una estrategia efectiva para motivar a los estudiantes con conceptos que son aplicables a la vida cotidiana, enriqueciendo el proceso de enseñanza-aprendizaje, y fomentando el desarrollo de habilidades de autonomía, trabajo colaborativo, pensamiento crítico, creatividad e innovación.

EVALUACIÓN CRITERIAL O EDUMÉTRICA VS. EVALUACIÓN NORMATIVA O PSICOMÉTRICA

La evaluación representa el eje director para guiar y monitorear los aprendizajes de los estudiantes en el ABP (Ruiz-Peralta y Zambrano-Pineda, 2023), motivo por el cual se aboga por una evaluación formativa en cada una de las etapas de la elaboración del portafolio. El seguimiento y retroalimentación del avance se realizará a través de distintos instrumentos, desde un enfoque edumétrico: listas de cotejo, escalas de apreciación, rúbricas, mapa mental, "dos caras de la moneda", mandala, test objetivo y prueba de ensayo.

El enfoque evaluativo centrado en el aprendizaje, que enmarca y sustenta el Decreto 67/2018, promueve la participación activa de todos los estudiantes en las actividades de aprendizaje y procesos de evaluación y calificación, considerando la diversidad como un aspecto inherente al aula (Ministerio de Educación, 2017). En ese sentido, entendemos que la implementación del Decreto 67/2018 desaconseja la evaluación normativa y promueve una evaluación criterial. Este tipo de evaluación, Carver (1974) lo denominó como edumetría y su característica fundamental es apreciar el logro de objetivos por parte de cada alumno sin compararlo con el de sus compañeros, una forma de operativizar la evaluación del aprendizaje individual respecto a objetivos educativos que actúan como criterio comparativo (Tabla 1).

CONCLUSIONES

El enfoque interdisciplinario, combinado con el ABP y una evaluación criterial, ofrece una alternativa innovadora para superar las limitaciones del asignaturismo en la enseñanza de Matemática. Al conectar la geometría proporcional con la arquitectura y el diseño urbano, los estudiantes no solo adquieren habilidades matemáticas, sino también una mayor conciencia cultural y capacidad para resolver problemas del mundo real. La implementación de esta propuesta puede ser replicada y adaptada a otros contextos educativos.

Tabla 1

Ejemplo parcial de prueba de ensayo edumétrica. Elaboración propia.

<table>
<tr><td>Unidad de aprendizaje: Apreciemos la arquitectura pública contemporánea a través de la fotografía y el dibujo digital para apoyar el aprendizaje de la geometría proporcional en Primero Medio.</td></tr>
<tr><td>Objetivo 1: Identificar las definiciones y propiedades de la homotecia y de los teoremas de Tales. (10%)</td></tr>
<tr><td>10%<table><tr><td>L</td><td>4-3</td></tr><tr><td>NL</td><td>2-1-0</td></tr></table></td></tr>
</table>

1) Escribe frente a cada proposición el concepto asociado (homotecia directa, homotecia inversa, teorema de Tales) que corresponda **(1 pt. c/u)**

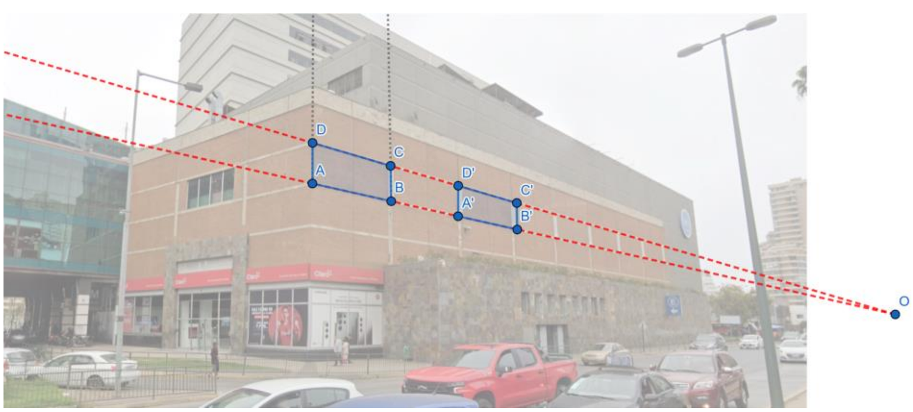
1. Los puntos homotéticos están al mismo lado del centro de homotecia.	1. ………………………………
2. Si en un triángulo se traza una línea paralela a uno de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.	2. ………………………………
3. Se obtiene una imagen invertida de la figura original.	3. ………………………………
4. Si dos rectas se cortan por tres o más paralelas, los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.	4. ………………………………

Objetivo 2: Aplicar la homotecia y el teorema de Tales en contextos arquitectónicos reales. (20%)

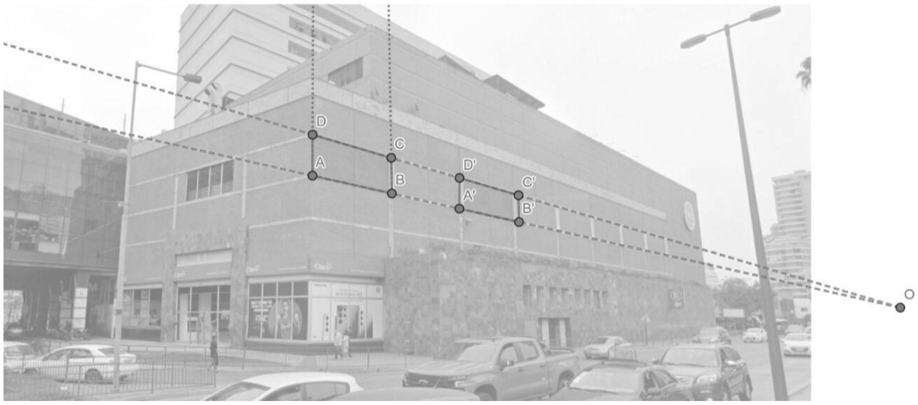
30%

L	5-4
ML	3
NL	2-1-0

1) En la imagen a continuación, ¿qué medidas debo conocer para calcular la razón de homotecia entre el cuadrilátero imagen A’B’C’D y el cuadrilátero original ABCD? **(1 pt. cada medida)** ¿Cambiaría el centro de homotecia si la figura original fuera el cuadrilátero A’B’C’D’? **(1 pt.)**



2) En la imagen anterior, ¿cómo aplicarías el teorema de Tales para determinar la altura del edificio marrón? **(1 pt.)** Acompaña tu explicación con un dibujo. **(1 pt.)**



Referencias

Botella, A. M. y Ramos, P. (2020a). La relación con los demás y la motivación en un Aprendizaje Basado en Proyectos. *Estudios Pedagógicos*, *46*(1), 145-160. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052020000100145

Botella, A. M. y Ramos, P. (2020b). Motivación y Aprendizaje Basado en Proyectos: una Investigación-Acción en Educación Secundaria. *Multidisciplinary Journal ofEducational Research, 10*(3), 295-320. http://dx.doi.org/10.447/remie.2020.4493

Camacho Molina, B. (2019). *Estudio de la geometría en bachillerato a través de la arquitectura y el urbanismo* [Tesis de maestría, Universidad de Alcalá]. Repositorio Institucional - Universidad de Alcalá

Carcelén González, R. (2019). Metodologías de aprendizaje activo en proyectos arquitectónicos y su incidencia en la motivación del alumnado universitario. *Innovación Educativa*, (29): 95-108.

Carver, R. (1974). Two dimensions of test: Psychometric and edumetric. *American Psychologist, 29*(7), 512-518.

García, J. y Pérez, J. E. (2018). Aprendizaje basado en proyectos: método para el diseño de actividades. *Tecnología, Ciencia y Educación: revista de carácter científico multidisciplinar*, (10), 37-63.

Iturbe-Sarunic, C. y Silva-Hormazábal, M. (2022). Desarrollo de una propuesta de integración de Matemática y Ciencias Naturales en la Formación Inicial Docente. *Estudios Pedagógicos*, *48*(3), 255-279.

Medeiros Martins de Almeida, C., Bandeira Scheunemann, C., Joao dos Santos, M. y Campos Lopes, P. (2019). Propuestas de metodologías activas utilizando tecnologías digitales y herramientas metacognitivas para auxiliar en el proceso de enseñanza y aprendizaje. *Paradigma*, *40*(1), 204-220.

Ministerio de Educación. (2015). *Bases Curriculares: 7° básico a 2° medio.* Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación. (2018). *Bases Curriculares: Primero a sexto Básico.* Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

Ministerio de Educación. (2019). *Metodología de aprendizaje basado en proyectos.* Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140166_recurso_pdf.pdf

Ruiz Hidalgo, D. y Ortega-Sánchez, D. (2022). El aprendizaje basado en proyectos: una revisión sistemática de la literatura (2015-2022). *Human Review*, 2-14. https://doi.org/10.37467/revhuman.v11.4181

Ruiz-Peralta, K. y Zambrano-Pineda, L. (2023). Aprendizaje basado en proyectos en matemática en instituciones de educación secundaria 2. *Santiago*, (160), 71-84.

Sánchez-Rivas, E., Ramos-Núñez, M., Linde-Valenzuela, T. y Sánchez-Rodríguez, J. (2023). Percepción del alumnado universitario respecto al aprendizaje basado en proyectos con tecnología. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 26*(1), 71-84. https://doi.org/10.6018/reifop.543281

Soler Vela, A. (2022). *Aprendizaje activo en la enseñanza de la geometría en 3º de la ESO a través de la arquitectura y el patrimonio* [Tesis de maestría, Universidad Internacional de La Rioja]. Repositorio Institucional - Universidad Internacional de La Rioja.

CARACTERIZACIÓN DE CAMPOS DE PROBLEMA DE LA DERIVADA EN INGENIERÍA

Dra. Maritza Galindo[1], Universidad San Sebastián

Luis González[2], Universidad San Sebastián

Abstract:

El objetivo de este trabajo es identificar y analizar los campos de problemas de la derivada en los libros de texto universitarios propuestos para la formación de ingenieros en Chile. Para ello, por medio del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos, se analizaron cualitativamente trece libros de textos utilizados para la enseñanza de la derivada para estudiantes de ingeneiría commercial e ingenierías civiles de diferentes universidades chilenas. Los resultados indican que la mayor parte de los textos considera problemas introductorios aplicados (física, economía, química, pandemias, etc.), luego presenta problemas resueltos, en los cuales se ejemplifica el uso de los conceptos, se exhibe la demostración de algunos teoremas de la derivada. Además, dentro de los resultados se ejemplifican las 21 subcategorías de los campos de problemas *presentes en los libros de textos de matemática y presentan las principales diferencias entre textos de matemática aplicada a ingeniería comercial y los clásicos de enseñanza para las ingenierías civiles. Se concluye que el estudio realizado proporciona resultados novedosos con relación a algunas características del significado de la derivada presentes en los libros de texto para las carreas de Ingeniería en Chile, además proporciona una herramienta a considerar al momento de realizar cambios curriculares en ciencias básicas y al diseñar una propuesta de enseñanza de la derivada.*

[Libros de textos, Campos de problema, Derivada, Ingenierías]

INTRODUCCIÓN

La derivada es uno de los objetos matemáticos fundamentales para todas las áreas del conocimiento, ya que no sólo permite el estudio del comportamiento de funciones y el análisis variacional, sino también la optimización de recursos y el análisis marginal, entre otros. Además, sus diferentes modos de representación es uno de los más utilizados en microeconomía, los estudios dejan ver una relación de comprensión entre los conceptos económicos y matemáticos (Butler, et al., 1998; Ballard y Johnson, 2004; Hey, 2005; García, et al., 2006) y develan dificultades en la interpretación de situaciones económicas debido a la débil comprensión de los significados matemáticos que las organizan, (Ariza y Llinares, 2009).

Como consecuencia de las diversas aplicaciones de la derivada ésta se ha convertido en unos de los objetos matemáticos fundamentales presentes en los procesos formativos de las distintas ingenierías lo que ha generado diversos estudios con relación a la complejidad de sus significados, sus múltiples representaciones, los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes de ingeniería, la idoneidad del significado de la derivada en los distintos currículos y los significados parciales en los textos universitarios de enseñanza para las ingenierías (Pino-Fan, et al., 2018; Larios, et al., 2021; Larios y Jiménez, 2022; Rodríguez-Nieto, et al., 2022; Galindo, et al., 2022; Galindo y Breda, 2023, 2024).

Uno de los recursos que más influye en la construcción del significado de un objeto matemático son los libros de textos considerados por la institución en los planes de estudios. Los profesores utilizan los textos para organizar e implementar las lecciones de las clases y como consecuencia son parte del proceso educativo de los estudiantes (Larios, Jimenez, 2022). El análisis de los textos no sustituye la observación de la enseñanza en el aula, sin embargo, puede proporcionar información para la construcción de instrumentos de evaluación o para mejorar la enseñanza (Alvarado y Batanero, 2008). Por lo que resulta de gran interés investigar, ¿cómo se organizan los significados de la derivada en los libros de textos propuestos para la enseñanza de estudiantes de ingeniería comercial? En ese sentido, el objetivo de este trabajo es ampliar el estudio de Pino, et al. (2013) y Galindo y Breda (2023), caracterizando las subcategorías de las situaciones problemas de la derivada en los libros de textos universitarios propuestos para la formación de ingenieros civiles y comerciales en Chile.

MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL

Los desarrollos teóricos propuestos por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos, explicados recientemente por Godino, Batanero y Font (2019), tienen como objetivo dar respuesta a algunos problemas generados en el campo de la Educación Matemática. En el EOS, se asume que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas, que acontece en un tiempo-espacio determinado, a través de una secuencia de prácticas que, a menudo, se consideran procesos (de significación, conjeturar, argumentar etc.). Para ello, el EOS propone las nociones de situación-problema de práctica matemática (secuencia de prácticas), tales secuencias tienen lugar en el tiempo y se suelen considerarse, en muchos casos, como procesos. En particular, el uso y/o la emergencia de los objetos primarios se producen a través de los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (creación de algoritmos y rutinas) y argumentación.

La caracterización de la complejidad de un objeto matemático facilita elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio. Para el objeto matemático derivada, Pino-Fan, Godino y Font (2011, 2015) caracterizaron su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios, estableciendo posteriormente, 5 campos de problemas. En Galindo y Breda (2023), se identificaron 21 subcategoría de los campos de problema antes mencionados. En este estudio, procuramos su identificación en los libros de textos presentes en los programas de estudios de Ingeniería Comercial en Chile.

METODOLOGÍA

Este estudio adopta un enfoque cualitativo de tipo descriptivo-interpretativo, en este apartado se explica el contexto del estudio, los instrumentos de colecta de datos y el análisis de estos.

CONTEXTO DEL ESTUDIO E INSTRUMENTOS DE COLECTA DE DATOS

Los libros de textos son considerados un recurso muy importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los docentes utilizan los textos presentes en las bibliografías de los programas de estudios para planificar e implementar su trabajo de aula (Galindo y Breda, 2023), por lo que influencian la enseñanza del docente y el aprendizaje de los estudiantes. Adquiriendo un rol fundamental en la determinación del significado pretendido.

De Galindo y Breda (2023), se consideraron 13 libros de textos de matemática orientados a ingeniería, por lo que son adecuados para la enseñanza de ingenieros y permite contar con un amplio espectro del significado de la derivada. Los libros de texto se clasifican en 6 de matemática aplicada a ingeniería comercial y 7 clásicos de enseñanza del cálculo para ingeniería civil. A continuación, la tabla 1 presenta los libros de textos a analizar.

Tabla 1. Libros de textos de matemática orientados a ingeniería
Fuente: Galindo y Breda (2023)

Texto N° (Tn)	Título	Autores	Editorial	Edición	Año
T1	Matemáticas aplicadas a la administración y la economía.	J. Arya, R. Lardner.	México: Pearson Educación	5ª	2009
T2	Matemáticas para Administración y Economía.	E. Haeussler, R.Paul, R.Wood.	México: Pearson Educación	12ª	2008
T3	Cálculo para administración, economía, ciencias biológicas y sociales.	L. Hoffmann, G. Bradley, K. Rosen.	McGraw-Hill	8ª	2006
T4	Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales.	F. Budnick.	Ed. México: McGraw-Hill	4ª	2007
T5	Matemáticas para administración y economía.	S.T.Tan.	México: Thomson	3ª	2005
T6	Teoría y problemas de cálculo para administración, economía y ciencias sociales.	E. Dowling.	Santafé de Bogotá: McGraw-Hill Interamericana.	1ª	1992

T7	Cálculo Una variable	G. Thomas, M. Weir, J. Hass, C. Heil	Pearson Educación	13ª	2015
T8	Calculo diferencial e integral.	E. Purcell, S. Rigdon, D. Varberg.	Pearson Educación	9ª	2007

T9	Cálculo Tomo 1	R. Larson, B. Edwards.	Ed. México: McGraw-Hill.	10ª	2016
T10	Cálculo Trascendentes Tempranas	J. Stewart.	Cengage Learning Editores.	8ª	2018
T11	El cálculo	L. Leithold	Oxford University Press	7ª	1998
T12	Cálculo diferencial	F. Ortiz	Grupo editorial patria	1ª	2014
T13	Cálculo diferencial e integral	A. Aguilar, F. Valapai, H. Gallegos, M. Cerón, R. Reyes.	Pearson Educación, México.	1ª	2010

Los pasos que se siguieron para el análisis del contenido en libros de textos son los establecidos por Alvarado y Batanero (2008), que se resumen en:

- Determinar los textos de matemática universitaria a analizar.
- Seleccionar los capítulos, mediante una lectura detallada de los que tratan el tema.
- Determinar los elementos de significado, específicamente los campos de problema, a partir del análisis epistémico.
- Elaborar tablas comparativas que recogen los campos de problema en los distintos libros seleccionados.
- Análisis comparativo de contenido.
- Presentación de conclusiones, mediante el análisis descriptivo de la información obtenida.

Considerando los pasos antes descritos, para el análisis de los 13 libros de texto, se han seleccionado, los capítulos que tratan la derivada, con el fin de identificar la organización de los contenidos y una posterior identificación y análisis de los campos de problema. En primer lugar, se analizó la presencia de los campos de problemas del estudio histórico realizado por Pino, et al. (2013), los que se resumen en: A) Campos de problemas sobre tangentes, B) Campos de problema sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio (se refiere específicamente al "cociente" entre dos cantidades de magnitud), C) Campos de problemas sobre tasas instantáneas de variación (se refiere al cociente entre dos números sin hacer referencia a cantidades de magnitud, se le conoce comúnmente como límite del cociente incremental), D) Campos de problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, etc., y E) Campos de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación.

A medida que se realizó el análisis de los campos de problemas en los textos, se identificaron las 21 subcategorías de Galindo y Breda (2023) (Tabla 2). Esto permitirá ejemplificar cada subcategoría y realizar una caracterización detallada de los libros de textos.

Tabla 2: Campos de problemas (CP), Identificador (ID) y descripción del campo de problema.

Fuente: Galindo y Breda, 2023

CP	ID	DESCRIPCIÓN DEL CAMPO DE PROBLEMA
A	A1	Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando la concepción cartesiana.
	A2	Cálculo de la pendiente de recta tangente a una curva en un punto, utilizando el triángulo de Leibniz.
	A3	Cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando derivada.
	A4	Cálculo de la pendiente de una recta tangente a una curva para obtener una razón de cambio instantánea.
B	B1	Cálculo de tasas instantáneas de cambio marginal.
	B2	Crecimiento poblacional.
	B3	Cálculo de la rapidez instantánea.
	B4	Razones de cambio (o tasas de cambio) relativas y porcentuales para funciones económicas.
	B5	Razones de cambio aplicadas a otras áreas del conocimiento.
C	C1	Razones de cambio (o tasas de cambio) instantáneas de variación de funciones reales.
	C2	Razones de cambio (o tasas de cambio) relativas y porcentuales para funciones reales.
D	D1	Análisis del gráfico de funciones(monotonía) reales y de áreas del conocimiento diferentes a la económica.
	D2	Análisis del gráfico de funciones económicas (monotonía).
	D3	Cálculo de máximos y mínimos locales en problemas aplicados de economía utilizando criterio de la primera o segunda derivada para extremos relativos.
	D4	Cálculo de máximos y mínimos locales en funciones reales y de áreas del conocimiento diferentes a la económica, utilizando criterio de la primera o segunda derivada para extremos relativos.
	D5	Extremos absolutos en un intervalo cerrado.
	D6	Análisis de concavidad de funciones reales y económicas.
E	E1	Cálculo de derivadas de orden superior.
	E2	Cálculo de derivadas implícitas.
	E3	Método de newton para aproximación de raíces de polinomios
	E4	L'Hôpital

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A continuación, por motivos de espacio se presentan algunos resultados y conclusiones de este análisis, proporcionando ejemplos del campo de problema A y B, que ayuden a clarificar las categorías encontradas de los campos de problemas sobre la derivada.

A: Campos de problemas sobre tangentes. Para el análisis de la presencia de este campo de problemas es esencial prestar atención a la construcción que consideran los textos del concepto de recta tangente a una curva. Resulta de interés identificar si el tipo de actividades, ejercicios y/o ejemplos presentes en los textos, permiten ampliar la concepción euclidiana de la recta tangente a la cartesiana y a la Leibniziana, teniendo en cuenta los métodos infinitesimales ya que el cálculo lleva a los estudiantes a los niveles más altos de generalidad de la tangente, (Santi, 2011). A continuación, se consideran ejemplos de las 4 subcategorías de este campo de problemas presentes en los textos, cuyo objetivo es comprender la interpretación geométrica de la derivada, considerando previamente el concepto de recta tangente (Galindo y Breda, 2023, 2024).

- *A1: Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando la concepción cartesiana (aproximación por rectas secantes).* Este tipo de ejercicio se utiliza comúnmente para construir la definición algebraica de la derivada en un punto a través de su interpretación geométrica, para ello se considera la concepción cartesiana de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto como el límite de pendientes de rectas secantes, su desarrollo es comúnmente tabular (cálculo de pendientes de rectas secantes próximas) con apoyo gráfico. A continuación, la figura 1 presenta un ejemplo:

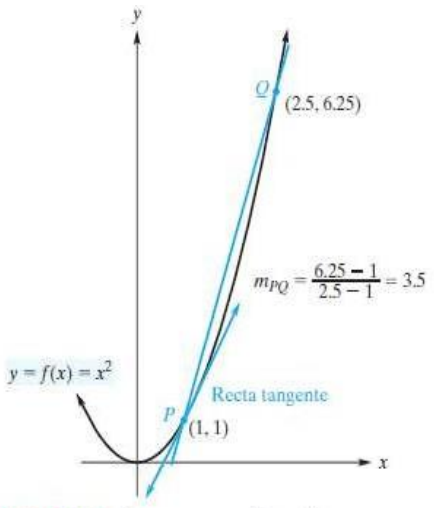


FIGURA 11.6 Recta secante a $f(x) = x^2$ que pasa por (1, 1) y (2.5, 6.25).

TABLA 11.1 Pendientes de rectas secantes a la curva $f(x) = x^2$ en $P = (1, 1)$

Q	Pendiente de PQ
(2.5, 6.25)	(6.25 − 1)/(2.5 − 1) = 3.5
(2, 4)	(4 − 1)/(2 − 1) = 3
(1.5, 2.25)	(2.25 − 1)/(1.5 − 1) = 2.5
(1.25, 1.5625)	(1.5625 − 1)/(1.25 − 1) = 2.25
(1.1, 1.21)	(1.21 − 1)/(1.1 − 1) = 2.1
(1.01, 1.0201)	(1.021 − 1)/(1.01 − 1) = 2.01

Figura 1: Ejemplo de A1 presente en T2 (Haeussler, Paul, Wood, 2008, pp.482)

Otro desarrollo típico de este campo de problemas presente en los textos es determinar la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, utilizando su definición algebraica (cálculo de límite), para luego transitar a la definición de la derivada de una función en un punto. A continuación, se presenta un ejemplo clásico, cuya solución propuesta en el texto, utiliza la definición algebraica de pendiente de recta tangente $m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$. A continuación, la figura 2 presenta un ejemplo:

EJEMPLO 5. La pendiente de una curva tal como $f(x) = x^2$, se halla (*a*) sustituyendo la función específica en la fórmula algebraica (*4.1*), (*b*) simplificando la función y luego (*c*) evaluando el límite de la función en su forma simplificada:

De (4.1),

$$\text{Pendiente } T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(*a*) Sustituyendo $f(x) = x^2$,

$$\text{Pendiente } T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

(*b*) Simplificando el resultado,

$$\begin{aligned} \text{Pendiente } T &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) \end{aligned}$$

(*c*) Sacando el límite de la expresión simplificada,

$$\text{Pendiente } T = 2x$$

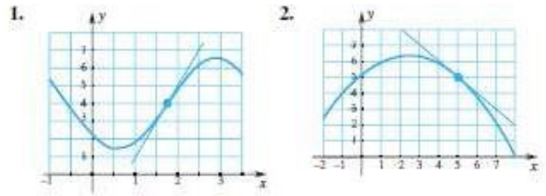
Observe que el valor de la pendiente depende del valor escogido de x.

Figura 2: Ejemplo de A1 presente en T6 (Dowling, 1992, pp. 99).

- *A2: Cálculo de la pendiente de recta tangente a una curva en un punto, utilizando el triángulo de Leibniz.* Este tipo de ejercicios proporciona el gráfico de la curva, comúnmente, la gráfica de la curva está sobre una cuadrícula y para determinar una aproximación de la pendiente de la recta tangente en un punto se utiliza regla. Este tipo de actividad permite identificar gráficamente una recta tangente a una curva en un punto y utiliza el triángulo diferencial de Leibniz para determinar una aproximación de la pendiente. A continuación, la figura 3 presenta un ejemplo:

En los problemas 1 y 2 está dibujada una recta tangente a una curva. Evalúe su pendiente (pendiente = elevación/avance). Sea cuidadoso al observar la diferencia en escalas sobre los dos ejes.

1. 2.



En los problemas 3–6, dibuje la recta tangente a la curva que pasa por el punto indicado y estime su pendiente.

3. 4.

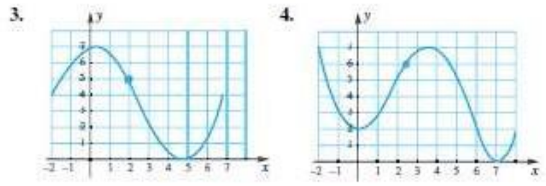


Figura 3: Ejemplo de A2 presente en T8 (Purcell, Rigdon y Varberg, 2007, pp.97)

- *A3: Cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando derivada.* El cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando la derivada, es un tipo de ejercicio que permite consolidar la interpretación geométrica de la función derivada. Además, conocer como proceso, que la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto corresponde a la función derivada de la curva evaluada en el punto de tangencia. En los siguientes ejemplos, para construir la ecuación de la recta tangente se requiere determinar previamente la derivada en el punto de tangencia, en ambos ejemplos primero se determina la función derivada, en el primero de ellos (Imagen 4), se utiliza la definición algebraica de derivada y en el segundo (Imagen 5) las reglas de derivación, luego en ambos ejemplos se evalúa la función derivada en el punto de interés. A continuación, la imagen 1 y la imagen 2 presentan los ejemplos:

Encontrar la ecuación de una recta tangente En los ejercicios 25 a 32, (a) encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, (b) utilice una herramienta de graficación para dibujar la gráfica, la función y su recta tangente en dicho punto y (c) aplique la función *derivada* de una herramienta de graficación con el fin de comprobar sus resultados.

25. $f(x) = x^2 + 3, \quad (-1, 4)$ **26.** $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad (1, 2)$

27. $f(x) = x^3, \quad (2, 8)$ **28.** $f(x) = x^3 + 1, \quad (-1, 0)$

29. $f(x) = \sqrt{x}, \quad (1, 1)$ **30.** $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad (5, 2)$

31. $f(x) = x + \frac{4}{x}, \quad (-4, -5)$ **32.** $f(x) = \frac{6}{x + 2}, \quad (0, 3)$

Figura 4: Ejemplo de A3 presente en T9 (Larson, Edwards, 2016, pp.103)

Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes Dibuje las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y = -x^2 + 6x - 5$, así como las dos rectas que son tangentes a ambas gráficas. Encuentre las ecuaciones de dichas rectas.

Figura 5: Ejemplo de A3 presente en T9 (Larson, Edwards, 2016, pp.115)

- *A4: Cálculo de la pendiente de una recta tangente a una curva para obtener una razón de cambio instantánea.* Este tipo de ejercicios permite la tematización de la recta tangente a una curva como la razón de cambio instantánea, posteriormente se transita a la interpretación geométrica de la derivada. Es común observar en los textos que este tipo de ejercicios consideran situaciones físicas. A continuación, la Figura 6 presenta un ejemplo:

La tabla muestra valores de la carga viral $V(t)$ en el pacient 303 con VIH, medido en copias de ARN/mL, t días después de que se comenzó con el tratamiento ABT-538.

t	4	8	11	15	22
$V(t)$	53	18	9.4	5.2	3.6

(a) Encuentre la razón de cambio promedio de V con respecto a t en cada intervalo de tiempo:
(i) $[4, 11]$ (ii) $[8, 11]$
(iii) $[11, 15]$ (iv) $[11, 22]$
¿Cuáles son las unidades?
(b) Estime e interprete el valor de la derivada $V'(11)$.

Fuente: Adaptada de D. Ho *et al.*, "Rapid Turnover of Plasma Virions and CD4 Lymphocytes in HIV-1 Infection", *Nature* 373 (1995): 123–126.

Figura 6: Ejemplo de A4 presente en T10 (Stewart, 2018, pp.150)

B: Campos de problema sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio. Para comprender y modelar determinadas situaciones económicas resulta esencial que nuestros estudiantes puedan extraer la información que proporcionan las representaciones gráficas de las relaciones entre las variables y la medida de la variación de cambio (Ariza, Llinares, 2009). Por este motivo es importante que se considere la idea de variación y cambio al momento de construir el concepto derivada (Zambrano, Escudero y Flores, 2019), incorporar elementos variacionales y otorgar significado a los distintos elementos relacionados a la variación (Vrancken, Engler, 2014).

Para establecer las tasas instantáneas de cambio, entendida como el "cociente" entre dos cantidades de magnitud, se utiliza inicialmente una razón de cambio promedio, por ejemplo, $v_{prom} = \frac{desplazamiento}{Longitud\ del\ intervalo\ de\ tiempo} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (razón de cambio promedio de s con respecto a t), la cual se desarrolla tabularmente con el fin de introducir la notación incremental y posteriormente la notación diferencial, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$, finalmente se representa la derivada como $s'(t) = \frac{ds}{dt}$ (Inglada y Font, 2005). A continuación, se consideran ejemplos de las 5 subcategorías de este campo de problemas, que permitirán comprender y modelar determinadas situaciones aplicadas.

- *B1: Cálculo de tasas instantáneas de cambio marginal (costo marginal, ingreso marginal, utilidad marginal, productividad marginal, rendimiento marginal, tasa de impuesto marginal y propensión marginal al ahorro y al consumo).* Para comenzar el análisis de la presencia de esta subcategoría, se debe mencionar que los textos definen algebraicamente los conceptos marginales económicos utilizando el concepto de razón de cambio. Por ejemplo:

  "La función de costo total de un fabricante, $c = f(q)$, proporciona el costo total c de producir y comercializar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama costo marginal. Así,

  $$Costo\ marginal = \frac{dc}{dq} \text{ "}$$

  Haeussler, Paul, y Wood, 2008, pp. 501

  Se debe mencionar que las propuestas de los textos consideran en sus desarrollos el cálculo de la función derivada, si bien no especifica el método de obtención de ésta, se observa que en su mayoría se utilizan las reglas de derivación. A continuación, la Figura 7 presenta un ejemplo:

Economía

23. Costo marginal Suponga que el costo, en dólares, de producir x lavadoras es $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$.

a) Obtenga el costo promedio por lavadora al fabricar las primeras 100 unidades.

b) Obtenga el costo marginal cuando se producen 100 unidades.

c) Demuestre que el costo marginal cuando se producen 100 lavadoras es casi igual al costo de producir una lavadora más después de haber producido las 100 primeras, calculando este costo directamente.

24. Ingreso marginal Suponga que el ingreso obtenido al vender x lavadoras es

$$r(x) = 20{,}000\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

dólares.

a) Determine el ingreso marginal cuando se producen 100 lavadoras.

b) Use la función $r'(x)$ para estimar el incremento en el ingreso como resultado del aumento en la producción, de 100 a 101 lavadoras a la semana.

Figura 7: Ejemplo de B1 presente en T7 (Thomas, Weir, Hass y Heil, 2015, pp. 136)

- *B2: Crecimiento poblacional.* Para determinar la razón de cambio del crecimiento poblacional en un tiempo determinado, los textos utilizan la derivada de la función que representa el número de personas en el tiempo, evaluada en el tiempo en cuestión. Normalmente, en los textos, este tipo de tareas se proponen en apartados al finalizar un capítulo, que puede ser de razón de cambio o de reglas de derivadas. A continuación, la figura 8 presenta un ejemplo:

86. En la sección 1.4 se modeló la población mundial de 1900 a 2010 con la función exponencial

$$P(t) = (1436.53) \cdot (1.01395)^t$$

donde $t = 0$ corresponde al año 1900 y $P(t)$ se mide en millones. De acuerdo con este modelo, ¿cuál fue la razón de incremento de la población mundial en 1920? ¿En 1950? ¿Y en el año 2000?

Figura 8: Ejemplo de B2 presente en T10 (Stewart, 2018, pp. 206)

- *B3: Cálculo de la rapidez instantánea.* Para determinar la rapidez instantánea de un móvil, se utiliza la derivada de la función posición con respecto al tiempo, evaluada en el tiempo en cuestión. Normalmente, este tipo de ejercicios se proponen en dos instancias, una introductoria para construir la derivada en un punto como la razón de cambio instantánea o en apartados al finalizar un capítulo, que puede ser de razón de cambio o de reglas de derivadas. A continuación, la Figura 9 presenta un ejemplo:

Ejemplo 4: Un objeto inicialmente en reposo, cae debido a la acción de la gravedad. Determine su velocidad instantánea en $t = 3.8$ segundos y $t = 5.4$ segundos.

Figura 9: Ejemplo de B3 presente en T8 (Purcell, Rigdon y Varberg, 2007, pp. 94)

- *B4: Razones de cambio (o tasas de cambio) relativas y porcentuales para funciones económicas. (tasa porcentual del cambio de ingreso en función del cambio porcentual de las unidades o del precio, tasa de cambio porcentual de la cantidad en función del cambio porcentual en el precio (elasticidad de la demanda)).*
  Los textos definen algebraicamente los conceptos de tasas relativas y porcentuales para funciones económicas utilizando el concepto de razón de cambio. Por ejemplo:

  "*Definición.*

  La razón de cambio relativa de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

  La razón de cambio porcentual de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} * 100\% \quad ”$$

Haeussler, Paul, y Wood, 2008, pp. 504

  Normalmente, este tipo de ejercicios se proponen en apartados al finalizar el capítulo de la derivada como razón de cambio, como tarea para el lector. A continuación, la figura 10 presenta un ejemplo:

2.2.7 El producto interno bruto (PIB) de cierto país fue $N(t) = t^2 + 5t + 106$ mil millones de dólares t años después de 1995.

a. ¿A qué razón cambio el PIB con respecto al tiempo en 2003?

b. ¿A qué razón porcentual cambio el PIB con respecto al tiempo en 2003?

Figura 10: Ejemplo de B4 presente en T3 (Hoffmann, Bradley y Rosen, 2006, pp. 114).

- *B5: Razones de cambio aplicadas a otras áreas del conocimiento.* Normalmente, este tipo de ejercicios se proponen en apartados al finalizar el capítulo de la derivada como razón de cambio como tareas para el lector. A continuación, la figura 11 presenta un ejemplo de una tarea para el lector:

54. Fisicoquímica. De acuerdo con la fórmula de Bevye en fisicoquímica, la orientación de la polarización P de un gas satisface $P = \frac{4}{3}\pi N(\frac{\mu^2}{3kT})$ donde μ, k son constantes positivas y T es temperatura del gas. Determine la razón de cambio de P con respecto de

Figura 11: Ejemplo de B5 presente en T3 (Hoffmann, Bradley y Rosen, 2006, pp. 120).

A continuación, con el fin de caracterizar el significado pretendido de la derivada, se presentan algunas conclusiones producto de análisis de los libros de textos propuestos en los planes de estudios de Ingeniería Comercial en Chile.

En cuanto a los campos de problemas, todos los textos de matemática aplicada a economía y negocios incluyen campos de problemas que consideran el cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto utilizando derivada, cálculo de tasas instantáneas de cambio, marginal, poblacional, relativas y porcentuales, para funciones reales y aplicadas a la economía y negocios. Además, el análisis de la monotonía, la concavidad y de los extremos relativos de funciones reales y aplicadas a la económica, utilizando para ello los criterios de primera y segunda derivada. Todos los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías incluyen campos de problemas que consideran el cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto utilizando derivada, cálculo de tasas instantáneas de cambio de funciones aplicadas a otras áreas del conocimiento diferentes a la económica, el análisis de la monotonía y de los extremos relativos de funciones reales y aplicadas a otras áreas del conocimiento diferentes a la económica. Además, consideran el cálculo de derivadas de orden superior y de funciones implícitas utilizando las reglas y teoremas de derivación.

Finalmente, debemos mencionar que las principales diferencias entre los textos de matemática aplicada a economía y negocios y los textos clásicos de enseñanza para las ingenierías se generan en las subcategorías de los campos de problemas B4, C2, D2, E2, E3 y E4. Además, en los textos clásicos, se observan muy disminuidos el número de actividades y ejercicios aplicados al área de economía y negocios, se aprecia el énfasis en el significado parcial de la "derivada como límite" (límite del cociente de incrementos).

La mayor parte de los textos considera problemas introductorios aplicados (física, economía, química, pandemias, etc.), luego presenta problemas resueltos, en los cuales se ejemplifica el uso de los conceptos, se exhibe la demostración de algunos teoremas de la derivada. El uso de lenguaje es mayormente algebraico y gráfico (en menor medida), en algunos textos con apoyo de recursos tecnológicos, y cada capítulo termina con una propuesta de problemas aplicados y no aplicados, para resolver por el lector.

REFERENCIAS

Ballard, C. y Johnson, M. (2004). Basic Math Skills and Performance in an Introductory Economics Class.

Journal of Economic Education,35(1), 3-23. https://doi.org/10.3200/JECE.35.1.3-23

Galindo, M., Breda, A., Chamorro, D. y Alvarado, H. (2022). Analysis of a teaching and learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. *EURASIA J Math Sci Tech*, 18(7), em2130. https://doi.org/10.29333/ejmste/12162

Galindo, M. Breda, A. (2024). Proceso de instrucción de la derivada aplicado a estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. *Uniciencia* Vol. 38(1), pp. 1-23. https://doi.org/10.15359/ru.38-1.17

Galindo, M., Breda, A. (2023). Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. *Boletim de Educação Matemática* 37(75):271-295.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñanza cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9(1), 85-116.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. For the Learning of Mathematics, 39(1), 37- 42.

Haeussler, E., Paul, R. y Wood, R. (2008). *Matemáticas para Administración y la economía*. (12ª ed.). México Pearson Educación.

Hey, J. (2005). I Teach Economics, Not Algebra and Calculus. *Journal of Economic Education*, 36(3), 292-

304. https://doi.org/10.3200/JECE.36.3.292-304

Inglada, N y Font, V. (2003). *Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental*. XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM), Córdoba. (Boletín N°15), pp. 1-18.

Larios, V., Jiménez, A. R. (2022). Significados parciales de la derivada en libros universitarios en la formación de ingenieros. *Praxis & Saber*, 13(33), e12274. Recuperado a partir de https://revistas.uptc.edu.co/index.php/praxis_saber/article/view/12274

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 60-89. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04

http://www.acreditadoradechile.cl/wp-

content/uploads/2011/11/Ingenieria_Comercial.pdf Stewart, J. (2018).

Cálculo Trascendentes Tempranas. (8ª ed.). Cengage Learning Editores.

Tan, S.T. (2005). *Matemáticas para Administración y economía*. (3ª ed.). México Thomson.

INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA Y DERIVADAS: DISEÑANDO UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Adiel Jeremías Silva Riveros, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Sebastián Andrés Saavedra Messina, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Abstract:

La enseñanza de la derivada en la educación secundaria sigue siendo un desafío para los docentes debido a los obstáculos que persisten en el tiempo, como su comprensión y conceptualización junto con su interpretación geométrica. Por otro lado, la Inteligencia Artificial Generativa (IAG) se presenta como una tecnología con el potencial de revolucionar el proceso de enseñanza-aprendizaje, a través de la generación de contenido y la interacción con el estudiantado. A pesar de todo, aún se requiere mayor evidencia sobre la capacidad que tiene para transformar la educación. Es por ello que se presenta una propuesta de aprendizaje basado en el ciclo de modelación matemática de Borromeo Ferri (2010) que integra el uso de ChatGPT, con el fin de superar los obstáculos presentes en el aprendizaje de la derivada. La propuesta utiliza el experimento del plano inclinado de Galileo Galilei, como contexto para desarrollar el aprendizaje de la derivada, incluyendo los conceptos de velocidad y aceleración. La situación de aprendizaje se divide en actividades que promueven a que el estudiantado experimente, comprenda, analice y conceptualice, desarrollando un mayor entendimiento de la derivada. La integración de ChatGPT, del ciclo de modelación y del experimento del plano inclinado enriquecen el aprendizaje mejorando la comprensión de la derivada.

derivada, inteligencia artificial generativa, obstáculos, modelación, plano inclinado

INTRODUCCIÓN

La comprensión de la derivada, ha sido un desafío persistente en la educación, a pesar de los esfuerzos de las instituciones educativas (Sanabria, 2013). Entre los obstáculos de aprendizaje de la derivada destacan la dificultad: de abordar la derivada como una razón de cambio, de comprender y conceptualizar a la derivada a partir de la definición de límite, intrínseca de la derivada, de interpretar geométricamente de la derivada (Gutiérrez Mendoza et al., 2017). Para superar estos obstáculos, se vuelve necesario considerar el potencial de nuevas herramientas tecnológicas. El desarrollo de la Inteligencia Artificial Generativa (IAG) desencadena un sin fin de posibilidades para mejorar las prácticas educativas mediante la generación de contenido personalizado y conversaciones en tiempo real. Sin embargo, aún se requiere más evidencia para verificar el verdadero potencial de la IAG en el contexto educacional (UNESCO, 2024).

Es por ello que este estudio propone explorar cómo la integración de la IAG en una situación de aprendizaje puede contribuir a superar los obstáculos presentes en la enseñanza de la derivada. A través de esta propuesta, se busca analizar el impacto de la IAG en la comprensión del concepto de derivada por parte de los estudiantes; en particular, se propone diseñar una situación de aprendizaje que integre el uso de la IAG y la modelación matemática para la superación de obstáculos.

MARCO TEÓRICO

Ciclo de modelación

Borromeo Ferri (2010) propone un ciclo de modelación centrado en la representación mental de la situación, permitiendo una aproximación más cercana al proceso cognitivo del individuo. En este modelo, se introduce el conocimiento extramatemático en las fases de simplificación y matematización, considerándolo fundamental para construir un modelo real pertinente a la situación en cuestión. El proceso comienza con una situación del mundo real, que luego es representada mentalmente, abordando cómo simplificar e idealizar el problema. Durante la fase de construcción del modelo real, el conocimiento extramatemático del individuo se integra para relacionar esta construcción con la realidad. La matematización continua, donde se desarrollan las competencias matemáticas imprescindibles para obtener y validar los resultados a través de dos tipos de validación: la validación intuitiva (inconsciente), y la validación consciente, basada en el conocimiento. Esta última implica una comparación entre los resultados reales y la representación mental, asegurando que los resultados matemáticos sean coherentes con la situación inicial (Huincahue, 2017).

Inteligencia artificial generativa

La Inteligencia Artificial Generativa (IAG) se enfoca en crear nuevos contenidos a partir de datos previamente aprendidos, generando textos en lenguaje natural a través de interacciones en tiempo real (Gutiérrez López, 2023). Estos modelos de lenguaje generan respuestas coherentes, aunque no siempre correctas, y en ciertos casos, puede entregar información sesgada (Hernández, 2023). En el ámbito educativo, la IAG ha generado entusiasmo, pero también preocupaciones sobre la privacidad, la equidad educativa, y la posible sustitución de docentes por la tecnología (Jara y Ochoa, 2020). No obstante, es una realidad que la IAG se está expandiendo en la educación (UNESCO, 2024).

Plano inclinado

El experimento del plano inclinado, realizado por Galileo Galilei en el siglo XVII, es considerado uno de los primeros experimentos científicos modernos, ya que permitió estudiar el movimiento de una esfera por medio de la distancia recorrida en función del tiempo. Galileo concluyó que la fuerza de gravedad afecta en el movimiento de la esfera, y que la distancia recorrida es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido (Hammes y Schuhmacher, 2011; Ferreira et al., 2022; Ávila García y Suárez Téllez, 2021). Este experimento, tiene el potencial para estudiar la relación distancia-tiempo, la velocidad y la gravedad, ofreciendo una robusta base para el aprendizaje (Ferreira et al., 2022).

METODOLOGÍA

Situación de aprendizaje y modelación

Paola Balda (2022) propone una estructura de situaciones de aprendizaje fundamentada en la teoría socioepistemológica, destacando la importancia de problematizar el saber. Se constituye por cinco fases: introducción, donde se establece un contexto significativo; exploración, donde el estudiante manipula y discute la información; fase procedimental, donde el estudiantado genera hipótesis a partir de sus conocimientos previos; consolidación, donde se valida el saber construido; y ejercitación, donde el estudiante aplica los procedimientos y conocimientos adquiridos en diversos contextos.

Por su parte, Pérez Vera y Salazar Cortez (2024) proponen un diseño de situación de aprendizaje en un contexto de modelación matemática utilizando tecnologías, basado en la estructura de Balda (2022). Este diseño incluye las siguientes actividades: la profundización del fenómeno, el diseño del experimento para la toma de datos, la vivencia de un ciclo de modelación, la mirada escolar del fenómeno y la institucionalización de los objetos matemáticos (Pérez Vera y Salazar Cortez, 2024).

Modelación con ChatGPT

Para la vivencia del ciclo de modelación con ChatGPT, se realizan los siguientes pasos: 1) Se graba el experimento del plano inclinado. 2) Se obtienen los datos (distancia-tiempo) del movimiento de la bola con el software Tracker. 3) Se contextualiza a ChatGPT sobre el experimento. 4) Se entregan los datos obtenidos a ChatGPT y se le solicita que construya la representación tabular, gráfica y algebraica. 5) Se analiza cada representación y su relevancia en el contexto del experimento.

El análisis de la situación se enfoca en evaluar la estructura pedagógica, la integración de la IAG y su coherencia con el marco teórico, con el fin de validar su efectividad en la comprensión de la derivada y el apoyo de la IAG en el proceso educativo.

RESULTADOS

El diseño de la situación de aprendizaje se sustenta en base a los fundamentos teóricos de Balda (2022), Pérez Vera y Salazar Cortez (2024) y Borromeo Ferri (2010), además de considerar los obstáculos presentes en la enseñanza de la derivada. La situación de aprendizaje está construida en base al experimento del plano inclinado para desarrollar el aprendizaje de la derivada, explorando conceptos de velocidad y aceleración mediante la experimentación y el análisis de datos. La situación de aprendizaje se compone de cuatro actividades, donde cada una responde a los siguientes objetivos: (1) Actividad 1: Comprender el experimento del plano inclinado de Galileo Galilei y sus conclusiones. (2) Actividad 2: Recrear el experimento del plano inclinado y analizar el fenómeno en base a sus representaciones. (3) Actividad 3: Relacionar la velocidad instantánea con la derivada de la posición respecto al tiempo en el contexto del experimento. (4) Actividad 4: Resolver problemas que involucren la derivada.

Para el análisis de la situación, se contempla la revisión de preguntas orientadas a la superación de obstáculos y la comprensión de la derivada como razón de cambio y pendiente de la tangente, dentro y fuera del contexto del experimento del plano inclinado.

CONCLUSIONES

La integración de la IAG en la comprensión de la derivada presenta un cambio trascendental en la educación. A lo largo del estudio, se espera comprobar que una situación de aprendizaje basada en el experimento del plano inclinado, que integra a ChatGPT, puede superar los obstáculos presentes en el aprendizaje de la derivada. Las actividades diseñadas fomentan a que el estudiantado comprenda y aprehenda la derivada y sus utilidades. El uso de la IAG, además de enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, tiene el potencial de personalizar y dinamizar la educación matemática, logrando que el estudiantado interactúe de mejor manera con conceptos matemáticos complejos. Además, la inclusión de la modelación matemática y la experimentación para el aprendizaje, ofrece a los estudiantes una experiencia educativa más completa y significativa.

REFERENCIAS

Ávila García, G., & Suárez Téllez, L. (2021). La modelación con tecnología en la enseñanza de la Física en el nivel medio superior. *Repensar las didácticas específicas. Una aportación multidisciplinaria a la enseñanza especializada*, 57–76. https://doi.org/10.54676/NEDS2300

Balda, P. A. (2022). Estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje desde un enfoque socioepistemológico. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 7*, 1–24. https://doi.org/10.46618/iime.148

Borromeo Ferri, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modeling Behavior. *Journal Für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 99–118. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8

Ferreira, H., Almeida Junior, E. F., Espinosa-García, W., Novais, E., Rodrigues, J. N. B., & Dalpian, G. M. (2022). Introduzindo aprendizado de máquina em cursos de física: O caso do rolamento no plano inclinado. *Revista Brasileira de Ensino de Física, 44*. https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2022-0214

Gutiérrez López, K. M. (2023). Inteligencia artificial generativa: Irrupción y desafíos. *Revista Enfoques, 4*(2), 57–82.

Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M. R., & Ariza Nieves, L. M. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova, 15*(20), 137–153. https://doi.org/10.21830/19006586.170

Hammes, O., & Schuhmacher, E. (2011). O PLANO INCLINADO: UMA ATIVIDADE DE MODELIZAÇÃO MATEMÁTICA. *REVISTA EXPERIÊNCIAS EM ENSINO DE CIÊNCIAS, 6*(2), 66–85.

Hernández, N. C. (2023). La inteligencia artificial…¿amenaza u oportunidad para el proceso formativo en educación superior? En REDINE (Ed.), *Conference Proceedings* (EDUNOVATIC 2023, pp. 14–19). Adaya Press. https://doi.org/10.58909/adc24139168

Huincahue, J. A. (2017). *Propuesta de modelación matemática en la formación de profesores y bases para una variedad de modelación desde la teoría Socioepistemológica* [Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. http://repositorio.ucv.cl/handle/10.4151/65266

Jara, I., & Ochoa, J. M. (2020). *Usos y efectos de la inteligencia artificial en educación*. Inter-American Development Bank. https://doi.org/10.18235/0002380

Pérez Vera, I., & Salazar Cortez, P. (2024). Diseño de un curso de formación inicial para profesores, que integra la modelación matemática escolar con evaluación de tecnologías. *El cálculo y su enseñanza*, *20*(1), 15–44.

Sanabria, G. I. N. (2013). Al cálculo en educación matemática. *Infancias Imágenes*, *12*(1), 44–50.

UNESCO. (2024). *Informe de seguimiento de la educación en el mundo, 2023: Tecnología en la educación: ¿una herramienta en los términos de quién?* (1a ed.). GEM Report UNESCO. https://doi.org/10.54676/NEDS2300

LABERINTOS PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS A TRAVÉS DE REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS Y ALGEBRAICAS

Patricio Santibáñez Galdames, Pontificia Universidad Católica de Chile

Abstract:

En un contexto donde la tecnología está cada vez más presente en la vida diaria, su incorporación al aula se ha vuelto inevitable. En esa línea, los videojuegos educativos representan una oportunidad para fomentar el aprendizaje mediante la integración de diferentes representaciones (aritmético-algebraica y geométrico-vectorial). Esta propuesta aborda la carencia de enfoques geométrico-vectoriales en la enseñanza de los números complejos, que es casi inexistente en las aulas actuales. Con este objetivo, se ha diseñado un videojuego específico que explora la relación entre las operaciones con números complejos y las transformaciones geométricas en el plano, permitiendo a los estudiantes manipular objetos virtuales como una esfera y partes de un mapa. El resultado es "IWorld", un juego para dispositivos móviles que permite a los estudiantes utilizar secuencias de instrucciones aritméticas para mover una esfera a través de laberintos. Utilizando la teoría del Espacio de Trabajo Matemático se puede sustentar que lo realizado puede ser una herramienta eficaz para promover el aprendizaje de este tópico. Esta combinación de tecnología, juego y educación ofrece un enfoque novedoso y significativo para abordar la enseñanza de los números complejos, a través de la interacción con representaciones geométricas y algebraicas.

[Números Complejos, Juego Educativo, Aprendizaje Basado en Juegos]

INTRODUCCIÓN

Como menciona Randolph y Parraguez (2019), la enseñanza de los números complejos en contextos escolares y universitarios ha sido estudiada en los últimos años, dando cuenta de diversas dificultades y errores en los procesos de construcción de este objeto matemático. En ellas, se ha encontrado evidencia de que se realiza un fuerte trabajo desde lo aritmético-algebraico y uno casi nulo desde lo geométrico-vectorial (Aznar et al., 2010; Distéfano et al., 2012). Además, Distéfano et al. (2012) afirman que los estudiantes que no han desarrollado un sólido significado geométrico para los números complejos presentan una falta de flexibilidad en el uso de sus diferentes representaciones.

En Chile, desde hace algunos años se ha intencionado que se trabaje con números complejos en III Medio (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2019), en particular resolviendo problemas. Y, es ahí, donde se podría aprovechar el uso de diferentes representaciones de los números complejos, a fin de generar actividades desafiantes para los estudiantes, que permitan desarrollar una compresión más allá del trabajo numérico-algebraico con ellos. Así, esta propuesta considera actividades en las que los alumnos utilizando las diferentes representaciones de los números complejos deben moverse por laberintos, especialmente pensados para la utilización de una u otra representación, organizados por nivel de complejidad. En ese contexto, ¿cómo este juego podría favorecer el desarrollo de la comprensión geométrica de los números complejos y la flexibilidad en el uso de diferentes representaciones?

ELEMENTOS TEÓRICOS

Siguiendo las definiciones propuestas por Peña-Miguel (2014), un juego es una competencia física o mental que en la que se siguen reglas específicas, con el objetivo de divertir o recompensar al participante; a su vez, un videojuego es una competencia mental jugada con una computadora de acuerdo con ciertas reglas para entretenimiento, recreación o para ganar una apuesta; y, por otro lado, para Zyda (2005) un *juego serio* es una competencia mental la que se actúa contra un computador de acuerdo con reglas específicas que utiliza el entretenimiento para promover objetivos de enseñanza.

Esto puede ser enmarcado en un contexto de aprendizaje específico. En particular, en el aprendizaje basado en juego (ABJ), que se refiere al uso de elementos de diseño de juegos, en cuanto a la interacción lúdica y mecánicas de juegos en contextos no relacionados con ellos para motivar a los estudiantes a participar en actividades de clase. Este enfoque busca incrementar la motivación interna para el aprendizaje, la implicación emocional y el disfrute de los estudiantes (Hatt et al., 2020).

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se utiliza como referente teórico para analizar la idoneidad de la propuesta para el aprendizaje de este objeto matemático específico. Esta teoría está basada en la investigación de Houdement y Kuzniak (1999). En este constructo, los aspectos epistemológicos y cognitivos son fundamentales para la construcción del objeto matemático en cuestión. En el ETM se concibe la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos (geométricos, algebraico, etc.), en un ambiente organizado por y para el matemático (geómetra, algebrista, etc.) mediante la articulación de dos planos: el epistemológico y el cognitivo.

En el ETM se distingue herramientas e instrumento (Kuzniak et al., 2020). Instrumento es el resultado de una construcción de esquemas por un individuo al realizar una actividad, o sea resultado de una génesis cognitiva, compuesto por un artefacto (material o simbólico) y el esquema de uso asociado. Mientras que la noción de herramienta es reservada para objetos del plano epistemológico que tienen un uso potencial en el contexto de resolución de problemas. En particular, "los artefactos tecnológicos permiten explorar representaciones gráficas y promover que emerja y sea comprendida una noción específica, sin la necesidad de una validación epistemológica" (Kuzniak et al., 2020, p.16).

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Se diseñó una aplicación para celular con el programa Unity, creando diferentes laberintos que permiten ahondar en el autodescubrimiento de ciertas propiedades de los números complejos, tales como que: la suma de dos de estos números puede ser representada como una traslación, la multiplicación de dos de ellos puede ser representada como una multiplicación de los módulos de ambos complejos y la suma de sus argumentos (el ángulo que forma con respecto al eje real positivo), y conjugar complejos puede ser representado como una reflexión en torno al eje real. Además, indirectamente se espera que los estudiantes sean capaces de utilizar la versión geométrica del módulo, o sea la distancia, a fin de poder determinar caminos más cortos que involucren sumas de estos números. El juego ha sido divido en zonas, donde cada una de estas está compuesta por etapas que se avocan a uno de los propósitos antes descritos. Luego, para analizar la potencialidad de este juego se utiliza una metodología cualitativa de corte interpretativo basada en el ETM.

Figura 1

1a. Etapa para sumar

1b. Etapa para multiplicar

1c. Etapa para conjugar

RESULTADOS

Hemos de notar que dado que el interés de esta propuesta está en que los alumnos logren visualizar el comportamiento geométrico de las operaciones de números complejos, por tanto, se espera que la génesis que tensione al resto sea la Génesis Semiótica, o realizando un símil con la versión del ETM Geométrico ajustado a la tecnología de Coutat y Richard (2011) sería la Génesis video - figural; considerando, además, que los alumnos deberán utilizar al menos dos registros diferentes, el figural y el algebraico, análisis reforzado por lo trabajo por Flores y Montoya-Delgadillo (2016).

Pero, además, como se estará utilizando una aplicación de celular para poder hacer la mediación, estarán utilizando un artefacto el cual les permitirá hacer las construcciones necesarias. Por lo que se activa no solo la génesis semiótica, sino que también la instrumental, a raíz de la activación anterior. Por lo que el plano [Sem-Ins], es activado.

Lo anterior estaría presente en las diversas etapas propuestas, si solo se centran en llegar al final, sin activar en demasía la génesis discursiva. Pero, si estará presente el referencial teórico, una vez que comiencen a comprender la dinámica del trabajo de los números complejos, en cuanto a sus operaciones. Mas, eso no necesariamente activará la génesis completa.

Una vez que los alumnos se comiencen a interesar en buscar los caminos más cortos por medio de líneas que no sean verticales u horizontales, no necesariamente declararán abiertamente la prueba, pero sí la deberán desarrollar, al menos, mentalmente. De esa forma, el argumento utilizado (i.e. mediante la desigualdad triangular) activará la génesis discursiva. Al igual que si se les pide que argumenten alguna decisión tomada al avanzar en las etapas.

Para Gómez-Chacón y Kuzniak (2015), es posible encontrar dos tipos de enfoque. Primero, si la atención se centra del lado semiótico, las transformaciones visuales estructuran la descripción de los signos y organizan un razonamiento perceptivo. Segundo, si la atención se centra en la prueba o demostración el razonamiento hipotético y deductivo se basa en propiedades, signos y la visualización desempeña un papel heurístico. En IWorld, en el plano [Sem-Dis] puede tener de los dos tipos de razonamientos: por un lado, el perceptivo es utilizado en función de determinar los caminos más cortos, pues podría utilizarse una versión geométrica intuitiva más que la versión geométrica formal o algebraica. Aunque si se utiliza la otra, entonces estamos en presencia del razonamiento hipotético. Ahora bien, éste último también podría emerger cuando los alumnos utilicen propiedades de potencias y la multiplicación de expresiones algebraicas, para justificar el comportamiento de la multiplicación de los números complejos; solo por nombrar algunos de los casos más significativos.

En todo lo anterior, se debe considerar que razonamientos intencionados directamente por la aplicación (i.e. caminos más cortos), pero otros deben ser propiciados por el docente.

CONCLUSIONES

El juego IWorld, en cuanto a ser un juego diseñado para el aprendizaje, analizado desde la teoría del ETM parece cumplir, teóricamente, con todas las bases para desempeñar su función adecuadamente, logrando activar al menos el plano [Sem-Ins], en la mayoría de las etapas; pudiendo llegar a activar la circulación por todos los planos verticales con una buena gestión docente. Por tanto, cumple con ser una herramienta que podría propiciar el cumplimiento del objetivo para el cual fue diseñado. Pero, es importante colocar en acción la aplicación con todos los cambios que en pruebas previas sea necesario, a fin de poder evidenciar lo que teóricamente debiese ocurrir.

Referencias

Aznar, M. A., Distéfano, M. L., Prieto, G., & Moler, E. (2010). Análisis de errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico. *Revista Premisa*, *12*(47), 13-22.

Coutat, S., & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 16, pp. 97-126).

Distéfano, M. L., Aznar, M. A., & Pochulu, M. D. (2012). Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos: un análisis ontosemiótico. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *8*(30).

Flores González, M., & Montoya Delgadillo, E. (2016). Artefacto y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos. *Educación matemática*, *28*(2), 85-117.

Gómez-Chacón, I. M., & Kuzniak, A. (2015). Spaces for geometric work: figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*, 201-226.

Hartt, M., Hosseini, H., & Mostafapour, M. (2020). Game on: Exploring the effectiveness of game-based learning. *Planning Practice & Research*, *35*(5), 589-604.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour létude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational studies in Mathematics*, *40*(3), 283-312.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. (2022). Mathematical work in educational context. *Mathematics Education in the Digital Era*, *18*.

Ministerio de Educación. (2019). *Bases Curriculares de 3° y 4° Medio.* Unidad de Currículum y Evaluación.

Peña-Miguel, N. & Sedano, M. (2014). Educational games for learning. *Universal Journal of Educational Research*, *2*(3), 230-238.

Randolph, V. N., & Parraguez, M. C. (2019). Comprensión del sistema de los números complejos: Un estudio de caso a nivel escolar y universitario. *Formación universitaria*, *12*(6), 57-82.

Zyda, M. (2005). From visual simulation to virtual reality to games. *Computer*, *38*(9), 25-32.

IMPLEMENTACIÓN DE UNA METODOLOGÍA ACTIVA Y SU ALCANCE PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESTADÍSTICO

Hugo Alvarado Martínez, Universidad Católica de la Santísima Concepción.

Abstract:

This paper evaluates the implementation of the problem-based strategy and its scope for the development of statistical thinking in higher education. It analyses 168 contextualised scientific initiation works by engineering students. The results revealed that they made progress in searching and processing data, although there were difficulties in the statement of statistical variables, data cleaning and interpretation of statistics. We consider it necessary to promote enquiry activity through the problem-creation cycle.

[Pensamiento estadístico, creación de problemas, educación superior]

INTRODUCCIÓN

En la actualidad uno de los temas importante es la renovación metodológica de la docencia universitaria. Salcedo y Díaz-Levicoy (2023) en su estudio sobre la educación estadística en Latinoamérica encontraron 63,8% de temas relacionados con la estadística descriptiva y asociación de variables, aunque sólo 17% de artículos con enfoque y propuestas didácticas. Así, surge la necesidad de realizar innovaciones planeadas, organizadas y concretas en la práctica docente, promoviendo el desarrollo de las habilidades cognitivas en los estudiantes para resolver problemas contextualizados.

En particular, en cursos de estadística orientada a ingeniería los resultados de rendimiento académico no son los esperados. Las escuelas de ingeniería están en proceso de la actualización curricular con ajustes de contenidos en los cursos. Estudios señalan la débil apropiación del conocimiento conceptual y procedimental de la estadística descriptiva, siendo la primera fase de exploración de datos en el trabajo de indagación científica. Distintas experiencias de investigación declaran dificultades de comprensión en el uso de medidas estadísticas, interpretación de gráficos y búsqueda de relaciones entre variables estadísticas (Inzunza, 2016).

El objetivo de este trabajo es evaluar una experiencia de enseñanza-aprendizaje a través de la metodología de creación de problemas utilizando la estadística descriptiva por un grupo de estudiantes de ingeniería civil, para potenciar competencias y conocimientos estadísticos en contexto.

MARCO CONCEPTUAL

Desde el área de la industria, la American Society Quality (1996) planteó tres principios fundamentales en el desarrollo del pensamiento estadístico: toda actividad es un proceso, la variación está presente en todo proceso y entender y reducir la variabilidad es la clave del éxito. Nuestro enfoque será con la mirada de dar solución a un problema estadístico, es decir, tendremos en cuenta el pensamiento estadístico que conjuga el conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información contenida en los datos (Wild y Pfannkuch, 1999). El pensamiento estadístico es una actividad intelectual de múltiples aspectos, que se desarrolla gradualmente a través de otras competencias y habilidades (Ben-Zvi y Garfield, 2004). Coincidimos con Régnier y Kuznetsova (2014) que el mayor objetivo de la educación estadística consiste en la formación del pensamiento estadístico. En particular, consideraremos las ideas fundamentales de datos, gráficos y asociación de la alfabetización estadística y el razonamiento estadístico, como la forma de argumentar el uso y proceso de la información, los modos fundamentales de reconocer la necesidad de los datos y la integración de la estadística y el contexto.

La creación de problemas se define como un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema a partir de un problema conocido (variación de un problema) o a partir de una situación dada (elaboración de un problema) y la literatura pone en evidencia su alcance y potencial desarrollo en los planes de estudio (Bonotto, 2013; Malaspina, 2017). En palabras de Fuentes (2016) aplicar la estadística a problemas concretos de la realidad y de la profesión es penetrar en la esencia misma del descubrimiento de los conocimientos, con lo cual se logra también en el plano pedagógico-didáctico una mayor solidez en la asimilación de los conocimientos.

La literatura nos muestra diferentes dificultades de comprensión previas de estadística descriptiva, que describimos en la secuencia para datos agrupados en tablas de frecuencias y gráficos, medidas estadísticas (Álvarez et al., 2020; Juárez e Inzunza, 2014; Gea et al., 2017; Fernández et al., 2019) y estadística bivariada en tablas de contingencia y regresión lineal simple (Gea et al., 2020; Inzunza, 2016; Alvarado et al., 2018).

METODOLOGÍA

Participaron en la investigación 450 estudiantes universitarios, de las carreras de las Ingenierías civil (20,8%), industrial (23,8%), geológica (24,6%), informática (7,9%) y eléctrica (22,8%). Según el plan curricular de estudios que llevan (32% futuras ingenieras), con edad entre los 19 y los 22 años (71%). En la intervención los estudiantes estaban en su segundo o tercer año académico de universidad. El programa de actividad curricular comprende tres horas de cátedra a la semana, dos de práctica y una de laboratorio de computación en la que se trabaja con la planilla Excel. En el semestre de la intervención, el curso estuvo compuesto por cinco docentes de cátedra y las actividades de prácticas y laboratorio fueron apoyadas por cuatro docentes. La inscripción de los estudiantes en las diferentes secciones de la asignatura la realizó por la plataforma institucional, con el requisito es haber aprobado el curso de cálculo II, de manera que una vez completada una sección debieron incorporarse a la que estaba con cupos disponibles, generándose nueve secciones con un promedio de 35 estudiantes.

Los estudiantes de ingeniería realizaron un trabajo práctico colaborativo de iniciación científica, conducida por el ciclo investigativo: problema, datos, análisis y comunicación (Wild y Pfannkuch, 1999). Los trabajos fueron analizados siguiendo la pauta de clasificación para estadística descriptiva a través de cuatro niveles de observación (Arteaga et al., 2012).

Tabla 1 *Niveles para evaluar descriptores del ciclo investigativo*

Nivel 0	No se observa el descriptor en el proyecto. Se deja la respuesta en blanco, no se aplica en el análisis del proyecto.
Nivel 1	Nivel elemental. El estudiante copia literalmente el descriptor sin indicar cómo lo aplica. Reconoce su presencia pero no específica en qué modo se emplea dicho descriptor.
Nivel 2	Nivel intermedio. Aplica con referencia al descriptor pero sin centrarse en contenido estadístico.
Nivel 3	Nivel avanzado. Aplica el descriptor a contenidos estadístico, referenciando diversos tipos de lenguaje estadístico y capacidad de análisis de información.

RESULTADOS

Tabla 2 *Trabajos de creación de problemas por área en ingeniería*

Ingeniería civil	Frecuencia	Porcentaje	Temas de especialidad
Informática	15	9%	Uso de internet-dispositivos móviles
Industrial	46	27%	Servicios básicos- producción
Civil	40	24%	Sismos- transportes
Geológica	42	25%	Medio ambiente-hidrología
Eléctrica	25	15%	Energía solar- consumo de electricidad
Total	168	100%	

Se analizaron 168 trabajos en grupos de estudiantes, con variados temas tales como el uso de internet, servicios, sismología, medio ambiente, entre otros. Los resultados fueron analizados en dos etapas del ciclo de indagación, pre-informe e informe final.

En la Etapa 1 los estudiantes plantearon situaciones-problemas, formularon preguntas e hipótesis, mencionaron el procedimiento utilizado para la recolección y depuración de los datos y declararon variables estadísticas. Los docentes acompañaron a los estudiantes por medio del diálogo, orientación, según el nivel que se encontraban los grupos y posteriormente una retroalimentación y motivación de continuidad del trabajo. La Etapa 2, consistió en el análisis de datos y conclusiones de los informes de iniciación científica, elaborado por los estudiantes de ingeniería. A continuación, se presenta resultados obtenidos en ambas etapas.

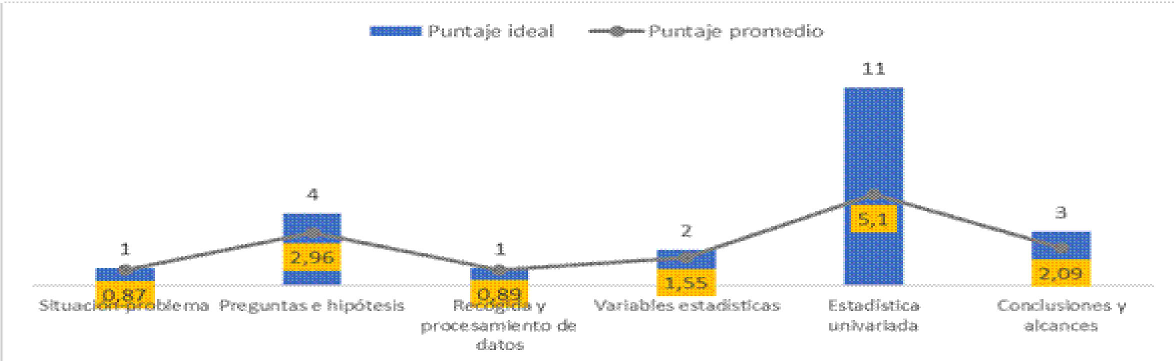
Tabla 3 *Frecuencia (%) de los niveles de descriptores de aplicación Etapa 1*

Descriptores/ niveles	Nivel 0 No presenta	Nivel 1 Elemental	Nivel 2 Intermedio	Nivel 3 Avanzado
Situación-problema				
Formulación del problema contextualizado	7%	8%	36%	49%
Búsqueda bibliográfica del tema (citas)	11%	24%	52%	13%
Preguntas e hipótesis				
Formulación de preguntas de indagación	9%	23%	46%	22%
Formulación de hipótesis de indagación	19%	20%	46%	16%
Recogida y procesamiento de datos				
Búsqueda de datos reales contextualizados	10%	13%	62%	15%
Depuración y limpieza de la base de datos	26%	44%	19%	11%
Variables estadísticas				
Definición de variables y unidad de observación	17%	23%	39%	21%
Clasificación de las variables de estudio	19%	29%	32%	20%

La componente situación-problema, 85% de los estudiantes alcanzaron los niveles intermedios y avanzados en la formulación del problema; 68% alcanzaron en las preguntas e hipótesis. Además, 62% formularon hipótesis, notando que éstas se ajustaron con el problema propuesto y preguntas de indagación definidas, aunque hubo hipótesis no expresadas en afirmación y ambiguas en su redacción. En cuanto a la recogida y procesamiento de datos, 77% alcanzaron los niveles intermedio y avanzado en la búsqueda de datos reales, con datos empíricos contextualizados al problema formulado, obtenidos mayormente por diferentes fuentes de información (páginas web, otorgados por docentes de la Facultad de Ingeniería, encuestas, etc.). Sólo el 30% obtuvieron los dos más altos niveles en la depuración y limpieza de la base de datos, que pone en atención para el análisis y alcance estadístico. 60% alcanzaron niveles intermedio y avanzado en la definición de las variables y unidad de observación. Hubo errores en la escala de medición, sobre todo de razón e intervalo para variables.

Figura 1

Puntaje promedio por componente del ciclo de indagación



Los resultados en la Etapa 2 indicaron que las componentes apoyadas en la Etapa 1 fueron las mejor evaluadas (ver Figura 1). La componente de situación-problema alcanzó 87% de logro. En las preguntas e hipótesis obtuvo promedio 2,96 de 4 puntos, 74% de logro en su desarrollo, mientras que la componente recogida y procesamiento de datos alcanzó 89% de logro, promedio 0,89 de un total de 1 punto. En cuanto a la identificación y clasificación de las variables estadísticas consiguió un promedio de 1,55 de un total de 2 puntos, alcanzando un 78% de logro. La puntuación más baja del ciclo de indagación se registró en la componente de análisis estadístico univariado, promedio 5,1 puntos de 11 puntos, alcanzando un 46% de logro en su desarrollo, seguido de las conclusiones y alcances, obteniendo un promedio 2,09 de 3 puntos, 70% de logro en el desarrollo de esta componente.

CONCLUSIONES

Destacamos la primera etapa de indagación, constatando las dificultades de los estudiantes en la formulación de preguntas de indagación (32% en los niveles 0 y 1), formulación de hipótesis (39%), llamando la atención en la declaración de variables (40%) y el proceso de depuración de la base de datos (70%). Si bien, los resultados finales de los productos de los estudiantes mostraron que las componentes de la etapa 1 fueron las mejor evaluadas, consideramos relevante reforzar la recogida y procesamiento de datos y la identificación de variables, componentes importantes para el análisis de datos y para la toma de decisiones. Varios de los errores de análisis de datos fueron producto porque no habían definido bien las variables, contar con una base de datos incompleta cuya limpieza requiere de tiempo y relación con las preguntas de indagación o confundieron una base de datos con información estadística, ya procesada en tablas y gráficos disponibles en internet.

En cuanto al análisis de datos, elaboración e interpretación de tablas y gráficos estadísticos, fueron las de mayor dificultad, resaltando 67% de los estudiantes situado en los niveles 0 y 1 en la interpretación de tablas de frecuencias, seguida de 44% en la interpretación de gráficos pertinentes a las variables declaradas. De igual manera, hubo dificultades de los estudiantes en las interpretaciones de los estadísticos descriptivos, sobre todo en las interpretaciones de medidas de posición y medidas de dispersión, posicionando a los estudiantes con 81% y 67% en los niveles 0 y 1 respectivamente. Hacemos notar, en ciencias e ingeniería, un tema de interés del pensamiento estadístico está en la variación no concebida y cómo esto es analizado, controlando y reduciendo la variación para identificar oportunidades de mejora de desempeño y productividad de la empresa o industria (López y Sánchez, 2004).

Referencias

Alvarado, H., Galindo, M., y Retamal, L. (2018). Evaluación del aprendizaje de la estadística orientada a proyectos en estudiantes de ingeniería. Educación matemática, 30, 151-183. https://doi.org/10.24844/em3003.07

Álvarez, I. Guerrero, Y., y Torres, Y. (2020). Taxonomía de errores y dificultades en la construcción e interpretación de tablas de frecuencia. Zetetiké, 28, 1-22. https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656553

American Society Quality ASQC (1996); "Statistical Thinking", Special Edition, Quality Information Center, Statistics Division, Spring.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., y Gea, M. M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. Educ. Matem. Pesq. 14(2), 279-297.

Ben-Zvi, D., y Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), The Challenge od Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking (pp. 3-15), Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. Educational Studies in Mathematics, 83(1), 37-55.

Fernández, N., García-García, J. I., Arredondo, E., y López, C. (2019). Comprensión de una tabla y un gráfico de barras por estudiantes universitarios. Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela, 5(10), 145-162.

Fuentes, J. (2016). El desarrollo de habilidades para la resolución de problemas prácticos en la asignatura de Estadística. Revista Cubana de Educación Superior, 35, 30-46.

Gea, M. M., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de educación secundaria. AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 12, 19-37.

Gea, M., Gossa, A., Batanero, C., y Díaz-Pallauta, J. (2020). Construcción y lectura de la tabla de doble entrada por profesores de educación primaria en formación. Educação Matemática Pesquisa, 22(1), p.348-370.
doi: 10.23925/19833156.2020v22i1p348-370

Inzunza, S. (2016) Análisis de datos bivariados en un ambiente basado en applets y software dinámico. Educación Matemática, 28(3), 61-89. https://doi.org/10.24844/em2803.03

Juárez, J., e Inzunsa, S. (2014). Comprensión y razonamiento de profesores de matemáticas de Bachillerato sobre conceptos estadísticos básicos. Perfiles Educativos, XXXVI 146, 14-29.

López, L. y Sánchez, P. (2004). Pensamiento estadístico para los empresarios del siglo XXI. II Investigación Operacional, XXV 1, 1-7.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Régnier, J. C. y Kuznetsova (2014). Teaching of statistics:formation of statistical reasoning. Procedia–Socialand Behavioral Science, 154(28), 99-103.

Salcedo, A. y Díaz Levicoy, D. (2023). La educación estadística en Latinoamérica. Una panorámica desde los artículos publicados (pp. 2016–2021). Educación Matemática, 35(3), 237-268. https://doi.org/10.24844/em3503.08

Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), 223-265.

ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE UN ABP EN CONTEXTO DE EDUCACIÓN TÉCNICO PROFESIONAL. LOGROS Y DESAFÍOS.

Iván Muñoz Barrera, Universidad Central de Chile

José Galaz Arraño, Universidad Central de Chile

Abstract:

Existe un desafío en las aulas actuales, repensar las escuelas, en particular el desarrollo de las competencias del siglo XXI, la enseñanza basada en experiencias y la toma de decisiones de manera asertiva en el contexto Técnico Profesional. La propuesta, con el objetivo de analizar el proceso de implementación de un Aprendizaje Basado en Proyectos en contexto técnico profesional, tanto desde la vista internacional como de las directrices nacionales, por medio del Ministerio de Educación, proponen la implementación de metodologías activas, las cuales centran el protagonismo en el estudiante. La presente investigación de carácter cualitativo, analiza el proceso de implementación de un ABP en contexto de Educación Técnico Profesional en estudiantes de Enseñanza Media. Para esto se realizan entrevistas semiestructuradas a 3 profesores, uno de especialidad, uno de plan general y uno de matemática, cada uno con experiencia en el desarrollo de este tipo de proyectos, para determinar los principales logros y desafíos de la implementación de este tipo de propuestas, las cuales a la vez. se relacionan con la futura vida laboral de los estudiantes.

Metodologías Activas, habilidades matemáticas, ABP, Educación Técnico Profesional, Competencias siglo XXI.

METODOLOGÍAS ACTIVAS EN CHILE

La educación ha tenido una evolución significativa a través del tiempo, desde una perspectiva centrada en el profesor quien concentraba el conocimiento y donde el éxito académico dependía de que el educador programara adecuadamente las instrucciones, métodos y contenidos; en contraste con una perspectiva centrada en el estudiante, quien debe descubrir, construir y abordar el conocimiento para hacerlo propio y significativo, generado por el contexto cultural e histórico del individuo. Lo anteriormente descrito, como lo expone Colina (2007) corresponde a los paradigmas conductista y constructivista, gestados a mediados del siglo XX e inicios de la década de los años 60 respectivamente. En la actualidad, existen otras propuestas, como lo expuesto por Paz et al. (2022), donde se plantea que no existen verdades absolutas, por lo que se acude al conocimiento empírico, el descubrimiento y a la experimentación como vías para alcanzar el aprendizaje.

Considerando esta perspectiva y teniendo consideración el fomento de la utilización de estas metodologías, en particular STEM (Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas en español) y Aprendizaje Basado en Proyecto (ABP), esta última metodología es de interés para la presente investigación, dado que: "las Bases Curriculares consideran estas habilidades para el siglo XXI como un foco formativo central que propende a la formación integral de los estudiantes; corresponden a un marco de habilidades, conocimientos y actitudes transversales a todas las asignaturas" (MINEDUC, 2019, p.5).

El Ministerio de Educación (MINEDUC) a través de los Programas de Estudio entrega distintas propuestas para realizar ABP en la asignatura de matemática, como: "creando musicogramas con patrones rítmicos" para 1ro y 2do básico, encuentro entre arte y matemática" para 7mo y 8vo; y "Cultivando en Marte" para primero.

Barrera et al. (2022) indican que existe evidencia que demuestra que este tipo de estrategias de enseñanza innovadoras pueden mejorar el rendimiento académico de los estudiantes y deben ser promovidas en contextos de educación superior, dando cuenta también de una ausencia de propuestas en el nivel de Enseñanza Técnico Profesional, desaprovechando así una oportunidad de desarrollo integral y transversal de actitudes, habilidades y conocimientos, los cuales, abordados como un proyecto, fomentan las competencias del siglo XXI, junto con las habilidades esperadas para el mundo laboral.

De lo anterior se surge la pregunta: ¿Cómo se implementa un ABP en contexto de educación técnico profesional?, ¿Cuáles son sus principales logros y desafíos? A partir de estas interrogantes, se formula el objetivo de esta investigación, el cual es analizar el proceso en la implementación de este tipo de metodología en contexto de educación técnico profesional.

REFERENTES TEÓRICOS

El Ministerio de Educación destaca y se sugiere la implementación de la metodología ABP, en este sentido se menciona Eroles (2022): "c*onsiderando todo esto, el Ministerio ve con buenos ojos la implementación de esta, como de otras metodologías que permitan un* *aprendizaje más auténtico y que desarrolle habilidades del siglo XXI*." junto con ello considera estándares que den cuenta y garanticen que los resultados de la implementación sean de alta calidad, en consideración del desarrollo de habilidades del siglo XXI.

En primer lugar, se presentan las 4 fases de un ABP, de acuerdo con la publicación realizada en conjunto entre Fundación Chile y MINEDUC, donde se plantea que este tipo de iniciativa parte con un desafío, luego se realiza un proceso de investigación, luego se crea un producto, para finalmente comunicarlo.

Tabla 1

Fases de ABP

Fase	Nombre de la fase	En que consiste	Evaluación Continua
1	DESAFÍO	Hito de lanzamiento, organización del proyecto.	Formativa
2	INVESTIGACIÓN	Proceso de exploración e indagación rigurosa.	Formativa
3	CREACIÓN	Productos tangibles e intangibles.	Formativa
4	COMUNICACIÓN	Muestra pública de los hallazgos a través de un producto público.	Formativa

Fases del Aprendizaje Basado en Proyectos, Fundación Chile y MINEDUC, 2024, CC-BY-NC 4.0.

Para llevar a cabo esta metodología, además de cumplir con estas 4 fases, también existen 7 estándares orientadores para su construcción, denominados los estándares de oro, que consideran la autenticidad, la reflexión, el producto público, la gestión del proyecto, la colaboración, la retroalimentación continua y el desafío y logro intelectual.

Tabla 2

Estándares de oro del ABP

ESTÁNDAR	DESCRIPCIÓN	ESTÁNDAR	DESCRIPCIÓN
AUTENTICIDAD	Trabajan en proyectos significativos para sus vidas y futuro.	COLABORACIÓN	Colaboran con otros estudiantes.

REFLEXIÓN	Reflexionan sobre su trabajo y aprendizaje durante el proyecto.	RETRO-ALIMENTACIÓN CONTINUA	Dan y reciben retroalimentación del proyecto durante su realización.
PRODUCTO PÚBLICO	Muestran públicamente su trabajo, discuten y se critica.	DESAFÍO Y LOGRO INTELECTUAL	Aprenden en profundidad, piensan críticamente y buscan excelencia.
GESTIÓN DE PROYECTO	Gestionan un proyecto de forma efectiva de principio a fin.		

Estándares de Oro del ABP, 2024, Fundación Chile y MINEDUC, CC-BY-N 4.0

Llevar a cabo un ABP cumpliendo estas fases y teniendo en consideración estos estándares orientadores, conlleva también el desarrollo de ciertas competencias del siglo XXI, que tienen que ver con las maneras de pensar, las maneras de trabajar, las herramientas para trabajar y las habilidades para vivir, como se detalla a continuación:

Tabla 2

Competencias del siglo XXI

MANERAS DE PENSAR	Creatividad Pensamiento crítico Metacognición	Colaboración Comunicación	MANERAS DE TRABAJAR
HABILIDADES PARA VIVIR	Adaptación y flexibilidad Responsabilidad social y personal	Alfabetización en tecnologías digitales Alfabetización en información	HERRAMIENTAS PARA TRABAJAR

Habilidades siglo XXI, 2024 Fundación Chile y MINEDUC, 2024, CC-BY-NC 4.0

METODOLOGÍA INVESTIGACIÓN

Esta investigación es de tipo cualitativa, dado que responde al cómo se desarrolla la implementación de un Aprendizaje Basado en Proyecto en contexto de Enseñanza Técnico Profesional, basándose en un estudio de caso instrumental, donde el caso se examina para profundizar en un tema o afinar una teoría, de tal modo que el caso juega un papel secundario, de apoyo, para llegar a la formulación de afirmaciones sobre el objeto de estudio, de acuerdo a lo planteado por Stake (2005).

La muestra es de tipo por conveniencia, estando conformada por los casos disponibles a los cuales se tiene acceso (Battaglia, 2008a), en esta investigación corresponde a 3 profesores con experiencia de dos años trabajando en la metodología ABP: un Profesor de Especialidad (PE), un Profesor de Matemática (PM) y un Profesor de Plan Común (PPC), todos ellos pertenecientes a un colegio de la comuna de Santiago, el cual propone en su proyecto educativo un enfoque constructivista con utilización de metodologías activas, entre las cuales se destaca el ABP, la realización de ferias científicas, el desarrollo de proyectos interdisciplinarios, proyectos por especialidad, etc.

Para esta investigación se diseñaron preguntas que dieran cuenta respecto la consideración de los estándares de oro y el desarrollo de las competencias del siglo XXI por parte de los profesores mencionados en la muestra, luego de diseñarlas se sometieron a la validación de este instrumento piloto de la investigación a través de solicitar la validación a dos expertos, uno externo a la universidad y uno interno a la universidad, correspondiendo a la Subdirectora Pedagógica Curricular del liceo y a un profesor de la carrera Pedagogía en Matemática de la Universidad Central de Chile quienes validaron y refinaron el instrumento para su implementación.

Para la implementación del instrumento se realizó una entrevista semiestructurada dentro del mes de noviembre a cada profesor exponiendo y adaptando ciertas sutilezas propias de una entrevista para retroalimentar la implementación dejando el instrumento final para una futura entrevista más contundente considerando la experiencia piloto.

RESULTADOS PRELIMINARES

A partir del análisis de las respuestas de la entrevista semiestructura realizada a los docentes, se puede apreciar que durante el proceso de implementación, dos de las principales dificultades que surgen son la apropiación de tecnologías por parte de los estudiantes, quienes habitualmente no las utilizan o las utilizan de manera superficial, como las herramientas de Google para Educación (Forms, Drive, Meet, etc.); y la articulación entre el plan general con la especialidad técnico profesional, donde se deber alinear las competencias del ámbito laboral con las necesarias para el buen desarrollo de un proyecto educativo. Entre las respuestas dadas por los docentes, se destaca

- La falta de articulación entre el plan general con darle énfasis a la especialidad para darle una noción a nuestros estudiantes de lo que podría ser su profesión.

- El tiempo para los estudiantes y de los profesores es el punto crítico de los proyectos y, en particular, en la experiencia anterior con el ABP entre matemática y la especialidad de vestuario es algo que cubre el proyecto desde iniciado el proyecto hasta su fin dada diversas situaciones que surgen durante la implementación.
- La organización y espacios para el diseño y retroalimentación por parte de los profesores para los profesores o directiva educativa es clave para una mejora continua de la implementación de los proyectos y el aseguramiento del efectivo desarrollo de las competencias de interés para el mundo laboral y del siglo XXI.

Un logro al ampliar y desarrollar habilidades que apuntan tanto para las competencias del siglo XXI y habilidades laborales dado el contexto técnico profesional es la intención de contemplar aspectos laborales, científicos y habilidades blandas como la comunicación formal, redacción de informes e investigación en fuentes confiables y durante el desarrollo de los proyectos resguardar una comunicación efectiva, el respeto entre las perspectivas y discutir de manera constructiva para el buen cierre de los proyectos haciendo que estos aspectos sean apropiados por parte de los estudiantes.

Y una dificultad clave es el tiempo, dada la lejanía para los estudiantes de la estructura y el concepto de la implementación desconociendo a cabalidad los espacios, las etapas y la estructura de este tipo de proyectos, dada la joven dirección desde el MINEDUC de esta metodología activa, esto evidenciado en la apreciación de uno de los profesores mencionando lo siguiente

- *PM: "Los estudiantes no están habituados a las distintas etapas o el hilo conductor de las fases en las que trabajan durante el proyecto porque piensa tú que llevamos 2 años con esta metodología"*

Al preguntarle respecto a alguna dificultad que observa en la experiencia que ha tenido considerando el contexto.

Fomentar y desarrollar estas habilidades, actitudes y conocimientos, llamémoslo *competencia*, demanda tiempo y no siempre se tiene en la escuela por parte de los profesores con tantas actividades relacionadas o no al quehacer docente, esto mencionado por uno de los profesores mencionando lo siguiente:

- *PPC: "En mi experiencia estos dos años en los que hemos implementado esta modalidad de trabajo con y entre los estudiantes, la dificultad que me pasa es que estamos contra el tiempo desde el inicio del proyecto, esto porque primero diseñamos juntos con el profe de matemática y después comenzamos con el inicio e introducción al proyecto incentivarlos para el desafío del proyecto, pero llega un punto que debemos, y lo hemos hecho, solicitar horas del profesor de matemática para avanzar y terminar la parte de la especialidad, y no es que esté mal sino que esa es la realidad dado nuestro contexto técnico profesional"*

Pero esto se subsana, en cierta medida, con una apropiada estrategia y el apoyo necesario como guía y directriz en el proceso de implementación en consideración de los estándares, velando por la apropiación y abordaje a lo largo de los proyectos.

Dada la reciente finalización de la etapa de implementación del instrumento, se espera analizar la información recabada mediante el contraste y comparativa entre las perspectivas entre los profesores entrevistados, lo propuesto desde el MINEDUC con las indicaciones y diversos apoyos tanto documentación como propuestas de proyectos, relacionándolo con las perspectivas bibliográficas revisadas anteriormente en el escrito.

REFERENCIAS

Barrera Arcaya, F., Venegas-Muggli, J. I., & Ibacache Plaza, L. (2022). El efecto del Aprendizaje Basado en Proyectos en el rendimiento académico de los estudiantes. *REXE, 21*(46), 277-291.

Colina Colina, L. (2007). Paradigmas educativos del siglo XX: Educación, Desarrollo y TIC. Revista EDUCARE - UPEL-IPB - Segunda Nueva Etapa 2.0, 11(3). Recuperado a partir de https://revistas.investigacion-upelipb.com/index.php/educare/article/view/381

Eroles, D. (2022). La metodología ABP, si es de alta calidad y rigurosamente implementada nos permite acercarnos a la ciencia, las artes, las matemáticas y la tecnología. Revista de Educación, 46-47.

Ministerio de Educación de Chile (2022), Estándares de oro del Aprendizaje Basado en Proyectos, Recursos Educativos.

Ministerio de Educación. (2019). *Metodología de aprendizaje basado en proyectos*. Editado por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación. Fecha de Edición octubre 2019. (p. 5) y (p. 8).

Hernández, Paz y Rubí, (2022). *Revista Mexicana de Bachillerato a Distancia*, agosto,

Stake, R. E. (2005) Investigación con estudio de casos. Madrid, Morata.

UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LA LITERATURA SOBRE LAS FUNCIONES DE LA ARGUMENTACIÓN PARA EL DESARROLLO DE LA HABILIDAD EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Jorge Olivares-Aguilera, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Manuel Goizueta, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Abstract:

Las funciones de la argumentación representan una dimensión importante en el estudio de la argumentación. En particular, en Educación Matemática proporcionan respuesta a la pregunta ¿para qué se argumenta? Y, por tanto, otorga importancia y sentido a la práctica argumentativa en las aulas de matemáticas. Considerando que no se han encontrado en la literatura especializada estudios dirigidos a la sistematización de las funciones de la argumentación en el campo de Educación Matemática, surge la necesidad de estudiar la argumentación desde su dimensión funcional. Para ello, se realiza una revisión sistemática de la literatura concerniente al tema en cuestión. De la búsqueda se categorizan las publicaciones en tres campos, a saber: el campo de la Teoría de la Argumentación y al campo de la Educación Matemática y Científica. Los resultados dan cuenta de que existe diversidad entre los campos en lo que respecta a cuáles son las funciones de la argumentación y si existe una única función o no. Asimismo, entre las definiciones de argumentación, se aprecia que encarnan diferentes posturas funcionales, lo que podría ocasionar un problema a la hora de caracterizar si un discurso es argumentativo o no. En consecuencia, es necesario sistematizar las funciones de la argumentación en el campo de la Educación Matemática y estudiar cómo se articulan las distintas funciones en las aulas de matemáticas.

Argumentación, Funciones de la Argumentación, Teoría de la Argumentación, Educación Matemática, Educación Científica.

INTRODUCCIÓN

La argumentación desempeña un papel importante en la sociedad, es una habilidad que promueve el sustento de un punto de vista basado en razones y la toma negociada de decisiones con base en una postura crítica. En este sentido, la argumentación sirve como puerta de entrada para la vida social al ser un medio para el fortalecimiento de espacios democráticos y deliberativos (Fortes et al., 2022). En consecuencia, se requiere realizar esfuerzos para la enseñanza de la argumentación como una forma de discurso para promover el entendimiento entre las personas (Jiménez-Aleixandre y Erduran, 2007). A través de la argumentación, la asignatura de matemáticas constituye un dominio privilegiado para nutrir las competencias personales y sociales de los estudiantes.

La argumentación posee diferentes dimensiones que complejizan su desarrollo en el aula de matemáticas. Por ejemplo, su comprensión como proceso o producto, su configuración dialógica, retórica y epistémica, como también, sus funciones (Fisher y Keil, 2016). Respecto a la última dimensión, es común encontrar en la literatura especializada que la argumentación tiene como función intrínseca justificar una afirmación (Mohammed, 2016). Sin embargo, dado que la argumentación presenta especificidades relacionadas con el contexto en el que se desarrolla (Schwarz, 2009), se han sugerido diversas funciones específicas en el caso de las matemáticas. De Villiers (1990) señala que la demostración matemática –una forma particular de argumentación– tiene las funciones de explicar, descubrir, sistematizar y comunicar. Asimismo, se han sugerido otras funciones de la argumentación en relación con la práctica matemática y su aprendizaje. Según Johnson (2000, p. 181) un buen argumento es aquel "que cumple su propósito", por tanto, considerar las funciones de la argumentación sería indispensable para el análisis y evaluación de los argumentos (Mohammed, 2016). A pesar del reconocimiento de diversas funciones en la literatura especializada, la dimensión funcional no suele ser el foco de las investigaciones sobre argumentación. La revisión sistemática realizada evidencia que no existen estudios dirigidos a la sistematización de las funciones de la argumentación en el aula de matemáticas y hay escasa presencia de estudios referente a la relación entre estas funciones, la actividad docente y el aprendizaje de las matemáticas. En síntesis, las funciones de la argumentación en educación matemática no han recibido suficiente atención y el área carece de un enfoque sistemático. Por tanto, surge la necesidad de investigar la argumentación desde una perspectiva funcional, partiendo de una revisión sistemática de la literatura. Para ello, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las funciones de la argumentación que se han identificado en la literatura especializada?

LAS FUNCIONES DE LA ARGUMENTACIÓN

De manera general, entendemos por función de la argumentación *los potenciales usos socialmente aceptados –explícita o implícitamente– en un contexto determinado*. Cuando hablamos de usos socialmente aceptados, nos referimos a las prácticas de la interacción argumentativa y al uso de argumentos que son reconocidos y validados por una comunidad en un contexto particular. Por tanto, son usos considerados legítimos y apropiados dentro de un marco socialmente establecido, esto es, las personas en un determinado contexto reconocen y emplean argumentos apegados a ciertas normas –explícitas e implícitas– compartidas. Desde esta perspectiva las funciones de la argumentación dependen del contexto en el cual se desarrolla la actividad argumentativa. Asimismo, entendemos por función intrínseca de la argumentación aquella que la constituye de manera independiente del contexto en el cual se desarrolla la actividad argumentativa (Mohammed, 2016).

MÉTODO

Con base en la Teoría Fundamentada (Wolfswinkel et al., 2011), realizamos una revisión sistemática de la literatura especializada. La búsqueda arrojó tres campos de interés principales, a saber: Teoría de la Argumentación (TA), Educación Matemática (EM) y Educación Científica (EC). Para garantizar transparencia y rigor en el proceso de búsqueda, se optó por seguir las directrices de la declaración PRISMA (Page et al., 2021) y el uso del software Atlas.ti para la codificación y el análisis.

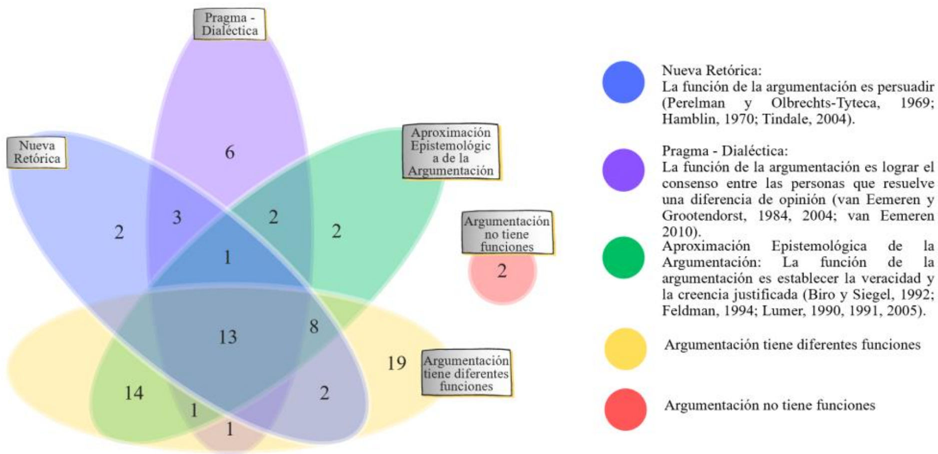
Se recuperó la totalidad de publicaciones indexadas hasta agosto de 2023 en WoS y SCOPUS que incluían los términos "function* of argument*" o "function* of proof*" en el título, el resumen o las palabras claves. Asimismo, se consideraron los términos semánticamente relacionados: use, role, aim, purpose y goal. La búsqueda arrojó un total de 918 publicaciones. Tras la lectura de los resúmenes y la exclusión de los textos fuera de tema, quedó un total de 297 publicaciones; 66 de ellas centradas en la dimensión funcional de la argumentación como parte del objeto de investigación (grupo 1) y 223 que abordan el tema de forma indirecta (grupo 2). Además, se consideraron 10 publicaciones relevantes para el análisis que abordan la dimensión funcional de la argumentación y que o bien no están en la indexación (e.g., manuales de argumentación) o abordan el tema, pero escapan a la nomenclatura utilizada. Para efectos de los resultados, se consideraron 76 publicaciones –el grupo 1 y las 10 publicaciones– en las que las funciones de la argumentación forman parte del objeto de investigación del estudio.

RESULTADOS

La revisión muestra que en el campo de la TA existen tres escuelas predominantes y cada una de ellas manifiesta una función intrínseca de la argumentación, a saber: *i)* Nueva Retórica: persuadir a una audiencia (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 1969), *ii)* Pragma-Dialéctica: lograr el consenso entre las personas que resuelva una diferencia de opinión (van Eemeren y Grootendorst, 1984) y *iii)* Aproximación Epistemológica de la Argumentación: establecer la veracidad y la creencia justificada (Lummer, 2005). Asimismo, en el campo de la EM y EC, existen diversas publicaciones que manifiestan que la argumentación posee diferentes funciones. Por ejemplo, en el campo de la EM, la argumentación tiene la función de hacer "observable" el pensamiento de los estudiantes y evaluar su comprensión y, en el campo de la EC, la argumentación tiene la función de explicar y sistematizar ideas. En contraste, como crítica a la postura funcionalista de la argumentación, Goodwin (2007) manifiesta que los argumentos no deben ser evaluados en relación con las funciones que desempeñan dentro de una actividad social específica ya que los argumentos no tienen una función determinable, y que, incluso si la tuvieran, no sería posible derivar normas a partir de esa función. El siguiente diagrama de Venn detalla la agrupación de las publicaciones analizadas con base en la dimensión funcional de la argumentación que expresa según la codificación realizada (ver Figura 1).

Figura 1

Agrupación de las publicaciones desde la dimensión funcional de la argumentación.



Se obtuvieron los siguientes resultados con base en el análisis de las publicaciones:

- No hay consenso acerca del concepto de función en la literatura especializa. En el campo de la TA solo 3 estudios realizan esfuerzos para elaborar la noción de función, pero aún no existe un acuerdo sobre el tema. Por otra parte, en los campos de EM y EC, no se profundiza en su conceptualización.
- Las distintas definiciones de argumentación implican diferentes posturas funcionales.
- Aún no existe consenso sobre la noción de función intrínseca de la argumentación y cuál es dicha función. Solo en el campo de la TA se ha estudiado el tema y la función intrínseca de la argumentación depende de la postura de cada escuela predominante en el campo.
- En los campos de EM y EC la argumentación tiene varias funciones que no se consideran en el campo de la TA. Particularmente, en el campo de EM no se evidencia una preferencia por alguna de las funciones intrínsecas de la argumentación declaradas en el campo de la TA.
- Existen escasos estudios que aborden la dimensión funcional de la argumentación en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas. De un total de 41 publicaciones en el campo EM, solo 9 estudios lo abordan.
- En el campo de EM y EC no se han realizado esfuerzos para sistematizar las funciones de la argumentación. Solo existen 3 estudios en el campo de la TA que lo abordan.

CONCLUSIONES

Usualmente el concepto de función de la argumentación se da por sobre entendido en la literatura especializada y se refiere de manera general a la respuesta a la pregunta ¿para qué se argumenta? Dada la dependencia de la argumentación del contexto para su análisis y evaluación, se hace necesario proporcionar una definición que considere el aspecto contextual de la argumentación. Asimismo, la diversidad de posturas respecto a la función intrínseca de la argumentación en el campo de la TA y la definición misma de argumentación expuesta en las publicaciones analizadas es problemática, ya que ocasiona dificultades a la hora de caracterizar si un discurso es o no argumentativo. Particularmente en el campo de la TA los autores postulan que existe una única función intrínseca de la argumentación y, por tanto, cualquier actividad que no tenga esta función no es argumentación.

Diversas investigaciones manifiestan que los estudiantes deben experimentar las funciones de la argumentación en su práctica matemática (Rocha, 2019) y que el conocimiento de estas funciones por los profesores aportaría en los esfuerzos de hacer de la habilidad una práctica significativa en el aula (Knuth, 2002). Promover las distintas funciones de la argumentación incentivaría que los estudiantes entiendan que la práctica matemática no solo radica en proporcionar verificación a un punto de vista. Por tanto, se requiere más investigación dirigida a comprender y sistematizar las funciones de la argumentación en el campo de la EM y estudios empíricos que muestren y expliquen cómo se articulan las distintas funciones de la argumentación en el aula de matemáticas.

Referencias

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras.*

Fisher, M. y Keil, F. (2016). The trajectory of argumentation and its multifaceted functions. In F. Paglieri (Ed.), *The Psychology of Argument: Cognitive Approaches to Argumentation and Persuasion*. College Publications.

Fortes, G., Guzmán, V. y Larraín, A. (2022). Studying argumentation and education in South America: what has been advanced and what lies ahead. *Argumentation and Advocacy, 58*(3-4), 266-280. https://doi.org/10.1080/10511431.2022.2138174

Goodwin, J. (2007). Argument has no function. *Informal Logic*. *1*, 69-90. https://doi.org/10.22329/il.v27i1.465

Jiménez-Aleixandre, M.P., Erduran, S. (2007). Argumentation in Science Education: An Overview. En Erduran, S., Jiménez-Aleixandre, M.P. (Eds) *Argumentation in Science Education. Science & Technology Education Library*, (pp. 3-27). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6670-2_1

Johnson, R.H. (2000). *Manifest rationality. A pragmatic theory of argument.* Routledge.

Knuth, E. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5). 379-405. https://doi.org/10.2307/4149959

Lumer, C. (2005). The epistemological theory of argument–how and why? *Informal Logic, 25*(3), 213–243.

Mohammed, D. (2016). Goals in Argumentation: A proposal for the analysis and evaluation of public political arguments. *Argumentation, 30*,221-245. https://doi.org/10.1007/s10503-015-9370-6

Niño, D. y Marrero, D. (2015). The Agentive Approach to Argumentation: A proposal. En van Eemeren, F., Garssen, B. (eds) *Reflections on Theoretical Issues in Argumentation Theory*. Argumentation Library, (1 ed., Vol 28., pp. 53-67). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-21103-9_4

Page, M. J., McKenzie, J. E., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hofmann, T. C., Mulrow, C. D., Shamseer, L., Tetzlaf, J. M., Akl, E. A., Bren nan, S. E., Chou, R., Glanville, J., Grimshaw, J. M., Hróbjartsson, A., Lalu, M. M., Li, T., Loder, E. W., Mayo-Wilson, E., McDon ald, S., y Moher, D. (2021). The PRISMA 2020 statement: An updated guideline for reporting systematic reviews. *International Journal of Surgery, 88*. https://doi.org/10.1016/j.ijsu.2021.105906

Perelman, C. y Olbrechts-Tyteca, L. (1969). *The New Rhetoric: A Treatise on Argumentation*. Notre Dame University Press.

Rocha, H. (2019). Mathematical proof: from mathematics to school mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A, 377*(2140). http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2018.0045

Schwarz, B.B. (2009). Argumentation and Learning. En Muller Mirza, N., Perret-Clermont, AN. (Eds) *Argumentation and Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-98125-3_4

van Eemeren, F. H. y Grootendorst. R. (1984). *Speech acts in argumentative discussions: A theoretical model for the analysis of discussions directed towards solving conflicts of opinion*. Foris Publications.

Wolfswinkel, J., Furtmueller, E. & Wilderom, C. (2011). Using grounded theory as a method for rigorously reviewing literature. *European Journal of Information Systems, 22*, 45–55.

EL ENCUENTRO CON LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. DISEÑO DE TAREAS PARA ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA

Cristóbal Arenas, Universidad Arturo Prat

Alan López, Universidad Arturo Prat

Juan Luis Prieto-González, Universidad Arturo Prat

Elizabeth-H. Arredondo, Universidad de Los Lagos

Resumen:

En esta breve comunicación, se presenta un problema que forma parte de una secuencia didáctica diseñada para promover el aprendizaje de la binomialón binomial en estudiantes de educación media. La secuencia consta de tres tareas, siendo las dos primeras orientadas a *introducir conceptos fundamentales para la comprensión de la distribución binomial. El diseño instruccional se basa en la teoría de la objetivación, que concibe el aprendizaje matemático no solo como una transmisión de conocimientos, sino también como un proceso que involucra el ser y devenir del sujeto. El problema en cuestión se centra en un juego de feria, donde los estudiantes deben predecir si una pelota caerá a la izquierda o derecha en una máquina de Galton con una sola fila de palos. A través de preguntas guiadas, se busca desarrollar conceptos clave como la variabilidad, la ley de los grandes números y desligarse de la ilusion de la linealidad, nociones previas esenciales para el aprendizaje adecuado de la distribución binomial. Este enfoque se aparta de las clases magistrales tradicionales, promoviendo el trabajo grupal y la puesta en escena de las diversas perspectivas emergentes entre los estudiantes.*

Palabras clave: Distribución binomial, tareas matemáticas, actividad, enseñanza media.

INTRODUCCIÓN

El diseño de tareas matemáticas por los profesores es una práctica que favorece la relación entre los contenidos curriculares y los métodos de enseñanza de estos contenidos, guiando de forma directa el quehacer docente dentro del aula. Sin embargo, la realización de esta práctica puede presentar grandes desafíos, especialmente en contextos de formación inicial docente, debido a múltiples factores que inciden en la enseñanza en el aula, entre las cuales podemos mencionar las expectativas de aprendizaje que se tienen, la capacidad de los estudiantes, las interacciones sociales entre los estudiantes, los contenidos matemáticos tratados y las estrategias para enseñar estos contenidos.

Las tareas que diseñamos apoyan la enseñanza de la probabilidad, una de las áreas de contenido más problemáticos en matemáticas debido a la importancia que se le entrega a la reproducción del cálculo en la educación actual, por sobre su interpretación (Sánchez y Carrasco, 2018). Específicamente, nuestro diseño apoya la enseñanza de la distribución binomial (DB) a partir de tres tareas especialmente secuenciadas para que los estudiantes transiten desde la comprensión de ciertos conceptos clave como el principio multiplicativo, las combinaciones y el diagrama de árbol (Noguera, 2015), además de las nociones de la variabilidad y distributividad (Arredondo et al., 2019). En este sentido, el objetivo es plantear una secuencia didáctica que no solo busque cumplir con los objetivos curriculares relacionados con la DB, sino también promover un trabajo colectivo entre los estudiantes que les coloque en mejores condiciones para una comprensión más profunda de este concepto.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS DEL DISEÑO

En este trabajo, el diseño de las tareas ha sido influenciado por el concepto de *actividad* de la Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2023). La TO es una teoría educativa de corte histórico-cultural, perteneciente al campo de la Educación Matemática, que conceptualiza el aprendizaje y la enseñanza no como dos procesos separados, sino como un único proceso contínuo y tenso de *encuentro* de los estudiantes con los saberes matemáticos escolares (entendidos como entidades histórico-culturales) y con otras voces y consciencias. Dicho encuentro ocurre en una actividad (la actividad del aula de matemáticas) que es al mismo tiempo colectiva, sensible, material e ideacional, y que fluctúa entre los deseos y motivos de los individuos (Radford, 2023), permitiendo el trabajo colaborativo.

En la TO, el concepto de actividad tiene un significado diferente a simplemente "hacer algo" como, por ejemplo, ver televisión o leer un libro. Según Radford (2023), la actividad (*Tätigkeit, en alemán*) es un sistema dinámico de interacción colectiva con un fuerte sentido social. Para distinguirse de otras aproximaciones, la TO concibe la actividad como una *labor conjunta*, en la cual estudiantes y profesores producen una *obra en común*. En la actividad del aula de matemáticas, la obra común:

> (...) aparece sensorial y sensiblemente en el aula (por medio de la acción, la percepción, los símbolos, los artefactos, los gestos, el lenguaje) de forma muy parecida, y con similar fuerza estética, a la manera en que la música aparece auditivamente en una sala de conciertos mediante la obra común de los miembros de la orquesta. (Radford, 2023, p. 29)

Con base en lo anterior, las tareas de nuestro diseño, y particularmente la que compartimos en esta comunicación breve, han sido pensadas para provocar una labor conjunta entre estudiantes y profesores de 3er y 4to medio, en otras palabras, para promover el encuentro de estos sujetos con saberes de estadística inferencial, relacionados con el concepto de DB. Además, hemos tenido en cuenta que dicha labor conjunta, aunque impredecible, no ha de ser improvisada. Por ello, en el diseño de las tareas hemos considerado algunos aspectos clave relacionados con el aprendizaje de la DB, tales como: (i) los conceptos de variabilidad y distributividad (Arredondo et al., 2019), (ii) las dificultades con el número de variables y la combinatoria (Sánchez y Carrasco, 2018), (iii) la ilusión de linealidad (Landín, 2013), (iv) el principio multiplicativo, (v) la distribución de Bernoulli (Noguera, 2015), entre otros.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS DEL DISEÑO

Desde la perspectiva de la TO, toda actividad de enseñanza-aprendizaje está estructurada en dos componentes interdependientes: el componente Φ y el componente Θ.

El componente Φ se enfoca en la propuesta didáctica del profesor, la cual incluye: (i) el *objeto* de la actividad de enseñanza-aprendizaje, que para el caso de nuestro trabajo se trata del encuentro de los estudiantes con formas estadísticas inferenciales de pensar eventos aleatorios mediante la DB; (ii) las *metas* de la actividad, las cuales incluyen la identificación de nociones previas a la DB y la resolución/creación de situaciones en donde se presenta la DB, y (iii) las *tareas* (con sus respectivas preguntas y acciones) diseñadas para alcanzar las metas y que se organizan según niveles crecientes de dificultad.

En nuestro caso, elaboramos tres tareas que buscan promover una comprensión gradual de la DB, al mismo tiempo que aseguren el cumplimiento de las metas establecidas. Cada tarea tiene asociado un número de problemas que diseñamos teniendo en cuenta las siguientes consideraciones generales y relativas a los problemas matemáticos, propuestas por Radford (2023): tener en cuenta lo que los estudiantes ya saben, integrar el uso de artefactos concretos, plantear situaciones interesantes (en este caso los juegos de apuestas), considerar una unidad contextual y conceptual, y tener una complejidad conceptual creciente. Por limitaciones de espacio, en esta comunicación breve describimos el primer problema que forma parte de la tarea 1 del diseño.

Antes de describir este problema, consideramos importante indicar que hemos formulado el objeto de la actividad a partir de las demandas del programa de estudio de la asignatura *Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial* del plan diferenciado de 3ero y 4to medio (MINEDUC, 2020). Específicamente, partimos del OA3 referido al modelaje de fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las DB y la distribución normal.

PROBLEMA 1. NOCIONES PREVIAS A LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

El problema 1, correspondiente a la tarea 1 que tributa a la primera meta antes mencionada, consta de siete preguntas que invitan a un trabajo colectivo de reflexión y posicionamiento crítico de los estudiantes ante una apuesta sobre el lugar en donde caerá una pelota al moverse por una “máquina de Galton” de una fila, experimentando así con diferentes materiales (concreto y digital). Consideramos que este contexto es propicio para involucrar colectivamente a los estudiantes en una actividad que implica un movimiento de lo empírico a lo teórico.

La unidad contextual y conceptual del problema 1 inicia con la siguiente narrativa:

> Un hombre misterioso nos invita a participar en un sencillo juego de feria que consiste en lo siguiente: En el tablero mostrado en la parte inferior **[La guía muestra la máquina de Galton con solo la primera fila]** una bola se dejará caer desde la parte superior, de forma que golpea un palo de madera para luego caer al fondo del lado izquierda o derecha. En este juego, la bola se dejara caer diez veces. ¡Comencemos!

Cada pregunta del problema 1 se mantiene enlazado con la narrativa anterior, introduciendo un juego que tiene por protagonista a un hombre misterioso. Las preguntas colocan el foco en diferentes tópicos que se sugieren importantes para comprensión de la DB según la literatura especializada: ley de los grandes números, variabilidad e ilusión de linealidad. En la Tabla 1 presentamos la serie de preguntas que forman parte del problema 1. Destacamos en la tabla el orden en que se realizan las preguntas y la finalidad que se tiene con cada una de estas.

Tabla 1

Preguntas del problema 1 y sus finalidades

No.	Pregunta	Finalidad
1	Antes de comenzar con las repeticiones, respondan la siguiente pregunta: ¿En qué lado del tablero es más probable que caiga la pelota en cada repetición? ¿Por qué?	Hacer aparente la probabilidad teórica del 50% y 50%. En el caso de no llegar a esto, las siguientes preguntas podrían contribuir a superar la percepción que se tenga.

<table>
<tr><td>2</td><td>Utilicen la siguiente tabla para registrar la predicción hecha y el número de fichas apostado antes de cada repetición. Luego de la repetición, marquen el resultado obtenido con una equis “X” en la casilla correspondiente.
<table>
<tr><td colspan="11">Apuestas (Antes de la repetición)</td></tr>
<tr><td>Juego</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Predictor</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Apostador</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="11">Resultado (Después de la repetición)</td></tr>
<tr><td>Juego</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Izquierda</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Derecha</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>Hacer aparente una probabilidad frecuencial, distinta de la teórica, al repetir el juego diez veces. Se busca crear un pregunta interesante para los estudiantes, por medio de la cual se promueva un compromiso con la actividad.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Después de completar la tabla, observen los resultados obtenidos y respondan la pregunta: ¿Consideran que la probabilidad es igual para ambos resultados posibles?, ¿Por qué?</td><td>Propiciar una ruptura con la probabilidad frecuencial y un encaminamiento de las reflexiones hacia la probabilidad teórica. En caso de no lograrse esto, la noción de variabilidad en las siguientes preguntas propiciarían la superación de esta percepción.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Con base en los resultados anteriores, respondan la pregunta: ¿Cuántas veces creen que la pelota caerá en cada lado si repetimos el juego 20, 100, 140, 175 y 231 veces?</td><td>Hacer aparente la ilusión de linealidad mediante el apoyo en una proporción lineal basada en la probabilidad obtenida de la segunda pregunta.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Pongamos a prueba nuestras propias capacidades para las apuestas. Repitamos el mismo juego un mayor número de veces. Para ganar tiempo, utilicemos el simulador Probabilidad Plinko, el cual nos permitirá emular el juego tantas veces como queramos y observar los resultados obtenidos, sin la necesidad de cálculos manuales.</td><td>Hacer aparente información del contexto que hagan aparecer la variabilidad y permitan romper con la ilusión de linealidad.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Con base en los resultados de la tabla, responde las siguientes preguntas: ¿Qué tan cercanas fueron las predicciones hechas en la pregunta 4) con los resultados que se consiguienron en la pregunta 5)?, ¿Cómo cambiaron los resultados a medida que el juego se repitió más veces?</td><td>Poner en escena la ley de los grandes números, mediante el reconocimiento de la relación entre las probabilidades frecuencial y teórica.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Si llamamos “evento” a cada una de las repeticiones de la tabla anterior, responde las preguntas: ¿Cuál es la probabilidad de cada evento?, ¿De qué formas distintas se puede expresar la probabilidad de cada evento?</td><td>Generar expresiones matemáticas de la probabilidad (porcentajes, decimales y fracciones).</td></tr>
</table>

CONCLUSIÓN

El diseño de tareas en la formación docente, fundamentado en principios teóricos y metodológicos, es crucial para promover una comprensión profunda de los objetos probabilísticos. En este estudio, empleamos el concepto de actividad de la TO para crear una secuencia que favorece el trabajo colaborativo y un enfoque crítico sobre la DB. A diferencia de las actividades tradicionales de los libros de texto, que a menudo se limitan a la transmisión pasiva de conocimiento, nuestra propuesta busca que los estudiantes transformen conceptos en objetos de conciencia, mejorando las condiciones para su enseñanza en educación media.

REFERENCIAS

Arredondo, E.-H., Del Carmen, M. y García-García, J. (2019). Desarrollo de la noción de distribución binomial en estudiantes de bachillerato con apoyo de tecnología. *Paradigma: Revista de Investigación Educativa*, 2, 92-106.

Landín, P. R. (2013) *Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre problemas binomiales*. Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, 2, 425-431.

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2020). *Programa de estudio: Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial - 3° y 4° medio, formación diferenciada*. Unidad de Currículum y Evaluación.

Noguera Vilches, M. (2015), Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre distribuciones binomial y normal en 2º de Bachillerato, (Trabajo de Fin de Máster). Universidad de Granada.

Radford, L. (2023). *La teoría de la objetivación: Una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Uniandes.

Sánchez, E., y Carrasco, G. (2018). El razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato en actividades de distribución binomial. En: L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 535-543). Ediciones de la Universidad de Oviedo.

ANÁLISIS DE TAREAS DE PATRONES DEL LIBRO DE TEXTO DE MATEMÁTICA DE PRIMARIA DESDE LA INSTRUCCIÓN

[Helen Bolaños González 1], [Universidad Nacional, Costa Rica]

[Antonio Moreno 2], [Universidad de Granada, España]

El trabajo de investigación se plantea como objetivo describir las tareas de patrones presentes en los libros de texto de cuarto y sexto grado, en el contexto costarricense mediante el análisis de instrucción. Este es un estudio cualitativo de carácter descriptivo. Se trabaja utilizando un instrumento llamado ficha de la tarea que se elabora a partir de tres indicadores del análisis de instrucción. Para el análisis de datos se seleccionan 88 tareas de patrones. Las tareas responden a ejercicios o problemas, cuya complejidad en su mayoría son tareas de reproducción, se utilizan representaciones verbales, algunas pictóricas, entre otras. Es importante una constante revisión del libro de texto para su mejora ya que esto podría influir en la calidad de la educación matemática.

Tareas, patrones, primaria, libros de texto

Los patrones actúan como un vehículo eficiente para el desarrollo del pensamiento algebraico, ya que facilitan la identificación de regularidades, la introducción de variables y el desarrollo de habilidades de representación, lo que permite construir las bases matemáticas para fortalecer la comprensión del álgebra en niveles superiores (Cervantes et al., 2019). En la línea de investigación de pensamiento algebraico, nos interesa resaltar la temática de patrones en relación con las tareas planteadas en los libros de texto de matemáticas de cuarto y sexto grado.

El análisis de las tareas presentes en los libros de texto se considera relevante, ya que este recurso es de uso frecuente de los docentes de primaria y en muchas ocasiones refleja lo que se transmite en el aula a los estudiantes. En el presente trabajo se plantea como objetivo describir las tareas de patrones presentes en los libros de texto de cuarto y sexto grado en el contexto costarricense mediante el análisis de instrucción. Lo cual nos permitirá conocer el tipo de tarea, la dificultad y el tipo de representación en la formulación de dicha tarea, brindando una idea del diseño de la tarea presente en el libro de texto de matemática en primaria.

REFERENTE TEORICO

Parte fundamental del álgebra escolar es considerar el concepto de patrón como clave en este proceso inicial, según Guzmán (2013) "el reconocimiento de un patrón es la entrada al concepto de variable, pues es allí donde los niños interpretan la letra en un modelo matemático". Además, este autor menciona que el "identificar regularidades en una secuencia y posteriormente generalizar el patrón implica conducir a los niños a conceptualizar la letra como un número generalizado esencial para la noción de variable" (p. 23).

En el tema de patrones es importante considerar en la educación primaria abordar distintos tipos de patrones, para ello se logra establecer una clasificación según la monotonía, la construcción y representación del patrón. Para lograr esta clasificación de los patrones se toman en cuenta los siguientes aspectos: 1) Según el MEP (2012) en la educación primaria costarricense se debe analizar patrones presentes en sucesiones ascendentes y sucesiones descendentes, en este caso se considera clasificarse según la monotonía es decir, si son patrones crecientes o decrecientes. 2) según Zapatera (2018) los patrones en primaria se pueden clasificar de dos tipos, patrones de repetición y de recurrencia. 3) Además MEP (2012) también agrega que para el estudio patrones se toman en cuenta distintos tipos como numéricos o geométricos así como analizar patrones por medio del manejo de expresiones simbólicas. Lo anterior nos permite visualizar los diferentes patrones que deben estar presentes en las tareas de los libros de texto de matemática de primaria.

Autores como Van den Ham y Heinze (2018) afirman que un alto porcentaje de docente utilizan el libro de texto y basan su instrucción en este recurso, de ahí su importancia en la interpretación curricular del docente y la implementación en el aula de este recurso. Es importante señalar lo expuesto en el trabajo de Vicente, et al. (2024) quienes mencionan que las orientaciones curriculares deben vincularse estrechamente con el libro de texto, donde permita tener claridad sobre el tipo de tarea que los estudiantes deben aprender a abordar. Además el libro de texto debe ofrecer orientaciones que permitan guiar el aprendizaje de los estudiantes acorde al currículo educativo.

Nuestro estudio se enfoca desde el análisis de instrucción de acuerdo con Rico et al., (2013) el docente selecciona o diseña la tarea que en la instrucción utiliza para el logro de las expectativas de aprendizaje planteadas. El análisis de instrucción se vincula con la planificación e implementación, específicamente con los elementos como tareas, la organización, los materiales y recursos didácticos (Moreno y Ramírez, 2016). El presente trabajo tiene como propósito enfocarse en la tarea, considerando tres indicadores que nos permiten describir la tarea que se presenta en el libro de texto de primaria en el contexto costarricense.

Primer indicador es identificar según el grado de dificultad o de apertura el tipo de tarea, consideramos el aporte de Ramírez y Moreno (2016) que definen cuatro tipos de tarea según la dificultad y la apertura de los datos o información presente en el planteamiento de la tarea, las cuales son ejercicio, problema, proyecto o investigación.

Segundo indicador hace alusión a los niveles de complejidad de las tareas en este caso según Ramírez y Moreno (2016) tenemos las tareas de reproducción, conexión y reflexión. Donde la primera son tareas relativamente familiares al estudiante, las segundas requieren interpretación para establecer relaciones entre distintas representaciones, la última tiene mayor grado de complejidad donde se exige generalización y explicación o justificación de los resultados.

El tercer indicador es la complejidad según el formato de presentación utilizada para la formulación de la tarea, las representaciones que se utilizan en el planteamiento de una tarea como apoyo o representaciones que requieren ser decodificadas para extraer la información son importantes para el estudiante (Ramírez y Moreno, 2016). En las tareas podemos encontrar elementos pictóricos, representación tabular, numérica, verbal (por medio de palabras), simbólica (números, letras y símbolos de las operaciones aritméticas), gráfica o múltiple (Cañadas et al., 2016).

METODOLOGIA

La presente investigación se enmarca en el paradigma cualitativo, el estudio será de naturaleza descriptiva lo que nos permitirá conocer el tipo de tarea presente en los libros de texto que utilizan los niños de primaria. Se selecciona como objeto de estudio aquellas tareas de patrones presentes en dos editoriales como lo son el Grupo Nación y la Editorial Santillana, estas editoriales son de gran prestigio a nivel nacional. Las cuales son de frecuente uso por parte de los docentes de primaria, estos textos son utilizados mayormente en instituciones privadas, ya que el uso de este recurso no es de carácter obligatorio en la educación pública costarricense.

Para la toma de datos se elabora una ficha que oriente el análisis de instrucción según ciertos componentes e indicadores, adaptada al tema de patrones y a la educación primaria costarricense. Para el análisis de datos se seleccionaron 88 tareas de patrones presentes en los libros de texto. La toma de datos se realiza a partir de 4 libros de texto, dos por cada nivel. Se seleccionan el II ciclo de Educación Primaria, en este caso se excluye 5to grado debido a que no corresponde abordar el tema de patrones.

RESULTADOS

Los resultados que se obtienen al analizar 88 tareas de patrones presentes en los libros de texto, permiten describir dichas tareas. En la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos en cada indicador.

Tabla 1

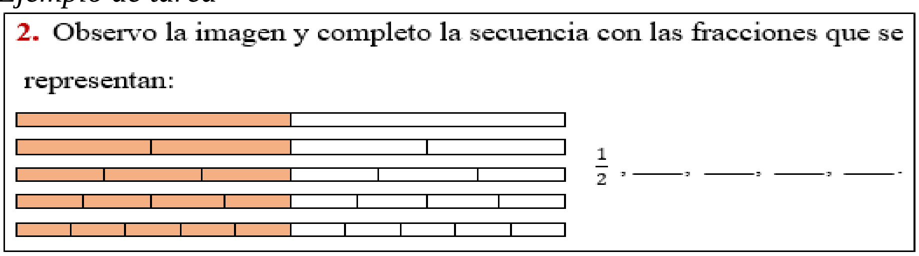
Resultados del análisis de tareas según los indicadores del análisis de instrucción

El tipo de tareas según el grado de dificultad y apertura	Tipo de tarea, según los niveles de complejidad	Representaciones utilizadas en la formulación de la tarea
Un 82,95% de las tareas que se consideran ejercicios. Un 17,05% de tareas son problemas.	Un 57,95% son tareas de reproducción. Un 26,14% son tareas de conexión Un 15,91% son tareas de reflexión.	Tareas verbales en un 50%. Tareas con carácter pictórico con un 20,45%. Tareas numéricas en un 20,45%. Tareas simbólicas con un 4,55% Tareas múltiples con un 4,55%.

Algunos detalles que son importantes mencionarlos, son por ejemplo los libros de texto analizados no presentan tareas de proyectos o investigaciones que se puedan abordar el tema de patrones, es decir, no se evidencio tareas abiertas que permitan al estudiante construir su conocimiento para resolver dicha tarea. Con respecto al último indicador se debe aclarar que las tareas simbólicas y múltiples solo se presentaron en el nivel de sexto grado. Además, las tareas de representación múltiple responden a tareas con representación tabular y simbólica, es decir, está presente un criterio o expresión algebraica, pero también se representa por medio de una tabla donde se podría visualizar las variables dependientes e independientes.
En la figura 1, se muestra una tarea presente en un libro de sexto grado, la cual nos muestra una tarea tipo ejercicio con elementos pictóricos y que permiten la conexión entre la representación algebraica y pictórica.

Figura 1

Ejemplo de tarea



Estos resultados forman parte de un trabajo más amplio, sin embargo, este avance de investigación arroja resultados interesantes que el docente de primaria puede considerar para la selección de tareas y escogencia del libro de texto. El docente debe tener criterios desde el análisis didáctico para la toma de decisiones en cuanto a la selección de este tipo de recurso.

CONCLUSIONES

Según Zanten y Heuvel-Panhuizen (2018) mencionan que en muchas ocasiones los docentes enseñan lo que está en el libro de texto, de ahí que los estudiantes aprenden. Esta es una de las grandes implicaciones que tiene el uso de los libros de texto, ya que si este no está en constante revisión para su mejora podría influir indirectamente en la calidad de la educación matemática.
Al analizar las tareas de patrones presentes en los libros de texto de la educación primaria costarricense en términos del análisis de instrucción, nos permitió llegar a algunas

conclusiones interesantes, se debe recordar que este estudio consideró los niveles de cuarto y sexto grado a partir de cuatros libros de texto analizados, por lo cual no podemos generalizar dichos resultados.

En primer lugar, se describe el tipo de tarea presente en el libro de texto para ambos niveles, lo cual se caracteriza por tareas que responden a tarea de ejercicios y en menor medida de problemas, dejando de lado las tareas de investigación y proyectos, lo que se sugiere que estas se planifiquen por el docente y no se omitan debido a su importancia en la formación de los estudiantes. En cuanto a la dificultad se evidencia que mayor dificultad menos cantidad de tareas presentes en los libros. También logramos visualizar que las tareas se plantean en su mayoría de forma verbal, pictórica o numérica, lo cual se evidenció en ambos niveles educativos.

Referencias

Cañadas, M. C., Gómez, P., y Pinzón, A. (2016). *Apuntes sobre análisis de contenido.* Módulo 2 de MAD 5. Documento no publicado. http://funes.uniandes.edu.co/8529/

Cervantes-Barraza, J., Valbuena, S. y Paternina, Y. (2019). Argumentos de estudiantes de primaria en el contexto del álgebra temprana. *Educación y Humanismo*, *21*(37), 120-138. http://dx/10.17081/eduhum.21.37.3459

Guzmán, N. (2013). *Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la aritmética generalizada* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21927

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programa de estudios. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada.* Matemáticas. Costa Rica. http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Ramírez, R. y Moreno, A. (2016). Complejidad y estructura de las tareas escolares. En: Rico, L.; Moreno, A. (coords.). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundarias.* Madrid: Pirámide. p. 201-214.

Rico, L., Lupiáñez, J. L., y Molina, M. (Eds.). (2013). Análisis didáctico en educación matemática. Comares.

Van den Ham, A.-K., & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, *59*, 133–140. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.07.005

Vicente, S., Sánchez, R., Sánchez-Barbero, B., Rodríguez-Sánchez, M., y Ramos, M. (2024). Theoretical-methodological approaches and textbook design: analysis of arithmetic word problems in Spanish textbooks. *European Journal of Psychology of Education.* https://doi.org/10.1007/s10212-024-00808-7

ERRORES EN LA CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS DE BARRAS POR ESTUDIANTES DE 5º Y 6º BÁSICO DE ESCUELAS RURALES

Matías Bustamante-Valdés, Universidad Católica del Maule
Danilo Díaz-Levicoy, Universidad Católica del Maule
María José Pérez-Jasma, Universidad Católica del Maule

Resumen:

Este estudio tiene como objetivo describir los errores que manifiestan estudiantes de 5º y 6º de Educación Básica que asisten a escuelas rurales multigrado en Chile. Para lograr este objetivo se sigue una metodología de tipo cualitativa, de nivel descriptivo y utilizando el método de análisis de contenido. Se analizan las respuestas de 22 estudiantes de 5 escuelas rurales multigrado. En los resultados relacionados con la construcción de un gráfico de barras simple se destacan las dificultades en asignar títulos a los ejes, no definir un marco para el gráfico, utilizar un espacio desproporcional entre especificadores y no asignar escalas. Respecto de completar un gráfico de barras simple y otro doble, se presentan conflictos en asignar un título que represente eficientemente los datos, utilizar diferente espacio entre barras, utilizar especificadores desproporcionales y graficar frecuencias que no corresponden a los datos. Además, en el gráfico de barras doble, los estudiantes cometen errores al separar las barras dobles dentro de una misma categoría. Las dificultades en el proceso de construcción, puede deberse a la cantidad de elementos que se deben organizar al construir un gráfico de barras, por lo que resulta imperativo centrarse en el aprendizaje de estos para que los estudiantes puedan comunicar efectivamente sus resultados.

Educación Básica, gráficos estadísticos, estadística, escuela rural, aula multigrado

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la enseñanza de la estadística se ha incorporado en las directrices curriculares de diferentes países desde los primeros años de escolaridad. Esto es explicado debido a su amplia utilidad en diferentes áreas tanto científicas, sociales y humanísticas (Molina-Portillo et al., 2019), como también, en la toma de decisiones en situaciones de la vida cotidiana (Samuel et al., 2019). Usualmente, en los medios informativos utilizan gráficos estadísticos para comunicar gran cantidad de datos en espacios reducidos (Arteaga et al., 2018). Por otro lado, en del sistema educativo, se encuentran las escuelas rurales multigrado, las que sus estudiantes presentan mayores dificultades en comparación a las escuelas urbanas debido a factores contextuales, dentro de los cuales se acentúa la presencia de aulas multigrado, la que alude a una forma de enseñar a estudiantes de diferentes edades reunidos en una misma aula (Abós y Boix, 2017). Asimismo, las directrices curriculares chilenas plantean como objetivo para los estudiantes de escuelas rurales que recolecten, organicen clasifiquen y representen información estadística (MINEDUC, 2014), siendo este último proceso el de interés para esta investigación, en el cual se utilizará el gráfico de barras porque es el más utilizado en Enseñanza Básica (Bustamante-Valdés y Díaz-Levicoy, 2024). De acuerdo con las consideraciones anteriores, este trabajo tiene por objetivo describir los errores en la construcción de gráficos de barras que manifiestan estudiantes de 5º y 6º de Educación Básica que asisten a escuelas rurales multigrado en Chile.

ELEMENTOS TEÓRICOS: Niveles de complejidad semiótica

Batanero et al. (2010) dan cuenta de la complejidad al momento de construir gráficos estadísticos, debido a la cantidad de elementos semióticos incluidos. Al respecto, estos investigadores proponen los siguientes niveles semióticos: a) *Representación de datos individuales*: se presentan datos aislados en el gráfico estadístico, sin utilizar conceptos de variable ni frecuencia; b) *Representación de un conjunto de datos, sin llegar a resumir su distribución*: se presenta una lista de datos uno a uno sobre un gráfico estadístico, no está presente la idea de frecuencia ni distribución, pero si la de variable; c) *Representación de una distribución de datos*: se presenta una distribución de datos, considerando el cálculo de frecuencias y la de distribución de frecuencias; y d) *Representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico*: se representan dos o más distribuciones de frecuencias en el mismo grafico estadístico.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

De acuerdo con la naturaleza del estudio, se sigue una metodología de tipo cualitativa, de nivel descriptivo y utilizando como método el análisis de contenido (Piñeiro-Naval, 2020). Se analizan las respuestas a un cuestionario administrado a 22 estudiantes chilenos de 5º y 6º de Educación Básica rural multigrado, de cinco escuelas de una región de la zona central de Chile, siendo analizadas entre los coautores para asegurar la objetividad en los resultados. En los ítems, los estudiantes deben a) construir un gráfico de barras simple a partir de resultados de una encuesta presentada en una tabla sobre la preferencias que tiene un grupo de personas respecto a clubes deportivos, b) completar un gráfico de barras simple (agregando barras y el título), en función de los datos presentados en una tabla estadística sobre el tipo de película preferida de un grupo de personas. y c) completar un gráfico de barras doble (agregando barras y título), partiendo de datos presentados en una tabla sobre las preferencias en la práctica de deporte de hombres y mujeres. Estos tres ítems forman parte de un cuestionario más extenso y fueron adaptadas de los libros de texto propuestos para la educación rural multigrado, considerando investigaciones previas (Bustamante-Valdés y Díaz-Levicoy, 2024), y estando alineadas con las directrices curriculares chilenas (MINEDUC, 2014). El cuestionario fue validado por juicio de 8 expertos en Didáctica de la Matemática y Estadística.

RESULTADOS

En primer lugar, se describen los tipos de respuestas entregadas por los estudiantes en los ítems según los siguientes criterios: a) *Correcta*: construcciones que representan los datos de la tabla, incorporando todos los elementos del gráfico de barras (1), así como solo los títulos y barras en tareas de completar (2 y 3), b) *Parcialmente correcta*: cuando se cometen pequeños errores tanto en la construcción de algún elemento del gráfico, como en la utilización de diferentes espacios entre barras, o al representar parcialmente los datos de un cuadro estadístico (1, 2 y 3), y c) *Incorrecta*: respuestas con errores de varios elementos del gráfico estadístico, utilizando diferentes espacios entre especificadores, y en donde ocasionalmente no representan los datos de tablas estadísticas (1, 2 y 3).

En la Tabla 1, se presenta la distribución de los tipos de respuestas por ítems y el nivel semiótico. En ella, se aprecia que la mayoría de los estudiantes responde de manera parcialmente correcta (42,3%), predominando en el ítem 1 (72,7%). Se destaca que la preponderancia de las respuestas correctas en el ítem 2 (81,8%). Por el contrario, en el ítem 3, que hace evidente el nivel semiótico 4, no hubo estudiantes que respondieron correctamente.

Tabla 1

Frecuencia(porcentaje) de tipos de respuestas obtenidas por estudiantes de 5º y 6º rural multigrado

Tipo de respuesta	Ítem			Total
	1 N3	2 N3	3 N4	
Correcta	3(13,6)	18(81,8)		21(31,8)
Parcialmente correcta	16(72,7)	1(4,5)	11(50)	28(42,3)
Incorrecta	3(13,6)	3(13,6)	11(50)	17(25,8)
Total	22(100)	22(100)	22(100)	66(100)

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 2, se describen los errores cometidos por los estudiantes en estos ítems. Se observa que en la construcción de un gráfico de barras (1), el más frecuente es no asignar títulos a los ejes (77,3%), seguido de no definir el marco del gráfico (59,1%) y no utilizar el mismo espacio entre barras (59,1%). En cuanto a completar un gráfico con títulos y barras (2), el error más común es no asignar un título que represente los datos (54,5%) y no utilizar el mismo espacio entre barras (31,8%). Por último, al completar un gráfico de barras dobles (3), similar al anterior, el error predominante es no asignar correctamente el título del gráfico (54,5%), seguido de la utilización de espacios diferentes entre barras (36,4%) y la separación de barras dobles dentro de una misma categoría (22,7%).

Tabla 2

Frecuencia(porcentaje) de los errores en respuestas del ítem de nivel semiótico 3 y 4

Error	Ítems		
	1	2	3
No define el marco del gráfico estadístico	13(59,1)		
No asigna escala	9(40,9)		
No asigna títulos a los ejes	17(77,3)		
Sitúa erróneamente el nombre de la variable principal	5(22,7)		
No agrega nombre de la variable principal o la agrega parcialmente	3(13,6)		
Especificadores no unidos con el eje o concentrados en un espacio del gráfico	9(40,9)		2(9,1)
Espacio desproporcional entre especificadores	13(59,1)	7(31,8)	8(36,4)
Escala mal graduada	6(27,3)		
Especificadores desproporcionales o no utiliza barras	6(27,3)	2(9,1)	1(4,5)
Situar frecuencias en el sector de nombres de variables	1(4,5)		
No asignar correctamente el título del gráfico		12(54,5)	12(54,5)
Error de frecuencias		2(9,1)	2(9,1)
Falta de especificadores			3(13,6)
Separar barras dobles			5(22,7)
Variables mal situadas			1(4,5)

Fuente: elaboración propia

CONCLUSIONES

De acuerdo con los ítems que involucran construir y completar gráficos de barras y los niveles de complejidad asociados, se pueden observar dificultades, respecto del nivel semiótico 3, las que coinciden con investigaciones previas (e.g., Cruz, 2013), las que reportan desafíos en la asignación de escalas, títulos en ejes y espaciado entre las barras. Esta situación puede explicarse por la gran cantidad de elementos estadísticos que se deben organizar para construir correctamente un gráfico estadístico. Por tanto, se hace necesario orientar aprendizajes hacia estos elementos para que los estudiantes puedan comunicar información estadística de manera eficaz. Respecto de la tarea de completar (nivel semiótico 3), no se observan dificultades, ya que los estudiantes responden correctamente. Sin embargo, los principales retos implican no utilizar un título que represente efectivamente los datos y utilizar diferentes espacios entre barras, similar a Cruz (2013). Finalmente, al completar un gráfico de barras doble, en adición a las dificultades mencionadas anteriormente, se agregan errores al separar las barras en una misma categoría. Este error complica la lectura y comprensión de esta representación estadística, por lo que se recomienda insistir en la importancia que tiene elaborar correctamente las barras para poder comunicar información de manera óptima.

Referencias bibliográficas

Abós, P., y Boix, R. (2017). Evaluación de los aprendizajes en escuelas rurales multigrado. *Aula Abierta*, *45*, 41-48. https://doi.org/10.17811/rifie.45.1.2017.41-48

Arteaga, P., Díaz-Levicoy, D., y Batanero, C. (2018). Investigaciones sobre gráficos estadísticos en Educación Primaria: revisión de la literatura. *Revista digital: Matemática, Educación e Internet*, *18*(1), 1-12.

Batanero, C., Arteaga, P., y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(1), 141-154.

Bustamante-Valdés, M., Díaz-Levicoy, D. y Alarcón-Bustamante, E. (2024). Analysis of formative and evaluative activities on statistical graphs in textbooks for Chilean rural multigrade education. *Eur. J. Investig. Health Psychol. Educ.*, *14*(5), 1396-1412.

Callingham, R., y Watson, J. (2017). The development of statistical literacy at school. *Statistics Education Research Journal*, *16*(1), 181-201. https://doi.org/10.52041/serj.v16i1.223

Cruz, A. (2013). *Erros e dificuldades de alunos de 1o ciclo na representação de dados estatísticos* [Tesis de magíster, Universidade de Lisboa].

MINEDUC (2014). *Guía didáctica para el profesor matemática, módulo didáctico para la enseñanza y el aprendizaje en escuelas rurales multigrado: Leyendo, interpretando y organizando datos*. MINEDUC.

Molina-Portillo, E., Contreras, J. M., Godino, J. D., y Ruz, F. (2019). Statistical literacy in the information society. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, *35*(2), 148-169.

Samuel, M., Díaz-Levicoy, D., y Rodríguez-Alveal, F. (2019). Diseño y validación de un cuestionario para evaluar la comprensión de gráficos estadísticos en futuras educadoras de párvulos. *Espacios*, *40*(41), 20.

PROPORCIONALIDAD FUNCIONAL: SU FALTA EN LA MATEMÁTICA ESCOLAR DIFICULTA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO CRÍTICO

Manuel Ampuero, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Astrid Morales Soto, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

Junto con incorporar las Habilidades del siglo XXI en el sistema educativo, surge la necesidad de concentrase en promover el pensamiento crítico en el estudiantado para afrontar los desafíos de distinguir lo verdadero de lo falso entre la innumerable información que es posible obtener por medio de internet. Por su relevancia, tanto en el ámbito escolar como en el diario vivir de los estudiantes, algunos autores han propuesto que el pensamiento crítico puede desarrollarse desde actividades que involucren una proporcionalidad asociada con los contextos cotidianos de los estudiantes. A pesar de la evidencia se manifiestan dificultades para desarrollar el pensamiento crítico en el aula a través de la proporcionalidad ya que la enseñanza de ésta se centra principalmente en la realización de cálculos aritméticos. Con una mirada Socioepistemológica se analiza la unidad de proporcionalidad del texto para el estudiante de séptimo año básico bajo dos posturas: por medio de las características del discurso Matemático Escolar y de un modelo operacional del pensamiento crítico. Los resultados evidencian la fuerte presencia de un discurso Matemático Escolar rígido orientado a la resolución de ejercicios descontextualizados con pocas posibilidades para propiciar instancias que impulsen el pensamiento crítico del alumnado. Se presentan algunos avances de la primera etapa de una investigación que se encuentra en pleno desarrollo.

pensamiento proporcional, pensamiento crítico, proporcionalidad, discurso Matemático Escolar

INTRODUCCIÓN

Junto con la incorporación de las Habilidades del siglo XXI (HsXXI) en los currículums escolares, han emergido sugerencias sobre la necesidad de centrarse en el desarrollo del pensamiento crítico (PCri) en el estudiantado ya que es considerada como una de las habilidades fundamentales para este siglo (Meller, 2018). Varios autores han propuesto definiciones del PCri. En virtud de este trabajo se entenderá como "aquel que nos ayuda discernir entre lo verdadero y lo falso, lo relevante y lo trivial, las evidencias de las opiniones" (Jiménez-Rodríguez et al., 2020, p.18).

La masificación de la tecnología, en especial de las redes sociales, han planteado una serie de desafíos a nuestra sociedad. Uno de estos retos se direcciona en que debemos ser capaces de distinguir, entre la avalancha de información a la cual tenemos acceso, lo verdadero de lo falso a través del pensamiento crítico (Albertos, 2021). Desde la matemática, el pensamiento crítico puede propiciarse en los estudiantes de educación básica tomando como punto de partida algún contenido en específico (Maričić y Špijunović, 2015). En este sentido, para

Martínez-Juste (2022) el contenido adecuado es la proporcionalidad ya que es posible vincularla en contextos reales como comparar ofertas, preparación de recetas y estimación de costos, pero además propicia la capacidad crítica de los estudiantes por tener una relevancia práctica.

Distintas investigaciones sobre la proporcionalidad han destacado la importancia de este tópico para "el aprendizaje de diferentes contenidos matemáticos y, específicamente en la educación básica es fundamental para el aprendizaje de muchos de los conceptos matemáticos" (Lima y Lutaif, 2023, p.192). A pesar de esto último, se siguen manifestando una serie de "obstáculos, dificultades y deficiencias en el aprendizaje de la proporcionalidad en los estudiantes de primaria" (Martínez-Juste, 2022, p. 53) que se relacionarían con el abuso de actividades proporcionales en situaciones que no lo son y por una resolución centrada en la aritmética. Por ejemplo, en una investigación de Buforn y Fernández (2014) las actividades de proporcionalidad propuestas por futuros profesores de primaria priorizaban el uso de la *regla de tres*. Por esto se busca responder ¿qué propone el texto del estudiante de 7° año básico para enseñar la proporcionalidad y el pensamiento crítico? Considerando este curso ya que en este nivel se propone como Objetivo de Aprendizaje la proporcionalidad.

ELEMENTOS TEÓRICOS

Esta investigación se encuentra en pleno desarrollo. Se trabaja con la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) que plantea la existencia de un discurso Matemático Escolar (dME) que legitima a una epistemología dominante e institucionalizada carente de contexto y variabilidad para los estudiantes, es decir, se caracteriza por una ausencia de marcos de referencia (Cordero et al., 2015). Esto último condicionaría la enseñanza de la matemática escolar a una mecanización con lo cual los tópicos matemáticos tienen un carácter utilitario. Las investigaciones sobre proporcionalidad realizadas desde la TSME se han enfocado en los usos y en las formas de soslayar el discurso Matemático Escolar. Desde la didáctica, Reyes-Gasperini y Cantoral (2014) sintetizaron los modelos de pensamiento proporcional propuestos en investigaciones previas en seis razonamientos: cualitativo, aditivo simple, aditivo compuesto, multiplicativo, inter e intra. Esto último ha facilitado viabilizar el paso desde una proporcionalidad utilitaria a una funcional a través del tránsito de los estudiantes por los distintos razonamientos proporcionales en contextos cotidianos en vez de obtener los resultados por medio de *fórmulas rígidas* que muchas veces carecen de sentido fuera de la escuela. Entonces, centrar las actividades de proporcionalidad en el desarrollo de los distintos razonamientos generaría las condiciones para una proporcionalidad funcional que trastoque el dME y propicie el desarrollo del PCri en el estudiantado. En este sentido Jiménez-Rodríguez et al. (2020), categorizaron el pensamiento crítico en cuatro dimensiones: lógica, creativa, responsabilidad y metacognitiva. Estas dimensiones emergen desde la ejecución de las actividades con lo cual se facilita la identificación y categorización del PCri en relación a su uso en las actividades de aula.

METODOLOGÍA

Este trabajo corresponde a las primeras etapas de una tesis doctoral que tiene un enfoque cualitativo y un diseño articulado por la Investigación Basada en Diseño (IBD). Para responder a la pregunta previamente propuesta se revisó la unidad de proporciones presente en el texto del estudiante para matemática de 7° año básico (Iturra et al., 2023). Como criterios de revisión se utilizaron dos parámetros: las características del dME propuesto por Cordero et al. (2015) y el modelo operacional del pensamiento crítico de Jiménez-Rodríguez et al. (2020) que facilita la identificación y categorización de este pensamiento.

RESULTADOS

Los resultados de esta investigación en curso, plantean que las primeras páginas del texto del estudiante para 7° año básico se dedican principalmente a definir, explicar y ejemplificar la *propiedad fundamental de las proporciones* y la *regla de tres*. En este sentido, Gairín y Oller (2012) concluyen que la sola presencia de esta *propiedad* y esta *regla* solo se justifican desde un punto de vista numérico, por lo tanto, están destinadas para que un estudiante resuelva a través de una operatoria. Por ejemplo, en la Figura 1 los ejercicios mostrados presentan un paso a paso para usar la *regla de tres*. Esta forma de resolver sigue usándose en otros ejercicios resueltos del texto con lo cual se estructura la resolución de las actividades. Además, los ejemplos de la Figura 1 están justificando cuando un par de razones es o no es proporción desde equivalencias numéricas, pero sin un contexto.

Figura 1

Actividad sobre proporcionalidad del texto del estudiante para séptimo básico.

Ejemplo 1 → 3 : 6 y 3 : 10

$\frac{3}{6} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3 \cdot 10 = 3 \cdot 6$

$30 \neq 18$

Por lo tanto, 3 : 6 y 3 : 10 no forman una proporción. No son razones equivalentes.

Ejemplo 2 → 2 : 6 y 7 : 21

$\frac{2}{6} = \frac{7}{21} \Leftrightarrow 2 \cdot 21 = 6 \cdot 7$

$42 = 42$

Por lo tanto, 2 : 6 y 7 : 21 forman una proporción, ya que son equivalentes.

Nota: Adaptado de Matemática 7°Básico.Texto del Estudiante (p.61), por Iturra et al., 2023, SM.

En las otras páginas del texto relacionadas con la proporcionalidad se proponen ejercicios resueltos, tablas con proporciones resueltas, preguntas con sus respuestas sobre gráficos y definiciones conceptuales con sus respectivos ejemplos desarrollados. Si consideramos las características del dME propuesto por Cordero et al. (2015), es posible evidenciar la presencia de un discurso Matemático Escolar en el texto del estudiante con lo cual se conduciría a la enseñanza de una proporcionalidad utilitaria. Es decir, al incentivar la obtención de resultados por medio de fórmulas, se restringe el acceso a una proporcionalidad funcional ya que los estudiantes no utilizan los razonamientos del pensamiento proporcional propuesto por Reyes-Gasperini y Cantoral (2014). Si las mismas tareas se observan con el modelo operacional del PCri de Jiménez-Rodríguez et al. (2020) es posible encontrar un par de preguntas que se enmarcan en la dimensión lógica, aunque estas se encuentran a un nivel secundario en las actividades e incluso podrían ser respondidas con un monosílabo.

CONCLUSIONES

Desde la óptica de la TSME, se observa que las actividades de proporcionalidad del texto del estudiante no necesariamente convergen con la matemática que los estudiantes utilizan en su diario vivir, ya que principalmente invitan a realizar cálculos aplicando fórmulas con lo cual se dificultaría transferir las proporciones escolares a la vida real. Esto último estaría condicionado por la presencia del dME que incide fuertemente en la estructuración de la clase. En resumen, las conclusiones de esta investigación en curso, han determinado que al promover una enseñanza centrada en la operatoria y la memorización se estarían mermando las instancias para desarrollar el pensamiento crítico o la reflexión para resolver las tareas escolares. Entonces, se estaría limitando la incorporación del PCri a través de la proporcionalidad funcional porque la institucionalización de la enseñanza dificulta el tránsito de los estudiantes por los distintos razonamientos que involucran el pensamiento proporcional. Esto último tendría como una de sus causales las actividades que se proponen en el texto del estudiante ya que se centran principalmente en la operatoria lo cual impide confrontar ideas o sopesar argumentos, es decir, se dificulta desarrollar el pensamiento crítico en los estudiantes.

Agradecimientos

Proyecto FONDECYT 1220565, Beca Doctorado Nacional ANID 2023/21231690.

Referencias

Albertos, D. (2021). *Guía para implementar el pensamiento crítico en el aula.* Pirámide.

Buforn, A. y Fernández, C. (2014). *Bolema, 28* (48), 21-41. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a02

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Gedisa.

Gairín, J. y Oller, A. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 249 - 259). https://tinyurl.com/ymak6pwf

Iturra, F., Cabrera, M. y Manosalva, C. (2023). *Matemática 7° Básico. Texto del Estudiante*. SM.

Jiménez-Rodríguez, M., Angelini, M. y Tasso, C. (2020). *Orientaciones metodológicas para el desarrollo del pensamiento crítico*. Octaedro.

Lima, G.L. de. A. y Lutaif, B. (2023). Pensamiento proporcional. En B. Lutaif y G. Loureiro de Lima (Org.), *O Pensamento Matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem*, (pp. 191-243). Livraria da Física.

Maričić, S. y Špijunović, K. (2015). Developing Critical Thinking in Elementary Mathematics Education through a Suitable Selection of Content and Overall Student Performance. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *180*, 653-659. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.02.174

Martínez-Juste, S. (2022). *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de Secundaria* [Tesis doctoral]. Universidad de Valladolid. https://doi.org/10.35376/10324/52863

Meller, P. (2018). *Claves para la educación del futuro. Creatividad y pensamiento crítico*. Catalonia.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). La construcción de "una unidad de análisis sociosistémica" del saber matemático. Una mirada desde la Teoría Socioepistemológica: el caso de la proporcionalidad y sus repercusiones en el aula. En D. Veiga (Ed.), *Actas de la X Conferencia de Educación Matemática* (pp. 1-10). https://tinyurl.com/2t3fc9ks

LAS EMOCIONES EPISTÉMICAS Y LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS PRESENTES EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS: UNA PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN

Ricardo Neftalí Ramírez Osorio, Universidad del Valle Luis Cornelio Recalde Caicedo, Universidad del Valle

David Maximiliano Gómez Rojas, Universidad de O'Higgins

Abstract:

Buscando aportar al mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el área del álgebra, se toma como referencia algunos resultados establecidos desde la neuroeducación, la incidencia de las emociones relacionadas con la adquisición de conocimiento (emociones epistémicas) y los conocimientos previos que, se identifican a través de la historia, impiden el avance a nuevos conocimientos (obstáculos epistemológicos). A través de instrumentos de evaluación emocional se medirá el nivel de ansiedad matemática que presentan los estudiantes, antes y después de realizar las actividades matemáticas, diseñadas con el propósito de inducir estrategias para franquear obstáculos epistemológicos en la resolución de ecuaciones. El segmento de investigación son estudiantes adolescentes de grado octavo de una institución educativa oficial en Cali, Colombia. En la investigación se busca desarrollar una propuesta de actividades de aula que puedan ser utilizadas por los docentes como estrategia didáctica, tomando como referencia los aspectos emocionales para generar motivación en el proceso de aprendizaje del álgebra, desde el reconocimiento de la relación entre las emociones epistémicas y los obstáculos epistemológicos identificados a través del desarrollo histórico de las matemáticas.

Neuroeducación, motivación, emociones epistémicas, obstáculos epistemológicos, álgebra

INTRODUCCIÓN

Desde el año 2000 hasta el año 2022, los resultados de la prueba internacional Programme for International Student Assessment [PISA] permiten evidenciar el bajo rendimiento de estudiantes latinoamericanos en las áreas de Lectura, Matemáticas y Ciencias, en países que pertenecen a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE] (OCDE, 2023).
Muchos autores, como Casas (2012, citado en Lárez, 2018), sustentan que las matemáticas se tornan muy difíciles y aburridas, pues al enseñar conceptos descontextualizados se genera una brecha emocional entre los saberes y los/las estudiantes. En particular, el álgebra se reconoce como una materia que presenta las mayores dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje, generando una actitud negativa, en la mayoría de los/las estudiantes, lo cual repercute negativamente en el proceso de aprendizaje.

Uno de los aspectos novedosos en el campo investigativo, provenientes de los desarrollos de las neurociencias, tiene relación con el aspecto motivacional. Así, los/las estudiantes con una inteligencia emocional sólida tienden a obtener mejor rendimiento académico debido a su mayor capacidad de regulación de emociones (Otero Martínez et al., 2009). En concordancia con esto, Parra García (2019) plantea que educar desde la emoción es una de las claves para generar experiencias de aprendizaje significativas.

El presente trabajo se propone investigar la relación entre el desempeño en actividades algebraicas y las emociones que estudiantes de octavo grado sienten en relación con la matemática. Este vínculo ha sido estudiado considerando desempeño matemático general (Muis et al., 2015), pero la literatura es escasa en relación con el aprendizaje algebraico específicamente.

ELEMENTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

En algunas investigaciones se muestra que muchos estudiantes que enfrentan el aprendizaje del álgebra presentan desinterés y desmotivación. Como lo indica Shore (2005, citado en Rossnan, 2006), las matemáticas, con especial énfasis el álgebra, generan dificultades en su aprendizaje (Jupri et al., 2014); más que cualquier otra asignatura, engendra ansiedad y evasión en los estudiantes; esto es algo que se puede convertir en un temor que puede durar toda la vida si no se hace nada por evitarlo, tal como sustentan Mato et al. (2014, citados en Lárez Villaroel, 2018). En búsqueda de superar las dificultades emocionales y comprender los estadios que vive un estudiante al enfrentarse al aprendizaje de las matemáticas, se focalizó el estudio en las emociones, relacionadas con la adquisición de conocimientos, conocidas como: **emociones epistémicas**. Muis et al. (2015) presentan siete categorías para las emociones epistémicas que inciden directamente en la construcción del conocimiento matemático: *Sorpresa, Curiosidad, Confusión, Frustración, Ansiedad, Aburrimiento y Disfrute*.

Desde 1978, las investigaciones de Sheila Tobias (descritas por Carmo & Simionato, 2012) han ayudado a identificar y caracterizar, en los estudiantes que experimentan procesos de aprendizaje en matemáticas, reacciones fisiológicas (postura tensa y desagradable, expresión facial cansada, movimientos desorientados, dolores de cabeza, trastornos del estómago, manos pegajosas, entre otros), y reacciones conductuales y cognitivas (imposibilidad de escape, separación de apoyos (familiares o de amigos cercanos), anticipación del castigo), que conllevan en su entorno de aprendizaje, distracciones y acciones que los alejan de un proceso que les ayude a desarrollar sus competencias matemáticas. Estas reacciones y comportamientos determinan un estado emocional aversivo, llamado **ansiedad matemática**. El control coercitivo, las metodologías de enseñanza inadecuadas, la insuficiente formación básica y continua del profesorado, y los factores culturales y familiares contribuyen a generar el cuadro de ansiedad extrema en relación con las matemáticas (Carmo & Simionato, 2012). Este estado aversivo, desarrollado en los/las estudiantes, afecta directamente en su rendimiento académico a lo largo de su escolaridad y su vida adulta (Rossnan, 2006); incluso puede dar lugar a la pérdida de la confianza en sí mismo (Tobias, 1993, citado en Rossnan, 2006); tendrá dificultades para concentrarse y realizar las actividades a-didácticas e, incluso, puede presentar agresividad y afectar su salud, entre otras reacciones. Por ejemplo, puede presentar taquicardia al presentar los exámenes de matemáticas, (Carmo &

Simionato, 2012); y lo más grave, los/las estudiantes pueden caer en un ciclo autodestructivo y autoperpetuante (Baroody y Costlick, 1998, citado en Rossnan, 2006). Las reacciones emocionales negativas a situaciones que requieren el uso de conocimientos matemáticos se desarrollan como resultado de experiencias inadecuadas al aprender matemáticas en el contexto escolar y en el hogar (Carmo & Simionato, 2012; Rossnan, 2006); situaciones que deseamos superar a través del desarrollo de emociones positivas que motiven el aprendizaje de las matemáticas. Partimos de la hipótesis que un trabajo continuado de las habilidades de expresión, comprensión y regulación emocional puede mejorar la atención, la motivación y, en consecuencia, el rendimiento académico de los alumnos (Otero Martínez et al., 2009).

Como se puede notar, el contexto educativo está permeado de intensas experiencias emocionales que afectan el proceso de aprendizaje y, por consiguiente, el rendimiento (o desempeño) académico, influyendo en el crecimiento personal del estudiante (Pekrun et al., 2007).

Al escenario anterior, se vinculan las dificultades cognitivas en el aprendizaje del álgebra, que a través de los años se han identificado y presentado a la comunidad académica, en particular, comprender las dificultades en la resolución de ecuaciones algebraicas. Es el caso de los **obstáculos epistemológicos**, conocimientos que bajo cierto contexto son válidos pero que, en contextos más amplios, obstaculizan la construcción de nuevos conocimientos (Duroux, 1983; Spagnolo, 1996, citados en Malisani, 1999).

En sus investigaciones, el matemático Guy Brousseau logró definir las relaciones existentes entre el saber, el alumno, el docente y el entorno, conocido como el Tetraedro didáctico. Esto ha permitido definir características, estructuras, obstáculos, recursos, enfoques, entre otros, que orienten propuestas educativas en búsqueda de procesos de enseñanza y aprendizaje significativos. Para nuestro caso, nos centramos en el problema de resolución de ecuaciones, reconociendo los obstáculos epistemológicos en el pasaje del campo aritmético al campo algebraico. Así, el objetivo del presente trabajo es relacionar los niveles de ansiedad matemática de estudiantes de octavo grado con su desempeño en actividades matemáticas que involucren estos obstáculos epistemológicos.

ESTRATEGIA METODOLÓGICA

Se tomará como objeto de estudio un grupo de estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa General José María Cabal, los cuales cursan la asignatura Álgebra dentro de la propuesta curricular institucional. Se determinará el grado de ansiedad matemática presente en los estudiantes considerando instrumentos de medición de la ansiedad matemática como rasgo (Núñez-Peña et al., 2013) y como estado (Orbach et al., 2020) antes y después de que los estudiantes se enfrenten a las actividades propuestas, asumiendo las experiencias y gestionando procesos cognitivos que permitan resolverlas.

RESULTADOS ESPERADOS

Esta estrategia metodológica nos permitirá hacer un análisis sobre los efectos de enfrentar actividades matemáticas en el marco de los obstáculos epistemológicos en el álgebra y medir su relación con la

ansiedad matemática experimentada, a saber: 1. Medir los niveles de ansiedad matemática como rasgo y como estado vinculados a enfrentar las actividades matemáticas; 2. Comparar los desempeños demostrados en las actividades matemáticas entre estudiantes con niveles bajos y altos de ansiedad matemática, tanto como rasgo y como estado; 3. Comparar los niveles de ansiedad matemática entre estudiantes con desempeños bajo y alto en las actividades matemáticas.

CONCLUSIONES

En concordancia con Parra, educar desde la emoción es la clave para generar experiencias de aprendizaje significativas (Parra García, 2019). El reconocimiento de la incidencia de un estado emocional como la ansiedad matemática nos permitirá tomar rutas que disminuyan sus efectos negativos en el aprendizaje de las matemáticas, en particular, el estudio de obstáculos epistemológicos en el álgebra. Tener este tipo de orientaciones esperamos que nos permitan sugerir la realización de situaciones que aporten a la motivación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje del álgebra.

REFERENCIAS

Carmo, J. dos S., & Simionato, A. M. (2012). Reversão de ansiedade à matemática: Alguns dados da literatura. *Psicologia Em Estudo, 17(2)*, 317–327.

Jupri, A., Drijvers, P., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal*, *26(4)*, 683–710.

Lárez Villaroel, J. D. (2018). Algunos obstáculos que imposibilitan el aprendizaje efectivo de la matemática. *Investigación y Postgrado, 33(1)*, 53–74.

Malisani, E. A. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico.
Visión histórica. *Revista IRICE*, *13*, 105–132.

Muis, K. R., Psaradellis, C., Lajoie, S. P., Di Leo, I., & Chevrier, M. (2015). The role of epistemic emotions in mathematics problem solving. *Contemporary Educational Psychology*, *42*, 172– 185.

Núñez-Peña, M. I., Suárez-Pellicioni, M., Guilera, G., & Mercadé-Carranza, C. (2013). A Spanish version of the short mathematics anxiety rating scale (sMARS). *Learning and Individual Differences*, *24*, 204-210.

OECD (2023), PISA 2022 Results (Volume II): Learning During – and From – Disruption, PISA, *OECD Publishing*, Paris.

Orbach, L., Herzog, M., & Fritz, A. (2020). State-and trait-math anxiety and their relation to math performance in children: The role of core executive functions. *Cognition, 200, 104271*.

Otero Martínez, C., Martín López, E., León del Barco, B., & Vicente Castro, F. (2009). Inteligencia emocional y rendimiento académico en estudiantes de enseñanza secundaria. Diferencias de género. *Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación*, *17(1)*, 275–284.

Parra García, S. C. (2019). Aprendiendo desde la emoción. *Infancias Imágenes*, *18(2)*, 285–294.

Pekrun, R., Frenzel, A. C., Goetz, T., & Perry, R. P. (2007). The control-value theory of achievement emotions: An integrative approach to emotions in educations. *Emotion in education*, 13-36.

Rossnan, S. (2006). Overcoming math anxiety. *Mathitudes, 1(1),* 1–4.

MODELO DE TRANSFORMACIÓN DE LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, PARA SU APRENDIZAJE

Patricia Rojas Salinas

parojas@ubiobio.cl

Abstract:

La escases de relaciones entre los Objetos matemáticos Derivada e Integral es uno de los problemas del su aprendizaje y su enseñanza en todos los niveles. Esta "Comunicación", plantea una Descomposición Genética (DG) y la construcción de un Esquema, describiendo relaciones entre los conceptos, para que su uso permita su trabajo (Enseñanza y aprendizaje) en simultáneo. Su estudio se basa en la teoría APOE, en su uso, se observó la forma en que los estudiantes muestran evidencia de las estructuras conforme aprenden, y las relaciones entre los mecanismos de abstracción reflexiva; se caracterizaron los estudiantes de un curso de ingeniería, exhibiendo, el tipo de relación que muestran en cada uno de los niveles del Esquema ya sea este nivel: Intra- CDI, Inter-CDI o Trans-CDI. Entre los resultados se encontró que los estudiantes comprendieron que el valor de la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto, que el análisis de la derivada de una función requiere de información tanto analítica como gráfica, que se puede usar técnicas directas para aproximar a la gráfica de una función,

reconociendo siempre a la derivada como una razón de cambio y el reconocimiento de la íntima relación entre la integral y la derivada

[Esquema, Cálculo, Derivada, Integral, Teoría APOE.]

INTRODUCCIÓN

Vasta literatura muestra la dificultad de los estudiantes para comprender los conceptos abstractos del cálculo diferencial e integral, además, de su dificultad para aplicarlos en la solución de distintos problemas cotidianos (Tatar & Zengin, 2016; Bresoud, 2017; Wagner, 2018; Pino-Fan, et al., 2018; Fuentealba, et al., 2019). Los autores, ponen de manifiesto que los estudiantes presentan dificultades importantes frente al aprendizaje del cálculo diferencial e integral y que, cuando terminan de cursar, los conceptos de derivada y de integral que construyen quedan compartimentalizados, es decir, no construyen relaciones claras entre ellos. Es por eso necesario intentar acercamientos entre dichos conceptos con nuevos diseños didácticos. Presentamos entonces, una contribución a la literatura que consiste y tiene como objetivo diseñar y analizar una propuesta didáctica en la que se establecen relaciones simultáneas entre estos dos conceptos que dan origen al cálculo diferencial e integral valorando la evolución del Esquema del Cálculo Diferencial e Integral. Se diseñó una Descomposición Genética que permite el diseño de la propuesta didáctica y de actividades para que los estudiantes trabajen durante todo un curso, basados en la Teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) de la educación matemática que cuenta con las estructuras teóricas y una metodología asociada a ellas para llevar a cabo el trabajo completo de diseño e investigación (Arnon, et al., 2014).

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE parte del análisis de los conceptos matemáticos, haciendo hincapié en las construcciones cognitivas necesarias para el aprendizaje. Toma como referencia las ideas que plantea Piaget en torno a cómo el estudiante pasa de un estado de conocimiento a otro (Dubinsky 1996; Czamocha, et al., 2001). La teoría se preocupa por cómo se aprenden y enseñan las Matemáticas, estudiando cómo los estudiantes cambian de un nivel de conocimiento a otro; en este contexto, la definición que la teoría APOE presenta para el conocimiento matemático es: "*El conocimiento Matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas, problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas*" (Dubinsky, 1996, p. 32). Por su parte, los mecanismos de construcción de este conocimiento están basados en la noción de "*abstracción reflexiva*" de Piaget (Trigueros, 2005).

La estructura de Esquema se define como una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas y las relaciones entre ellos de manera que, para el estudiante forman una estructura coherente (Arnon, et al., 2014). Los Esquemas son dinámicos, evolucionan, según las relaciones que se construyan entre los conceptos. La descripción de esta evolución se hace mediante la "Triada" de Piaget y García (1982), que corresponde a una progresión de tres niveles: Intra-, Inter- y Trans- de estructuración. En la teoría APOE el Esquema se utiliza para hacer las descripciones del conocimiento matemático a otro nivel de generalidad (Arnon, et al., 2014).

METODOLOGÍA

Se realizó un estudio cualitativo de carácter exploratorio (Hernández, et al., 2014), puesto que la investigación se centra en el diseño de una Descomposición Genética (DG) de derivadas e integrales "en simultáneo", es decir, a construirse conjuntamente permitiendo generar un Esquema de la matemática muy distinto a lo disponible actualmente en la mayoría de las instituciones. El Esquema y sus niveles Intra- CDI, Inter- CDI y Trans-CDI pueden ser revisados en Rojas y Trigueros (2020).

Esta descomposición genética es original. Con este diseño se planificó y diseñó la propuesta de aula con actividades para llevar a cabo en clases usando diversos dispositivos; Al finalizar el curso se realizó una entrevista individual a los 17 estudiantes de ingeniería que cursaron la asignatura.

RESULTADOS

El análisis de las entrevistas detalló para cada estudiante el tipo de concepción que muestra en términos de la teoría APOE, el tipo de relación existente en cada una de las cuestiones consultadas y la relación dada por la construcción del esquema que ha evocado en ese momento. Para efecto de esta comunicación se presenta un resumen de las cuestiones encontradas mostrando la caracterización del análisis respectivo basado en cada uno de los niveles del Esquema, señalando si los estudiantes se encuentran en un nivel Intra- CDI, Inter- CDI o Trans-CDI según corresponda.

Seis alumnos mostraron evidencia de haber desarrollado su Esquema a un nivel Intra -CDI. Sus respuestas muestran que todos ellos interpretan la derivada como una razón de cambio y que han construido la relación de la derivada con la pendiente de la recta tangente, como Procesos u Objetos aislados de la integral la que interpretan como antiderivada también como Proceso u Objeto. Seis alumnos mostraban evidencia del nivel Inter– CDI del Esquema. Evidencian haber construido las interpretaciones de la derivada y la anti-derivada como transformaciones inversas una de la otra, y una clara interpretación de la relación entre ellas en la definición que entregan para la integral. Al construir la derivada, los alumnos la relacionan con un ritmo de cambio, aplican la transformación que han realizado de la derivada como inversa de la integral construyéndola como una función que se puede denominar primitiva que corresponde a la función inversa de la razón de cambio y que consideran en la solución de problemas como equivalente a encontrar la posición de un cuerpo conociendo su velocidad, o a encontrar una función a partir del conocimiento de la pendiente de tangente a su gráfica. Solo un estudiante, mostró evidencia de haber desarrollado el Esquema al nivel Trans – CDI; en su trabajo se observan una evolución más rápida del Esquema.

CONCLUSIONES

A lo largo de la investigación se obtuvo evidencia de la evolución del Esquema (CDI), identificando las tres etapas de su evolución. La propuesta didáctica planteada en la construcción del Esquema del Cálculo Diferencial e Integral (CDI) permite a los estudiantes oportunidades para reflexionar sobre las estructuras que lo componen, observando al Cálculo Diferencial e Integral como un todo. El uso de la teoría APOE permite entre otras cosas entender como un estudiante transita de un nivel de conocimiento al otro; esto trae como consecuencia un insumo para que el profesor diseñe un nuevo modelo para el proceso de Enseñanza y Aprendizaje. Se puede usar en niveles de educación media como también en la Universidad.

Referencias

Arnon, I., Cotrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory. *A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Bressoud, D., Mesa, V., & Rasmussen, C. (2017). *Insights and recommendations from the MAA National Study of College Calculus*. New York: MAA Press.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, .. ,., & Vidakovic, D. (2001). Conceptions of area in students and history . *The College Mathematics Journal, 32*(2), 99- 109.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24-41.

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoro, G., & Cárcamo, A. (2019). The Understanding of the Derivative Concept in Higher Education . *Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2).pp:1- 15. ISSN:1305-8223 (online) https://doi.org/10.29333/ejmste/100640

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. (2014). (6a Edición)*Metodología de la Investigación*. McGraw Hill: México D.F.

Piaget, J., & García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Siglo XXI.

Pino-Fan, L. R., Gordillo, W., Font, V., Larios, V., & Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of antiderivative used by tudents of the first engineering courses. *International Journals of Science and Mathematics Education, 16*(6), 1091- 1113.

Rojas y Trigueros (2020). El esquema del Cálculo Diferencial e Integral para ser enseñado en simultáneo. *Revista electrónica de investigación en Educación en Ciencias, 15*(2), 12-26.

Tatar, E., & Zengin, Y. (2016). Conceptual Understanding of Definite Integral with GeoGebra, Computers in the Schools. *Theory, and Applied Research, 33* (2), 120-132.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática, 17*(1), 5-13.

Wagner, J. F. (2018). Student' obstacle in using Riemann um interpretations of the definite integral. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4* (3), 327- 256.

TALLERES

Demanda cognitiva de tareas matemáticas
No todas las tareas son creadas iguales (Stein et al, 2000). Distintos tipos de tareas ofrecen diferentes oportunidades de pensar y razonar. A su vez, el tipo y profundidad de razonamiento determinan las ganancias de aprendizaje de los estudiantes. Por ende, escoger cuidadosamente las tareas matemáticas a utilizar es probablemente la decisión más importante que un/a docente debe tomar en consideración. El presente taller sigue un enfoque de desarrollo profesional docente basado en tareas, desde el Modelo de demandas cognitivas, al cabo del cual podrán distinguir y clasificar actividades matemáticas según su nivel de demanda, además de reflexionar sobre las prácticas que permiten sostener una alta demanda en el trabajo matemático dentro del aula.
Facilitadores: Leonardo Medel Contreras, Universidad San Sebastián
Carolina Durán Sierra, Universidad San Sebastián

Mirada profesional docente en la habilidad de argumentación
El taller busca problematizar la mirada docente sobre la argumentación en matemáticas, abordando temas clave como la mirada profesional y la formación. A través del estudio de casos, los participantes analizarán videos y realizarán actividades para reflexionar sobre su práctica y desarrollar una comprensión crítica de la argumentación en el aula matemática. Está dirigido a docentes interesados en mejorar su práctica y profundizar en la argumentación matemática.
Facilitadores: Sara Rivera Herreros, Universidad Católica de la Santísima Concepción
Kurt Mursell Montenegro, Pontificia Universidad Católica de Chile
Horacio Solar, Pontificia Universidad Católica de Chile

Diseño de situaciones didácticas con fichas algebraicas como recurso tangible para la enseñanza y el aprendizaje de operaciones algebraicas en el contexto escolar
En los últimos años, diversos acontecimientos han impactado el contexto educativo chileno, poniendo a prueba las herramientas y habilidades de los docentes de matemáticas. Dado que el álgebra es un área extensa y, a menudo, poco afable para los estudiantes, es fundamental desarrollar propuestas didácticas que rompan con la pedagogía tradicional, mecánica y basada en la memorización.
En este contexto, la presente investigación busca, mediante la ingeniería didáctica, diseñar situaciones que faciliten la comprensión y resolución de operaciones algebraicas. Para ello, se emplea la manipulación de material concreto, con el objetivo de que los estudiantes redescubran estrategias simbólicas, pictóricas y concretas para resolver dichas operaciones.
Facilitadores: Mario González, Universidad Arturo Prat

Judith Zárate, Universidad Arturo Prat
Juan José Núñez, Universidad Arturo Prat

Significados y niveles de comprensión de la derivada. Implicaciones para su enseñanza en educación media

En el nivel de educación media, los profesores de matemáticas no siempre disponen de los materiales y orientaciones curriculares necesarias para llevar a cabo la enseñanza del concepto de derivada de una manera eficiente. Este taller se presenta como una oportunidad de formación para profesores de matemáticas que tratan con este concepto hacia el término de la enseñanza media. La propuesta plantea la resolución de tareas para los profesores, orientadas al uso de información teórica proveniente de investigaciones en Educación Matemática sobre el aprendizaje de la derivada de una función en un punto, ofreciendo la oportunidad de conocer, vivir y compartir experiencias pedagógicas al momento de resolver colectivamente estas tareas.

Facilitadores: Alan Pizarro-Ayavire, Universidad Arturo Prat
Juan Luis Prieto-González, Universidad Arturo Prat
Rafael Enrique Gutiérrez-Araujo, Asociación Aprender en Red

Integrando el pensamiento computacional en el aula matemática a través del uso de robots pequeños

Este taller tiene como propósito explorar el lenguaje de programación del robot Blue-bot y las posibilidades de uso para el desarrollo del pensamiento computacional en la asignatura de matemáticas. Para alcanzar este objetivo los participantes resolverán y analizarán en equipo diversos problemas robóticos, identificando los conceptos y/o habilidades computacionales que se trabajan y discutiendo sobre las características de los problemas resueltos. Al finalizar el taller se espera que logren comprender la idea de problema robótico, identificar las características de los problemas que se pueden diseñar para integrar el pensamiento computacional en la asignatura de matemáticas.

Facilitadores: María José Seckel Santis, Universidad Católica de la Santísima Concepción
Claudia Vásquez Ortiz, Pontificia Universidad Católica de Chile

---

Co-enseñanza en el aula matemática: sumando saberes y multiplicando experiencias

Considerando la co-enseñanza a partir de sus distintos modelos como una forma de atender a la diversidad en el aula, y el fenómeno de exclusión que caracteriza particularmente a la

clase de matemática, se propone una experiencia que busca compartir vivencias de co-enseñanza asociadas a esta disciplina. A partir del cuestionamiento de los roles que asume cada participante de un proceso de co-enseñanza y la reflexión en torno a la resistencia que aún se observa en docentes al trabajo colaborativo, se espera diseñar y evaluar propuestas breves de actividades en equipos interdisciplinarios para el aprendizaje de conceptos algebraicos a partir de criterios identificados colectivamente con el fin de promover una co-enseñanza para un aula de matemática inclusiva.
Facilitadores: Paula Rodríguez Retamal, Colegio Leonardo Da Vinci
Paloma Villamandos Soto, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

---

Pensamiento funcional en alumnos de 3 a 8 años
Este taller está dirigido a educadoras de párvulos y profesores de 1ero y 2do básico. En él abordamos el análisis y diseño de tareas algebraicas desde un enfoque funcional, que pueden ser trabajadas desde los 3 años. Estas tareas son parte de un proyecto de investigación desarrollado en España en el que participan las autoras de este trabajo. El objetivo de este proyecto es trabajar distintos componentes del pensamiento algebraico con alumnos de educación infantil y primaria. Nos centramos aquí en el pensamiento funcional, con el objetivo de que el profesorado analice distintas tareas de generalización que involucran funciones que pueden ser realizadas en el aula. Organizamos el taller en tres bloques. En el primero, presentamos diferentes investigaciones de estos niveles educativos. En el segundo bloque, proponemos diversas tareas para su análisis. Por último, abordamos el diseño de actividades y su desarrollo en el aula.
Facilitadores: Sandra Fuentes, Universidad de Granada, España
Romina Narváez, Universidad Autónoma de Chile
Lourdes Anglada, Centro de Magisterio María Inmaculada de Antequera, España
María C. Cañadas, Universidad de Granada, España

Algoritmos combinatorios del pasado: una oportunidad para el presente
Al observar la evolución histórica de la Combinatoria se pueden encontrar diferentes artefactos, procedimientos y representaciones que favorecieron el desarrollo de esta área de la Matemática. Las cuales pueden ser observadas desde los componentes del Pensamiento Computacional (descomposición, abstracción, diseño de algoritmos, depuración, iteración y generalización), a fin de separar en momentos este desarrollo, mirar en profundidad, y hacer una propuesta de cómo secuenciar la enseñanza de objetos combinatorios. Esto se llevará a discusión en el taller, no solo en cuanto a lo utilizado en la historia, sino que la presentación y creación de material unplugged que pueden ser utilizado en aula, asociado al currículo

común como al electivo de III o IV Medio.
Facilitador: Patricio Santibáñez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

---

Reflexiones sobre una propuesta de aula para introducir el concepto de límite de sucesiones
El presente taller tiene como objetivo introducir el concepto de límite de sucesiones en estudiantes de enseñanza media haciendo uso de diversas tecnologías digitales. La situación elegida, llamada "Tamaño de la pupila ante distintos niveles de iluminación", se modela a través de una sucesión que converge cuando "n" tiende a infinito. Los participantes podrán realizar las tareas matemáticas de interpretación gráfica de una sucesión y análisis de su comportamiento por medio de una tabla de valores, mediante diferentes herramientas tecnológicas, para reconocer la recta a la cual se aproxima la sucesión y describir de manera verbal el valor del límite de una sucesión en el infinito.
Facilitadores: Cristián Bustos Tiemann, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Elisabeth Ramos Rodríguez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

---

Experimentando la modelación matemática para el aula de educación básica
La modelación matemática es una herramienta poderosa para el aprendizaje de la matemática, fomenta el pensamiento crítico y la capacidad para resolver problemas reales utilizando medios matemáticos. Sin embargo, su implementación en el aula sigue siendo limitada debido, en parte, a las dificultades que enfrenta el profesorado. Este taller pretende dotar al profesorado en ejercicio y en formación de herramientas para seleccionar y/o diseñar e implementar en sus aulas tareas que la involucren. Para ello se simulará ser estudiantes de entre 6 y 8 años, profundizando en las características y las fases del proceso de modelación matemática. Se espera que el profesorado participante modifique positivamente su conocimiento sobre modelación matemática y fortalezcan sus habilidades para seleccionarlas y/o diseñarlas e implementarlas en sus aulas.
Facilitadoras: Bárbara Bustos-Osorio, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Elisabeth Ramos-Rodríguez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

---

Produciendo materiales escritos con criterios de accesibilidad
Este taller, dirigido a docentes y estudiantes de Enseñanza de la Matemática, tiene un enfoque práctico y busca sensibilizar sobre la importancia de la inclusión, así como promover la incorporación de las pautas del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) en la creación de materiales didácticos escritos. Para participar, los asistentes deben tener habilidades

tecnológicas para usar Windows 7 o superior y disponer de una computadora. El objetivo principal del taller es proporcionar herramientas que permitan a los participantes elaborar y modificar materiales escritos para que contemplen criterios de accesibilidad, así como compartir experiencias sobre los desafíos al producir estos materiales.
Facilitadoras: Daniela Araya Román, Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica
Evelyn Alfaro Vargas, Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica

---

Cuestiones de género en el planteamiento de problemas verbales de estructura multiplicativa
El taller que proponemos está centrado en los nexos entre los estereotipos de género y los problemas de estructura multiplicativa que se plantean a estudiantes de educación básica. A lo largo del taller, los docentes explorarán cómo los enunciados y las figuras asociadas a estos problemas pueden reflejar y reforzar estereotipos de género, afectando la percepción que estudiantes y docentes tienen sobre su rol en la sociedad a partir de diferencias de género. Se enfocará en los tres tipos de problemas multiplicativos propuestos por Vergnaud: isomorfismo de medidas, un solo espacio de medida y producto de medidas. El objetivo es propiciar una reflexión con los docentes sobre cómo desarrollar habilidades profesionales para crear problemas que eviten sesgos de género. El taller busca promover una enseñanza matemática más inclusiva y libre de estereotipos.
Facilitadores: Natalia Chacón-Bravo, Universidad Arturo Prat
Beatriz Valenzuela-Bacho, Universidad Arturo Prat
Juan Luis Prieto-González, Universidad Arturo Prat

Tareas abiertas en un entorno digital para el desarrollo del ETM colectivo
Este taller se enfoca en desarrollar un Espacio de Trabajo Matemático (ETM) Colectivo a través de tareas abiertas en un entorno tecnológico. A través de la discusión sobre la implementación de tareas abiertas en educación matemática, se explora cómo la interacción entre estudiantes mejora la comprensión de conceptos matemáticos. Utilizaremos tecnología y sistemas de evaluación en línea para facilitar este proceso. Los profesores experimentarán directamente con tareas diseñadas para promover el ETM colectivo, preparándolos para adaptar estas estrategias en sus propios contextos educativos.
Facilitadores: Jorge Gaona, Universidad de Playa Ancha
Catalina Palacios Bezama, Universidad de Playa Ancha

POSTER

Innovación pedagógica para mejorar el aprendizaje matemático y las habilidades transversales en estudiantes recién admitidos en la Facultad de Matemáticas

Mahsa Allahbakhshi
Pontificia Universidad Católica de Chile

Introducción

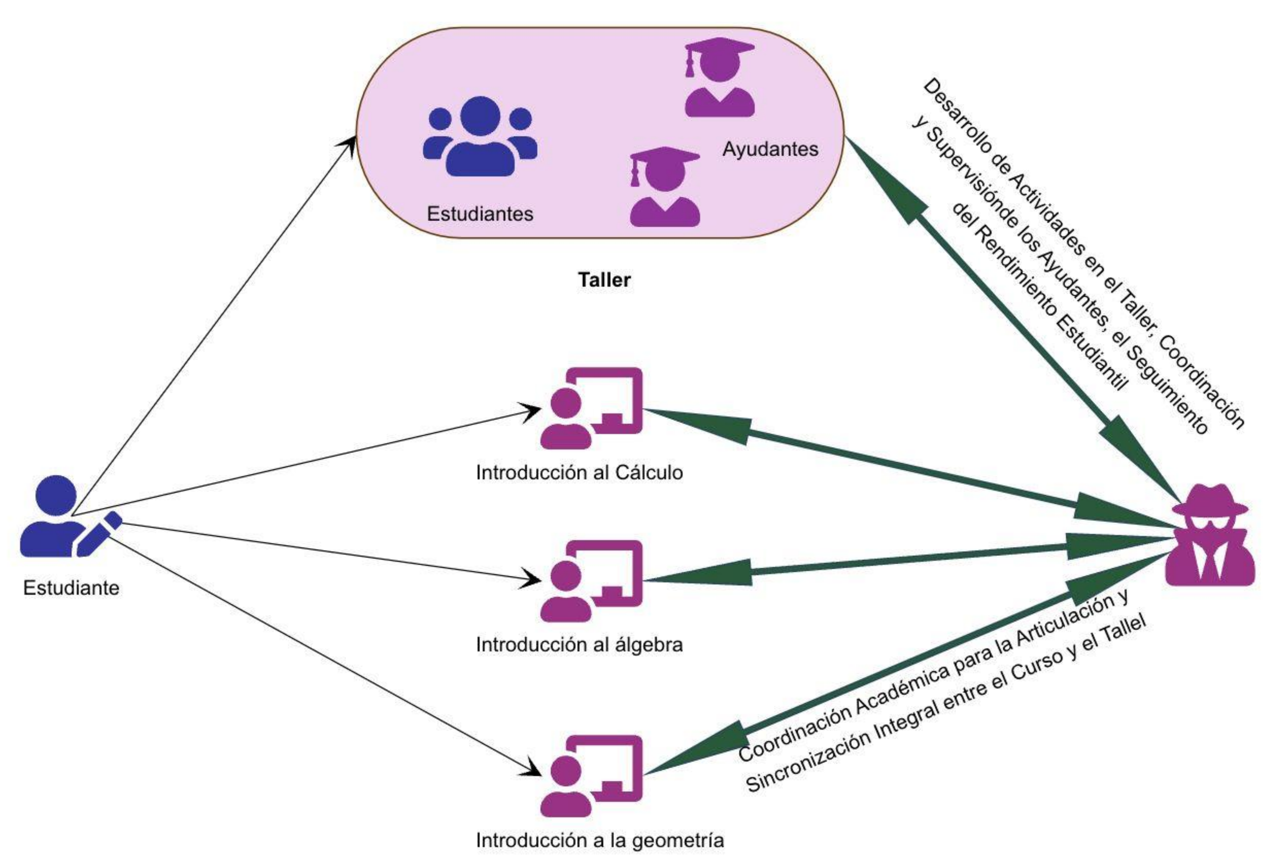
Este estudio presenta un enfoque interdisciplinario de aprendizaje activo implementado en la Universidad Católica de Chile para mejorar la comprensión matemática y las habilidades transversales de estudiantes recién admitidos en la Facultad de Matemáticas. A través de metodologías integradas de matemáticas, lingüística y psicología, se busca fortalecer competencias como el pensamiento crítico, la colaboración y la comunicación efectiva, esenciales para la transición exitosa al entorno universitario.

Problema

El aprendizaje activo ha demostrado ser efectivo para mejorar el rendimiento académico en matemáticas, reduciendo además las brechas de rendimiento entre grupos subrepresentados (Theobald et al., 2020). La metacognición, que involucra la autorregulación del aprendizaje, es crucial para desarrollar estrategias de resolución de problemas, como lo señala Kapur (2015) en su enfoque de "fracaso productivo". Por último, la colaboración en el aprendizaje, según Osborne et al. (2004), potencia la argumentación matemática y habilidades transversales como el pensamiento crítico y el trabajo en equipo. En 2018, la Facultad de Matemáticas implementó talleres de matemáticas con el fin de mejorar la retención estudiantil, pero estos enfoques carecían de una integración adecuada de pedagogías activas que promuevan el pensamiento de orden superior (CBMS, 2016).

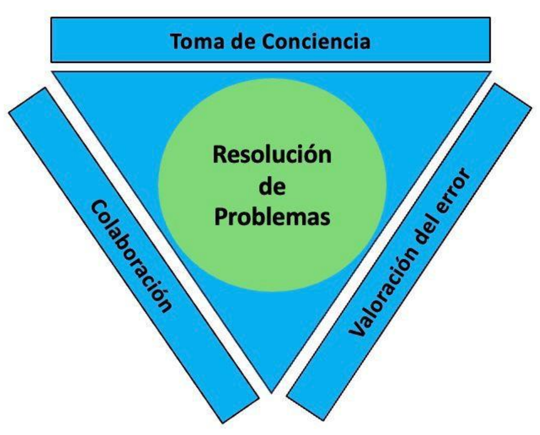
Antecedentes

El aprendizaje activo ha demostrado ser efectivo para mejorar el rendimiento académico en matemáticas, reduciendo además las brechas de rendimiento entre grupos subrepresentados (Theobald et al., 2020). La metacognición, que involucra la autorregulación del aprendizaje, es crucial para desarrollar estrategias de resolución de problemas, como lo señala Kapur (2015) en su enfoque de "fracaso productivo". Por último, la colaboración en el aprendizaje, según Osborne et al. (2004), potencia la argumentación matemática y habilidades transversales como el pensamiento crítico y el trabajo en equipo. En 2018, la Facultad de Matemáticas implementó talleres de matemáticas con el fin de mejorar la retención estudiantil, pero estos enfoques carecían de una integración adecuada de pedagogías activas que promuevan el pensamiento de orden superior (CBMS, 2016).



Método

Se implementaron actividades interdisciplinarias en los talleres con un enfoque de aprendizaje activo, integrando conocimientos de matemáticas, lingüística y psicología. Los estudiantes no solo fueron organizados en grupos para trabajar colaborativamente, sino que también se les proporcionaron guías y lecturas específicas sobre el trabajo en equipo, para fomentar una comprensión más estructurada del proceso colaborativo.



Las encuestas auto informadas no solo midieron habilidades cognitivas y emocionales, sino que también funcionaron como una herramienta de toma de conciencia para que los estudiantes reflexionaran sobre sus propias estrategias de colaboración y aprendizaje. Para evaluar la efectividad, se realizaron análisis de video de las interacciones grupales, evaluaciones de grupo y entrevistas semiestructuradas. Este enfoque permitió monitorear tanto el desarrollo académico como la conciencia social y emocional de los estudiantes durante el proceso colaborativo.

Resultados

La integración de metodologías de los departamentos de Matemáticas, Lingüística y Psicología mejoró significativamente el compromiso estudiantil y los resultados de aprendizaje. El enfoque interdisciplinario permitió desarrollar recursos especializados, como guías para la construcción de demostraciones matemáticas y la identificación de errores comunes, lo que fortaleció el razonamiento lógico y las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes. Las actividades de aprendizaje colaborativo, apoyadas por autoevaluaciones, fomentaron el trabajo en equipo y aumentaron la conciencia de los desafíos cognitivos, emocionales y sociales en la dinámica grupal. El curso, basado en talleres, proporcionó un entorno estructurado para la práctica de conceptos clave en Cálculo, Álgebra y Geometría, promoviendo la participación activa y el aprendizaje integrado. La dificultad progresiva de los ejercicios, junto con un proceso iterativo de tareas y retroalimentación, fortaleció la confianza y persistencia de los estudiantes. Además, el uso de cápsulas de video como herramienta de reflexión motivó a los estudiantes y facilitó una comprensión más profunda de los conceptos abstractos.

Conclusiones

El enfoque interdisciplinario demostró ser efectivo para mejorar el aprendizaje y el desarrollo de habilidades transversales en los estudiantes de primer año, al integrar estrategias cognitivas y socioemocionales. Sin embargo, se identificó la necesidad de mejorar la capacitación de los ayudantes, equipándolos con herramientas pedagógicas más robustas para gestionar dinámicas grupales y apoyar el desarrollo emocional de los estudiantes. Asimismo, la adaptación de los espacios físicos de aprendizaje es crucial para fomentar una mayor interacción y colaboración. Este estudio resalta el valor de un enfoque pedagógico innovador que, al combinar conocimientos de diversas disciplinas, ofrece una experiencia educativa más inclusiva y eficaz, preparando a los estudiantes para los desafíos académicos y profesionales futuros.

REFERENCIAS

Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., ... Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. Proceedings of the National Academy of Sciences, 111(23), 8410-8415.Theobald, E. J., Hill, M. J., Tran, E., Agrawal, S., Arroyo, E. N., Behling, S., ... Freeman, S. (2020). Active learning narrows achievement gaps for underrepresented students in undergraduate science, technology, engineering, and math. Proceedings of the National Academy of Sciences, 117(12), 6476-6483. Kapur, M. (2015). Learning from productive failure. Learning: Research and Practice, 1(1), 51–65.

Osborne, J., Erduran, S., Simon, S. (2004). Enhancing the quality of argumentation in school science. Journal of Research in Science Teaching, 41(10), 994-1020.Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS). (2016). Active learning in post-secondary mathematics education. Retrieved January 1, 2018, from https://www.cbmsweb.org/wp-content/uploads/2016/07/activelearningstatement.pdf

Una propuesta alternativa para la enseñanza prototípica del teorema de pitágoras

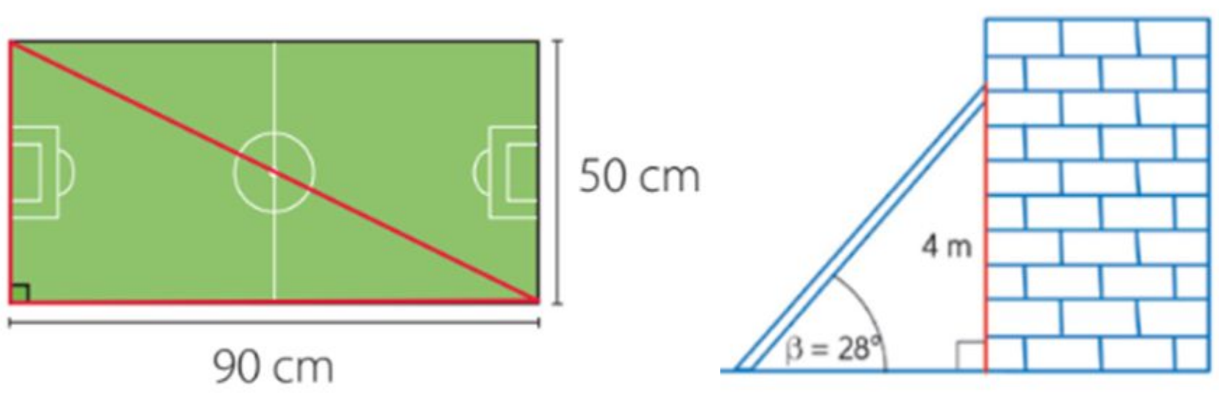
Jacobo Molina y Diego Silva

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE)

Introducción: El teorema de Pitágoras es un concepto fundamental en la geometría, tradicionalmente enseñado a través de representaciones prototípicas como triángulos rectángulos. Sin embargo, este enfoque puede limitar la comprensión completa del teorema y contribuir a concepciones erróneas entre los estudiantes. En respuesta a esta problemática, la presente propuesta explora la aplicación de la transposición didáctica de Chevallard (1997) para rediseñar la enseñanza del teorema de Pitágoras. El objetivo es implementar una metodología que permita a los estudiantes desarrollar una comprensión más flexible y aplicable del teorema, mediante el uso de diversos contextos y representaciones. Este enfoque no solo busca superar las limitaciones de los métodos tradicionales, sino también fomentar el desarrollo de habilidades críticas y creativas en la resolución de problemas matemáticos.

Antecedentes:

Los libros de textos suelen emplear repetidamente las mismas imágenes y ejemplos para la enseñanza del teorema de pitágoras.



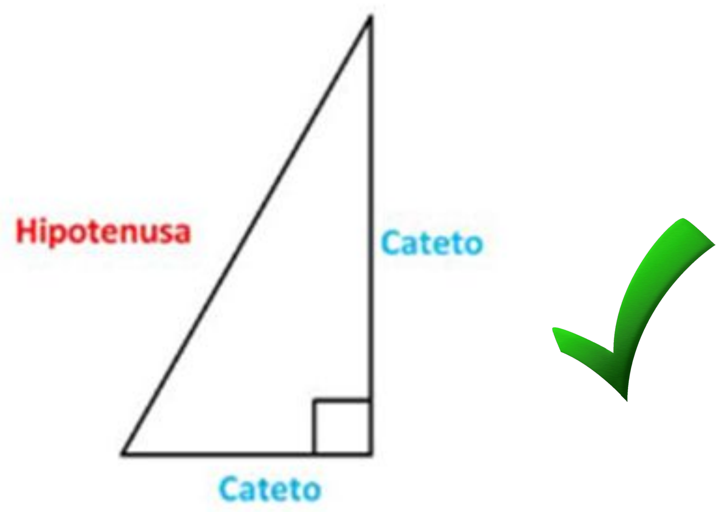
Santillana (2020). Libro del estudiante 8vo Básico
Santillana (2020). Libro del estudiante 2do Medio

Antecedentes:

Existe una tendencia entre los estudiantes a asumir que cualquier triángulo es rectángulo si su ángulo está ubicado sobre la base

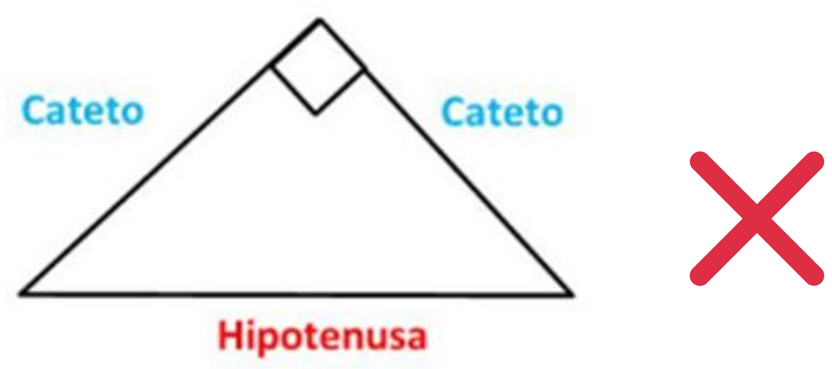
Problemática:

El uso reiterado de imágenes de triángulos que su ángulo está ubicado en la base.

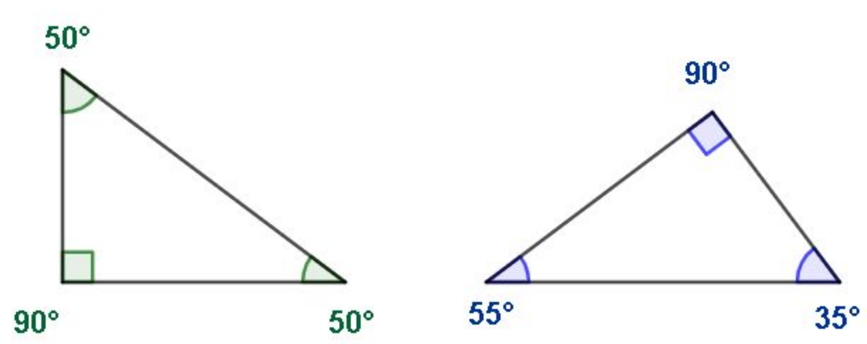


Propuesta:

Aplicar la transposición didáctica de Chevallard (1997) para rediseñar la enseñanza del teorema de Pitágoras, enfocándonos en transformar la comprensión de los estudiantes más allá de las figuras prototípicas convencionales. La propuesta se centrará en crear situaciones didácticas que presenten triángulos rectángulos en diferentes orientaciones y contextos, desafiando las ideas preconcebidas de los estudiantes. Además, se incorporarán estrategias que fomenten el pensamiento reflexivo, enfocándose en los procesos de validación y justificación matemática. Para ello, se utilizarán materiales concretos y herramientas digitales accesibles, facilitando la transición del conocimiento teórico a su aplicación práctica.



¿Cúal es un triángulo rectangulo?



Resultados esperados:

Se espera que los estudiantes adquirirán una comprensión más profunda y flexible del teorema de Pitágoras, permitiéndoles aplicarlo de manera efectiva en una variedad de contextos. Se anticipa una disminución en las concepciones erróneas, tales como la creencia de que un triángulo sólo es rectángulo si su ángulo recto está en la base. Además, los estudiantes desarrollarán habilidades mejoradas para justificar y argumentar sus respuestas, utilizando el teorema de forma crítica y creativa en situaciones diversas.

Reflexión:

El uso de un enfoque basado en la transposición didáctica de Chevallard (1997) para la enseñanza del teorema de Pitágoras representa un avance significativo en la didáctica de las matemáticas. Al incorporar una variedad de representaciones en lugar de las figuras prototípicas tradicionales, se fomenta una comprensión más profunda y flexible del teorema por parte de los estudiantes. Este enfoque no solo corrige concepciones erróneas comunes, sino que también promueve el desarrollo de habilidades críticas y argumentativas. Al capacitar a los estudiantes para aplicar el teorema de manera creativa y en diversos contextos, se subraya la importancia de conectar el conocimiento teórico con su aplicación práctica, preparándonos mejor para enfrentar y resolver problemas matemáticos con mayor rapidez y confianza en su comprensión.

REFERENCIAS

Texto del estudiante de matemáticas octavo básico (Editorial Santillana, 2020)

Texto del estudiante de matemáticas segundo medio (Editorial Santillana, 2020)

La transposición didáctica Del saber sabio al saber enseñado (Yves Chevallard, 1997)

sochiem

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS: CROCHET Y RECICLAJE

INNOVACIÓN EN EL AULA EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA

Isabel Berna Sepúlveda, Denisse Cisternas Canio, Daniela Hueichao Catrivil, Lisa Navarro Bahamondes

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

1 INTRODUCCIÓN

"Las **geometrías no euclidianas** ofrecen un marco ideal para innovar en la enseñanza de la matemática, enfrentando el desafío de motivar a los estudiantes hacia un aprendizaje significativo. Permiten a los futuros profesores emplear estrategias pedagógicas que combinan la manipulación de objetos cotidianos con la integración de la sustentabilidad, fomentando así una pedagogía que trasciende las prácticas tradicionales."

3 ANTECEDENTES

Históricamente, según Smith, J. (2018), la enseñanza de la geometría se ha centrado en la geometría euclidiana, pero estudios recientes indican que incluir **geometrías no euclidianas** puede mejorar la comprensión de los estudiantes. El uso de modelos concretos facilita la visualización y experimentación, desarrollando habilidades matemáticas avanzadas, lo cual es esencial en la formación inicial docente.

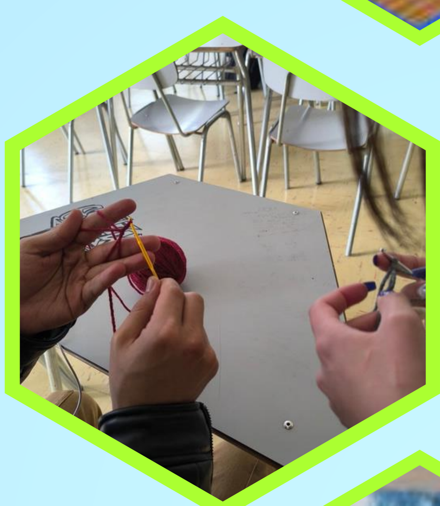
4 METODOLOGÍA

Académica responsable de la A.C. **Geometrías No Euclidianas** y sus estudiantes ayudantes, aplicaron metodologías activas para la comprensión y comparación de teoremas y propiedades de la Geometría euclidiana en las nuevas geometrías. Cuyas etapas son:

1. Introducción teórica sobre **geometrías no euclideanas**.
2. Talleres prácticos con **crochet** y materiales reciclados
3. Reflexión y discusión sobre los conceptos aprendidos.










2 PROBLEMA

Oportunidad: Uso de modelos concretos para fomentar la visualización y comprensión de conceptos no euclidianos.

Desafío: Predominio de metodologías tradicionales en la enseñanza de geometría.

Impacto: Innovación pedagógica en la formación docente.

5 RESULTADOS

Los talleres ayudaron a los estudiantes a profundizar en conceptos geométricos, superar métodos tradicionales y comprender las **geometrías no euclidianas**, aumentando su interés en la matemática. Ante la pregunta sobre si el taller de tejidos con bolsas mejoró su comprensión y perspectiva sobre el reciclaje, estos fueron algunos de sus comentarios:

*"El taller de tejidos con bolsas mejoró mi comprensión de las **GNE** al permitirme visualizar de manera más clara el comportamiento de elementos como las rectas y los polígonos en estas superficies. Además, el uso de materiales como bolsas plásticas fomentó la concienciación ambiental y promovió prácticas responsables de reutilización." (Victor, 2024)*

*"Claro que sí, el taller me permitió ver las **GNE** desde otra perspectiva, relacionándola con la vida real y dándome cuenta de que estamos rodeados de ella. Además, en cuanto al reciclaje, me planteó la posibilidad de usar los recursos disponibles de forma creativa, contribuyendo al cuidado del medio ambiente."* (Jacobo, 2024)

6 CONCLUSIONES

La implementación de **geometrías no euclidianas** en la formación docente mejora la comprensión de los conceptos geométricos y fomenta la innovación pedagógica. Los talleres fueron efectivos en promover un **aprendizaje activo** y motivado, preparando a los futuros docentes para aplicar estas estrategias en sus aulas, lo que destaca la importancia de integrar enfoques no convencionales en la enseñanza de la matemática.

REFERENCIAS

- Berna, I. (2017). *Talleres para el Encuentro de Geometría y Topología: Innovaciones en la enseñanza de la geometría.* Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.
- Euclides. (2020). *Elementos* (Vol. 1). Editorial XYZ.
- Poincaré, H. (2019). *La science et l'hypothèse.* Editorial 123.
- Smith, J. (2018). *Teaching Non-Euclidean Geometry in High Schools. Journal of Mathematics Education,* 12(3), 45-67.
- Hsu, J. (2023). Hyperbolic Crochet: A Tangible Approach to Non-Euclidean Geometry. *Mathematics Education Research Journal,* 35(2), 256-274. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00328-9
- Taimina, D. (2021). Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes: Tactile Mathematics, Art, and Craft for All to Explore. *CRC Press.* https://doi.org/10.1201/9780429277859
- Wertheim, C., & Wertheim, M. (2005). *The Hyperbolic Crochet Coral Reef: An Artistic Science Project.* Institute for Figuring. https://theiff.org/exhibits/reef.html
- University of Chicago. (2021). *Hyperbolic Crochet Coral Reef: Creating Mathematical Models.* Department of Mathematics. https://math.uchicago.edu/HyperbolicCoral

sochiem

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

Figuras 2D: invitación a la diversificación para un aula heterogénea e inclusiva

Benjamín Melo, Isabella Pruzzo, Emilia Sánchez y Emilia Velasco

Pontificia Universidad Católica de Chile

Introducción

Es fundamental reconocer el aula como un espacio heterogéneo y buscar maneras de propiciar una educación diversificada que satisfaga las necesidades de todos. Diversificar los planes de clase ofrece un primer acercamiento a cómo la "diversificación" puede manifestarse en algo tan simple como ampliar las opciones de aprendizaje.

Problemática

En este plan de clases, podemos observar que la actividad no responde a la diversidad. El foco está en la tolerancia, pero no en la inclusión.

- Da sólo una opción de material a trabajar.
- No se especifica un tiempo adecuado para la exploración del material
- No crea realmente la necesidad de resolver un problema matemático.

Antecedentes: Plan de clases original

Nivel: transición, educación parvularia.
OA: Identificar atributos de figuras 2D y 3D, tales como: forma, cantidad de lados, vértices, caras, que observa en forma directa o a través de TICs.
Meta: Identificar atributos de las figuras 2D a través de la representación de estos con material concreto.
Materiales: cajas de arena y tarjetas.
Núcleos: Pensamiento matemático y Corporalidad y movimiento.

Resultados

1. **Crear una estructura de clase**: mostrar el paso a paso, dando un marco de trabajo para todos.
2. **Generar necesidad y sentido en los problemas matemáticos**, relacionándolos con la vida cotidiana y su contexto real.
3. **Ofrecer más opciones de materiales**: cajas de arena, gel, de distintos tamaños, palos, cuerdas y recursos corporales.
4. **Principios de la Educación Matemática Realista**:

Interacción: fomentar reflexiones entre pares para enriquecer el aprendizaje.
Niveles: comenzar con el cuerpo y luego introducir figuras geométricas abstractas.
Reinvención: dar autonomía a los estudiantes para representar.

La comprensión de figuras geométricas se fomenta mediante la **exploración** y **colaboración**, relacionándolas con objetos **cotidianos**. Esto enriquece el aprendizaje en un ambiente **inclusivo**, enfocándose en **propiedades** geométricas y permitiendo la **libre** elección de **materiales**.

Conclusión

La educación tradicional suele crear planes de clase para estudiantes "ideales", pero la **diversidad enriquece** el aprendizaje en matemáticas. El plan propuesto diversifica las estrategias para fomentar un **ambiente inclusivo y significativo**, promoviendo la colaboración entre pares, el uso de materiales concretos que estimulen la autonomía y creatividad, y la formulación de preguntas eficaces. Es crucial recordar que las barreras de aprendizaje son generadas por el ambiente y que **cada niño/a es un potenciador del aprendizaje**.

Referencias

Feurestein R., Feurestein R. 2010. Beyond Smarter: Mediated Learning and the brain´s capacity for change.
Vista de Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil. (s/f). Uva.es.
Quaranta, M. E., & Rosa de Moreno, B. (2009). La enseñanza de la Geometría en el jardín de infantes.
González, P. I. (2019). Dilemas de la inclusión educativa en el Chile actual. Revista Educación Las Américas, 8, 80-92.

INNOVACIÓN EDUCATIVA Y DIVERSIDAD

A TRAVÉS DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS

Autor: Daniel Ahumada

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es tanto un medio como un fin para lograr una educación matemática de calidad.

Se diferencia de los ejercicios simples porque el estudiante enfrenta situaciones sin un procedimiento dado, fomentando su curiosidad y pensamiento crítico.

CONTEXTUALIZACIÓN

La contextualización otorga sentido a los objetos matemáticos, permitiendo que los estudiantes a través del trabajo colaborativo, comprendan los procedimientos en contextos significativos.

Para desarrollar habilidades y aprendizajes profundos, se propone que los alumnos construyan conocimiento matemático mediante la exploración de situaciones contextualizadas, similares a las que originaron el concepto en estudio, dentro de un enfoque de resolución de problemas.

Esto requiere identificar elementos históricos o epistemológicos que hayan facilitado la construcción de significados en la sociedad, adaptándolos al aula según sus particularidades.

PROPUESTA DIDÁCTICA

Unidad 1: Objetivo de Aprendizaje MA05 OA 03

Demostrar que comprende la multiplicación de 2 dígitos por 2 dígitos: → estimando productos. → aplicando estrategias del cálculo mental. → usando la propiedad distributiva de la adición respecto de la multiplicación. → resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios, aplicando el algoritmo.

Indicadores de evaluación sugeridos

- **Seleccionan y usan** una estrategia para estimar la solución de un problema dado.
- **Demuestran** que la solución aproximada a un problema no rutinario dado, no requiere de una respuesta exacta.
- **Determinan** respuestas aproximadas.
- **Estiman** la solución de un problema dado y lo resuelven.
- **Resuelven** problemas matemáticos relativos a cálculos de números, usando la calculadora.
- **Identifican** qué operación es necesaria para resolver un problema dado y lo resuelven.
- **Determinan** lo razonable de una respuesta a un problema no rutinario.
- **Evalúan** la solución de un problema en su enunciado.
- **Explican** la estrategia utilizada para resolver un problema.

ACTIVIDADES

Experimentan diferentes enfoques

Sesion 1 – 45 minutos

- Se propone a los estudiantes organizar un campeonato de voleibol, donde cada equipo juegue como máximo una vez al día.
- Los equipos estaran formados por 6 estudiantes con paridad de género (20 min.).
- Se reunen en grupos para discutir la manera más efectiva de garantizar que todos jueguen al menos una vez por día (25 min.).

Inventan o eligen estrategias, ideas previas

Sesion 2 – 45 minutos

- Después de seleccionar la estrategia para que todos los equipos jueguen entre sí, se les pide a los estudiantes que identifiquen los datos relevantes y comprendan el problema en grupos (20 min.).
- Luego, deben organizar la información utilizando organizadores gráficos y fichas de datos para estructurarla de manera clara (25 min.).

Sesion 3 – 45 minutos

- Los estudiantes se reunen en grupos a discutir posibles estrategias para resolver el problema, como el ensayo y error o la representación gráfica (25 min.).
- Luego deben dibujar sus estrategias en la pizarra utilizando diagramas y gráficos para ilustrarlas (20 min.).

Aplicación, ensayo y error Comparación de Soluciones

Sesion 4 – 45 minutos

- Los estudiantes se reunen en grupos para determinar y justificar la estrategia más adecuada (20 min.).
- En grupos, deben presentar y defender la estrategia seleccionada ante el resto del curso (25min.).

Sesion 5 – 45 minutos

- Los estudiantes implementan la estrategia seleccionada y resuelven el problema (30 min.).
- Luego, deben documentar los pasos seguidos y los resultados obtenidos (15min.).

Evaluación de la efectividad

Sesion 6 – 45 minutos

- Los estudiantes verifican las soluciones comparándolas con otras estrategias y resultados (20 min.).
- Luego, deben evaluar la razonabilidad de las respuestas obtenidas (25 min.).

Sesion 7 – 45 minutos

- Los estudiantes reflexionan sobre el proceso de resolución y a generalizan las estrategias aplicadas, a otros problemas (20 min.).
- Luego, se tendrá una discusión grupal para evaluar lo aprendido, y explorar cómo aplicar estos conocimientos a nuevos contextos (25min.).

ADAPTACIONES TDAH

- Se utilizarán fichas de colores distintos para representar cada equipo, para que estos puedan ser manipulados de forma tal, que generen todas las combinaciones posibles para lograr dar solución al problema planteado.
- **Esta adaptación facilitar la comprensión visual y táctil del problema, reduciendo las barreras cognitivas y fomentando la participación activa de estudiantes con TDAH.**

- Trabajo en grupos pequeños para reducir distracciones.

Uso de organizadores gráficos y fichas de datos para estructurar la información.

- **El trabajo en grupos pequeños y organizadores gráficos reduce las distracciones y estructuran la información, promoviendo la participación activa y la inclusión de estudiantes con TDAH.**

- Incluir movimiento, como pasar a la pizarra para dibujar estrategias.
- Utilización de pizarras individuales para cada estudiante, permitiendo movimiento y participación activa.
- **Incluir movimiento, como ir a la pizarra o usar pizarras individuales, fomenta la participación activa y mantiene la atención de estudiantes con TDAH, promoviendo su inclusión.**

- Dar tiempos específicos para cada paso.

Proveer listas de verificación para mantener el enfoque en la selección y justificación.

- **Dar tiempos específicos y usar listas de verificación ayuda a mantener el enfoque y la organización, promoviendo la inclusión de estudiantes con TDAH en actividades estructuradas.**

- Segmentar la actividad en pasos pequeños con pausas intermedias.

Dividir el problema en subproblemas y realizar una pausa breve entre cada uno para mantener la concentración.

- **Segmentar la actividad en pasos pequeños con pausas intermedias facilita la concentración y permite a estudiantes con TDAH abordar el problema de forma gradual e inclusiva.**

- Usar juegos de roles para presentar soluciones.

Representar la solución y la verificación con juegos de roles y dramatizaciones.

- **Usar juegos de roles y dramatizaciones fomenta la participación activa y refuerza la comprensión, promoviendo la inclusión de estudiantes con TDAH en un ambiente dinámico.**

- Reflexión guiada con preguntas específicas.

Uso de una ficha de reflexión con preguntas clave sobre el proceso seguido.

- **La reflexión guiada con preguntas específicas y fichas clave fomenta la autoevaluación estructurada, ayudando a estudiantes con TDAH a analizar su proceso de aprendizaje e incluirse activamente.**

CONCLUSIÓN

En el aula, los números se tornan vida y la matemática, poesía.
Problemas que surgen del mundo real despiertan mentes dormidas,
mientras el estudiante, con pasos autónomos, traza su propio sendero.
El docente, guardián del misterio, guía la mano sin apretar.
Asi, lo abstracto se entrelaza con lo tangible,
y lo que antes era ajeno, ahora cobra sentido,
como un rio que, tras serpenteos, encuentra finalmente el mar.

¿PODRÁ SER APLICADO EN LAS AULAS?

REFERENCIAS

Escanea el código QR para acceder al documento completo, con más detalles teóricos, referencias bibliográficas y ejemplos:

- El Aprendizaje Basado en Problemas de (ABP) en matemáticas Polya, G (1965), enfocado en la educación realista de Freudenthal, H (1991).
- Perspectiva inclusiva, con un aprendizaje activo y diferenciado, adaptándose a la diversidad en el aula (DUA).
- Visión del Ministerio de Educación.

MODELACIÓN MATEMÁTICA Y TIC'S: EXPLORANDO LA OSCILACIÓN DE UN RESORTE

Víctor Sazo Encina

La integración de la matemática con fenómenos cotidianos permite a los estudiantes desarrollar habilidades prácticas y reflexivas. En esta actividad, exploraremos la oscilación amortiguada de un resorte como experimento práctico para modelar fenómenos físicos a través de herramientas TIC's y software. Este enfoque potencia la comprensión de conceptos abstractos mediante el análisis de representaciones gráficas, tabulares y algebraicas, haciendo que la matemática sea más accesible y aplicable.

Antecedentes

Es fundamental el desarrollo de la habilidad de modelación matemática en los estudiantes, así como el uso de TICs y software, cuya relevancia ha crecido significativamente en los últimos años.

La incorporación de modelación matemática y TIC's en las Bases Curriculares, permite a los estudiantes mejorar su comprensión de fenómenos reales y desarrollar habilidades matemáticas más aplicadas.

Como educadores, es nuestro deber integrar estas herramientas en las clases de matemática, diseñando actividades prácticas que combinen ambos enfoques para enriquecer el aprendizaje.

Problema

Existe una escasa conexión entre los fenómenos de la vida diaria y el aprendizaje de matemática en el aula, lo que resalta la necesidad de vincular conceptos abstractos con aplicaciones prácticas que los estudiantes puedan observar y experimentar.

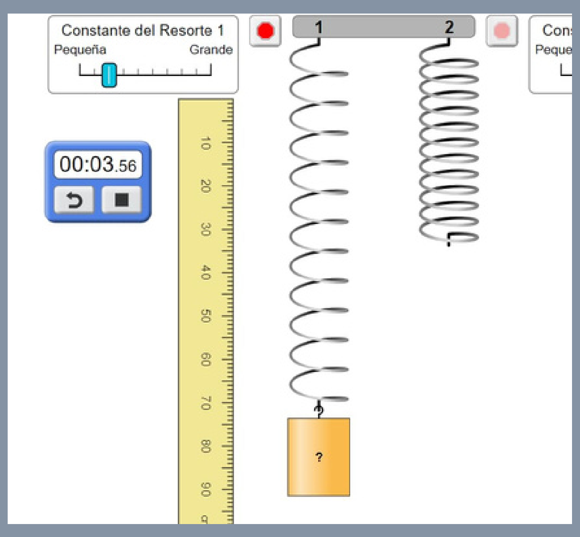
La enseñanza tradicional a menudo no incluye experiencias directas con fenómenos cotidianos, como el uso de herramientas y objetos comunes, por ejemplo, los resortes en autos o camas, los cuales rara vez se exploran en su relación con los principios matemáticos.

Usar la oscilación amortiguada de un resorte como ejemplo práctico permite a los estudiantes experimentar directamente con este fenómeno, integrando la matemática con su entorno cotidiano a través del uso de herramientas TIC's.

Metodología

1. Realización del experimento físico: Se utilizó un resorte real para observar las oscilaciones del sistema, empleando herramientas como Tracker y Phyphox para la recopilación de datos.

2. Simulaciones en PHET: Se replicó el fenómeno en un entorno virtual bajo condiciones ideales para comparar el comportamiento del resorte simulado con el real.



3. Procesamiento de datos: Los datos recopilados se procesaron en Excel y GeoGebra, generando gráficos de altura frente al tiempo y realizando ajustes de modelos algebraicos.
4. Construcción de modelos matemáticos: Se ajustaron funciones exponenciales y trigonométricas para representar la amplitud, las oscilaciones y el punto de equilibrio del sistema.

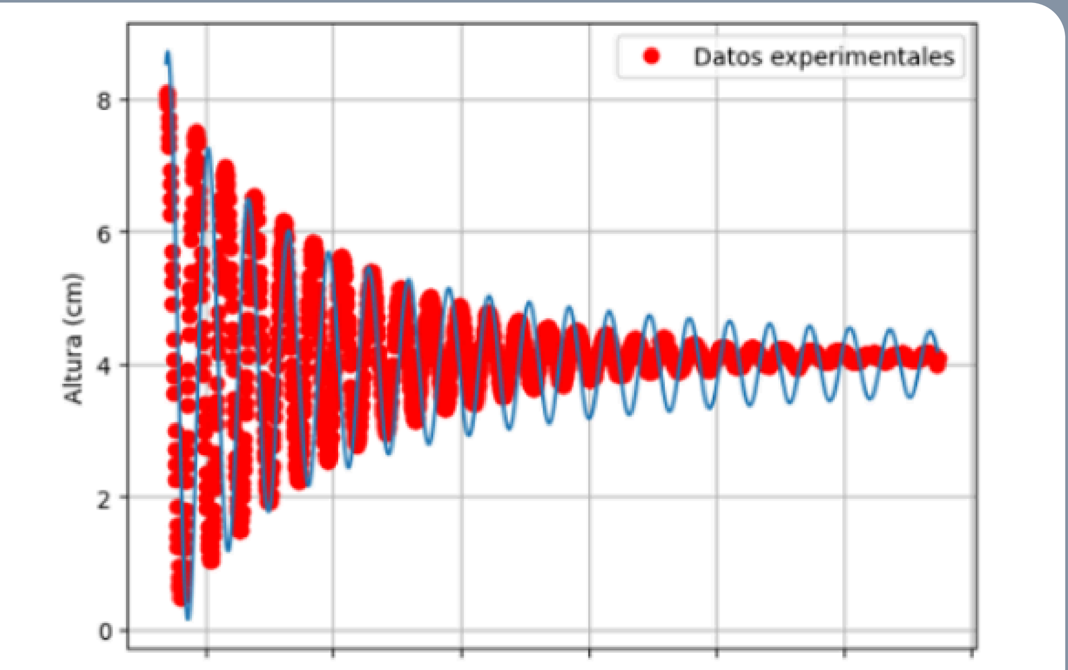
Experimento físico (resorte real + Tracker + Phyphox) → Datos experimentales → Procesamiento de datos (Excel y GeoGebra)

Simulaciones en PHET (condiciones ideales) → Datos simulados → Procesamiento de datos (Excel y GeoGebra)

Procesamiento de datos (Excel y GeoGebra) → Generación de gráficos (altura vs tiempo) → Ajuste de modelos algebraicos (funciones exponenciales y trigonométricas) → Identificación de parámetros (amplitud, oscilación, equilibrio)

Resultados

3,448	8,093
3,45	8,062342
3,467	8,039825
3,483	7,972015
3,5	7,90427
3,517	7,723744
3,533	7,58819
4,583	7,496914
4,6	7,491887
4,617	7,48686
4,567	7,441613
4,633	7,441613
4,55	7,416476
3,55	7,407536
4,65	7,381298
4,533	7,336023
4,667	7,320969
3,567	7,272045
4,517	7,129956
4,5	7,059572



$$x(t) = A e^{-bt/(2m)} \cos(\omega t + \phi). \qquad y(t) = 8e^{(-bt)} cos(ct) + 4$$

La tabla recopilada permitió identificar las alturas máximas, esenciales para generar un ajuste exponencial que condujo al desarrollo del modelo algebraico final. Este ajuste permitió también identificar el punto de equilibrio del sistema, validando así la precisión del modelo con datos experimentales.

Conclusiones

Luego del término de la experimentación y del tránsito entre los modelos tabulares, gráficos y algebraicos, se concluye que el modelo algebraico ajustado refleja fielmente los datos experimentales obtenidos. Además, valida la utilidad de las TICs como herramientas clave para conectar fenómenos reales, como la oscilación amortiguada de un resorte, con conceptos matemáticos abstractos. Estos resultados están en concordancia con investigaciones previas, como el artículo 'Simulación experimental para la enseñanza del movimiento oscilatorio' (2017), lo que respalda la relevancia de este enfoque en la enseñanza de la matemática.

Referencias

Tipler Paul, A. (1995). Física para Científicos e Ingenieros. Editorial Revert, SA Madrid.

Ríos, V., Montero, G., Román, A., García, A. (2017). Simulación experimental para la enseñanza del movimiento oscilatorio. Latin-American Journal of Physics Education, 11(1), 7.

Diseño de un plan de acompañamiento para profesores de matemática que imparten las asignaturas electivas de enseñanza media

Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles

La investigación presenta el diseño y validación de un plan de acompañamiento docente para abordar las dificultades en el conocimiento disciplinar de un grupo de docentes de matemática que enseñan las asignaturas de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, según las Bases Curriculares de 2019, en la comuna de Los Ángeles.

La relevancia de este estudio radica en que la introducción de asignaturas de profundización presenta nuevos retos para los docentes de matemáticas. Los educadores del siglo XXI deben entender la realidad contemporánea y desarrollar nuevas maneras de abordar el aprendizaje, adaptándose a las nuevas tecnologías y metodologías, con un enfoque crítico y reflexivo.

La investigación, con enfoque cualitativo, de tipo exploratorio-descriptiva, se desarrolló en dos fases: la primera consistió en la recolección de datos a través de un cuestionario y un grupo focal; y la segunda, en el diseño y validación del plan de acompañamiento, realizado por expertos académicos. Al llevar a cabo dicha investigación, se encontró una inconsistencia en los resultados, donde el cuestionario reveló dificultades tecnológicas; mientras que en el grupo focal se destacaron problemas en el conocimiento disciplinar.

En consecuencia, el plan de acompañamiento diseñado se enfoca en la dimensión del conocimiento disciplinar de ambas asignaturas de profundización mencionadas anteriormente, con énfasis en la aplicación e interpretación de contenidos, fomentando el uso de herramientas tecnológicas. Además, se resalta la escasez de estudios sobre las dificultades que se presentan en las asignaturas de profundización "Pensamiento Computacional, Programación y Geometría 3D", lo que sugiere la necesidad de investigar en estas áreas.

REFERENCIAS:
Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Innovaciones Pedagógicas. (2021a). Estándares de la profesión docente: Marco para la Buena Enseñanza. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2021/08/MBE-2.pdf

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Innovaciones Pedagógicas. (2021b). Estándares de la profesión docente: Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2021/08/Matematica-Media.pdf

Ministerio de Educación, Unidad de Curriculum y Evaluación. (2019a). *Bases Curriculares 3° y 4° Medio.* https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf.

Ministerio de Educación, Unidad de Curriculum y Evaluación. (2019b). *Plan de estudios para 3° y 4° año medio.* https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-134351_recurso_plan.pdf

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

Articulando significados de la derivada mediante la conversión entre registros de representación semiótica

Salvo, A.
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

Mientras las vastas aplicaciones del cálculo infinitesimal hacen que su enseñanza sea un objetivo fundamental de la educación STEM, las asignaturas de cálculo mantienen altas tasas de reprobación. Por ello diversos países han integrado a la educación secundaria cursos de cálculo elemental (Biza et al., 2022). En esta línea, nuestro país incluyó en 2020 la asignatura de Límites Derivadas e Integrales como electivo en los establecimientos públicos de formación Científico-Humanista.

Problemática

Si bien esto representa una oportunidad para desarrollar la lógica y el pensamiento matemático abstracto, se ha observado que una formación inadecuada suele asociarse con mayor fracaso y deserción en los ramos de cálculo de la universidad (Biza et al., 2022), haciendo necesario investigar los fenómenos asociados al aprendizaje del cálculo en nivel secundario. Para ello, en el presente trabajo abordaremos en la enseñanza de la derivada.

Antecedentes

Diversas investigaciones muestran que la presencia de actividades sobre problemas reales en los cursos de cálculo varía mucho entre los docentes (Biza et al., 2022). A su vez, los libros de cálculo se centran reglas de derivación, más que en la comprensión de la derivada (Vargas et al., 2020). Además, algunos docentes evitan usar la tecnología, invirtiendo demasiado tiempo calcular derivadas, sin profundizar en sus propiedades (Gavilán-Izquierdo et al., 2021). Aunque en Europa la enseñanza de límites para el cálculo de la derivada varía mucho de país en país, varios sistemas educativos coinciden en enseñar a calcular la derivada de una función en un punto mediante algebra o con apoyo de tecnologías para tabular o graficar (Viirman, et al., 2022).

Marco Teórico

La TRSS de Duval (2019) postula que el estudiante aprende mediante la coordinación de diferentes registros de representación semiótica. Esto permitiría articular las diferentes nociones la derivada (razón de cambio, pendiente y velocidad, etc.) como representaciones que pueden ser coordinadas. Para favorecer esto, el uso de tecnología permitiría centrarse en la reflexión más que en la técnica, (Gavilán-Izquierdo et al., 2021).

Objetivo

Objetivo General: Diseñar y validar una experiencia de aula para la enseñanza de la derivada como límite de sucesiones mediante la coordinación de los registros figural, gráfico y numéricos presentes en una simulación interactiva en GeoGebra.

Método

La investigación es de carácter cualitativo y utilizó la Ingeniería Didáctica (Artigue et al., 1995) para el diseño, implementación y validación de una propuesta. Esta se aplicó en 7 estudiantes de un colegio particular subvencionado de la Región de Valparaíso, en la asignatura de Límites, Derivadas e Integrales.

La Propuesta

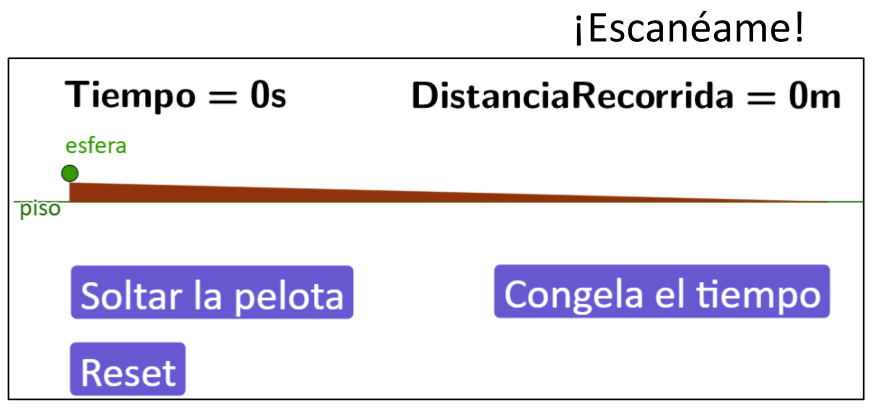
Los análisis curriculares, epistemológicos y cognitivos en torno a la derivada, resaltan la importancia de conceptos como pendiente, razón de cambio y las representaciones gráficas de fenómenos cinemáticos. En atención a ello se propuso la siguiente actividad:

Objetivo : Estimar la velocidad instantánea de un cuerpo que cae por un plano inclinado aplicando las nociones de límite y sucesión.

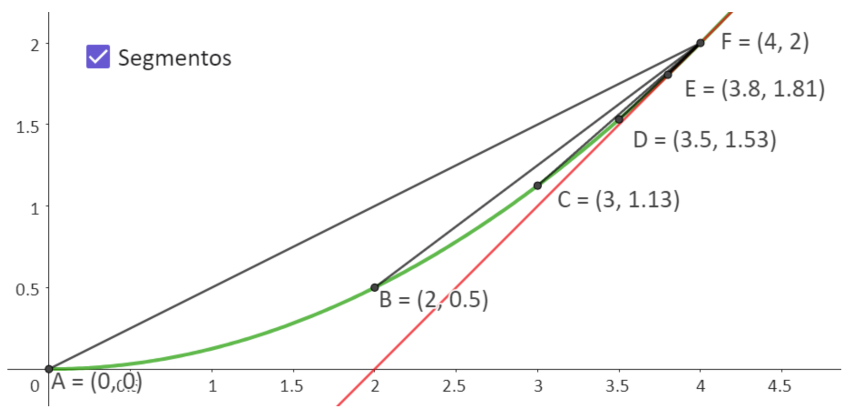
Ítem I: El siguiente GeoGebra muestra un plano inclinado y sobre su extremo superior una esfera que comienza a caer, rodando en línea recta hasta llegar al final del plano.

¡Escanéame!

¿Cuánto tarda la esfera en recorrer el plano? ¿Cuánta distancia recorre en los últimos 2 segundos? ¿Cuál crees que es la velocidad de la esfera cuando llega al final del plano?



Ítem II: El siguiente gráfico modela el desplazamiento de la esfera por cada segundo que pasa. La recta roja es tangente a la curva en el punto F. ¿Qué representan los puntos A al F en el contexto del problema? ¿Cuáles son las pendientes de los segmentos y qué representan? Sin calcular, ¿Cuál cree usted que es la pendiente de la recta roja? ¿Por qué?

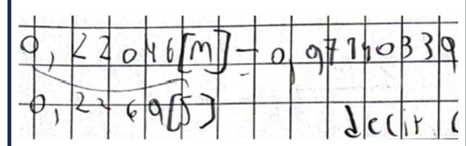


Resultados

En el **Ítem I** se registraron 3 tipos de estrategias de coordinación numérico-figural:

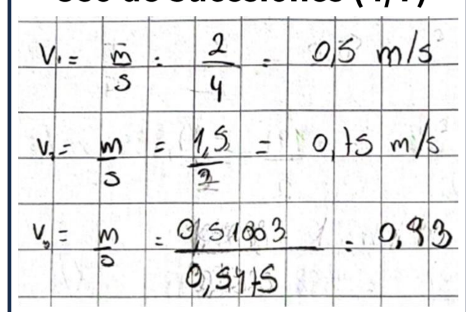
Aproximación directa (2/7)

"Si me posiciono cerca del final, ejemplo: 3,77315s con 1,77154 recorridos podemos saber el tiempo y la distancia faltante".



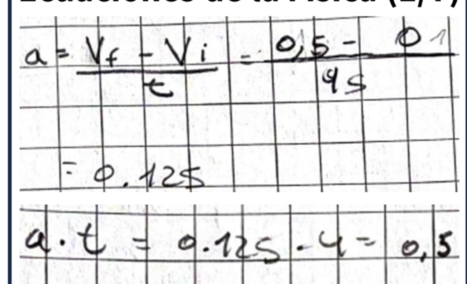
"Si vemos esto como un límite, podemos decir que en el instante final la velocidad es de 1m/s".

Uso de Sucesiones (4/7)



"Todos los resultados se acercan al 1 antes que a un número mayor".

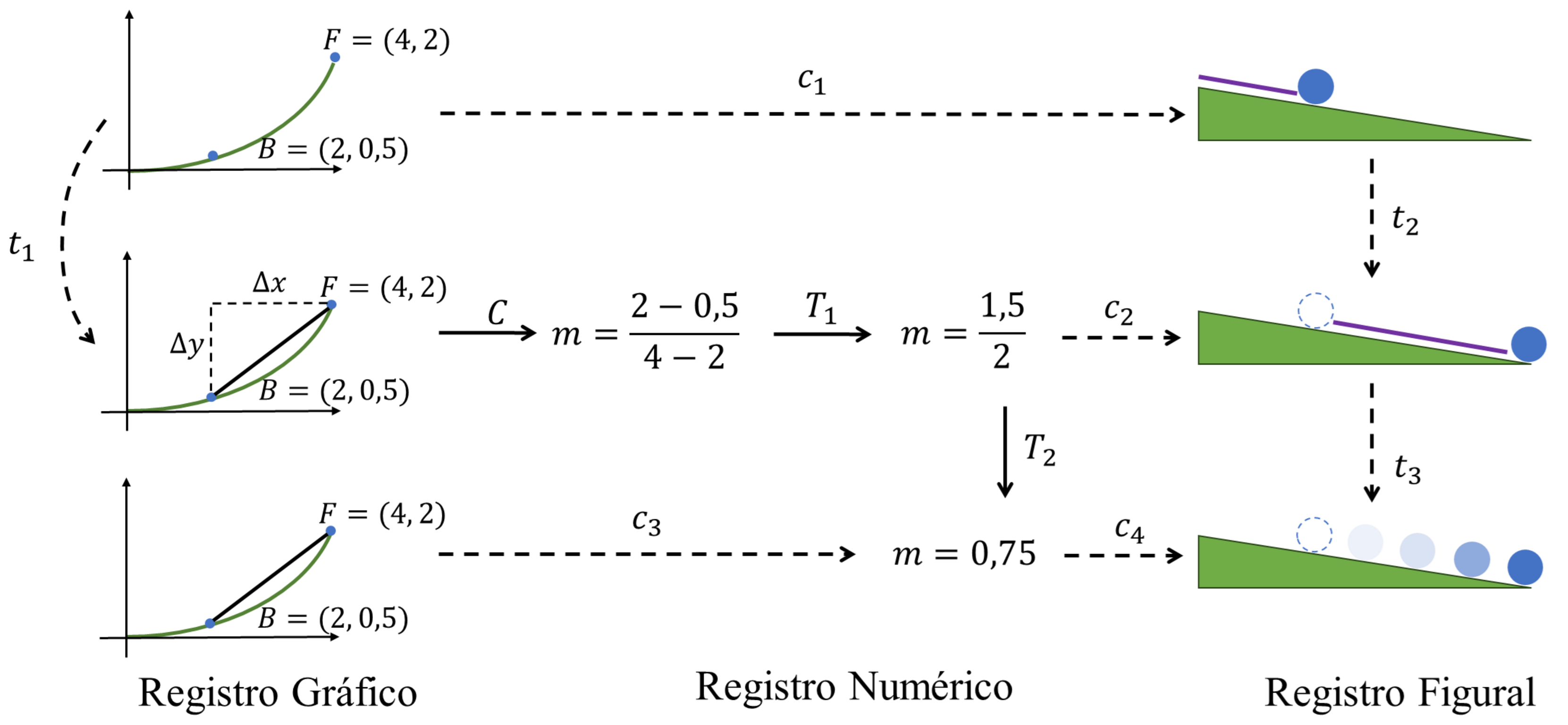
Ecuaciones de la Física (1/7)



Asume erróneamente que la velocidad final es 0,5. Y no se da cuenta que es precisamente la velocidad lo que se le solicita encontrar.

Nota. Elaboración propia.

La *aproximación directa* fue una resolución no prevista en el Análisis a Priori. En el **Ítem II**, los estudiantes identificaron las unidades significativas para realizar las conversiones. La siguiente figura muestra los tratamientos y conversiones (letras *T* y *C*) para hallar una de las pendientes e interpretarla como la velocidad media de la esfera.



Nota. Elaboración propia. Mayúsculas indican transformaciones observadas y minúsculas señalan las transformaciones hipotetizadas a partir del trabajo de los estudiantes.

Posteriormente seis de siete alumnos, reconocieron la relación entre el gráfico y el plano inclinado producto de la coincidencia de los valores tiempo-distancia usados. Así, algunos de ellos, realizaron conversiones entre los registros figural, gráfico y numérico, concluyendo que la pendiente de la recta tangente tendía a 1. Finalmente, el proceso de construcción de la sucesión no fue evidente y algunos estudiantes concluyeron con muy pocos términos que la sucesión tiende a 1, lo que podría ser efecto del contrato didáctico.

Conclusiones

- El uso de sucesiones facilita la aproximación, pero los estudiantes tienen dificultades para construirla y conjeturan sobre su convergencia con pocos términos en ella.
- Las unidades significativas tiempo-distancia identificadas facilitaron la conversión entre los tres registros utilizados.
- Las conversiones entre registros contribuyeron la comprensión del fenómeno y la estimación de la velocidad instantánea en el final del plano, favoreciendo la construcción inicial del objeto derivada a partir de su límite izquierdo.
- El plano inclinado es un ejemplo de variación no constante accesible para los alumnos.
- Propuestas de mejora: formular tareas específicas sobre el registro figural, abordar más casos que el de derivada como límite izquierdo, considerar otros facilitadores para registrar medidas en GeoGebra.

REFERENCIAS

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Biza, I., González-Martín, A.S. & Pinto, A. 'Scaffolding' or 'Filtering': A Review of Studies on the Diverse Roles of Calculus Courses for Students, Professionals and Teachers. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed. 8*, 389–418 (2022). https://doi.org/10.1007/s40753-022-00180-1

Duval, R. (2019). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (2nd ed.).* Universidad del Valle.

Gavilán-Izquierdo, J. M., García, M., & Martín-Molina, V. (2021). Characterizing the Role of Technology in Mathematics Teachers' Practices When Teaching About the Derivative. *Computers in the Schools, 38*(1), 36–56. https://doi.org/10.1080/07380569.2021.1882211

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. ., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020). La derivada en los libros de texto de 1º de Bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas. *Avances De Investigación En Educación Matemática,* (18), 87–102. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.288

Viirman, O., Vivier, L. & Monaghan, J. The Limit Notion at Three Educational Levels in Three Countries. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed. 8*, 222–244 (2022). https://doi.org/10.1007/s40753-022-00181-0

sochiem

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

Medición inalcanzable: uso del Teorema de Pitágoras para medir una distancia inalcanzable con estudiantes de Enseñanza Media

Rodrigo Rojas-Muñoz; Rosa Coñué Levicoi; Claudia Rozas Rozas
Universidad Austral de Chile

INTRODUCCIÓN
Este taller ha sido desarrollado con estudiantes de Enseñanza Media en el Campus Patagonia de la Universidad Austral de Chile.

ACTIVIDAD
Medir la longitud del agua (perfil del techo) del edificio (40 minutos).

HABILIDADES A DESARROLLAR
Con esta actividad se busca desarrollar particularmente las habilidades de Resolución de Problemas establecidos en las Bases Curriculares de Matemáticas (MINEDUC, 2015).

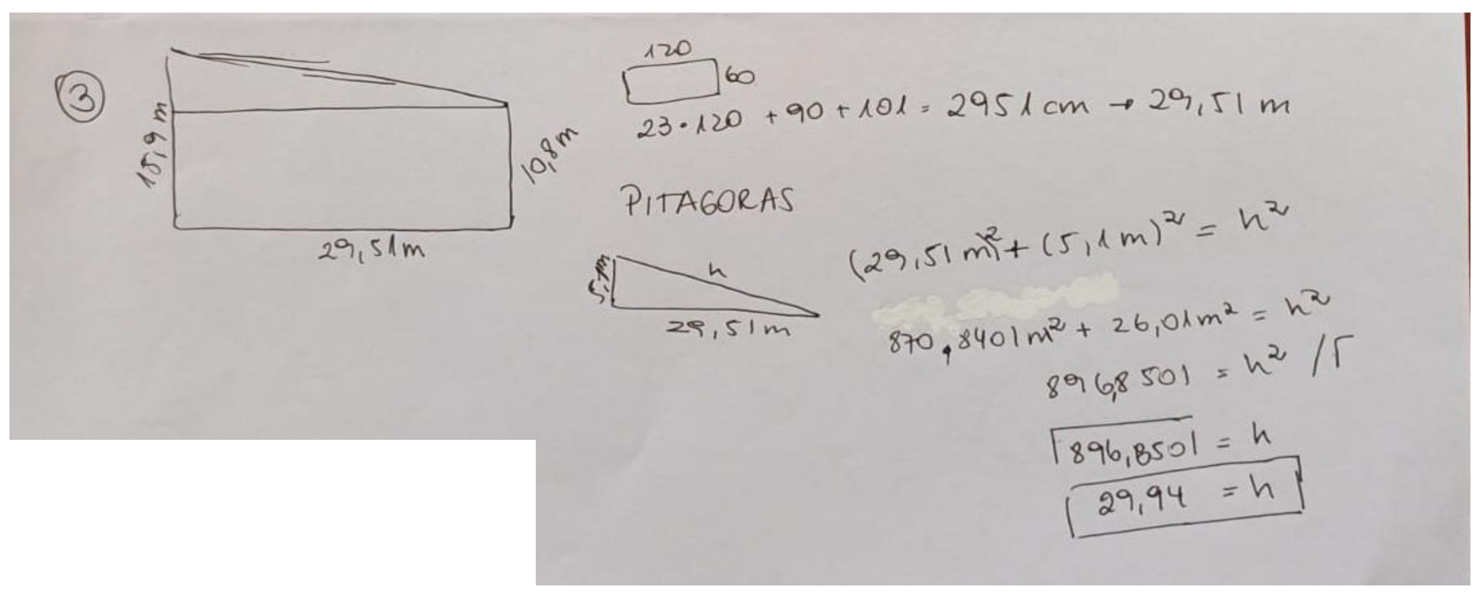
MÉTODO
Los estudiantes, en equipos de 3 personas, observan la situación, definen una metodología y los instrumentos para medir.

RESULTADOS
La totalidad de los equipos logra definir una estrategia de estimación basada en el Teorema de Pitágoras, pero los estudiantes de 7o básico y algunos estudiantes de niveles superiores, incluyendo universitarios, son los que presentan mayor dificultad para definir la estrategia de resolución.
Las principales dificultades encontradas durante el desarrollo son: desconocimiento del Teorema de Pitágoras en estudiantes de niveles iniciales; creer que la diagonal mide lo mismo que el ancho del edificio; no considerar el ancho de las uniones entre los bloques; considerar bloques completos cuando no lo son; cálculo de raíces cuadradas; y conversión de unidades. Todas estas dificultades son superadas durante el desarrollo de la actividad mediante devoluciones por parte de los monitores.

CONCLUSIONES
La actividad permite organizar conocimientos previos para la resolución del problema.
La actividad favorece la discusión y colaboración durante la resolución del problema.
La actividad permite corregir los errores cometidos durante su resolución.

FIGURA 1
2 equipos de estudiantes analizando como medir el agua del edificio.

FIGURA 2
Resultado de 1 equipo para la medida del agua del edificio.



REFERENCIAS
MINEDUC (2015). *Bases Curriculares. 7o Básico a 2o Medio*. Ministerio de Educación, Gobierno de Chile.

sochiem

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

Trayectorias Educativas de PK a 2° básico, sobre el Concepto de Simetría

Bárbara Espinoza Morales, Mariela Castillo Becerra, Trinidad Prieto Hurtado

Pontificia Universidad Católica de Chile

Introducción

Durante el segundo semestre del año 2023, en el marco de la clase de Didáctica de la Geometría para el programa de Educación Parvularia, se realizó una clase interdisciplinar junto a estudiantes del programa de Pedagogía en Educación Básica para construir trayectorias educativas de prekínder a segundo básico según el concepto geométrico de simetría. Para esto, estudiantes de ambas carreras colaboraron en grupos para la construcción de estas trayectorias, un insumo clave de esta clase fue el libro "Los de arriba y los de abajo" de Paloma Valdivia.

Problema

En Chile, el decreto 373 establece que los establecimientos educacionales deben elaborar estrategias de transición educativa (ETE). A pesar de la existencia de este decreto, hay cierto desconocimiento por parte de estudiantes de Pedagogía General Básica sobre qué y cómo enseñar matemáticas en Educación Parvularia, y viceversa. Frente a esto, surge la siguiente problemática: **¿Cómo los estudiantes de Pedagogía en Educación General Básica y de Pedagogía en Educación Parvularia de la Pontificia Universidad Católica de Chile colaboran para elaborar una trayectoria educativa sobre el concepto de simetría entre los niveles de prekínder y segundo básico inclusive?**

Método

Grupos focales en los que se mezclaron estudiantes de Pedagogía General Básica con estudiantes de Educación Parvularia para la construcción y análisis de una transición educativa bajo el concepto de simetría y el uso del libro "Los de arriba y los de abajo" de Paloma Valdivia.

Resultados

		Progresión de OAs elaborada		
		PK-K	**1°**	**2°**
Grupo elaborador	**1,2,4,5**	Comunicar la posición de objetos y personas respecto de un punto u objeto de referencia, empleando conceptos de ubicación (dentro/fuera; encima/debajo/entre; al frente de/detrás de); distancia (cerca/lejos) y dirección (adelante/atrás/hacia el lado), en situaciones lúdicas.	Describir la posición de objetos y personas con relación a sí mismos y a otros objetos y personas, usando un lenguaje común (como derecha e izquierda).	Representar y describir la posición de objetos y personas con relación a sí mismos y a otros objetos y personas, incluyendo derecha e izquierda y usando material concreto y dibujos.
	3	Representar objetos desde arriba, del lado, abajo, a través de dibujos, fotografías o TICs, formulando conjeturas frente a sus descubrimientos.	Describir la posición de objetos y personas con relación a sí mismos y a otros objetos y personas, usando un lenguaje común (como derecha e izquierda).	Representar y describir la posición de objetos y personas con relación a sí mismos y a otros objetos y personas, incluyendo derecha e izquierda y usando material concreto y dibujos.
	6	Identificar atributos de figuras 2D y 3D, tales como: forma, cantidad de lados, vértices, caras, que observa en forma directa o a través de TICs.	Describir la posición de objetos y personas con relación a sí mismos y a otros objetos y personas, usando un lenguaje común (como derecha e izquierda).	Representar y describir la posición de objetos y personas con relación a sí mismos y a otros objetos y personas, incluyendo derecha e izquierda y usando material concreto y dibujos.

Tabla 1. Trayectoria de objetivos de aprendizaje entre PK y 2° básico elaborada por 6 grupos focales. Tabla de elaboración propia.

Conclusiones

Observando lo realizado por los grupos focales, se puede concluir que la mayoría de los grupos apunta su trayectoria a la posición de objetos, mientras que un solo grupo realiza un enlace entre simetría y figuras. Se genera una necesidad de profundizar en este estudio con posibles preguntas como: ¿cómo establecer lineamientos para una colaboración entre estudiantes y docentes de PGB y EP que alineen las trayectorias educativas entre PK y 2°? Es importante seguir profundizando sobre este tema, ya que **las trayectorias de aprendizaje son aquellas que permiten a los docentes construir las matemáticas en los niños y permite que los niños desarrollen su pensamiento matemático de manera natural** (Clements y Sarama, 2015).

Referencias

Clements, D. H., & Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad : el enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Learning Tools.

Decreto 373 EXENTO [Ministerio de Educación]. Establece principios y definiciones técnicas para la elaboración de una estrategia de transición educativa para los niveles de educación parvularia y primer año de educación básica. 17 de abril de 2017.

Ministerio de Educación. (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico.* (1era ed.). Unidad de Currículum y Evaluación Ministerio de Educación.

Subsecretaría de Educación Parvularia, Ministerio de Educación. (2018). *Bases Curriculares de Educación Parvularia.* (1era ed.). Ministerio de Educación.

Valdivia, P. (2009). *Los de arriba y los de abajo.* (1era ed.). Kalandraka.

Caracterización de Heurísticas en la Resolución de Problemas: Un Estudio en Educación Básica, Media y Universitaria.

Belmar Fuentes, Sebastián - Bravo Fuentes, Carlos - Orellana Quezada, Felipe
Universidad de Concepción - Universidad Católica de Temuco

Introducción

Este estudio analiza las heurísticas utilizadas por estudiantes de diferentes niveles educativos al resolver problemas. Incluye tres grupos: estudiantes de 4° básico (9-10 años), quienes suelen emplear estrategias como ensayo y error (MINEDUC, 2015); estudiantes de 1° medio (14-15 años), que utilizan técnicas más avanzadas, como descomposición y búsqueda de patrones (MINEDUC, 2018); y estudiantes de primer año de educación superior (18-20 años), cuyo enfoque académico fomenta el razonamiento lógico-matemático para resolver problemas de manera innovadora.

Problema

Caracterizar las **heurísticas** utilizadas por los estudiantes de cuarto año de educación básica, primer año de educación media y de primer año de educación superior, en la resolución de **problemas no rutinarios** de corte aritmético.

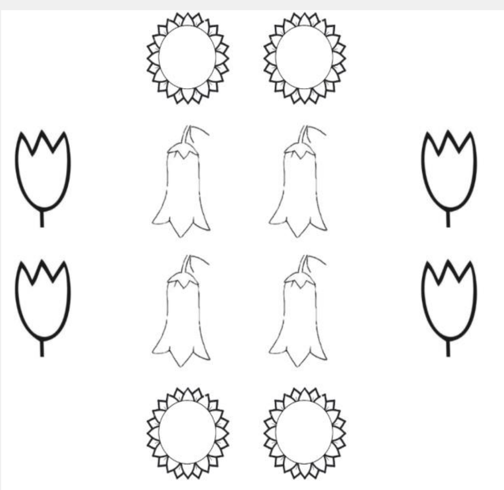
Antecedentes

La resolución de problemas es una actividad que se encuentra presente desde los albores de la humanidad, pero que encuentra una sistematización gracias al trabajo de Polya y la descripción de las cuatro fases para resolver un problema, sumado a esto la importancia de las heurísticas y estrategias utilizadas para ello, comprendidas como el método que conduce a la solución de problemas (Polya, 1990). Además, cada heurística no solo orienta el proceso, sino que también se ajusta a las oportunidades de acción que presenta el problema, adaptándose a las características y la edad de los estudiantes involucrados (Rodríguez et al., 2023).

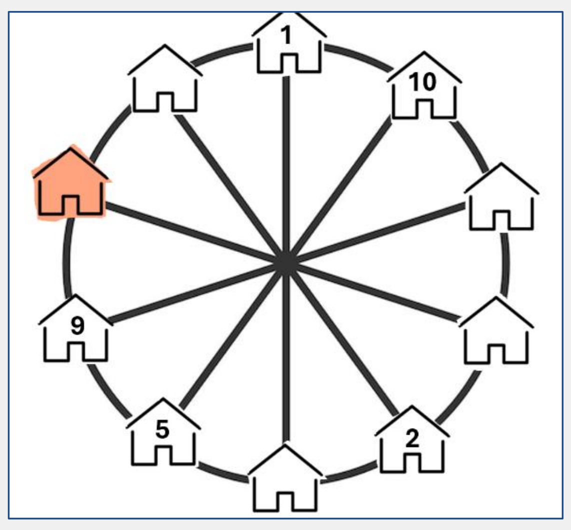
Método

Se seleccionan dos problemas relacionados a operatoria con números enteros y se realizan modificaciones en sus instrucciones (para mayor información, se puede acceder a los problemas a través del código QR de la esquina inferior derecha). Luego, se hace un análisis a priori para determinar las posibles heurísticas y respuestas esperadas de los estudiantes. Con estos antecedentes, se procede a aplicar estos problemas a tres grupos de estudiantes de distinto nivel (básica, media y universitario).

Copihues, tulipanes y girasoles (P1)



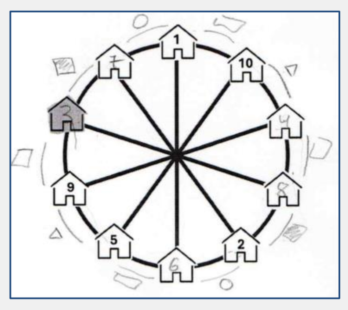
Casas Vecinas (P2)



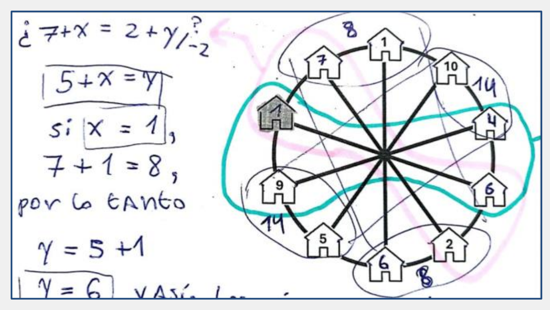
Procedimientos y estrategias a priori asociadas a la resolución del problema

P1	P2
h1 Adiciona los números enteros del 1 al 12. h2 Enlista los números enteros del 1 al 12. h3 Divide entre 3 la suma de los números enteros del 1 al 12. h4 Distribuye los números del 1 al 12 de manera aleatoria en las flores. h5 Aplica el ensayo y error. h6 Fija ciertos números en determinadas flores. h7 Descompone el 26 en sumas de cuatro números. h8 Agrupa y posiciona duplas de números que sumen 13. h9 Dibuja un diagrama equivalente al problema propuesto.	H1 Aplica el ensayo y error. H2 Enlista los números del 1 al 10. H3 Adiciona números de casas vecinas donde le es posible. H4 Identifica duplas de casas tales que la suma es igual. H5 Ubica números en casas donde se conoce la suma de la dupla. H6 Simplifica el problema analizando el caso de dos casas vecinas y sus correspondientes opuestas

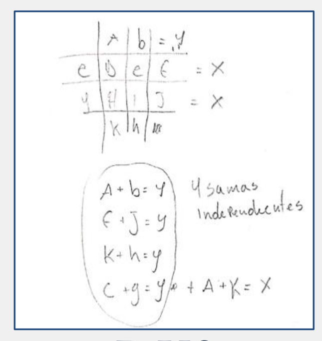
Resultados



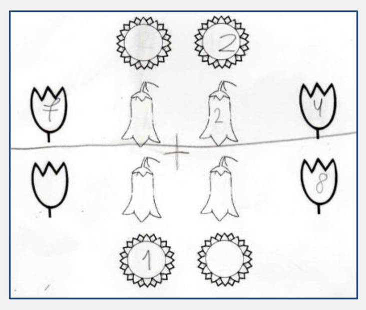
P2B15



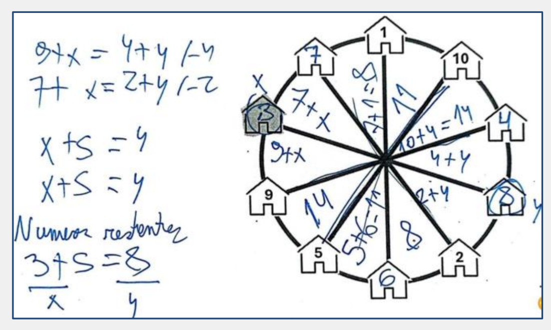
P2M6



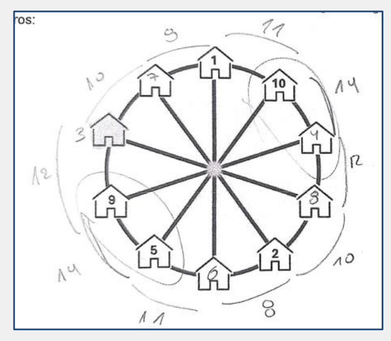
P1U6



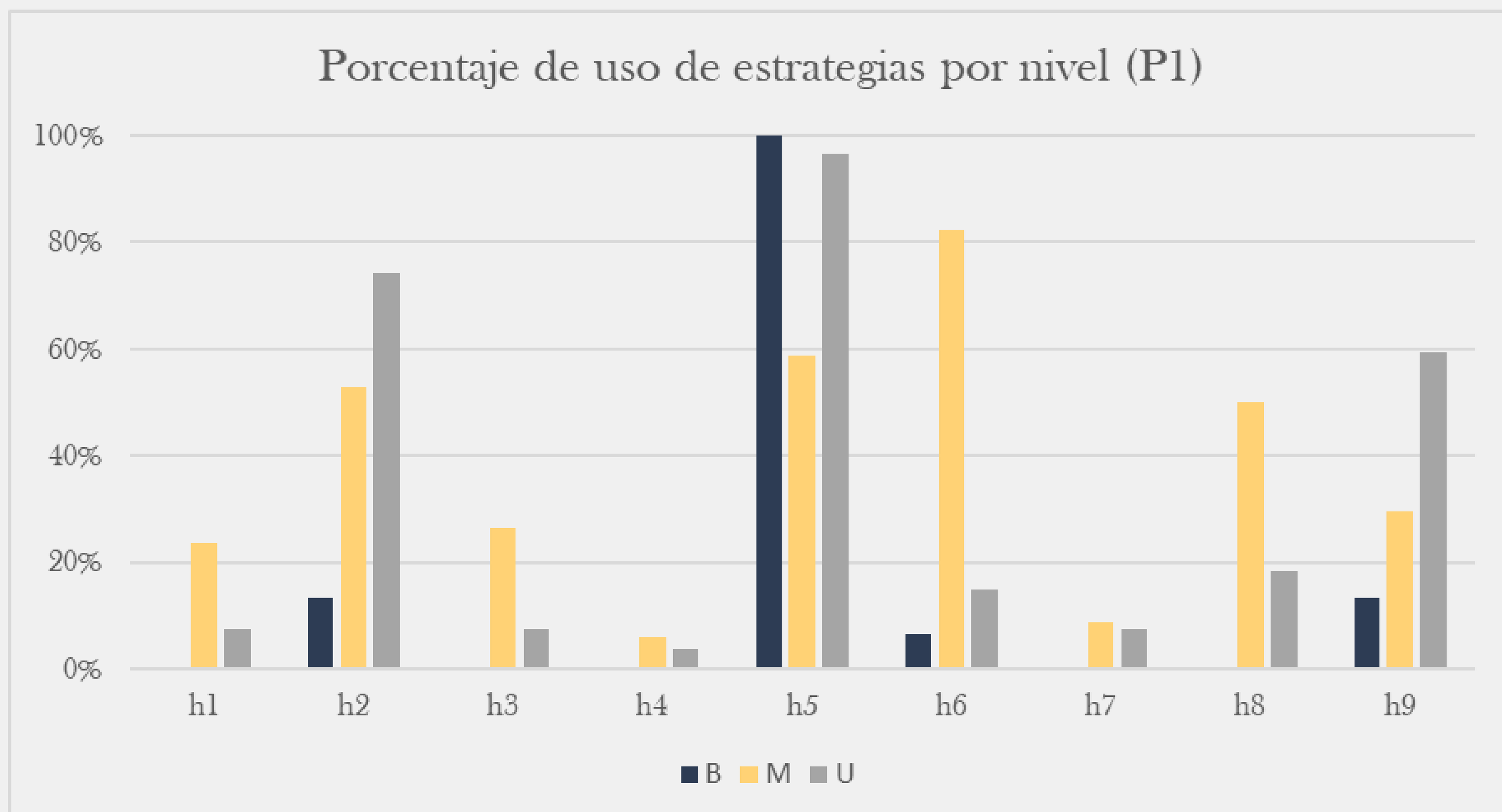
P1B1

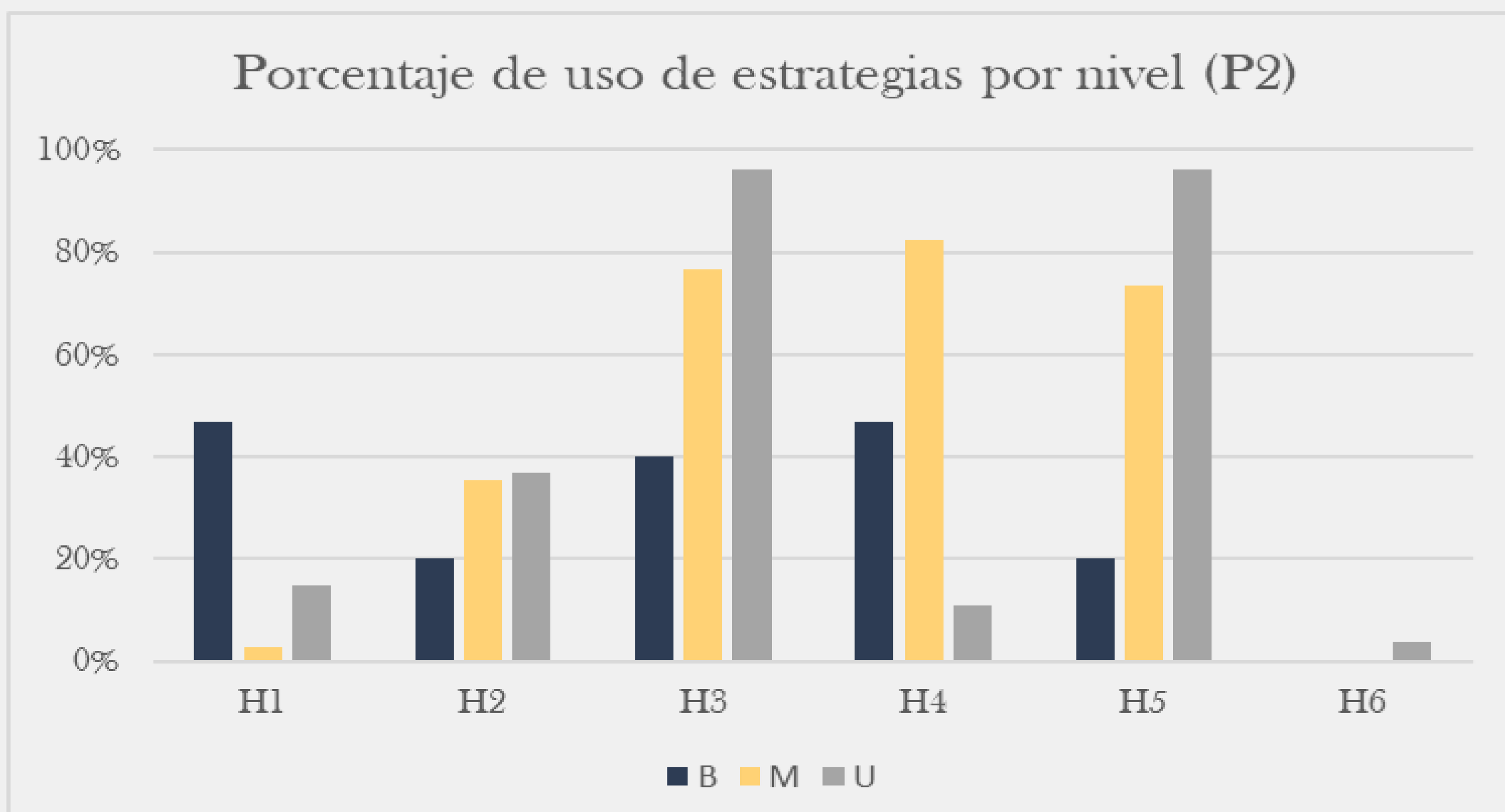


P2M10



P2U10





Conclusiones

El estudio demuestra la efectividad de las heurísticas en la resolución de problemas no rutinarios, observando cómo los estudiantes, desde 4° básico hasta la universidad, integran múltiples estrategias simultáneamente. Mientras que en 4° básico predomina el ensayo y error, en 1° medio y la universidad se combinan con heurísticas más avanzadas, como la agrupación lógica y la descomposición numérica. Las implicaciones en la práctica docente sugieren la necesidad de fomentar la enseñanza de diversas heurísticas desde edades tempranas, permitiendo su uso combinado a medida que los estudiantes avanzan.

Referencias

Dudeney, H. (1967). *536 puzzles and curious problems.* Charles Scribner's Sons

Ministerio de Educación de Chile. (2015). *Bases curriculares: 7º básico a 2º medio.* Ministerio de Educación, Gobierno de Chile.

Ministerio de Educación de Chile. (2018). *Bases curriculares: Primero a sexto básico.* Ministerio de Educación, Gobierno de Chile.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas.

Rodríguez Jara, M., Vergara-Gómez, A., Mondaca-Saavedra, A., & Gregori Huerta, P. (2023). Taller de resolución de problemas no rutinarios para estudiantes de 8 a 9 años: Un estudio de caso. *Uniciencia*, 37(1), 1-23. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.28

sochiem
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

Estudio del trabajo matemático de profesoras en formación inicial en la organización y gestión de una clase basada en juegos en Primer Año de Enseñanza Media

Kristil Oyarce, Nisi Salazar, Romina Menares
Universidad de Valparaíso

INTRODUCCIÓN

El juego en el aprendizaje de las matemáticas	El juego está intrínseco en nuestra sociedad, sin embargo no es incorporado de manera sistemática en la sala de clases. Si bien, trabajar con el juego requiere de más esfuerzo para el profesor, este instrumento es un excelente mediador para el aprendizaje (Brousseau, 1997; Simbaña-Haro et al., 2022). Diversas investigaciones señalan que el juego es un catalizador del desarrollo de aprendizaje significativo. (e.g. Garza et al., 2022; Matus, 2023; Parker y Thomsen, 2019)
Gestión del profesor	La gestión del profesor es indispensable para el desarrollo del conocimiento, encargándose de ambientar y gestionar procesos de enseñanza (Elliott, 2000).
Objetivo general	**Comprender cómo profesores en formación inicial gestionan el juego en la sala de clases, para desarrollar aprendizaje matemático**.
Marco teórico y conceptual	Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak et al., 2022). Particularmente, analizamos el ETM Idóneo (Henríquez-Rivas et al., 2022) del profesor. Aprendizaje Basado en Juego (ABJ), explicado por la UNICEF (2018).
Marco metodológico	Realizamos una investigación-acción (Elliot, 2000).

PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES

Los profesores se encuentran con obstáculos al momento de interactuar con el juego en la sala de clases (Shah y Foster, 2015, p. 243).

Profesoras en formación inicial notan una problemática en cuanto a la gestión y organización del juego en la sala de clases, identificando una **brecha entre el aprendizaje teórico y práctico en su formación**.

Aunque teóricamente en la formación inicial se incentiva la implementación de clases innovadoras y con mayor interacción entre el profesor y estudiante, finalmente, en la práctica, se suele tender a clases tradicionales. (Van Wyk y De Beer, 2019)

Revisión sistemática (Gaona, 2022) en la base de datos de Scopus y WoS usando las palabras "games, mathematic*, teaching*, teacher, learning, digital, non-digital".

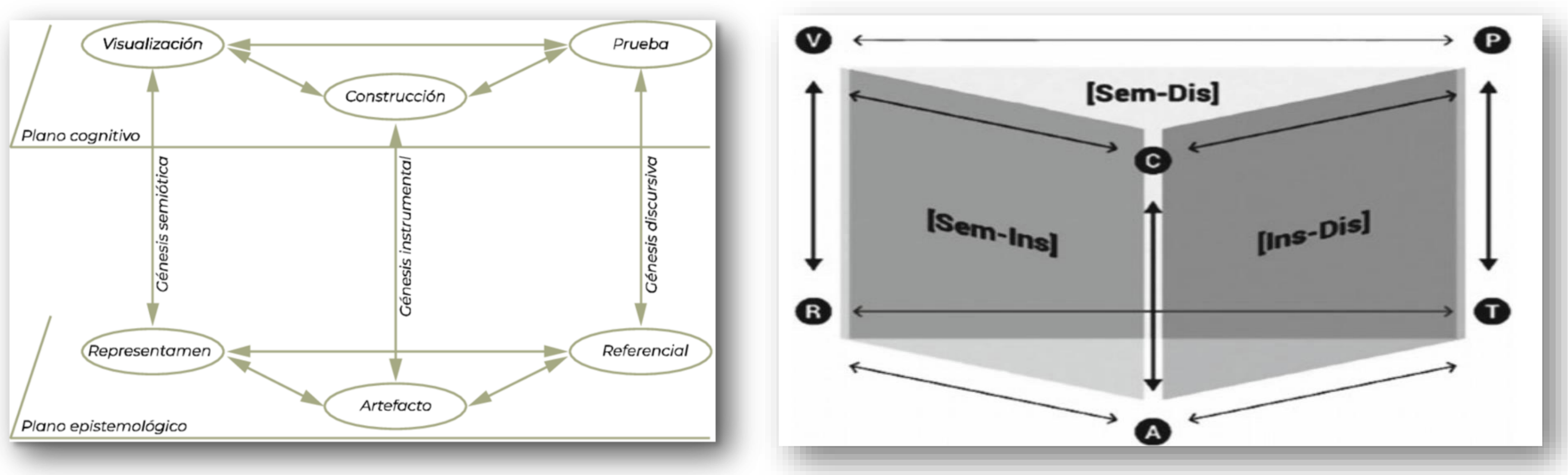
"Si bien los juegos educativos digitales se utilizan en el aula de primaria, rara vez se utilizan, o nunca, en el aula de matemáticas de secundaria o superior." (Matic et al., 2023, p.1).

Evidenciamos que el juego se utiliza en las salas de clases de educación preescolar, primaria y superior, sin embargo, es mayormente utilizado e investigado en los primeros niveles, dejando relegada la enseñanza secundaria.

Inferimos que esto sucede aún más en los juegos concretos.

MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL

Espacios de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak et al., 2022): Permite estudiar el trabajo del profesor en el aula (Henríquez-Rivas et al., 2022), en relación con aspectos epistemológicos y cognitivos, que involucra representaciones de los objetos, artefactos e instrumentos, y la referencia teórica que ocupa. Se identifican las génesis semiótica, instrumental y discursiva, y los planos que las articulan.



Diagramas del Espacio de Trabajo Matemático, sus génesis y planos verticales (Kuzniak, 2022, pp. 10-11)

Consideramos el **Aprendizaje Basado en Juego (ABJ)**, explicado por la UNICEF (2018), pues este organismo entrega una caracterización que nos permite medir los conocimientos de forma lúdica. El objetivo del juego está por sobre el objetivo curricular.

METODOLOGÍA

Se propone una metodología de **investigación-acción** (Elliot, 2000), pues esto permite hallar indicadores que caractericen la gestión del profesor en el aula, donde las mismas profesoras en formación son las que encuentran el problema y son sujetos de estudio de este trabajo, e investigan para lograr mejoras y puntos de encuentro entre sus conocimientos teóricos y prácticos.
La investigación se realiza en tres fases:
Fase 1: Planificación de la clase y diseño del juego. (Adaptación del juego *Tuki*)
Fase 2: Implementación de la clase: ***"Aplicar conocimientos sobre las coordenadas del plano cartesiano y la rotación de figuras planas a través del juego de mesa llamado Tuki."***
Fase 3: Análisis teórico del trabajo realizado.

Se establecen categorías a partir de la teoría de los ETM y ABJ. Esta última solo se utiliza para el análisis de la implementación de la clase. La tabla resume las categorías a utilizar.

Fases	Descripción de la categoría
Fase 1	ETM idóneo potencial: Reconocemos la activación de los planos [Sem-Dis], [Sem-Ins], [Ins-Dis] cuando se coordinan las génesis en el trabajo matemático.
Fase 2	ETM idóneo efectivo: Reconocemos la activación de los planos [Sem-Dis], [Sem-Inst], [Ins-Dis] cuando se coordinan las génesis en la interacción profesor-estudiante.
	Aprendizaje basado en juego: Se buscará en los diálogos que se dan en la sala de clases, la manifestación de disfrute de los/as estudiantes. Algunas de las categorías que se consideran son: • *El juego es provechoso.* • *El juego es divertido.* • *El juego como una participación activa.*

RESULTADOS

En la fase 1 evidenciamos que mientras más cambios y adaptaciones sufre el juego, más se activan y vinculan las génesis y planos del ETM.

En la fase 2 se observa que el plano [ins-dis] no se activó, aun así, a medida que la clase progresa y los/as estudiantes avanzan en los distintos niveles, se activan las génesis y los planos del ETM.

En cuanto al Aprendizaje Basado en Juego, se pudo observar que la propuesta efectivamente se enmarcó en un contexto de juego, dado que se dieron las condiciones propuestas por la UNICEF (2018), manifestándose una categoría en mayor medida que otra, siendo las categorías que más se activaron: "*El juego es divertido*" y "*el juego como algo iterativo.*"

CONCLUSIONES

Los resultados destacan cómo el trabajo matemático se fue fortaleciendo a medida que la adaptación del juego fue evolucionando, tanto en la planificación como en la interacción de profesor-estudiante en la clase. En cuanto al ABJ la propuesta del juego establecido por las profesoras se encuadra en las características que definen al juego. Finalmente, las profesoras proponen una mejora para el juego, ya que es necesario desarrollar en los/as estudiantes un trabajo matemático completo para mejorar la gestión de profesores en clase.

ARTÍCULO CON REFERENCIAS

sochiem
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad ARTURO PRAT del Estado de Chile

Universidad de Concepción Campus Los Ángeles

Fichas Algebraicas

Una alternativa para la enseñanza de operatorias algebraicas a nivel escolar

Judith Zárate; Mario González; Juan José Núñez
Universidad Arturo Prat

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, diversos acontecimientos han impactado el contexto educativo chileno, desafiando las herramientas y habilidades de los docentes de matemáticas. Siendo el álgebra un área amplia y, con frecuencia, percibida como poco afable por los estudiantes, requiere propuestas innovadoras que combinen enfoques simbólicos, pictóricos y tangibles para facilitar su aprendizaje. En este contexto, la presente investigación tiene como objetivo, a través de la **ingeniería didáctica**, diseñar **situaciones** que promuevan la comprensión y resolución de operaciones algebraicas. Utilizando las **Fichas Algebraicas** para generar **representaciones semióticas**, se busca que los estudiantes construyan sus conocimientos al elaborar y dar significado a diversas formas de representación.

PROBLEMA Y ANTECEDENTES

- **Problema**

La falta de comprensión de operatorias algebraicas en los estudiantes.

- **Antecedentes**

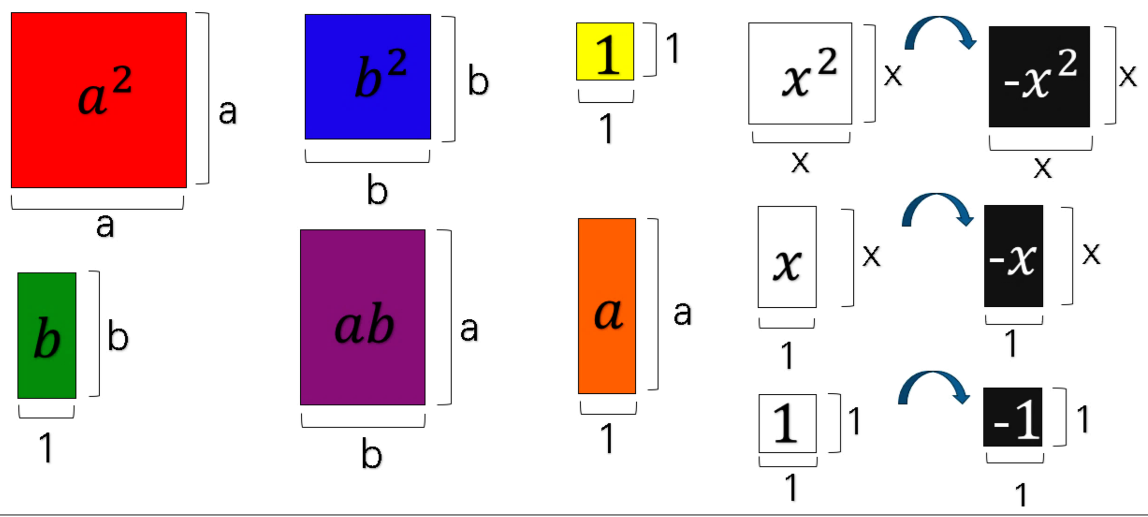
Los altos porcentajes de resultados insuficientes en evaluaciones estandarizadas.

- **Pregunta de Investigación**

¿Qué situaciones y/o actividades favorecen la comprensión de las expresiones algebraicas y sus operaciones?

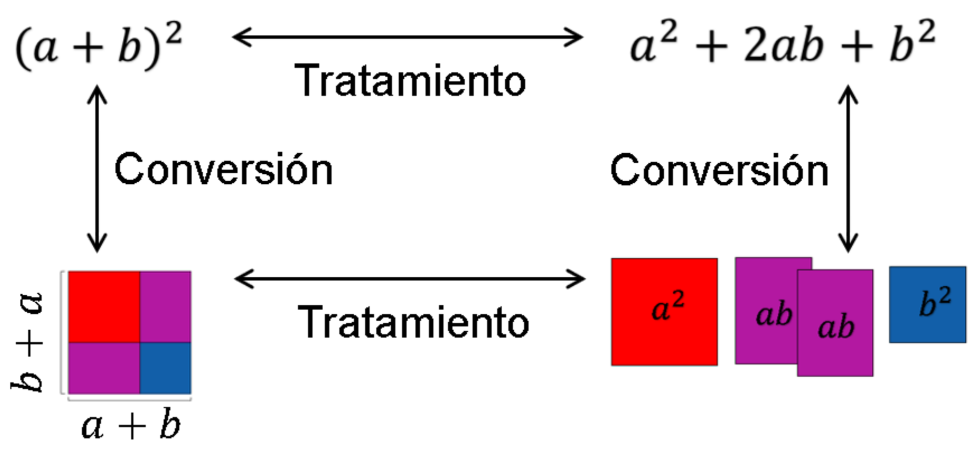
FICHAS ALGEBRAICAS

Es una herramienta geométrica manipulativa, inspirado en el **Puzle Algebraico**, las **Tabletas Algebraicas** y los **Bloques de Dienes**, facilita la comprensión de operatorias algebraicas. Incluye 124 piezas para trabajar en grupos de hasta 4 personas, permitiendo generar representaciones concretas y simbólicas.



REPRESENTACIONES SEMIOTICAS

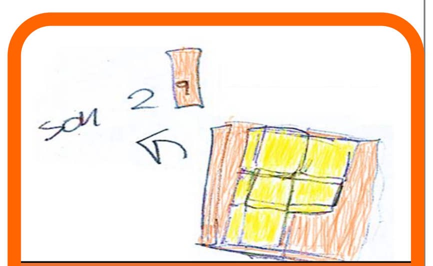
Duval destaca que las representaciones son clave en la comprensión de la matemática. Al utilizar las **Fichas Algebraicas** se integran representaciones simbólicas y concretas mediante tratamiento y conversión, facilitando el aprendizaje."



RESULTADOS PRELIMINARES

Los resultados observados en la implementación se pueden sintetizar en:

- Exploran el uso de las fichas algebraicas mediante la manipulación y el uso del instructivo.
- Discuten y argumentan sobre las posibles estrategias para abordar el problema.
- Conjeturan sobre las diferentes aplicaciones de las Fichas Algebraicas en otras operatorias.



"La diferencia entre el doble de un número y cinco unidades".
$2a-5$

METODOLOGÍA

En esta investigación, la **ingeniería didáctica** propuesta por **Artigue** cumple la doble función: actúa tanto como metodología de investigación como en la creación de situaciones de enseñanza-aprendizaje. Para ello, se establecen estas cuatro fases de trabajo:

1 Análisis Preliminar

- Análisis Epistemológico
- Análisis Cognitivo
- Análisis Didáctico

2 Análisis A priori

- Diseño de situaciones didácticas con Fichas Algebraicas.
- Diseño de Guía de Trabajo.
- Diseño de instructivo para las Fichas Algebraicas.

3 Experimentación

- Implementación con estudiantes de 1° Medio del Liceo Aníbal Pinto de la ciudad de Iquique.
- Instrumentos: Guía de trabajo y Fichas Algebraicas.

4 Análisis A posteriori

- Revisión y evaluación de producciones.
- Revisión entrevistas de los estudiantes.
- Revisión a los registros visuales.

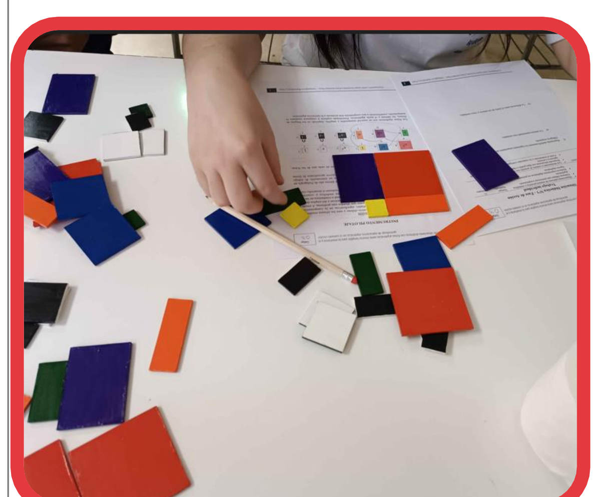
SITUACIÓN DIDACTICA

Siguiendo el enfoque de **Brousseau**, el diseñar un escenario pedagógico que fomente la reflexión y el desarrollo integral. Las Fichas Algebraicas promueve a los estudiantes a representan operatorias algebraicas correspondientes a los niveles de 7° Básico a 1° Medio de forma concreta, pictórica y simbólica. La actividad se organiza en las siguientes fases:

Acción (Individual)	El estudiante manipula las Fichas, comparando tanto colores como dimensiones entre sí. Emite sus primeras hipótesis para comprender y resolver el problema.
Formulación (Dual)	A través del trabajo colaborativo y acuerdo mutuo. Los estudiantes reconocen, descomponen y reconstruyen estrategias.
Validación (Grupal)	El estudiante manipula las Fichas, comparando tanto colores como dimensiones entre sí. Emite sus primeras hipótesis para comprender y resolver el problema.
Institucionalización	El docente canonisa las soluciones y conjeturas de los estudiantes. Sin desmerecer el trabajo de los estudiantes retroalimenta la experiencia.

CONCLUSIONES

Esta investigación propone un cambio en el paradigma tradicional del álgebra en el aula. Considerando las evidencias presentadas, podemos afirmar que el uso de las Fichas Algebraicas responde a nuestra pregunta de investigación según estos enfoques:.



- Las Fichas Algebraicas, apoyadas en la teoría de **situaciones didácticas de Brousseau**, crean un contexto que fomenta la comprensión crítica de conceptos algebraicos y geométricos, más allá de la memorización.
- Las **representaciones semióticas** generadas con las Fichas Algebraicas permiten transformar y comprender el objeto matemático de diversas formas, creando conexiones visuales que favorecen la resolución de problemas y la transferencia de conocimientos a nuevas situaciones.

- El uso adecuado de las Fichas Algebraicas permite a los estudiantes experimentar de forma tangible la resolución de problemas de una manera creativa y no lineal, fomentando un pensamiento crítico y un razonamiento lógico.
- Trabajar de manera integrada estos enfoques, garantiza una comprensión significativa en la aplicación de conceptos algebraicos, promoviendo el aprendizaje activo y reflexivo en los estudiantes.

REFERENCIAS

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática.
- Brousseau, G. (2007).Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didáctico/Didactic to Algebra Study(Vol. 7). Libros del Zorzal.
- Duval R. (1998). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Educación Matemática II. (Editor F. Hitt), Grupo Editorial Iberoamérica, 1998, pp. 173-201. México.
- Duval, R. (1999). Registros de representación, comprensión y aprendizaje. En semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.
- Leighton, H., (2017). Puzle algebraico: del pensamiento concreto al pensamiento abstracto. Universidad de Antofagasta.
- Salazar, V., Jiménez, S., & Mora, I. (2017). Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización. Editorial Académica Española

Contáctanos

SUPERANDO OBSTÁCULOS EN LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA CON INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA

Sebastián Saavedra Messina y Adiel Silva Riveros
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

PROBLEMÁTICA

Ante los desafíos que aún persisten en la enseñanza del cálculo, **surge la necesidad de explorar nuevas estrategias educativas**

Este estudio busca **analizar el potencial de la Inteligencia Artificial Generativa (IAG), para superar los obstáculos presentes en aprendizaje de la derivada**

Se plantea la pregunta **¿Cómo la IAG puede transformar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada y mejorar la comprensión de este concepto?**

OBSTÁCULOS EN LA DERIVADA

3ero y 4to medio OA 03:
Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

Conceptual: Dificultad para entender la derivada como razón de cambio.

Representacional: Inhabilidad para analizar funciones gráficamente.

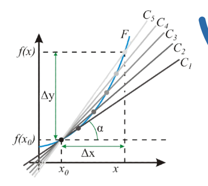
Complejidad: Concepto abstracto difícil de contextualizar.

ACTIVIDADES DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

A1: Introducción al experimento del plano inclinado y comprensión de las variables

A2: Recreación y análisis el experimento en base a la modelación

A3: Comprensión de la derivada como tasa de cambio y tangente



A4: Aplicación de la derivada

Actividad 1.

Uno de los primeros experimentos de la ciencia moderna, el cual es un estudio cinemático, corresponde al experimento del plano inclinado de Galileo Galilei realizado en el año 1604. Galileo buscaba comprender cómo afecta la gravedad en los objetos y en su movimiento.

Galileo tuvo que planear y construir un artefacto que permitiera realizar reiteradamente el experimento, con el fin de verificar o refutar su hipótesis. Utilizó este artefacto con el fin de desacelerar el movimiento del objeto, y así estudiar el comportamiento de los objetos bajo la fuerza de gravedad.

¿Por qué crees que Galileo decidió usar un plano inclinado en lugar de dejar caer las esferas directamente?

¿Qué observó Galileo sobre la distancia recorrida por las esferas en el plano inclinado? ¿Cómo puedes expresar esta relación?

Actividad 2.

¡Ahora te invitamos a participar en un fascinante experimento que te permitirá explorar conceptos fundamentales de la física y la matemática de una manera práctica y divertida! ¿Alguna vez te has preguntado cómo se comportan los objetos en una superficie inclinada? ¿Qué factores influyen en su movimiento? ¿Cómo podemos medir y analizar la aceleración y velocidad? ¡Vamos a descubrirlo juntos!

Actividad 3.

Realizaremos ejercicios para que descubras y apliques el concepto de velocidad a partir del experimento realizado. A través de cálculos, modelado y análisis, aprenderás cómo las velocidades promedio se relacionan con la velocidad instantánea. A partir de los datos de la distancia recorrida y el tiempo transcurrido obtenidos en el experimento, es posible calcular la velocidad de la bola en un intervalo de tiempo (velocidad promedio) y también la velocidad en un instante de tiempo (velocidad instantánea).

La **velocidad** describe qué tan rápido se mueve un objeto y en qué dirección, para obtener la velocidad media de la bola, se utiliza la siguiente fórmula.

$$Velocidad = \frac{Distancia\ recorrida\ (metros)}{Tiempo\ transcurrido\ (segundos)}$$

1. ¿Cuál es la velocidad promedio de la bola en todo el trayecto de la viga (1 metro de longitud)?
5. Utilizando herramientas tecnológicas (calculadora o ChatGPT), completa la siguiente tabla calculando las velocidades promedios en base a la fórmula obtenida.

ChatGPT

Intervalo de tiempo	**[0;0,2]**	**[0;0,1]**	**[0;0,01]**	**[0;0,001]**	**[0;0,0001]**
Velocidad promedio					

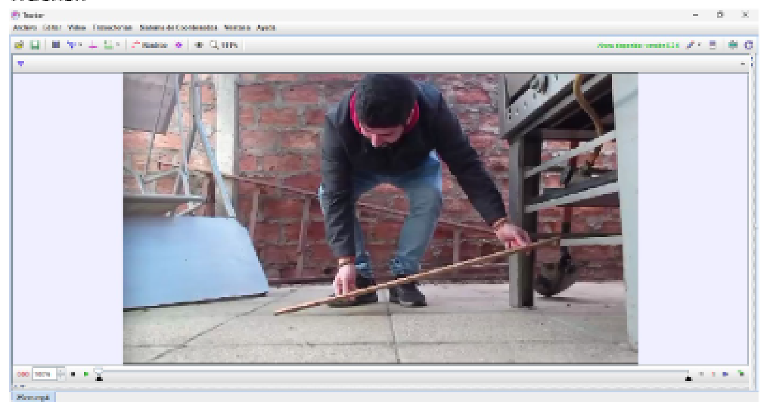
Actividad 4.

En base a lo aprendido realizamos ejercicios de aplicación sobre la derivada y sus aplicaciones.

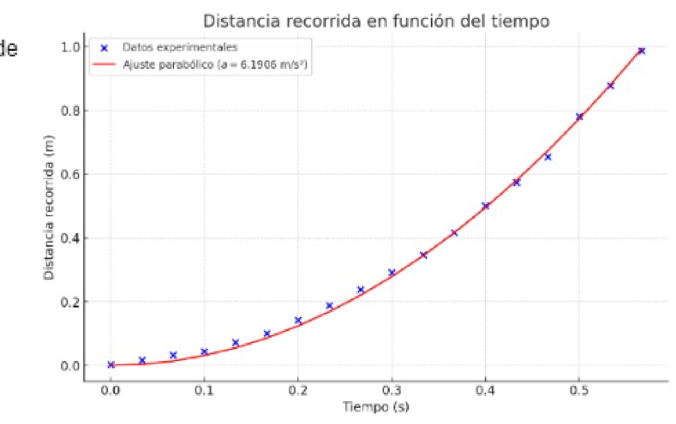
1. Una bola se deja rodar por una colina de 2 metros de longitud. La distancia recorrida $r(t)$ en metros está dada por $r(t) = 5t^2$, donde t es el tiempo en segundos. Encuentra la velocidad
6. Define con tus propias palabras el concepto de derivada.

EXPERIMENTACIÓN Y CHATGPT

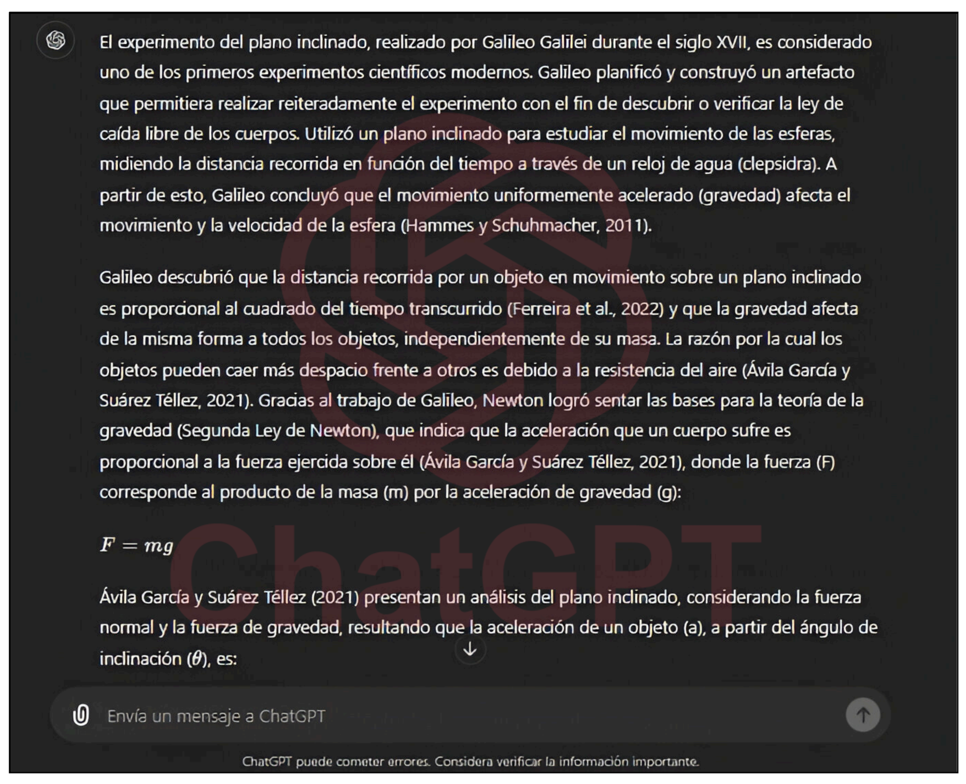
Resultados de la experimentación a 25cm de altura
En base al experimento realizado con una pelota de taca taca, se obtuvieron los siguientes datos de Tracker.



	t (s)	r (m)
0	0.000000	0.002358
1	0.033322	0.017043
2	0.066644	0.031597
3	0.099967	0.043618
4	0.133289	0.072514
5	0.166611	0.100305
6	0.199933	0.141773
7	0.233256	0.188009
8	0.266578	0.238013
9	0.299900	0.291258
10	0.333222	0.346557
11	0.366544	0.416876
12	0.399867	0.500574
13	0.433189	0.574211
14	0.466511	0.653982
15	0.499833	0.781005
16	0.533156	0.877459
17	0.566478	0.986282



$$r(t) = \frac{1}{2} \cdot 6.1906 \cdot t^2$$



El experimento del plano inclinado, realizado por Galileo Galilei durante el siglo XVII, es considerado uno de los primeros experimentos científicos modernos. Galileo planificó y construyó un artefacto que permitiera realizar reiteradamente el experimento con el fin de descubrir o verificar la ley de caída libre de los cuerpos. Utilizó un plano inclinado para estudiar el movimiento de las esferas, midiendo la distancia recorrida en función del tiempo a través de un reloj de agua (clepsidra). A partir de esto, Galileo concluyó que el movimiento uniformemente acelerado (gravedad) afecta el movimiento y la velocidad de la esfera (Hammes y Schuhmacher, 2011).

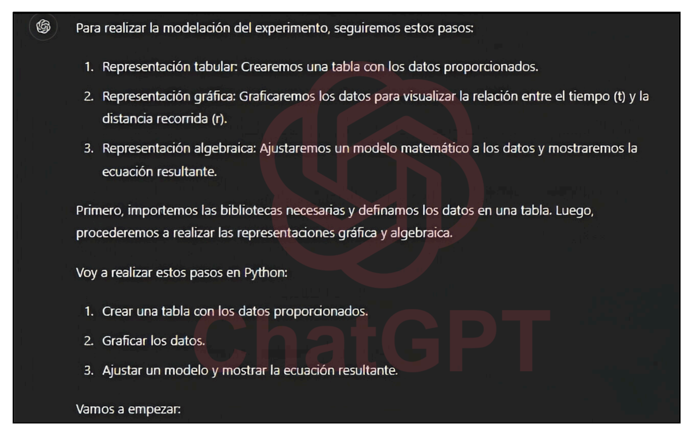
Galileo descubrió que la distancia recorrida por un objeto en movimiento sobre un plano inclinado es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido (Ferreira et al., 2022) y que la gravedad afecta de la misma forma a todos los objetos, independientemente de su masa. La razón por la cual los objetos pueden caer más despacio frente a otros es debido a la resistencia del aire (Ávila García y Suárez Téllez, 2021). Gracias al trabajo de Galileo, Newton logró sentar las bases para la teoría de la gravedad (Segunda Ley de Newton), que indica que la aceleración que un cuerpo sufre es proporcional a la fuerza ejercida sobre él (Ávila García y Suárez Téllez, 2021), donde la fuerza (F) corresponde al producto de la masa (m) por la aceleración de gravedad (g):

$$F = mg$$

Ávila García y Suárez Téllez (2021) presentan un análisis del plano inclinado, considerando la fuerza normal y la fuerza de gravedad, resultando que la aceleración de un objeto (a), a partir del ángulo de inclinación (θ), es:

Envía un mensaje a ChatGPT

ChatGPT puede cometer errores. Considera verificar la información importante.



Para realizar la modelación del experimento, seguiremos estos pasos:

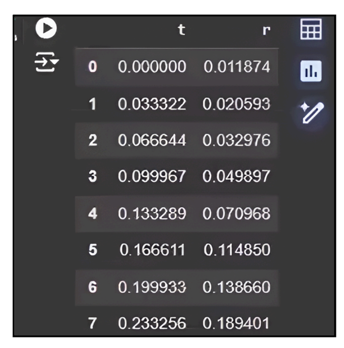
1. Representación tabular: Crearemos una tabla con los datos proporcionados.
2. Representación gráfica: Graficaremos los datos para visualizar la relación entre el tiempo (t) y la distancia recorrida (r).
3. Representación algebraica: Ajustaremos un modelo matemático a los datos y mostraremos la ecuación resultante.

Primero, importemos las bibliotecas necesarias y definamos los datos en una tabla. Luego, procederemos a realizar las representaciones gráfica y algebraica.

Voy a realizar estos pasos en Python:

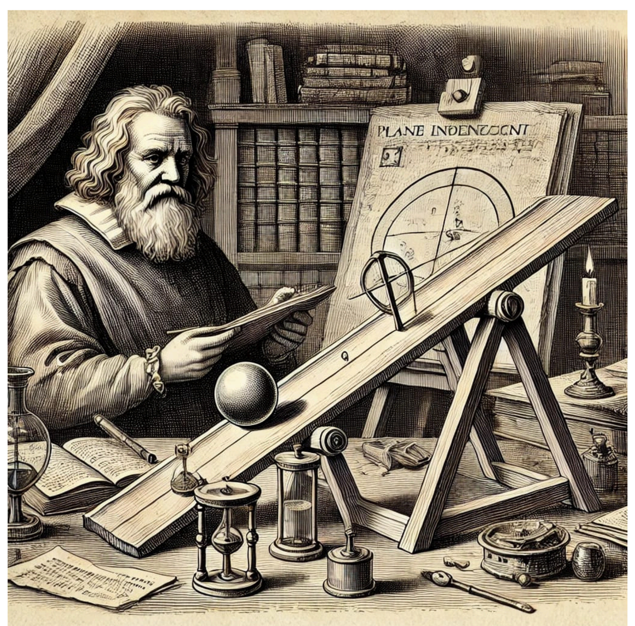
1. Crear una tabla con los datos proporcionados.
2. Graficar los datos.
3. Ajustar un modelo y mostrar la ecuación resultante.

Vamos a empezar:



	t	r
0	0.000000	0.011874
1	0.033322	0.020593
2	0.066644	0.032976
3	0.099967	0.049897
4	0.133289	0.070968
5	0.166611	0.114850
6	0.199933	0.138660
7	0.233256	0.189401

FENÓMENO DE ESTUDIO



El plano inclinado:
El experimento del plano inclinado de Galileo Galilei, realizado en el siglo XVII, sentó las bases para la teoría de la gravedad de Newton y permite estudiar conceptos como fuerza, velocidad y aceleración, siendo una herramienta educativa valiosa para explorar el movimiento uniformemente acelerado.

MODELACIÓN Y TEGNOLOGÍA

Selección de un fenómeno de estudio

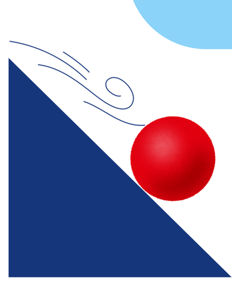
A1. Profundización sobre el fenómeno

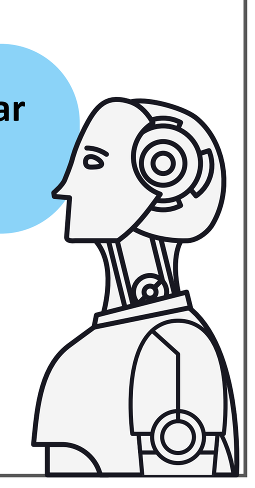
A2. Diseño del experimento

A3. Ciclo de modelación del fenómeno

A4. Mirada escolar del fenómeno

A5. Institucionalización





REFLEXIONES

La integración de la **Inteligencia Artificial Generativa (IAG)** en la enseñanza de la **derivada** ha demostrado ser una herramienta útil para desarrollar la comprensión de este concepto, al ofrecer representaciones visuales y adaptarse a las necesidades de los estudiantes. Uno de los principales obstáculos en el aprendizaje de la **derivada** es la abstracción de conceptos como el cambio instantáneo. La **IAG** permite a los estudiantes abordar estos obstáculos a través de representaciones visuales y actividades guiadas, construyendo una base intuitiva y práctica del concepto.

El uso de la **IAG** facilita la comprensión al proporcionar retroalimentación inmediata y conectar teoría y práctica. Motiva a los estudiantes mediante un aprendizaje personalizado e interactivo, permitiéndoles avanzar a su propio ritmo y corregir errores en un entorno seguro. Además, la **IAG** ayuda a los estudiantes a relacionar la **derivada** con la pendiente de la tangente en un punto de la gráfica, visualizando cómo representa la velocidad instantánea en un punto específico respecto a la gráfica del desplazamiento.

Este tipo de interacción promueve una comprensión significativa y refuerza la utilidad de la **derivada** en el modelado de fenómenos reales, transformando el aprendizaje en una experiencia más significativa, accesible y efectiva.

REFERENCIAS

Balda, P. A. (2022). Estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje desde un enfoque socioepistemológico. Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 7, 1–24. https://doi.org/10.46618/iime.148

Ferreira, H., Almeida Junior, E. F., Espinosa-García, W., Novais, E., Rodrigues, J. N. B., & Dalpian, G. M. (2022). Introduzindo aprendizado de máquina em cursos de física: O caso do rolamento no plano inclinado. Revista Brasileira de Ensino de Física, 44, e20220214. https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2022-0214

Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M. R., & Ariza Nieves, L. M. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. Revista Científica General José María Córdova, 15(20), 137–153. https://doi.org/10.21830/19006586.170

Hammes, O., & Schuhmacher, E. (2011). O PLANO INCLINADO: UMA ATIVIDADE DE MODELIZAÇÃO MATEMÁTICA. REVISTA EXPERIÊNCIAS EM ENSINO DE CIÊNCIAS, 6(2), 66–85.

Hernandez-Suarez, C. A., Prada-Núñez, R., & Ramírez-Leal, P. (2017). Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería. Revista Perspectivas, 2(2), 73–83. https://doi.org/10.22463/25909215.1316

MINEDUC. (2019). Bases Curriculares: 3° y 4° medio (1a ed.). Ministerio de Educación, Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf

Pérez Vera, I., & Salazar Cortez, P. (2024). Diseño de un curso de formación inicial para profesores, que integra la modelación matemática escolar con evaluación de tecnologías. El cálculo y su enseñanza, 20(1), 15–44.

Sanabria, G. I. N. (2013). Al cálculo en educación matemática. Infancias Imágenes, 12(1), 44–50.

Modelación matemática del péndulo usando Tracker y GeoGebra

Santiago Giovanetti y Susana Riquelme
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Introducción

La tecnología puede transformar la forma en que los estudiantes comprenden el cálculo mediante actividades prácticas y visuales, conectando conceptos abstractos con experiencias concretas. En el sistema escolar chileno, los conceptos de límites, derivadas e integrales se han incorporado en el currículo de tercero y cuarto medio. También se han establecido estándares para la formación de profesores de matemáticas que incluyen estos conceptos, resaltando su importancia en la enseñanza. Esto ha generado la necesidad de diseñar actividades pedagógicas que integren la modelación matemática en el aula. La actividad propuesta busca que los estudiantes construyan una función matemática a partir de la experimentación concreta, promoviendo un enfoque integral que conecte aspectos experimentales, gráficos, algebraicos y tabulares, por lo conectamos la teoría y modelación con una actividad práctica.

Problema principal

La problemática de la que pudimos dar cuenta es la dependencia excesiva de modelos algebraicos en la enseñanza del cálculo, denotando una falta de distintos tipos de representación de los posibles objetos matemáticos.

Propuesta

En particular se propone realizar el experimento del "**Péndulo**" buscando modelar la ecuación del comportamiento dinámico del péndulo (posición de la masa con respecto al tiempo) para comprender el movimiento de una masa suspendida desde un punto fijo y algunas de sus propiedades a través de softwares como **Tracker** y **Geogebra**.
Relacionamos este fenómeno con límites, ya que al analizar la posición del péndulo y ver cómo varía con el tiempo, estamos viendo la posición del péndulo cuando el tiempo va hacia el infinito.

Antecedentes

Dificultades en la enseñanza y aprendizaje del cálculo escolar: La investigación en el aprendizaje del cálculo escolar ha identificado múltiples errores, obstáculos y problemáticas en los conceptos de límite, derivada e integral. En el caso del límite, las dificultades se relacionan con concepciones erróneas y obstáculos epistemológicos, incluyendo una tendencia a enfocarse en enfoques algebraicos simplistas que no abordan adecuadamente la continuidad y las discontinuidades (Hernández, Prada y Ramírez, 2017; Medina y Rojas, 2015; La Plata y Malaspina, 2019). Algunos ejemplos de esto lo mencionan González-García et al (2018) "Errores a la hora de operar y simplificar expresiones algebraicas. Por ejemplo, operar con un signo negativo como si fuera positivo, Incapacidad para analizar funciones dadas en forma de tabla o mediante su representación gráfica."

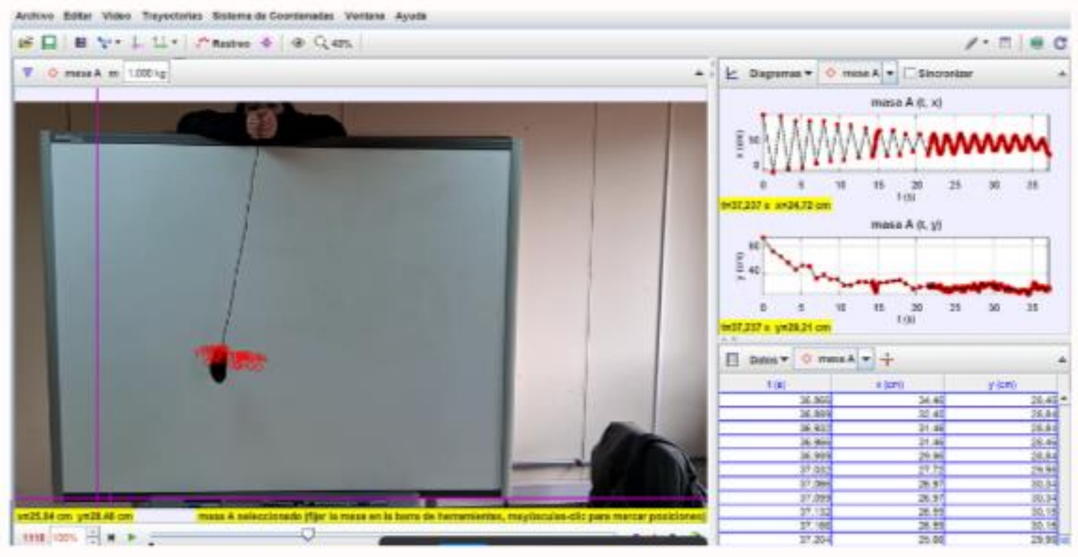
Método

Video

Realizamos un video del comportamiento de un péndulo

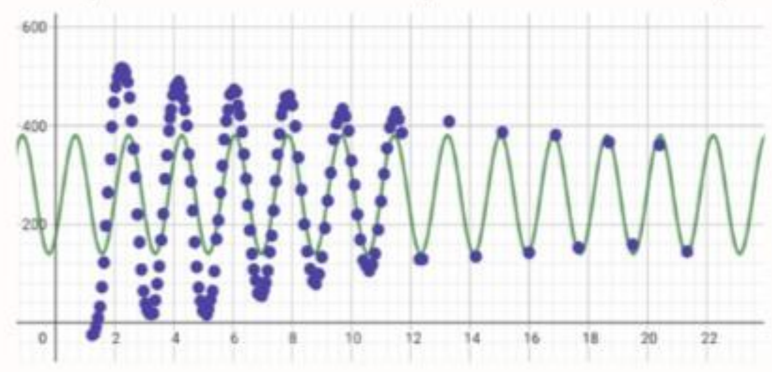
Obtención de datos

Con "Tracker" obtuvimos los datos de posición con respecto al tiempo de la masa del péndulo.



Gráfica

Traspasamos los datos tabulados obtenidos con Tracker a Geogebra y buscamos una función que se aproximara a los puntos dados por el péndulo.



Modelo algebraico

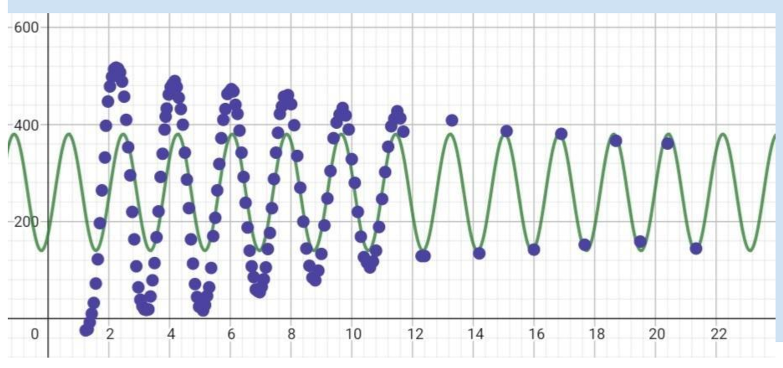
Generamos una contrucción algebraica la cual se aproxima al comportamiento del péndulo.

$f(x) = 150 \ \text{sen}(3.5\ x) + 250$

Resultados

Encontramos un ecuación que lograba modelar el comportamiento desde cierto punto:
f(x) = 120sen(3.5x+150)+260
La cual es una aproximación de la ecuación del movimiento dinámico del péndulo que es:

$$T = Jd^2\theta(t)1/dt^2 + Bd\theta(t)1/dt + mglsen\theta(t)$$



En el gráfico a la izquierda se puede apreciar una comparativa de la función modelada (color verde) y los datos experimentales (color azul)

Conclusiones:

El mayor hallazgo al que pudimos llegar fue que fue posible aproximar la modelación de la ecuación del comportamiento dinámico del péndulo a partir de una función conocida, gracias a la gran ayuda de las herramientas tecnológicas, especialmente, **Tracker** y **GeoGebra**. Estas tecnologías mejorarían la experiencia de aprendizaje gracias a su precisión, donde además, son herramientas fácilmente manipulables y donde se puede experimentar libremente todas las veces que sea necesario para comprender el comportamiento del péndulo y sus peculiaridades.

REFERENCIAS
-El péndulo simple (20 de octubre de 2015). El péndulo simple. ehu. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/pendulo/pendulo.htm
Santos Burguete, C., Simarro Grande, J. P., Fuertes Marrón, D. (2018). Física del caos.
-Universidad de Oviedo (s.f.), Modelado de un péndulo. Uniovi. http://isa.uniovi.es/~idiaz/ADSTel/Practicas/ModeladoPendulo.html
-Hernández, L., Prada, F., & Ramírez, G. (2017). La noción de límite en la enseñanza del cálculo: Concepciones erróneas y obstáculos. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 35(3), 61-78.
-La Plata, M., & Malaspina, A. (2019). Desafíos en la comprensión del límite finito de una función real. Revista Matemática, 29(4), 82-96.
-Medina, R., & Rojas, A. (2015). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza del límite. Educación Matemática, 27(1), 50-65.
-González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta*, 47(4), 449-462.

Libro de experiencias de Modelación Matemática Escolar con Usos de Tecnologías - Producto final del Curso Tecnologías para la enseñanza de la Matemática (2023)

sochiem SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

COLEGIO FRANCISCO DE MIRANDA QUILLOTA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Universidad de Concepción Campus Los Ángeles

Análisis estadístico en educación media: medidas de dispersión y su aplicación en decisiones de vida saludable basadas en datos

Daniela Cortés Fredes y Eduardo Fernández Tapia

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Introducción

La enseñanza de la estadística cada vez se hace más necesaria considerando la cantidad de información recibida por parte de los estudiantes. En particular, la **alfabetización estadística** permite a los estudiantes tomar decisiones basadas en datos, una habilidad esencial en el siglo XXI.

En Chile el 2021 entran en vigencia las nuevas bases curriculares de 3° medio donde se encuentra el objetivo de aprendizaje: Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el **análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión** y probabilidades condicionales.

Considerando el OA y las **habilidades del siglo XXI**, en particular las *herramientas para trabajar y maneras de trabajar,* se diseña un proyecto aplicado a estudiantes de 3° medio de un colegio de la ciudad de Quillota, región de Valparaíso.

Problemática

Moore (1990) indica que la estadística es la ciencia de los datos y estos están caracterizados por la **variabilidad**, la habilidad para percibir, medir y explicar la dispersión de los datos y de los modelos que utilizamos para describirlos es la clave del razonamiento estadísticos. Considerando lo anterior, nos centraremos en tres ideas que queremos destacar.

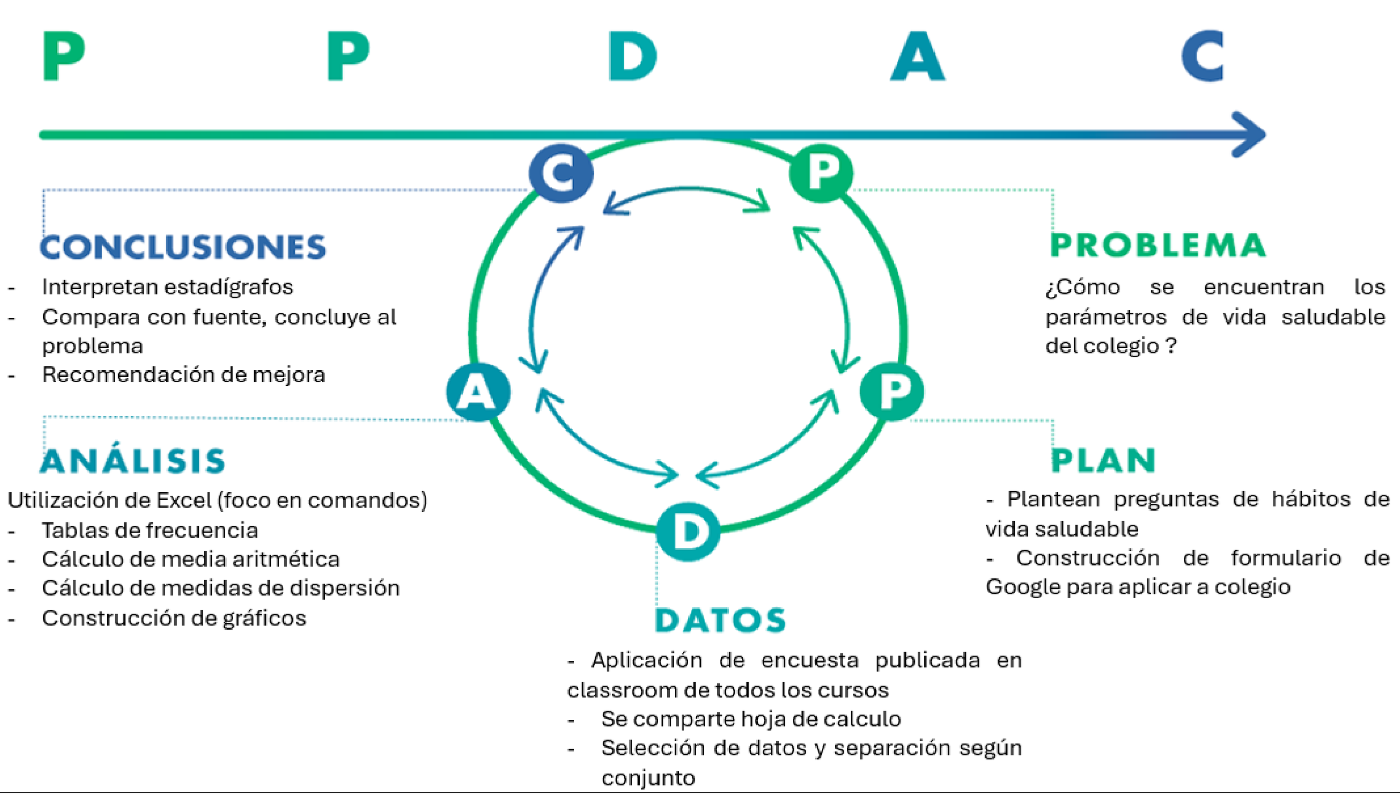
A) Enfoque Limitado: Batanero (2001) indica que los estudiantes salen del aula sin tener conciencia de que **una medida central no puede encontrarse desligada de una de dispersión**, deben ser vistas al mismo tiempo. El estudio de una distribución no se debe reducir o centrar solamente a sus promedios, debido a que se omite el hecho de la variabilidad.

B) Importancia de la dispersión: Dos muestras pueden coincidir en sus medidas de tendencia central, pero tener **distintos grados de variabilidad**, siendo un error frecuente ignorar la dispersión de los datos cuando se realizan comparaciones entre dos muestras o poblaciones (Batanero, 2001).

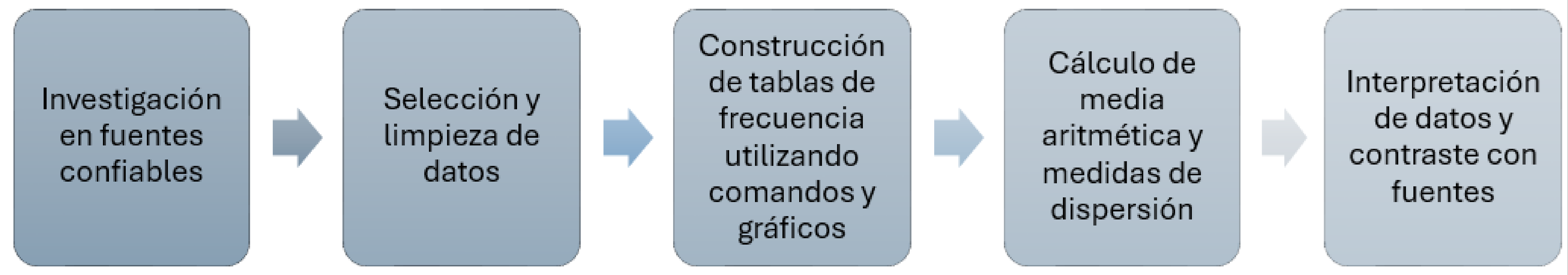
C) Contexto de los datos: El estudio de la dispersión va más allá de su significado conceptual o cómo se utiliza como herramienta, sino que también hay que **considerarla en el contexto** de los datos (Makar y Confrey, 2005)

Metodología

El **ciclo PPDAC** proporciona un marco para la modelización de problemas estadísticos, pues una situación problemática real es explorada y analizada en el mundo de la estadística, para comunicar la solución y conclusiones obtenidas desde el contexto real inicial. (Estrella, 2017)



Resultados



Curso	¿Cuántas veces al día comes? Indicar número
3°B	3
3°B	6
2°C	4
2°C	3
7°B	2
7°C	3
7°B	4
7°B	4

Tabla de Frecuencia Enseñanza Básica			
Dato	f.	F.	fr.%
1	1	1	0.94%
2	7	8	6.60%
3	40	48	37.74%
4	43	91	40.57%
5	11	102	10.38%
6	3	105	2.83%
7	1	106	0.94%
Total	106		100%

Dato	f.	V. Absoluto	Producto
1	1	2.650943396	2.650943396
2	7	3.349056604	23.44339623
3	40	36.3490566	1453.962264
4	43	39.3490566	1692.009434
5	11	7.349056604	80.83962264
6	3	0.6509433962	1.952830189
7	1	2.650943396	2.650943396
	106		3257.509434
	Desviación Media		30.73122108

¿CUÁNTAS VECES COMES AL DÍA? básica vs media

CONCLUSIÓN

De este análisis se concluye que la mayoría de los estudiantes consume entre 3 o 4 comidas al día independientemente del nivel de educación en el que se encuentren. Esto se refleja al interpretar los gráficos. Por otra parte, por medio de las medidas de dispersión podemos observar que tanto los estudiantes de Básica como Media presentan una variabilidad de 26% a 29% respecto a su promedio.

Por ende, ambos grupos de estudiantes están en igualdad de condiciones respecto a la cantidad de comidas diarias recomendadas por la OMS. Se observa que se mantienen mayoritariamente en el rango de 3 a 4 comidas diarias, por esto recomendamos a todos los estudiantes del establecimiento que regulen su cantidad de comidas diarias según lo propuesto por la OMS para procurar una salud de calidad y un buen rendimiento escolar, en otras palabras, comer 5 veces diarias.

CONCLUSIÓN

¿Cuántas horas duermen? hombres vs mujeres

- En conclusión los estudiantes del colegio francisco de miranda,en la muestra del colegio, los hombres duermen en ***promedio 7,14 horas y las mujeres 6,98 horas diarias,*** y la disperción en ambos grupos no es muy diferente entre sí, la mayoría de ambos géneros duerme ***menos de 8 horas***, indicando una insuficiencia de sueño en la población estudiada. En recomendación los estudientes deberian crear ***una rutina de sueño*** para regularlo, y además ***dejar los electrodomesticos una hora antes de dormir***.

Conclusión

Ejemplos de poster

Los estudiantes realizan el **ciclo PPDAC** y calculan estadísticos como media aritmética y medidas de dispersión para poder establecer comparaciones entre los grupos escogidos lo cual es clave, ya que permiten **caracterizar la variabilidad** de los datos respecto a las mismas (Batanero et al., 2015). Además, realizan interpretaciones de los estadísticos con base en el **contexto de donde son extraídos** y toman decisiones considerando los resultados obtenidos, a pesar de que en cuanto a las **medidas de dispersión** se consideren sus expresiones simbólicas algo complicadas para los estudiantes, y más aún interpretarla en función del contexto del que provienen los datos (Sánchez y Orta, 2013).

En cuanto al **uso de tecnología** se destaca lo realizado por los estudiantes ya que permitió el procesamiento y representación de los datos y, además, la realización de **infografía**s que favorezcan la comunicación de los resultados desarrollando así en conjunto las **habilidades del siglo XXI**.

Finalmente, destacamos el **uso del ciclo PPDAC** en cuanto a las opciones que ofrece a los estudiantes para poder interpretar y analizar datos, siendo una herramienta para considerar y ser replicada en diversos contextos, en particular su uso en diseños de **proyectos escolares** que sean de interés para los estudiantes.

Referencias

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C., González-Ruiz, I., López-Martín, M. & Miguel, J. (2015). La dispersión como elemento estructurador del currículo de estadística y probabilidad. *Épsilon 32*(2), 7-20.

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En: Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI,* (173 – 194). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

Makar, K., & Confrey, J. (2005). "Variation-talk": Articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal*, 4(1), 27-54. [Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ4(1)_Makar_Confrey.pdf]

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Eds.). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy* (pp. 183-217). Washington, D. C.: National Academy Press

Sánchez, E. A., & Orta, J. A. (2013). Problemas de mediciones repetidas y de riesgo para desarrollar el razonamiento de estudiantes de secundaria en los temas de media y dispersión. *Números*, *83*, 65-77.

Tecnología en la enseñanza de la probabilidad: Una revisión para la formación docente

Jonathan Parra-Muñoz y Danilo Díaz-Levicoy
Universidad Católica del Maule

Introducción

En un mundo impulsado por datos, la integración de la **tecnología** en la enseñanza de la **probabilidad** es clave para una formación docente efectiva. Dado el rápido y continuo avance de la **tecnología** (Prendes y Cerdán 2021), se requiere el desarrollo y formación de personas con habilidades necesarias para afrontarlo (Gómez et al., 2024). Esto implica un desafío para la educación, dado que la integración de la tecnología es una necesidad imperativa en el sistema educativo (Saritepeci, 2022) y es una necesidad en la **formación inicial docente** de matemática (Muttadi et al., 2017). En cuanto a la estadística y probabilidad, Su et. al (2020) mencionan que ha habido un aumento importante en investigaciones en torno a estas temáticas, y así también en la Didáctica de la Probabilidad (González et al., 2022). Dado que el uso de **tecnología** apoya la depuración, organización de datos y realizar **simulaciones**, motivos que justifican el incluir la **tecnología** en la enseñanza de la **probabilidad**. El uso de la **tecnología** en la enseñanza de la **probabilidad** contribuye a introducir conceptos, y la **simulación** ayuda a los estudiantes a cambiar su razonamiento del cálculo de **probabilidad** (Salinas-Herrera y Salinas-Hernández, 2022). En este sentido, se realiza una revisión sistemática para describir la producción científica sobre la enseñanza de las **probabilidades con tecnología en la formación de profesore**s de Educación Primaria y Secundaria.

Método

Este estudio ha considerado como método la revisión sistemática, siguiendo las directrices establecidas por PRISMA 2020 (Page et al., 2021). La revisión sistemática se llevó a cabo en las bases de datos Scopus, WoS y Scielo. La ecuación de búsqueda se construyó por medio de palabras clave según tesauro Unesco y enciclopedia de Educación Matemática, donde se consideran tres dimensiones; (1) la formación de profesores, (2) la tecnología y (3) la probabilidad: "***Teacher training, Pre-service teacher education, Teacher education, future teacher, Technology, Educational technology, Educational software, ICT, probability".*** Para ello se consideraron solo los artículos publicados entre los años 2014 y 2023, con idioma: Español, Inglés y Portugués; y en áreas a fines.

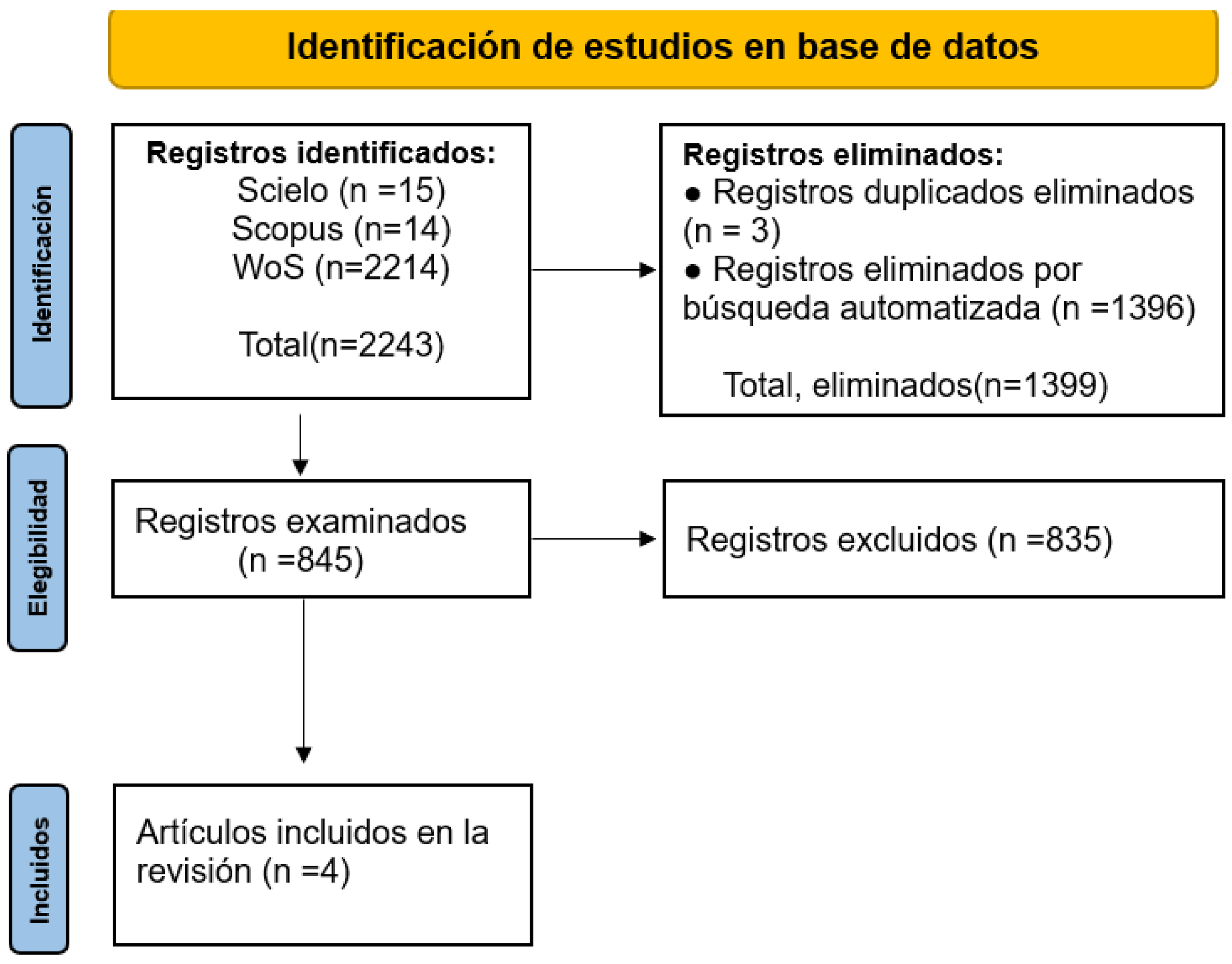
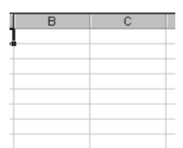
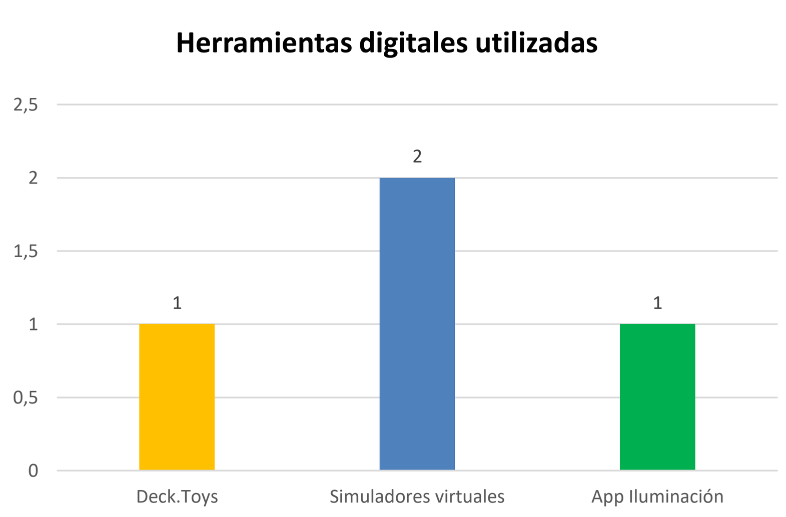
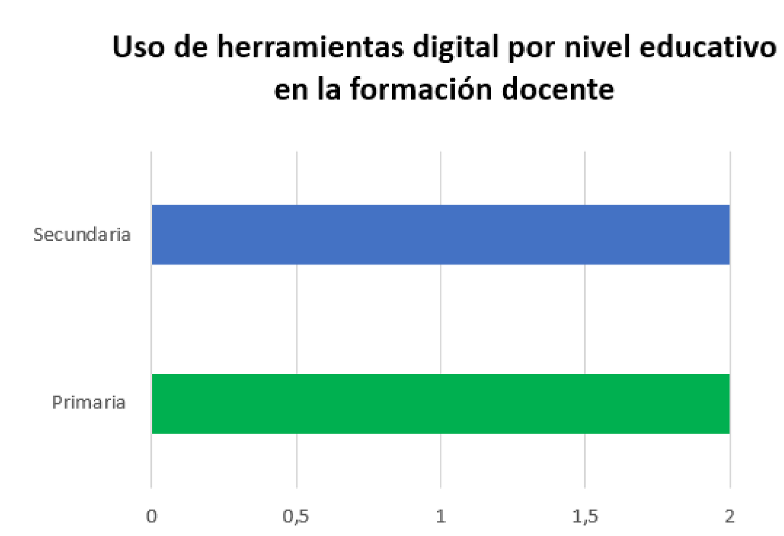


Figura 1. Diagrama de flujo según Declaración PRISMA 2020.

Resultados

A1: Learning Itineraries to Work Mathematic Probability with Future Teachers in an Online Scenario with Deck.Toys Tool. **España**	**A2:** Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento estocástico: retos para su enseñanza y en la formación de profesores. **España**	**A3:** Motivating inquiry in statistics and probability in the primary classroom. **Irlanda**	**A4:** Conocimiento base para la enseñanza: un marco aplicable en la didáctica de la probabilidad. **Colombia**
Primaria	Secundaria	Primaria	Secundaria
Herramienta digital: deck·toys	**Herramienta digital:** No explicita los simuladores virtuales. 	**Herramienta digital:** Videos - App iluminación ILLUMINATIONS Resources for Teaching Math	**Herramienta digital:** Simuladores virtuales 
Conclusión: Estudiantes obtuvieron mejor rendimiento al trabajar con Deck.Toys	**Conclusión:** Necesidad de hacer simulaciones con tecnología en la formación del profesorado.	**Conclusión:** Las simulaciones con ruletas apoyan a los estudiantes a comprender la probabilidad teórica.	**Conclusión:** Importancia de dominar e integrar la tecnología en la sala de clases para realizar simulaciones.





Conclusiones

En los artículos analizados, solo dos A1 y A4 son explícitos en mencionar cuales son las herramientas digitales para trabajar con probabilidades, los demás no lo explicitan, pero si sugieren la utilización de software para realizar simulaciones. En este sentido, el punto común son los simuladores para trabajar con la probabilidad real y poder conjeturar la probabilidad teórica de ciertos eventos y/o problemas de la vida real.

Por lo tanto, el desafío en la formación inicial docente y continua de profesores de matemática es integrar simuladores y herramientas digitales para la enseñanza de la probabilidad. Para ello es necesario diseñar programas de formación que combinen la tecnología, la pedagogía y el contenido eficientemente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gómez Gandía, J. A., Gavrila Gavrila, S., de Lucas Ancillo, A. y del Val Núñez, M. T. (2024). RPA as a challenge beyond technology: Self-learning and attitude needed for successful RPA implementation in the workplace. *Journal of the Knowledge Economy, 16*, 1-28. https://doi.org/10.1007/s13132-024-01865-5

González, B.A.R., Ibarra, G.N.F., Barbosa, O.G. y Muñoz, H.A.D. (2022). The use of the empirical rule in the probability class: a proposed application for university students to determine the type of statistical thinking. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education, 22*(3), 521-537. https://doi.org/10.1007/s42330-022-00237-y

Muttadi D., Wahyundin B., Kartasasmita B. y Prahmana R. (2017). The integration of technology in teaching mathematics. *IOP Conf. Series: Journal of Physics, 943*, 012020. https://doi.org/10.1088/1742-6596/943/1/012020

Page M.J., McKenzie J.E., Bossuyt P.M., Boutron I., Hoffman T.C., Mulrow, C.D., …, y Moher, D. (2021). The PRISMA 2020 statement: an updated guideline for reporting systematic reviews. *BMJ, 372,* 71. https://doi.org/10.1136/bmj.n71

Prendes Espinosa, M.P., y Cerdán Cartagena, F. (2021). Tecnologías avanzadas para afrontar el reto de la innovación educativa. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 24*(1), 35-53. http://dx.doi.org/10.5944/ried.24.1.28415

Salinas-Herrera, J. y Salinas-Hernández, U. (2022). Enseñanza y aprendizaje del concepto de distribución normal mediante un recurso digital. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education*, *22* , 576-590. https://doi.org/10.1007/s42330-022-00226-1

Saritepeci, M. (2022). Modelling the Effect of TPACK and Computational Thinking on Classroom Management in Technology Enriched Courses. *Technology, Knowledge and Learning, 27*, 1155-1169. https://doi.org/10.1007/s10758-021-09529-y

Su, C.S., Hsu, C.C. y Díaz-Levicoy, D. (2020). Investigaciones sobre educación estocástica en primaria en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (1998-2018) *Tangram, 27*, 1155-1169. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i4.10925

Experiencia didáctica de alta demanda cognitiva para la enseñanza de Estadística Inferencial

Carolina Durán Sierra
cduran@scollege.cl

Silvana Pruzzo González
spruzzo@scollege.cl

Antecedentes

El **programa del Diploma del Bachillerato Internacional [OBI]** se cursa entre los 16 y 19 años, con una duración de dos años (OBI, 2005-2024). En Chile, 29 colegios lo imparten junto al currículo nacional en los últimos tres años de enseñanza media. Las matemáticas, además de ser una asignatura específica, son requeridas en otras áreas como Psicología. En este contexto, los estudiantes deben realizar un "Estudio experimental sencillo", donde investigan una teoría psicológica de interés, recolectan y analizan datos utilizando **Estadística descriptiva e inferencial** para evaluar hipótesis y destacar la variabilidad de los datos (OBI, 2017). Además, los exámenes requieren la evaluación de estudios tanto en sus aspectos éticos como metodológicos.

Problema

Dichas evaluaciones requieren de **aplicación de contenidos de estadística inferencial, demostrando comprensión profunda, de por lo que aprenderlos memorísticamente, o con foco en algoritmos, no es útil**. En años previos sólo el 50% de los Estudios Experimentales fueron calificados con más de un 6. Entre otros, mostraron errores en torno al concepto de representatividad muestral y la interpretación de hipótesis, ya reportadas en otros contextos (Batanero et al, 1994).

La presente propuesta tuvo como objetivo implementar una tarea de alta demanda cognitiva para promover una comprensión profunda de estos contenidos, con el fin de mejorar el desempeño tanto en el estudio experimental como en los exámenes finales.

Marco teórico

El **Modelo de Demanda Cognitiva** de Smith y Stein (1998) señala que una buena tarea matemática lo es si logra involucrar a los y las estudiantes en su aprendizaje, promoviendo la comprensión del proceso para alcanzar una solución. Para ello, es esencial diseñarlas considerando el nivel de demanda cognitiva, es decir, los procesos mentales requeridos para resolverlas (Doyle, 1988).

Las tareas de alta demanda cognitiva fomentan la conexión entre procedimientos y conceptos matemáticos subyacentes, lo que se traduce en mejores aprendizajes y mayores niveles de comprensión, a diferencia de las tareas de baja demanda, centradas en la memorización o en la aplicación mecánica de algoritmos (Ni et al., 2017).

Metodología

Se siguió un **diseño preexperimental**, en una **muestra por conveniencia**, mixta, constituida por dos secciones de 2°EM y dos de 3EM (n=60) que se encontraban cursando la asignatura de Psicología al momento de implementarse esta experiencia, previa solicitud de permiso de las autoridades del establecimiento.

Experiencia didáctica

Indagación inicial

1. Se inicia con un plenario ¿Cómo podemos caracterizar una población? Se revisan conceptos: muestra, estadística descriptiva, inferencial, niveles de medición, causalidad, correlación e hipótesis.

Chequeo de comprensión

2. Se resuelven algunos ejercicios sobre los conceptos revisados, como identificar niveles de medición y formular hipótesis. Se revisa en plenario, se corrige lo necesario y se divide el curso en equipos espontáneos.

Tarea de alta demanda

3. Cada equipo diseña un experimento, con sus respectivas hipótesis. Luego toman una muestra del universo de "personitas" de papel que tienen impresas sus respuestas al reverso y representa su análisis en un póster, que exponen al curso.

Contraste de resultados

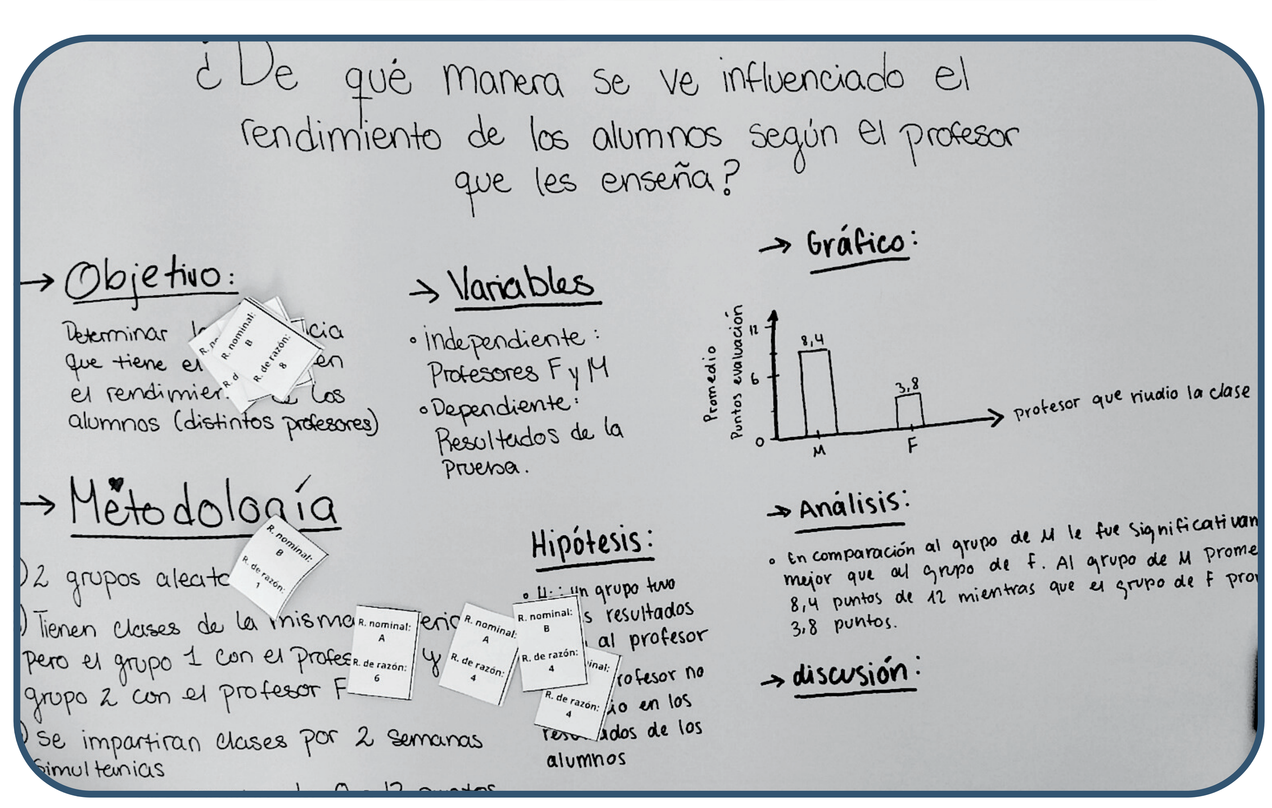
4. Se revelan los datos completos de la población, de modo que cada grupo sepa si sus resultados reflejaron (o no) las características de la población. Se genera una reflexión sobre los errores tipo I y II al contrastar hipótesis.

ACTIVIDAD DE HOY

Tenemos una población de 30 individuos que participarán de un estudio (algunos son amarillos y otros, naranjos, algunos grandes, otros chicos)

Tu equipo formulará **una pregunta de investigación que incluya dos condiciones**, en la que se medirá:
una variable nominal dicotómica (responden A o B)
o numérica (responden de 0 a 10).
¿Qué hipótesis que pondrán a prueba?

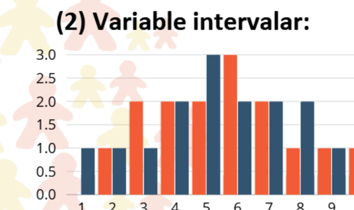
Cuando hayan decidido, deben venir a tomar una muestra para averiguar: **¿Existen diferencias significativas entre ambas condiciones?**



¿Cómo era realmente la población?

(1) Variable Nominal:
- **15** respondieron A
- **15** respondieron B
- No hay diferencias entre amarillos/naranjos ni entre grandes/chicos

(2) Variable intervalar:



Amarillos: x=5.6; s=2.3
Naranjos: x=5.3; s=2.3

No hay diferencias entre grandes/chicos

Tipos de error

Hipótesis nula	Se acepta	Se rechaza
Es verdadera	Decisión correcta	Error tipo 1 α
Es falsa	Error tipo 2 β	Decisión correcta

Conclusión

La experiencia ha fomentado discusiones que demuestran comprensión conceptual y pensamiento crítico, abordando fortalezas y limitaciones del muestreo, errores en la aceptación o rechazo de hipótesis y sesgos en la inferencia estadística. Si bien su impacto en las evaluaciones finales será evaluado al término de los dos años, los resultados preliminares sugieren que este enfoque puede ser una base efectiva para enseñar otros conceptos estadísticos complejos.

Referencias

Batanero, C.; Godino, J.; Vallecillos, A.; Green, D. & Holmes, P. (1994) Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
Doyle, W. (1988). Work in Mathematics Classes: The Context of Students' Thinking During Instruction. *Educational Psychologist*, 23(2), 167–180. doi:10.1207/s15326985ep2302_6
Ni, Y., Zhou, D.-H. R., Cai, J., Li, X., Li, Q., & Sun, I. X. (2017). Improving cognitive and affective learning outcomes of students through mathematics instructional tasks of high cognitive demand. *The Journal of Educational Research*, 1–16. doi:10.1080/00220671.2017.1402748
Organización del Bachillerato Internacional (2005-2024) El IB por país y territorio/Chile. Consultado el 20 de septiembre de 2024, de https://www.ibo.org
Organización del Bachillerato Internacional (2017) Programa del Diploma. Guía de Psicología. IBO.
Smith, M. & Stein, M. (1998) Reflections on Practice. Selecting and Creating Mathematical Tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344–350. http://www.jstor.org/stable/41180423

Universidad de Concepción Campus Los Ángeles

sochiem SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UMCE el poder transformador de la educación

GEOMETRÍA Y GAMIFICACIÓN: TRANSFORMANDO EL AULA CON JUEGOS EDUCATIVOS

Autores:

José Camilo Cabrera y Aranza Villegas, Estudiantes de Pre-grado.

Mariela Carvacho, Doctora en ciencias mención Matemáticas. UMCE.

Introducción

La **gamificación** se refiere al uso de elementos de juego en contextos fuera de lo lúdico, como el aprendizaje, con el objetivo de influir en el comportamiento, aumentar la motivación y fomentar la participación activa. Esta **estrategia** busca involucrar a los estudiantes, motivarlos a la acción y facilitar la resolución de problemas mediante dinámicas propias del juego.

Los estudiantes de hoy, inmersos en la tecnología, necesitan un aprendizaje que sea tan dinámico como su mundo

Desafío: Predominio de métodos tradicionales de memorización en la enseñanza de geometría.

Oportunidad: Uso de juegos para mejorar la comprensión conceptual y la motivación.

Impacto: Potencial de la gamificación para transformar la experiencia educativa.

¿Cómo podemos mejorar la enseñanza y la comprensión de la geometría?

Antecedentes

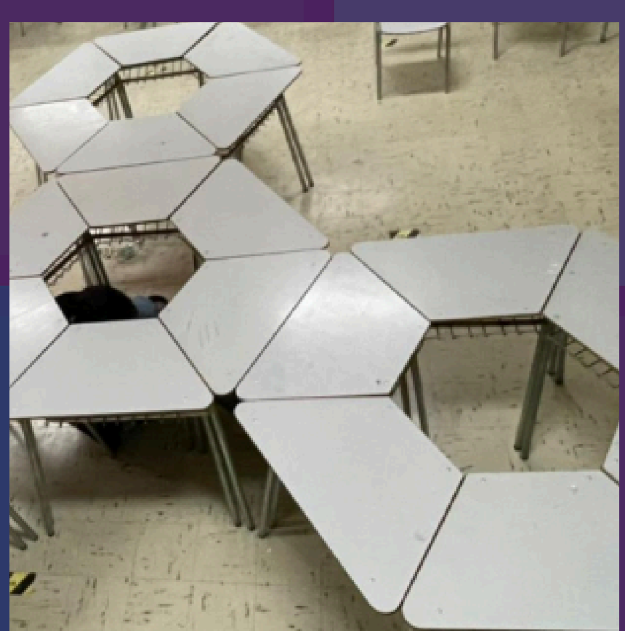
Los estudiantes que actualmente están ingresando a la universidad, son jóvenes nacidos, criados y educados en ambientes cargados de tecnología.

Esperan que el aprendizaje sea lo más rápido, sencillo y entretenido posible, maximizando la relación entre resultados obtenidos y tiempo de estudio.

Método

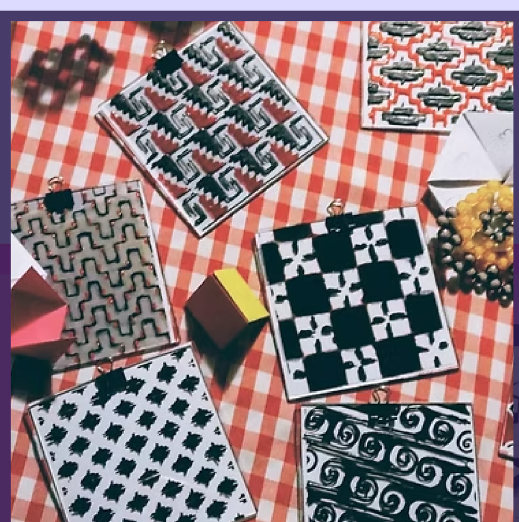
La elaboración de un juego geométrico con el fin de ser aplicable para la enseñanza del contenido a nivel escolar, buscando integrar elementos del juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

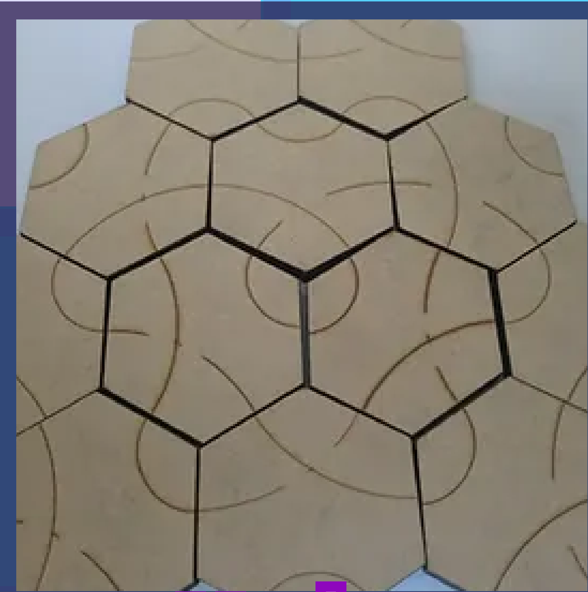
Resultados y Conclusiones



Teselaciones

Busca que se comprenda la idea o concepto de teselación en el espacio





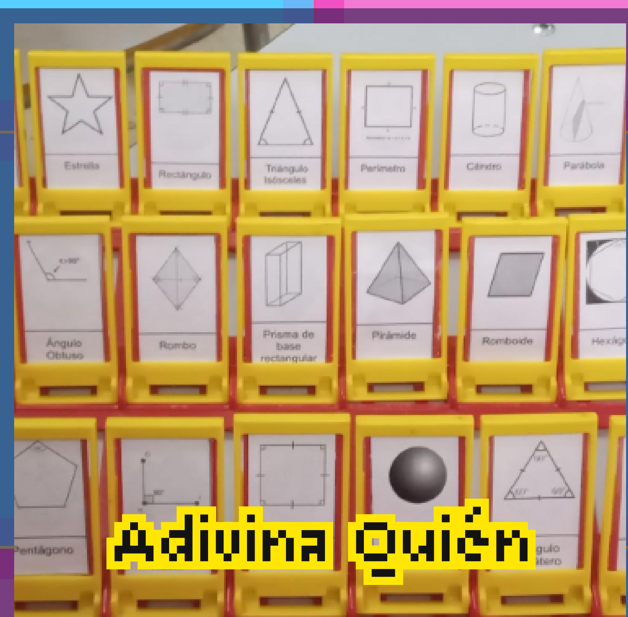
Nudos

La idea de este juego es representar, mediante piezas hexagonales, diferentes nudos que podrías armar con una cuerda.

Biblioteca de Pirque.

Teselados con Origami.

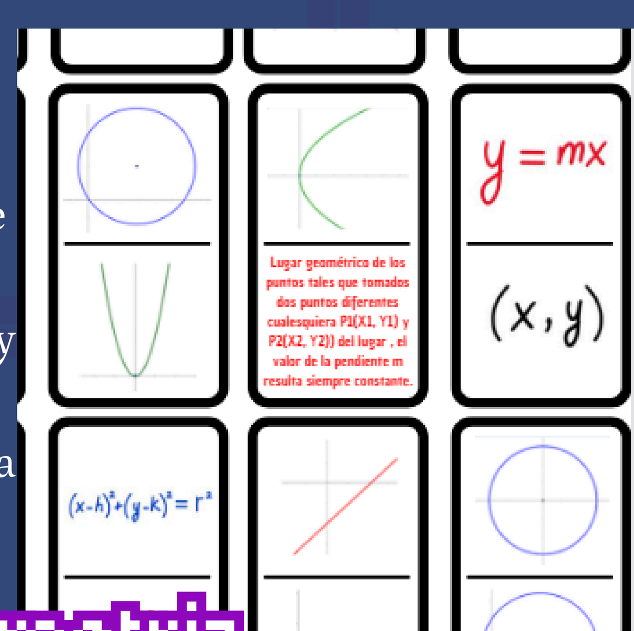
Apreciaciones de estudiantes en Mentimeter.



Adivina Quién

Descubre que figura geométrica tiene tu contrincante a partir de sus características

Una mezcla entre la geometría y el juego dominó, pero este este se compone por gráficos, definiciones y fórmulas de los elementos básicos de la geometría analítica.



Dometria

La **gamificación** en geometría no solo mejora el rendimiento académico, sino que también despierta un interés de los estudiantes al **transformar la experiencia educativa** en algo más atractivo, dinámico y accesible

Referencias:

- Zepeda, S., Abascal, R., & López, E. (2016). Integración de gamificación y aprendizaje activo en el aula [Integration of gamification and active learning in the classroom]. Ra Ximhai, 12(6), 315-325.
- Holguín, F., Holguín, E., y García, N. (2019). Gamificación en la enseñanza de las matemáticas: una revisión sistemática. [Gamification in mathematics education: a systematic review]. Telos, 22(1), 62-75.
- Carvacho, Mariela. (2021). IDEAS PARA DESARROLLAR EN CLASE: EL PENSAR, EL COMUNICAR Y EL CONVIVIR.
- Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV) (2017). La gamificación en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Unidad de Mejoramiento de la Docencia Universitaria

Empoderando el aprendizaje personalizado: Math solver como apoyo al aula invertida para estudiantes adultos vespertinos

sochiem
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

1. INTRODUCCIÓN

La investigación propone y evalúa una estrategia para potenciar el aprendizaje personalizado con uso de la herramienta de Inteligencia artificial de Microsoft math solver para apoyar el aula invertida en el contenido de trigonometría, con estudiantes adultos vespertinos trabajadores de Carreras de ingeniería de una Universidad privada en Chile.

La iniciativa surge ante altas tasas de reprobación y carencia de contexto en la asignatura de Álgebra en estudiantes con años sin una educación formal continua y con deberes laborales en paralelo.

¿Por qué?

Los estudiantes adultos vespertinos tienen un 75% de reprobación en álgebra. Es necesario implementar estrategias de apoyo adaptadas a sus necesidades, aprovechando un modelo de aula invertida y herramientas tecnológicas para personalizar su aprendizaje.

¿Para qué?

El objetivo es mejorar el desempeño en álgebra de estudiantes adultos vespertinos, empoderándolos con aprendizaje personalizado y un modelo de aula invertida que utilice herramientas como Math Solver. Se busca además crear buenas prácticas replicables en otros contextos educativos similares.

2. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

¿En qué medida la herramienta de IA math solver potencian la implementación exitosa del modelo de aula invertida entre estudiantes adultos en programas vespertinos, contribuyendo a mejorar su rendimiento académico y participación?

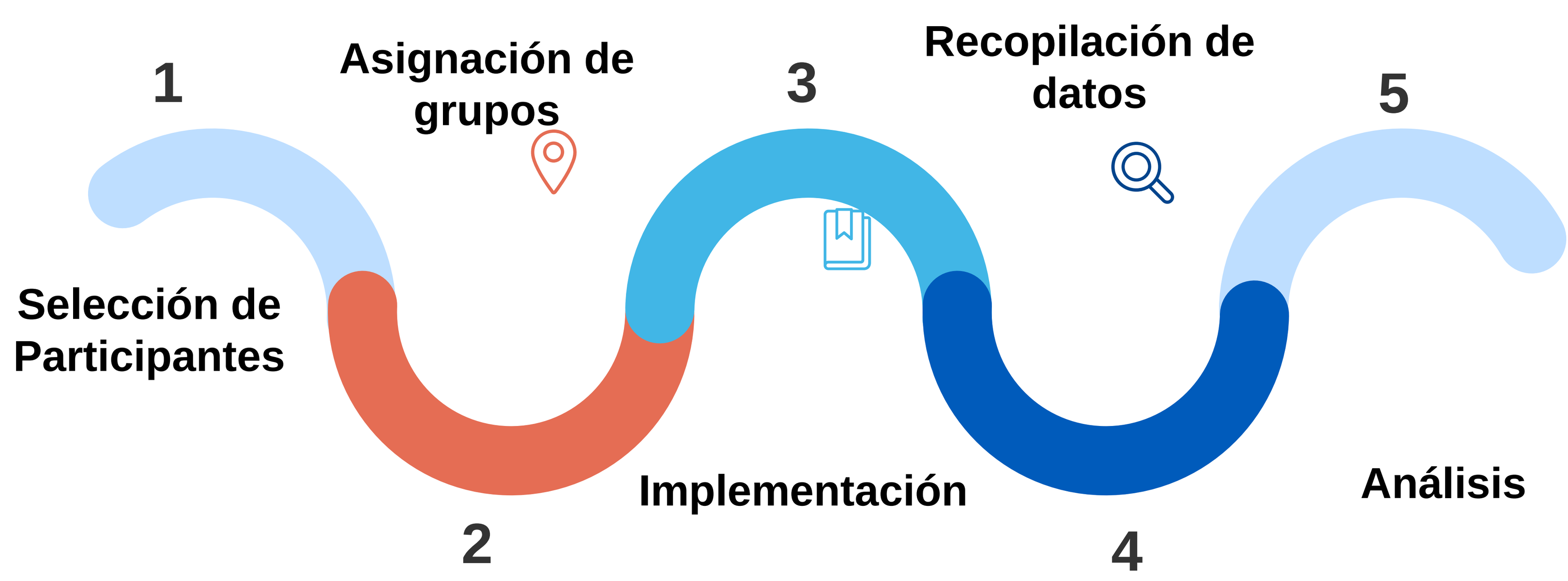
3. HIPÓTESIS

El rendimiento de los estudiantes en el contenido de Trigonometría se incrementa por la implementación de la herramienta de IA math solver apoyada de la metodología de aula invertida.

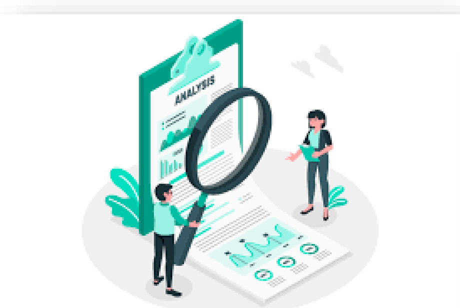
4. MÉTODO

El estudio cuasiexperimental, de enfoque cuantitativo, comparó un grupo control (práctica tradicional) con un grupo experimental (uso de IA Math Solver y aula invertida) en estudiantes de primer año de ingeniería de una universidad privada chilena. Se evaluó el rendimiento académico en álgebra mediante cuestionarios y pruebas. Se incluyeron fases de selección, asignación, implementación y análisis estadístico para comparar resultados entre grupos.

FASES DE LA EXPERIENCIA



5.1 ANÁLISIS



Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas iguales

	G. Experimental	G. Control
Media	5,1	4,1
Varianza	1,168781609	1,0867137931
Observaciones	30	30
Varianza agrupada	1,51795977	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	58	
Estadístico t	2,315722512	
P(T<=t) una cola	0,012065024	
Valor crítico de t (una cola)	1,671552762	
P(T<=t) dos colas	0,024130048	
Valor crítico de t (dos colas)	2,001717484	

5. RESULTADOS

Se obtuvo un valor estadístico t de 2,315 y con un nivel crítico bilateral asociado de 2. Por ser este valor mayor que 0,05, permitió rechazar la hipótesis nula de la igualdad de medias en favor de la hipótesis de que la media de las notas del postest resultó significativamente mayor para el grupo que participó de la implementación.

6. CONCLUSIONES

En conclusión, los resultados indican un mejoramiento académico en estudiantes adultos vespertinos, con apoyo personalizado para aquellos que no pueden asistir presencialmente. Esto también ha contribuido al desarrollo de competencias en Trigonometría durante la implementación de las actividades.

Más información…

REFERENCIAS

Avitia Carlos, P., & Uriarte Ramírez, I. (2017). Evaluación de la habilidad digital de los estudiantes universitarios: estado de ingreso y potencial educativo. *Edutec, Revista Electrónica De Tecnología Educativa*, (61), a366. https://doi.org/10.21556/edutec.2017.61.861

Carbonell-García, C. E., Burgos-Goicochea, S., Calderón-de-los-Ríos, D. O., & Paredes-Fernández, O. W. (2023). La Inteligencia Artificial en el contexto de la formación educativa. *EPISTEME KOINONIA*, 6(12), 152–166. https://doi.org/10.35381/e.k.v6i12.2547

Incio Flores, F. A., Capuñay Sánchez, D. L. ., Estela Urbina, R. O. ., Valles Coral, M. Ángel ., Vergara Medrano, S. E. ., & Elera Gonzales, D. G. . (2021). Inteligencia artificial en educación: una revisión de la literatura en revistas científicas internacionales. *Apuntes Universitarios*, 12(1), 353–372. https://doi.org/10.17162/au.v12i1.974

Reflexiones acerca de la evaluación formativa en el contexto universitario. (2021). *Revista Internacional De Pedagogía E Innovación Educativa*, 1(1), 189-210. https://doi.org/10.51660/ripie.v1i1.32

Rivadeneira Rodríguez, E. M. (2019). La metodología aula invertida en la construcción del aprendizaje autónomo y colaborativo del estudiante actual. *Revista San Gregorio*, (31), 72–79. https://doi.org/10.36097/rsan.v0i31.601

UMCE
el poder transformador de la educación

sochiem
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

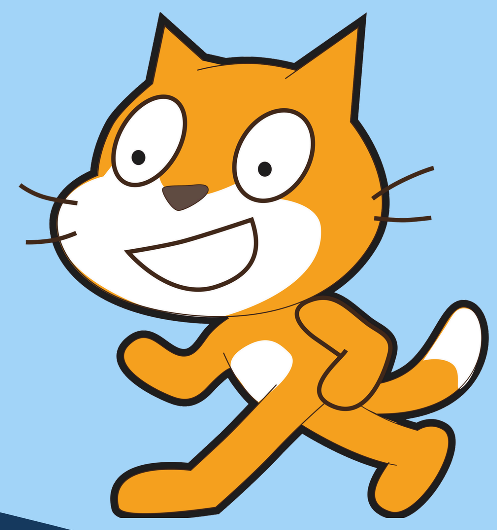
Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

POTENCIANDO EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

SCRATCH EN EL AULA ESCOLAR

Adiel Silva y Florencia Morales

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación



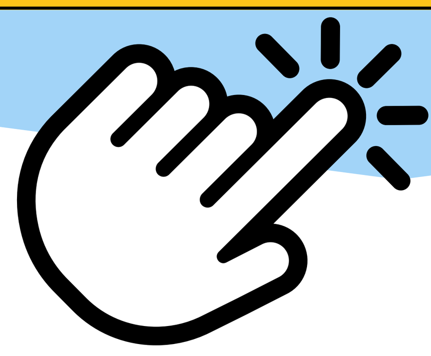
PROBLEMÁTICA

La creciente influencia del **PC** en la educación.

Limitación: Escasa implementación del **PC** en el aula escolar.

Impacto: Énfasis tradicional en la formación de usuarios de tecnología, en lugar de creadores.

Propuesta: Integrar **Scratch** como herramienta para desarrollar el **PC** y enseñar programación en el contexto educativo.



PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

El **pensamiento computacional (PC)** es la clave para formar creadores de soluciones en una sociedad digitalizada. El **PC** fomenta la comprensión y el análisis de los problemas, permitiendo construir e implementar soluciones innovadoras.

HABILIDADES DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

- Descomponer
- Evaluar
- Generalizar
- Abstraer
- Pensar forma algorítmica

IMPORTANCIA DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN EL AULA

- El **PC** se considera una habilidad fundamental junto con leer, escribir y calcular.
- La matemática escolar promueve el desarrollo del **PC**.
- El **PC** fomenta la capacidad de abordar problemas complejos, promoviendo a que los estudiantes se desenvuelvan de mejor manera en la sociedad.
- El **PC** marca la diferencia entre ser creadores de soluciones y meros usuarios de tecnología.

ENFOQUE DE IMPLEMENTACIÓN

Programación

- 7° Básico
- 8° Básico
- 1° Medio
- 2° Medio
- 3° Medio
- 4° Medio

Discusión Teórica

¿QUÉ ES SCRATCH?

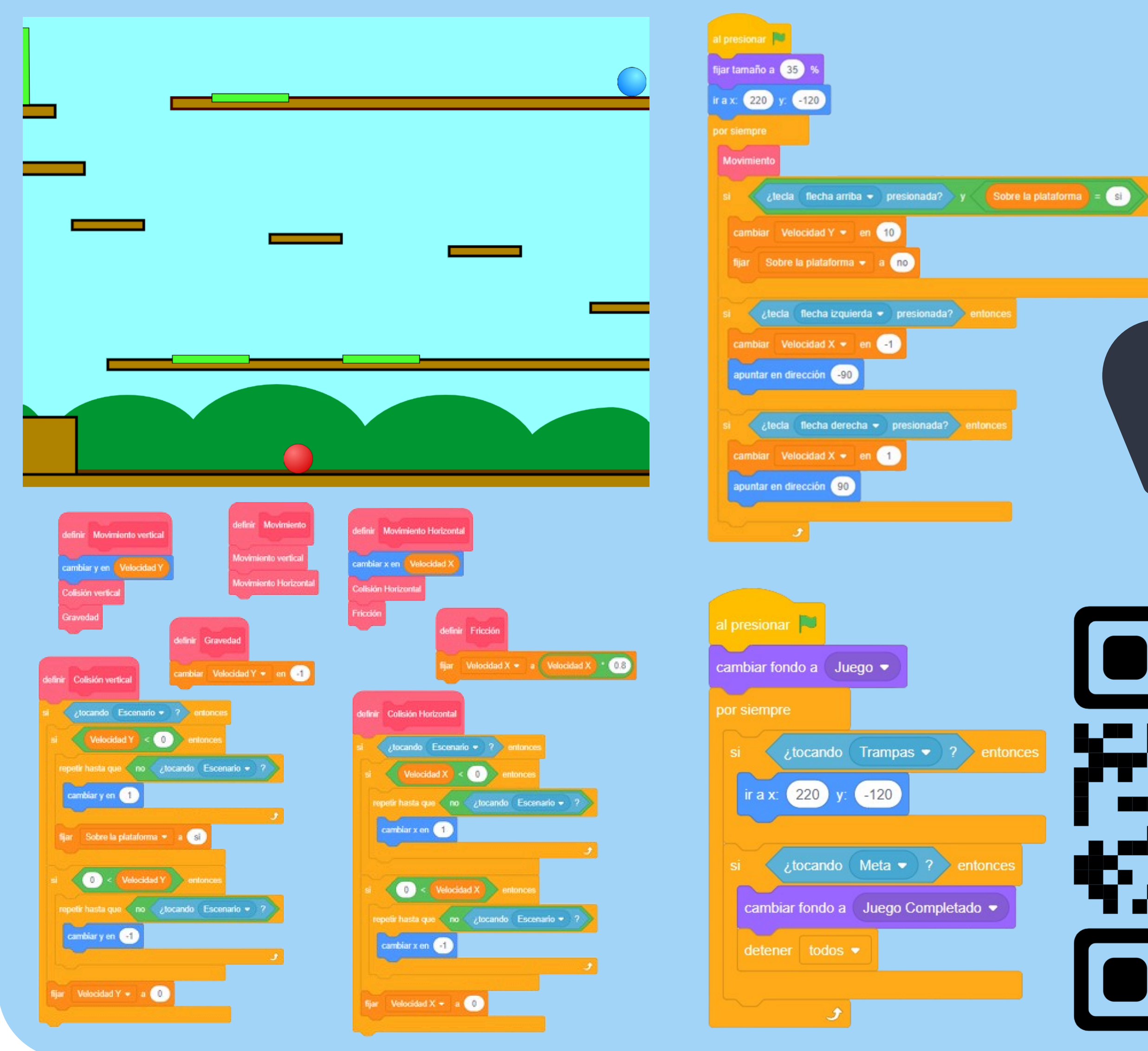
Scratch es una herramienta de programación visual diseñada para que los jóvenes aprendan a programar de forma intuitiva y creativa.

POTENCIAL EN EL PC

Scratch promueve el desarrollo de **habilidades del siglo XXI**, impulsando el **PC** y creativo mediante la resolución innovadora de problemas en entornos digitales.

PROPUESTA DE JUEGO

Diseñar entorno del juego > Programar fenómenos físicos > Programar movimiento personaje > Programar interacción con objetos > Analizar fenómenos físcos



CONCLUSIONES

Desarrollar el **PC** en las aulas es esencial para que los estudiantes asuman un rol protagónico en una sociedad digitalizada, preparándolos para enfrentar desafíos complejos con las **habilidades del siglo XXI** y la resolución de problemas. Esta propuesta no solo fomenta el **pensamiento computacional** y promueve discusiones teóricas sobre fenómenos físicos como la gravedad y la fricción, sino que también destaca la importancia de capacitar a los docentes en el manejo de tecnologías como **Scratch**.

REFERENCIAS

García Rodríguez, A. (2022). Enseñanza de la programación a través de Scratch para el desarrollo del pensamiento computacional en educación básica secundaria. Revista Academia y Virtualidad, 15(1), 161–182.

Iglesias, A., & Bordignon, F. (2020). Introducción al pensamiento computacional. CLACSO.

MINEDUC. (2021). Programa de Estudio Pensamiento Computacional y Programación 3° y 4° medio. Ministerio de Educación, Unidad de Currículum y Evaluación.

Roberts Molina, R. (2019). Conceptos: Pensamiento Computacional y Ciudadanía Digital, en sus acepciones relativas a la educación escolar. Biblioteca del Congreso Nacional de Chile. https://www.bcn.cl/asesoriasparlamentarias/detalle_documento.html?id=74486

Salamanca Garay, I. J., & Badilla Quintana, M. G. (2021). Del pensamiento computacional al pensamiento creativo. Revista ICONO 14. Revista científica de Comunicación y Tecnologías emergentes, 19(2), 261–287. https://doi.org/10.7195/ri14.v19i2.1653

Taco Coayla, R. A. (2019). INFLUENCIA DEL PROGRAMA SCRATCH EN EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN ESTUDIANTES DEL NIVEL PRIMARIO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE LA POLICÍA NACIONAL DEL PERÚ ALFÉREZ MARIANO SANTOS MATEOS. UNIVERSIDAD PRIVADA DE TACNA.

CHATBOTS EN LA EDUCACIÓN: EXPLORANDO SU ROL EN LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Sara Embid, Josefa Perdomo-Díaz; sembidso@ull.edu.es
Universidad de La Laguna

INTRODUCCIÓN

La **formulación de problemas** es una habilidad esencial que los docentes deben practicar y perfeccionar. Cada docente tiene su manera de hacerlo; algunos usan chatbots, otros lápiz y papel y otros libros de texto.

ANTECEDENTES Y PROBLEMA

Apenas tenemos conocimiento sobre cómo los chatbots pueden apoyar a los docentes en la formulación de problemas matemáticos. Lo que conocemos se relaciona con la percepción de estos recursos (Bii et al., 2018) y la resolución de problemas (Noster et al., 2024)

ChatGPT
Copilot
Claude
perplexity
Gemini

MÉTODOS

1. Se propone la Actividad 1 a **5 chatbots** (agosto, 2024).
2. Se interactúa con ellos a través de *Zero-Shot prompt (sin ejemplos).*
3. *Se evalúan los 3 problemas generados por chatbot (QR).*
4. *Se asignan valores según* las variables descritas en la *Tabla*.
5. Se analizan tendencias en los datos y se extraen conclusiones.

OBJETIVO

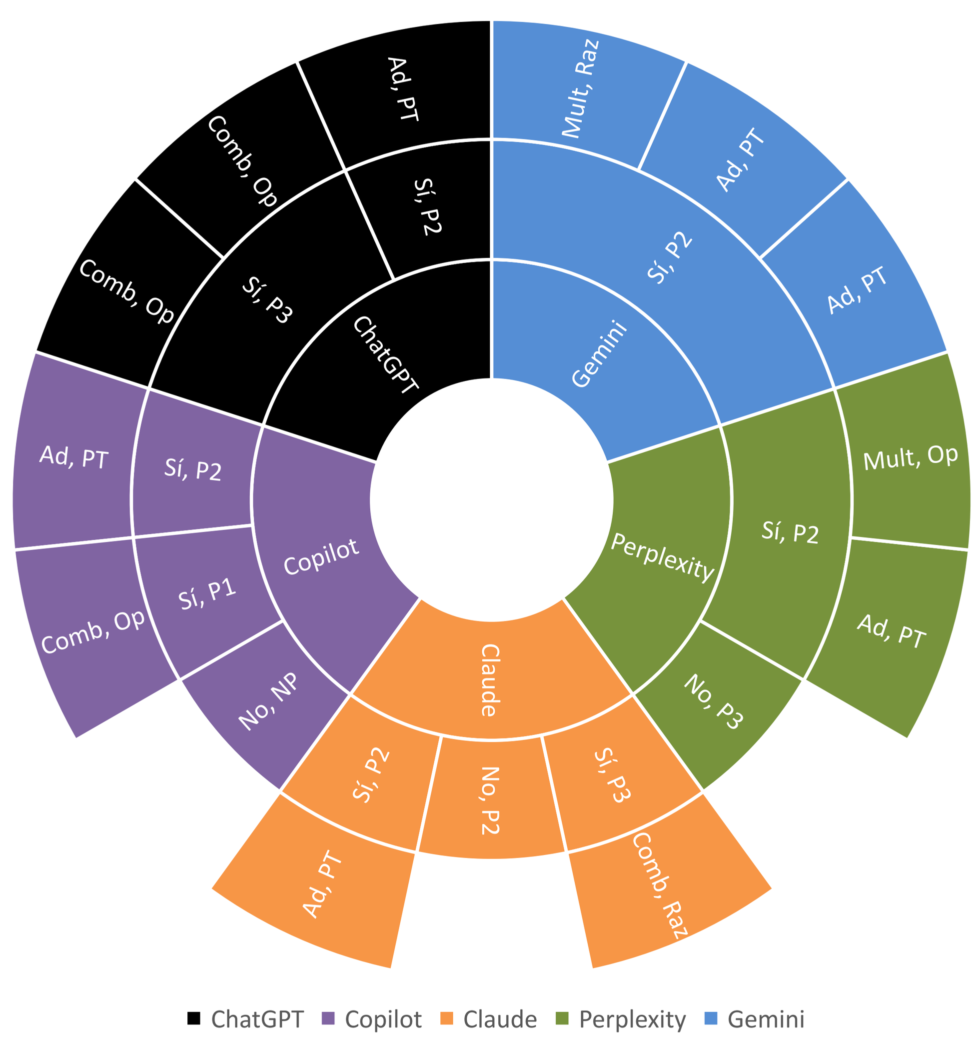
Explorar cómo distintos **chatbots** abordan una misma tarea de **formulación de problemas con fracciones** previamente testeada con futuros maestros de primaria.

(Embid y Perdomo-Díaz, 2024)

Actividad 1. Formula tres problemas, de diferente dificultad, en los que aparezcan los números 1/4 y 3/8. Cada uno de estos números puede ser un dato o una solución. Recuerda que puedes añadir cualquier tipo de información (numérica, de contexto...).

Variable	Valor	Descripción: El problema...
Ajuste	Sí	...incluye 1/4 y 3/8.
	No	...no incluye 1/4 y 3/8
Plausibilidad	NP	...no se puede resolver.
	P1	...no tiene toda la información.
	P2	...se resuelve con una tarea.
	P3	...se resuelve con varias tareas.
Estructura	Ad.	...es de suma y/o resta.
	Mult.	...es de multiplicación y/o división.
	Comb.	...presenta las dos estructuras.
Significado	P-T	...presenta significado parte-todo.
	Op.	...presenta significado operador.
	Raz.	...presenta significado razón.

RESULTADOS



CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

- ✓ ChatGPT y Gemini formulan todos sus problemas con las fracciones indicadas (Copilot, Perplexity y Claude no).
- ✓ ChatGPT y Claude formulan problemas con más de una tarea matemática (el primero 2 de 3 y el segundo 1 de 3).
- ✓ Copilot es el único que genera un problema con falta de información (otro de una tarea y otro sin resolución).
- ✓ En términos generales, se obtienen más problemas con estructura aditiva y fracciones con significado parte-todo.
- ✓ Conviene investigar otros prompts (p. ej. *Chain-of-Thought* y *Ask-me-Anything)* (Schorcht et al., 2024) y formar a futuros profesores de primaria en la formulación de problemas matemáticos con estos chatbots .

AGRADECIMIENTOS

Proyecto PID2022 139007NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE. Además, Sara Embid ha participado en este trabajo en el marco de un contrato predoctoral, que forma parte de la ayuda PREP2022-000953, financiado por MCIN/AEI/10.13039/5011000110 y por el FSE+.

REFERENCIAS

Bii, P. K., Too, J. K. y Mukwa, C. W. (2018). Teacher Attitude towards Use of Chatbots in Routine Teaching. *Universal Journal of Educational Research*, 6(7), 1586–1597. http://doi.org/10.13189/ujer.2018.060719.

Embid, S. y Perdomo-Díaz, J. (2024). Herramientas digitales en la formulación de problemas de fracciones por futuros maestros de primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 201-208). SEIEM.

Schorcht, S., Buchholtz, N. y Baumanns, L. (2024). Prompt the problem – investigating the mathematics educational quality of AI-supported problem solving by comparing prompt techniques. *Frontiers in Education*, *9*. https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1386075

Noster, N., Gerber, S. y Siller, H.-S. (2024). *Pre-Service Teachers' Approaches in Solving Mathematics Tasks with ChatGPT – A Qualitative Analysis of the Current Status Quo.* https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-4182920/v1

sochiem
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

Una experiencia con portafolios en cursos de especialización en matemática para profesores de educación básica en formación

Carlos Eduardo Rojas Bruna
Pontificia Universidad Católica de Chile

Introducción

Uno de los desafíos que presenta la formación de profesores de educación básica con especialización en matemática es hacer visible y real la conexión existente entre la teoría con la práctica docente, particularmente en los cursos teóricos de carácter disciplinar. Este estudio explora el uso de portafolios como herramienta innovadora en los cursos de Álgebra y Sistemas Numéricos I y II del programa de Pedagogía en Educación General Básica, mención Matemática.

Problema

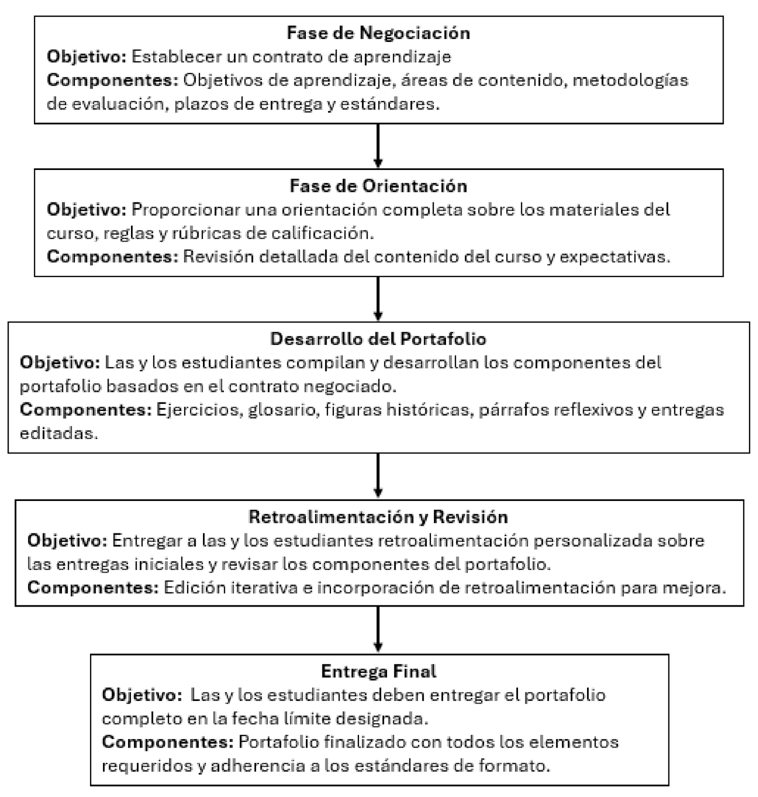
Existe una brecha entre la formación teórica avanzada en matemáticas y la percepción de su relevancia para la práctica docente en educación básica. Los estudiantes en formación a menudo no logran visualizar cómo una sólida base disciplinar les permitirá desarrollar estrategias de enseñanza más efectivas y diversas, basadas en una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. Esta desconexión limita su capacidad para aprovechar plenamente su formación teórica en beneficio de sus futuros estudiantes.

Antecedentes

Estudios previos destacan la importancia de metodologías innovadoras en la formación docente, como el uso de portafolios académicos (Crowley & Dunn, 1995). Estas herramientas promueven la reflexión y el aprendizaje autorregulado, aspectos cruciales para el desarrollo profesional de los futuros profesores (Boekaerts, 1997; Kramarski & Revach, 2009). Sin embargo, su aplicación en la educación matemática para profesores de básica ha sido poco explorada, especialmente en cursos de especialización como Álgebra y Sistemas Numéricos I y II. Drijvers et al. (2010) destacan la importancia de integrar tecnologías y métodos innovadores en la enseñanza de las matemáticas, lo que refuerza la necesidad de investigar estas aproximaciones en la formación docente.

Metodología e implementación

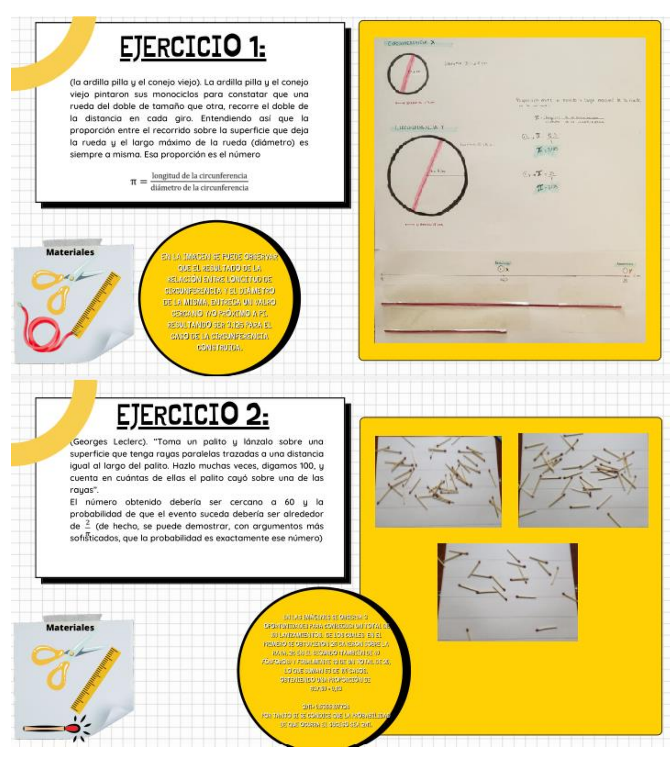
1. Diseño:
   - Implementación de portafolios académicos en cursos de Álgebra y Sistemas Numéricos I y II.
   - Duración: Dos semestres académicos (2022-2023).
2. Participantes: Estudiantes de Pedagogía en Educación General Básica, mención en matemática.
3. Proceso de implementación:



4. Recolección de datos:
   - Participación estudiantil (asistencia, interacciones en plataforma virtual).
   - Evaluación del rendimiento académico.
   - Encuestas de percepción a las y los estudiantes sobre la experiencia con los portafolios.
5. Análisis:
   - Comparación de rendimiento académico pre y post implementación.
   - Análisis cualitativo de las reflexiones de las y los estudiantes.
   - Evaluación de la percepción de las y los estudiantes sobre la relevancia de los contenidos teóricos para su futura práctica docente.

Resultados

1. Participación y rendimiento:
   - Aumento significativo en la asistencia a clases (>70%).
   - Mejora en el rendimiento académico: promedio de notas aumentó de 4,43 a 6,44 en MAT2920 y de 5,52 a 6,44 en MAT2925.
4. Percepción de las y los estudiantes:
   - 85,7% reportó mejoras en habilidades de autoestudio y organización del tiempo.
   - 71,4% percibió una mejor comprensión de los contenidos del curso.
3. Conexión teoría-práctica:
   - Los portafolios facilitaron la visualización de la relevancia de los contenidos teóricos para la futura práctica docente.
   - Aumento en la capacidad de los estudiantes para relacionar conceptos matemáticos avanzados con estrategias de enseñanza en educación básica.
4. Desarrollo de competencias docentes:
   - Mayor capacidad reflexiva sobre el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.
   - Desarrollo de habilidades de autoevaluación y pensamiento crítico.



Conclusiones

- El portafolio demuestra ser una herramienta efectiva para fortalecer la formación de profesores de educación básica mención matemática.
- Esta metodología permite una evaluación más auténtica y holística.
- Se percibe una mejora significativa en la capacidad de las y los estudiantes para valorar los conocimientos teóricos avanzados y su integración con la práctica.
- Contribuye a formar profesores más reflexivos y mejor preparados para abordar los desafíos de la enseñanza de matemáticas en educación básica.

REFERENCIAS

Boekaerts, M. (1997). Self-regulated learning: A new concept embraced by researchers, policy makers, educators, teachers, and students. Learning and Instruction, 7(2), 161-186.

Crowley, M., & Dunn, K. (1995). The mathematics portfolio. American Mathematical Monthly, 102(1), 19.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., ... & Meagher, M. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In Mathematics education and technology-rethinking the terrain (pp. 89-132). Springer, Boston, MA.

Kramarski, B., & Revach, T. (2009). The challenge of self-regulated learning in mathematics teachers' professional training. Educational Studies in Mathematics, 72(3), 379-399.

Pontificia Universidad Católica de Chile. (s.f.). MAT2920 Álgebra y Sistemas Numéricos I. Recuperado de https://catalogo.uc.cl/index.php?tmpl=component&option=com_catalogo&view=programa&sigla=MAT2920

Pontificia Universidad Católica de Chile. (s.f.). MAT2925 Álgebra y Sistemas Numéricos II. Recuperado de https://catalogo.uc.cl/index.php?tmpl=component&option=com_catalogo&view=programa&sigla=MAT2925

Modelación y tecnología. Construcción de representaciones y modelos desde la experimentación con auto impulsado por un globo de aire.

Millaray Rojas e Iván Pérez
Universidad Metropolitana de CIencias de la Educación

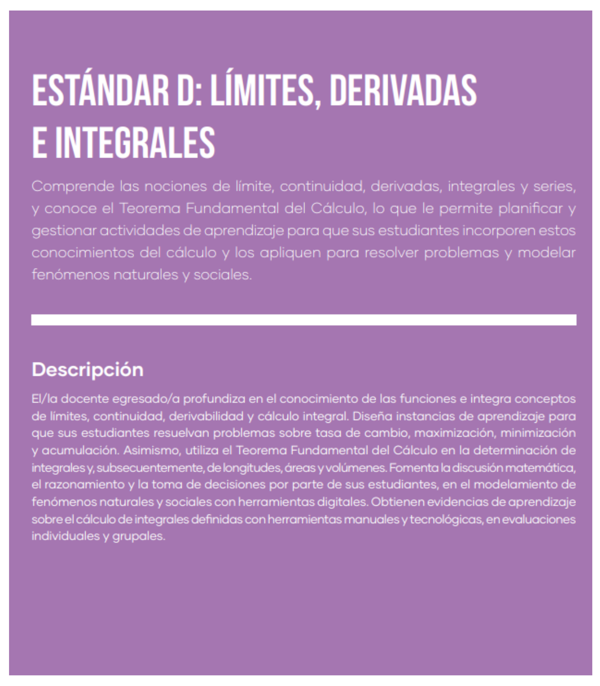
Introducción

En el sistema escolar chileno, los conceptos de límites, derivadas e integrales se han incorporado en el currículo diferenciado de tercero y cuarto medio, y en la formación de profesores, se han establecido estándares que destacan su importancia (CPEIP, 2021; MINEDUC Chile, 2021). Esto genera la necesidad de crear instancias pedagógicas que integren la modelación matemática en el aula. La actividad propuesta busca que los estudiantes construyan una función a partir de una experimentación concreta, promoviendo un enfoque integral que conecte elementos experimentales, gráficos, algebraicos y tabulares.


Programa de Estudio
3º o 4º Medio
Formación Diferenciada
Matemática

Límites, Derivadas e Integrales

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
GOBIERNO DE CHILE


ESTÁNDAR D: LÍMITES, DERIVADAS E INTEGRALES

Comprende las nociones de límite, continuidad, derivadas, integrales y series, y conoce el Teorema Fundamental del Cálculo, lo que le permite planificar y gestionar actividades de aprendizaje para que sus estudiantes incorporen estos conocimientos del cálculo y los apliquen para resolver problemas y modelar fenómenos naturales y sociales.

Descripción

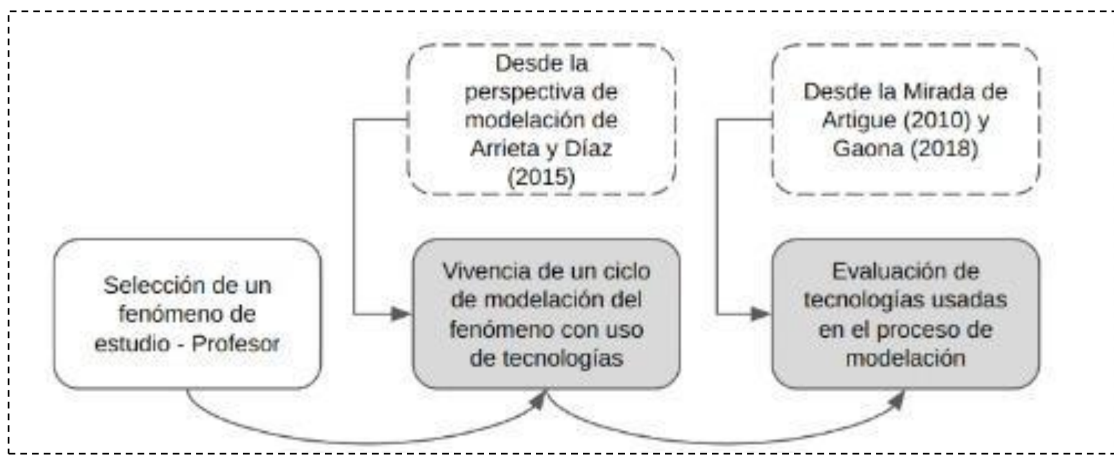
El/la docente egresado/a profundiza en el conocimiento de las funciones e integra conceptos de límites, continuidad, derivabilidad y cálculo integral. Diseña instancias de aprendizaje para que sus estudiantes resuelvan problemas sobre tasa de cambio, maximización, minimización y acumulación. Asimismo, utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo en la determinación de integrales y, subsecuentemente, de longitudes, áreas y volúmenes. Fomenta la discusión matemática, el razonamiento y la toma de decisiones por parte de sus estudiantes, en el modelamiento de fenómenos naturales y sociales con herramientas digitales. Obtienen evidencias de aprendizaje sobre el cálculo de integrales definidas con herramientas manuales y tecnológicas, en evaluaciones individuales y grupales.

Antecedentes

se observa un desequilibrio en la enseñanza, que prioriza los procedimientos algorítmicos sobre la comprensión conceptual, dificultando una comprensión profunda de las funciones (Muñoz, 2000; Martínez y García, 2020). Estos desafíos subrayan la necesidad de estrategias pedagógicas que integren diversas representaciones y enfoques más comprensivos para mejorar el aprendizaje de las funciones.

Problema

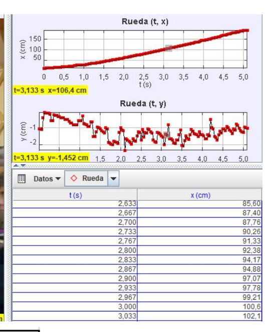
Generar experiencias de aula que permitan romper con el uso solo del modelo algebraico en procesos asociados a funciones y cálculo escolar. En particular se propone realizar el experimento

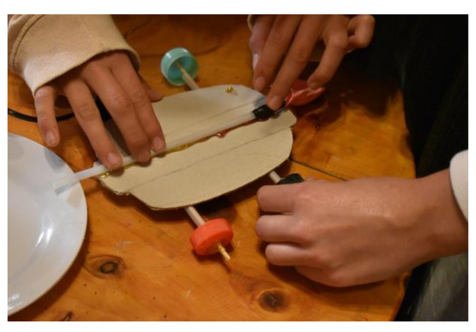


Método

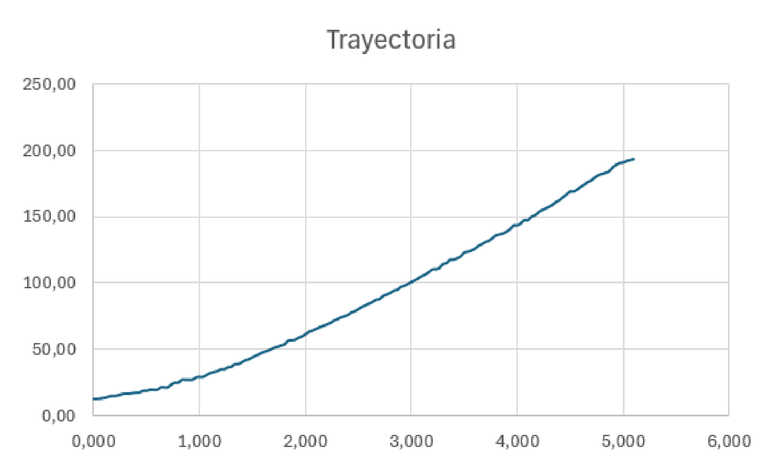
Se propone, desde la mirada de moderación de Arrieta y Díaz (2015) , realizar un experimento, aquí deben poner su experimento, y hacer un análisis de las tecnologías utilizadas desde la mirada de Gaona (2018) , tomar datos, recolectar y hacer análisis profundo del fenómeno, y analizarlas, el surgimiento de modelos tabulares, algebraicos, experimentales y también gráficos.

Resultados





t	x
0,0	12,84
0,5	18,98
1,0	29,36
1,5	44,03
2,0	61,24
2,5	80,20
3,0	100,64
3,5	122,84
4,0	143,30
4,5	168,77
5,0	190,63



$$x(t)=6{,}771t^2+11{,}440t+12{,}621$$

Conclusiones

Desde la experimentación, se evidencia que la problemática del desequilibrio en la enseñanza, que prioriza los procedimientos algorítmicos sobre la comprensión conceptual y dificulta una comprensión profunda de las funciones, puede ser abordada eficazmente. Esta experimentación demuestra que integrar diversas representaciones y enfoques más comprensivos mejora significativamente el aprendizaje de las funciones.

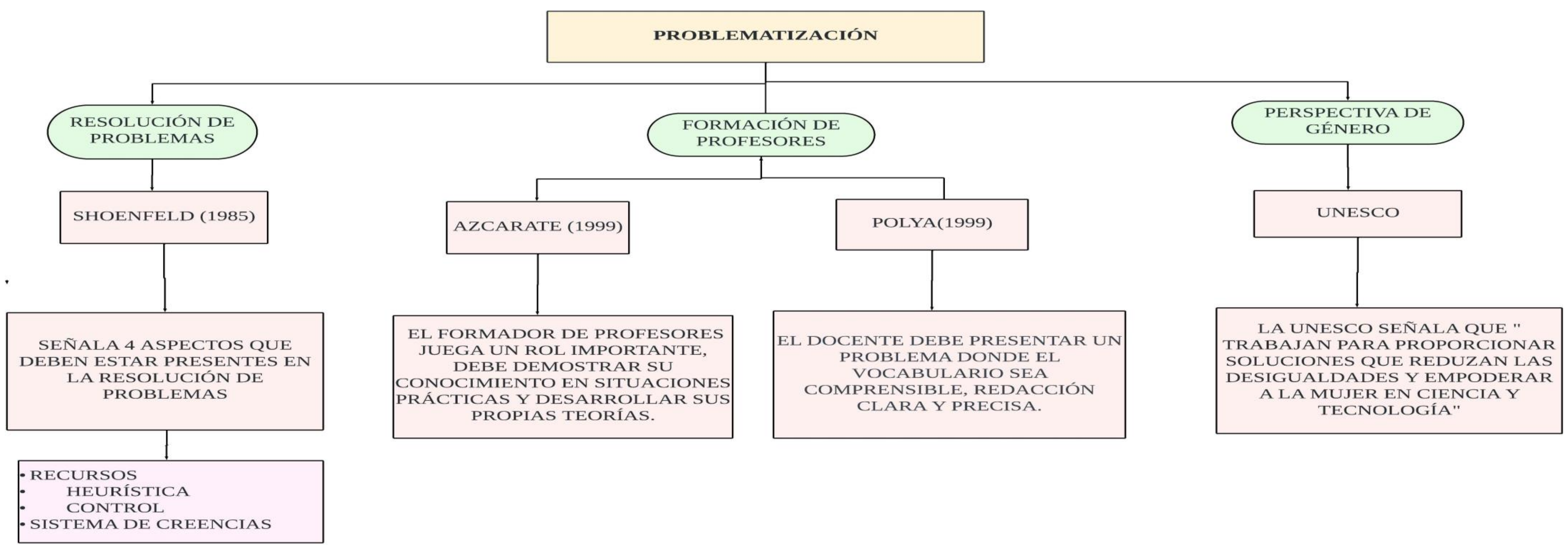
REFERENCIAS

CPEIP, C. de P., Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. (2021). Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática (Ministerio Educación de Chile).
MINEDUC Chile, U. de C. y E. (2021). Límites, Derivadas e Integrales (Unidad de Currículum y Evaluación). Recuperado de https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/14312
CPEIP, C. de P., Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. (2021). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática* (Ministerio Educación de Chile).
MINEDUC Chile, U. de C. y E. (2021). *Límites, Derivadas e Integrales* (Unidad de Currículum y Evaluación). Recuperado de https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/14312

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS CON PERSPECTIVA DE GÉNERO, EN FORMADORES DE FUTUROS PROFESORES DE PEDAGOGÍA GENERAL BÁSICA MENCIÓN MATEMÁTICA.

Sofía Inés Parada Alfaro sofia.parada@alumnos.ucm.cl
Susana Andrea Moya Vega
Susa_id@hotmail.com

Elementos de contextualización y propósito



OBJETIVO GENERAL:

Implementar un plan de formación de resolución de problemas matemáticos, desde una perspectiva de género en formadores de futuros profesores de Pedagogía General Básica mención Matemática.

OBEJTIVOS ESPECÍFICOS:

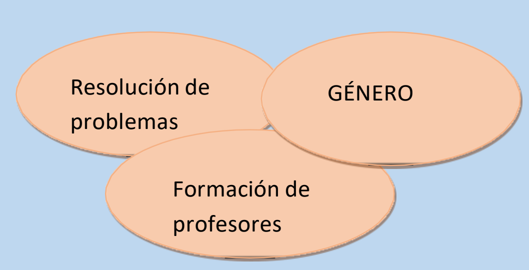
. Identificar el significado que le dan los formadores de futuros profesores de Pedagogía General Básica mención matemática a la perspectiva de género.

. Analizar la perspectiva de género en los problemas matemáticos implementados por los formadores de futuros profesores de pedagogía general básica mención matemática.

. Desarrollar un plan de formación de resolución de problemas, con perspectiva de género.

Marco Teórico

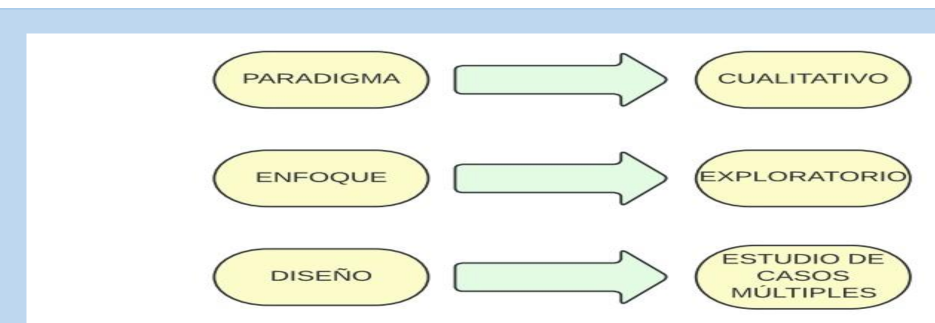
La resolución de problemas matemáticos según lo reportado por la literatura es una habilidad fundamental en numerosos aspectos de la vida personal y profesional (Defaz,2016).



Shoenfeld (1985) señala 4 aspectos que deben estar presentes en la resolución de problemas, las cuales son, recursos (conocimientos previos), las heurísticas (estrategias cognitivas), el control (estrategias meta cognitivas) y el sistema de creencias, además en su libro señala distintas creencias entre las cuales, dice que las matemáticas son abstractas, es decir, no se relacionan con la vida cotidiana, expresando que solo genios son capaces de descubrir la matemática y que si a un problema no se resuelve dentro de 10 minutos quiere decir, que no tiene solución.

Uno de los actores principales dentro de la resolución de problemas según lo reportado por Shoenfeld, es el docente, el cual debe conocer el contexto del estudiante y los conceptos previos que este posee, puesto que si no cuenta con las herramientas necesarias para la resolución de ciertos problemas esto no funciona. Por lado Pólya (1990) expresa que el docente debe presentar un problema donde el vocabulario sea compresible, redacción clara y precisa, al momento de la resolución del problema por parte del estudiante, el docente debe orientar

Metodología



LOS INSTRUMENTOS QUE SE UTILIZARÁN SERÁN UN ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA PARA DAR RESPUESTA AL OBJETIVO 1 Y 2, OBSERVACIÓN PARA EL OBJETIVO NÚMERO 2 Y REVISIÓN DOCUMENTAL PARA DAR LA RESPUESTA AL OBJETIVO NÚMERO 3 ,EL ANÁLISIS DE LOS DATOS SE REALIZARÁ MEDIANTE LA IDENTICACIÓN Y CODIFICACIÓN DE TEMAS Y PATRONES RECURRENTES Y TRIANGULACIÓN DE LA INFORMACIÓN..

Formación de profesores y perspectiva de género

González (2000) señala que rol del formador hoy en día es esencial , que su actuación requiere de compromiso, además de preparación y contar con las herramientas necesarias, es por ello que plantea que debe existir una modificación sustancial de las competencias básicas exigidas referidas al conocimiento, destrezas, actitudes y valores, las cuales ayudaran a especificar su quehacer como educador. Por su parte Jacobs (2010) reporta que para analizar la enseñanza de las matemáticas es necesario desarrollar competencias y habilidades en los docentes, sobre todo desarrollar la competencia de "mirar con sentido", lo cual se refiere a que docente de matemática tenga la capacidad de mirar situaciones de enseñanza aprendizaje de una manera profesional, identificando situaciones relevantes, utilizar el contexto para razonar en las interacciones en el aula.

En cuanto a la perspectiva de género según lo reportado por varios autores, siempre ha sido un tema relevante en la matemática, ya que, surgen las interrogantes de por qué son más hombres que mujeres que se interesan por áreas relacionadas con la ciencia, y por qué los hombres obtienen mejores puntajes en pruebas estandarizadas que las mujeres. En esta línea, existe una preocupación en cuanto a la brecha de género observada en pruebas estandarizadas internacionales (PISA y TIMSS) donde las mujeres manifiestan un rendimiento académico inferior.

Referencias

Perdomo-Díaz, J., y Felmer, P. (2017). El taller RPAula: Activando la resolución de problemas en las aulas. Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 21(2), 425-444.

Polya, G. (1965): How to solve it. Princenton University Press (Traducción: Cómo plantear y resolver problemas, de Julián Zagazagoitia, Ed. Trillas. México)

Contreras L. C. et al. Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. In: JORNADAS DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE HUELVA, 3. 2017, Huelva. Actas... Huelva: Universidad de Huelva, 2017. p. 11-25. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/326157317_FUNDAMENTOS_TEORICOS_PARA_CONFORMAR_UN_MODELO_DE_CONOCIMIENTO_ESPECIALIZADO_DEL_FORMADOR_DE_PROFESORES_DE_MATEMATICAS Acceso en: 20 dic. 2022.

Chavarría, J., y Alfaro, C. (2005). Resolución de problemas según Polya y Schoenfeld. In Ponencia presentada ante el IV Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC). Instituto Tecnológico de Cartago, Costa Rica. Recuperado de http://www. cidse. itcr. ac. cr/ciemac/memorias/4toCIEMAC/Ponencias/Resoluciondepro blemas. pdf.

Chiarotti, S. (2006). Aportes al Derecho desde la Teoría de Género. Otras miradas, 6(1), 6-22.

Dindia, K y Jones, S. (2004). A Meta-Analytic Perspective on Sex Equity in the Classroom. Review of Educational Research.Vol.4.

González, F. E. (2016). Los nuevos roles del profesor de matemática Retos de la Formación de Docentes para el Siglo XXI. *Paradigma*, *21*(1), 139-172.

Jacobs, V.; Lamb, L.; Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. Journal for Research in Mathematics Education, 41(2), 169-202.

https://www.unesco.org/es

SECUENCIA DIDÁCTICA DE GEOMETRÍA PARA SEGUNDO BÁSICO

ALBERTO ACTO HERREJÓN
UNIVERSIDAD CENTRAL

1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo propone una secuencia didáctica desde el enfoque de la matemática crítica, que conecta las matemáticas con temas sociales, políticos y culturales. El objetivo es empoderar a los estudiantes para que utilicen las matemáticas para comprender y cuestionar el mundo, promoviendo el pensamiento crítico. Se busca abordar la dificultad de los estudiantes para relacionar conceptos geométricos con situaciones del mundo real, mediante nuevas actividades y evaluaciones diseñadas para este propósito.

2 PROBLEMA

Estudios realizados por la Agencia de Calidad de la Educación en Chile y evaluaciones como el SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación), se han identificado varias dificultades en el aprendizaje de la geometría en los estudiantes de educación básica. La enseñanza de la geometría no se desarrolla con foco en lo crítico ni relacionado con la vida de los estudiantes lo (Alvarez, 2019).

3 ANTECEDENTES

El 50% de los estudiantes no logran conectar conceptos geométricos con situaciones del mundo real, lo que sugiere una enseñanza demasiado abstracta o desconectada de la vida cotidiana de los estudiantes (Rojas Espín, T. M. 2024).

4 MÉTODO

Se utilizó una metodología de tipo cualitativa, con foco en la enseñanza transformadora dirigida por conjeturas, también llamadas investigaciones de diseño (Confrey y Lachance, 2000) para el caso específico de esta propuesta se generó una situación didáctica que fue analizada a partir de conjeturas teóricas. En primer lugar, se busco motivar a los estudiantes a identificar y reflexionar sobre las figuras geométricas en su entorno. La clase se enfocó en la importancia y el uso práctico de estas formas en la vida diaria, y cómo organizan y mejoran los espacios. Los estudiantes primero manipularon figuras de cartulina para explorar sus características y luego construyeron figuras geométricas con materiales como palitos de helado y plastilina. Finalmente, discutieron cómo estas formas influyen en la organización de los espacios y la comunidad, fomentando una reflexión crítica.

FIGURA	LADOS	PUNTAS
Cuadrado		
Triangulo		
Circulo		
Nube		
Pentágono		
Estrella		
Heptágono		

5 RESULTADOS

Al inicio, los alumnos presentaron dificultades para relacionar figuras geométricas con objetos comunes de su entorno. Posteriormente, los alumnos describieron las figuras geométricas a través del número de lados y puntas que tenían cada una. El círculo al no tener lados ni puntas les provocó confusión sobre si era o no una figura geométrica. Todos construyeron las figuras sin problema. Al terminar la actividad, los alumnos pusieron en común lo que habían aprendido en la sesión y reflexionaron sobre la importancia de las figuras geométricas en nuestra vida.

6 CONCLUSIONES

Tras trabajar esta secuencia didactica en la escuela libre Ayilen, he podido ratificar que la problemática expuesta era correcta y que existe una gran dificultad para relacionar las figuras geométricas con situaciones del mundo real. Tras realizar la actividad propuesta los alumnos han conseguido aprender el objetivo marcado. Por ello, es muy importante desarrollar secuencias didácticas con foco en la vida de los alumnos y realizar secuencias didácticas reflexivas.

sochiem
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

Familiarizándonos con las proporciones

David Escobar, Aidan Senler, Anais Villalobos
Universidad de Concepción Campus Los Ángeles

Objetivo de la clase: Introducir el concepto de la proporcionalidad directa

Resumen:

Tomando como referencia el OA **N°8 de 7° Básico (Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: Realizando tablas de valores para relaciones proporcionales, Graficando los valores de la tabla, Explicando las características de la gráfica, Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas)** se plantea la siguiente propuesta de pizarra de clases, que contempla una secuencia de actividades mediante la cual se busca iniciar a las y los estudiantes en el estudio de las relaciones de proporcionalidad directa. Se inicia con una Activación de Conocimientos, donde se revisarán los conceptos fundamentales de razón y proporcionalidad, seguido de un Problema de la clase, cuyas actividades representan el grueso de la experiencia de aprendizaje, incluyendo el análisis de posibles respuestas y un Cierre, donde se entregarán los conceptos claves y un Ticket de Salida.

Activación de Conocimientos

1) Completa las razones equivalentes

$\frac{1}{5} = \frac{12}{?}$ $\qquad$ $\frac{1}{7} = \frac{?}{84}$

$\frac{1}{?} = \frac{16}{208}$ $\qquad$ $\frac{5}{25} = \frac{?}{40}$

2) Completa las siguientes tablas, manteniendo la igualdad entre las razones

X	Y
1	4
2	8
3	
4	
5	

X	Y
5	9
10	18
15	
20	
25	

X	Y
3	7
6	14
9	
12	
15	

A) ¿Notas alguna relación entre X e Y?

B) Si divides Y por X ¿observas un valor constante?

Problema de la clase

Un criadero debe alimentar a cada uno de sus conejos con un cierto número de porciones de alimento al día, tal y como se muestra en la tabla a continuación:

N° de conejos	10	20	30	40	50
N° de porciones al día	30	60	90	120	150

1) ¿Qué relación ves entre el N° de conejos y el N° de porciones de alimento necesarias al día?

2) ¿Cuántas porciones diarias de alimento observas que necesita cada conejo?

3) ¿Cuántas porciones son necesarias al día para 43 conejos?

Resolución 1

10	20	30	40	50
30	60	90	120	150

10:30 / 20:60 / 30:90 / 40:120 / 50:150

10:10 30:30

$\boxed{1:3}$

43 × 3 = 129

Luego de transformar la tabla a razones, y simplificarlas para obtener la mínima relación entre los valores, el / la estudiante llega a la siguiente conclusión:

"Si hay 43 conejos, se necesitarán… 129 porciones"

Resolución 2

10	20	30	40	43	50
30	60	90	120	?	150

43 x 3 = 129

43 : 129

el / la estudiante comprueba en la tabla que el valor de los números de porciones corresponde al número de conejos tres veces amplificado, por lo que realiza la operación de la izquierda y llega al resultado

"Si hay 43 conejos, y por cada conejo se necesitan 3 porciones… se necesitarán… 129 porciones"

Cierre: La proporción directa

$y = ax$ $\qquad$ $a = y/x$

Variable dependiente $\qquad$ Variable dependiente

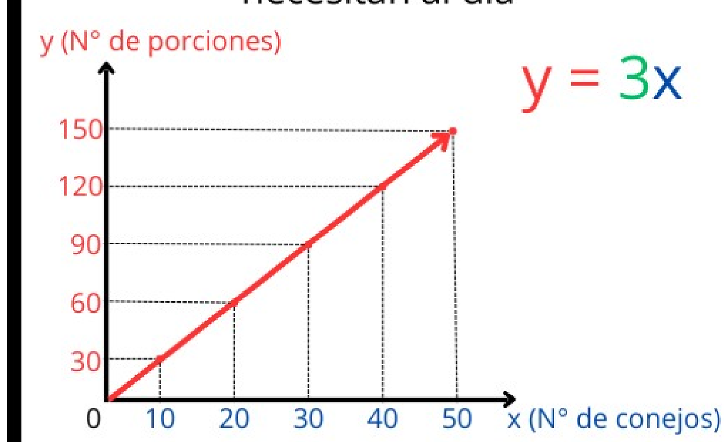
Constante de proporcionalidad

Representación Tabular: relación entre el N° de conejos y el N° de porciones de alimento que necesitan al día

X	10	20	30	40	50	...
Y	30	60	90	120	150	...

×2 ×3 ×4 ×5

Gráfica: relación entre el N° de conejos y el N° de porciones de alimento que necesitan al día



Ticket de Salida

1. ¿Cuántas porciones son necesarias para alimentar 62 conejos?
2. ¿Cuántos conejos se pueden alimentar con 270 porciones?

Reflexión

La importancia de diseñar una reactivación de conocimientos con conceptos asociados a la tarea principal de la clase radica en que permite a los estudiantes enlazar ideas y aplicar conocimientos, que facilitan la realización y comprensión de la clase en general. Gracias a esto también, será posible identificar una menor fluctuación en las respuestas de los estudiantes. También se puede mencionar la importancia que tiene la simplicidad de la situación planteada en el problema, que posibilita a los estudiantes comprender que la matemática es útil para resolver desafíos del día a día.

REFERENCIAS

Ministerio de Educación. (2023). Actualización de la Priorización Curricular para la Reactivación de Aprendizajes: Matemáticas. Santiago: Unidad de Curriculum y Evaluación: Ministerio de Educación.

Caída Libre: Estudio de la velocidad y aceleración por medio de la experimentación y el análisis con uso de tecnologías.

Karla Pacheco - Daniel Román
Universidad Metropolitana de las ciencias de la educación

sochiem
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

Introducción

El estudio del fenómeno de la **caída libre** ofrece una excelente oportunidad para introducir conceptos fundamentales de la física y las matemáticas, como la velocidad y la aceleración mediante el uso de la derivada en el diferenciado de cálculo diferencial.
La siguiente experiencia permite a los estudiantes no solo observar el fenómeno, sino también modelar el comportamiento de los cuerpos, analizando variables como la velocidad y la aceleración para comprender el concepto de derivada. Este enfoque experimental y tecnológico conecta la **física** con las **matemáticas**, facilitando la construcción de un aprendizaje significativo en el aula, a la vez que promueve el uso de tecnologías educativas en el análisis de fenómenos físicos.

Antecedentes

Unidad 3:
Derivadas

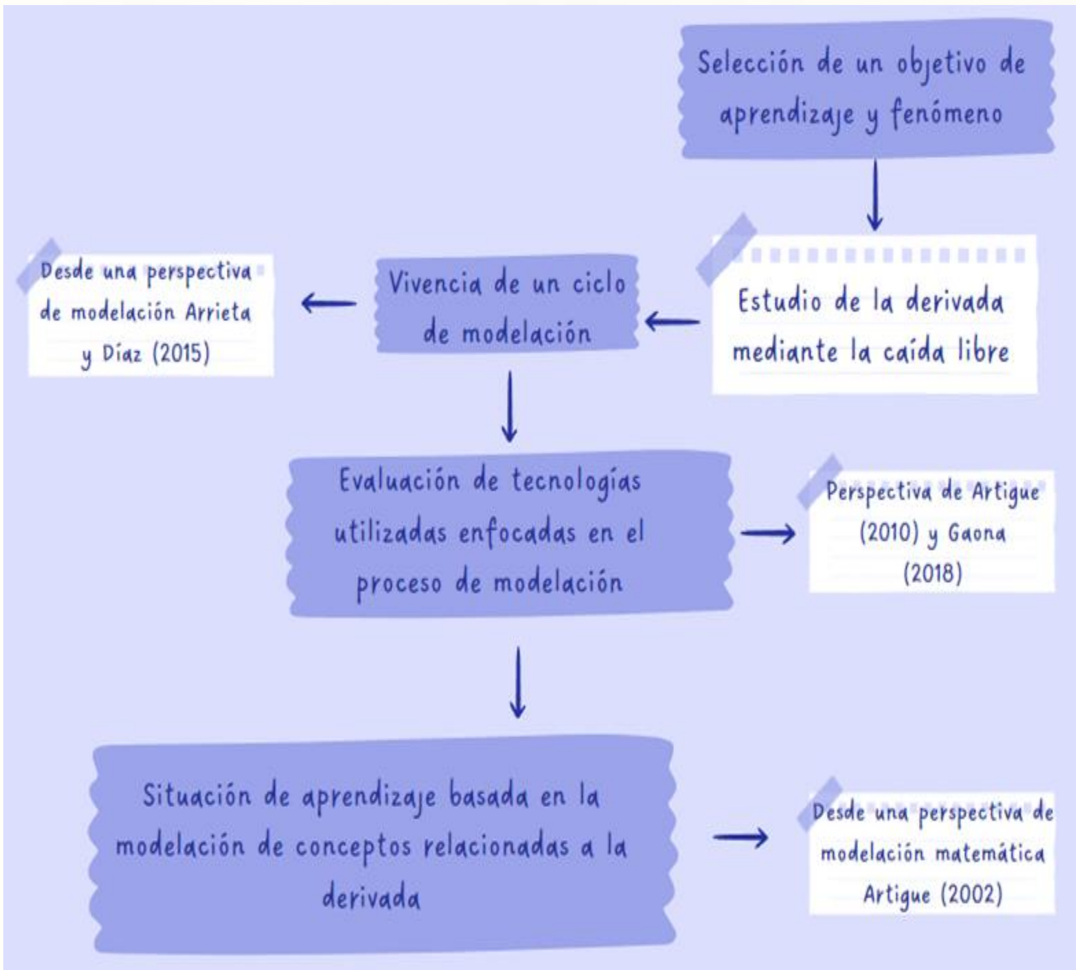
Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

Problemática

Generar una situación de aprendizaje mediante el fenómeno de la caída libre, en donde se lanzan una pelota de fútbol y otra de ping pong y se muestre que este tipo de lanzamientos es independiente de su masa. Asimismo, se busca introducir la enseñanza de la derivada con los conceptos de velocidad y aceleración mediante el uso de tecnologías como tracker y GeoGebra. En base a esto, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: **¿Cómo impacta el uso de herramientas tecnológicas en la comprensión de la derivada?**

Método



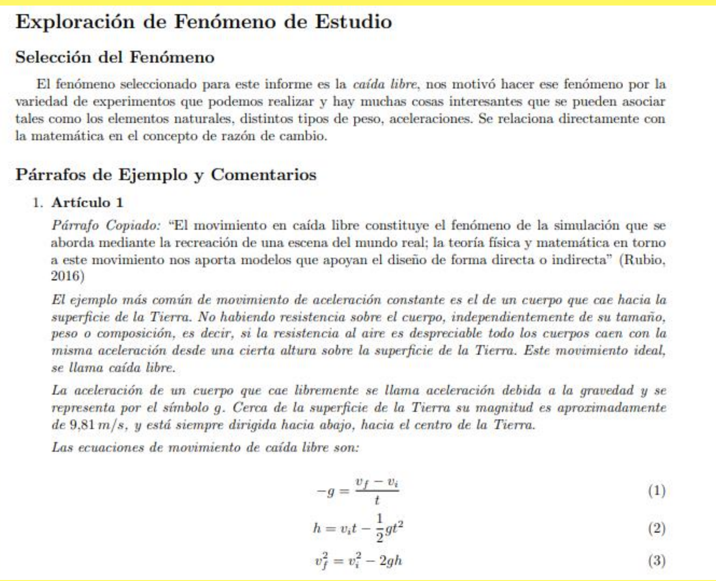
Libro de experiencias de modelación matemática escolar con uso de tecnologías - Producto final del curso "tecnologías para la enseñanza de la matemática" (MMAT604 - 2023)

Contacto y correos.

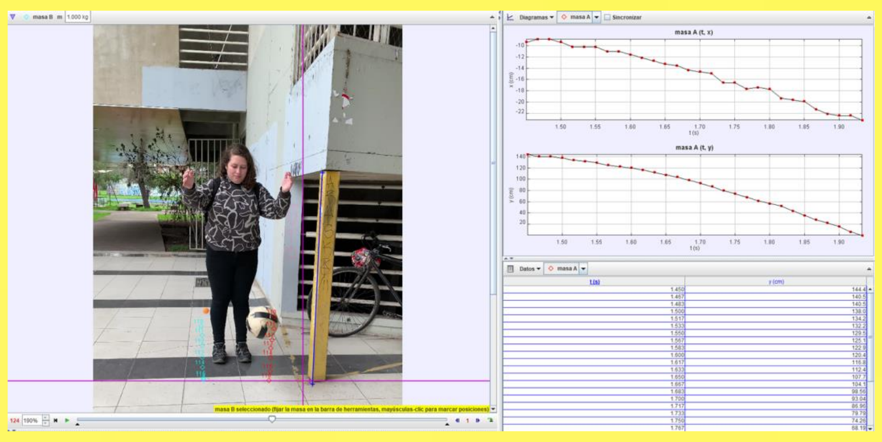
Karla Pacheco:
karla.pacheco2020@umce.cl
Daniel Román:
daniel.roman2020@umce.cl

CAÍDA LIBRE

INVESTIGACIÓN



GRABACIÓN Y MEDICIÓN



Extracción de datos en tracker

UTILIZACIÓN DE PROGRAMAS Y VALIDACIÓN

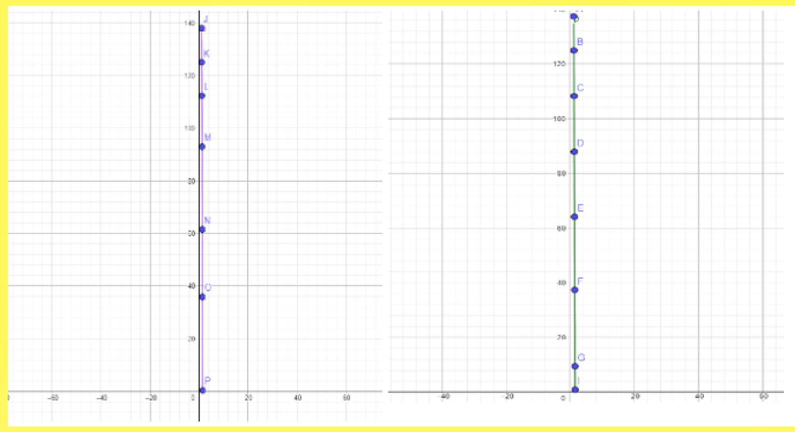


Gráfico de pelota de fútbol y ping pong

Situación de aprendizaje.

1. El experimento involucra la caída libre de una pelota de fútbol y otra de ping pong desde diferentes alturas (1,44 m y 4,56 m) y se graba para una mejor visualización y posterior análisis.
2. Se utilizan las plataforma de tracker y tinkercad con el fin de analizar el fenómeno y abstraer datos.
3. Se modelan ambas caídas libres y se aplican conceptos como velocidad y aceleración de ambos cuerpos para así aprender el concepto de la derivada.

Resultados y conclusiones.

A través de la experimentación y el análisis de datos reales, vimos que no solo adquirimos una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos, sino que también desarrollamos habilidades para usar tecnologías avanzadas en contextos científicos. Además, el uso de la modelación no solo facilita la enseñanza de la derivada como una tasa de cambio instantánea, sino que también fomenta la construcción de un puente entre la **geometría** y el **cálculo.** En resumen, esta experiencia de aprendizaje refuerza la importancia de las herramientas tecnológicas para aplicarla en el aula, proporcionando una enseñanza más atractiva y efectiva para conceptos complejos y abstractos.

- **Limitaciones**

Al no estar familiarizados previamente con las herramientas tecnológicas mencionadas limitó inicialmente la fluidez en el uso, sin embargo cuando ya conocimos la herramienta que utilizamos se nos hizo más fácil la realización de esta investigación.

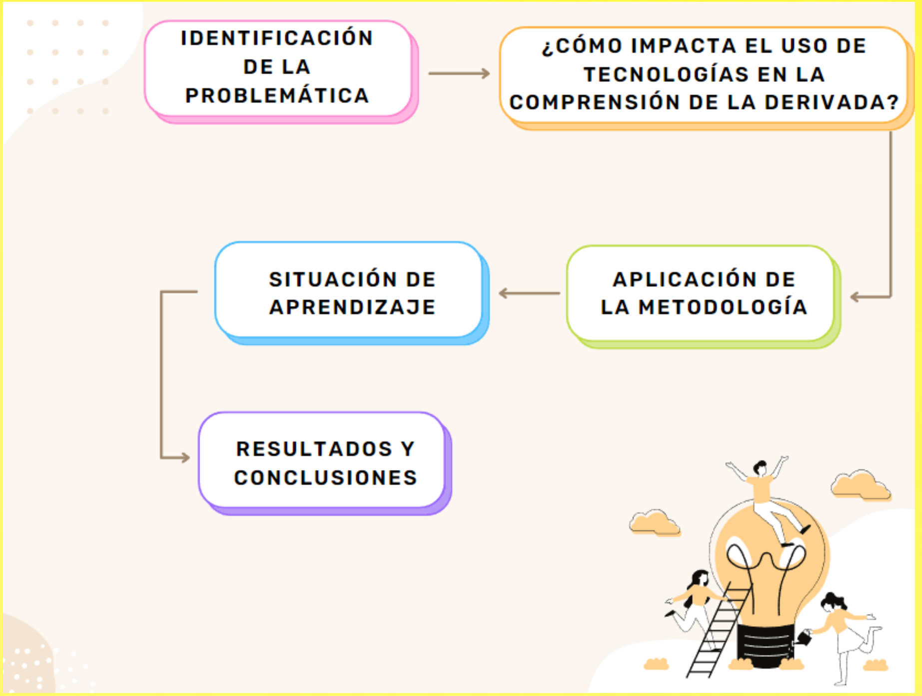
- **Propuestas de mejora**

1. Considerar variantes del experimento, como el uso de aplicaciones móviles para diversos escenarios
2. Incorporar actividades diferenciadas para adaptarse a estudiantes con distintos niveles de familiaridad tecnológica.

- **Estrategias para aplicar en contextos escolares**

1. Diseñar guías didácticas que incluyan instrucciones paso a paso y ejemplos prácticos para facilitar el uso de tecnologías.
2. Considerar evaluaciones formativas o sumativas que permitan medir no solo la comprensión conceptual, sino el desarrollo de habilidades tecnológicas y modelación matemática

Diagrama de resumen



REFERENCIAS

- Ministerio de educación [MINEDUC]. (2019, noviembre). Bases curriculares 3° y 4° medio. Curriculum nacional. Recuperado 19 de noviembre de 2023, de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf
- Arrieta y Díaz (2015), *"La modelación matemática y su didáctica en la enseñanza de las ciencias"*, donde abordan el uso de la modelación en el aula con apoyo de tecnologías.
- Artigue, M. (2010), *"Didáctica de la matemática y tecnologías digitales: una mirada crítica"*, donde explora la interacción entre la tecnología y la modelación matemática.
- Rubio, L., Prieto, J., \& Ortiz, J. (2016). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. IJERI: International Journal of Educational Research and Innovation, (5), 90-111.
- Vera, F., Rivera, R., Fuentes, R., & Romero Maltrana, D. (2015). Estudio del movimiento de caída libre usando vídeos de experimentos.
- Artigue, M. (2002). *Aprendizaje de las matemáticas en un entorno de CAS: La génesis de una reflexión sobre la instrumentación y la dialéctica entre el trabajo técnico y conceptual.* En *La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario: Un estudio del ICMI* (pp. 47-62). Kluwer Academic Publishers.

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

Inteligencia Artificial en la enseñanza de Matemáticas: Perspectivas de los docentes en Chile

Marco Pascal Ramírez,
mpascal2019@udec.cl
Pedagogía en Matemáticas.
Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles.

María Paz Flores,
mflores2018@udec.cl
Pedagogía en Matemáticas.
Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles.

Álvaro Moya Oliva (docente guía),
amoya@udec.cl
Escuela de Educación.
Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles.

Introducción

La inteligencia artificial (IA) está transformando la enseñanza de las matemáticas al facilitar la personalización del aprendizaje y la mejora de los procesos educativos (Jara & Ochoa, 2020; González-Calatayud et al., 2021; Owan et al., 2023; Zouhaier, 2023). Este estudio tiene como objetivo analizar el **conocimiento y uso de herramientas de IA** por parte de docentes **egresados de pedagogía en matemáticas de una universidad en Chile,** quienes actualmente trabajan en el sistema escolar. Se busca explorar cómo estas tecnologías son aplicadas en la **planificación, implementación y evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje**.

Antecedentes

Las herramientas que se mencionan para el apoyo en la enseñanza de las matemáticas son **chatbots como ChatGPT y sistemas de tutoría inteligente (STI)** (Mdredula et.al, 2024). Estos sistemas tienen los siguientes beneficios:

1. **Retroalimentación en tiempo real**, mejorando los procesos de enseñanza y aprendizaje (Lin et al., 2023).
2. Apoyo significativo para los docentes en:
   (a) **Planificación** de actividades educativas.
   (b) **Enseñanza** personalizada y adaptativa.
   (c) **Evaluación** precisa de aprendizajes.
   (d) **Creación de recursos** educativos innovadores
   (Montiel-Ruiz y Ruiz, 2023).

Sin embargo, existen limitaciones:

- **Falta de capacitación** en el uso de herramientas de IA.
- **Habilidades técnicas insuficientes** para su implementación.

(Polak, Schiavo y Zancanaro, 2022).

Método

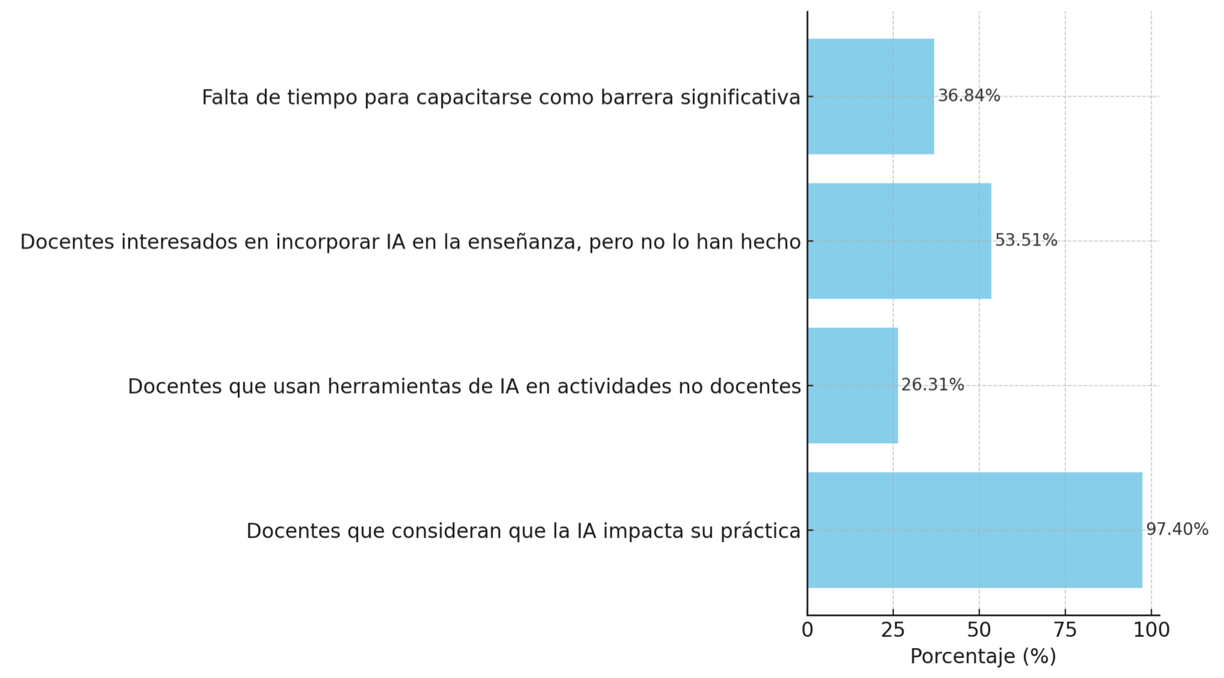
Diseño	Explicativo secuencial
Tipo de investigación	Descriptiva
Enfoque	Mixto
Recolección de datos y muestreo	Fase 1: Cuestionario Fase 2: Grupo focal

Resultados esperados

En esta investigación, se espera:

- Identificar que la **adopción de herramientas de IA** por parte de los docentes se encuentra en **una etapa inicial.**
- Detectar factores limitantes, como la **falta de tiempo y recursos,** que obstaculizan la **integración efectiva de estas tecnologías en las prácticas pedagógicas** (Enki Education, 2024).
- Proponer **recomendaciones prácticas** que apoyen a los docentes en la incorporación de la IA en las fases de **planificación, implementación y evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje**.

Problema



Uso de IA de docentes en Latinoamérica. Enki Education (2024)

Aunque muchos docentes en Latinoamérica, incluido Chile, **desean incorporar IA en sus prácticas, su adopción efectiva sigue siendo limitada**. En la enseñanza de matemáticas, se enfrentan barreras como la **falta de formación y apoyo** (Silva et al., 2024). Existe entonces una necesidad de **cerrar la brecha** entre las intenciones docentes mostradas (Enki Education, 2024) y la implementación de estas tecnologías en el aula.

Avances

Se diseñó u**n cuestionario para evaluar el conocimiento y uso de la IA** en docentes de matemáticas, integrando elementos del **Marco para la Buena Enseñanza (MBE) del MINEDUC** (CPEIP, 2021). Actualmente, el instrumento se encuentra en **proceso de validación mediante un comité de expertos**. El acceso al cuestionario está disponible a través del siguiente código QR.

Referencias

1. Silva, M., Correa, R.,& Mc-Guire, P. (2024). Metodologías activas con inteligencia artificial y su relación con la enseñanza de la matemática en la educación superior en Chile: Estado del arte. Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, (37), 20–29. https://doi.org/10.24215/18509959.37.e2
2. González-Calatayud, V., Prendes-Espinosa, P., & Roig-Vila, R. (2021). Artificial intelligence for student assessment: A systematic review. *Applied Sciences, 11*(12), 5467.
3. Jara, I., & Ochoa, J. M. (2020). Usos y efectos de la inteligencia artificial en educación. *Banco Interamericano de Desarrollo (BID)*. doi: http://dx.doi.org/10.18235/0002380.
4. Zouhaier, S. (2023). The impact of Artificial Intelligence on higher education: An empirical study. *European Journal of Educational Sciences, 10*(1), 17-33.
5. Owan, V., Abang, K., Idika, D., Etta, E., & Bassey, B. (2023). Exploring the potential of artificial intelligence tools in educational measurement and assessment. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*.
6. Polak, S., Schiavo, G., & Zancanaro, M. (2022). Teachers' perspective on artificial intelligence education: An initial investigation. *CHI Conference on Human Factors in Computing Systems Extended Abstracts*, 1-7.
7. Lin, Y., Luo, Q., & Qian, Y. (2023). Investigation of Artificial Intelligence algorithms in education. *Applied and Computational Engineering, 16*, 180-184.
8. Montiel-Ruiz, F. J., & Ruiz, M. L. (2023). Inteligencia artificial como recurso docente en un colegio rural agrupado. *RiiTE Revista interuniversitaria de investigación en Tecnología Educativa*, 28-40.
9. MINEDUC. (2021). *Estándares de la profesión docente. Marco para la buena enseñanza*. CPEIP, Ministerio de Educación de Chile.
10. Enki Education. (2024). *Elevar las voces de la docenc(IA)*. Informe de resultados de la campaña "Enseña tu voz".
11. Mredula, K., Jonita, R., & Sajja, P. (2024). AI-Based Tools in Mathematics Education: A Systematic Review of Characteristics, Applications, and Evaluation Methods. International Research Journal on Advanced Engineering Hub (IRJAEH). https://doi.org/10.47392/irjaeh.2024.0268.

Educación STEM, modelación matemática y uso de la tecnología: Un análisis en la formación de ingenieros.

Carol Asencio, María Aravena Díaz

Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile.

Introducción

La literatura evidencia la importancia de integrar **Science, Technology, Engineering y Mathematics (STEM)**, desde los primeros niveles del sistema educativo (Bybee, 2013) para dar respuesta a las necesidades actuales (Ritz & Fan, 2015), vinculadas con las **habilidades** requeridas para **siglo XXI** (Beers, 2011). Hoy, enfrentados a la cuarta revolución industrial (4RI) lo que exige que la sociedad aproveche las **herramientas tecnológicas** para mejorar la productividad (De-la-Calle-Durán *et al.*, 2022), principalmente en los campos de la ingeniería, la ciencia y las matemáticas, donde juegan un papel fundamental (Simó *et al.*, 2020). De esta manera, el desarrollo económico y tecnológico actual demanda profesionales con sólidas **habilidades STEM** (Yamada, 2018). Sin embargo, una creciente inquietud reside en la brecha entre la necesidad de profesionales con estas competencias y la realidad de la **formación de ingenieros** (Lealdino *et al.*, 2016). Para alcanzar la visión país 2030 (Arellano et al., 2023), la ingeniería chilena requiere una evolución significativa. Estrategias innovadoras como la **modelación matemática** (Aravena-Díaz *et al.*, 2022; Hallström & Schönborn, 2019) son necesarias, pues permiten abordar soluciones reales complejas que de otro modo no serían posibles (Hallström *et al.*, 2023) y se integran con las características propias de la ingeniería (Lyon & Magana, 2020) y la **educación STEM**, permitiendo formar ingenieros para la sociedad actual, capaces de colaborar en equipos multidiciplinarios y generar soluciones creativas a los desafíos de sostenibilidad (UNESCO ICEE, 2021).

Objetivo

Describir los temas abordados en la producción científica sobre educación STEM, modelación matemática y uso de tecnología en la formación de ingenieros.

Metodología

La revisión sistemática se realizó utilizando las directrices entregadas por la Declaración PRISMA, a través de la búsqueda simultánea en Web of Science (WoS), Scopus y Scielo, y el repositorio de Dialnet el 30 de octubre de 2024. Para ello se utilizaron palabras clave del tesauro de la **UNESCO** y del Institute of Electrical and Electronics Engineers (**IEEE**): *mathematical model, STEM, engineering student, engineering education, technology, technological prototype.* La búsqueda inicial reveló un conjunto de 762 artículos. Luego, se aplicó criterio de exclusión según el tipo de documento, el tipo de artículo, la disciplina, el idioma y el tipo de participante, reduciendo ésta en 7 artículos que fueron los seleccionados para esta investigación (ver Figura 1).

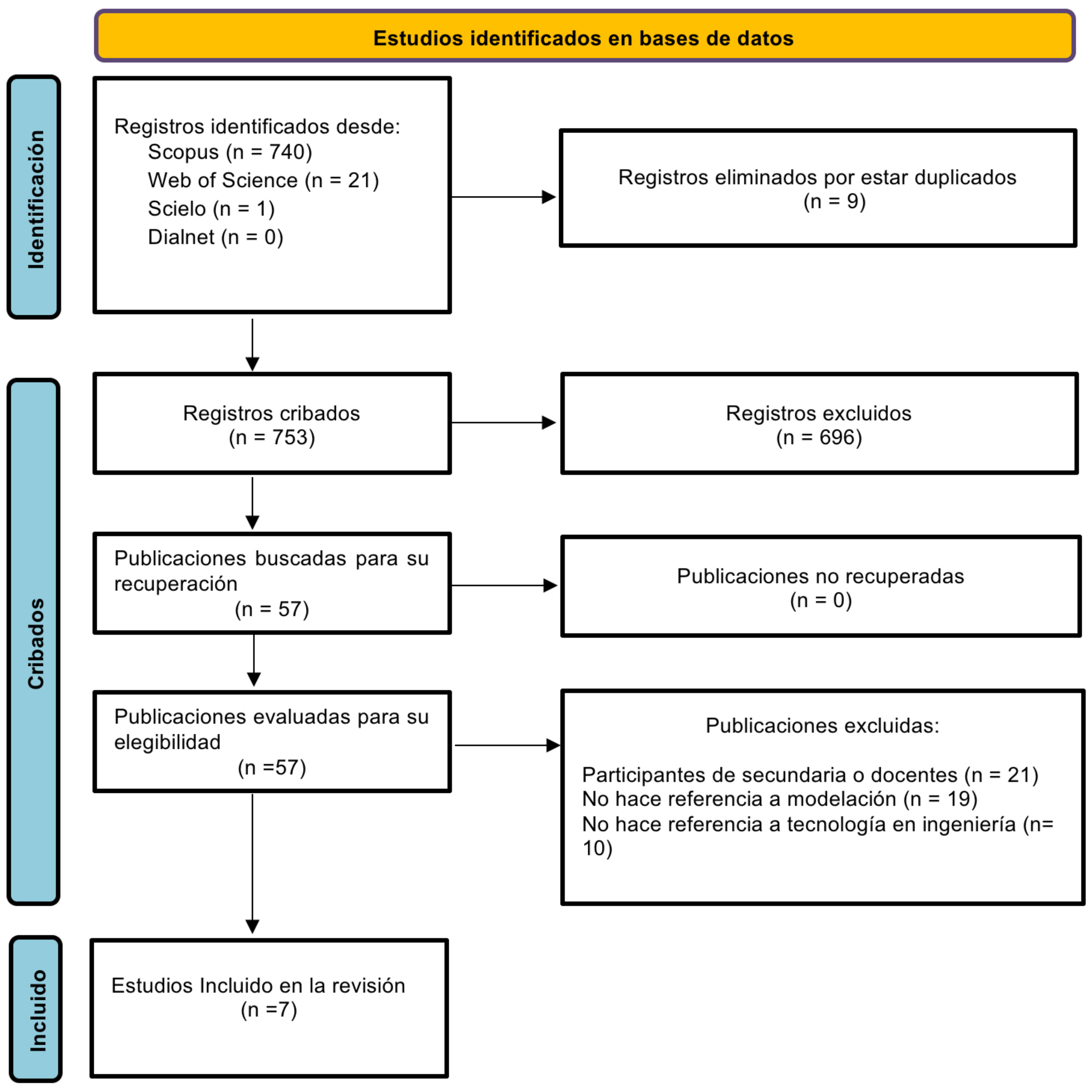


Figure 1: Diagrama de flujo del procedimiento de selección de artículos.

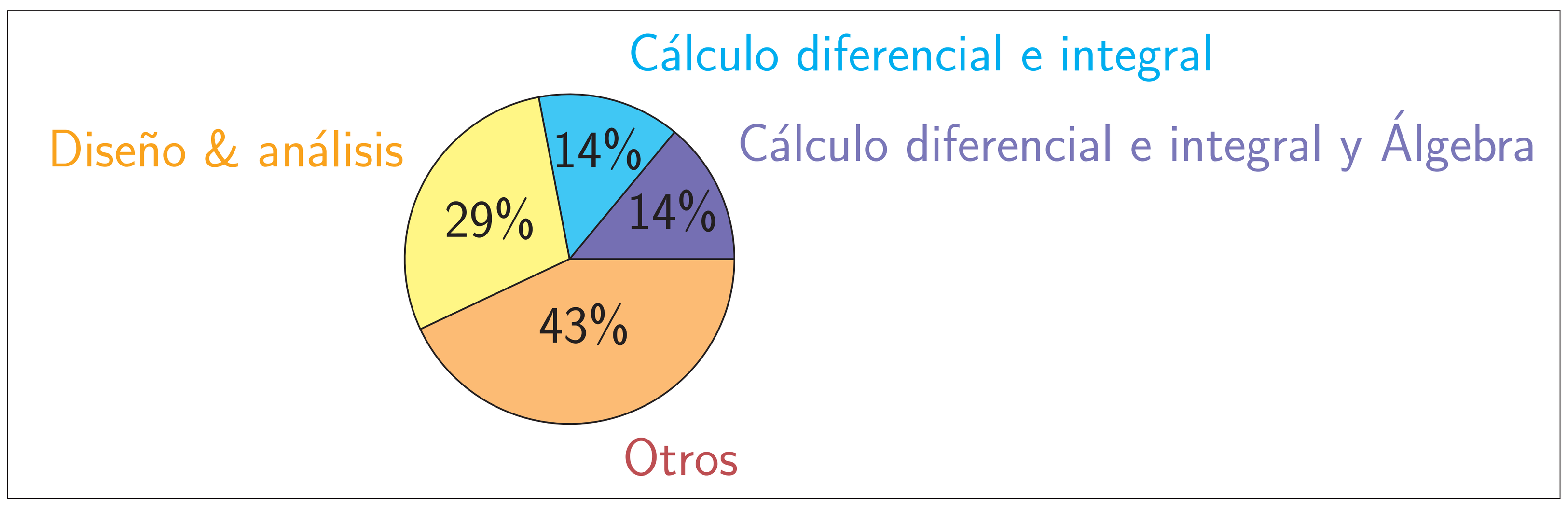
Resultados

En la siguiente tabla y gráfico se muestran los principales resultados de los 7 artículos seleccionados.

Código	Revista/Autores	Uso tecnológico
A1	Modelling, Lyon *et al.*, 2022	Construyen un modelo computacional para resolver el problema de la distribución de temperatura.
A2	Electronics, Said *et al.*, 2022	Ulitizan herramientas de sofware libre (Scibal y Qucs) para una simulación evitando altos costos.
A3	Acta Scientiae, da Silva *et al.*, 2022	Se apoyan de sofware como Geogebra y de prototipos para la simulación del funcionamiento de los radares fijos.
A4	Ingeniare, Aravena-Díaz *et al.*, 2022	Se utilizan editores gráficos, bases de datos, planillas de cálculo para representar, simular (2D o 3D) y visualizar fenómenos.
A5	Journal of Engineering Education, Lyon & Magana, 2021	Utilizan el sofware MATLAB para construir modelos computaciones que simulan el proceson de esterilización de alimentos (enlatado).
A6	Mathematics, Hernández-Sabaté *et al.*, 2020	Utiliza el sofware Graph based Problem Explorer (GbPExplorer) para resolver el problema del vendedor ambulante.
A7	International Journal of Online & Biomedical Engineering, Kozlov *et al.*, 2020	Uso de un entorno digital en el proceso educativo y la aplicación de métodos STEM a situaciones reales de la industria del petróleo y gas (perforación, transporte hidrocarburos, etc.)

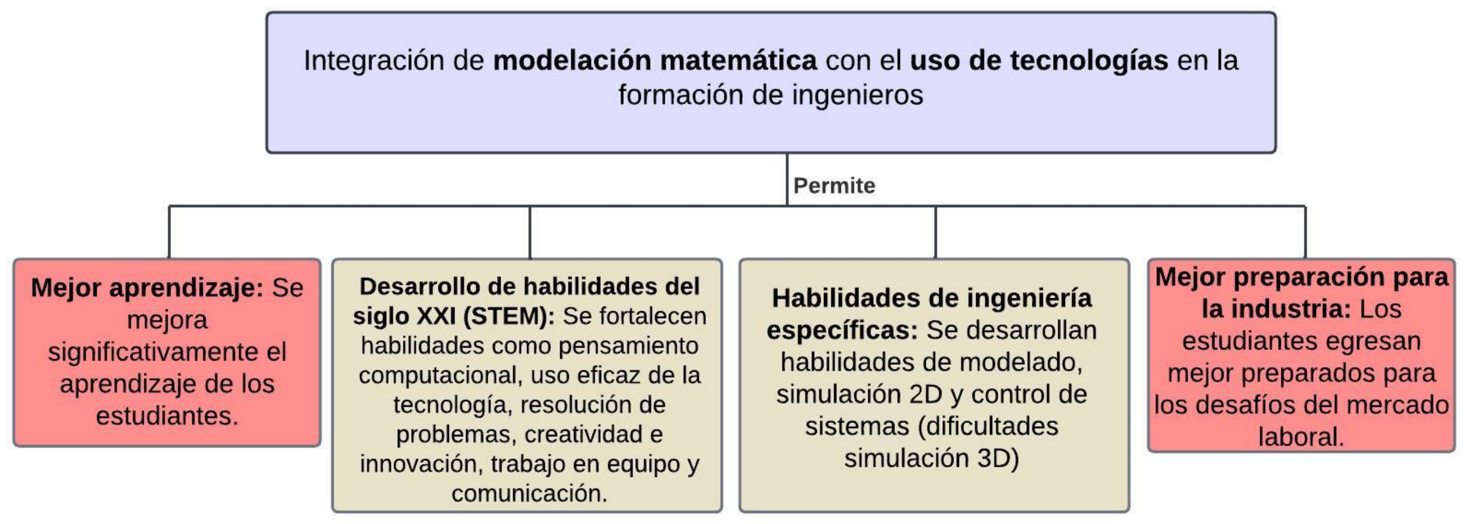
Table 1: Artículos y uso de la tecnología

Gráfico 1: Asignaturas en las que se integra el uso de herramientas tecnológicas y modelación matemática



Para las siguientes carreras de Ingeniería: Agrícola, Biológica, Eléctrica, Electrónica, Petróleo y gas, Informática[a], En Construcción, Datos y computación, Ambiental, Mecánica, Química.

Conclusiones



- Este tipo de estrategias permiten la integración de conocimientos STEM en la formación de ingenieros.
- Se trabajan las 4C para el aprendizaje del Siglo XXI que se relacionan con el desarrollo de habilidades STEM (pensamiento Crítico, Comunicación, Colaboración y Creatividad), bajo metodologías activas y colaborativas.

Bibliografía

[a]Observación: La carrera de ingeniería Informática integra uso de herramientas tecnológicas y modelación matemática en las asignaturas de Álgebra, Cálculo diferencial e integral y Diseño & análisis.

carol.asencio@alumnos.ucm.cl; maravena@ucm.cl

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Universidad de Concepción Campus Los Ángeles

sochiem SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Juego y Rincones: Estrategias Inclusivas en Matemática

Por Rayen Aguilar V., Fernanda Espinosa M., Javiera López P. y Francisca Núñez P.

1. INTRODUCCIÓN

Cada estudiante es único, y es la enseñanza la que debe adaptarse a ellos.

El juego, como herramienta pedagógica, transforma el aula matemática en un espacio inclusivo y colaborativo. Basándonos en el contenido de fracciones para un 6º básico, proponemos como metodologías inclusivas en el aula matemática, los **rincones de aprendizaje** y el **aprendizaje basado en juego (ABJ).**

2. PROBLEMA

01

DESAFÍO

Predominio de actividades lineales y poco diversas.

02

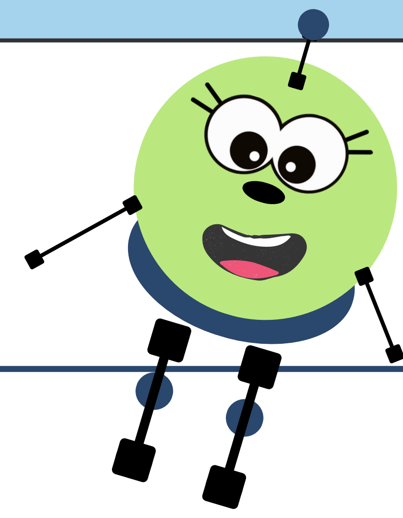
IMPACTO

- Dificultad para comprender los conceptos matemáticos.
- Bajo nivel de participación en clases.
- Bajo nivel de colaboración entre estudiantes.
- Desmotivación y desinterés por la matemática.
- Baja confianza en las propias habilidades matemáticas.

03

OPORTUNIDADES

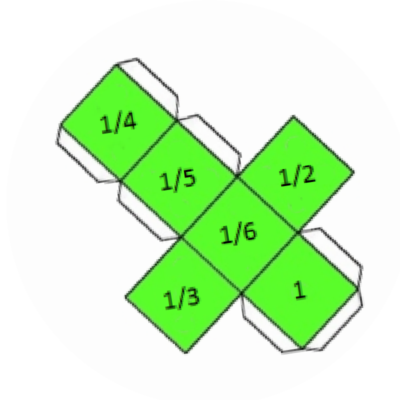
- Uso del **juego** y **rincones** para fomentar **inclusión**, participación activa y comprensión de conceptos matemáticos.



3. METODOLOGÍA

Utilizando Ingeniería Didáctica, diseñamos una unidad didáctica **diversificada** para mejorar el aprendizaje de matemática en 6º básico, específicamente en el eje de Números y Operaciones.

UNIDAD DIDÁCTICA DIVERSIFICADA



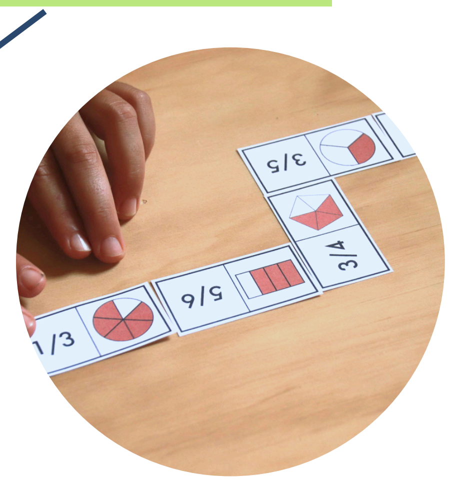
FASE EXPLORATORIA

Juegos en rincones especializados (concreto, pictórico, simbólico)

FASE PRÁCTICA

Aplicación de lo aprendido en actividades específicas

Ejemplos de actividades específicas



4. RESULTADOS

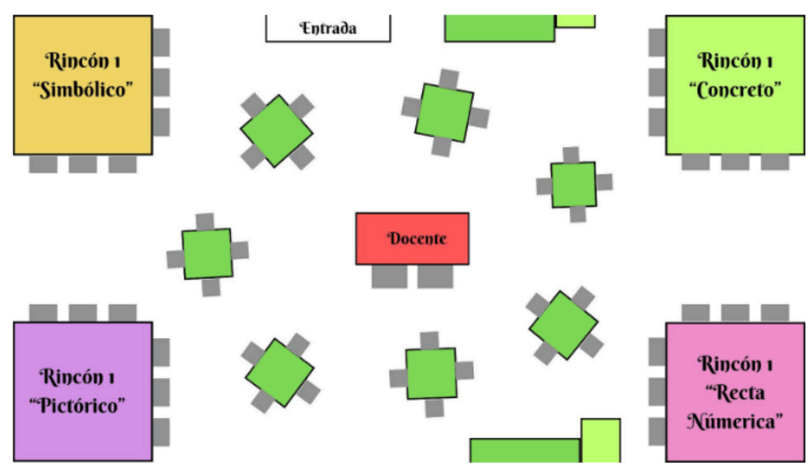
La unidad didáctica está pensada para ser desarrollada en ocho semanas, combina una fase exploratoria de cinco semanas con una fase práctica de tres semanas.

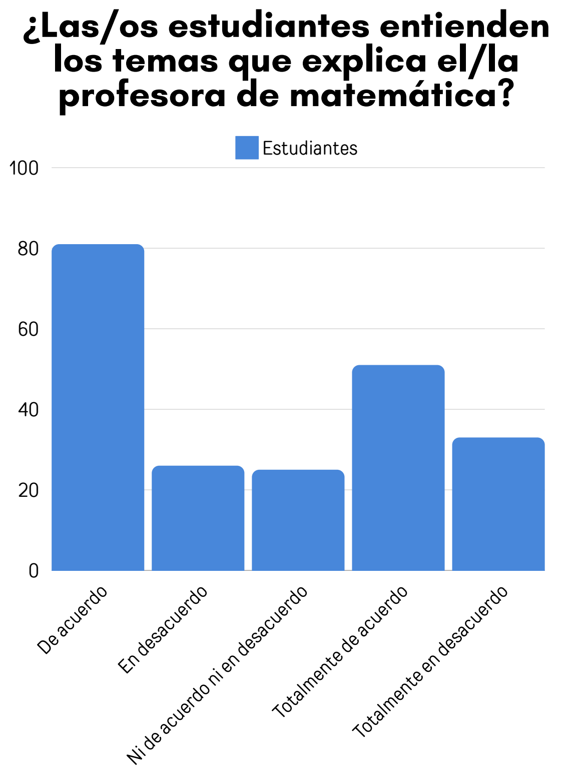
Fase exploratoria

Los estudiantes experimentan de manera lúdica con diferentes representaciones de fracciones (concreta, pictórica, simbólica) a través de diversos juegos

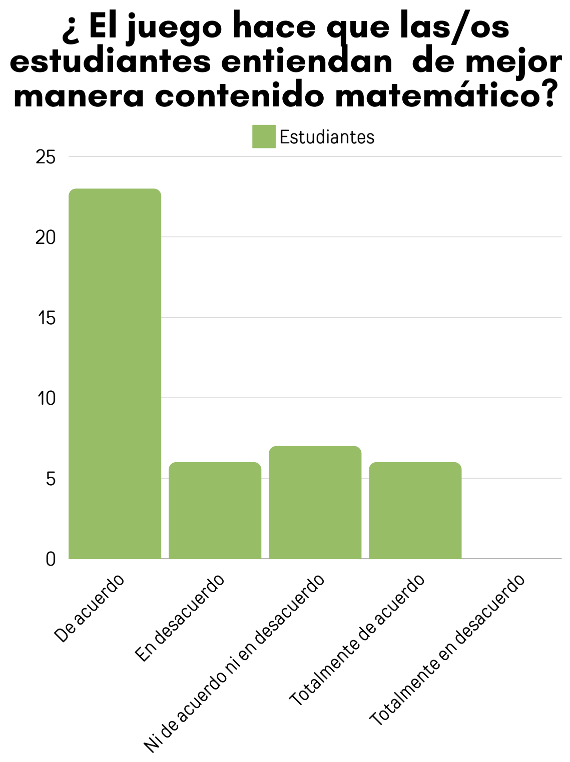
Fase práctica

Luego, la fase práctica, permite a los estudiantes aplicar los conocimientos adquiridos en las actividades anteriores, las que eran más estructuradas.





Fuente: Creación propia a partir de Calle, et al., 2020, p. 498.



Fuente: Creación propia.

5. CONCLUSIONES

A través de los autores y nuestras experiencias, al implementar **juegos y rincones de aprendizaje** como una alianza en el aula, no solo mejora el desarrollo de habilidades matemáticas, sino que también fomenta habilidades sociales cruciales como la colaboración y la comunicación. Esta estrategia pedagógica, crea un ambiente de aprendizaje **dinámico y equitativo,** donde todos los estudiantes se sientan motivados a construir y ser protagonista de su propio conocimiento. Resultando ser una educación matemática **inclusiva, equitativa y significativa.**

REFERENCIAS:

- Calle, L., García-Herrera, D., Ochoa-Encalada, S. y Erazo-Álvarez, J. (2020). *La motivación en el aprendizaje de la matemática: Perspectiva de estudiantes de básica superior. Revista Arbitrada Interdisciplinaria KOINONIA, 5(1).*
- González, V. (2020). *La importancia del aprendizaje basado en juego en la educación primaria. Grupo de Investigación de tecnología educativa. Universidad de Murcia.*
- Manzano-León, A., Rodríguez-Ferrer, J., Aguilar-Parra, J., Fernández-Campoy, J., Trigueros, R., y Martínez-Martínez, A. (2022). *Play and learn: Influence of gamification and game-based learning in the reading processes of secondary school students. Revista de Psicodidáctica, 27(1), 38-46.*
- Martín Torres, J. (2008). *Organización y funcionamiento de rincones en educación infantil. (ISSM 1988-047, Dep. legal: GR 2922/2007). Innovación y Experiencias Educativas, Nº 13.*
- MINEDUC. (2013). *Matemática, Programa de estudio para sexto año básico (1ª ed.). Unidad de Currículum y Evaluación. Alameda 1371, Santiago, Chile. ISBN 978-956-292-376-7.*
- Muñoz, J., y Prados, M. (2022). *Enseñanza de las matemáticas en educación primaria desde el trabajo por rincones. Aula de Encuentro, 24(1), 124-147.*
- Plass, J., Homer, B., y Kinzer, C. (2015). *Foundations of Game-Based Learning. Educational Psychologist, 50(4), 258283.*
- Pyle, A. (Ed.). (2018). *Aprendizaje basado en el juego: Una perspectiva de desarrollo. En Enciclopedia de Desarrollo Infantil*
- UNICEF. (2018). *aprendizaje a través del juego. sección de educación.*

INTERCULTURALIDAD Y MATEMÁTICAS: PERSPECTIVAS DESDE UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA

CAMILA ZEPEDA H., KEVIN ROJAS H., IRENE V. SÁNCHEZ-N.
Universidad Arturo Prat. Iquique, Chile.

INTRODUCCIÓN

- La Educación Intercultural (EI) ha sido reconocida como un pilar fundamental por la ONU, que promueve la interacción equitativa entre diversas culturas (UNESCO, 2006). En Chile, La Ley General de Educación del 2009 destaca la importancia de la especificidad cultural del individuo en el sistema educativo (Ley 20370, 2009).
- **La Educación Matemática Intercultural contextualiza la enseñanza de las matemáticas en la cultura, buscando reducir brechas educativas** (Palacios-Hidalgo y Cimas, 2021).
- Este estudio aborda las limitaciones en la conceptualización de la **interculturalidad**, explorando cómo se manifiesta en investigaciones recientes y su potencial para influir en políticas educativas, utilizando las perspectivas relacional, funcional y crítica, propuestas por Walsh (2010), mediante una revisión sistemática.

OBJETIVO

Caracterizar, a través de una revisión sistemática, el uso y sentido que se le da a la interculturalidad en las investigaciones en educación matemática.

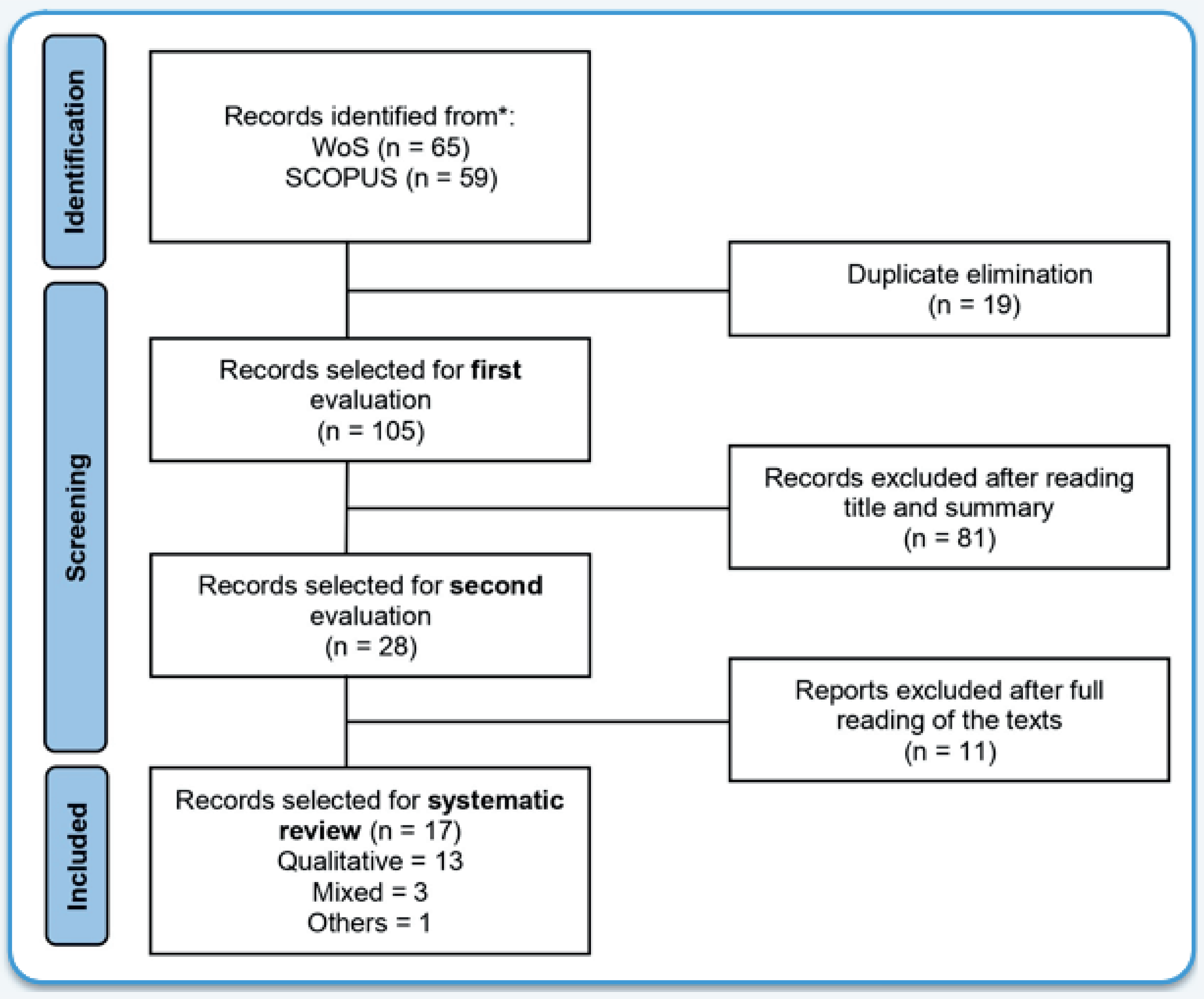
PREGUNTAS

- ¿Cuáles son las características generales de los artículos que versan sobre Interculturalidad en educación matemática?
- ¿Qué perspectivas de la Interculturalidad se manifiestan en las investigaciones que versan sobre educación matemática?
- ¿Cómo abordan los investigadores la Interculturalidad en educación matemática?

METODOLOGÍA

Se utilizó el **protocolo PRISMA**, para realizar una **revisión sistemática**, pues es conocido por su fiabilidad y transparencia en revisiones científicas (Urrutia y Bonfill, 2010). Las bases de datos seleccionadas fueron Web of Science (WoS) y Scopus, dada su cobertura de publicaciones científicas revisadas por pares que garantizan calidad y fiabilidad de las fuentes.. La ecuación de búsqueda incluyó los términos "**intercultural***" AND "**math***" AND "**education***".

Criterios selección: artículos empíricos, publicados entre 2007 y 2023, idioma: inglés, español y portugués, área Ciencias de la Educación, open access y enfoque principal la interculturalidad en la educación matemática.



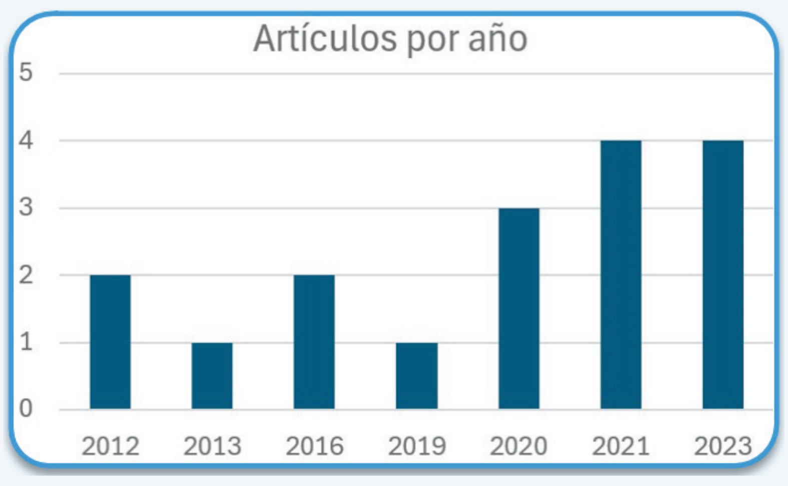
MARCO CONCEPTUAL

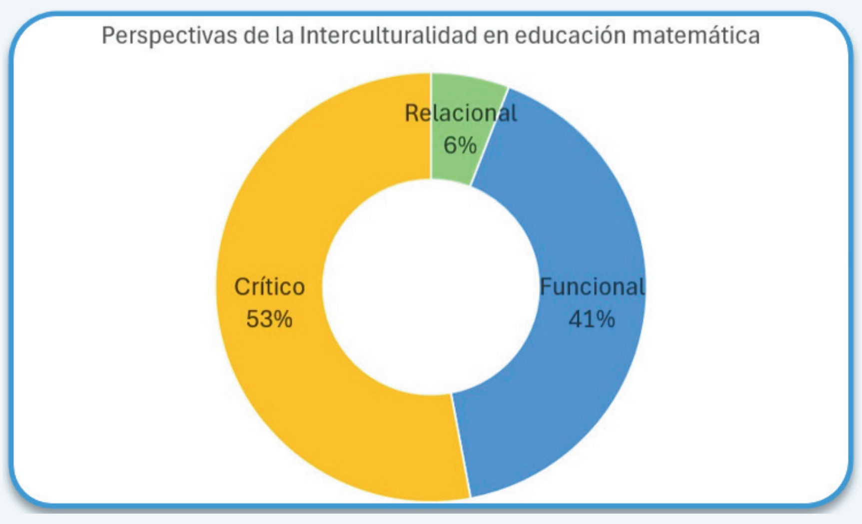
La interculturalidad en la educación ha sido interpretada de diversas maneras. Walsh (2010) distingue tres **perspectivas principales: relacional, funcional y crítica.** Estas perspectivas ofrecen un marco útil para analizar la educación matemática desde una óptica intercultural, particularmente en contextos donde el currículo es tradicionalmente monocultural (Palacios-Hidalgo y Cimas, 2021).

Relacional	Funcional	Crítica
• Se enfoca en el contacto e intercambio entre culturas, pero invisibiliza las dinámicas de poder. La considera como un proceso natural.	• Busca la inclusión de la diversidad cultural en una estructura social establecida, pero sin transformarla. Es funcional al sistema, sin desafiarlo.	• Parte del reconocimiento de que la diferencia se construye dentro de una estructura y matriz colonial de poder racializado.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

- Las investigaciones en educación matemática intercultural destacan por integrar contextos culturales diversos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, valorando las distintas formas de pensar y aprender.
- **Desde 2020,** la producción científica ha crecido notablemente, concentrándose en América Latina (Brasil: 4, Colombia: 3, Chile: 2, México: 1, Costa Rica: 1, Perú: 1) y Europa (Suecia: 2, España: 1), además de colaboraciones como Alemania-Taiwán (1) y entre Chipre, Alemania, Malta, Países Bajos, España y Turquía (1).





- Además, el **enfoque** de los manuscritos analizados, se enmarcan dentro tres tópicos principales: **estrategias de enseñanza y aprendizaje, reconocimiento de saberes locales y análisis crítico del currículo**.
- Estos hallazgos destacan tendencias clave y la necesidad de marcos teóricos claros y prácticas educativas que integren la interculturalidad en contextos globalizados.

CONCLUSIONES PRELIMINARES

- Los resultados sugieren que la **falta de claridad en la interculturalidad en educación matemática proviene de la adopción de enfoques diversos**, alineados con las perspectivas de Walsh (2010).
- La creciente adopción de perspectivas críticas evidencia la necesidad de enfoques reflexivos y transformadores en la educación matemática.
- **Los hallazgos resaltan la importancia de desarrollar currículos interculturales** que respondan a las necesidades de comunidades históricamente desplazadas.
- **Este análisis puede orientar políticas educativas que valoren la diversidad cultural**, promoviendo prácticas pedagógicas más equitativas y culturalmente pertinentes.

REFERENCIAS

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (2006). Directrices de la Unesco sobre educación intercultural, París: Unesco. http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001478/147878s.pdf
Palacios-Hidalgo, F. J., y Cimas, J. G. (2021). Educación matemática intercultural: Concepto y potencial didáctico.
Walsh, C. (2010). Interculturalidad crítica y educación intercultural. En: Jorge Viana, Luis Tapia, y Catherine Walsh (Eds.) Construyendo Interculturalidad crítica, 75-96. https://medhc16.files.wordpress.com/2018/06/interculturalidad-crc2a1tica-y-educacic2a6n-intercultural1.pdf
Urrútia, G. y Bonfill, X. (2010). Declaración PRISMA: una propuesta para mejorar la publicación de revisiones sistemáticas y metaanálisis. Medicina clínica, 135(11), 507-511. https://doi.org/10.1016/j.medcli.2010.01.015

RECONOCIMIENTO: **Fondo para la Investigación Estudiantil 2024, Vicerrectoría de Investigación e Innovación. Financiado con proyecto MINEDUC UAP2395.**

sochiem

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de Concepción

Campus Los Ángeles

VISUALIZANDO SUMATORIAS: MÉTODOS PARA EL AULA

José Ignacio Andrés Ainzúa Cespédes

Iván Pérez

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Introducción

La enseñanza de las **sumatorias** puede transformarse mediante **representaciones visuales** que conecten lo abstracto con lo concreto. Esta investigación analiza el potencial de las **demostraciones visuales** para mejorar la comprensión de las fórmulas de **sumatoria** en el ámbito educativo. Se presenta una actividad didáctica diseñada para simplificar expresiones algebraicas complejas.

Problema

Los estudiantes de tercero y cuarto medio, así como de primer año universitario en pedagogía matemática, enfrentan dificultades significativas para comprender y aplicar las **sumatorias**. Estas dificultades, documentadas en estudios como el de Sandoval Troncoso (2019), evidencian que los signos matemáticos complejos, como los de **sumatoria** y límite, suelen ser percibidos como entidades desarticuladas, lo que impacta su comprensión y aplicación en el aula.

Relevancia

Las **sumatorias** son fundamentales en los cursos de cálculo, tanto en educación media como universitaria (Ministerio de Educación, 2021). Una comprensión adecuada de este contenido es esencial en la formación de profesores, ya que establece la base para desarrollar conceptos avanzados como límites, derivadas e integrales, herramientas centrales para el análisis matemático y la enseñanza de las matemáticas.

Apoyo Teórico

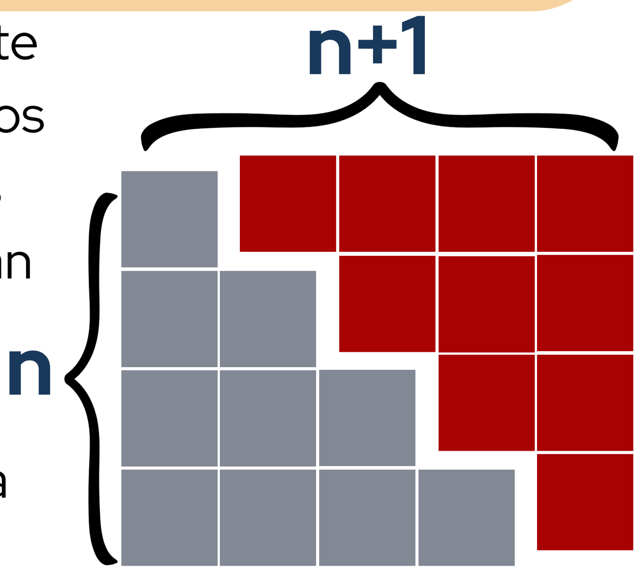
La propuesta se basa en las teorías de Gérard Duval sobre los registros de **representación semiótica**, las cuales establecen que una comprensión matemática profunda requiere transitar entre diferentes **registros**, como el **algebraico**, el **gráfico** y el **numérico**. Este enfoque resulta clave para superar las dificultades cognitivas asociadas con los signos matemáticos complejos, como las sumatorias (Duval, 2004).

Propuesta de Aula

Para abordar las dificultades en la comprensión de las **sumatorias**, se propone una actividad que combina visualizaciones geométricas y manipulaciones algebraicas. Inspirada en las ideas de **transposición semiótica** de Duval, esta actividad permitirá a los estudiantes deducir fórmulas conocidas de **sumatorias** mediante conexiones claras entre **registros algebraicos y geométricos**, favoreciendo un aprendizaje más intuitivo y conectado con el concepto.

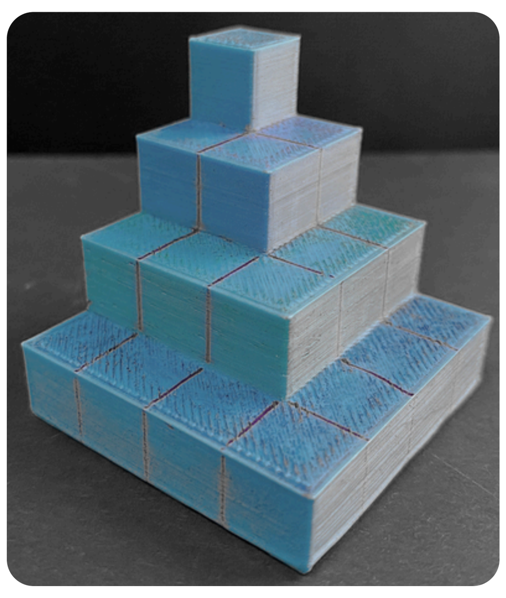
Trabajo Previo

La primera parte de la actividad consiste en explorar la **sumatoria** de los primeros n términos utilizando representaciones geométricas. Los estudiantes trabajarán con visualizaciones que les permitan deducir la fórmula correspondiente, conectando así la estructura algebraica con su **interpretación geométrica**.



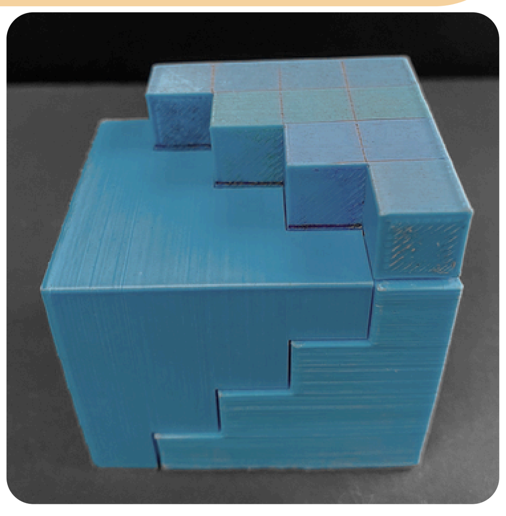
Inicio

La actividad comienza con la construcción de una estructura piramidal que representa la suma de los cuadrados de los primeros cuatro términos: $1^2+2^2+3^2+4^2$. Cada nivel de la pirámide simboliza uno de estos términos al cuadrado, utilizando cubos unitarios como base. Los estudiantes calculan el volumen de la pirámide, relacionándolo directamente con la suma de los cuadrados.



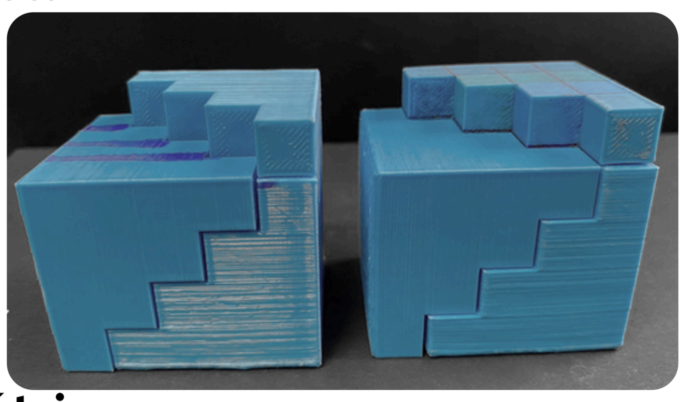
Desarrollo

Para facilitar el cálculo del volumen, se propone transformar la pirámide en una figura más manejable, como un prisma. Se emplean tres pirámides idénticas, recordando que tres pirámides pueden formar un prisma.

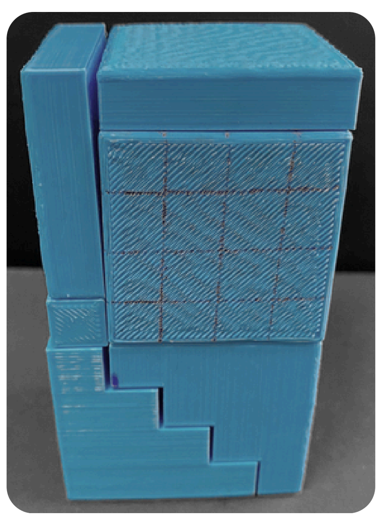


En esta etapa, los estudiantes observarán que al combinar las pirámides, la figura se aproxima a un prisma, pero con un sobresaliente en uno de sus lados. Se les invita a analizar este sobresaliente y explorar cómo completarlo para obtener una figura prismática perfecta.

Utilizando la simetría, los estudiantes crean una nueva figura idéntica que complementa el sobresaliente, logrando un prisma completo. Este ejercicio fomenta el **razonamiento espacial y geométrico**.



Con el prisma formado, se examinan sus dimensiones: los lados son n, n+1, y 2n+1. Los estudiantes deducen el volumen del prisma como n(n+1)(2n+1). Este análisis conecta las **representaciones geométricas** con **expresiones algebraicas**.



Cierre

Finalmente, se recuerda que se usaron seis pirámides para formar el prisma. A partir de esta relación, los estudiantes calculan el volumen de una pirámide como un sexto del volumen del prisma:

$$\text{Volumen de la figura} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Este resultado permite deducir la fórmula general para la suma de los cuadrados de los primeros n términos. Se concluye conectando el **razonamiento geométrico** con el **algebraico**, reforzando la comprensión integral de las **sumatorias**.

Conclusión

Esta propuesta tiene como objetivo mejorar la comprensión de las **sumatorias**, facilitando la transición entre **registros algebraicos y geométricos**. A través de este enfoque visual, los estudiantes fortalecerán su capacidad para trabajar con sumatorias simples y complejas, entendiendo mejor su estructura. Para optimizar la experiencia, se sugiere el uso de herramientas digitales y un seguimiento constante que permita ajustar la actividad a las necesidades del grupo. Lo más interesante de esta metodología es que no solo ayuda con las **sumatorias**, sino que puede adaptarse a otros conceptos matemáticos que impliquen **transiciones entre representaciones**, haciendo de esta estrategia un recurso versátil para el aula.

Referencias

- Duval, R. (2004). *"Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía".*
- Ministerio de Educación. (2021). *"Programa de Estudio Matemática: Límites, Derivadas e Integrales - 3° y 4° medio. Unidad de Currículum y Evaluación".*
- Sandoval Troncoso, L. (2019). *"Estudio de signos del cálculo a través de los espacios de trabajo matemático".* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 32(1), 576-584.