sochiem
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad de O'Higgins

XXV

Jornadas Nacionales de Educación Matemática

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN UNA SOCIEDAD QUE SE TRANSFORMA

14 AL 17 DE DICIEMBRE 2021 | RANCAGUA - CHILE

ACTAS

Cítese como:
Gómez, D. M., Cornejo, C., y Martínez, M. V. (Eds.) (2021). *Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática.* Rancagua, Chile.

Sitio web: https://jnem25.uoh.cl/

Las actas también estarán disponibles en: https://www.sochiem.cl/

Las y los autores de los respectivos trabajos son considerados dueños de sus contribuciones escritas.

ISBN: 978-956-6031-05-5

Diseño: Juan Pablo Díaz Rosales

PREFACIO

La vigesimoquinta edición de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática (JNEM) se llevó a cabo entre el 14 y el 17 de diciembre de 2021 en formato online, bajo el lema *Educación Matemática en una sociedad que se transforma*. La realización de este evento, en el contexto de emergencia sanitaria, significó una transformación de las Jornadas tal como las conocíamos. Esta transformación se vio reflejada en el tipo de actividades, en las temáticas de discusión, en el diseño de experiencias de enseñanza y aprendizaje y, sin duda, en nuestra forma de interactuar como comunidad docente y científica.

La Universidad de O´Higgins, como institución pública, asumió el desafío de organizar estas Jornadas durante un año que es particularmente significativo para nuestra comunidad: egresa la primera cohorte de estudiantes formados en nuestra casa de estudios, entre ellos, las y los primeros docentes. Por ello, la organización de un evento de esta categoría es de gran importancia, por su foco en la reflexión en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, en cómo abrir posibilidades que para que niñas, niños y jóvenes desarrollen habilidades que les permitan desenvolverse en tiempos de cambios inesperados.

Las JNEM constituyen el espacio de encuentro de investigación y docencia en torno a la educación matemática más relevante en nuestro país, y a través de esta publicación podemos dar cuenta de ello. Aquí encontrarán la compilación de las contribuciones presentadas durante las Jornadas. Adjuntamos los resúmenes de las conferencias plenarias presentadas y los principales argumentos abordados durante el debate plenario. Junto con ello, se adjuntan los resúmenes de las conferencias especiales y talleres, y las versiones completas de los reportes de investigación, comunicaciones breves, posters y experiencias de aula.

Como comité organizador y comité científico de este evento, valoramos el apoyo y confianza que recibimos tanto por parte de la Universidad de O'Higgins como de la Sociedad Chilena de Educación Matemática. De igual manera, agradecemos el auspicio y patrocinio del Centro de Investigación Avanzado en Educación (CIAE) y el Instituto Avanzado en Educación (IE) de la Universidad de Chile, y de la Fundación Zigzag. Por último, agradecemos con gran alegría haber contado con la participación de todas y todos quienes enviaron contribuciones y asistieron a las jornadas, aportando a que este evento sea un valioso espacio de aprendizaje y reflexión.

María Victoria Martínez Videla
Presidenta Comité Organizador
XXV JNEM

David Maximiliano Gómez Rojas
Presidente Comité Científico
XXV JNEM

INDICE

Presentación equipos organizadores	……..	iii
Proceso de evaluación de contribuciones	……..	iv
Listado de evaluadores pares	……..	v
Actividades plenarias – Enlaces online	……..	1
Resumen Conferencias Plenarias	……..	2
Resumen Debate Plenario	……..	5
Conferencias Especiales	……..	13
Talleres	……..	52
Reportes de investigación	……..	66
Comunicaciones breves	……..	185
Pósters	……..	329
Experiencias de Aula	……..	337

EQUIPO XXV JNEM

La organización de un evento de la dimensión de las Jornadas Nacionales de Educación Matemáticas ha sido posible gracias al trabajo permanente y comprometido de un gran equipo de trabajo. A continuación, presentamos a este equipo y agradecemos su compromiso.

COMITÉ ORGANIZADOR
Presidenta
María Victoria Martínez Videla, Universidad de O'Higgins
Vicepresidente
Juan José Núñez, Universidad Arturo Prat
Secretaria
Claudia Cornejo Morales, Universidad de O'Higgins
Miembros del Comité Organizador
Francisco Álvarez, Universidad de O'Higgins
Roberto Araneda, Universidad de O'Higgins
Rubén Balboa, Universidad de O'Higgins
Jennifer Fuentes, Universidad de O'Higgins
Valentina Giaconi, Universidad de O'Higgins
David M. Gómez, Universidad de O'Higgins
Pablo Jorquera, Universidad de O'Higgins
Jairo Navarrete, Universidad de O'Higgins
Marcia Villena, Universidad de O'Higgins

COMITÉ CIENTÍFICO
Presidente
David M. Gómez, Universidad de O'Higgins
Vicepresidente
Jaime Huincahue, Universidad Católica del Maule
Miembros del Comité Científico
Claudia Cornejo Morales, Universidad de O'Higgins
Valentina Giaconi, Universidad de O'Higgins
María Victoria Martínez Videla, Universidad de O'Higgins

APOYO ADMINISTRATIVO
Danae Araya, estudiante Pedagogía en Lenguaje y Comunicación, Universidad de O'Higgins
Nayadet Arce, estudiante Pedagogía Matemática, Universidad de O'Higgins
Javiera De la Barra, estudiante Pedagogía en Lenguaje y Comunicación, Universidad de O'Higgins
Jorge Peña, estudiante Pedagogía Matemática, Universidad de O'Higgins

Agradecemos también a todos los miembros de la comunidad que colaboraron moderando salas.

PROCESO DE EVALUACIÓN DE CONTRIBUCIONES

El Comité Científico del evento estuvo a cargo del proceso de organización y evaluación de contribuciones. Para ello, se procuró realizar un riguroso trabajo de evaluación y retroalimentación de los trabajos recibidos, que diera la oportunidad a autores y autoras de revisar sus contribuciones en el caso de que éstas requirieran modificaciones menores. Este trabajo fue posible gracias a un extenso grupo de evaluadores, compuesto por 68 investigadores y docentes de 25 instituciones nacionales e internacionales.

Los Reportes de Investigación y Comunicaciones Breves fueron evaluadas por doble ciego. Cada autor y autora recibió la retroalimentación dada por los pares evaluadores y la decisión correspondiente tomada por el Comité Científico. De un total de 74 trabajos recibidos de estos formatos, 30 contribuciones fueron aceptadas sin cambios, 24 aceptadas con cambios y a 17 se les propuso re-envío en otro formato. La segunda ronda de revisiones fue realizada directamente por el Comité Científico.

Por su parte, la evaluación de Talleres, Posters y Experiencias de Aula estuvo a cargo de un equipo de investigadores y docentes con particular expertise en formación inicial y continua y en aula escolar.

Como producto de este proceso, las XXV JNEM contaron con:

- Tres Conferencias Plenarias
- Un Debate Plenario
- Seis Conferencias Especiales
- Veintidós Reportes de Investigación
- Veintisiete Comunicaciones Breves
- Cuatro Talleres
- Seis Posters
- Nueve Experiencias de Aula

PARES EVALUADORES

El comité científico contó con al colaboración de un extenso grupo, conformado por 68 de académicos y docentes de 25 instituciones nacionales e internacionales. Sin duda, parte importante del éxito de las JNEM reside en el trabajo realizado por las y los revisores y por ello, a continuación, compartimos la nómina de quienes formaron parte de dicho equipo en esta edición.

M. Alicia Venegas Thayer	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Alicia Zamorano Vargas	Universidad de Chile
Álvaro Cortínez Pontoni	Universidad de Tarapacá
Anahí Huencho	Universidad Católica de Temuco
Andrea Cárcamo Bahamondes	Universidad Austral de Chile
Andrés Ortiz Jiménez	Universidad Católica de la Santísima Concepción
Ángel Alsina	Universidad de Girona (España)
Carlos L. Caamaño-Espinoza	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Carlos Pérez Wilson	Universidad de O'Higgins
Carlos Silva Córdoba	Universidad de Playa Ancha de Ciencias de la Educación
Carmen Oval Soto	Universidad de Magallanes
Ceneida Fernández	Universidad de Alicante (España)
Claudia Cornejo Morales	Universidad de O'Higgins
Claudia Vargas Díaz	Universidad de Santiago de Chile
Claudia Vásquez Ortiz	Pontificia Universidad Católica de Chile
Claudio Fuentealba Aguilera	Universidad Austral de Chile
Cristián Reyes	Universidad de Chile
Darinka Radovic	Universidad de Chile
David M. Gómez	Universidad de O'Higgins
Diana Zakaryan	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Eder Pinto	Universidad del Desarrollo
Elisabeth Ramos Rodríguez	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Emilio Vilches	Universidad de O'Higgins
Fabián Quiroga Merino	Universidad de Concepción
Farzaneh Saadati	Universidad de Chile
Felipe Almuna Salgado	Universidad Austral de Chile
Felipe Ruz	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Flavio Guíñez	Universidad de Chile
Francisco Rojas Sateler	Pontificia Universidad Católica de Chile
Héctor Hevia	Universidad Alberto Hurtado

Héctor Silva Crocci	Universidad de Santiago de Chile
Helena Montenegro	Universidad de Chile
Horacio Solar	Pontificia Universidad Católica de Chile
Hugo Alvarado Martínez	Universidad Católica de la Santísima Concepción
Irma Pinto Rojas	Universidad Católica del Norte
Jaime Huincahue	Universidad Católica del Maule
Jaime García-García	Universidad de Los Lagos
Jairo Navarrete	Universidad de O'Higgins
Jorge Gaona	Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Juan José Núñez Fernández	Universidad Arturo Prat
Juan Luis Piñeiro	Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Marcelo Casis	Universidad de Los Lagos
Luz Valoyes Chávez	Universidad Católica de Temuco
Macarena Valenzuela Molina	Universidad Alberto Hurtado
Manuel Goizueta	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Marcela Parraguez González	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Marcos Barra Becerra	Universidad Alberto Hurtado
María Aravena Díaz	Universidad Católica del Maule
María del Valle Leo	Universidad de Concepción
María Soledad Montoya-González	Universidad Alberto Hurtado
Maritza Silva Acuña	Universidad Católica Silva Henríquez
María Victoria Martínez	Universidad de O'Higgins
Mauricio Gamboa Inostroza	Universidad de Concepción
Miguel Díaz Flores	Universidad Alberto Hurtado
Nielka Rojas	Universidad Católica del Norte
Noemí Pizarro Contreras	Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Pamela Reyes Santander	UCE - Ministerio de Educación
Patricio Felmer	Universidad de Chile
Pedro Salcedo Lagos	Universidad de Concepción
Richard Lagos	Universidad de Magallanes
Roberto Araneda	Universidad de O'Higgins
Rosa Delgado Rebolledo	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Rubén Balboa Ortega	Universidad de O'Higgins
Sandra Burgos	Universidad Austral de Chile
Tamara Del Valle	Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Valentina Giaconi	Universidad de O'Higgins
Ximena Copilan	Universidad de Talca
Ximena Paniagua	Universidad Diego Portales

ACTIVIDADES PLENARIAS

ENLACE ACTIVIDADES PLENARIAS

Las actividades plenarias realizadas durante las XXV JNEM están disponibles para en el canal de Youtube. A continuación adjuntamos los link de acceso da cada una de ellas:

Conferencia Plenaria Dra. Blanca Ruiz Hernández
Título: La otra visión del análisis descriptivo de datos: una mirada hacia la inferencia estadística y los grandes números.

Link: https://youtu.be/JO3ZHVHRn5Y

Conferencia Plenaria Dra. Alina Galvão Spinillo
Título: Sentido numérico en la infancia: sus manifestaciones y relevancia para la educación matemática.

Link: https://youtu.be/KpnmbPaerNs

Conferencia Plenaria Dra. María Elena Gavarrete
Título: El estudio Etnomatemático de signos culturales y su potencial para enriquecer la acción pedagógica

Link: https://youtu.be/BwIlCLnXhPc

Debate Plenario. Dr. Francisco Rojas, Dr. Manuel Goizueta, Dra. Ma. José Seckel, Dr. Pablo Dartnell y Mg. Sandra Burgos.
Título: ¿Es posible desarrollar habilidades matemáticas en el aula virtual?

Link: https://youtu.be/_k3N4US1HAk

LA OTRA VISIÓN DEL ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE DATOS: UNA MIRADA HACIA LA INFERENCIA ESTADÍSTICA Y LOS GRANDES NÚMEROS

Dra. Blanca Ruiz Hernández

Tecnológico de Monterrey

RESUMEN DE LA CONFERENCIA

Tradicionalmente el estudio de la estadística se divide en estadística descriptiva e inferencial. Bajo esta visión, la 'descripción de datos' generalmente se enseña como la graficación y el cálculo de medidas de centralización, variación y posición a partir de un grupo de datos sin contemplar si esos datos se obtuvieron a través de un muestreo o de un censo. Esto ocasiona que la descripción de los datos no se relacione con la obtención de conclusiones en el contexto del problema ni se estimule la vinculación entre la probabilidad y la estadística. Esta problemática se genera tanto en las pequeñas muestras, muy socorridas en la educación escolar para el cálculo tradicional de las medidas, y donde distinguir los estimadores de los parámetros es crucial, como en las grandes muestras donde la inferencia adquiere un sentido particular al cuestionar la población representada a través de esos datos y en el significado que adquieren las distribuciones de los estimadores. En esta ponencia se ahondará en la problemática y se darán ejemplos particulares dónde se presenta. Su principal idea es alentar la introducción en la escuela de un análisis de datos que cuestione más el contexto en que son tomados los datos.

RESEÑA DE LA AUTORA

Profesora del Tecnológico de Monterrey desde 1997 en las áreas de Matemáticas y Estadística. Obtuvo el grado de doctorado en Didáctica de la Estadística en la Universidad de Granada, España. Actualmente es profesora de tiempo completo en la Escuela de Ingeniería y Ciencias en el área de Estadística. Sus principales líneas de investigación son el razonamiento y pensamiento estadístico inferencial en estudiantes universitarios, y vinculación entre la investigación educativa y la docencia en matemáticas.

Ha colaborado en la dirección de diversos proyectos como el Erasmus Building the future of Latin America: engaging women into STEM (W-STEM). Pertenece al Grupo de Investigación de Enfoque Estratégico STEM del Tecnológico de Monterrey y a la Red Latinoamericana en Educación Estadística (RELIEE), así como a la Red de Investigación e Innovación en Educación Estadística y Matemática Educativa (Riieeme).

SENTIDO NUMÉRICO EN LA INFANCIA: SUS MANIFESTACIONES Y RELEVANCIA PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Dra. Alina Galvão Spinillo

Universidad Federal de Pernambuco (Brasil)

RESUMEN DE LA CONFERENCIA

Uno de los objetivos de la educación matemática es hacer que los individuos sean capaces de pensar matemáticamente. A partir de este supuesto, el sentido numérico surge como una instancia a considerar a lo largo de la escolaridad, especialmente en los primeros años escolares. Por ello, numerosos estudios relatan experiencias didácticas realizadas con el objetivo de desarrollar en los niños la flexibilidad del cálculo mental y el uso de estrategias de resolución de problemas que van más allá del simple uso de algoritmos. Sin embargo, el sentido numérico también involucra otros campos del conocimiento matemático además de las operaciones aritméticas, como el conocimiento sobre los significados atribuidos a los números en situaciones cotidianas y el conocimiento intuitivo sobre las mediciones con respecto a las relaciones entre instrumento de medida, unidad de medida y cantidad para medir. medirse. Este conocimiento es el foco de esta conferencia, que tiene como objetivo ampliar la comprensión de las manifestaciones del sentido numérico, trayendo para la reflexión ejemplos tomados de investigaciones realizadas con niños estudiantes desde los primeros años de la escuela primaria. Como objetivo adicional e igualmente relevante, se discute la importancia de crear oportunidades didácticas para desarrollar el sentido numérico, que es, en definitiva, una forma de pensar matemáticamente.

RESEÑA DE LA AUTORA

Graduada y Magister de la Universidad Federal de Pernambuco, Brasil, y Doctora de la Universidad de Oxford, Inglaterra. Realizó una estancia posdoctoral en la Universidad de Sussex, Inglaterra. Actualmente es profesora titular del Programa de Posgrado en Psicología Cognitiva de la Universidad Federal de Pernambuco y coordinadora del Núcleo de Investigación en Psicología de la Educación Matemática (NUPPEM). Investigadora nivel 1 del CNPq, hace investigaciones en psicología del desarrollo cognitivo y del aprendizaje en los siguientes temas: razonamiento matemático y conceptos matemáticos, producción y comprensión de textos de distintos géneros, y adquisición de la lectoescritura.

EL ESTUDIO ETNOMATEMÁTICO DE SIGNOS CULTURALES Y SU POTENCIAL PARA ENRIQUECER LA ACCIÓN PEDAGÓGICA

Dra. María Elena Gavarrete

Universidad Nacional de Costa Rica (Costa Rica)

RESUMEN DE LA CONFERENCIA

La conferencia aborda fundamentos teóricos del Programa Internacional de Etnomatemática, la glocalización, y describe resultados de un modelo de formación de docentes en la visión sociocultural de las matemáticas.

Los signos culturales se identifican a partir de descriptores: artefactos, sociofactos y mentifactos y se conciben como rasgos identitarios de relevancia con potencial de conocimientos matemáticos implícitos para ser analizados desde diversos puntos de vista y que permiten aglutinar saberes que poseen potencialidades matemáticas.

El concepto de glocalización ofrece a la matemática una visión más amplia y permite una mejor comprensión de las relaciones entre los saberes locales y globales. Este concepto fundamenta un modelo de formación docente a partir del estudio de etnomatemáticas regionales en Costa Rica, el cual ha suscitado reflexiones sobre las conexiones significativas entre el contenido matemático, el contexto, la cultura y la sociedad, con el fin de promover el desarrollo de la empatía, la consideración y las habilidades necesarias para apreciar y educar a todos los alumnos, en particular a aquellos que están marginados debido a sus condiciones específicas. Además, se favorece en los docentes las habilidades como investigadores de su contexto para enriquecer el aprendizaje significativo con pertinencia cultural.

RESEÑA DE LA AUTORA

Costarricense, Doctora en Didáctica de la Matemática y Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España; además es Licenciada en Ciencias de la Educación y Licenciada en Enseñanza de la Matemática por la Universidad Nacional de Costa Rica. Actualmente es Subdirectora de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional. Tiene más de 20 años de experiencia profesional como docente, investigadora y extensionista de la Universidad Nacional de Costa Rica en temas vinculados con Etnomatemáticas, Formación de Profesores, Enseñanza de la Matemática, Historia de la Matemática y Visión Sociocultural de las Matemáticas.

¿SE PUEDE DESARROLLAR HABILIDADES MATEMÁTICAS EN LAS AULAS VIRTUALES?

Francisco Rojas[1]; Manuel Goizueta[2]; María José Seckel[3]; Pablo Dartnell[4]; Sandra Burgos[5]

[1]Pontificia Universidad Católica de Chile, [2]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; [3]Universidad Católica de la Santísima Concepción; [4]Universidad de Chile; [5]Universidad Austral

Durante los dos últimos años, la educación se ha visto desafiada a transformar sus formas y formatos para adecuarse a la distancia social provocada por la pandemia de COVID19. Desde replicar lo presencial ahora en formato digital, hasta generar nuevos tipos de experiencias de aprendizaje interactivo, profesoras y profesores han buscado las maneras de otorgar oportunidades de aprendizaje de calidad a sus estudiantes en ambientes virtuales. En dicho contexto, la generación de habilidades matemáticas debía seguir siendo un foco de atención, dado no solo su prescripción curricular en Chile, sino su alto beneficio en el desarrollo de los y las estudiantes. Sin embargo, no es del todo claro que esto se pueda lograr de manera profunda, ya sea por las restricciones propias de las tecnologías que nos permiten conectarnos en ambientes virtuales o bien por las condiciones que tienen las y los estudiantes para acceder a ellas. Aun así, diversas experiencias de aprendizaje matemático a distancia muestran que es posible hacerlo, ya que también se hacía desde antes del confinamiento por la pandemia. Este debate propone retos y preguntas para dilucidar si es posible generar habilidades matemáticas en aulas virtuales y, en cualquier caso, ahondar en los beneficios o perjuicios que produce hacerlo en este formato y en las condiciones para llevarlo a cabo.

Habilidades Matemáticas, Aulas Virtuales, Educación a Distancia, COVID19.

INTRODUCCIÓN

A partir del estudio desarrollado por Bakker et al. (2021) sobre las líneas de investigación que deben abordarse con urgencia en educación matemática para la siguiente década, la tecnología aparece como el quinto de ocho temas prioritarios, teniendo en cuenta que también está presente de alguna u otro forma en todas las líneas de investigación propuestas. Este estudio fue desarrollado antes y durante la pandemia, y es precisamente en 2019 cuando se señala que las metas educativas y sociales de la educación matemática deben cambiar, y que las y los estudiantes no solo deben aprender tecnología, sino que debe servirles para aprender matemáticas. Si bien esto ya se venía realizando hace bastante tiempo, la gran preocupación emergida en 2020 debido al confinamiento fue la gran preocupación por la inequidad en el acceso a la tecnología, conectando con aspectos afectivos y la evaluación en entornos virtuales de aprendizaje. Estos antecedentes problematizan nuestra pregunta de investigación, pues no solo la hace relevante, sino que agrega elementos de equidad social respecto de la disponibilidad de recursos para el aprendizaje virtual, como es la alta o baja conectividad a internet o el acceso desigual a dispositivos

digitales variados (teléfonos inteligentes, tablets, computadores). Estas condiciones pueden facilitar u obstaculizar el desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes, y por ello generar diferentes estados socioemocionales tanto en docentes como en estudiantes a la hora de desarrollar procesos de aprendizaje matemático.

La conectividad como evidencia de inequidad y el desarrollo socioemocional son precisamente dos aspectos centrales que fueron abordados en la propuesta *Didácticas para la Proximidad: aprendiendo en tiempos de crisis* (Propuestas Educación Mesa Social Covid-19, 2020). El trabajo mancomunado de académicos, académicas, profesores y profesoras de todo Chile puso de relieve que a través del aprendizaje disciplinar, en nuestro caso matemáticas, también se puede abordar el bienestar socioemocional, comprendiendo que el contexto de crisis sanitaria, económica y social trae consigo consecuencias a nivel psicológico y social para las personas en todos los ámbitos de aprendizaje. En este documento se presentan cuatro principios fundamentales para apoyar tanto el bienestar de la comunidad escolar: Priorización, Flexibilidad, Integración y Agencia, los cuales permitirían potenciar las habilidades transversales de pensamiento y las habilidades socioemocionales. Específicamente en matemáticas, quienes participamos de esta instancia nos preguntamos lo siguiente: ¿Por qué seguir aprendiendo matemática en tiempos de crisis sanitaria? Y una de las conclusiones fue precisamente que el desarrollo de habilidades es lo que ha de darle sentido a los contenidos prioritarios que en su momento se establecieron por parte de las autoridades educativas. Esto ha producido un álgido debate sobre la sobrecarga curricular, la procedimentalización del aprendizaje matemático, el efecto nocivo de evaluaciones estandarizadas sobre el desarrollo de habilidades matemáticas clave tal como la resolución de problemas. De hecho, en la propuesta de matemáticas de la Mesa Social Covid19, esta habilidad es central a todas las sugerencias didácticas a través de distintos contenidos y en todos los niveles educativos. En definitiva, la priorización nos ha hecho pensar en el retorno a la presencialidad y a la nueva normalidad, preguntándonos si efectivamente queremos volver a los mismo de los tiempos pre-pandemia, o tenemos una excelente oportunidad de reimaginar la escuela y la educación matemática dentro de ella.

Es precisamente en la situación de retorno a las escuelas que Sullivan et al. (2020) propuso una serie de principios que deberíamos seguir y que son altamente relevantes para pensar en nuestra pregunta. Para el buen aprendizaje matemático y en particular para el desarrollo de habilidades, será indispensable volver a construir la relación con las y los estudiantes, atendiendo a sus preocupaciones y necesidades para así comenzar nuevamente a involucrarnos en actividades matemáticas ricas basadas en resolución de problemas relevantes. La relación interaccional deberá evitar la tentación de hablar rápido, alto y prolongado, con tal de ofrecer espacios seguros y de contención para todas y todos los estudiantes. Esto se deberá conjugar con la necesidad de dedicar tanto tiempo a un tema determinado como de costumbre, y no pasar rápidamente por los temas por el simple hecho de estar "atrasados" curricularmente, brindando así a las y los estudiantes tiempo para aprender, participar en los desafíos y pensar matemáticamente. Para ello, las y los docentes podemos volver a utilizar experiencias previamente exitosas con tal que nuestros estudiantes se encuentran con actividades donde han podido desarrollar aprendizajes y sentido que son capaces de hacer matemáticas. En este sentido, será clave hacer coincidir el estilo de evaluación con los objetivos de la evaluación, haciendo explícitas las metas de aprendizaje para las y los estudiantes

y también para sus familias, que han estado altamente involucradas en los procesos educativos durante la pandemia, por lo cual deberemos como docentes prepararnos para interactuar más con los padres, las madres o las personas a cargo de nuestros estudiantes.

Todas estas condiciones para el retorno a la escuela, proceso que ya hemos vivido durante 2021 pero que será aún mayor en 2022 si las condiciones sanitarias así lo permiten, deberán permitir que la experiencia de aprendizaje sea efectiva y profunda, resguardando aspectos socioemocionales clave para el buen involucramiento de estudiantes en actividades matemáticas ricas. Es probable que aprender desde casa haya podido ser productivo para algunos estudiantes si las y los docentes desarrollaron experiencias de aprendizaje matemático que desafían el pensamiento de ellos y ellas, pero también es posible que el tiempo fuera de la escuela haya exacerbado las diferencias en las oportunidades de aprendizaje (Sullivan et al., 2020). Dado nuestro contexto educativo, es probable que muchas inequidades hayan sido observadas, por lo cual queda una gran tarea por delante para el desarrollo de habilidades matemáticas, sea tanto en aulas virtuales o presenciales.

ESTRUCTURA Y PREGUNTA DEL DEBATE

Todo debate tiene por propósito promover la discusión alrededor de una afirmación polémica de interés global para la comunidad, en este caso de educación matemática. La pregunta que nos convocó en esta instancia correspondió a si *se pueden desarrollar habilidades matemáticas en las aulas virtuales*, contexto predominante en estos dos años de pandemia por COVID19. En este documento presentamos los argumentos a favor y en contra de esta pregunta, pero también hacemos notar la existencia de "grises" y que mucho depende de las condiciones y habilidades con que nos enfrentamos a tal desafío. Por medio de dos rondas de argumentación por parte de dos equipos, uno de ellos a favor de una respuesta afirmativa y el otro a favor de una respuesta negativa a nuestra pregunta, se pudo conocer las razones y evidencias que permiten o no el desarrollo de habilidades matemáticas en aulas virtuales. Estas argumentaciones fueron enmarcadas en la opinión de los asistentes por medio de una votación online, antes y después de las rondas de argumentación. Al inicio y sin ningún tipo de información adicional, el 95% de los asistentes afirmaron que sí se puede desarrollar habilidades matemáticas en aulas virtuales, frente al 83% que respondió de la misma manera una vez conocidos los argumentos de ambos equipos. Posteriormente, se abrió un espacio a la discusión conjunta entre los equipos para profundizar en el tema y concluir que no es blanco ni negro, sino que existen matices a las posturas iniciales, lo cual fue enriquecido con una participación importante de los asistentes por la vía de sus comentarios.

A continuación, mostramos los argumentos iniciales de ambas posturas, cerrando con aquellas consideraciones intermedias que son altamente relevantes de considerar dada la gran diversidad de contextos y experiencias a los cuales la educación nos enfrenta.

Sí se puede: Experiencias de educación a distancia

¿Es posible desarrollar habilidades matemáticas en aulas virtuales? La respuesta es, claramente, sí, pues ya desde hace muchos años se viene realizando formación matemática a distancia a todos los niveles. Por

ejemplo, la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (Colombia) o la Universidad Nacional de Educación a Distancia (España) son instituciones especializadas en la educación a distancia que utilizan robustas plataformas en línea para ofrecer, entre otras, la licenciatura en matemáticas. También hay universidades tradicionales (i.e. que ofrecen el grueso de sus programas de manera presencial) que ofrecen grados en matemáticas en modalidad online, como la Universidad Internacional de Valencia (España) o la Universidad Católica de Manizales (Colombia). Así que sí, sí se pueden desarrollar habilidades matemáticas en aulas virtuales. Una mención honrosa, por estar en nuestro ámbito de investigación, es para CICATA (México), que lleva unos 20 años formando doctores en el ámbito de la investigación en didáctica de las matemáticas con su programa a distancia. ¿Y qué sucede en otros niveles educativos?, preguntarán algunos. Khan Academy es un ejemplo de la posibilidad de desarrollar habilidades matemáticas a distancia, impactando a un público enorme y mayoritariamente escolar. Salman Khan, su fundador, comenzó subiendo videos a YouTube en el año 2006 para tutorizar a algunos estudiantes. Pronto se convirtió en lo que podría llamarse el profesor de matemáticas con mayor alcance en el mundo. Hoy Khan Academy tiene una plataforma propia en línea, enseña matemáticas (i.e. desarrolla habilidades matemáticas) a distancia y colabora con colegios complementando sus programas. Los escépticos preguntarán por su impacto. Este ha sido documentado por diversas investigaciones (Murphy, Gallagher, Krumm, Mislevy & Hafter, 2014) cuyos resultados son accesibles – cómo no – en línea. ¿Y qué pasa en Chile?, continúan los escépticos. Suma y Sigue (https://cmmedu.uchile.cl/desarrollo-profesional/suma-y-sigue/) es un programa creado por el Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile dirigido al "desarrollo de habilidades matemáticas como la resolución de problemas [que] promueve el uso de representaciones y la argumentación matemática", proveyendo "una biblioteca digital de recursos interactivos para generar una experiencia de aprendizaje innovadora y desafiante". Por su parte, Aula 360 (https://aula360.mineduc.cl/), una iniciativa del Ministerio de Educación, "es una plataforma digital interactiva para estudiantes y docentes de 3º y 4º medio con recursos alineados a las Bases Curriculares y Programas de Estudio de distintas asignaturas" (MINEDUC, 2021). Los recursos de esta plataforma ("videos, cuestionarios, análisis de casos, actividades de aplicación, trabajos en grupo, foros de conversación, evaluaciones, entre otros") está disponibles en línea para que los profesores y estudiantes los incorporen a sus clases, e incluso permite el seguimiento académico de los directivos de los establecimientos escolares para dar seguimiento a los avances y resultados de sus estudiantes.

¿Y que nos muestra la literatura? Existe un sin número de publicaciones que dan cuenta de experiencias exitosas a diversos niveles y en diferentes contextos, muchas de ellas, antes de la pandemia, lo que muestra que estos entornos virtuales se han desarrollado desde hace mucho tiempo. Los hay en cursos de pregrado en asignaturas de matemáticas, muchos a través de la plataforma Moodle (Albano, 2012; Ayil, 2018; García y Benítez, 2011; Márquez, 2020; Ramírez, Juárez y Remesai, 2012; Romo-Vásquez, Barquero & Bosch, 2019).

Esta nueva situación de confinamiento nos ha obligado a repensar nuestras prácticas y recurrir a estas herramientas que están disponibles, la gran mayoría, de forma gratuita. Es así como recientemente encontramos artículos con repositorios interesantes de recursos en matemáticas, seleccionados para enseñanza básica y media (Pincheira y Vásquez, 2021; Scott,2021) y otros que presentan experiencias

de aprendizaje remoto (Araya, Rojas, Chandía & Martínez, 2021; Cabello, Arriagada & Felmer, 2021; Rocha y Armijo, 2021) que nos muestran que, para que estas experiencias sean exitosas, se deben cumplir ciertas condiciones, entre otras, un entorno virtual apropiado al contexto de los estudiantes, considerando variadas herramientas virtuales; el nivel de alfabetización digital, tanto de estudiantes como de profesores, pero sobre todo un diseño adecuado de las actividades propuestas.

No se puede: Desafíos de la virtualidad

Desde marzo de 2020 Chile ha enfrentado una educación a distancia como respuesta a un escenario de educación de "emergencia" producto de la pandemia por COVID-19. En este sentido, estamos frente a un tipo de educación virtual que no cuenta con un claro y potente ecosistema educativo, que articule elementos curriculares, pedagógicos, plataformas de trabajo y otras tecnologías (Ruz-Fuenzalida, 2021) que permitan asegurar una educación virtual de calidad. La educación virtual que ha enfrentado Chile estos últimos dos años corresponde a un escenario fortuito, que no está diseñado ni pensado para ser una solución de largo plazo.

Respecto a lo anterior, el estudio sobre experiencias educativas escolares durante la pandemia COVID-19 (Ponce, Bellei y Vielma, 2020), evidencia la cruda realidad que vive el estudiantado de nuestro país durante esta experiencia de educación virtual de emergencia. En términos generales se observa que: a) 1 de cada 2 estudiantes cuenta con un computador (de cualquier tipo) o tablet de uso exclusivo para su trabajo escolar, b) 1 de cada 3 considera que tiene una conexión a internet óptima para el desarrollo de las actividades escolares ("estable y rápida, funciona bien"); otro tercio considera que, aunque "es rápida, se cae a veces"; y un cuarto de los hogares reporta una conexión deficiente, c) cerca del 50% de las familias encuestadas vive en viviendas de 50 metros cuadrados o menos, lo que impacta en el espacio para estudiar y 4) el acceso a clases online es una enorme fuente de desigualdad: mientras 8 de cada 10 estudiantes de escuelas privadas tiene clases online diariamente; solo 3 de cada 10 de escuelas gratuitas accede a clases todos los días; y 2 de cada 10 de estas mismas escuelas declara "nunca tener clases online", este último punto resulta especialmente crítico dado que los estudiantes de escuelas gratuitas representan el 72% de la matrícula a nivel nacional.

Los antecedentes dan cuenta que la educación virtual de emergencia se ha desarrollado con muchos obstáculos en nuestro país, teniendo que ser reemplazada por diversas estrategias que se ajustan a la realidad de cada comunidad educativa. Entonces ¿es posible desarrollar habilidades matemáticas en aulas virtuales que son consecuencia de una educación de emergencia? Lo cierto es que las oportunidades de educación virtual efectiva son tan escasas -incluso dentro de un mismo curso y establecimiento- que una respuesta positiva a la pregunta general que moviliza el debate carecería de evidencias suficientes. El desarrollo de habilidades matemáticas requiere de una implicación, dedicación y concentración que no están logrando nuestros estudiantes a través de la educación virtual, solo 1 de cada 4 estudiantes dedica 1 hora o menos a las actividades de índole escolar al estar conectados remotamente, debido a múltiples distracciones (Ponce, Bellei, Vielma, 2020). Adicionalmente, Hinostroza et al. (2020) reportan que "un número significativo de estudiantes de nuestro país no tiene interacción directa con un docente que oriente su trabajo escolar a distancia." (p.3) y "La educación remota está siendo eminentemente

unidireccional, basándose principalmente en el envío de guías (81%) y tareas a los estudiantes (75%) (p.6). Por el contrario, las actividades menos desarrolladas son aquellas que suponen estrategias interactivas, ya que menos del 20% de los docentes declara organizar grupos de trabajo entre los estudiantes (11%) o realizar videoconferencias para hacer clases (16%).". Por lo tanto, tampoco hay condiciones para el apoyo por parte de los docentes para el desarrollo de habilidades matemáticas. Por su parte, algunas investigaciones que han analizado el desarrollo de las clases de matemática en aulas virtuales reportan que la participación de los estudiantes en este entorno es limitada, existiendo la necesidad de aumentar el uso y la calidad de las discusiones virtuales para alcanzar el desarrollo de conocimiento y habilidades en entornos colaborativos (Calder, Jafri y Guo, 2021).

Finalmente, se puede destacar que si bien la investigación en el área de la educación matemática en estos últimos dos años se ha centrado en dar respuesta a la problemática de la educación virtual de emergencia, reportando en algunos casos efectos positivos en el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas, el meta-análisis desarrollado por Ulum (2020) da cuenta que dichos efectos positivos son a lo más moderados, lo que no permite aseverar que es posible desarrollar habilidades matemáticas en aulas virtuales.

Ni blanco ni negro: Retos y preguntas

Una de las primeras cuestiones que quiebra la dicotomía de la pregunta de este debate es si el problema del desarrollo de las habilidades matemáticas es el escenario de aula virtual, o si bien en cualquier tipo de aula tenemos un desafío en este tema, ya que la presencialidad también ofrece facilitadores y obstaculizadores para el aprendizaje matemático basado en habilidades. Esto viene acompañado del nivel de autonomía que tengan los estudiantes, siendo diferente el de niños y niñas en educación básica o el de jóvenes en educación media. La virtualidad requerirá de ciertas habilidades de manejo digital que se ven determinadas tanto por los recursos que se dispongan como por las capacidades de manejo de las y los estudiantes según su nivel educativo. Este nivel de autonomía en el manejo de los recursos digitales propios de un escenario virtual implica el acompañamiento de adultos para niños y niñas, quienes no necesariamente están capacitados para un trabajo didáctico. Por otra parte, no todas las habilidades son igualmente desarrollables por cualquier medio virtual, habiendo plataformas y medios digitales muy enfocados en la resolución de problemas que no necesariamente abordan de forma sustantiva los procesos de argumentación y comunicación, ya que las herramientas digitales no necesariamente permiten la interacción continua entre los participantes.

Si bien la virtualidad será un fenómeno que cada vez más esté presente en la educación, surgen problemas de inequidad en el acceso y conectividad, pero también en las oportunidades de desarrollar todas las habilidades de forma robusta a través de medios digitales, conformando esto en un desafío de la investigación e innovación en educación matemática. Otro de los temas a afrontar en el desarrollo de espacios virtuales de aprendizaje matemático será la posibilidad de interactuar y que dicha interacción sea la base del razonamiento matemático individual y colectivo, afrontando también las posibilidades de generar discusiones matemáticas productivas. Por su parte, la evaluación de las habilidades matemáticas también surge como un desafío en los espacios virtuales, aunque es en sí mismo un gran tema a abordar

en cualquier tipo de contexto. Sin embargo, en la virtualidad se acrecienta la necesidad de conocer mejor los procesos de aprendizaje matemático en un contexto donde no tenemos acceso directo a nuestros estudiantes.

En definitiva, la pregunta que motiva este debate aún sigue abierta, no existe una respuesta única y por ello se vuelve interesante que se discuta dentro y fuera de la comunidad de educación matemática, en distintos entornos educativos (educación básica, media, formal, no formal, etc.). Esperamos que las ideas y argumentos aquí planteados, así como los desafíos emergidos contribuyan en la generación de nuevas y mejores oportunidades de desarrollo en habilidades matemáticas tanto en contextos virtuales como presenciales.

Referencias

Albano, G., (2012). Conocimientos, destrezas y competencias: un modelo para aprender matemáticas en un entorno virtual. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC). 9*(1), 115-129. http://rusc.uoc.edu/ojs/index.php/rusc/article/view/v9n1-albano/v9n1-albano

Araya, P., Rojas, D., Chandía, E., & Martínez, S. (2021). Fortalecimiento del conocimiento matemático para la enseñanza de la medición de los docentes a partir de un curso e-learning. *XXV Jornadas nacionales de educación matemática*. Rancagua, Chile.

Ayil, J., (2018). Entorno virtual de aprendizaje: una herramienta de apoyo para la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Investigación en Tecnologías de la Información, 6*(11), 34-39, https://www.riti.es/ojs2018/inicio/index.php/riti/article/view/84.

Bakker, A., Cai, J. & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics 107***,** 1–24. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w

Cabello, P., Arriagada, S., & Felmer, P. (2021). Actividades de resolución de problemas matemáticos con apoyo de la serie animada Renata y los problemas en el contexto de la emergencia sanitaria SARS-COV-2. *Calidad en la educación*. 55, 120-155.

Calder, N., Jafri, M. & Guo, L. 2021. Mathematics Education Students' Experiences during Lockdown: Managing Collaboration in eLearning. Education Sciences, 11, 191. https://doi.org/10.3390/educsci11040191

García, M. y Benítez, A. (2011). Competencias Matemáticas Desarrolladas en Ambientes Virtuales de Aprendizaje: el Caso de MOODLE. *Formación Universitaria.* 4(3), 31-42.

Hinostroza, J.E., Matamala, C., Ibieta, A., Labbé, C., López, E., Romero, N., González, J., Castillo-Canales, D., Claro, M., Jara, I., Fernández, C., y Hepp, P. (2020). Docencia durante la crisis sanitaria: La mirada de los docentes. https://www.miradadocentes.cl/Resumen-Ejecutivo_Docencia_Crisis_Sanitaria.pdf

Márquez, J., (2020). Tecnologías emergentes aplicadas en la enseñanza de las matemáticas. *DIM: Didáctica, Innovación y Multimedia.* 38, https://raco.cat/index.php/DIM/article/view/371576.

Murphy, R., Gallagher, L., Krumm, A ., Mislevy, J., & Hafter, A. (2014). Research on the Use of Khan Academy in Schools. Menlo Park, CA: SRI Education.

Pincheira, N., y Vásquez, C. (2021). Recursos virtuales para la enseñanza del álgebra: un aporte para la priorización curricular chilena frente a la pandemia de la COVID-19. *UNIÓN – REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, *17*(61). https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/188

Ponce, T., Bellei, C. y Vielma, C. (2020). Experiencias educativas en casa de niñas y niños durante la pandemia covid-19. http://www.educaencasacovid19.cl/?langSite=es&page=view_cuestionario_covid

Propuestas Educación Mesa Social Covid-19 (2020). Didácticas para la proximidad: aprendiendo en tiempos de crisis. Santiago de Chile. http://educacion.uc.cl/images/documentos/informe-didactica-final.pdf

Ramírez, J.L., Juárez, M., y Remesai, A. (2012). Teoría de la actividad y diseño de cursos virtuales: la enseñanza de matemáticas discretas en Ciencias de la Computación. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC)*. 9(1), 130-149. http://rusc.uoc.edu/ojs/index.php/rusc/article/view/v9n1-ramirez-juarezremesal/v9n1ramirez-juarez-remesal

Rocha, J., y Armijo, S. (2021). Experiencia docente en un curso de matemáticas virtual en pandemia COVID-19. Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México. https://ciencialatina.org/index.php/cienciala/article/view/895/1233

Romo-Vásquez, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-Pluriversidad*, 19(2), 161–183. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.09

Ruz-Fuenzalida, C. (2021). Educación virtual y enseñanza remota de emergencia en el contexto de la educación superior técnico-profesional: posibilidades y barreras. *Revista Saberes Educativos*, (6), 128-143. https://doi.org/10.5354/2452-5014.2021.60713

Scott, P. (2021) Educación Matemática y Pandemia: experiencias en los Estados Unidos de América. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 16(20), 31–40. Costa Rica. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/48473

Sullivan, P., Bobis, J., Downton, A., Feng, M., Hughes, S., Livy, S., McCormick, M. & Russo, J. (2020). Threats and opportunities in remote learning of mathematics: implication for the return to the classroom. *Mathematics Education Research Journal 32*, 551–559. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00339-6

Ulum, H. 2020. The effects of online education on academic success: A meta-analysis study. *Education and Information Technologies*. https://doi.org/10.1007/s10639-021-10740-8

CONFERENCIAS ESPECIALES

CONSTRUCCIÓN DE UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL EN LOS GRADOS PK A 3

Soledad Estrella

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Palabras claves

Inferencia estadística informal, estadística temprana, trayectoria hipotética de aprendizaje, Lesson Study

Resumen extendido

Introducción

Hace dos décadas, el NCTM (2000) posicionó al eje de Datos y Probabilidad desde PK al grado 12. Estudios relevantes del área recomiendan desarrollar el pensamiento estadístico (GAISE, 2007, 2020) a través de toda la escolaridad, pero ¿cómo desarrollar este pensamiento? Esta conferencia muestra una investigación en curso sobre el desarrollo del pensamiento estadístico, en particular, la caracterización de la progresión del razonamiento inferencial informal (RII) desde Prekínder hasta el grado 3 (Fondecyt N°1200346, 2020-2023).

Existen varios estudios investigativos en la enseñanza de la estadística a nivel escolar, sin embargo, aún existe poca evidencia sobre el avance en la comprensión de los estudiantes respecto a estadística y probabilidad (Callingham y Watson, 2017). La investigación reporta que la enseñanza de la estadística escolar se ha desvinculado de la incertidumbre (Leavy, 2010) y que los conceptos y razonamiento que caracteriza a la inferencia estadística son complejos para la mayoría de los estudiantes (Castro Sotos et al., 2007). En Chile, la reciente aparición de los estándares de FID para los niveles de 7° básico a 4° Medio (Mineduc, 2021), explicitan la estadística inferencial en el estándar de Probabilidades y Estadística.

Otras investigaciones sostienen que la inferencia informal tiene el potencial de crear más coherencia en el currículo de estadística como una línea constante que se complejiza a medida que los estudiantes progresan (Bakker y Derry, 2011). La tendencia actual en educación estadística es ubicar la inferencia informal en el centro del currículo, lo que requiere un replanteamiento sobre cómo construir el razonamiento de los estudiantes sobre conceptos de inferencia.

Con el fin que los estudiantes desarrollen una comprensión de la estadística cada vez más sofisticada y a la vez los profesores tengan una ruta de enseñanza para lograr los objetivos de aprendizaje propuestos por el currículo escolar, en especial sobre el RII desde los primeros años escolares, se indaga en la construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje de base empírica para el RII.

Marco teórico

Considerando que una inferencia estadística es un enunciado sobre una población o un proceso, el cual es generado a partir de una muestra y con un nivel explícito de confianza (Makar, Bakker, y Ben-Zvi, 2011), concordamos en tres características clave que forman una inferencia estadística informal: un enunciado de generalización más allá de los datos; uso de datos de una muestra como evidencia para apoyar la generalización; y un lenguaje probabilístico que exprese cierta incertidumbre sobre tal generalización (Makar y Rubin, 2009).

El constructo teórico trayectoria de aprendizaje entendido como camino hipotético por el que los estudiantes de educación escolar pueden progresar en su aprendizaje de un tópico matemático concreto (Clements y Sarama, 2004, 2009; Maloney et al., 2014), es la base para sistemáticamente caracterizar las progresiones en el RII. A saber, una trayectoria de aprendizaje consta de (1) un objetivo de aprendizaje para los estudiantes, (2) un conjunto de tareas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes, y (3) una hipótesis de progresión de desarrollo que especifica niveles de razonamiento más sofisticados a la cual los estudiantes podrían llegar.

Metodología

Mediante un diseño cuasi experimental y empleando la trayectoria de aprendizaje como paradigma de investigación (Clements y Sarama, 2004, 2009; Maloney, et al., 2014; Simon, 1995, 2018), se condujo un estudio para sistemáticamente caracterizar las progresiones en el razonamiento, identificando los niveles de sofisticación del RII de los niños de los grados Kínder a 3, a través de una investigación de diseño con experimentos de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000).

El estudio involucró a seis educadores y profesores de la escuela y seis investigadores, todos partícipes de un grupo de Estudio de Clases, junto a la participación de un total de 35 estudiantes desde los grados PK a 3, de una escuela ubicada en Viña del Mar, Región de Valparaíso. Los profesores e investigadores se reunieron semanalmente en este grupo, dos veces durante dos meses e implementaron dos sesiones en cada grado (Cf., Olfos, Morales y Estrella, 2015). Todos los investigadores poseen experiencia en Didáctica de la Estadística y en Estudio de Clases, y se involucraron junto a los profesores, en el diseño, observación y discusión de las tareas, lo que proporciona validez de contenido y validez ecológica.

Los estudiantes participantes experimentaron una primera sesión en la cual emplearon lenguaje probabilístico en la realización de juegos aleatorios (no equiprobable) sin enseñanza previa. La situación basada en un experimento aleatorio privilegió la experimentación al manipular material concreto (dos monedas) y requirió el registro en una tabla y la incorporación de lenguaje de incertidumbre basado en una escala de confianza. Cada estudiante generó sus propias muestras (en casa), las que fueron presentadas por ellos en la segunda sesión (online) y permitió que los demás estudiantes viesen el comportamiento de los datos de otras muestras. La pregunta orientadora y transversal a los distintos grados fue “Si jugaras más veces ¿Cuál escogerías? ¿Por qué?”. Esta pregunta tenía como propósito generar una inferencia estadística informal, argumentando con evidencia basada en los datos de las muestras obtenidas y utilizando un lenguaje con incertidumbre.

Todas las reuniones y clases implementadas se realizaron el año 2021 en modalidad online. La implementación de las situaciones se llevó a cabo través de la plataforma Zoom, la que posibilitó el almacenamiento de cada sesión en video. También fueron solicitadas fotografías de las producciones de los estudiantes, recibidas asincrónicamente vía WhatsApp, por el profesor a cargo de la sesión.

El análisis de datos se realizó con varias rondas de refinamiento y testeo sistemático de conjeturas auténticas de las progresiones en el razonamiento de los niños que caracteriza la progresión del RII.

Resultados y Discusión

El estudio exploró la pregunta: ¿Cómo se desarrolla el RII en los niños de PK-3? El ciclo del Estudio de Clases enfocado en la resolución de problemas, promovió el aprendizaje conceptual de los profesores de aspectos propios del RII y generó planes de clases que articularon la estadística descriptiva, la probabilidad y la inferencia estadística informal. El RII se detectó en forma declarativa, puesto que el conjunto de tareas propuestas promovía en los niños el despliegue de su habilidad de argumentación y discusión en instancias colectivas, tanto al presentar y visualizar sus muestras y las de otros, como verbalizando oralmente sus generalizaciones y escuchándose mutuamente.

En el sentido de Estrella y colaboradores (2020), el uso de tareas ricas en el aula sobre exploración de datos permite a los profesores responder a una amplia variedad de necesidades de aprendizaje de los estudiantes e incorporar el progresivo desarrollo de un pensamiento estadístico que sienta las bases para un conocimiento estadístico profundo. La trayectoria hipotética inicial está en proceso de modificaciones puesto que el análisis retrospectivo realizado al finalizar el experimento de enseñanza ha llevado a mejoras adicionales.

Los resultados en la construcción de la THA muestran que los niños pueden razonar pertinentemente con conceptos complejos que subyacen a una inferencia estadística desde una perspectiva informal. El utilizar datos provenientes de experiencias de juegos reales con artefactos aleatorios usuales y registrar sus datos, les permitió obtener y visualizar las muestras propias y notar que los datos varían. La comparación de muestras y determinación de una predicción con cierta exactitud, les posibilitó vivenciar que es factible ver más allá de los datos e introducir implícitamente conceptos estadísticos complejos como muestra, incertidumbre, variabilidad, muestras repetidas, azar, entre otros, que pudieron ser discutidos con significado por los estudiantes.

El estudio muestra que la mayoría de los estudiantes pudieron argumentar usando sus datos como evidencia y hacer generalizaciones, si bien aún persiste el desafío de la expresión con un lenguaje de posibilidades de los niños y niñas en los grados PK-3.

Referencias

Bakker, A., & Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1-2), 5-26.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. A.[GAISE] (2020). *Pre-K-12 Guidelines for assessment and instruction in statistics education II* (GAISE II). ASA.

Callingham, R., & Watson, J. (2017). The development of statistical literacy at school. Statistics *Education Research Journal, 16*(1), 181–201.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81–89. doi:10.1207/s15327833mtl0602_1

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach.* New York, NY: Routledge.

Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R., & Espinoza, G. (2020). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 293 – 310

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. [GAISE] (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework.* American Statistical Association.

Leavy, A. M. (2010). The challenge of preparing preservice teachers to teach informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 9*(1), 46–67.

Olfos, R., Morales, S., & Estrella, S. (2015). Clase pública de un estudio de clases de estadística: Una instancia de cambio de creencias en los profesores. *Revista Electrónica Educare, 19*(3), 339.

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 82-105.

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1-2), 152-173.

Maloney, A. P., Confrey, J., & Nguyen, K. H. (Eds.). (2014). *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2021). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática*. CPEIP: Santiago.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114-145.

Simon, M. A. (2018). An emerging methodology for studying mathematics concept learning and instructional design. *The Journal of Mathematical Behavior, 52*, 113-121.

Steffe, L., & Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements, en Kelly, A.E. y Lesh, R.A. (eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, pp. 267-306. Mahwah: NJ: LAE.

¿CÓMO PODEMOS DETERMINAR LAS HABILIDADES DOMINADAS POR LAS Y LOS DOCENTES DE MATEMÁTICA Y SUS ESTUDIANTES? EXPERIMENTANDO CON INFERENCIA ESTADÍSTICA

Álvaro Figueroa López

Universidad Católica Silva Henríquez

Palabras claves

Modelo de Clasificación Diagnostica Loglineal, Medir Habilidades, Test de Hipótesis

Resumen extendido

Problemática y Marco Teórico

En el año 2019 el Ministerio de Educación propone nuevos optativos para Matemática en 3° y 4° medio, uno de estos electivos es el denominado "Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial" donde se busca trabajar el razonamiento y la toma de decisiones en condiciones de incerteza, utilizando Intervalos de Confianza y el Test de hipótesis (Ministerio de Educación, 2019).

En este contexto, es natural plantearse la pregunta ¿Qué tan preparados están los profesores y las profesoras de matemática para la enseñanza de Inferencia Estadística? O bien ¿Cómo se puede determinar que un individuo domina las habilidades relacionadas a la Inferencia Estadística?

Para responder a estas preguntas es necesario analizar las dificultades, las cuales han sido estudiadas en diversas investigaciones (Brewer, 1986; Vallecillos, 1999; Alvarado, 2007; Batanero, Vera & Díaz, 2012; Vera & Díaz, 2013), en particular, para este trabajo se investigaron los errores relacionados al test de hipótesis ya que es una herramienta fundamental de la inferencia (Batanero, 2000). Cabe destacar que los errores denotan sesgos en el razonamiento estadístico debió al no dominio de habilidades, estas habilidades llamadas latentes, responden a un constructo y no son observables directamente, sino que son deducidas a partir de otros procesos de raciocinio y, por lo tanto, medibles utilizando un modelo estadístico. Dichos procesos, para esta investigación, se dividen en tres habilidades latentes que entenderemos por: la capacidad de formular hipótesis, determinar la región de rechazo y las probabilidades del error tipo I y II en el Test de Hipótesis.

Una de las ventajas de utilizar variables latentes es que reducen la dimensión de los datos, ya que agrupa a las variables que son observables representándolas en un concepto subyacente. Existen variados modelos que utilizan variables latentes, uno de ellos, son los Modelos de Clasificación Diagnóstica (MCD) y se definen como un conjunto de herramientas estadísticas que proporcionan retroalimentación diagnóstica (Rupp, Templin & Henson, 2010). Además, en comparación los modelos clásicos que otorgan una puntuación global de las pruebas, un test diagnostico proporciona un perfil a cada participante el cual detalla los conceptos y habilidades que el individuo domina o no domina y la probabilidad de acierto a cada ítem según su perfil de dominios; este tipo de evaluación conlleva interpretaciones las cuales podrían tener un impacto significativo en procesos de aprendizaje ya que entrega información detallada sobre las fortalezas y debilidades de las y los estudiantes y así generar retroalimentaciones atingentes a cada individuo.

Uno de los MCD que ha ganado fuerza en los últimos años es el Modelo de Clasificación Diagnóstica Loglineal (MCDL), el cual hace hincapié en la posibilidad de que múltiples habilidades pueden interactuar de manera conjunta dentro de la función del ítem y, además, las habilidades individuales todavía pueden conservar efectos aditivos separables en la probabilidad de acierto al ítem.

Objetivo

Caracterizar y analizar el dominio de habilidades cognitivas en la resolución de problemas relacionados al test de hipótesis en estudiantes de pedagogía y docentes del área de educación matemática utilizando el Modelo de Medición Diagnóstica Loglineal.

Metodología

Para generar el análisis se utilizó los softwares Microsoft Excel, R-Commander (bajo la visualización RStudio) a través del *Pakage* CDM, utilizando la estimación bayesiana del Modelo Reducido Reparametrizado Unificado trabajado por Culpepper y Hudson (2018).

La elección de la muestra fue probabilística por conglomerado y está compuesta por 300 individuos que cumplen con ser estudiantes de pedagogía en matemática o docentes de matemática de Chile y que estén cursando o tengan aprobada la asignatura de Estadística Inferencial. Para caracterizar la muestra se reportó su edad, sexo y grado académico. Las variables latentes analizadas son Hipótesis, Región de Rechazo y Error tipo I y tipo II.

El instrumento de recolección de datos es un cuestionario que posee siete ítems de selección múltiple con cuatro alternativas donde sólo una es correcta. Los ítems están generados a partir del trabajo de Batanero, Vera y Díaz (2012) y Vallecillos & Batanero (1997), los cuales han sido adaptados para contextualizarlos a la realidad chilena.

Resultados

A continuación, se muestra la comparación entre los distintos perfiles de dominios de habilidades, llamados clases latentes según el MCDL, asociado al porcentaje de encuestados que muestra ese perfil y la probabilidad de responder correctamente cada ítem.

	[000]	**[100]**	**[010]**	**[001]**	**[110]**	**[101]**	**[011]**	**[111]**
Porcentaje	35,5%	0%	0,4%	1,3%	5,5%	5,1%	4,7%	47,5%
Prob. Ítem 1	0,372	0,372	1,000	0,372	1,000	0,372	1,000	1,000
Prob. Ítem 2	0,122	0,122	0,122	0,401	0,122	0,401	0,401	0,401
Prob. Ítem 3	0,122	0,122	0,122	0,645	0,122	0,645	0,645	0,645
Prob. Ítem 4	0,514	0,773	0,514	0,514	0,773	0,773	0,514	0,773
Prob. Ítem 5	0,421	0,915	0,421	0,421	0,915	0,915	0,421	0,915
Prob. Ítem 6	0,396	0,480	0,396	0,588	0,480	0,713	0,588	0,713
Prob. Ítem 7	0,079	0,079	0,080	0,899	0,080	0,899	0,907	0,907

En las Clases latentes el primer digito trata el dominio o no dominio del primer atributo y así sucesivamente hasta el tercer digito. Con esta información podemos estimar la probabilidad de elegir un sujeto al azar que haya realizado el test y posea un determinado perfil de atributos. Además de la probabilidad de acierto al ítem según su perfil de dominios. Finalmente, las probabilidades de que un

individuo elegido al azar domine alguna de las tres habilidades latentes es 0,538, 0.539 y 0.6275 respectivamente.

Conclusiones

El test de Hipótesis es, innegablemente, una poderosa herramienta de la estadística inferencial, sin embargo, su uso no siempre es el adecuado, esto se debe a que su desarrollo requiere de variadas habilidades latentes que no siempre son dominadas. Desde un punto de vista pedagógico, el proceso de enseñanza-aprendizaje de estas habilidades es complejo y el o la docente requiere un modelo que logre analizar las múltiples habilidades latentes y las relaciones entre ellas; en este contexto los MCD son una herramienta eficaz en la entrega de información puesto que analizan a cada estudiante y lo clasifican según su perfil de dominios y la probabilidad de responder acertadamente al ítem. Además, estos modelos poseen una confiabilidad superior a los modelos tradicionales.

Con esta nueva herramienta, el docente puede evaluar a cada uno de sus estudiantes, categorizándolos según sus debilidades y dominios, y finalmente, generar metodologías y retroalimentaciones eficaces ya que estarán orientadas a cada perfil de estudiante y sus necesidades.

En detalle, en esta investigación bajo el MCDL muestra que cerca del 35% las y los profesores de matemática no dominan las habilidades relacionadas al test de hipótesis, y más de un 47% domina todas las habilidades en la resolución de problemas utilizando el test de hipótesis, además, cerca del 15% domina dos de las tres habilidades latentes y menos del 2% domina sólo una habilidad latente. Estos resultados se deben a la alta complejidad en los constructos del test de hipótesis, y como menciona Batanero (2000), una propuesta de solución es implementar el razonamiento inferencial en un espacio de tiempo amplio, introduciéndolo informalmente desde los primeros años de educación y trabajando su formalidad y aplicaciones en los años venideros.

Referencias

Alvarado, H. (2007). Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C. (2000). Controversies around the role of statistical tests in experimental research. Mathematical Thinking and Learning, 2, 75-91.

Batanero, C., Vera, O., & Díaz, C. (2012). Dificultades de estudiantes de psicología en la comprensión del contraste de hipótesis. Números, 80, 91-101.

Brewer, K. (1986). Behavioural statistics textbooks: source of myths and misconceptions?. En Proceedings of the ICOTS II (págs. 127-131). Victoria, Canada: University of Victoria.

Culpepper, S., & Hudson, A. (2018). An Improved Strategy for Bayesian Estimation of the Reduced Reparameterized Unified Model. Applied Psychological Measurement, 42, 99-115. Obtenido de https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5978651/pdf/10.1177_0146621617707511.pdf

Ministerio de Educación. (2019). Curriculum Nacional. Obtenido de Bases Curriculares 3° y 4° medio: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf

Rupp, A., Templin, J., & Henson, R. (2010). Diagnostic Measurement: Theory, Methods, and Applications. Guilford Press.

Vallecillos, A. (1999). Evidencias empiricas sobre dificultades en el aprendizaje de los test de hipótesis. Granada: Universidad de Granada.

Vallecillos, A., & Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. Obtenido de Universidad de Granada: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Recherches.pdf

Vera, O., & Díaz, C. (2013). Dificultades de estudiantes de psicología en relación al contraste de Hipotesis. Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, (págs. 197-203). Granada.

LA METÁFORA CONCEPTUAL Y SUS IMPLICACIONES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CAMBIO Y VARIACIÓN

Elizabeth H. Arredondo

Universidad de Los Lagos

El siguiente trabajo presenta algunos avances desarrollados de un proyecto de investigación en torno a la formación de profesores y la forma en que estos significan problemas de movimiento que involucra el cambio y la variación. Para acercarnos a esta problemática, este proyecto se apoya en la noción de la metáfora conceptual como una herramienta que permite organizar y procesar el conocimiento conceptual a partir del mapeo de dos dominios. Para hacer operativa esta noción, este trabajo retoma la herramienta de la configuración epistémica del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. La metodología implementada es de tipo cualitativa, descriptiva e interpretativa, y se explora las respuestas de 10 'profesores en formación' a una serie de situaciones-problema situadas en la física clásica durante casi un año escolar. Dentro de los resultados preliminares se han identificado el uso de 4 metáforas conceptuales que permiten resolver y dar significado a las soluciones.

Metáfora Conceptual, Solución de problemas, Cambio, Variación.

INTRODUCCIÓN

La metáfora no es solo un recurso lingüístico que adorna nuestro lenguaje, sino también posee un papel estructural de organización y procesamiento del conocimiento conceptual (Shutova, Devereux y Korhonen, 2013). Desde la lingüística cognitiva se han asumido los siguientes resultados y/o principios en los que se apoya el uso de la metáfora: 1) el lenguaje no es una facultad cognitiva autónoma, 2) la conceptualización de 'algo' implica el uso de signos con los que se denota ese 'algo' y 3) el conocimiento de ese 'algo' se da a partir del lenguaje y su uso (Croft y Cruse, 2004). En otras palabras, la metáfora debe ser observada más allá de la similitud entre expresiones o palabras. La propuesta de Lakoff y Johnson (1980) sobre la Teoría de la Metáfora Conceptual (MC) propone que el uso de esta implica activar mapeos para reconceptualizar 'algo' en términos de 'otro'.

Dentro de la Educación Matemática, existe una basta cantidad de estudios que se han interesado en explorar el lenguaje con el que nos comunicamos en matemática y, por ello, se han incorporado resultados de la lingüística cognitiva, en particular, los resultados de la cognición corporizada. Esta corriente propone que los procesos constituyentes de la cognición estarían basados en los programas de acción corporal, y la manera en que nos comunicamos es a partir de metáforas conceptuales, las cuales serán entendidas como la comprensión de un objeto o cosa de un dominio en términos de otro dominio (Lakoff y Núñez, 2000). En otras palabras, la metáfora provee de un puente en el tránsito del modo cognitivo

verbal secuencial dominante en la enseñanza de la matemática a la construcción abstracta (Norton y Kokushkin, 2021).

En este trabajo se asume que mientras aprendemos matemáticas, nos comunicamos apoyados en metáforas conceptuales y que, a través del tiempo, estas se van fosilizando y tornándose en objetos matemáticos ricos de significación (Postman y Weingartner, 1969). Por ello, reconocemos el importante papel de profesor como un promotor de las interacciones del proceso enseñanza-aprendizaje, es decir, como un agente principal a la hora de comunicar y apoyar a la significación de los objetos matemáticos, además de promover la significación de estos.

Así que resulta interesante cuestionarnos: ¿cómo los profesores de matemáticas en formación comunican la solución de una serie de problemas matemáticos contextualizados que exploran el fenómeno de cambio y variación, los cuales son susceptibles a modelar?

FUNDAMENTOS TEORICOS

En este trabajo se retoman un abanico de elementos, por una parte, en el contexto del tipo de tareas se sitúan a problemas de movimiento (cinemática), que deben ser modelizados y explicados por profesores en formación. En la modelización se encuentra la dificultad de recuperar variables del contexto real y transformarlas a un modelo matemático; una vez tratado en el modelo matemático, el problema nuevamente debe se interpretado en un contexto real. Para la adaptación del modelo y sentido se requiere que los sujetos den significado al fenómeno en términos de un objeto matemático.

Por otra parte, para abordar este entramado de funciones semióticas, este trabajo se apoyará en dos referentes teóricos con el propósito de develar las metáforas que surgen cuando se modelan problemas de movimiento: 1) la metáfora conceptual para analizar la construcción de significados, y 2) la configuración epistémica del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, con el propósito de analizar los elementos que constituyen la metáfora conceptual.

Metáfora conceptual

La metáfora conceptual es un fenómeno productivo que opera a nivel de procesos mentales, que siempre involucra dos dominios conceptuales: el dominio objetivo y el dominio fuente (Lakoff y Johnson, 1980). En este proceso se mapean los significados de un objeto matemático del dominio fuente al dominio objetivo; este se lleva a cabo a partir de un conjunto de expresiones metafóricas individuales que cubren múltiples casos, en los que el dominio puede describirse apoyado en distintas formas de comunicación de un dominio en otro. En otras palabras, la metáfora conceptual puede describirse como un principio cognitivo organizador del sistema conceptual, es decir, es la forma de dar significado un dominio mental en términos de otro, todo esto influye en la forma en cómo organizamos nuestros argumentos (Lakoff, 1992).

Para mirar este mapeo, Lakoff et al. (1991) usan la lista de mapeos de fuente-objetivo como puede observarse en la Figura 1.

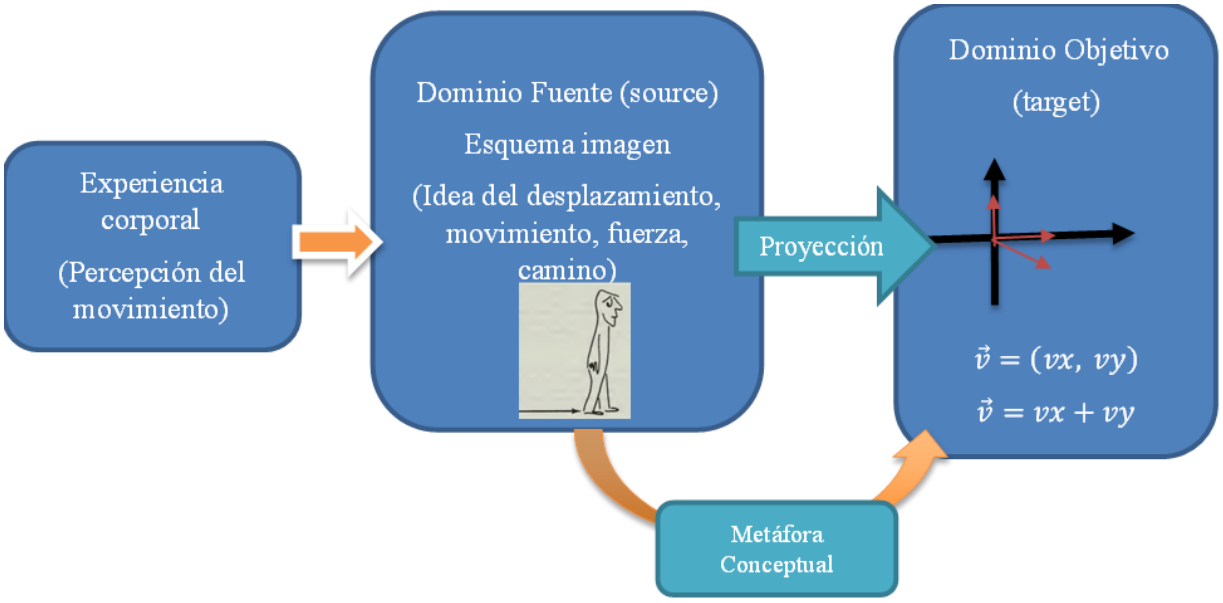


Figura 1: Esquema de la Metáfora Conceptual

La configuración epistémica

La noción de configuración epistémica, que proporciona el EOS, es una herramienta de análisis que permite reconocer las definiciones, lenguaje, propiedades, entre otros, mientras se resuelven problemas (Font y Godino, 2006). Esta herramienta permitirá analizar la lista de mapeos que se dan entre el dominio fuente al dominio objetivo.

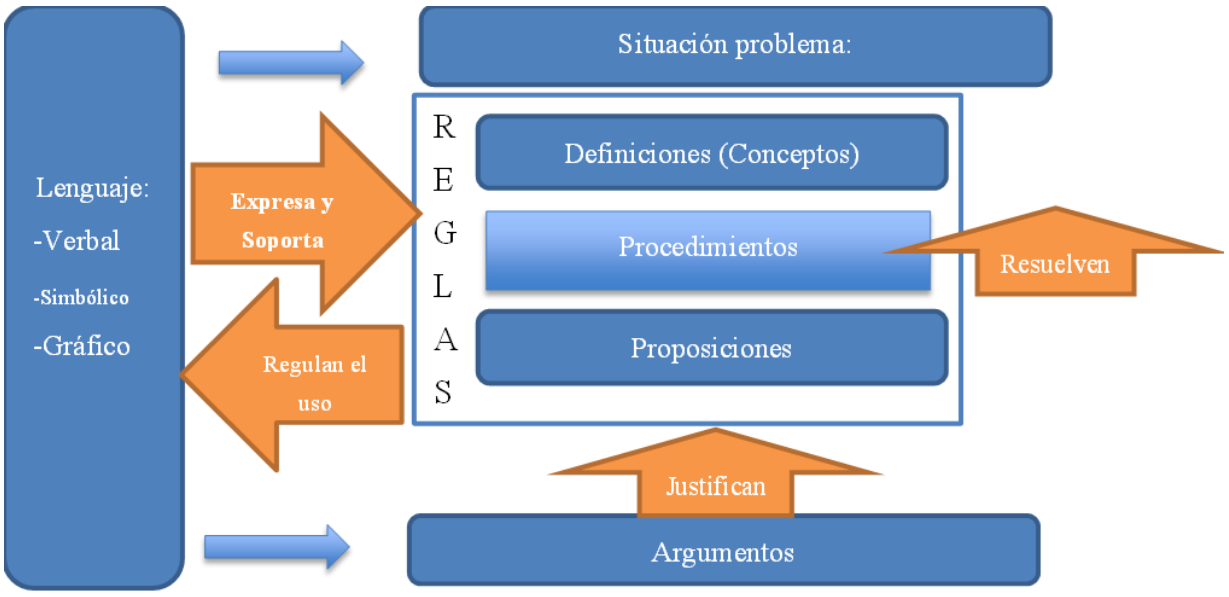


Figura 2: Componentes y relaciones en una configuración epistémica.

METODOLOGÍA

La metodología implementada para este estudio es de tipo cualitativa, descriptiva e interpretativa. Los datos para el análisis fueron recuperados de las respuestas de 10 profesores en formación de la Universidad de Los Lagos, junto a vídeo grabaciones, a problemas matemáticos contextualizados (situaciones de cambio y variación) en la física clásica, donde se les ha pedido resolverlos y discutirlos de manera individual y colectiva; esto fue desarrollado en un periodo de casi un año escolar.

Para analizar los datos, se realiza un análisis del contenido a las respuestas proporcionadas por los estudiantes. Para ello, se ha asumido como referentes teóricos:

1. Cognición encarnada, metáfora conceptual (Lakoff y Núñez, 2000) y articulación de la metáfora deliberada (Steen, 2015, 2017); esta última entregando indicadores de la intencionalidad en la comunicación.

2. La configuración epistémica y didáctica del Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2016) que aportarán herramientas de análisis de la metáfora y sus dominios.

El tipo de Situaciones problemas propuestos son del siguiente tipo:

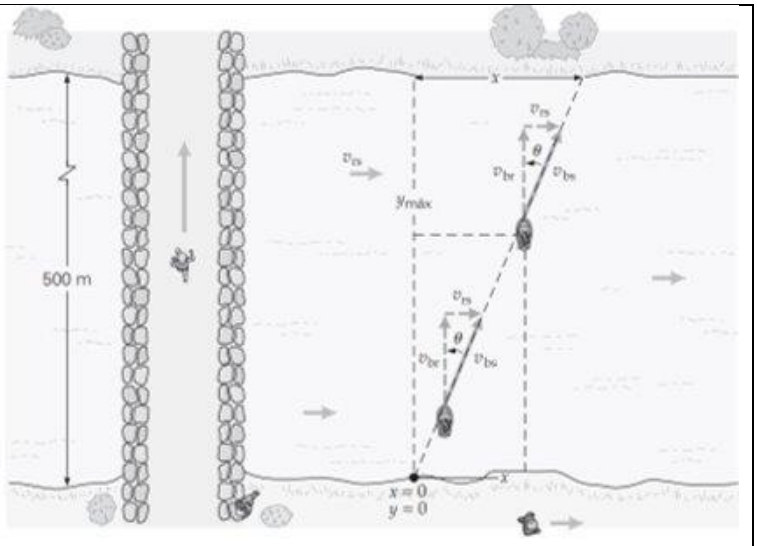
La corriente de un río recto de 500 m de anchura fluye a 2,55 km/h. Una lancha de motor que viaja con rapidez constante de 8,00 km/h en aguas tranquilas cruza el río. a) Si la proa de la lancha apunta directamente hacia la otra orilla del río, ¿qué velocidad tendrá la lancha relativa al observador estacionario que está sentado en la esquina del puente? b) ¿A qué distancia río abajo tocará tierra la lancha, relativa al punto directamente opuesto a su punto de partida?	

Figura 3: Tipos de situaciones problemas propuestos

RESULTADOS

Como resultados preliminares se han identificado cuatro metáforas que apoyan a la solución e interpretación de estos problemas. Sin embargo, el uso deliberado de una metáfora apoya a una mejor interpretación y solución de los problemas. Mientras, la inconciencia del uso de la metáfora provoca en el estudiante hacer una construcción más pobre del objeto matemático que se está explorando.

Los estudiantes que logran interpretar los problemas propuestos correctamente fueron aquellos que usaron los signos como símbolos matemáticos (que en este caso se componen de diagramas y expresiones algebraicas) y organizar espacialmente la información del problema; mientras que aquellos que usaron

solamente signos como íconos o índices, pese a que tenían una idea general de lo que sucedía en el problema, no llegaban a resolverlo.

Cabe aclarar que las metáforas sustentaban ambas aproximaciones al problema (modelo e interpretación), pero al final, una adecuada interpretación de los signos y la organización espacial hace la diferencia entre una respuesta idónea o no.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto de Investigación Fondecyt 1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile, y del Proyecto Interno E04/19 de la Universidad de Los Lagos, financiado por la Dirección de Investigación de la Universidad de Los Lagos.

Referencias

Croft, W. y Cruse, D. (2004). *Cognitive Linguistics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *8*(1).

Godino, J. D., Giacomone, B., Blanco, T. F., Wilhelmi, M. R., y Contreras, Á. (2016). Onto-semiotic configurations underlying diagrammatic reasoning. Comunicación presentada en *40th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 40)*, (August 3-7, 2016). Hungary.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). Conceptual metaphor in everyday language. *The journal of Philosophy*, *77*(8), 453-486.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Norton A. y Kokushkin V. (2021) Mathematical metaphors presuppose common logico-mathematical structures. *Constructivist Foundations, 16*(3), 285–287.

Postman, N. y Weingartner, C. (1969). *Teaching as a subversive activity*. New York: Dell Publishing.

Shutova, E., Devereux, B. J., y Korhonen, A. (2013). Conceptual metaphor theory meets the data: a corpus-based human annotation study. *Language resources and evaluation*, *47*(4), 1261-1284.

Steen, G. (2015). Developing, testing and interpreting Deliberate Metaphor Theory. *Journal of Pragmatics*, 90, 67–72.

Steen, G. (2017). Deliberate Metaphor Theory: Basic assumptions, main tenets, urgent issues. Intercultural Pragmatics, 14(1), 1–24. Chapman, O. (2003). Facilitating peer interactions in learning mathematics: Teachers' practical knowledge. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2* (pp. 191–198). Bergen, Norway: PME.

Shutova, E., Devereux, B. J., y Korhonen, A. (2013). Conceptual metaphor theory meets the data: a corpus-based human annotation study. *Language resources and evaluation*, *47*(4), 1261-1284.

EFECTOS DEL ARTEFACTO MATEMÁTICO CULTURAL (AMC) EN UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA INCLUSIVA: EL CASO MAPUCHE

Anahí Huencho

Universidad Católica de Temuco

En contextos de colonización, por medio de la educación escolar, los conocimientos indígenas han sido excluidos del currículum y la práctica educativa. En matemática, el medio escolar se ha impregnado de artefactos y tecnologías ajenas al territorio nacional, con consecuencias desde lo matemático a lo sociocultural. El objetivo de esta investigación fue determinar los efectos de la incorporación de los artefactos matemático-culturales (AMC) del pueblo mapuche a procesos de enseñanza de la matemática en ambientes escolares. El estudio se realizó en 3 escuelas rurales multigrado y de alta concentración de estudiantes mapuche de la región de la Araucanía, Chile. Así, por medio de la Investigación Acción Participativa, se analizan las fortalezas, complejidades y retos que surgen de la experiencia didáctica. Los resultados muestran que el 100% de los estudiantes mejoró su actitud y participación en la clase y acudió a diversas habilidades matemáticas, conocimiento matemático acorde al nivel o superior y conocimiento local, para enfrentar el desafío propuesto independiente de su edad y cultura. En conclusión, una educación matemática que incorpore las particularidades propias del contexto local, contribuye al fortalecimiento del conocimiento cultural y mejora las prácticas de enseñanzas y aprendizaje de las matemáticas.

Artefacto Matemático Cultural, Educación matemática inclusiva, pueblo Mapuche

ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los procesos de escolarización de los pueblos originarios en Chile, y en particular del pueblo mapuche, se inician en el siglo XVIII y XIX, cuando diferentes credos religiosos crearon escuelas monoculturales basadas en la evangelización y castellanización, invisibilizando los saberes educativos de distintas culturas (Flores y Azócar, 2006; Hanisch, 1974). Este proceso de asimilación, trajo como consecuencia el abandono progresivo de la educación mapuche y las prácticas culturales comunitarias (Noggler, 1982; Quintriqueo, 2010). Solo en la década de 1990 se crea el Programa de Educación Intercultural Bilingüe (PEIB), con el objetivo de nivelar los resultados educativos de estudiantes indígenas a los estándares de calidad nacional. En matemática el programa aporta con libros de estudios para los estudiantes contextualizados a diferentes grupos indígenas del país, en ellos se observa un reconocimiento del territorio rural y escasos elementos matemáticos propios del indígena, los que se desarrollan en español, y se focalizan en la demanda del currículo nacional (Huencho, 2015).

Así, los esfuerzos del programa en torno a la educación y la educación matemática evidencian un carácter compensatorio de las iniciativas (Huencho et al., 2017) que en términos de rendimiento académico en evaluaciones estandarizadas no muestra efecto para estudiantes mapuche. De hecho, se observa una asociación negativa entre composición étnica de la escuela y sus resultados en matemática (Canales y

Webb, 2018; Undurraga, 2014), lo cual se acentúa en los entornos rurales (Cerda, 2009). Una posible causa, obedece a que las estrategias implementadas por el PEIB no evidencian procesos matemáticos concretos asociado a un pueblo originario como el mapuche (Huencho, 2015; S. Salas et al., 2015), lo que hace poco atractivo su uso por parte de los docentes (Ibáñez, 2010).

De esta manera, Chile enfrenta el desafío de conectar las instituciones escolares con comunidades locales, en consonancia con la tendencia mundial, donde la comunidad es central para fortalecer el aprendizaje de los estudiantes indígenas (Burgess y Cavanagh, 2016). En esta materia, una educación que responda a grupos socioculturalmente diferenciados demanda que ciertas categorías de contenidos culturales sean incorporadas en forma explícita en el currículum escolar (Almendra et al., 2011). Esto implica elaborar proyectos educativos que respondan a los contenidos culturales matemáticos y las necesidades de la escuela y así representar una enseñanza responsable culturalmente desde el diseño a la implementación de las actividades de aula (Kumar et al., 2018; McDonald et al., 2014).

La noción de hacer matemática en contexto mapuche da cuenta de un avance en la visibilización del conocimiento matemático en el ámbito numérico, geométrico y de la medición (Huencho et al., 2021; Peña-Rincón y Hueitra-Santibañez, 2016; A. Salas, 1980; S. Salas et al., 2015). El cual se desarrolla dentro de actividades cotidianas propias donde habitan los Artefactos Matemáticos Culturales (AMC) (Huencho y Chandía, 2018), definidos como elementos tangibles y no tangibles con caracterización matemática dentro de la lógica de la cultura, el cual puede ser comprendido desde la matemática académica. Así, "el conocimiento matemático por medio de la AMC es una variable mediadora entre el conocimiento cultural y el conocimiento curricular" (Huencho y Chandía, 2018; pp.8).

El AMC debe ser entendido, como un artefacto que no siempre muestra su alcance matemático académico y que en variadas ocaciones, es necesario acudir a la tecnología del artefacto para determinar patrones y algorítmos entedibles para la matemática académica. Por lo anterior, es vital generar un trabajo colaborativo entre los docentes especialistas en matemáticas y los educadores tradicionales (o sabios culturales), con el fin de visibilizar los elementos matemáticos y sus aportes dentro de la cultura, para así poder plasmar este conocimiento en actividades de aula con pertinencia a la cultura (Huencho, 2017). Lo cual contribuiría a que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas sea culturalmente receptivo, práctico y agradable (Owusu-Mensah y Quan, 2015), además de formar el sentido de pertenencia de los jóvenes con su pueblo y territorio (Ejuu, 2019).

Es por esto, que la presente investigación busca determinar los efectos de la incorporación de los Artefactos Matemático Culturales (AMC) del pueblo mapuche a procesos de enseñanza de la matemática, en ambientes escolares previamente construidos en colaboración con los agentes educativos participantes. El impacto del AMC en aula, ha sido analizada desde las personas y sus respectivos roles en la interacción con este recurso a nivel de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

METODOLOGÍA

Dada que se busca determinar los efectos del AMC en el aula de matemática, la investigación adopta un carácter interpretativo (Bikner-Ahsbahs, 2015) dado que se tratará de comprender un fenómeno propio

de una comunidad para su generalización, transferencia y posible posicionamiento en el área de la Educación Matemática de Educación Básica (Lesh et al., 2013).

El presente estudio se desarrolla desde el núcleo de conocimiento de 3 comunidades mapuche de la zona del valle, Región de la Araucanía, Chile y los respectivos establecimientos educativos insertos en estas. A los establecimientos se tuvo acceso gracias a la tramitación del representante territorial, quién presentó a la investigadora y apoyó la exposición de la propuesta de investigación a sus directores y profesores. El compromiso de la institución educativa, era fundamental para que tanto el territorio como la escuela fueran parte activa de esta investigación. La primera escuela, es particular subvencionada, multigrado y unidocente. Se emplaza en la comunidad de Lladquihue Norte, comuna de Labranza. La segunda escuela, es particular subvencionada, multigrado y unidocente. Se emplaza en la comunidad de Lladquihue Sur, comuna de Labranza. La tercera escuela, Vega Larga, es municipal, multigrado y pluridocente. Se emplaza en la comunidad de Peuman Mapu, comuna de Lautaro. En cada una de las tres escuelas participa su director (3), los profesores que realizan clases de matemática (5), los educadores tradicionales (3), los estudiantes (45) y sus respectivas familias (45). En total 98 participantes, con una disminución en el total final correspondiente a que en algunas instituciones el director es también su profesor de matemática o su profesor de matemática es también su educador tradicional.

El foco de esta investigación se centra en el AMC denominado *Püron*, propio del pueblo mapuche y cuyo significado es *nudo en lana* en mapudungun. Diferentes conversaciones[1] establecidas con conocedores de la cultura mapuche, describen al *püron* como un conjunto de lanas, generalmente dos o cuatro, de diferente color, que utilizaban mujeres y hombres en edad adulta. Las mujeres se amarraban estas lanas a la cintura y los hombres en la cabeza y salían con ellas a campo abierto con la función de registrar el conteo de objetos, principalmente asociado a animales y dimensiones temporales. La forma de registro se asocia principalmente a la relación un nudo una unidad, pero se poseen variaciones de tamaño en el nudo y la cantidad que esta representa (para mayor información ver Arellano, 2009; Huencho et al, 2017).

Para este reporte, las unidades de análisis se focalizan en la videograbación de 3 clases de matemáticas centradas en recolectar información de las principales características de su establecimiento educativo, cuantificándolas y registrando a través del *püron* o nudo confeccionado sobre una o varias lanas de oveja. Además, se consideraron 3 sesiones de trabajo sobre los pros y contras de las sesiones de aula y en la actividad de difusión de la experiencia en cada comunidad (3) a la que asistieron profesores, educadores tradicionales, estudiantes y las familias de los educandos.

El análisis de los datos se realizó en base al método de la Investigación Acción Participativa (Susman, 1983), donde en conjunto con los participantes, desde donde emergen los datos, se establecen reuniones de análisis de la experiencia vivida con foco en el Artefacto Matemático Cultural (AMC) con el fin de identificar procesos, respuestas, entre otros, llamativas para los participantes y que permitan definir su impacto en la propuesta de enseñanza desde los ojos de la comunidad educativa y local desde donde

1 De los entrevistados ninguno usó el püron en su infancia, no poseen un püron que se pueda manipular y no recuerdan la forma en que se registre información que supere una decena. Generalmente se hizo referencia a los abuelos y abuelas como los últimos que lo utilizaron.

emerge. Esta interacción se desarrolla por medio de discusiones altamente respetuosas, aunque son deliberadamente analíticas para generar respuestas colectivas al foco de estudio (Tetui et al., 2017).

RESULTADOS (5 PÁGINAS)

Los participantes declaran al menos cuatro focos de interés en torno al Artefacto Matemático Cultural (AMC) uüron, que emerge de la práctica escolar en matemática. Los focos se asocian al diseño de la enseñanza, la gestión de la actividad de aula, las producciones matemáticas de los estudiantes y la comunidad mapuche local, a continuación, se detalla cada una.

1. El AMC y el diseño de la enseñanza de la matemática

Seleccionado el AMC, la primera pregunta que emerge es cómo la transformamos a una actividad de aula. En este sentido, los agentes educativos discutieron sobre el enseñarle a hacer nudos o permitirles determinar un patrón con los nudos que generalice y se conecte con le sistema de numeración mapuche. El siguiente diálogo, muestra la decisión tomada y su argumentación:

> Prof. Matemática 1: Pero se sabe tan poco del püron.
>
> Educador Tradicional 1: Sí, pero sabemos que se usa para registrar nuestros números y dado que podemos decir números sobre mil, los nudos debieran poder representarlo. Nuestros estudiantes pueden apoyar a cubrir ese vacío de información que tenemos y sería bueno para el pueblo, pero también para la matemática.
>
> Prof. Matemática 1: mmm ya, claro, sería un tremendo desafío para ellos y para nosotros, porque les pediríamos construir, pero cómo evaluamos qué es lo que está bien y qué está mal.

De esta manera, se decidió utilizar el vacío de información como foco para pensar en una propuesta de codificación con ellos, la cuál debía ser lógica para el pueblo. Esto permitió pensar en una actividad matemática de respuesta abierta, en donde se requería crear un código a través de nudos, pero también justificarlo en cuanto a un sistema de numeración que hasta el momento se había memorizado por parte de los estudiantes mas no analizado desde su estructura.

Luego, se establece la necesidad de preparar un set de orientaciones que introduzcan al estudiante en la tarea y desafiarlo en diferentes rangos numéricos que permitan extender el patrón a números grandes, al menos más grandes de los que hasta el momento se tiene registro. Así, surge el siguiente relato:

> Prof. Matemática 3: Pero, ¿qué preguntamos?, ¿qué les hacemos hacer con la lana?, porque ellos de seguro contaran cuántos niños son o cuántas plantas tiene la escuela, pero ¿eso es suficiente?
>
> Educador Tradicional 3: Si todo es contar y hacer nudos, todos responderán a lo mismo y de seguro serán cosas chicas, como tres computadores, un kultrun (tambor mapuche) y así.
>
> Investigadora: Pensemos en ¿qué es importante de dar a conocer de su escuela? Y luego ¿cuál es la extensión numérica que poseen esos elementos?, para poder definir actividades.
>
> Educador Tradicional 3: Si, porque debe ser un desafío para niños de 1ero básico, pero que puedan hacer, y debe ser algo diferente para el que está en 6to básico, que no lo encuentre muy fácil y se aburra.
>
> Prof. Matemática 3: Podría ser algo del patio, los árboles, las plantas, algo que ellos no sepan cuántos tenemos. (…) el sector de juegos también es importante, porque si bien acá es campo y el patio es muy grande, los niños tienen un sector donde prefieren jugar y eso no está cercado ni nada.

Investigadora: Perfecto, con los árboles tenemos un rango numérico sobre 10, que llega casi a 60, por lo que puedo notar. Con el sector de juegos, dependerá de la unidad de medida escogida, pero más o menos estaríamos en el mismo rango pero con diferencia en la forma de registrar, (…) ¿cómo diferencian que el registro es de árboles o del área de juego que posee dos variables?, me parece muy interesante el desafío. Ahora, ¿cómo podemos ampliar el rango numérico sobre la unidad de mil?

Directora: Creo que una buena forma es agregar la historia de la escuela, no puede quedar fuera, esta escuela nace y luego se traslada de lugar en más de una oportunidad, registrar el año en que esto ocurre ayudaría a conocer más sobre esta escuela.

Prof. Matemática 3: Y con eso estarían registrando el año en que se crea, que es el mil novecientos… ochenta, o por allí.

De esta manera se intencionan escenarios de trabajo diferenciado para desafiar a los estudiantes de diversas edades, en contextos de trabajo internos y externos al aula y sobre un producto de respuesta abierta y

2. El AMC y la gestión de la actividad de aula

En paralelo al diseño, los educadores comenzaron a cuestionar la forma en que direccionarían la actividad, el trabajo en grupos y cómo atender las inquietudes de los estudiantes frente a sus producciones en este ambiente de respuesta abierta. De esta manera, un diálogo que muestra un efecto del AMC y la tarea matemática asociada, en el actuar docente es el siguiente:

Prof. Matemática 2: me preocupa cómo vamos a desarrollar esta actividad, porque todos pueden estar haciendo cosas diferentes y entiendo que para el mapuche el error es parte del proceso, pero cómo no le voy a poder decir que algo esta mal, o sea el estudiante puede perder mucho tiempo en el error, entonces lo debo ayudar.

Educador tradicional 2: el estudiante debe poder notar el error, pero debe hacerlo él con su ayuda.

Prof. Matemática 2: tendría que ponerlo en otra situación más simple para que se de cuenta que por ese lado no va la cosa. Igual creo que usted (refiriéndose a la Educadora Tradicional) me debe acompañar, porque quizá algo sea súper lógico para el pueblo pero yo no lo vea o al revés, que sea muy ilógico desde el pueblo pero no desde lo matemático.

Educador tradicional 2: yo puedo apoyarlo, pero en lo cultural. (…) creo que deben trabajar en pequeños *lof* (comunidades, grupos), porque el püron es una forma de escritura, importante como el calendario hoy y si bien hoy no recordamos su forma de registro, el pueblo mapuche en su totalidad sabía leer esta lana, (…) lo que sea que los niños construyan, debe ser entendido y aceptado al menos por su *lof*, debiera ser el primer paso.

De esta manera, se decide el trabajo por equipos en condiciones similares a la práctica sociocultural tradicional (por lo que se excluyen elementos como el papel y lápiz para esta tarea), el apoyo contante y permanete del educador tradicional en las producciones matemáticas de los estudiantes y la interacción a través de demandas simplificadoras que permitan al estudiante advertir el error y modificar su práctica.

3. Las producciones escolares de los estudiantes

En cuanto a las producciones de los estudiantes, se pudo observar que los nudos eran posicionados en la lana según su característica, así todos los nudos grandes (representa 1 decéna) se encontraban en un mismo sector de la lana y todos los pequeños (represnta 1 unidad) en otro. La regularidad indica que la decodificación del registro se hace de arriba hacia abajo o de izquierda a derecha dependiendo si la lana se posiciona en forma vertical u horizontal, respectivamente. Del mismo modo, los estudiantes decidieron que los nudos grandes son los que se leen primero por lo que en la decodificación siempre se ubican los nudos grandes al inicio[2] de la lana, aun cuando, algunas excepciones en el registro que incluía nudos pequeños y grandes intercalados, permitieron evidenciar con mayor certeza que los estudiantes compren que el código construido pertenece a un sistema aditivo y no posicional[3] coherente con el sistema de numeración mapuche como lo demuestra la siguiente interacción entre estudiantes y su profesora de matemática:

E14: profesora, mire mi lana, acá tengo los 93.

P2: Podrías leerme tú registro.

E14: Sí, 10, 20, 30, 40, 50, (no contabiliza un nudo simple, lo omite y sigue) 60, 70, 80 y 90, 91, 92 y 93 (volviendo al nudo simple que antes no contabiliza).

P2: ¿Qué pasó con ese nudo que volviste a buscar?

E14: es que no me alcanzó acá al final de la lana, me faltó lana, y como acá entre estos nudos grandes me quedaba un espacio de lana allí lo puse.

P2: ¿Y da el mismo resultado si no me lo salto?

E14: Sí, mire, 10, 20, 30, 40, 50, 51, 61, 71, 81, 91, 92 y 93.

P2: ¿Por qué no lo leíste así la primera vez?

E14: Porque es más difícil, pero se puede hacer.

P2: Y ¿puedes comenzar a contar por los nudos pequeños?

E14: Sí, también se puede, pero es más fácil así (mostrando un extremo de la lana con nudos grandes).

En este contexto, los estudiantes de 1º y 2º básico, registraron información contable superior a una decena e inferior a una centena y en este ámbito se les pidió realizar algunas descomposiciones y repartos. Por ejemplo, en una reunión de reflexión de 15 minutos, al término de un clase cuyo objetivo era la comparación de registros a través del *püron*, la profesora resaltó la siguiente situación:

P3: mira, pasó que le pedí que se repartieran 30 árboles… 30 árboles… (pensando).

INV: ¿frutales?

P3: a ya, ahí tenemos 30 y ellos eran 3, más el Martín, que no vino y entonces qué hacemos ahí con el Martín, el Martín también tiene que tocar (la profesora le decía al grupo). Entonces

2 Inicio simbólico porque las lanas pueden ser tomadas en cualquier dirección. En este sentido, todos los estudiantes identifican primero en qué posición están los nudos de mayor tamaño y comienzan a decodificar.

3 Para este tipo de registro. Los estudiantes de mayor edad y con demanda que implica un rango numérico mayor, crearon oreo sistema de registro a través de nudos aditivo y posicional.

> dijeron, que a el le iban a sacar dos, a ella dos y a ella dos (refiriéndose a cada uno de los tres integrantes del grupo que ese día estaban presentes), entonces todos le iban a dar a Martín.

INV: y ¿cómo supieron que ese es el reparto más equitativo?

P3: no les pregunté.

En esta situación, los estudiantes realizan una división por reparto de 30 árboles (representado por tres nudos grandes) entre los tres integrantes del grupo que están presentes. Entonces, la profesora pone en conflicto su respuesta al advertir que falta un integrante del grupo (Martín) y que él también debe tocar una parte, por lo que los estudiantes deciden restar 2 árboles de los 10 que inicialmente se habían repartido a cada uno, para darle una parte a Martín. Así, los estudiantes establecieron mentalmente el reparto con la menor diferencia posible entre los integrantes del grupo y Martín, quedando cada uno de los presentes con 8 árboles y Martín con 6.

Los ejemplos mostrados, permiten inferir que el formato de creación en las demandas en torno a un AMC como el püron, otorga la oportunidad al estudiantes a tomar decisiones frente al proceso que construye que en muchas ocaciones sigue la lógica de la matemática occidental, pero ahora con normativas que no estan direccionadas, sino que tienen sentido en cuanto facilitan la ejecución de los procesos solicitados.

4. La comunidad mapuche local y el AMC

Finalmente, se estableció que, al término de cada clase, los estudiantes debían informar de las actividades realizadas a sus apoderados, padres y/o familia en general con el objeto de identificar si las familias reconocían el elemento cultural *püron* y qué es lo que sabían del él, si conocían su uso, o alguno lo utilizaba en sus prácticas cotidianas. Citas de lo anterior es:

> "Las familias deben integrarse con elementos del conocimiento, por lo que el estudiante, después de cada clase, debe mostrar lo realizado y hacer una pregunta simple, todo desde la oralidad, que le indiquen si le entienden, si les parece verídico lo que se le plantea y si ellos conocen otras formas. (…) que indiquen que no entienden o conocen nada también es una buena respuesta, porque estaríamos revitalizando el conocimiento en esos hogares" (Educador Tradicional 2).

El objetivo era hacer realmente partícipe a la familia en la labor de aula, en un marco que posibilite que ambas partes resulten beneficiadas. Así, ante la consulta de conocimiento del *püron* y de su uso, podían ocurrir dos cosas: que la familia recuerde, conozca, use el *püron* y valide la información que hemos entregado en aula, o que nos entregue nueva información de su forma de registro o uso.

En este contexto, en la sesión de difusión de las producciones a la comunidad mapuche local, los participantes valoraron la propuesta indicando lo siguiente:

> "Esto es bueno, lo que hicieron en clase es bueno, que ahora nos muestren lo realizado nos ayuda a fortalecer lo que ya casi hemos olvidado. Es importante que nuestro niños, los siguientes mapuche, nos ayuden a no olvidar." (Familia – Miembro de la comunidad mapuche local).

El foco de esta favorable persepción, se centró en la constante consulta y/o entrevistas de otras investigaciones sobre su conocimiento, las cuales nunca más vulven a escuchar y no tributa a las necesidades locales de la comunidad. Acá se acentúa en el punto de que todos aprendemos.

CONCLUSIÓN

Los efectos de desarrollar tareas matemáticas escolares en torno a un Artefacto Matemático Cultural (AMC) como es el püron para el pueblo mapuche, se desenvuelven desde a) el diseño de la enseñanza, donde lo primero es identificar las matemáticas que involucran conexiones con el conocimiento de la comunidad local, en donde el AMC se impregna de procesos matemáticos con sentido en la vida cotidiana. Luego, se establece un propósito para favorecer las oportunidades de alcanzar la comprensión y el desarrollo de esta matemática con apoyo del conocimiento curricular a través del AMC, se determinan actividades, preguntas orientadoras, tiempo, lugar y forma en que el proceso de enseñanza se desplegará en concordancia con las demandas que el AMC requiera para la naturalidad de su desarrollo; b) la gestión de la enseñanza se desarrolla en un ambiente de monitoreo constante, debido a la diversidad de caminos que los estudiantes pueden escoger para resolver el desafío planteado. La interacción se realiza a través de preguntas, con tiempos que den espacio a la formulación de hipótesis y conjeturas por parte de los estudiantes en comunidad, valorando toda intervención, y guiándola para auto analizar sus conjeturas y descubrir sus errores, en auto y co-regulación con sus partes; c) las producciones de los estudiantes en torno al AMC es valorado por los profesores en cuanto generan razonamiento matemático, procedimientos lógicos, argumentación sobre la heurística, y las contingencias consideradas para resolver las diferentes problemáticas. Concluyen con la idea que esta forma de hacer matemática moviliza al estudiante a esferas donde pone a prueba su conocimiento y su labor se centra en apoyar la continuidad del objetivo de trabajo planeado. Los estudiantes presentan un lenguaje entusiasta, quieren desplegar los alcances de sus decisiones, y la movilización de las creencias sobre su pueblo, lo que creen de su historia y cómo re-construyen el valor del conocimiento de sus familias, sus abuelos y su propia identidad cultural; y d) la valoración del pueblo se enmarca en el AMC y su forma de uso, lógica del código, coherencia lingüística con la lengua mapuche, proyección que posee dentro del sistema numérico del pueblo y el sentido de lo que expresa. Se valora la metodología de trabajo desarrollado desde lo local, su conocimiento ancestral y las formas en que se transmite junto a la labor del educador tradicional de la comunidad. Destaca el propio proceso de valoración como la forma de concluir cada nueva propuesta de intervención en el aula de sus pupilos para fortalecer, avanzar y hacerlos parte de un proceso tan relevante para el futuro de la comunidad.

Así, el AMC de un grupo sociocultural afecta las diversas dimensiones de la enseñanza de la matemática, al mismo tiempo que la hace inclusiva. Estos efectos, determinan un nuevo quehacer en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas inclusivas y pertinentes a la sociedad que la estudia y permiten marcar una pauta que contribuye, tal como menciona Owusu-Mensah y colega (2015) en lo práctico y agradable, mientras fortalece el sentido de pertenencia e identidad (Ejuu, 2019) de estudiantes históricamente invisivilizados en el área de las matemáticas.

La activación del AMC *püron* dentro del aula escolar y en la asignatura de matemática, permitió movilizar el artefacto dentro de la comunidad, motivando su recuerdo, manipulación y resignificación para la actualidad y puede ser denominado como un recurso didáctico que cumple una doble función en el aula escolar, dando acceso a conocimiento del tipo cultural y curricular matemático.

Para finalizar, se debe considerar que los positivos efectos del AMC *püron* expresados en este escrito, se deben a un cuidadoso tratamiento del artefacto, donde se deben considerar tres grandes elementos, el primero se relaciona con la declaración del carácter histórico del AMC y lo relevante de su existencia en el pasado y/o presente, para luego, avanzar al segundo elemento que se asocia a desarrollar su práctica de manera desafiante cultural y matemáticamente, en otras palabras, a nadie le impacta saber que el conocimiento matemático propio es simple o pintoresco. Por último, el tercer elemento requiere que dentro de los cánones de lo inclusivo, se reconozca en la práctica las necesidades del grupo y el AMC debe estar siempre alineado a lo que fue y lo que será en coherencia con la lógica local de su tecnología, de esta manera y solo de esta manera, cualquier AMC tendrá efectos similares a los que acá se han alcanzado por medio del *püron*.

Referencias

Almendra, O., Peña-Cortés, F. y Rojas-Maturana, M. (2011). Relación entre saberes y conocimientos territoriales en escuelas Lafkenches: la necesidad de un currículum intercultural con base geográfica. *REXE*, *Revistas de Estudios y Experiencias en Educación, 10*(20), 32-68.

Arellano, C. (2009). Un khipu olvidado: el püron mapuche. En V. Solanilla (Ed.), *Actas IV Jornadas Internacionales sobre Textiles Precolombinos*, (pp. 229 – 240). Departamentd'Art de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bikner-Ahsbahs, A. (2015). Empirically grounded building of ideal types. A methodical principle of constructing theory in the interpretative research in mathematics education. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, N. C., & Presmeg, (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 105-135). Springer.

Burgess, C., y Cavanagh, P. (2016). Cultural immersion: Developing a community of practice of teachers and aboriginal community members. *Australian Journal of Indigenous Education, 45*(1), 48-55. doi: 10.1017/jie.2015.33

Canales, A. y Andrew, W. (2018). Educational Achievement of Indigenous Students in Chile: School Composition and Peer Effects. *Comparative Education Review,* 62(2), 231-273.

Cerda, A. (2009). Situación socioeconómica reciente de los mapuches en la región de la Araucanía. *Centro de Estudios Públicos*, 314, 18-26.

Ejuu, G. (2019). African indigenous games: Using Bame Nsamenang's Africentric thoughts to reflect on our heritage, pedagogy, and practice in a global village. *Journal of Psychology in Africa*, 29(4), 319-327.

Flores, J. y Azócar, A. (2006). Fotografía de Capuchinos y Anglicanos a principios del Siglo XX: La Escuela como instrumento de Cristianización Y Chilenización. *Memoria Americana*, 14, 75–87.

Hanisch, W. (1974). *Historia de la Compañía de Jesús en Chile (1593 - 1955)*. Editorial Francisco de Aguirre, S.A.

Huencho, A. (2015). Estudio de las Orientaciones curriculares del Programa Intercultural Bilingüe: un análisis emergente en función de la matemática y la cultura mapuche. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 8(2), 214-236.

Huencho, A. (2017). Strengthening the ways of mathematize of the Mapuche people at the school. En A. Chronaki (Ed.), *Mathematics education and life at times of crisis* (pp. 252-256). Volos: University of Thessaly Pess.

Huencho, A. y Chandía, E. (2018). Planificar la clase de matemática con responsabilidad cultural: El registro de información cuantificable a través del *Püron*. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 82*, 7-15.

Huencho, A., Chandía, E., Rojas, F., y Williamson, G. (2021). Modelo de desarrollo del conocimiento matemático desde el Saber y Hacer del pueblo mapuche. *Educación Matemática*, 33(2), 7-36. DOI: 10.24844/EM3302.01

Huencho, A., Rojas, F., y Webb, A. (2017). Educación Matemática Intercultural: Propuestas y Proyecciones desde el pueblo Mapuche. En E. Treviño, L. Morawietz, C. Villalobos, y E. Villalobos (Eds.) Educación Intercultural en Chile. Experiencias, Pueblos y Territorios. (pp.301-331), Ediciones UC.

Ibáñez, N. (2010). La atención pedagógica a la diversidad. Estudio en aulas de escuelas rurales de comunidades mapuche del sur de Chile. *Educación Superior y Sociedad*, *15*(2), 83-110.

Kumar, R., Zusho, A., & Bondie, R. (2018). Weaving cultural relevance and achievement motivation into inclusive classroom cultures. *Educational Psychologist*, *53*(2), 78-96. doi: 10.1080/00461520.2018.1432361

Lesh, R., Sriraman, B., & English, L. (2013). Theories of learning mathematics. En S, Lerman (Ed.)*, Encyclopedia of Mathematics Education.* Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-4978-8_157

McDonald, M., Kazemi, E., Kelley-Petersen, M., Mikolasy, K., Thompson, J., Valencia, S. W., y Windschitl, M. (2014). Practice makes practice: Learning to teach in teacher education. *Peabody Journal of Education*, *89*(4), 500-515. doi: 10.1080/0161956X.2014.938997

Noggler, A. (1982). *Cuatrocientos años de misión entre los araucanos*. San Francisco.

Owusu-Mensah, J. y Quan, K. P. (2015). Demystifyingthe Myth of Mathematics Learning At the Foundation Phase: The Role of Akan IndigenousGames. *International Journal of Educational Sciences*, 8(2), 313-318.

Peña-Rincón, P. y Hueitra-Santibañez, Y. (2016). Conocimientos [matemáticos] mapuche desde la perspectiva de los educadores tradicionales de la comuna de El Bosque. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática 9*(1), 8-25.

Quintriqueo, S. (2010). *Implicancias de un modelo Curricular monocultural en contexto mapuche*. Universidad Católica de Temuco.

Salas, A. (1980). El sistema de numeración en el Mapuche de Chile. *Revista la Matemática en el Colegio, 4*(1), 5-13.

Salas, S., Godino, J. D. y Oliveras, M. L. (2015). Números mapuches en el currículo de la lengua mapuzugun en la educación básica chilena. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática 8*(2), 194-213.

Susman, G. (1983). Action research: A sociotechnical systems perspective. En G. Morgan (Ed.), *Beyond method: Strategies for social research* (pp. 95-113). Newbury Park: Sage.

Tetui, M., Coe, A., Hurtig, A., Ekirapa-Kiracho, E., y Kiwanuka, S. (2017). Experiences of using a participatory action research approach to strengthen district local capacity in Eastern Uganda. *Global Health Action, 10*(4), 104-115. doi: 10.1080/16549716.2017.1346038

Undurraga, E. (2014). *Unraveling development: Three essays on structural determinants of human capabilities*. Tesis de Doctorado, Massachusetts, Brandeis University.

INTERDISCIPLINA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y SU RAZÓN DE SER

Jaime Huincahue Arcos

Centro de investigación de Estudios Avanzados, Universidad Católica del Maule

Cuando el propósito de la educación matemática se vierte hacia el enriquecimiento de la comprensión de la realidad, los esfuerzos por innovar invitan a reconocer a la matemática más allá de su sentido puro y abstracto, estableciendo objetivos que crucen límites disciplinares para justamente entender y explicar la realidad del estudiante, y por ello, propiciar entornos de construcción de conocimiento matemático e interdisciplinar. Una forma, es situar a los estudiantes en entornos interdisciplinares, en donde prime una matemática que otorgue un funcionamiento orgánico del escenario. Sin embargo, las dificultades y desafíos que ello significa para el profesor de matemáticas son hallazgos por identificar, demandando estudios empíricos sobre los procesos de transposición del conocimiento matemático desde el saber sabio de la práctica interdisciplinar, es decir, desde su razón de ser. En esta charla, se presentarán tareas interdisciplinares que evidencien ciertas características comunes, las que también han sido identificadas en la práctica del modelamiento matemático aplicado desde una esfera profesional e interdisciplinar, para la generación de ideas que contribuyan al profesor de matemáticas.

Modelación, interdisciplina, modeladores matemáticos.

INTRODUCCIÓN

La literatura sobre modelación matemática en investigación educativa es extensa. Las comunidades de investigación en el mundo han logrado evidenciar avances y resultados de interés en el aprendizaje del modelar, como así también en sus formas de enseñanza, desde los niveles de preescolar hasta la educación superior. Los distintos estados de desarrollo de las líneas de investigación trazadas en la literatura (p.e. Arrieta y Díaz, 2016; Stillman y Brown, 2019) invitan a conocer y difundir resultados de interés, pero además, a querer innovar y explorar en las problemáticas propias de nuestro contexto social y cultural, como es la educación chilena, y cómo podríamos contribuir a demandas actuales para la gente. Una forma de orientar tales problemáticas en el nivel básico y medio, es considerar lo que nos propone el actual currículum nacional, destacando que uno de los propósitos de las matemáticas es enriquecer la comprensión de la realidad (Mineduc, 2021). Esta posición curricular y desde un enfoque de desarrollo, se muestra una valoración sobre el camino recorrido en modelación matemática en Chile, además de demandar un desarrollo del modelar en el presente y futuro.

Para ello, el papel que juega *la realidad* en la práctica educativa nos invita a pensar en cómo ciertas situaciones o realidades, son propicias para la construcción de conocimiento matemático, como sucede en una tarea de modelación. Una manera de observar la realidad, es caracterizar un entorno identificable para el saber del estudiante, de tal manera que las problemáticas de la realidad puedan ser comprendidas. Desde el interés de esta presentación, se valoran los escenarios interdisciplinares como una expresión de

la realidad y como una fuente fecunda para las prácticas educativas, en donde la matemática puesta en uso refleja una visión distinta a la tradicional y abstracta noción de las ideas y modelos matemáticos, dando un sentido y un significado al saber. De esta manera, los modelos matemáticos que subyacentes expresan mayormente su potencial en el diálogo interdisciplinar, permitiendo cambiar la perspectiva de la matemática, ampliar y profundizar la comprensión del contenido matemático por distintas disciplinar, y amplía las redes de conocimiento (Borromeo-Ferri, 2019).

Tareas y proyectos de educación matemática interdisciplinar

Comúnmente, las tareas o proyectos interdisciplinares poseen muchos componentes experimentales y situados, basados en la propia actividad del estudiante mientras reflexionan, y progresivamente, hacia entornos permeados por el uso de tecnologías (Noss y Coyles, 1996; Williams y Roth, 2019). A continuación, se mostrarán brevemente dos tareas de interés.

En Borromeo-Ferri (2019) se puede ver un ejemplo que vincula a las matemáticas, la física, el arte y la ingeniería en el Puente Leonardo, propuesto como un proyecto de trabajo en niveles de 1ro y 2do medio, cuyo puente tiene la particularidad de no utilizar clavos ni pegamentos para que se sostenga, solo con las fuerzas involucradas (Figura 1). La propuesta de proyecto es presentada indicando qué es el puente Leonardo, cuáles son los talentos, y la figura de Leonardo Da Vinci como un representante del conocimiento universalista de la época; posteriormente, se desarrolla el trabajo en parejas y con materiales (sin pegamento), con preguntas orientadoras que permitan la reflexión en el estudiante: ¿qué grupo podrá construir el puente de mayor alcance? ¿Qué puente utiliza el mínimo de palitos? En este tipo de situaciones, los modelos matemáticos se transforman en una manera de atender este tipo de preguntas.

Figura 1: El puente Leonardo

El proceso cíclico IBL (del acrónico del inglés Inquiry-Based Learning; Edelson et al., 1999) es una eficaz manera de situar los momentos de aprendizaje, es decir, iniciar con una *pregunta* que invite al estudiante a pensar y entender el problema que involucra la situación expuesta, para después *investigar* sobre el problema y las distintas posibilidades de explorar y reconocer una ruta de respuesta, debiendo *crear* alternativas, soluciones y/o explicaciones al problema, incluyendo un momento de socialización entre los estudiantes para *discutir* y analizar las distintas explicaciones al problema, permitiendo *reflexionar* en cuanto a la situación expuesta e identificar mejoras en la propuesta inicial, pudiendo generar nuevas preguntas para inicial nuevamente el ciclo.

La tarea de la figura 2a, propuesta para estudiantes de octavo básico y primero medio, propone una variación del sentido de la realidad al ser comparada con la tarea anterior, específicamente, desde una posición más cercana a una realidad mental social (Popper, 1978) concibiendo una pluralidad de realidades en la praxis educativa. La tarea si bien parte de un ente imaginario, la totalidad de los estudiantes han comprendido lo que significa un gigante, con ciertas diferencias para determinar la fisionomía que podrían decantar en multiplicidad de respuestas. Al respecto, cabe destacar que el desarrollo de la tarea no necesariamente permite unicidad de respuestas (en rigor, nunca), y por lo tanto, la valoración pertinente para la tarea es el procedimiento y el razonamiento empleado, que es en donde se ha evidenciado convergencia en las múltiples aplicaciones hechas, ya que en todas ellas, los estudiantes llegan al concepto de proporcionalidad en su desarrollo.

El giro interdisciplinar que posee la tarea es justamente a partir de la diversidad de respuestas que posee, ya que al reconocer distintas medidas, es posible orientar la clase hacia cómo ser capaz de identificar con una medida "universal" del gigante. A continuación, la clase se vuelca hacia el Vitruvio de Da Vinci (Figura 2b), en donde se les explica qué es el Vitruvio, nuevamente la virtud artística que posee, y las relaciones de interés que son posibles de caracterizar a partir de la razón áurea; se les invita a los estudiantes a investigar sobre las demás relaciones que se cumplen, para orientar con una pregunta: Asumiendo que se cumplen las proporcionalidades áureas en el cuerpo del gigante, ¿cuánto mediría el pie del gigante?

Imagina que un "hula-hula", además de jugar con él, puede ser el anillo de un gigante… ¿cuánto mediría el pie del gigante?

Figura 2a: Tarea de hula-hula.

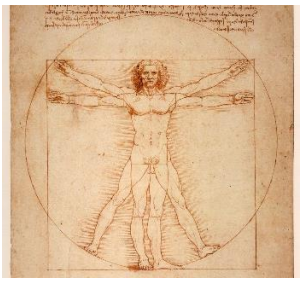


Figura 2b: Vitruvio de Da Vinci.

En síntesis, podemos observar que las tareas y proyectos vinculados hacia una educación matemática interdisciplinar propician significados del conocimiento matemático, en donde el contexto de la tarea define una situación y un propósito a la matemática que mediante ciertos procedimientos, permite otorgar y entregar una visión de la problemática presentada utilizando las matemáticas. En este sentido, la matemática queda al servicio de la realidad y la situación.

Un foco de interés para la presente investigación, es profundizar en cómo se producen los procesos de transposición del conocimiento matemático (Stillman, 2019) entre la práctica interdisciplinar del aula y la práctica interdisciplinar que no necesariamente posee una intención educativa, por ejemplo, prácticas que se vinculen a atender el problema del riego agrícola y su optimización en épocas de sequía, o la operacionalización del transporte en una ciudad o la predicción de fenómenos ecológicos. Estos problemas poseen una naturaleza orgánicamente interdisciplinar, en donde la matemática ofrece un razonamiento lógico e hipotético deductivo, que en distintos grupos y comunidades son valoradas para

integrarse en su práctica profesional. Concordando con Frejd y Bergsten (2018), tales prácticas son la *raison d'être* de la modelación matemática, y por lo tanto, de la educación matemática interdisciplinar.

LA PRÁCTICA INTERDISCIPLINAR EN CAMPOS PROFESIONALES

La principal fuente para comprender cómo sucede la práctica interdisciplinar, es justamente a partir de comprender cómo grupos y comunidades enfrentan problemas de tal naturaleza. Personas que trabajan en áreas como la ingeniería, ecología o agronomía y que se vinculan con modeladores matemáticos, son grupos de desarrollo científico y tecnológico que utilizan y/o construyen modelos desde necesidades presentes en sus respectivas áreas, siendo tales escenarios buenos representantes de lo que significa una práctica interdisciplinar. Continuando el lenguaje de la literatura, nombraré a tales personas como modeladores matemáticos profesionales, unos con especialidad en las matemáticas, y otros, especialistas en alguna disciplina de contexto.

El concepto de interdisciplina

Desde la postura de Klein (2013), consideraremos que:

> interdisciplinarity integrates information, data, methods, tools, concepts, or theories from two or more disciplines or bodies of knowledge to address a complex question, problem, topic, or theme. Work may occur individually or in teams, though in the latter case, communication is essential to successful collaboration (p.13).

Los equipos interdisciplinarios necesariamente requieren tener relaciones con ciertos elementos en común, cumpliéndose generalmente que poseen al menos un objeto de estudio o uso o una problemática en común. Concordando con Williams et al. (2016), este objeto en común brinda una colaboración recíproca entre cada una de las disciplinas, el que no necesariamente se enmarca con el mismo significado, sino que el diálogo y la colaboración permite dirigir la labor interdisciplinar hacia un producto, siendo muchas veces el motivo de tal actividad.

Entender de mejor manera cómo suceden las prácticas interdisciplinares en entornos profesionales, permitirá reconocer implicancias educativas que permiten el continuo rediseño de la matemática escolar, sobre todo cuando actualmente se fomenta en los currículos mundiales los entornos interdisciplinares. Por ello, una pregunta de interés es: ¿Cómo se construyen los modelos matemáticos en escenarios interdisciplinares de manera profesional?

METODOLOGÍA

Desde un enfoque cualitativo, los usos del conocimiento matemático en tales escenarios, serán revelados mediante el uso del Análisis Temático (Braun y Clarke, 2006), con el fin reconocer los significados que posee la práctica interdisciplinar en escenarios profesionales de modeladores matemáticos.

Los participantes fueron académicos de un doctorado chileno, acreditado, en donde funcionan dos seminarios interdisciplinares, llamados Seminario de Sistemas Ecológicos, y Seminario de Sistemas Agrónomos y Silvoagropecuarios, en el marco del segundo año del doctorado, en cada uno participan modeladores matemáticos, especialistas de la disciplina de contextos (ecólogos y biotecnólogos, respectivamente) y estudiantes del programa de doctorado.

Los seminarios son semanales durante cada semestre del segundo año, funcionando en paralelo y sin intersecciones de personas, recopilando la grabación de cada uno de los seminarios junto con documentación clave de las actividades, como son los programas clase a clase y el libro curricular. Las grabaciones han sido transcritas, y todos los datos han sido analizados con el software atlas.ti. Actualmente, los seminarios siguen activos durante el segundo año, y por lo tanto, la investigación se presenta en un estado de avance.

El diseño de análisis inicia según la descripción esquematizada en Braun y Clarke (2006) por seis fases: 1) familiarización con los datos, 2) generación de códigos iniciales, 3) búsqueda de temas, 4) revisión de temas, 5) definición y nombramiento de temas, y 6) producción del reporte. La primera consistió en la lectura de toda la información, para plantear un primer entendimiento de los conceptos claves de la medida en ambos escenarios. En la segunda fase se realizó una codificación descriptiva, la cual permitió reconocer ciertos códigos de naturaleza más general, generando así potenciales temas. En la fase 3 se realiza un refinamiento del proceso de codificación, a partir de la búsqueda de patrones asociados a los objetos teóricos que se pretenden caracterizar en la construcción matemática. La fase 4 reúne los análisis de todas las asociaciones de códigos entre dos investigadores en paralelo, para después consensuar códigos discordantes. En este sentido, la fase 4 contempla una revisión entre las fases 1 y 2 para generar una primera versión del mapa temático. La fase 5 es centrada principalmente en el refinamiento del mapa temático, en donde se han generado las definiciones de temas para que el mapa temático represente fielmente a los datos.

PRIMEROS RESULTADOS

El proceso de codificación fue orientado hacia la identificación de características que contribuyan a la construcción de modelos matemáticos. Desde una visión inductiva, la emergencia de características evidenciadas en los datos ha permitido establecer características que permitieron llevar a cabo la construcción y refinamiento de los modelos matemáticos que atienden las problemáticas de interés para cada seminario. En el transcurso del análisis, un foco de interés fue también determinar cuándo la práctica interdisciplinar falla, es decir, qué características obstaculizan el desarrollo de la práctica interdisciplinar en los escenarios descritos anteriormente, sirviendo como una fuente de información interesante para responder a la pregunta de investigación propuesta.

Los hallazgos encontrados en las sesiones de seminario, han sido contrastados con los documentos claves de la investigación, como son los programas de clase y el libro curricular, ambos documentos han resultado claves para la triangulación de la información identificada. A continuación, se destacan algunas características.

Reconocimiento de un problema

Ambos seminarios autodefinieron un primer objetivo: identificar un problema que sea de interés para la sociedad, de tal manera de que el/la estudiante elija qué problema desarrollará durante su proceso de formación doctoral. Esto significó que el problema debía ser de interés científico para la disciplina de contexto (ecología y biotecnología), implicando un gran esfuerzo en identificar un estado de arte para cada problema para validad la valoración científica, de tal manera, que la problemática de contexto (y su

solución) se transforme en una mejora en la calidad de vida de las personas. En ese sentido, la problemática es puramente interdisciplinar, ya que al tener claridad frente a la problemática, es posible dilucidar de que no es posible de poder ser atendidas con una disciplina por si sola, se requiere de ambos conocimientos para que pueda ser respondido el problema.

El querer entender – La intelección en el desarrollo interdisciplinar

La acción de todas las personas involucradas en cada seminario posee un horizonte: el querer y tener la intención de entender el problema y su desarrollo. Esta acción es reflejada en los recíprocos e interesantes interrogatorios entre los especialistas de la disciplina de contexto y los modeladores matemáticos; todos en conjunto con el/la estudiante, planteaban la intención de querer entender muy bien el problema y cómo era el raciocinio de la otra disciplina. De esta forma, la acción intelectiva es de relevancia para el desarrollo de la práctica interdisciplinar, reconociendo distinciones en las formas de desarrollo de cada una de ellas. A modo de ejemplo, cada especialista tuvo que aprender sobre cómo eran los procesos metodológicos de la otra disciplina, ya que en una de ellas son esencialmente empíricos, mientras que en la otra posee un carácter esencialmente hipotético-deductivo.

Relaciones entre disciplina

Las formas de orientación de la problemática sitúan inherentemente a las disciplinas, mostrando que las matemáticas quedan al servicio del problema. No existe un conocimiento matemático previo que pretenda ser utilizado antes de entender la problemática, luego de una profunda comprensión de ésta, es que se escoge a un área de las matemáticas para que sea atendida la situación, mediante la construcción de modelos matemáticos, ya sean discretos, híbridos o continuos. De esta manera, las relaciones entre las disciplinas invitan a pensar de que ninguna de ellas adquiere el protagonismo, sino que el problema es el protagonista de la práctica interdisciplinar, y cada una de las disciplinas aporta para la construcción de modelos matemáticos, la matemática desde una visión esperada, y la disciplina de contexto como un ente validador de las hipótesis que acarrea un modelo matemático

Prototipos de modelos

Existe una clara estrategia que por ahora, desconozco si es o no intencionada en cada uno de los seminarios. La forma de entender el problema y validar y ajustar las hipótesis vinculadas a los modelos matemáticos, es mediante la generación de modelos matemáticos muy simples para atender el problema, con el fin de analizar comportamientos y coherencias en cuanto a la predicción que entregan los modelos, y lo esperado según los estudios empíricos que son sustentados por la disciplina de contexto. Esta característica invita a generar prototipo de modelos, en donde se analizan cuestiones “secundarias” frente a la problemática principal, pero se transforman en la base de toma de decisiones para la construcción de modelos matemáticos.

DISCUSIÓN

Los primeros resultados evidenciados, muestran ciertas características que desde un enfoque educativo, contribuyen a cómo entender y construir tareas en dominios interdisciplinares.

A partir de los primeros resultados identificados, se puede interpretar de que las tareas interdisciplinares requieren una clara orientación en la problemática de interés, ya que usualmente, un problema interdisciplinar no tiene un camino predefinido para ser resuelto, por ello, es necesario que exista una clara pregunta que oriente al problema y al trabajo esperado por los estudiantes, información que es concordante con lo documentado en las investigaciones de Frejd y Bergsten (2016, 2018).

Esta pregunta, requiere que posea un alto sentido de entendimiento para el estudiante, ya que se espera de ellos, que tengan la intención de entender y resolver el problema (intelección). Esta situación ha sido ya documentada en Huincahue y Vilches (2019), validando aún más que esta característica es muy necesaria para una práctica efectiva práctica interdisciplinar. En este caso, la valoración primaria de la tarea no debería recaer en la matemática o en la disciplina de contexto, sino en la resolución misma del problema presentado, para si bien clarificar una problemática, o reconocer el impacto que éste puede tener en la gente. Esta situación es frecuentemente valorada en estudios mas cercanos a la realidad del estudiante, como por ejemplo la educación matemática financiera (Cabrera-Baquedano et al., en revisión).

Finalmente, se destaca la importancia de que exista una progresión en los resultados esperados, por ello, la pregunta que oriente las tareas o proyectos en interdisciplina, debería ser presentada en una forma progresiva en cuanto a las dificultades que se vayan presentando, con un claro y delineado horizonte. Tomar una decisión de esta naturaleza, permitirá ir validando los resultados que sostendrán la respuesta o explicación del problema, permitiendo tener mayor grado de confianza al reconocer avances en la tarea, y por lo tanto, reforzar la idea de intelección. Finalmente, destaco que este esfuerzo es insuficiente como para colaborar en la labor del profesor de matemáticas, ya que es necesario entregar insumos de tareas de educación interdisciplinaria, además de seguir entendiendo cómo se realizan, qué dificultades surgen, y cómo contribuir a la educación del profesor.

Esta investigación ha sido financiada por el proyecto Fondecyt de iniciación 2020: “Modelación, interdisciplina y la reciprocidad entre la matemática y el cotidiano – constructos teóricos y prácticos para el fortalecimiento de la formación del profesor”, folio 11201103.

Referencias

Arrieta, J. y Díaz, L. (2016). *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación – Matemática Educativa*. Gedisa.

Braun V, Clarke V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*, 77–101.

Borromeo-Ferri, R. (2019). Educación interdisciplinaria en la escuela – ejemplos y experiencias. (57), *UCMaule*, 25-37.

Cabrera-Baquedano, A., Huincahue, J. y Gaete-Peralta, C. (en revisión). Tránsitos al ajustar modelos matemáticos interdisciplinares: el caso de la alfabetización financiera.

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Coords.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación – Matemática Educativa* (pp. 59-88). Gedisa.

Edelson, D., Gordin, D. & Pea, R. (1999). Addressing the Challenges of Inquiry-Based Learning Through Technology and Curriculum Design. *The Journal of the Learning Sciences*, *8*(3-4), 391-450.

Frejd, P., Bergsten, C. (2016). Mathematical modelling as a professional task. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 11–35.

Frejd, P. y Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling: ideas for education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *50*(1), 117-127.

Huincahue, J y Vilches, K. (2019). Interdisciplinarity, mathematical modelling and Poincare's work: comparing conceptions about knowledge construction. *Journal of Physics: Conference series*, *1160*, 012009.

Huincahue, J., y Lemus, N. (2021). La realidad como fuente de conocimiento matemático – usos y comparaciones de modelos. En Soto, D., Silva-Crocci, H. (Coords.). Situaciones de modelación educativa (pp. 67-84). Ediciones USACH.

Klein, J. T. (2013). Communication and collaboration in interdisciplinary research. En M. O'Rourke, S. Crowley, S. D. Eigenbrode, y J. D. Wulfhorst (Eds.) *Enhancing Communication & Collaboration in Crossdisciplinary Research*. Sage.

Mendoza, J., y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *11*(1), 36-61.

Mineduc (2021). *Matemática*. Currículum Nacional. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Educacion-General/Matematica/

Noss, R. y Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*. Dordrecht.

Popper, K. R. (1978). Three worlds. En S. McMurrin (Ed.) *The Tanner Lectures on Human Values* (pp. 143-167). University of Utah.

Stillman, G. (2019). Preface. En G. A. Stillman y J.P. Brown (eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (v-vii), Springer.

Stillman, G. y Brown, J. (2019). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*. Springer.

Williams, J., Roth, W-M., Swanson, D., Doig, B., Groves, S., Omuvwie, M., Borromeo-Ferri, R., y Mousoulides, N. (2016). *Interdisciplinary Mathematics Education A State of the Art*. Springer.

Williams, J. y Roth, W-M. (2019). Theoretical Perspectives on Interdisciplinary Mathematics Education. En B. Doig, J. Williams, D. Swanson, R. Borromeo Ferri y P. Drake (Eds.). *Interdisciplinary Mathematics Education The State of the Art and Beyond* (pp. 13-34). Springer.

MATEMÁTICAS PARA TOD@S:
CÓMO CONSTRUIR DESDE UNA PERSPECTIVA DE GÉNERO UNA DISCIPLINA MÁS INCLUSIVA

Darinka Radovic S.

Dirección de Diversidad y Género, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas Universidad de Chile

Históricamente el área de las matemáticas y carreras con alta demanda matemática en las áreas de las Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM) han sido espacios donde las mujeres experimentan mayores dificultades para desarrollar identidades de inclusión y pertenencia, siendo menos propensas a elegir y persistir en ellas. El presente artículo propone un modelo general de agrupación de factores que influyen en estas dificultades, que construyen barreras de inclusión, y que deben explorarse en conjunto para desarrollar hipótesis comprensivas y políticas efectivas para construir unas matemáticas más inclusivas. Se explorarán relaciones entre niveles a través de 3 estudios de caso situados en establecimientos educacionales y en el contexto de educación superior en carreras de estas áreas, discutiendo cómo desarrollar políticas e intervenciones para hacer de las matemáticas un área más inclusiva, principalmente en función del género.

Educación matemática y género; Políticas de género; Medidas afirmativas; Inclusión; Género y STEM

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

La historia en la investigación en diversidad y educación matemática ha estado marcada por estudios que han documentado cómo la práctica y política en esta área tiende a marginalizar estudiantes en razón de su raza, étnia, género, clase o pertenencia a grupos minoritarios (Gorgorió & Planas, 2001; Healy & Powell, 2012; Radovic et al., 2017; Valoyes-Chávez, 2017). La relevancia del área en la construcción de identidades académicas y en el desarrollo de carreras ha llevado a algunos investigadores a sugerir que la disciplina actúa como un "filtro crítico", controlando el acceso a muchas áreas de estudio avanzado que están relacionadas con poder y estatus en la sociedad (Martin et al., 2010; Sells, 1978; Stinson, 2004). En particular, respecto de diversidad de género estudios internacionales recientes siguen documentando la existencia de diferencias de género en rendimiento y habilidades matemáticas particularmente en algunos países (OECD, 2016). Además, ha existido una persistente baja participación en carreras de alta demanda matemática después de la educación obligatoria, situación observada en distintos países del mundo (UNESCO, 2019), Latinoamérica (López-Bassols et al., 2018) y en Chile (Conicyt, 2017). En Chile en particular aún cuando las diferencias de género en rendimiento matemático aumentan a lo largo del ciclo escolar (Radovic, 2018), estás han mostrado importante disminución en los últimos años. Por ejemplo, en la prueba SIMCE 2018 no se encontraron diferencias en ninguno de los niveles evaluados y se ha observado una disminución de las diferencias en la prueba internacional Pisa (OCDE, 2016). Pese a esto, persisten fuertes diferencias en actitudes, intereses y elecciones vocacionales (Bordón, Canals &

Mizala, 2020; Fernandez, Briceño & Mora 2020). Por ejemplo, un estudio resiente estima que los hombres tienen el doble de probabilidades de elegir carreras relacionadas con la ingeniería y tres veces la probabilidad de elegir carreras tecnológicas en comparación con mujeres de similares características (Bordón, Canals & Mizala, 2020).

Las desigualdades de género en la elección de carreras son agudas y persistentes, estando sostenidas en la interacción de factores a nivel micro (individual), institucional y macro (social-cultural) (Boe, 2011; Blickenstaff, 2005; Roger & Duffield, 2000; Wang & Degol, 2013; Yasilitas et al., 2003). En el siguiente artículo y en la conferencia especial asociada presentaré resultados de distintos estudios que dan cuenta de cómo las matemáticas han sido y siguen siendo construidas como una disciplina donde las mujeres (y algunas diversidades/disidencias de género) experimentan mayores dificultades para incluirse y ser incluidas y, en definitiva, desarrollar identidades de pertenencia que les permitan desarrollarse como personas e influir en el desarrollo del área. La evidencia puede organizarse en un modelo multinivel que al menos comprende los siguientes niveles (ver figura 1).

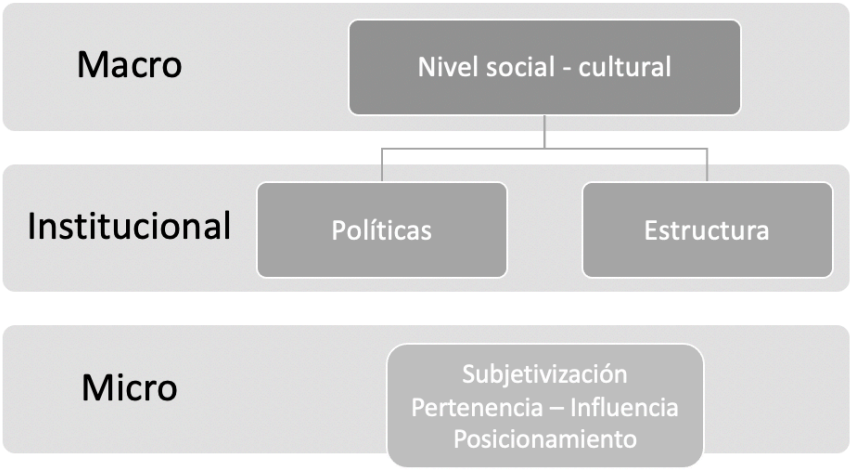


Figura 1: Factores que construyen inclusión en disciplinas del conocimiento en el contexto de la educación.

El siguiente artículo y la ponencia que lo acompaña explorará tres estudios que dan cuenta de la interacción de factores en distintos niveles, explorando cómo inequidades de género en educación matemática y STEM pueden ser producidas, mantenidas o desafiadas.

METODOLOGÍAS

Para dar cuenta de distintos factores que afectan la construcción de disciplinas y los resultados en las sensaciones de inclusión y pertenencia de personas se requiere de enfoques que consideren análisis críticos de información en los distintos niveles mencionados y la interacción entre ellos. Para esto las metodologías más apropiadas son metodologías mixtas que, frente a un paradigma pragmático de métodos que aporten a buscar respuestas a preguntas complejas, permitan analizar en conjunto datos cuantitativos y cualitativos a niveles más sociales y niveles personales. En particular el estudio de caso resulta ser una metodología particularmente adecuada para acceder a fenómenos en sus contextos

naturales, especialmente cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son evidentes (Yin, 2003), pero existen unidades de estudio claramente delimitadas (Miles & Hubberman, 1994; Stake, 2006). Basaré la presentación y la discusión en 3 estudios de caso (ver tabla).

Estudio de Caso	**Contexto**	**Recolección de Información**	**Duración**
Evaluación de intervención en establecimiento educacional pre-básica a IV medio	Establecimiento decide implementar clases de matemáticas segregadas por género de 7º a II medio y por habilidad en III y IV medio. Evaluación de la implementación del proyecto levantada en su segundo año de funcionamiento.	- Acceso a datos de rendimiento y participación en cursos electivos. - Encuestas estudiantes. - Entrevistas grupales segregadas con estudiantes. - Entrevistas individuales con profesore/as. - Discusión sobre proyecto con equipo directivo. - Observaciones en sala.	6 meses
Elección y experiencia de estudiantes en distintas carreras de pregrado en áreas STEM	4 carreras de pregrado con distintos niveles de representación de mujeres y distintas áreas de STEM.	-Entrevistas grupales segregadas por carrera y género con estudiantes hombres y mujeres. - Entrevistas individuales con académico/as directivos de las carreras. - Catastro de iniciativas por la igualdad de género.	2 años
Evaluación de medida afirmativa para el ingreso de mujeres en carreras STEM	Facultad de universidad que imparte carreras STEM implementa medida afirmativa para el ingreso a mujeres a la carrera. Evaluación de avance en carrera y experiencias de inclusión se realiza 7 años posterior a la primera implementación.	- Registros universitarios de rendimiento académico. Construcción de indicadores de rendimiento, avance curricular, deserción y finalización. - Entrevistas grupales con estudiantes ingresadas por el programa en distintas cohortes.	6 meses

RESULTADOS

Nivel Social – Cultural y Políticas Institucionales.

Este punto se refiere a los discursos sociales y culturales presentes en un momento y lugar y su influencia en las políticas institucionales. Para explorar esta relación se requieren metodologías que conecten el análisis de políticas, discursos compartidos predominantes que construyen lo que significan las disciplinas y los temas de inclusión, discriminación y participación de grupos minoritarios en éstas principalmente en medios de comunicación de masas y el diseño de políticas locales. Una línea de investigación que se ha desarrollado en los últimos 30 años que aporta a este nivel de reflexión son que han explorado distintas construcciones de las matemáticas (y las ciencias y tecnologías) en distintos aparatos culturales, tales como películas (Smith et al., 2014; Steinke, 2005; Steinke, 2017), series de televisión (Warren et al., 2016; Weitekamp, 2015) y campañas e intervenciones (Radovic, en prensa). Estudios en películas y series de televisión han mostrado que las mujeres están consistentemente subrepresentadas en roles de personas dedicadas a la ciencia, tecnología y matemáticas (Weingart et al., 2003; Elena, 1993; Steinke, 2005), estimándose que en películas existe un ratio de 7.6 hombres por cada mujer en roles relacionados con disciplinas STEM (Smith et al., 2014). Además de la baja presencia, estas películas muestran a las mujeres en roles que reproducen roles de género. Por ejemplo, Flicker (2003) propone la existencia de seis estereotipos de mujeres en STEM, los que incluyen la mujer sólo interesada en el trabajo, la experta naivë y la solitaria con mentores hombres en búsqueda de constante reconocimiento.

En campañas e iniciativas Chilenas como las políticas globales y discursos que atienden a las inequidades de género en STEM se ha observado cómo éstas también construyen una visión dualista del género y de cómo este actúa en nuestra sociedad al enfatizar diferencias entre hombres y mujeres (ej. Buttler, 1999). Por ejemplo, el 2012 la Comisión Europea lanzó la campaña “Science is a girl thing” (La ciencia es cosa de niñas) con un video que mostraba un grupo de mujeres bailando y un hombre con una bata blanca mirando por un microscopio (ver figura 1). Considerando este tremendo antecedente de cómo campañas y políticas pueden producir efectos paradójicos para cuestionar inequidades de género, en 2019 realicé un estudio que explora cómo en un establecimiento educacional con un interés explícito de desafiar estereotipos e inequidades de género en matemáticas se construye una intervención que potencialmente genera también este efecto paradójico (ver Radovic et al., en prensa). Este estudio muestra cómo al proponer enseñanza segregada por género en clases de matemáticas de ciclo intermedio y comienzos de la enseñanza media se muestran conflictos que emergen en la aplicación de la intervención debido a la intensa invisibilización y visibilización del género como categoría para entender las construcciones locales de habilidades para aprender y enseñar matemáticas y para entender actitudes generales y disposiciones de los estudiantes. Este estudio da cuenta de cómo el nivel social cultural y los estereotipos y discursos dominantes de género se expresan en el desarrollo de políticas y medidas institucionales a nivel local.

Nivel Institucional Estructural y Pertenencia - Influencia.

El nivel institucional estructural se refiere a cómo está organizado el sistema o la institución educativa. Numerosos estudios han documentado cómo la organización del sistema educacional, agrupación por habilidades, segregación por género e incluso diseño del currículum, afecta el rendimiento y experiencia de los y las estudiantes (específicamente sobre segregación de género: Belcher et al., 2006; Bigler & Liben, 2006; Cherney & Campbell, 2011; Pahlke et al., 2014). Un aspecto relevante al discutir inequidades e inclusión de género en matemáticas es, por supuesto, la representación de mujeres dentro de las instituciones. Por ejemplo, tempranamente Kanter (1977a; 1977b) exploró cómo la representación de cualquier grupo social es importante para entender la vida social y las interacciones entre personas, específicamente en la industria. Ella encontró que en grupos donde las mujeres se encuentran en minoría, ellas son percibidas como representantes de su grupo social ("tokens"), teniendo que enfrentar alta visibilidad, exageración de las diferencias o polarización y el uso de estereotipos como distorsionadas generalizaciones sobre el "tipo de persona" que son. Estos fenómenos, Kanter teoriza, afectan la posición de las mujeres y su potencial influencia en la cultura de la institución.

Observando este antecedente, durante 2019 y 2020 lideré un estudio en distintas carreras de pregrado de distintas áreas STEM donde las mujeres muestran distintos niveles de representación, explorando en particular su experiencia de inclusión social y académica en estas "culturas académicas". El estudio muestra una clara evidencia de que la formación de grupo y el desarrollo de identidades de inclusión están ligadas tanto con la presencia numérica absoluta como con la presencia relativa. Por ejemplo, en una carrera ligada a la Química y Biotecnología, donde las mujeres alcanzan una representación relativa cercana al 50%, las mujeres parecen haber dejado discursos de género al construir sus experiencias en la carrera. En contraste, en carreras de Ingeniería Mecánica e Ingeniería Matemática la baja representatividad visibiliza la presencia de mujeres en distintos espacios, fortaleciendo la imagen de grupo específico y, por tanto, la formación de una identidad particular. Pese a esta baja representatividad, es la existencia de un número importante de mujeres (debido al tamaño del departamento), el que permite que éstas se asocien, desarrollen lenguaje común, iniciativas grupales y compartan su experiencia dentro del departamento. Cuando no existe una suficiente cantidad de mujeres (cuando usualmente son la única mujer en la sala), no existe una masa crítica absoluta para generar discursos comunes, lo que dificulta el desarrollo de una identidad común, la construcción de asociación y el impulso de iniciativas comunes.

Políticas Institucionales y Posicionamiento.

Un último aspecto que voy a mencionar respecto de la relación de factores que afectan la inclusión social y académica de mujeres en Matemáticas y en áreas STEM es la relación de políticas institucionales con el posicionamiento de personas en las instituciones. Como ya mencioné, el diseño de políticas está influido por el contexto global (el nivel social-cultural) en el que éstas son construidas y pueden tener influencia en las sensaciones de pertenencia y subjetivización personas. Ahora si hablamos de políticas generales que se han impulsado para promover la igualdad de género es posible categorizarlas en dos aproximaciones: las políticas orientadas a la incorporación de la perspectiva de género en el quehacer de las instituciones (transversalización de género) y las medidas o acciones afirmativas (Klein, 2015). Las medidas afirmativas son definidas como medidas transitorias que tienen como objetivo acortar la brecha

entre los sexos llevando a cabo acciones que favorezcan a las mujeres como una forma de compensar la discriminación que han padecido en el pasado y que aún padecen en la actualidad (Comité de la Convención sobre la Eliminación de Todas las Formas de Discriminación contra la Mujer, CEDAW).

Respecto de medidas afirmativas en carreras STEM, recientemente muchas universidades del país han implementado cupos/ingresos especiales para mujeres. En la Universidad de Chile estos cupos fueron implementados hace ya más de 7 años y durante 2020 realizamos un proceso de evaluación de sus resultados en dos ámbitos principales: rendimiento y avance académico e inclusión social y académica de las estudiantes ingresadas en distintas cohortes. Los resultados muestran un muy bajo impacto de la entrada por el programa en rendimiento y avance, pero un fuerte impacto de la pertenencia al programa en la experiencia estudiantil, principalmente al inicio de la carrera. La alta visibilidad del programa genera sensaciones de bajas capacidades y falta de mérito. Recomendaciones para el diseño e implementación de este tipo de medidas pueden ser incorporadas en las nuevas instituciones (más de 10) que han implementado políticas similares más recientemente.

CONCLUSIONES

Una primera conclusión principal es que las ideas/discursos compartidas sobre las ciencias y las matemáticas existen a un nivel social – cultural, están en constante negociación y cambio, tienen influencia en las instituciones y las personas, y las personas varían en cuánto adhieren a estas ideas. Esto quiere decir que, si bien la fuerza de mantención de los discursos es grande, éstos pueden ser manipulados y motivar el cambio a nivel de políticas y prácticas locales.

Una segunda conclusión se relaciona con la reciente movilización de recursos y compromiso institucional y activista por el avance en la Igualdad de género en instituciones de educación superior y en el sistema educacional en general. Al menos en el país este movimiento a la acción es reciente y puede ser relacionado fuertemente con la acumulación de momentum y el activismo político que movimientos feministas han tenido en los últimos 5 años. La capacidad de las instituciones de atender a estas demandas y de implicar conocimiento técnico en el diseño y evaluación de soluciones, permitirá avanzar hacia una disminución de brechas y una mayor igualdad.

Por último, el diseño de un modelo integrativo permite a investigadores y desarrolladores de políticas de explorar potenciales factores y relaciones entre ellos, de manera de avanzar hacia mejor investigación y políticas más efectivas. Con miradas globales e integrales, basadas en fuerte conocimiento técnico y teórico de perspectivas de género, de políticas de género y de los contextos particulares en los que éstas deben ser impulsadas permitirá avanzar hacia una mayor Igualdad de Género en educación matemática y potencialmente en la sociedad en general.

Agradecimientos

Se agradece el apoyo financiero de los proyectos Fondecyt Postdoctorado no 3180291, Centro de Modelamiento Matemático (CMM), ACE210010 y FB210005, BASAL fondos para centros de excelencia de ANID-Chile.

Referencias

Belcher, C., Frey, A., & Yankeelov, P. (2006). The effects of single-sex classrooms on classroom environment, self-esteem, and standardized test scores. *School Social Work Journal*, *31*(1), 61-75.

Bigler, R. S., & Liben, L. S. (2006). A developmental intergroup theory of social stereotypes and prejudice. En Robert V. Kail (Ed). *Advances in Child Development and Behavior*, Volume 34, Elsevier. (pp 39-89).

Blickenstaff, Clark J. (2005). "Women and science careers: leaky pipeline or gender filter?", *Gender and education*, vol. 17, núm4, pp. 369-386. DOI: 10.1080/09540250500145072

Bøe, M. V., Henriksen, E. K., Lyons, T., & Schreiner, C. (2011). Participation in science and technology: young people's achievement-related choices in late-modern societies. *Studies in Science Education*, *47*(1), 37-72.

Bordón, P., Canals, C., & Mizala, A. (2020). The gender gap in college major choice in Chile. *Economics of Education Review*, 77(102011), 1-27.

Butler, J. (1999). *Gender trouble: Feminism and the subversion of identity*. Routledge.

Cherney, I. D., & Campbell, K. L. (2011). A league of their own: Do single-sex schools increase girls' participation in the physical sciences?. *Sex roles*, *65*(9-10), 712-724.

Conicyt (2017). *Diagnostico-Equidad-de-Genero-en-CTI-MESA-CONICYT*. https://www.conicyt.cl/wp-content/uploads/2015/03/Diagnostico-Equidad-de-Genero-en-CTI-MESA-CONICYT_2017.pdf

Fernandez, M.C., Briceño, C. & Mora, G. (2020). *Segregación de género en elección de estudios superiores*, Proyecto Fondecyt N° 1191585.

Flicker, E. (2003). Between brains and breasts-women scientists in fiction film: on the marginalization and sexualization of scientific competence. *Public Underst. Sci.* 12, 307–318. doi: 10.1177/0963662503123009

Gorgorió, N., & Planas, N. (2001). Teaching mathematics in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 47*(1), 7-33.

Healy, L., & Powell, A. B. (2012). Understanding and overcoming "disadvantage" in learning mathematics. In *Third international handbook of mathematics education* (pp. 69–100). New York, NY: Springer.

Kanter, R.M. (1977). *Men and women of the corporation.* Basic Books, New York.

Kanter, R. M. (1977). Some effects of proportions on group life. In *The gender gap in psychotherapy* (pp.3-78). Springer, Boston, MA.

Klein, U. (2015). Gender equality and diversity politics in higher education: Conflicts, challenges and requirements for collaboration. Women's Studies International Forum, 54, 147-156).

López-Bassols, V., Grazzi, M., Guillard, C., & Salazar, M. (2018). *Las brechas de género en ciencia, tecnología e innovación en América Latina y el Caribe. Resultados de una recolección piloto y propuesta metodológica para la medición*. Banco Interamericano de Desarrollo.

Martin, D.B., Gholson, M., & Leonard, J. (2010). Mathematics as gatekeeper: Power and privilege in the production of knowledge. *Journal of Urban Mathematics Education, 3*(2), 12-24.

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). Qualitative Data Analysis. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

OECD (2016), PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education, PISA, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264266490-en.

Pahlke, E., Hyde, J. S., & Allison, C. M. (2014). The effects of single-sex compared with coeducational schooling on students' performance and attitudes: A meta-analysis. *Psychological bulletin*, *140*(4), 1042-1072.

Radovic, D. (2018) Diferencias de Género en Rendimiento Matemático en Chile: El Efecto del Nivel Socioeconómico y el Establecimiento Educacional en el Bajo Rendimiento de las Niñas. *Revista Colombiana de Educación, 74*, 221-242.

Radovic, D. (en prensa). Traduciendo discursos sobre equidad de género en intervenciones escolares: Conflictos entre la visibilidad/invisibilidad del género y la construcción de habilidades matemáticas. *Revista Colombiana de Educación.*

Radovic, D., Black, L., Salas, C., & Williams, J. (2017). Being a girl mathematician: Diversity of positive mathematical identities in a secondary classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 48(4)*, 434-464.

Roger, A., & Duffield, J. (2000). Factors underlying persistent gendered option choices in school science and technology in Scotland. *Gender and education*, *12*(3), 367-383.

Sells, L. W. (1978). The forum: Mathematics — a critical filter. *The Science Teacher*, *45*(2), 28–29.

Smith, S. L., Choueiti, M., and Pieper, K. (2014). *Gender Bias without Borders: An Investigation of Female Characters in Popular Films Across 11 Countries*. Los Angeles, CA: University of Southern California.

Stake, R. E. (2006). Multiple case study analysis. Guilford Press.

Steinke, J. (2005). Cultural representations of gender and science: portrayals of female scientists and engineers in popular films. *Sci. Commun.* 27, 27–63. doi: 10.1177/1075547005278610

Steinke, J. (2017). Adolescent girls' STEM identity formation and media images of STEM professionals: Considering the influence of contextual cues. *Frontiers in psychology*, *8*, 716.

Stinson, D. W. (2004). Mathematics as "gate-keeper" (?): Three theoretical perspectives that aim toward empowering all children with a key to the gate. *The Mathematics Educator*, *14*(1), 8–18.

Unesco (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization) (2019). *Descifrar el código: la educación de las niñas y las mujeres en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM).* Unesco. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000366649

Valoyes-Chávez, L. (2017). Inequidades raciales y educación matemática. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 129-152.

Wang, M. T., & Degol, J. (2013). Motivational pathways to STEM career choices: Using expectancy–value perspective to understand individual and gender differences in STEM fields. *Developmental Review*, *33*(4), 304-340.

Warren, S., Goodman, M., Horton, R., and Bynum, N. (2016). Stemming the tide: the presentation of women scientists in CSI. *Int. J. Gen. Sci. Technol.* 8, 360–381.

Weitekamp, M. A. (2015). 'We're physicists': gender, genre and the image of scientists in The Big Bang Theory. *J. Pop. Telev.* 3, 75–92. doi: 10.1386/jptv.3. 1.75_1

Yazilitas, D., Svensson, J., de Vries, G., & Saharso, S. (2013). Gendered study choice: A literature review. A review of theory and research into the unequal representation of male and female students in mathematics, science, and technology. *Educational research and evaluation*, *19*(6), 525-545.

TALLERES

(DES)HACIENDO MATEMÁTICA

L. Carrasco[2], A. L. Díaz[1], L. Espinoza[2], E. Gómez[1], C. Negrette[1], G. Rodriguez[2], G. Soto[1]

[1]Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina

[2]Supervisión Regional VI, Ministerio de Educación del Chubut, Argentina

Resumen del taller

Los estudiantes se enfrentan a cambios sociales, institucionales y académicos a lo largo de su trayectoria dentro del sistema educativo: cambios de ciclos, niveles educativos, entre otros, (Gueudet et al, 2016). Estos cambios suelen corresponderse con diferencias en las prácticas docentes que experimentan, aún cuando existe continuidad en los contenidos matemáticos abordados. Desde el año 2017, el dispositivo *(Des)-Haciendo Matemática* es un espacio en el cual docentes en ejercicio de diferentes niveles educativos reflexionan colaborativamente respecto a los problemas inherentes a las transiciones anteriormente mencionadas (Soto et al., 2020a, 2020b).

La estructura de comunidad de aprendizaje profesional (PLC, por sus siglas en inglés, Goos, 2020) de nuestro dispositivo y la diversidad de identidades profesionales que conviven en ella, ha puesto a la *actividad matemática,* a través de la resolución de problemas, como el lenguaje natural de comunicación. De esta manera, la matemática se transforma en un recurso para entender y consolidar la colaboración (Brodie, 2020), permitiendo visibilizar tensiones existentes entre la *matemática escolar (ME), la matemática académica (MA)* y la *matemática del cotidiano (MC)* (Moreira y David, 2013). La ME es entendida como el conjunto de prácticas y saberes asociados al proceso de educación escolar en matemática, incluyendo conceptos, contenidos y saberes puestos en juego por los docentes; la MA es entendida como el conjunto de prácticas y saberes asociados a la construcción de un cuerpo científico de conocimientos, producido por matemáticos y reconocido como tal; y la MC es entendida como el conjunto de ideas, saberes y prácticas utilizado en el cotidiano. Es importante resaltar que la MC ha irrumpido en las prácticas docentes en el contexto de enseñanza remota impuesta por la pandemia del COVID-19 (Espinoza, 2020). En este sentido, nuestro dispositivo se transformó en un espacio de reflexión colectivo virtual que ha seguido aportando a la reconfiguración de los espacios de enseñanza y, en particular, al desarrollo profesional docente (Drijvers, 2020). Así, la ME, la MA y la MC conforman una interfase (o frontera según Akkerman y Bakker (2011)) de prácticas matemáticas diferenciadas que naturalmente provocan discontinuidades en la acción e interacción que generan rupturas en las trayectorias escolares de los estudiantes. El proceso de reestablecer la acción o interacción en esta frontera, lo que Akkerman y Bakker (2011) llaman cruzar la frontera, ponen a la actividad matemática como objeto de frontera para salvar estas discontinuidades y se transforman en un recurso de aprendizaje profesional muy potente (Carrasco et al, 2021, Díaz et al, 2021). En este taller presentaremos algunos problemas relacionados con los diferentes sentidos de las fracciones que permiten visibilizar tensiones entre la ME, la MA y la MC, que inciden en las prácticas docentes. A través de la reflexión colaborativa sobre la actividad matemática puesta en juego en la resolución de los problemas, vamos a repensar modos de salvar las discontinuidades en la práctica docente que inciden en las trayectorias escolares.

Palabras clave

Matemática Escolar, Prácticas Matemáticas, Fronteras, Transiciones, Desarrollo Profesional

Objetivo(s)

Los objetivos de este taller son:

- Identificar relaciones y/o tensiones entre la matemática escolar, la matemática académica y la matemática del cotidiano que emergen a partir de la resolución de actividades asociadas a las fracciones.
- Reflexionar respecto a cómo estas relaciones/tensiones inciden en sus prácticas áulicas.

Metodología de trabajo

Este taller está destinado a profesores del segundo ciclo de la EGB (quinto, sexto, séptimo y octavo año).

El presente taller consiste en dos fases:

- Primera fase: *resolución colaborativa de problemas en pequeños grupos*. Los mismos serán monitoreados por docentes tutores. En esta fase nos centraremos en las siguientes actividades:
    - Por qué ⅔ es equivalente a 4/6?
    - Representar gráficamente las siguientes expresiones:

$$3 \times 4/9 \; ; \; 4/9 \times 3$$

- Segunda fase: *análisis de las distintas prácticas matemáticas emergentes en la resolución de las actividades propuestas*. La primera actividad apunta a visibilizar dos sentidos diferentes de las fracciones: cociente exacto entre dos números enteros y partición de la unidad. El primero de los sentidos forma parte de la MC mientras que el segundo aparece en la ME. Ambos conviven en el aula y forman parte de la construcción de número racional (objeto perteneciente a la MA).
- La segunda actividad persigue visibilizar el modelo multiplicativo de sumas repetidas (MC) y a las fracciones como operador (ME). La representación gráfica es la que permite explicitar su equivalencia en el sentido de la MA, esto es la expresión a/b puede representar la relación parte/todo, cociente exacto entre números enteros y actuar como operador. Estas características se identificarán como objetos de frontera que nos permitirán reflexionar colaborativamente acerca de la naturaleza del conocimiento matemático que circula en el aula y sobre el diseño de actividades matemáticas que promuevan dar continuidad a las prácticas matemáticas utilizadas por estudiantes y docentes.

Planificación de tiempos

El taller se llevará a cabo por medio de la plataforma Zoom o Meet y tendrá la siguiente estructura:

- Presentación de la propuesta y actividades a desarrollar (10 minutos)
- Resolución en grupos pequeños de las actividades (30 minutos)
- Break (10 minutos)
- Socialización de las respuestas y reflexión colectiva sobre las prácticas matemáticas puestas en juego (40 minutos)

Referencias

Akkerman, S.F. & Bakker, A. (2011) Boundary crossing and boundary objects. *Review of Educational Research*, 81(2), p. 132-169.

Brodie, K. (2020) Resources For and From Collaboration: A Conceptual Framework. En H. Borko & D. Potari (Eds.) *The twenty fifth ICMI Study. Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups.* Lisboa, Portugal, p. 37-48.

Carrasco, L., Díaz, L., Espinoza, L. Gómez, E., Negrette, C., Rodriguez, G. & Soto, G. (2021). Caracterización de las prácticas matemáticas en la transición de la escuela primaria a la escuela secundaria. *Reunión de Educación Matemática*. https://youtu.be/dwkBjJ3CDyY

David, M.M., Moreira, P., & Tomaz, V. (2013) Matemática escolar, matemática académica y matemática do cotidiano: uma teia de relações sob investigação. *Acta Scientiae,* 15(1), 42-60.

Drijvers, P. (2020) Math@distance: distance mathematics teaching during COVID-19 lockdown. *U.S. National Commision on Mathematics Instruction*. https://www.nationalacademies.org/event/07-09-2020/math-distance-distance-mathematics-teaching-during-covid-19-lockdown.

Díaz, L., Gómez, E., Negrette, C., & Soto, G. (2021). Oportunidades de aprendizaje colaborativo docente en la transición de la Escuela Primaria a la Secundaria *Reunión de Educación Matemática*. https://youtu.be/9svO5GdrwDw

Espinoza, Laura (2020) Intercambio de experiencias en la excepcionalidad. *Conversatorio REM*. https://www.youtube.com/watch?v=7HuFKvEGac0&t=13s&ab_channel=virtUMA2020

Goos, M. (2020) Communities of Practice in Mathematics Teacher Education. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Second Edition, p. 107-110. Springer Nature. Suiza.

Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A.A., Nam Kwon, O. & Verschaffel, L. (2016). Transitions in Mathematics Education. En G. Kaizer (Ed.) *ICME-13 Topical Surveys*. Suiza: Springer Nature: Suiza.

Soto, G., Negrette, C., Díaz, A.L. & Gómez, E. (2020a). I Don't Know! What Do You Think? Why? Collaborative Work Between Primary and Secondary School Teachers. En H. Borko y D. Potari (Eds.) *The Twenty-Fifth ICMI Study. Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups.* (pp. 420-426). Atenas: National and Kapodistrian University of Athens.

Soto, G., Negrette, C., Díaz, A.L. & Gómez, E. (2020b). Una experiencia de trabajo colaborativo entre docentes de educación primaria y secundaria. *II Congreso Virtual Iberoamericano sobre formación de profesores.* Universidade Federal do Rio Grande do Norte (Brasil). https://youtu.be/PqHTl8KQBYw

EL RECURSO PEDAGÓGICO-MATEMÁTICO QUE OFRECE LA SERIE ANIMADA "RENATA Y LOS PROBLEMAS" PARA PROMOVER LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LAS AULAS DE PRIMER CICLO BÁSICO

Paula González Isamit, Victoria Arriagada Jofré.

Centro de Investigación Avanzada en Educación.

Universidad de Chile.

Resumen del taller

"Renata y las matemáticas" es una serie animada cuyo propósito es acercar a niños y niñas con las matemáticas. Hace unos años su creadora quiso profundizar en el contenido pedagógico-matemático de Renata, acercándose en 2018 a la iniciativa *Activando la Resolución de Problemas en las Aulas* (ARPA). Al conocer la metodología en torno a la resolución de problemas (Felmer y Perdomo-Díaz, 2017), propusieron una cooperación dando origen a la creación de los primeros capítulos de la serie "Renata y los problemas". Hasta la fecha, la serie tiene dos temporadas de problemas matemáticos y su tercera temporada estrenada el 2021 incorporó la resolución de problemas en otras áreas. El desafío de esta serie es generar más temporadas para que niñas y niños a través de la televisión o Canal de YouTube se motiven con nuevos problemas y que cada día más docentes utilicen el material para llegar a distintas comunidades escolares.

Este taller tiene como objetivo resolver problemas utilizando el recurso pedagógico-matemático de dos capítulos de "Renata y los problemas" y está orientado para profesores en ejercicio y en formación de educación básica. El taller comienza con antecedentes históricos de la alianza Renata y las matemáticas con la iniciativa ARPA. Consta de dos momentos claves: trabajo en grupo y plenaria.

Al inicio del primer bloque, los participantes serán agrupados al azar entre 3-4 integrantes. Se les entregará el link del problema adaptado a la serie en formato escrito para que lo resuelvan de forma colaborativa, es decir, donde todos estén de acuerdo con la solución y puedan explicar el procedimiento de resolución. Durante el tiempo de resolución en grupos, las monitoras/organizadoras visitarán cada uno de ellos para preguntar qué han discutido sobre el problema, hacer preguntas y entregar otros desafíos relacionados con el problema en caso de presentar dificultades o de haberlo resuelto con rapidez. Posterior al trabajo en grupo, se realizará una plenaria o instancia de discusión de las ideas que se hayan desarrollado, enfatizando en las distintas estrategias utilizadas por los participantes y en las discusiones generadas en los pequeños grupos.

Durante el segundo bloque se trabajará un segundo problema, sin embargo, esta vez se les mostrará a todos los participantes el video del capítulo que contiene el problema, el cual tendrán que resolver en los grupos de participantes formados al inicio. Además, se les entregará el link con el problema por escrito para que puedan complementar el insumo a través de la lectura. El monitoreo tendrá las mismas características que en el primer problema.

Finalmente, se realizará una discusión plenaria con todos los participantes, donde el foco estará en las experiencias que vivieron al resolver los problemas utilizando los distintos formatos. La

conversación relevará la importancia de la motivación del estudiante al resolver problemas con capítulos de la serie animada "Renata y los problemas", desde la perspectiva de su propia experiencia de resolución, por lo que se espera

Palabras clave

Resolución de problemas, habilidades, desarrollo profesional, recurso pedagógico.

Objetivo(s)

- Resolver problemas utilizando los recursos de la serie animada "Renata y los problemas".
- Conocer el recurso pedagógico-matemático que ofrecen los capítulos de la serie animada "Renata y los problemas".
- Reflexionar sobre el uso de los capítulos de la serie en una actividad matemática para sus aulas escolares.

Metodología de trabajo

Bienvenida/inicio

Se iniciará el taller con un video de bienvenida de "Piti" que es un personaje de la serie Renata y los problemas, quien indica las normas generales y de transmisión para realizar el taller.

https://drive.google.com/file/d/1DiYcIHzMTrGASqnKmQCd3Z-Twyx_Xi56/view?usp=sharing

Se presentarán las organizadoras/monitoras, una reseña histórica de Renata y los problemas y su unión con la Iniciativa ARPA. Luego, se presentará el programa del taller.

Resolución de problemas

Problema 1: Encuestas (en formato escrito)

https://drive.google.com/file/d/1hemAdsSmueiCnOyWATRM0h1jSVFW_xWQ/view?usp=sharing

Se entregarán las instrucciones para resolver el problema en grupos de 3-4 participantes de manera colaborativa y aleatoria.

Se entregará el problema, que corresponde a uno de los capítulos de Renata de la temporada 2 del eje datos y azar.

Si el grupo presenta dificultades en la resolución del problema, las organizadoras durante el monitoreo les pedirán que resuelvan una actividad adaptada del problema con menor grado de dificultad. Si lo resuelven rápido, se les entregará una actividad adaptada con mayor grado de dificultad.

El problema se cerrará con una plenaria de reflexión donde se discutirá sobre las estrategias de resolución del problema.

Problema 2: La fábula (en formato video y escrito)

https://drive.google.com/file/d/1RHZKCfwdPDBvHndbIvNPznxbh7DyqMrq/view?usp=sharing

https://drive.google.com/file/d/1TPt1NW86Id-9KurH75HPg6msp0Gqz-6G/view?usp=sharing

Se proyectará con el grupo completo el link del capítulo en video del segundo problema, además del problema por escrito, para ser resuelto en los mismos grupos formados del primer bloque.

El monitoreo tendrá el mismo objetivo que en el problema 1 y habrá una plenaria para reflexionar sobre el aporte en la motivación del estudiante al presentar el problema mediante una serie.

Planificación de tiempos

Bloque 1

Tiempo	Actividad	Materiales
10 minutos	Inicio - Bienvenida Presentación del taller Programa Proyección video introductorio	Presentación power point https://drive.google.com/file/d/1DiYcIHzMTrGASqnKmQCd3Z-Twyx_Xi56/view?usp=sharing
20 minutos	Resolución de problema 1 “Las Encuestas” (En grupos formados aleatoriamente)	https://drive.google.com/file/d/1hemAdsSmueiCnOyWATRM0h1jSVFW_xWQ/view?usp=sharing Plataforma ZOOM / habilitada la opción de formación de grupos aleatorios y varios coanfitriones.
10 minutos	Plenaria de estrategia de resolución del problema 1. Reflexión sobre el recurso pedagógico del problema en formato escrito.	Plataforma ZOOM / habilitar para compartir pantalla.

Bloque 2

Tiempo	Actividad	Materiales
3 min	Proyección video Problema 2: “La fábula”	https://drive.google.com/file/d/1RHZKCfwdPDBvHndbIvNPznxbh7DyqMrq/view?usp=sharing https://drive.google.com/file/d/1TPt1NW86Id-9KurH75HPg6msp0Gqz-6G/view?usp=sharing
15 min	Resolución Problema 2: “La fábula” (En grupos formados aleatoriamente)	Plataforma ZOOM / habilitada la opción de formación de grupos aleatorios y varios coanfitriones.
15 min	Plenaria de estrategia de resolución del problema 2. Reflexión sobre el recurso pedagógico del problema en formato escrito y video, con énfasis en los beneficios sobre la motivación del estudiante.	Plataforma ZOOM / habilitar para compartir pantalla.
7 min	Presentación recursos Renata y los problemas	https://renataylasmatematicas.com

Referencias

Felmer, Patricio, & Perdomo-Díaz, Josefa. (2017). Un programa de desarrollo profesional docente para un currículo de matemática centrado en las habilidades: la resolución de problemas como eje articulador. *Educación matemática*, *29*(1), 201-217. https://doi.org/10.24844/em2901.08

LA CONSTANTE DE KAPREKAR: PROPUESTAS DE PROBLEMAS QUE HACEN INTERESANTE LA EJERCITACIÓN EN ENSEÑANZA BÁSICA

Daniela Bonilla Barraza, Cinthia Iglesias Mancini

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso - Universidad Arturo Prat.

Las Bases Curriculares (Mineduc, 2012) declaran que la Resolución de Problemas es el foco de la enseñanza de la Matemática. Su promoción permite a los estudiantes el desarrollo de habilidades cognitivas de orden superior, a la vez que favorece la motivación y su desarrollo intelectual. Investigaciones recientes, dan cuenta que el trabajo de los profesores de la resolución de problemas es escaso y se caracteriza por el planteamiento y la resolución mecánica por parte del profesor (Alfaro y Gormaz, 2009; Espinoza, Barbé y Gálvez, 2009; Felmer et al., 2015).

Este taller considera una propuesta de clase desde el enfoque de resolución de problemas (Isoda y Olfos, 2009). Para gestionar una clase basada en él, se distinguen distintas etapas que se caracterizan por los roles que toman tanto los alumnos como el profesor: presentación y comprensión de un problema, en la que se realiza la lectura atenta del problema y la comprensión de la situación planteada, resolución del problema por parte de los estudiantes, en la que los estudiantes piensan y trabajan buscando sus propias soluciones al problema. En esta etapa, el profesor recorre el aula investigando cómo piensan los estudiantes. Posteriormente y de manera conjunta con gestión del docente, se realiza la discusión de toda la clase a partir del problema, para finalmente entrar a la fase de recapitulación e integración, donde se institucionaliza el conocimiento que emergió en la clase y se ponen en juego los saberes adquiridos a partir de la ejercitación. Desde esta perspectiva, la clase gira en torno al desarrollo de un único problema, el problema de la clase. Desde este enfoque, se entiende como problema aquel que pone al estudiantado en una situación nueva, para el cual no dispone de un procedimiento inmediato para su resolución.

A partir de lo antes descrito, se modela una clase utilizando el enfoque de resolución de problemas en el primer ciclo, con el objetivo de promover la ejercitación de la sustracción con foco en el desarrollo de las habilidades propuestas en el currículo vigente, sustentada en la constante de Kaprekar para tres dígitos. Esta constante fue descubierta por el matemático indio Dattatreya Kaprekar y consiste en la obtención de un número fijo al resolver de manera repetida el procedimiento "restar el número mayor y el número menor que se forma con tres dígitos cualesquiera, salvo aquellos números que tengan sus tres dígitos iguales". Bajo esta consigna, se plantea el problema de la clase, que puede ser aplicado a estudiantes de tercer año básico en coherencia con el objetivo de aprendizaje n°6, que promueve la ejercitación de la sustracción.

2021. En Gómez, D. M., Cornejo, C., & Martínez, M. V. (Eds.) Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, pp. 59-61. Rancagua, Chile.

El diseñar secuencias de clase basadas en este enfoque desde edades tempranas, promueve que los estudiantes puedan participar de manera activa en la clase de matemática, construyendo su conocimiento con guía del docente, a la vez que desarrollen las habilidades propias del pensamiento matemático.

En complemento al problema de la clase simulada, se presentan una serie de situaciones para los primeros niveles educativos haciendo uso de la constante de Kaprekar.

Enfoque de resolución de problemas, sustracción, Constante de Kaprekar, ejercitación.

Objetivos

1. Caracterizar el enfoque de resolución de problemas, a través del modelamiento de una clase basada en un problema de sustracción, usando la constante de Kaprekar.
2. Proponer un conjunto de problemas, que hacen interesante la ejercitación en distintos cursos de enseñanza básica, usando como referente la constante de Kaprekar. Cómo usar esta plantillaTablas, Figuras, Citas, Transcripciones y Lista de viñetas

Metodología de trabajo

El taller se llevará a cabo bajo una metodología teórico-práctica, para lo cual se utilizará la técnica de modelamiento y simulación de la gestión de una clase basada en el enfoque de resolución de problemas (Isoda y Olfos, 2009). A través de esta técnica, los participantes simulando ser estudiantes, podrán vivenciar las distintas etapas de este enfoque, e identificar el rol que debe asumir el docente que propone una clase bajo este modelo. La clase se encuentra organizada en base al aprendizaje por descubrimiento.

Planificación de tiempos

Momentos del taller

Modelación de una rutina de clase desde el enfoque de resolución de problemas (40 minutos): Se vivencia junto a los asistentes del taller, la modelación de una clase desde el enfoque de resolución de problemas. Las relatoras del taller simulan ser las profesoras de la clase y los participantes corresponderían a los estudiantes. La clase se encuentra contextualizada para profesores en ejercicio o futuros profesores. Sin embargo, realizando pequeñas modificaciones a la propuesta, es posible generar una rutina de clase para estudiantes de tercer año básico. Las plataformas que se utilizarán en este momento serán: Zoom, Whiteboard.fi, Google slides.

Pausa (10 minutos)

Institucionalización del enfoque de Resolución de problemas (20 minutos): Usando de base la clase recientemente simulada, se institucionalizan las etapas del enfoque de resolución de problemas, dando sentido a las acciones llevadas a cabo en la simulación de clases. Las plataformas que se utilizarán en este momento serán: Google slides y Zoom.

Sugerencias de problemas haciendo uso de la constante de Kaprekar en distintos niveles de enseñanza básica (20 minutos): Dado que los asistentes ya presentan cierto conocimiento respecto de la constante de Kaprekar, se proponen algunas variaciones al problema empleado en la clase simulada, de manera que los asistentes, profesores del sistema escolar o profesores en formación, puedan implementarlo en sus aulas escolares para abordar diversos tópicos matemáticos que se abordan en la enseñanza básica. Las plataformas que se utilizarán en este momento serán: Google slides y Zoom.

Referencias

Alfaro, L., y Gormaz, R. (2009). *Análisis comparativo de los resultados chilenos en las pruebas de Matemática SIMCE y PISA. En ¿Qué nos dice PISA sobre la educación de los jóvenes en Chile? Nuevos análisis y perspectivas sobre los resultados en PISA 2006* (pp. 239-260). Santiago, Chile: Gráfica 7 Ltda.

Espinoza, L., Barbé, J., y Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(2), 157-168. Recuperado de https://www.raco. cat/index.php/Ensenanza/article/view/132234.

Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisternas, T, Cea, F., Randolph, V., y Medel, L. (2015). La resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente. *Revista Estudios de Política Educativa, 1*(1), 64-105.

Isoda, M., y Olfos, R., (2009). *Enfoques sobre la resolución de problemas en la enseñanza de matemáticas a partir del estudio de clase.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso: Chile.

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares Educación Básica*. Ministerio de Educación: Gobierno de Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/biblioteca_digital_historica/orientacion/2012/bases_curricularesbasica_2012.pdf

"CONEXIONES MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LA EDUCACIÓN INTEGRAL STEAM: UNA PROPUESTA FORMATIVA DESDE EL MARCO DE LOS OBJETIVOS DEL DESARROLLO SOSTENIBLE"

Marcela Silva Hormazábal[1], Ángel Alsina Pastells[2]

Universidad Austral de Chile[1], Universidad de Girona, España[2]

Educar a los ciudadanos del siglo XXI, implica necesariamente poner la mirada en las diversas problemáticas con las que se verán enfrentados en una sociedad de constante cambio. Ejemplo de ello, es el acelerado desarrollo que han tenido las disciplinas denominadas STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas), siendo claramente un elemento para considerar en los planes formativos del siglo XXI (Castro et al, 2020). Sin embargo, no es suficiente con direccionar la preocupación hacia el desarrollo de contenidos pertenecientes a estos campos, sino que también son fundamentales las habilidades con las cuales puedan enfrentarse a problemáticas reales en diversos contextos.

De esta manera, es imposible pensar en perpetuar un enfoque educativo tradicional en la clase de matemática. Por el contrario, se requiere evolucionar hacia un enfoque renovado, capaz de potenciar el autoaprendizaje y el desarrollo de habilidades para enfrentar escenarios situados y de naturaleza interdisciplinaria. Para ello, diversos organismos, entidades y estados han apostado por la educación STEM, acrónimo que se utiliza para centrarse en la comprensión de la naturaleza integrada de las disciplinas. No obstante, las últimas corrientes integran una A al acrónimo, dando origen a STEAM, enfoque considerado más integral, al incluir las artes o humanidades a las disciplinas anteriormente mencionadas (Couso, 2017).

De esta manera, todos aquellos retos que tienen relación con el cuidado, la preservación y la paz en el planeta, son escenarios idóneos para la contextualización del aprendizaje, debido a su naturaleza interdisciplinaria, favoreciendo con ello la identificación de conexiones matemáticas, tanto dentro la disciplina, como también incentivando el trabajo conjunto con otras áreas de conocimiento (Alsina, 2020).

Por consiguiente, vincular educación con políticas públicas para el desarrollo sostenible, cobra especial sentido. En relación con esto, desde el año 2015, 192 países miembros de la Organización de Naciones Unidas (ONU), acuñaron la denominada Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible. Este documento considera 17 objetivos, como parte de un plan con metas a alcanzarse en los siguientes 15 años (Naciones Unidas, 2018). Del mismo modo, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) plantea que la Educación para el Desarrollo Sostenible (EDS) empodera a las personas para que cambien su manera de pensar y trabajar hacia un futuro sostenible.

2021. En Gómez, D. M., Cornejo, C., & Martínez, M. V. (Eds.) Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, pp. 62-65. Rancagua, Chile.

En esta misma línea, la UNESCO reconoce que para lograr la Agenda 2030, se requiere cultivar el pensamiento y habilidades transformadoras, innovadoras y creativas además de contar con ciudadanos competentes y empoderados. Así también, posiciona a la educación STEAM y la innovación como un medio para el logro de los objetivos propuestos (UNESCO, 2017).

Sin embargo, instaurar este planteamiento curricular, implica instaurar un enfoque educativo mucho más globalizado (Alsina, 2012), alejándose radicalmente de la fragmentación del saber perpetuada en el asignaturismo, y transitar hacia un currículo integrado en donde las disciplinas sean los conductores para resolver problemáticas reales.

Con base en lo expuesto anteriormente, se formula la pregunta guía de este taller: ¿Qué características debe poseer una actividad STEAM integrada que permita identificar las conexiones matemáticas desde contextos reales? De esta manera, para brindar un abordaje práctico a la pregunta esbozada, se diseña el presente taller como una forma de contribuir a la formación del profesorado en ejercicio y/o formación, respecto al diseño de actividades STEAM, por medio de experiencias educativas basadas en contextos reales que promuevan el desarrollo competencial.

Matemática, STEAM, conexiones, ODS.

Objetivo(s)

Objetivo general: Facilitar un espacio de colaboración docente en torno al diseño de experiencias educativas interdisciplinarias, que promuevan las conexiones matemáticas en el contexto de los Objetivos del Desarrollo Sostenible.

Objetivos específicos:

Identificar conexiones iniciales en problemáticas contextuales desde el enfoque STEAM para el desarrollo sostenible.

Conceptualizar teóricamente el marco STEAM y los Objetivos del Desarrollo Sostenible, como contexto para la identificación de conexiones matemáticas, tanto intradisciplinarias, como interdisciplinarias

Caracterizar una actividad STEAM integrada, que permita identificar las conexiones matemáticas en contextos reales.

METODOLOGÍA DE TRABAJO

Taller teórico-práctico destinado a docentes de aula, el cual se desarrollará en formato online a través de la plataforma Zoom, promoviendo el trabajo colaborativo por medio de actividades prácticas en equipos.

Se utilizará principalmente el enfoque de Aprendizaje Basado en el Lugar (PBE), considerando el patrimonio local, las culturas, los paisajes, las oportunidades y las experiencias, como contexto para situar el aprendizaje matemático y las conexiones con otras disciplinas.

Para ello, se realizará un acercamiento por medio del uso del contexto local, global (OCDE, 2017) y socio-científico como centro del aprendizaje (Márquez y Roca, 2006), utilizando la problemática de la crisis hídrica presente en diversos territorios del país y en específico en la Isla de Chiloé, debido a la

extracción indiscriminada del pompom. Esta actividad será facilitada por medio de un video motivador que expone la problemática. Posteriormente se realizará una conceptualización del marco STEAM y los Objetivos del Desarrollo Sostenible, estos últimos se presentan como contexto articulador para el diseño de experiencias educativas contextualizadas, evidenciando experiencias en Chile.

Consecutivamente, los y las participantes co-diseñarán dos de las tres fases del diseño de una actividad STEAM integrada, siguiendo orientaciones de Chalmers et al (2017): planificación de la idea y planificación general de la actividad STEAM integrada para el desarrollo sostenible, utilizando para ello como contexto movilizador uno de los Objetivos para el Desarrollo Sostenible.

Por último, se realizará una plenaria de las producciones colectivas.

Planificación de tiempos

Primer bloque

Inicio (10 minutos): Actividad de exploración inicial, a través de la plataforma Mentimeter, usando un problema que promueva la discusión y desemboque en la pregunta. En nuestra posición de profesores y profesoras, ¿cómo podemos aportar al desarrollo sostenible desde nuestras aulas?

Desarrollo (30 minutos): Conceptualización teórica del marco STEAM y los Objetivos del Desarrollo Sostenible, como contexto para la identificación de conexiones matemáticas, tanto intradisciplinarias como interdisciplinarias.

Presentación de experiencias realizadas en el contexto chileno.

Café (10 minutos)

Segundo bloque

Actividad práctica (30 minutos): En equipos esbozarán una actividad matemática que permita identificación de conexiones con otras disciplinas STEAM, a través de experiencias situadas en los Objetivos del Desarrollo Sostenible.

Para facilitar el trabajo colaborativo, se utilizarán las salas de Zoom para las reuniones y la plataforma Google Drive para la redacción.

Cierre (10 minutos): Plenaria de presentación, exponiendo la experiencia desarrollada en forma colaborativa.

Evaluación de la actividad por medio de formulario Google docs.

Referencias

Alsina, A. (2020). Conexiones matemáticas a través de actividades STEAM en Educación Infantil, *Revista Iberoamérica de Educación Matemática,* 58, 168-190.

Alsina, Á. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Revista de didáctica de las matemáticas*, 80, 7-24.

Castro, A., Iturbe, C., Jimenez, R. y Silva, M. (2020). ¿Educación STEM o en humanidades? Una reflexión en torno a la formación integral del ciudadano del siglo XXI. *Utopía y Praxis Latinoamericana*, 25, 197-208.

Chalmers, C., Carter, M. L., Cooper, T., Nason, R. (2017). Implementing "big ideas" to advance the teaching and learning of science, technology, engineering, and mathematics (STEM). International Journal of Science and Mathematics Education, 15(1), 25-43. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9799-1

Couso, D. (2017). Per a què estem a STEM? Un intent de definir l'alfabetització STEM per a tothom i amb valors. Ciències. *Revista del professorat de ciències de Primària i Secundària*, 34, 22–30.

Naciones Unidas (2018), La Agenda 2030 y los Objetivos de Desarrollo Sostenible: una oportunidad para América Latina y el Caribe (LC/G.2681-P/Rev.3), Santiago. https://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/40155/24/S1801141_es.pdf

OCDE (2017) Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias, Versión preliminar, OECD Publishing, Paris. https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/ebook%20-%20PISA-D%20Framework_PRELIMINARY%20version_SPANISH.pdf

Márquez, C. y Roca, M. (2006). Plantear preguntas: un punto de partida para aprender ciencias. Revista Educación y pedagogía, 18(45), 61-71.

UNESCO, (2017). Education for Sustainable Development Goals Learning Objectives. https://bangkok.unesco.org/content/education-sustainable-development-goals-learning-objectives

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

EL ROL DEL GESTO COMO FORMA DE COMUNICACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA UNIVERSITARIA

Luis Sandoval-Troncoso[1]

[1] Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

Se reporta una investigación centrada en analizar el rol del gesto como una forma particular de comunicación matemática en el estudio de las funciones reales. Para ello, se utilizaron como referentes las Teorías Comognitiva y de la Objetivación, con el propósito de analizar la actividad gestual desde las dos perspectivas que aportan estos marcos: el discurso matemático de los individuos y el sistema semiótico de significación cultural que se forma en el colectivo, respectivamente. En términos metodológicos, se trata de un estudio de caso con estudiantes de primer año de ingeniería de una universidad chilena, a quienes se les aplicó una actividad en parejas sobre la representación de funciones de variable real mediante gestos. Los resultados evidenciaron que el colectivo respondió de acuerdo a la necesidad de comunicación a través del signo gesto y de distintas realizaciones en su discurso matemático, conformando de este modo un espacio común de interacción con la matemática que se vive, se siente y se sufre en el aula.

Actividad gestual, Discurso matemático, Funciones reales, Sistema semiótico de significación cultural.

INTRODUCCIÓN

Las funciones de variable real son un contenido basal para los cursos de cálculo a nivel universitario, tanto dentro de los planes de estudio de las carreras de pedagogía y licenciatura en matemática, como de los de ingeniería. En la actualidad, existen diversas herramientas tecnológicas que permiten a los estudiantes obtener información sobre la gráfica de una función, para así deducir su comportamiento y sus propiedades. Sin embargo, además de la tecnología, existen otros medios que también pueden generar oportunidades de aprendizaje sobre este objeto matemático, como lo es la actividad gestual. Sobre esta última, en la literatura se han reportado diversos estudios sobre el rol del gesto en el aprendizaje de la matemática a nivel universitario (véase Arzarello et al., 2015; Yoon et al., 2011; entre otros), los que destacan una incipiente componente social que permitiría la interacción colectiva en un ambiente donde los individuos expresan sus ideas a través de los gestos. A diferencia de tales estudios, el que aquí se reporta, centra su atención en el aprendizaje de las funciones de variable real en el aula universitaria, considerando el uso de la corporalidad como un ambiente de trabajo matemático. De este modo, dada la importancia de las funciones, y en conjunción con la actividad gestual, en este trabajo se plantea la pregunta: ¿Cuál es el rol del gesto en el estudio de funciones reales como forma particular de comunicación matemática? Para responderla, se analiza la actividad gestual de un colectivo en interacción en torno a las funciones, bajo el lente de las Teorías Comognitiva (Sfard, 2008) y de la Objetivación (Radford, 2006, 2014). La elección de estos referentes teóricos se justifica en la visión

compartida entre ambos sobre el gesto dentro de la matemática, pues se le considera, por una parte, como una herramienta simbólica cuya cognición es un fenómeno de carácter cultural (Sfard y McClain, 2002) y, por otra, como un *signo* que es parte del *sistema semiótico de significación cultural* (Radford, 2006).

MARCO TEÓRICO

En este apartado se presentan los dos referentes teóricos considerados para esta investigación.

Teoría Comognitiva

Esta teoría contempla como eje principal el *discurso* y cuyos elementos constitutivos forman parte de la *comunicación*. En su definición de *comunicación* (véase Sfard, 2008, p. 296), su autora indica que este acto no es un sistema cerrado, es decir, no se reduce sólo a la triada emisor-mensaje-receptor o a los sujetos involucrados, razón por la cual esta teoría posee un carácter social y un estatus *participacionista*. De este modo, cobra especial relevancia la *comunicación* y la interacción con el colectivo, que en lo que respecta a los objetos matemáticos, se encuentra intermediada por *realizaciones* de tipo visual (verbales-escritas o verbales-algebraicas, icónicas, concretas, gestuales) y vocal (verbales-habladas). Los elementos que forman el *discurso* se clasifican en *recursos* (*palabras en uso* y *mediadores comunicacionales*) y *productos* (*narrativas* y *rutinas*), definidos a continuación:

- *Palabras en uso*: corresponden a las *palabras clave* que conforman el *discurso*, y que se relacionan con lo que el sujeto ve en el mundo.
- *Mediadores comunicacionales*: corresponden a los objetos visibles que son operados como parte del proceso de comunicación.
- *Narrativas*: son cualquier secuencia de expresiones que describen objetos o procesos y sus relaciones entre ellos, sujetos a aprobación o rechazo mediante los fundamentos del *discurso*.
- *Rutinas*: corresponden a patrones o regularidades matemáticas, observadas a través de las *palabras en uso* o de los *mediadores comunicacionales* para crear o corroborar *narrativas*.

Sfard (2008) declara que no existen fronteras entre los elementos antes mencionados, por lo que la aparición de cualquiera de ellos ya es condición indicativa para hablar de *discurso*. Si bien se reconoce la existencia de nuevos enfoques desarrollados por la Teoría Comognitiva (véase Lavie et al., 2019), para efectos de este estudio se considera la propuesta de Sfard (2008), dado que coincide con el contexto temporal en que se desarrolló esta investigación y que considera como unidad de análisis al *discurso*.

Teoría de la Objetivación

Esta teoría considera al pensamiento como una *reflexión mediatizada* según la forma de actividad de los sujetos (Radford, 2006), tomando como principio fundamental el materialismo dialéctico hegeliano (Hegel, 1837/2001) y su idea de la constitución dinámica y recíproca entre el ser y la cultura. A partir de lo anterior, la *objetivación* es entendida como un proceso social, corpóreo, y simbólicamente mediado de *toma de conciencia* y discernimiento crítico de formas de expresión, de reflexión histórica y culturalmente constituida, en que el sujeto siente, goza y sufre, al encontrarse en formación (Radford, 2014). En este sentido, la *objetivación* propone una visión más abierta con el medio, centrándose en la actividad del individuo con la sociedad y los *signos* (símbolos, gestos, acciones kinestésicas), que le permiten ir más allá de lo puramente cognitivo. Las bases de esta teoría son tres (Radford, 2006, 2014):

- Antropológica: basada en los *sistemas semióticos de significación cultural*, que se caracteriza por ser una supraestructura simbólica, en donde los objetos de saber adquieren el significado de acuerdo al colectivo que realiza cierta actividad.
- Epistemológica: indican la importancia de cómo son y cómo pueden ser conocidos los objetos matemáticos. En esta teoría, se sugiere que estos objetos son generados a través de la historia, simultáneamente con la actividad que desarrollan los sujetos.
- Ontológica: esta teoría establece que los objetos no son producidos a partir de las leyes de la lógica, sino que son patrones fijos de la actividad reflexiva, insertos en el mundo en cambio constante por la *práctica social* mediatizada de los artefactos (signos, objetos).

Teniendo en cuenta las bases recién descritas, el autor indica que el saber es adquirido gracias al contacto con el mundo material, es decir, con los artefactos culturales del entorno, los cuales guardan sabiduría histórica de acuerdo a actividades pasadas. Estas actividades le permiten al ser humano realizar cambios en sus comportamientos, ya que se ven afectados por los artefactos. Los artefactos por sí solos no permiten dar significado a la sabiduría histórica si no es con la participación con los demás.

METODOLOGÍA

En este estudio se siguió una metodología de investigación cualitativa desde un paradigma interpretativo (Cohen et al., 2018), que consiste fundamentalmente en un estudio de caso (Stake, 1995) con estudiantes universitarios (de 18-21 años de edad) pertenecientes a dos carreras de ingeniería (Química Industrial y Bioquímica) en una universidad chilena. Los sujetos se encontraban cursando la asignatura de Cálculo I, durante el año académico 2018, en un curso conformado por un total de 30 estudiantes, de los cuales 8 participaron voluntariamente de la actividad propuesta, organizándose en parejas para desarrollarla. Como se ha declarado anteriormente, el interés de este caso de estudio se centra en el significado que los estudiantes atribuyen al gesto, para lo cual se les aplicó una actividad con las siguientes instrucciones:

> A través de su cuerpo, por movimientos de dedos, brazos, etc., deben representar funciones reales o sus características, en donde la persona que realiza la acción, permita que su compañero logre identificar a lo que se alude. Luego, deben intercambiar los roles entre gesticulador e identificador de funciones/características. Además de su cuerpo, podrán utilizar la pizarra u otros objetos que les permitan comunicarse de manera más eficiente. La actividad debe ser grabada en video y luego enviarse por la plataforma del curso Cálculo I dentro de una semana.

De las producciones en video recopiladas, se analizaron dos elementos en particular:

- El *sistema semiótico de significación cultural*, entendido en este estudio como la cultura en el aula de matemática bajo la visión del *signo* gesto, es decir, vivir la matemática con la corporalidad a disposición del individuo que quiere comunicar alguna propiedad y/o conceptualización de las funciones. Se evalúa el trabajo en el colecto bajo la interpretación de los investigadores, analizando si los estudiantes dan sentido a los objetos abstractos, ya sea mostrando una propiedad, concepto o comportamiento de la gráfica de una función.
- El *discurso matemático*, entendido en este estudio como la comunicación en el colectivo a través de diversas *realizaciones* que permiten develar la interacción de los individuos (estudiantes) con la matemática (funciones de variable real) a través de lo *visual* y lo *gestual*,

permitiendo conocer aquellas *realizaciones* que priman en este interactuar. De este modo, se evidencia un *discurso matemático* coherente con las necesidades de los participantes involucrados para comunicar las ideas y conceptos que tienen de la matemática con el objeto funciones y, de forma libre, expresar su elección, permitiendo que estos conceptos e ideas fluyan de manera natural.

RESULTADOS

En este apartado se presentan, por motivos de espacio, sólo los resultados de una pareja de estudiantes (rotulados como E3 y E4) que participaron de esta actividad. Para ello, se reproducen algunos diálogos relevantes, donde se indican entre corchetes […] las acciones corporales de los sujetos, y se presentan algunas capturas del video recopilado de esta pareja.

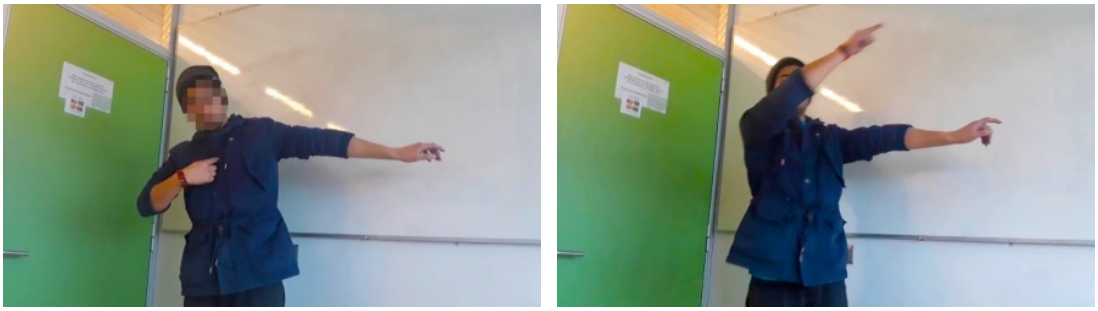


Figura 1: *Realización* de E3

El registro en video evidencia *realizaciones visuales* (como en la Figura 1) y *vocales*. Las *realizaciones visuales* se inclinan hacia la evocación de lo icónico, por parte de E3, quien muestra de forma corporizada la gráfica de la función que desea que E4 identifique. En un momento dado, E3 describe una función que no es visualizada de forma clara por E4. A pesar de que E4 no alude a ninguna función, su silencio ante las gesticulaciones hace que E3 detalle aún más en ella, aportando información adicional para que sus gestos sean comprendidos por E4, como lo muestra el siguiente extracto de diálogo.

E3: [muestra el sistema de ejes *XY*, de manera corporizada, indicando con los dedos dichos ejes, y mostrando que parte desde el origen; luego, procede con sus brazos a gesticular el movimiento que describe la curva de la función, indicando que ésta se mueve desde el origen hacia la derecha del sistema de coordenadas *XY*].

E4: ¡Ya sé!, la función raíz cuadrada.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esta pareja de estudiantes evidencia un *discurso* que muestra elementos de la matemática que son corporizados, como los ejes *X* e *Y*, y el origen (o punto de referencia) a partir de dichos ejes, por lo que, de esta forma, se promueve aún más el movimiento del cuerpo para describir al objeto. Este *discurso* en particular, no privilegia las *realizaciones visuales* del tipo verbal-algebraicas, sino que lo hace con las del tipo *gestuales*, lo cual sugiere que lo *simbólico-algebraico* puede haber sido un factor prescindible para esta pareja de estudiantes al momento de describir una función. En este sentido, los gestos conformaron un *mediador comunicacional* que permitió la enunciación de propiedades y/o características de las funciones, convirtiéndolo en un motor desarrollador de un *discurso* en el individuo que visualiza

y escucha lo que realiza el otro. Este *discurso* evidenció también la existencia de *palabras en uso* (como 'función raíz cuadrada') y *narrativas* validadas (como 'indicar el movimiento de la curva de la función con los brazos') mediante los gestos, convirtiendo a estos últimos en una *rutina* pues, al igual que las *rutinas* lógico-matemáticas con la operatoria en los reales, estaría la *rutina* del gesto, como una acción natural en los individuos en una cultura matemática, con un sentido de corporalidad.

Esta pareja de estudiantes también pone de manifiesto la idea de Radford (2006) sobre los efectos en el pensamiento del sujeto, ya que el *sistema semiótico de significación cultural*, a través del medio y sus herramientas, implicó una realidad que los individuos refractaron y modificaron según sus subjetividades. Así, la realidad presentada a través de los gestos, es una señal que el individuo interpreta y modifica de acuerdo a su experiencia escolar, al contexto, a las reglas de un *juego de lenguaje* (en términos de Wittgenstein, 1921/2001) que se deben acatar, y que es ampliada a través de este enfoque de carácter gestual, que conforma un espacio común de interacción con la matemática que se vive, se siente y se sufre en el aula donde se trabajan las funciones.

Agradecimientos

Este estudio fue desarrollado en el marco del Proyecto ANID/PFCHA nro. 21180980 (Chile).

Referencias

Arzarello, F., Robutti, O. y Thomas, M. (2015). Growth point and gestures: Looking inside mathematical meanings. Educational Studies in Mathematics, 90(1), 19-37. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9611-5

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). Research Methods in Education (8va ed.). Routledge.

Hegel, G. W. F. (2001). The Philosophy of History (J. Sibree, Trad.). Batoche Books. (Trabajo original publicado en 1837)

Lavie, I., Steiner, A. y Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. Educational Studies in Mathematics, 101(2), 153-176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(Número especial), 103-129.

Radford, L. (2014). De la Teoría de la Objetivación. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2), 132-150.

Sfard, A. (2008). Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing. Cambridge University Press.

Sfard, A. y McClain, K. (2002). Analyzing tools: Perspectives on the role of designed artifacts in mathematics learning. The Journal of the Learning Sciences, 11(2-3), 153-161. https://doi.org/10.1080/10508406.2002.9672135

Stake, R. E. (1995). The Art of Case Study Research. SAGE.

Wittgenstein, L. (2001). Tractatus Logico-Philosophicus (D. F. Pears y B. F. McGuinness, Trads.) (2da ed.): Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203010341 (Trabajo original publicado en 1921)

Yoon, C., Thomas, M. O. J. y Dreyfus, T. (2011). Grounded blends and mathematical gesture spaces: Developing mathematical understandings via gestures. Educational Studies in Mathematics, 78(3), 371-393. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9329-y

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS SUPERFICIES CUÁDRICAS EN MODALIDAD REMOTA

Daniela Araya Bastias; Sebastián Calzadillas Niechi y Leonel Guerrero Cerda.

Universidad Central de Chile; Universidad de Chile y Universidad Técnica Federico Santa María.

La presente investigación tiene como objetivo diseñar e implementar una propuesta didáctica en la enseñanza de superficies cuádricas, basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas y el Aprendizaje Cooperativo, de un curso de matemáticas transversal en modalidad remota para estudiantes de ingeniería de segundo año. La metodología de la investigación es cualitativa cuyo diseño metodológico es evaluativo, pues se pretende indagar si se promueve un aprendizaje autónomo y cooperativo por parte de los estudiantes.

Superficies Cuádricas, Teoría de las Situaciones Didácticas, Aprendizaje Cooperativo, Enseñanza Superior, Geometría Analítica en $\mathbb{R}^3$

ANTECEDENTES

La enseñanza de la geometría ha tenido un principal interés en los últimos años, puesto que es un área de la matemática que tiene como fin desarrollar en los estudiantes procesos de razonamiento lógico deductivo, razonamiento espacial, argumentación y visualización, los cuales son trascendentales para el aprendizaje de conocimientos matemáticos más avanzados (Gamboa y Ballestero, 2010; NCTM, 2003).

Por otra parte, Gamboa y Ballestero (2010) evidencian que la naturaleza de la geometría se ha desvirtuado en la enseñanza tradicional, puesto que se pone énfasis en la memorización de fórmulas, propiedades, teoremas y definiciones; donde el profesor es el principal actor de la enseñanza sin dar lugar a un aprendizaje significativo en los estudiantes. Al respecto, Mendoza y Cordero (2012) señalan

> […] no se ha logrado que el conocimiento matemático sea funcional, en tanto que se busca explicar la matemática desde la matemática misma, soslayando otros campos científicos que le permitieron su desarrollo e incluso, desconociendo las prácticas de referencia que hicieron surgir el conocimiento matemático (p. 1023 - 1024)

Las afirmaciones precedentes son reafirmadas por diversas mediciones internacionales que evidencian deficiencias en la resolución de problemas y los procesos deductivos y argumentativos de geometría en estudiantes chilenos (Aravena, Gutiérrez y Jaime (2016); Aravena y Caamaño (2013)).

La problemática anterior se traslada a la enseñanza remota de emergencia (ERT) cuando los docentes replican sus prácticas pedagógicas de la presencialidad a la ERT, tal como se ha discutido en diversos foros y seminarios latinoamericanos (Peña, Pino-Fan y Assis, 2021), alejándose de los principios de lo que se considera una educación en línea de alta calidad (Hodges, Moore, Lockee, Trust & Bond, 2020).

2021. En Gómez, D. M., Cornejo, C., & Martínez, M. V. (Eds.) Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, pp. 71-76. Rancagua, Chile.

Bajo esta premisa, la presente investigación tiene como objetivo diseñar e implementar una propuesta didáctica basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas y el Aprendizaje Cooperativo, la cual promueve un rol protagónico del estudiante en el aprendizaje de las superficies cuádricas bajo el marco de la enseñanza remota después de un año de experiencia en la ERT, suscitando la interacción social entre sus pares y el docente, en una asignatura de matemática de educación universitaria.

Es importante destacar, que hasta donde los autores reconocen saber no existen investigaciones sobre la enseñanza remota de las superficies cuádricas en estudiantes universitarios bajo los marcos teóricos de esta investigación.

MARCO TEÓRICO

Una de las definiciones del Aprendizaje Cooperativo (AC) es la dada por Johnson, Johnson & Smith (2013) quienes establecen que "el Aprendizaje Cooperativo es la metodología de enseñanza aprendizaje impartida en pequeños grupos de tal manera que al trabajar los estudiantes en conjunto puedan maximizar su propio aprendizaje y el de los demás" (p.3, traducción libre). Para constatar que se está en presencia del AC diversos autores (Johnson & Johnson 1991, Brush 1998), han definido tres características esenciales que se suscitan en una clase cuando se desarrolla dicho aprendizaje: interdependencia positiva, responsabilidad individual y habilidades colaborativas.

Por otra parte, la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) planteada por Guy Brousseau (1986), se basa sobre la génesis de la psicología Piagetana, la cual señala que el proceso de aprendizaje se lleva a cabo cuando un estudiante se encuentra en un estado permanente de adaptación al medio. Brousseau (2007) define el medio como "un sistema autónomo antagonista del sujeto" (p.17). Un tipo de medio es el medio a-didáctico el cual es diseñado con el propósito de que el estudiante interactúe con éste y pueda llevar a cabo su aprendizaje sin la intervención del profesor. Brousseau (2007) define el término situaciones didácticas "en el sentido de entorno del alumno que incluye todo lo que coopera específicamente en la componente matemática de su formación" (p.49). Para llevar a cabo una situación didáctica, es necesario que el profesor diseñe y/o prepare el medio, por ejemplo, un medio a-didáctico.

METODOLOGÍA

La presente investigación trata de un estudio cualitativo cuyo diseño metodológico es evaluativo, pues el objetivo es evaluar la implementación de las tareas diseñadas cuyo fin es propiciar un aprendizaje autónomo y cooperativo por parte de los estudiantes con respecto a las superficies cuádricas (Cohen, Manion y Morrison, 2011; Hernández, Fernández y Baptista, 2016).

Para implementar las tareas se utilizará las orientaciones metodológicas propuestas por el 'Design Based Research' (DBR) (Bakker & van Eerde, 2015; Cobb et al, 2003), la cual consta de tres etapas: la primera etapa es de Diseño y Preparación del Experimento (Preparation and Design); la segunda etapa es la Implementación de la Propuesta Didáctica (Teaching Experiment) y Análisis Retrospectivo (Retrospective Analysis); y la tercera etapa es la Mejora de las Tareas (New Design Phase).

La implementación de la propuesta se realizó en tres sesiones de 70 minutos en modalidad en línea, adicionalmente se aplicaron breves cuestionarios asincrónicos entre las sesiones construidos mediante la plataforma en línea Wiris alojada en un aula virtual de Moodle. Cabe destacar, que tanto las actividades

como los cuestionarios fueron validados por un grupo de docentes y estudiante de un programa afín. Los estudiantes fueron divididos en grupos de trabajo de manera aleatoria de máximo tres integrantes, cambiando éstos en cada sesión. El trabajo cooperativo se realizó en secciones de grupos pequeños utilizando la plataforma de videoconferencia Zoom, grabando la participación de uno de estos grupos para su posterior análisis, dicho análisis se realizó utilizando la descripción de las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización de la TSD (Brousseau, 2007) y los criterios propuestos para evidenciar los aspectos del AC (Johnson & Johnson 1987, 1990).

Los participantes son estudiantes de un curso de cálculo diferencial en varias variables con tópicos de geometría analítica en $\mathbb{R}^3$ -en el que se enmarca el contenido de superficies cuádricas- y álgebra lineal. Los sujetos son 10 estudiantes de segundo año de una carrera de ingeniería.

La muestra es por conveniencia y autoseleccionada, ya que esta muestra está conformada por sujetos disponibles a los cuales tenemos acceso y participaron voluntariamente en la implementación didáctica (Hernández, Fernández, Baptista, 2016).

DESARROLLO

En lo que sigue se expondrá de manera sintetizada una descripción de las situaciones de la TSD evidenciada durante la implementación de una de las actividades desarrolladas.

La actividad tiene como objetivo que los estudiantes analicen los tres componentes principales (trazas, intersecciones y simetrías) de la representación geométrica de una superficie cuádrica para que deduzcan su expresión analítica. Para lograr tal objetivo, a los estudiantes se les entrega un material a-didáctico que consta de una guía con preguntas orientadoras cuyas respuestas se obtienen mediante la interacción de un applet desarrollado en GeoGebra en línea (https://www.geogebra.org/m/ywdefetb).

Situación de Acción

Esta situación se evidenció cuando los grupos de estudiantes comenzaron a interactuar con el applet, con el fin de identificar visualmente las trazas de la superficie paralelas al plano XY y las relaciona con expresión algebraica de éstas. Al observar la grabación de esta actividad se evidencia que el profesor en esta instancia no tuvo la necesidad de orientar a los estudiantes, pues ellos comprendieron a cabalidad lo que se les solicitaba.

Las situaciones de Formulación y Validación se suscitan en dos momentos de la actividad, los cuales llamaremos Momento 1 y 2. El Momento 1 hace referencia a las tareas que involucran la relación entre las trazas visualizadas anteriormente (situación de acción) y sus respectivas ecuaciones. El Momento 2, el cual depende del Momento 1, hace referencia a la obtención de la expresión algebraica de la superficie cuyas trazas han sido obtenidas algebraicamente en el Momento 1.

Situación de Formulación Momento 1

Esta situación se suscita cuando los estudiantes comenzaron a formular sus ideas y conjeturas respecto de las expresiones algebraicas de las trazas obtenidas al variar el parámetro k en el applet. En la grabación queda de manifiesto que los estudiantes pudieron realizar esta parte de la actividad sin mayores inconvenientes.

Situación de Validación Momento 1

Esta situación se generó cuando los estudiantes comenzaron a debatir sus hallazgos con relación a las expresiones algebraicas de las trazas involucradas con el valor de $k = 2$ y $k = 4$.

Situación de Formulación Momento 2

Esta situación ocurre cuando los estudiantes tienen que identificar las trazas determinadas en el Momento 1 como curvas de la superficie, y por ende determinar la ecuación de ellas como una función $f(x, y) = z$, con el fin de deducir la expresión algebraica de la superficie cuádrica dada. En la grabación del video se constata que el profesor tuvo que intervenir en los grupos, puesto que los estudiantes no lograban comprender lo que las tareas solicitaban, por tal razón el profesor reformuló en sus propias palabras lo que se solicitaba en las tareas.

Situación de Validación Momento 2

Esta situación no se evidenció en los grupos de estudiantes, puesto que ninguno de éstos logró dilucidar la relación entre el rol de la constante k y la variable z dentro del tiempo asignado para la actividad.

Situación de Institucionalización

Esta ocurrió cuando el docente convoca a todos los grupos de estudiantes para realizar una actividad Plenaria con el fin de compartir las ideas y hallazgos de los grupos. Debido a que, los grupos no lograron desarrollar la parte final de la actividad (Momento 2), el docente realizó preguntas orientadoras a los estudiantes con el objetivo de ayudarles a deducir la expresión algebraica de la superficie cuádrica. Con dichas acciones algunos estudiantes pudieron deducir lo solicitado por las tareas y estos compartieron sus respuestas en el transcurso de la Plenaria.

Por otra parte, el Aprendizaje Cooperativo se suscitó cuando los estudiantes se organizaron y designaron roles dentro del grupo con el fin de responder a las tareas propuestas y entregar el documento requerido dentro del tiempo asignado. Esta característica es parte de la interdependencia de roles positiva (Johnson & Johnson (1991).

CONCLUSIONES

En las primeras etapas de esta investigación (Preparation and Design y Teaching Experiment), en base a los criterios propuestos por Brousseau (2007) y por Johnson & Johnson (1987, 1990), se evidencia, en la tercera actividad las situaciones propuestas en la TSD (Momento 1), así como ciertas características claves del AC (Momento 1 y 2) poniendo en relevancia que los marcos teóricos escogidos, los cuales tienen como actor principal al estudiante, son apropiados en la enseñanza de las superficies cuádricas en un contexto de enseñanza remota.

Es importante mencionar, que durante la Situaciones de Formulación y Validación del Momento 2, los estudiantes no logran el objetivo de ésta sin la intervención del docente. Con la consecuencia que durante la Situación de Institucionalización el docente por medio de preguntas orientadoras permite que los estudiantes deduzcan lo solicitado y desarrollen las Situaciones de Formulación y Validación durante la Plenaria.

Las limitaciones de la implementación fue que no se logró que los estudiantes encendieran sus cámaras lo que no permitió visualizar sus expresiones corporales y por ende obtener conclusiones a partir de ellas. Por otra parte, el cronograma de la asignatura fue muy ajustado y eso llevó a que los estudiantes no tuviesen tiempo extra para desarrollar las actividades. Como proyección preliminar de la investigación se pretende estudiar y crear técnicas que motiven a los estudiantes a encender sus cámaras y planificar la asignatura considerando como eje central esta implementación. Dado que esta investigación comienza a abordar la enseñanza de las superficies cuádricas en un contexto remoto ésta se proyecta como base para una futura línea de trabajo.

Referencias

Aravena M, Gutiérrez A, y Jaime A. (2016) Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerable de educación media en Chile. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 107-128.

Aravena, M. y Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(2), 139-178. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1621

Bakker, A. & van Eerde, D. (2015) An Introduction to Design-Based Research with an Example from Statistics Education. En Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C. & Presmeg, N. (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods, Advances in Mathematics Education* (pp.429-466). London, United Kingdom: Springer.

Brush, T. (1998). Embedding Cooperative Learning into the Design of Integrated Learning Systems: Rationales and Guidelines. *Educational Technology Research and Development, 48*(3), 5-17.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemátic*a. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libro del Zorzal.

Cea, F., García, R., Turra, H., Moya, B., Sanhueza, S., Moya, R., & Vidal, W. (2020, 08 de junio). Educación online de emergencia: hablando a pantallas en negro. *Ciper Chile*. https://www.ciperchile.cl/2020/06/08/educacion-online-de-emergencia-hablando-a-pantallas-en-negro/

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1),9-13.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education (6th Ed.).* New York, NY: Routledge.

Gamboa, R., Ballestero E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes*. Revista Electrónica Educare, 14*(2). 125-142.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2016). *Metodología de la Investigación (6ta ed.)*. México: McGraw-Hill.

Hodges Ch., Moore S., Lockee B., Trust T. y Bond A. (2020) The Diference Between Emergency Remote Teaching and Online Learning. *Educause review*. https://er.educause.edu/articles/2020/3/the-difference-between-emergency-remote-teaching-and-online-learning

Johnson, D.W., & Johnson, R.T. (1987). *Learning Together and Alone: Cooperative, Competitive, and Individualistic Learning*. New Jersey, EE.UU.: Prentice-Hall.

Johnson, D.W., & Johnson, R.T. (1990). Cooperative learning and achievement. In S. Sharan (Ed.), *Cooperative Learning: Theory and Research*. (pp. 23-37) New York, EUU: Praeger Publishers.

Johnson, D.W., & Johnson, R.T. (1991). *Learning Together and Alone*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Johnson, D.W., Johnson, R.T., & Smith, K.A. (2013) Cooperative Learning: Improving University Instruction by basing practice on validated theory. *Journal on Excellence in University Teaching*. 1-26.

Mendoza, E. & Cordero, F. (2012). El uso de las ecuaciones diferenciales y la ingeniería como comunidad de conocimiento. En Flores, R. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (25)*, pp. 1023-1030. México: CLAME.

National of Council of Teacher of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Original en inglés, 2000.

Peña, C., Pino-Fan, L. y Assis, A. (2021). Normas que regulan la gestión de clases virtuales de matemáticas en el contexto COVID-19. *Uniciencia, 35*(2), 1-20.

DIAGNÓSTICO INICIAL DOCENTE EN MATEMÁTICA EN PROGRAMAS DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN BÁSICA

Francisco Rojas[1], Emilia Seissus[2], Daniela Jiménez[2]

[1]Pontificia Universidad Católica de Chile, [2]DEMRE - Universidad de Chile

El diagnóstico inicial docente en matemática es clave para ofrecer mejor acompañamiento a quienes ingresan a la formación inicial docente. En este sentido, presentamos los resultados de un diagnóstico realizado a cerca de 250 estudiantes de pedagogía en educación básica de 10 universidades chilenas. El instrumento está compuesto por un cuestionario de conocimiento matemático escolar y una escala de creencias sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje. Los resultados muestran un nivel de conocimiento medio en contenidos matemáticas escolares de educación básica y un sistema de creencias diverso. Finalmente, se dan algunas orientaciones a los programas de formación a la luz de estos resultados.

Conociendo Matemático Inicial, Creencias, Pruebas Diagnósticas.

INTRODUCCIÓN

Las políticas de mejoramiento de la Formación Inicial Docente (FID) han puesto mayor énfasis en el periodo formativo y en las etapas finales, que en la atracción y entrada a los programas formativos (Cabezas et al., 2019). Para abordar esta brecha, el Sistema de Desarrollo Profesional Docente (Ley 20.903/2016) mandató a las universidades formadoras de profesores a desarrollar estrategias de evaluación diagnóstica al inicio de la formación, a modo de contar con información del perfil de ingreso de sus estudiantes y con ello tomar medidas que permitan un mejor acompañamiento. Para contribuir a esta política pública, el Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE) de la Universidad de Chile, ha generado de forma colaborativa e interinstitucional diversos instrumentos para diagnosticar aspectos de conocimiento y habilidad docente que se consideran claves para la formación inicial de las y los estudiantes de pedagogía en educación básica.

Uno de los instrumentos desarrollados ha sido un diagnóstico en matemática, particularmente de las disposiciones cognitivas y afectivas de la competencia docente para su enseñanza, que las y los estudiantes manifiestan al ingreso a la universidad. Así, los instrumentos elaborados buscan explorar el nivel de conocimiento matemático para enseñar correspondiente a educación básica y la tendencia en las creencias que manifiestan las y los futuros profesores al ingreso a sus carreras.

Marco conceptual

En la actualidad, existen diversos modelos teóricos que describen el conocimiento necesario para enseñar matemáticas, aunque dichas propuestas centran su atención en el desarrollo del conocimiento profesional durante la formación inicial o en la práctica del ejercicio profesional. Además, el conocimiento con el que las y los estudiantes llegan a la FID, pareciera ser poco adecuado e insuficiente para construir y desarrollar el conocimiento necesario para la enseñanza que estos modelos explicitan (Linsell y Anakin, 2012). Así, se espera que los y las estudiantes manifiesten un Conocimiento Matemático Fundamental (Gorgorió et al., 2017), entendido como el conocimiento disciplinar en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de matemáticas y de su didáctica, tomando en cuenta los requerimientos de la práctica profesional y las competencias matemáticas de la educación primaria. Sin embargo, un instrumento al inicio de la formación sólo puede mostrar el conocimiento que efectivamente despliegan los y las estudiantes al resolver problemas y tareas con cierta destreza, y no necesariamente el esperado para su formación profesional, lo que llamamos el Conocimiento Matemático Inicial (Albarracín et al. 2021).

Por otra parte, las experiencias y conocimientos que un individuo tenga a lo largo de su vida en torno a la matemática definen su sistema de creencias respecto de esta disciplina, su enseñanza y aprendizaje (Martínez et al. 2019). Dentro de este sistema se suelen considerar las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, es decir, aquellas que corresponden a características inherentes a las matemáticas como disciplina, las que incluyen aspectos del pensamiento matemático, la acción matemática y su relación con el mundo y la naturaleza de la matemática y su relación con el estudiante. En segundo lugar, se consideran las creencias sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo que abarca las metodologías de enseñanza, las características de estudiantes y profesores, el contexto social y la dinámica social del aula, entre otras. Finalmente, se consideran las creencias sobre sí mismo(a) que incluyen las actitudes hacia las matemáticas de los y las estudiantes y cómo estas influyen en el proceso de aprendizaje, además de las precepciones de autoeficacia que la persona posee respecto a las matemáticas. Conocer este conjunto de creencias al inicio de la formación docente permite conocer cómo han impactado las experiencias matemáticas en quienes ingresan y con ello orientar cambios en los programas formativos para proveer de oportunidades de aprendizaje satisfactorias.

METODOLOGÍA

La evaluación diagnóstica se conformó por dos instrumentos: un cuestionario de conocimiento matemático para enseñar y una escala de creencias. El cuestionario se compuso de 50 ítems de selección múltiple de cuatro alternativas, sólo una de ellas correcta, que medían aspectos centrales del currículum nacional vigente de Educación Básica, agrupados según los ejes de Números y Operaciones, Patrones y Álgebra, Medida, Geometría, y Datos y Probabilidades. La escala de creencias se basó en la desarrollada por Martínez et al. (2019) y constaba de 47 ítems, siendo cada uno de ellos una sentencia frente a la cual las y los estudiantes debían declarar su grado de acuerdo en una escala de 1 a 4, siendo 1 muy en desacuerdo y 4 muy de acuerdo.

Los resultados que se muestran más adelante corresponden a la aplicación piloto de los instrumentos, realizada entre marzo y abril de 2021, participando un total de 10 universidades. La aplicación de los

instrumentos se realizó a través de la plataforma SurveyMonkey y se registraron un total de 233 respuestas válidas para el cuestionario de conocimiento y de 247 para la escala de creencias.

Se evaluaron las propiedades métricas de ambos instrumentos y con ello se descartaron algunos ítems según su aporte a la consistencia interna del instrumento e índice de discriminación. Para reportar los datos finales a las universidades participantes, se definieron metodologías diferenciadas para conocimiento y creencias. En el cuestionario de conocimiento, se calculó el porcentaje de logro que cada estudiante obtuvo en cada uno de los cinco ejes temáticos abordados en la prueba. Posteriormente, se definieron tres intervalos de logro (menor a 30%, entre 30% y 70%, y mayor a 70%), y a partir de la combinación de porcentajes de logro obtenidos en cada eje, se clasificó al estudiantado según su nivel de preparación para iniciar su formación docente en matemática. Aquellos(as) estudiantes que obtuvieron en al menos tres de los cinco ejes temáticos sobre el 70% de rendimiento y a lo más en uno de ellos bajo el 30%, se les consideró **preparadas(os)**. A aquellos(as) que obtuvieron en al menos tres de los cinco ejes temáticos entre el 30% y el 70% de rendimiento, se les considero como **medianamente preparados(as)**. Finalmente, a aquellos(as) que en al menos tres de los cinco ejes temáticos estaban bajo el 30% de rendimiento y a lo más uno de ellos por sobre el 70%, se les considero como **poco preparadas(os)**.

En el caso de la escala de creencias, el análisis de las respuestas se estructuró en torno a tres dimensiones: 1) Relación del estudiante de pedagogía con la matemática y el rol de la familia; 2) Características de la matemática como disciplina y de las personas con éxito en la disciplina; y 3) Creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En función de los patrones de respuesta de los y las estudiantes en cada dimensión, se les clasificó en dos tendencias (Tipo A y Tipo B) y se definieron sustantivamente para cada dimensión anterior.

En la primera dimensión, una tendencia Tipo A considera que los y las estudiantes perciben que pueden tener un buen rendimiento, disfrutan realizar actividades matemáticas y les interesa sentirse capaces frente a esta disciplina, junto con considerar que su familia da importancia a la matemática y les apoya en el proceso de aprendizaje. En cambio, en una tendencia Tipo B tienden a manifestar interés por entender la matemática u obtener buenos resultados en ésta, pero también piensan que podrían tener dificultades al momento de aprenderla. En la segunda dimensión, la tendencia Tipo A agrupa estudiantes que consideran la matemática como un proceso de indagación, que permite realizar descubrimientos, donde los problemas pueden ser resueltos utilizando diversas estrategias, considerando además que la habilidad matemática no es innata. En una tendencia de carácter mixto como la Tipo B, consideran a la matemática como un conjunto de reglas donde existe un único método de resolución, aunque le dan cierto grado de indagación y si bien, creen que el esfuerzo influye en el desarrollo de la habilidad matemática, igualmente consideran que esta es una habilidad innata que puede observarse en la rapidez con que se realizan cálculos. Finalmente, en la tercera dimensión las y los estudiantes con una tendencia Tipo A consideran que un o una buena docente ha de ser alguien creativo(a), que genera un clima de confianza donde el error es una oportunidad para aprender, y que pone al alumno o alumna al centro de su enseñanza. Por otro lado, señalan que el aprendizaje requiere de un rol activo, donde el o la estudiante escucha a sus pares y participa de los procesos de argumentación y refutación de ideas al momento de

aprender. En una tendencia mixta de Tipo B, los y las estudiantes mantienen ciertas consideraciones anteriores, pero no consideran necesario adaptar su método de enseñanza a las necesidades de cada estudiante, o que el error sea una oportunidad de aprendizaje y le otorgan un rol más pasivo a los y las estudiantes al momento de aprender la disciplina, no siendo estrictamente necesario que participen en procesos de argumentación de sus ideas matemáticas.

RESULTADOS

Dadas las particularidades de las dos partes que componen este diagnóstico, las características de los instrumentos correspondientes y los resultados obtenidos por las y los estudiantes en cada uno de ellos, los resultados fueron reportados a las universidades de forma diferenciada. En el caso del cuestionario de conocimiento matemático, los niveles de preparación reflejan el grado de dominio de los conocimientos básicos de la matemática escolar para realizar tareas y solucionar problemas con precisión y adaptabilidad. El siguiente gráfico (Figura 1) muestra el porcentaje de estudiantes por cada uno de estos niveles en la muestra a nivel nacional.

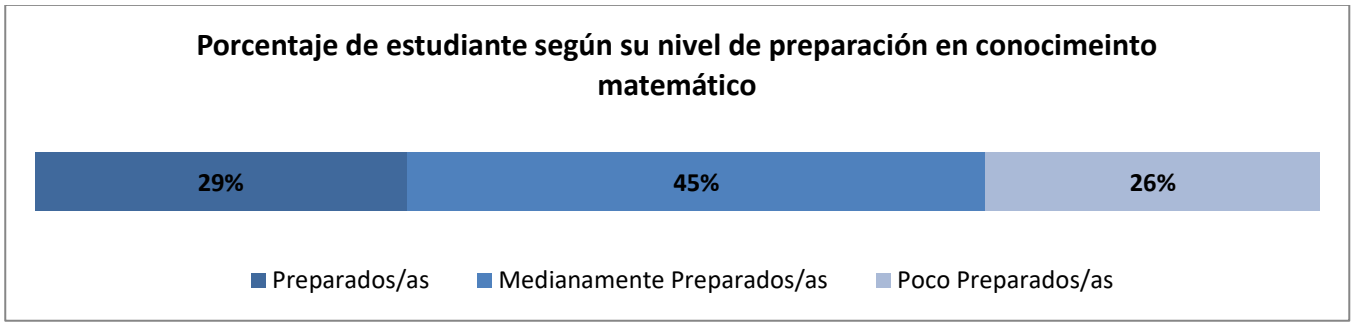


Figura 1: Gráfico de Nivel de Preparación en Conocimiento Matemático.

Respecto de los tipos de creencias que muestran los y las estudiantes, las tendencias reflejan orientaciones distintas que pueden tener sus sistemas de creencias sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, desde aquellas que favorecerían el generar oportunidades de aprendizaje relevantes para la disciplina (Tipo A), a otras mixtas en las cuales la orientación no es única en cuanto a favorecer ese tipo de oportunidades de aprendizaje (Tipo B). En el siguiente gráfico (Figura 2), se aprecia el porcentaje de estudiantes que manifiestan un tipo u otro de creencias para cada una de las dimensiones señaladas anteriormente.

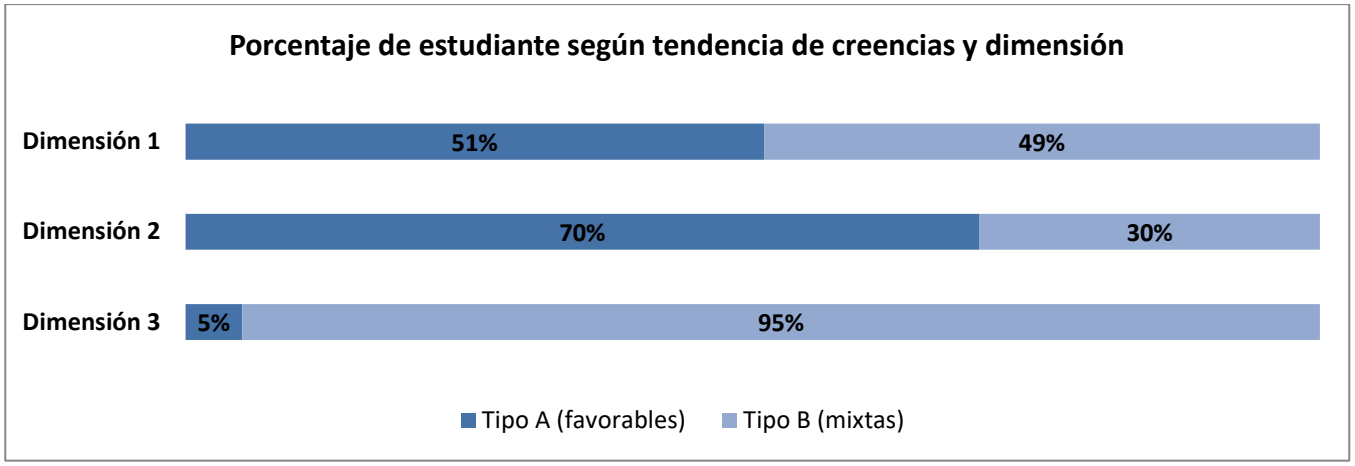


Figura 2: Gráfico de Tendencias en Creencias según Dimensión.

CONCLUSIÓN

El conocimiento matemático inicial de los y las estudiantes que ingresan a pedagogía básica, da cuenta de una brecha respecto del aprendizaje de los contenidos matemáticos de educación básica (1º a 6º básico) en una parte importante de las y los estudiantes, considerando que han tenido una trayectoria escolar en educación media que les permitiría rendir mejor. Por otra parte, dado que deberán otorgar oportunidades de aprendizaje matemático de calidad a niñas y niños, resulta preocupante que casi la mitad de las y los estudiantes considere, que aun manifestando cierto interés por la matemática no se sientan capaces de aprenderla o que tendrían dificultades en ello (dimensión 1). Además, la relación contraria que se aprecia entre una idea mayoritaria de las matemáticas como un proceso de indagación (dimensión 2) y a su vez una percepción transmisiva de la enseñanza (dimensión 3), nos invita a explorar cómo se ha generado ese sistema de creencias, ya que podría afectar el desempeño profesional de las y los futuros docentes.

A nivel de los programas de formación, es conveniente generar instancias que permitan profundizar en el conocimiento matemático para la enseñanza, y así orquestar oportunidades de aprendizaje pedagógico del contenido. A su vez, sería pertinente realizar grupos focales o seminarios donde se discuta y reflexione entre estudiantes y docentes, sobre qué son las creencias sobre la matemática, cómo se configuran y en qué influyen, además de cuál es su importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje y cómo se puede incidir en ellas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto FONDEF ID19I10050 “Evaluación diagnóstica inicial en pedagogía: construcción colaborativa de instrumentos para una mejor formación docente”, liderado por DEMRE - Universidad de Chile.

Referencias

Albarracín, Ll., Rojas, F., Chandía, E., Ubilla F. M. y Gorgorió, N. (2021). Unidimensionalidad del conocimiento matemático inicial de estudiantes para maestro. *Investigación en Educación Matemática XXIV*. Valencia: SEIEM.

Cabezas, V., Medina, L., Müller, M. y Figueroa, C. (2019). Desafíos y tensiones entre las nuevas políticas educativas y los programas de formación inicial de preofesores en Chile. *Temas de la Agenda Pública 14* (116), 1-30. Centro de Políticas Públicas UC.

Gorgorió, N., Albaracín, Ll., Ärlebäck, J. B., Laine, A., Newton, R. & Villarreal, A. (2017). *Fundamental mathematical knowledge: progressing its specification*. Presented at 8th Nordic Conference on Mathematics Education, Stockholm, Sweden.

Linsell, C. y Anakin, M. (2012). Diagnostic Assessment of Pre-Service Teachers' Mathematical Content Knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development, 14*(2), 4–27.

Martínez, M. V., Rojas, F., Ulloa, R., Chandía, E., Ortiz, A. & Perdomo-Díaz, J. (2019). Creencias y conocimiento matemático escolar al comienzo de la formación inicial docente en estudiantes de Pedagogía General Básica. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 56*(2), 1-19.

CREENCIAS DEL PROFESORADO SOBRE LAS PRÁCTICAS DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

Alicia Zamorano-Vargas, Michael Pérez-Fernández

Universidad de Chile

Las creencias del profesorado han sido y siguen siendo un conocimiento importante para comprender lo que el profesorado de matemáticas hace mientras enseña. En esta investigación se busca revelar esas creencias, para utilizarlas en la reformulación del plan formativo de una carrera de pedagogía en educación básica. Para rescatar las creencias, se realizó una investigación de corte cualitativo a profesores y profesoras guía de estudiantes en formación de la carrera. Se aplicó un cuestionario y luego una entrevista semi estructurada. En los análisis preliminares de las creencias sobre la enseñanza de la matemática, se ha detectado que se centran en una enseñanza por descubrimiento con utilización de algunos materiales concretos.

Conocimiento del profesorado, Práctica docente, Enseñanza de la matemática, Creencias, Experiencias docentes

INTRODUCCIÓN

La investigación que se ha desarrollado hasta ahora es disímil para definir quienes son los/as formadores de formadores. Según Jaworski (2008) el/la formador de docentes de matemáticas, es la persona que tiene como tarea ayudar a los profesores a desarrollar y mejorar la enseñanza de las matemáticas. Por otra parte, Leikin et al. (2018) consideran que los matemáticos (investigadores) que imparten docencia para los futuros docentes de matemáticas, son formadores de docentes de facto. Por su parte Li y Superfine (2018) indican que los formadores de docentes son los profesores a cargo de su formación para la enseñanza.

Basándonos en esas ideas, es que como equipo de investigación nos planteamos el desafío de incluir los saberes que los/as docentes de educación básica consideran necesarios para la enseñanza en la escuela, lo que permite incluirles en esta definición de formadores de formadores y que de esta manera puedan ser consideradas sus creencias para la reformulación del plan formativo.

Esta investigación surge por la evidente distancia que existe, entre la formación inicial que entrega la universidad y las prácticas docentes en las escuelas (Ball y Cohen, 1999; Tardif, 2004). Las universidades siguen los patrones formativos que se han desarrollado históricamente en las instituciones y en escasas ocasiones consideran otros saberes para la reformulación de sus programas. Es reconocido el trabajo que Ball et al. (2008) desarrollaron a partir del estudio sistemático de clases de profesores y profesoras para la elaboración de su marco referencial, el conocimiento matemático para la enseñanza.

Considerando a los/as docentes guía de los/as estudiantes en formación, esta investigación busca responder, ¿Qué conocimientos matemáticos creen necesarios para enseñar en la escuela las/os profesores/as de enseñanza básica?

Conocimiento del profesorado

El conocimiento del profesorado de matemáticas ha sido un tópico de interés bastante posterior al desarrollo del Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC) de Shulman (1986). El artículo *Content knowledge for teaching: What makes it special*, de Ball y su equipo, dan cuenta de la importancia que el CPC ha tenido para la investigación de los conocimientos del profesorado, aunque por varios años solo se utilizó de forma general.

En el caso de la investigación del profesorado que enseña matemáticas, Lin y Rowland (2016) indican que cerca de un tercio de las investigaciones y conferencias que se presentan en las reuniones de PME, se dedican a estudiar el conocimiento de los/as profesores/as de matemáticas. También indican que algo parecido para con el JMTE, revista especializada en el profesor de matemáticas, que nace en el año 1998 y que la editorial escrita por Cooney (1998) indica:

> La creación del Journal of Mathematics Teacher Education (JMTE) nos proporciona un foro especialmente dedicado a nuestro trabajo en la formación del profesorado. De hecho, ahora tenemos más razones que nunca para integrar nuestro estudio de la formación del profesorado con nuestra práctica de la formación de profesores. (p.1)

En Ball et al. (2008), se propone un marco específico para analizar la enseñanza de la matemática a nivel escolar, destacando que metodológicamente el trabajo investigativo se realizó a partir de los registros de clases (grabaciones), planificaciones de clases, trabajo de los/as estudiantes a lo largo de todo un año. Producto de esta investigación surge el Conocimiento Matemático para la enseñanza (Mathematical Knowlegde for teaching). Este marco a su vez está subdividido en dos dominios y seis categorías (tres para cada dominio):

I. Dominio Conocimiento del Contenido Matemático
a. Conocimiento común del contenido
b. Conocimiento del horizonte del contenido
c. Conocimiento especializado del contenido

II. Dominio Conocimiento Pedagógico del Contenido
d. Conocimiento del contenido y de los estudiantes
e. Conocimiento del contenido y la enseñanza
f. Conocimiento del contenido y el currículum

Creencias en la enseñanza de la matemática

Las creencias han sido un elemento ampliamente estudiado para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ernest (1989) daba cuenta de la relación entre las creencias y el desarrollo de las prácticas de enseñanza. En 1992, Thompson escribió un artículo que daba cuenta de la investigación desarrollada hasta ese momento y que fortalecía la idea de la influencia de las creencias sobre la práctica. Posteriormente se han desarrollado importantes investigaciones que intentan esclarecer las creencias de

los/as profesores/as que enseñan matemáticas (Wilkins, 2008). La investigación acerca de las creencias sigue siendo relevante por lo que postula Vila y Callejo (2009):

> las creencias son un tipo de conocimiento subjetivo referido a un contenido concreto sobre el cual versan; tienen un fuerte componente cognitivo, que predomina sobre el afectivo y están ligadas a situaciones. Aunque tienen un alto grado de estabilidad, pueden evolucionar gracias a la confrontación con experiencias que las pueden desestabilizar: las creencias se van construyendo y transformando a la largo de toda la vida (p.51)

En el sentido de esta investigación, el revelar las creencias del profesorado nos permitirá extraer ideas concretas de los conocimientos del profesorado y que se utiliza en las prácticas escolares, para incluir estas ideas en la reformulación del plan formativo.

METODOLOGÍA

En la presente investigación se busca conocer la perspectiva de los/as docentes guía (docentes de escuelas y liceos que acogen y acompañan a los/as estudiantes de práctica) respecto a los conocimientos matemáticos necesarios para enseñar en el aula.

Es por ello, que se planteó desde un enfoque cualitativo de tipo exploratorio y descriptivo (Valles, 1999), para analizar el conocimiento matemático que los/as docentes guía consideran necesarios para la enseñanza en la escuela. Adicionalmente, para la toma de datos se utilizó una encuesta y posteriormente se realizaron entrevistas (por Zoom).

En este sentido, se convocó a 17 docentes que han trabajado como docentes guía con estudiantes del programa de Pedagogía en Educación Básica con mención. De ellos, ocho respondieron a la convocatoria y aceptaron participar de la investigación (a través de un consentimiento informado). Una vez que los/as docentes aceptaron participar de la investigación, se realizó una toma de datos en dos partes: la primera consistió en una encuesta formada por once preguntas de las cuales nueve fueron de alternativa y en dos se les pedía manifestar una opinión sobre contenidos curriculares. Es importante destacar, que en las preguntas de alternativa se les que explicaran el porqué de la respuesta elegida, incluyendo la opción "otra". La encuesta fue realizada a través de un formulario de Google y los/as docentes contaron con un tiempo de dos semanas para responderla. Las respuestas a estas preguntas fueron tabuladas y clasificadas en distintas categorías para su posterior análisis.

La segunda parte de la toma de datos consistió en una entrevista (Hernández Sampieri, 2014) semiestructurada, en donde los/as docentes profundizaron en algunas de las respuestas dadas en la encuesta, así como en algunas de las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza (Ernest, 1989) que les ha permitido tomar algunas decisiones en el aula. Estas entrevistas fueron grabadas y se realizaron a través de la plataforma Zoom en grupos de personas. Posteriormente se realizaron las transcripciones con el fin de realizar los análisis correspondientes y responder a la pregunta de investigación.

RESULTADOS

A continuación, enunciaremos algunos resultados parciales de esta investigación en curso y que corresponden al análisis de la encuesta. El análisis se referirá a las preguntas 1, 4, 6 y 7, que apuntaban a desvelar los conocimientos para enseñar de cada participante.

La pregunta 1 buscaba que los/as docentes nos indicarán la ‘mejor forma’ para aprender a multiplicar fracciones, ante lo que el 88% respondieron que según su experiencia era introducir el uso de material concreto con uso de representaciones para las fracciones.

La pregunta 4, buscaba conocer el uso de reglas generales de algunos conceptos matemático, y el 75% indicó que intencionaba que sus estudiantes dedujeran las reglas a partir de actividades planificadas.

La pregunta 6, preguntaba sobre el tipo de matemáticas que los niños y las niñas aprenden en la escuela, donde el 63% indicó que enseñaban matemáticas para que fuera aplicada en diferentes aspectos de su vida cotidiana. En esta pregunta las respuestas fueron más variadas, un 25% indicó que eventualmente algunos conceptos podrían ser utilizados, pero que a veces era complejo encontrar situaciones cotidianas para su aplicación.

Por último, la pregunta 7 buscaba conocer qué es lo más importante que deberían aprender de matemáticas en la escuela, donde un 88% indicó que lo más importante era aplicar las operaciones matemáticas en distintas situaciones, sean reales o no.

CONCLUSIONES

Un análisis inicial de los datos obtenidos de la encuesta nos muestra que, si bien los/as docentes manifiestan estar a favor de la exploración y el aprendizaje por descubrimiento, e incluso practican esto en sus clases, también emplean estrategias de memorización para algunos aspectos procedimentales, por ejemplo, al momento de enseñar la multiplicación de fracciones.

Por otra parte, la evidencia nos muestra que los/as docentes consideran que los niños y las niñas pueden aplicar la matemática que aprenden en la escuela en diferentes aspectos de la vida cotidiana, aunque también consideran importante que aprendan a aplicar las operaciones en situaciones que pueden o no ser reales.

Agradecimientos

Esta investigación ha estado financiada por el Proyecto de Investigación Apoyo a Iniciativas de Investigación Pedagógica 2020, Carrera de Pedagogía en Educación Básica, Universidad de Chile.

Referencias

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.

Ball, D., & Cohen, D. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice.based theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice (pp. 3–32). Jossey Bass.

Cooney, T. J. (1998). Editorial. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), 1–2.

Ernest, P. (1989). *Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: a model*. Journal of Education for Teaching: International research and pedagogy, 15:1, 13-33.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta). Mc Graw Hill Education.

Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development. In B. Jaworski y T. Wood (Ed.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional. Handbook of Mathematics Teacher Education* (Vol. 4, pp. 1–13). Sense Publishers.

Leikin, R., Zazkis, R., & Meller, M. (2018). Research mathematicians as teacher educators: focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 451–473.

Li, W., & Superfine, A. (2018). Mathematics teacher educators' perspectives on their desing of content courses for elementary preservice teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 179–201.

Lin, F.-L., & Rowland, T. (2016). Pre-service and in-service mathematics teachers´knowledge and professional development. In Á. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), The Second Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education (pp. 483–520). Sense Publishers.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15(2), 4–14.

Tardif, M. (2004). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional*. Narcea S.A.

Thompson, A. G. (1992). Teacher´s Beliefs and Conceptions: A Synthesis of Research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 127–146). McMillan and NCTM.

Valles, M. (1999). *Técnicas cualitativas de investigación social: Reflexión metodológica y práctica profesional*. Síntesis Sociológica.

Vila, A., & Callejo, M. L. (2009). Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas. Narcea.

Wilkins, J. L. M. (2008). The relationship among elementary teachers' content knowledge, attitudes, beliefs, and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(2), 139–164. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9068-2

PENSAMIENTO FUNCIONAL EN 4 AÑOS: UN ESTUDIO DE CASO

Fuentes, S. y Cañadas, M. C.

Universidad de Granada, España

Este trabajo se ubica en un marco más amplio de investigación sobre pensamiento funcional en infantil y primaria, realizado en España (www.pensamientoalgebraico.es). Analizamos y describimos las evidencias de pensamiento funcional de una niña de 4 años al trabajar con tareas de generalización que involucran dos funciones. Nos centramos en la generalización en dos tareas que implican las funciones f(x)=x y f(x)=3x.

Pensamiento funcional, Generalización, *Early algebra.*

INTRODUCCIÓN

Es en la educación infantil donde el alumno desarrolla habilidades matemáticas que le servirán de andamiaje para toda la vida. Pensar matemáticamente nace de forma intuitiva en estos niveles (Blanton y Kaput, 2011), por lo que es importante el trabajo para desarrollar el pensamiento funcional en los primeros niveles de escolarización. Esto se logra con actividades lúdicas, contextualizadas en su entorno y desafiantes para su edad, preparándolos para el estudio del álgebra formal.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), propone que el álgebra escolar se trate desde la educación infantil. Esto supone promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, para ello, recomienda un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan o argumenten (Blanton y Kaput, 2004).

La propuesta curricular *early algebra,* propone trabajar el pensamiento algebraico con alumnos desde infantil, lo que significa enmarcar las actividades hacia un mayor desarrollo de habilidades relativas a la generalización. El pensamiento funcional, uno de los enfoques del *early algebra*, implica estudiar las relaciones entre dos o más elementos que varían.

Las investigaciones en educación infantil sobre este tema son incipientes, la mayor parte de ellas se centran en el primer ciclo de educación primaria o el último curso de educación infantil (e.g. Castro, Cañadas y Molina, 2017; Cañadas y Fuentes, 2015; Fuentes, 2014; Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2016). Esta investigación aporta evidencias de qué se puede trabajar con niños de 4 años y del razonamiento que tienen frente a una tarea de generalización a través de funciones.

El objetivo que abordaremos en este documento es describir las evidencias de pensamiento funcional que establece una niña de 4 años al desarrollar una tarea de generalización, la cual involucra las funciones f(x)=x y f(x)=3x.

2021. En Gómez, D. M., Cornejo, C., & Martínez, M. V. (Eds.) Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, pp. 88-92. Rancagua, Chile.

ANTECEDENTES Y MARCO CONCEPTUAL

En las últimas dos décadas, las investigaciones sobre como introducir el álgebra escolar han tenido mucha relevancia. Dos grandes cuestiones en las que se enfocan las investigaciones recientes es desde cuándo y cómo hacer este acercamiento al álgebra escolar.

El pensamiento funcional es el enfoque del *early algebra* en el que se trabaja con las funciones y los conceptos matemáticos asociados a ellas. Cañadas y Molina (2016), definen el pensamiento funcional como un proceso cognitivo que forma parte del pensamiento algebraico, basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (p. 211).

Consideramos que hay evidencia de pensamiento funcional cuando el niño hace explícita la relación que encuentra entre las variables que están involucradas en el problema de estudio. Puede expresar esta relación en lenguaje común (verbal o escrito), con dibujos, símbolos o números para ir de las individualidades a la generalización (Fuentes, 2014).

Al comparar con otros niveles educativos, las investigaciones en educación infantil sobre este tema son escasas, uno de ellos es el de Acosta y Alsina (2018). Los autores trabajaron con 24 alumnos de 3 años en una investigación basada en el diseño, a través de patrones descritos en situaciones cotidianas como cuentos y juegos. Los autores encuentran evidencias de pensamiento algebraico, ya que los alumnos pueden seguir patrones sencillos, descritos en las actividades realizadas.

Castro, Cañadas y Molina (2017), llevan a cabo tres intervenciones con un grupo de 12 estudiantes de 5 a 6 años (último año de infantil). Los alumnos evidenciaron pensamiento funcional al establecer la relación entre los collares que utilizaron un grupo de perros ($f(x)=x$). También, establecieron la función $f(x)=2x$ cuando se les planteó que cada perro necesitó 2 platos.

Blanton y Kaput (2004), indagaron en el pensamiento funcional de alumnos de educación infantil. Utilizaron tareas que involucraban las funciones $f(x)=x$ y $f(x)=2x$, en un contexto familiar para ellos. En el grupo de niños de 3 años, utilizaron fotografías para introducir la situación y debían incorporar en una tabla las parejas de valores de variables que observaron relacionadas. Los niños, gradualmente, descubrieron propiedades en la relación, como la paridad, la relación aditiva o multiplicativa entre las variables. En algunos casos también introdujeron notación algebraica en sus respuestas.

La generalización es un proceso de abstracción empírica, se trata de pasar de uno o algunos a todos, ya que es de carácter extensional (Piaget, 1978). La generalización es fundamental en la construcción de conocimiento y tiene como tarea fundamental el encontrar relaciones reales entre los objetos en estudio. Cañadas y Castro (2007), describen la generalización como una expresión que abarca a todos los casos posibles y que se construye a través de la inducción, comenzando con casos particulares. La generalización es un paso clave dentro del proceso de razonamiento inductivo.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de carácter exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), porque el análisis de los datos pretende describir los procesos del alumno en torno a su pensamiento funcional. Es exploratorio, ya que encontramos escasas evidencias en la literatura de investigación.

Previo a una investigación más amplia, trabajamos con una niña chilena de 4 años, elegida de forma intencional, por tiempo y disponibilidad, para aplicarle la prueba piloto de Fuentes (2014). Tiene un manejo básico de lecto-escritura, reconoce y escribe algunas letras, números y su nombre. La niña había trabajado con patrones figurales anteriormente.

Los investigadores involucrados en el proyecto, en el que se encuentra inmersa esta investigación, diseñamos e implementamos una prueba escrita con dos tareas que involucraban funciones lineales. Enmarcamos las tareas en el contexto de una fiesta de cumpleaños. La aplicación de la prueba tuvo una duración de 1 hora y 10 minutos y estuvo a cargo de las autoras de este trabajo. Cada tarea se trabajó de forma individual, se dieron explicaciones generales de cada una de las ellas para que desarrollara la prueba escrita autónomamente y luego, se le pidió que verbalizara lo que había escrito en la prueba, también se indagó en la generalización al proponerle otros casos o preguntarle por muchos elementos. Por la edad de la niña, la investigadora anotó en la prueba escrita las explicaciones que daba verbalmente.

La variable independiente es el número de alumnos invitados a la fiesta y las dependientes los gorros y piruletas, respectivamente. Las funciones involucradas en cada tarea fueron $f(x)=x$, $f(x)=3x$, respectivamente.

Tarea 1: Relación entre el número de niños y número de gorros necesarios para la fiesta de cumpleaños. Se le da explícita la relación 1 niño - 1 gorro ($f(x)=x$) y se le pregunta por otros valores: $x= 2, 3, 4, 5, 8, 10$ y 100.

Tarea 2: Relación entre el número de niños y el número de piruletas necesarios para la fiesta de cumpleaños. Se le da escrita la relación 1 niño - 3 piruletas ($f(x)=3x$), quedando como apartados de esta tarea preguntas para los valores $x= 2, 3, 4, 5, 8, 10$ y 100 niños.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Analizamos las respuestas entregadas en la prueba escrita y en la posterior entrevista donde verbalizó sus respuestas y se indagó sobre la relación funcional que estableció en cada tarea.

Observamos indicios de pensamiento funcional en la prueba escrita, ya que contestó de forma correcta a todos los ítems en ambas tareas. Interpretamos que identificó alguna relación entre ambos conjuntos de datos. En la entrevista, al consultarle por las respuestas que dio en cada uno de los ítems, evidenció la relación funcional que identificó en cada una de ellas. Detallamos a continuación, con ejemplos, esta evidencia.

En los primeros ítems de la tarea 1, contestó con dibujos y en los demás con el número, la relación que estableció es “a cada niño le ponemos un gorro... 5 niños, 5 gorros”, cuando se le pregunta por los

gorros necesarios para dos niños, dibujó dos gorros y contestó “son dos gorros porque son dos niños” (figura 1).

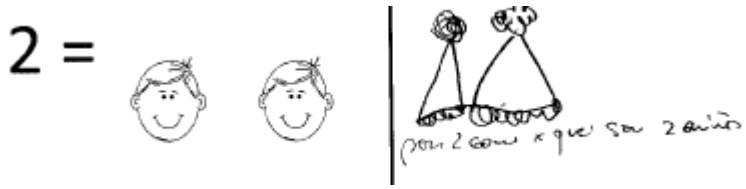


Figura 1: x=2, tarea 1

Al preguntarle explícitamente por la relación entre los niños y los gorros, respondió “cada niño debe llevar un gorro”, “30 niños, 30 gorros”, “100 niños, 100 gorros”.

En los primeros ítems de la tarea 2, contestó con dibujos la cantidad de piruletas necesarias. Luego, utilizó la agrupación. Cuando le preguntamos por las piruletas para 4 niños, respondió “3 y 3 y 3 y 3”, dibujó sin establecer grupos, pero organizó los números para sumar cuatro veces 3 (ver figura 2).

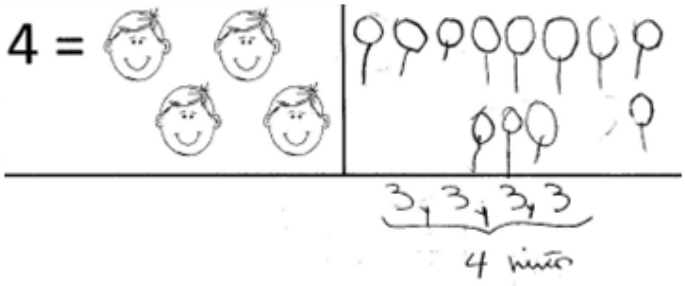


Figura 2: x=4, tarea 2.

Cuando se le preguntó por la relación entre el número de niños y las piruletas, expresó “3 cada uno”, “muchos niños, 3 chuches para cada niño”, “10 niños, 3 para el primero, 3 para el segundo, 3 para el tercero...”, pudimos observar que hace explicita la relación funcional f(x)=3x, asignándole 3 piruletas a cada niño, sin importar cuántos sean estos.

CONCLUSIONES

Con la información que recogimos de la prueba escrita y de la entrevista, pudimos evidenciar las relaciones funcionales que estableció entre las variables propuestas, es decir, cumplimos nuestro objetivo de investigación.

La niña entendió lo que se le pedía y las respuestas pusieron de manifiesto relaciones entre las variables implicadas en la tarea, evidenciando pensamiento funcional, utilizando frases como “a cada niño le toca un gorro, entonces 5 gorros, 5 niños”. En esta ocasión, se explicitó la generalización verbalmente en la entrevista.

Al comparar este estudio con otros similares, los resultados son más alentadores que los encontrados en la literatura (Acosta y Alsina, 2018; Blanton y Kaput, 2004; Castro et al, 2017), ya que logra completar correctamente todas la tareas e ítems de forma innata, autónoma y sin necesidad de ayuda ni de

inducción, logrando así la generalización. A diferencia de las investigaciones antes descritas, ya que, al ser grupos numerosos de niños, no todos llegaban a establecer la generalización.

Se evidenció la posibilidad de trabajar con alumnos desde edades tempranas motivando a los profesores a incorporar el desarrollo del pensamiento algebraico en sus aulas.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte de los proyectos con referencias EDU2016-75771y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Española de Investigación y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional y Beca de doctorado en el extranjero n° 72210402, Gobierno de Chile.

Referencias

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2018). Alfabetización algebraica a partir de 3 años: el caso de los patrones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 111-120). SEIEM.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Jonsen Hoines y A. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2 pp. 135-142). PME.

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into álgebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), Early algebraization (pp. 5-23). Springer-Verlag.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. PNA, 1(2), 69-81.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 211-220). SEIEM.

Cañadas, M. C y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo, M. Torralbo (Eds.), Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico (pp. 209-218). Comares.

Castro, E., Cañadas, M. C., y Molina, Marta (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de educación infantil. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6(2), 1-13.

Fuentes, S. (2014). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada, España.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). Metodología de la investigación, 5° edición. McGraw Hill.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. Enseñanza de las Ciencias, 36(3), 59-78.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Autor.

Piaget, J. (1978). La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo. SXXI.

EL CAMPO CONCEPTUAL MULTIPLICATIVO EN LIBROS ESCOLARES DE LOS PRIMEROS AÑOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ANÁLISIS DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES

Jéssica Daiane da Silva – Estudiante de maestría en la Universidad Federal de Paraná

Neila Tonin Agranionih – Profesora titular en la Universidad Federal de Paraná

Este trabajo forma parte de la tesis de maestría titulada: Problemas del Campo Conceptual Multiplicativo en los libros de texto del primer al tercer año de la escuela primaria, y tiene como objetivo verificar el alcance del Campo Conceptual Multiplicativo en la colección de libros de texto más elegidos por las escuelas del Red Municipal de Curitiba para el 1º, 2º y 3º año de Educación Primaria para el trienio de 2019 a 2021. Libros del 1º, 2º y 3º año de Educación Primaria de la colección más elegida por las escuelas de la Red Municipal de Educación de Curitiba (Paraná/Brasil) fueron analizados. de análisis de contenido. El artículo trata de la categoría "Alcance del Campo Conceptual Multiplicativo". Se identificó que el número de situaciones de multiplicación es mayor que el de división en los tres libros de la Colección. A partir de la clasificación de "problemas verbales", se identificó que problemas del eje de proporción simple: uno a muchos, son priorizados.

Libro de texto de matemáticas, campo conceptual multiplicativo, multiplicación, división.

INTRODUCCIÓN

Al cuestionar a los profesores que trabajan en Educación Básica sobre el uso de libros de texto en sus clases, investigadores como Rodriguez (2015) y Oliveira (2014), informan que el libro de texto es una de las herramientas más utilizadas en el aula por los docentes, según su investigación, el docente entiende el libro como un facilitador de la labor docente y ayuda en la organización de las clases.

Por tanto, pensando en la influencia de los libros didácticos en la vida escolar cotidiana, es necesario que estén en constante evaluación, a fin de posibilitar el desarrollo de los estudiantes. Este artículo responde a esta necesidad y tiene como objetivo verificar el alcance del Campo Conceptual Multiplicativo en la colección de libros didácticos más elegidos por las escuelas de la Red Municipal de Educación (RME) de Curitiba para el 1°, 2° y 3° año de Educación Primaria para el trienio de 2019 a 2021. La mirada se dirigió al Campo Conceptual Multiplicativo, ya que se trata de conceptos habitualmente trabajados al final de los libros didácticos y, según la rutina y exigencias de la escuela, se suelen trabajar de forma resumida. La base para el análisis de los libros didácticos es la Teoría de Campos Conceptuales (TCC) (Vergnaud, 1996, 2014).

METODOLOGÍA

Este trabajo es una investigación cualitativa con carácter documental. Los datos se conformaron a partir de la colección más elegida por las escuelas de la RME de Curitiba, estado de Paraná, Brasil, para el

trienio de 2019 a 2021 para el 1 °, 2 ° y 3 ° año de Educación Primaria, totalizando así, tres libros analizados. Esta colección fue elegida por 56 escuelas entre las 182 escuelas de la RME en Curitiba. La colección se denomina: "Novo Bem-me-Quer Matemática" cuyos autores son: Ana Lúcia Bordeaux, Cléa Rubinstein, Elizabeth França, Elizabeth Ogliari y Vânia Miguel - Editora do Brasil, 4a edición, 2017.

Para analizar los datos recolectados se adoptó la técnica de análisis de contenido basada en Bardin (2011), y para ello se definieron tres momentos: el preanálisis, cuando codificamos los libros (1A, 2A, 3A) y realizamos la lectura flotante en los libros que constituyen el corpus de análisis; el momento de exploración del material, cuando las situaciones fueron identificadas y clasificadas inicialmente, entre situaciones de multiplicación, división o mixtas y, en un segundo momento, entre "problema verbal" y "ejercicio"; y finalmente, el procesamiento de datos, en el que se hicieron inferencias a partir de los datos recopilados.

RESULTADOS

En un inicio, se caracterizó la colección identificada para esta investigación, con el fin de observar su estructura y así entender la forma en que se aborda el Campo Conceptual Multiplicativo en estos años escolares.

El libro 1A no tiene un capítulo específico para trabajar los conceptos de multiplicación y división. Se identificaron seis situaciones que pertenecen al Campo Conceptual Multiplicativo que se encuentran a lo largo del libro. El libro 2A presenta un capítulo llamado "Multiplicación" y otro llamado "División". En este libro se identificaron 61 situaciones pertenecientes al campo conceptual analizado, la mayoría de ellas dentro de sus capítulos específicos. El libro 3A también presenta un capítulo denominado "Multiplicación" y otro denominado "División", en el que se identificaron 129 situaciones referentes al Campo Conceptual Multiplicativo. La Tabla 1 muestra la distribución de las situaciones del Campo Conceptual Multiplicativo en los libros analizados.

Libros	Multiplicación	División	Mixtos	Total
1º año	3	3	0	6
2º año	45	16	0	61
3º año	88	32	9	129

Tabla 1: Distribución de situaciones de multiplicación, división y mixtas. Fuente: Silva (2021)

Con respecto a esta distribución, se verifica que hubo un aumento en el número de situaciones identificadas en la colección, a medida que avanzaban los años escolares. Las situaciones de división son mucho menos trabajadas que las situaciones de multiplicación. Esta operación, a pesar de caracterizarse por ser más compleja, puede ser entendida por los niños desde los primeros años de escolaridad, y le corresponde a la escuela desarrollar tales nociones y asegurar su adecuada comprensión, ya que este es uno de los pilares fundamentales del razonamiento matemático. (Gitirana et al., 2014). Diversificar el tipo de situaciones es fundamental para el desarrollo de un campo conceptual según la TCC, para este análisis es necesario caracterizar las situaciones responsables de la construcción del razonamiento multiplicativo.

Como se menciona en la Metodología, las situaciones identificadas en los libros de texto analizados en esta investigación se clasificaron como "problemas verbales" y "ejercicio", siendo un problema verbal situaciones cuyo enunciado presenta una situación ficticia que se pretende contextualizar. Los ejercicios se caracterizan por ser situaciones que favorecen la resolución y las estrategias de entrenamiento. Podemos ver esta clasificación en la Tabla 2.

Años escolares	Problemas verbales	Ejercicios	Total
1º Año	6	0	6
2º Año	42	19	61
3º Año	85	44	129

Tabla 2: Cuantificación de problemas verbales y ejercicios. Fuente: Silva (2021)

Se identificaron más problemas verbales que ejercicios. Sin embargo, la cantidad de ejercicios identificados en el libro de 3º año equivale a casi la mitad de los problemas verbales identificados en ese año escolar.

En este punto, solo analizaremos situaciones clasificadas como "problemas verbales", porque a través de este tipo de situaciones es posible analizar los conceptos matemáticos y razonamientos que se están solicitando en una situación determinada. Para ello se adoptará como base el esquema desarrollado por Magina et al. (2014) que clasifica situaciones multiplicativas.

En las situaciones analizadas se identificaron el eje Proporción simple, Comparación multiplicativa y Producto de medida.

En el libro del primer año, las seis situaciones del campo conceptual multiplicativo se clasificaron como proporción simple, uno para muchos. Lautert y Santos (2017), demostraron que los estudiantes de 1° a 3° año de educación primaria tienen mayor facilidad con este tipo de problemas, ya que son situaciones presentes en la vida cotidiana de los niños, además de que la relación entre las magnitudes es explícita, lo que facilita la comprensión.

En el libro de 2º año se identificaron 42 "problemas verbales", clasificados en tres ejes diferentes, como se muestra en la Tabla 3.

Los Tipos de Problemas Identificados	Número de Problemas
Proporción simples – uno para muchos	26
Comparación multiplicativa – referido/referente desconocido	12
Producto de medida – configuración rectangular	4
Total	42

Tabla 3: Los tipos de problemas en el 2º año. Fuente: Silva (2021)

El eje de proporción simple: uno a muchos, es responsable de la mayor cantidad de problemas. En su mayoría, se utiliza el enfoque de sumar porciones iguales, estableciendo una afiliación con el Campo Conceptual aditivo, limitando el tipo de razonamiento explorado con las situaciones. Al explorar siempre el mismo tipo de problemas, el docente "[…] puede llevar al alumno a desarrollar conceptos, o incluso

estrategias, que dificultan la adquisición del concepto en foco, así como otros, limitando su competencia para resolver problemas de ese tipo". (Gitirana et al., 2014, p.42).

Problemas de eje Comparación multiplicativa - Referido/Referente desconocido cubren conceptos referentes a doble, triple, mitad y tercera parte. Por tanto, este tipo de situaciones se considera un prototipo de este eje problemático. [...] momento en el que se exploran situaciones sencillas que involucran la relación doble y media, entre otras. Situaciones como estas se pueden configurar con prototipos de comparación multiplicativa [...] (Santos, 2015, p.125).

También, se identificaron cuatro problemas para el eje del Producto de medición: configuración rectangular. En los problemas se abordan nomenclaturas como líneas y columnas para representar la organización de este tipo de situaciones.

En el libro del 3er curso se identificaron 85 "problemas verbales", clasificados en seis ejes diferentes, como se muestra en la Tabla 4.

Tipos de Problemas Identificados	Número de problemas
Proporción simples – uno para muchos	61
Proporción simples – muchos para muchos	1
Comparación multiplicativa - referido/referente desconocido	7
Comparación multiplicativa – relación desconocida	1
Producto de medida – configuración rectangular	7
Producto de medida – combinatoria	8
Total	85

Tabla 4: Tipos de problemas de 3º año. Fuente: Silva (2021)

Si bien este libro aborda un mayor número de ejes, se puede observar que en algunos de estos ejes solo se explora una situación, siendo el trabajo de manera superficial. El mayor número de problemas se clasificó como Proporción simple de uno a muchos, y aún se está discutiendo el razonamiento de sumar partes iguales.

Es importante explorar con los estudiantes situaciones con diferentes niveles de complejidad, como situaciones de proporción simple - muchos a muchos y comparación multiplicativa - relación desconocida. En situaciones clasificadas como Producto de medida - combinatorio, se explora la representación de la situación a través de la tabla cartesiana. Si consideramos que los profesores dependen de los libros para organizar sus clases y estos libros solo abordan una forma de representación, posiblemente el niño solo tendrá contacto con esa forma.

CONCLUSIONES

Los libros didácticos analizados priorizan conceptos relacionados con la multiplicación, dejando la división en un segundo plano, además de traer, en el libro de primer año, pocas situaciones en este campo conceptual.

El eje de problemas más discutido en todos los cursos analizados es la Proporción Simple - uno para muchos, que caracteriza este tipo de situaciones como prototipos del Campo Conceptual Multiplicativo. La estrategia de abordar la multiplicación mediante la suma de porciones iguales dura hasta el 3º año de

la escuela primaria. Algunos ejes de problemas como Proporción simple - muchos a muchos y Comparación multiplicativa - relación desconocida, se abordan de manera superficial y por lo tanto, limitan el desarrollo dentro de este campo conceptual.

Se considera la necesidad de ampliar este estudio para que se pueda analizar todos los años escolares que integran los Años Iniciales de la Educación Primaria.

Referencias

Bardin, L. (2011). *Análise do Conteúdo. Edição revista e ampliada*. São Paulo: Edições 70.

Bordeaux, A. L. et al. (2017a). *Novo bem-me-quer matemática – 1º ano*. 4 ed. São Paulo: Editora do Brasil.

Bordeaux, A. L. et al. (2017b). *Novo bem-me-quer matemática – 2º ano.* 4 ed. São Paulo: Editora do Brasil.

Bordeaux, A. L. et al. (2017c). *Novo bem-me-quer matemática – 3º ano*. 4 ed. São Paulo: Editora do Brasil.

Gitirana, V. et al. (2014). *Repensando Multiplicação de Divisão: contribuições da Teoria dos Campos Conceituai*s. 1 ed. São Paulo: PROEM.

Magina, S.; Santos, A. dos; & Merlini, V. (2014). *O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas*. Ciên. Educ. Bauru, v. 20, n.2, p.517-533, 2014.

Oliveira, P. de. (2017). *Estudos sobre o processo de escolha do livro didático: análise bibliográfica de artigos publicados no período de 2006 a 2016 e indexados no Scielo*. In: MORETO, M. O Livro Didático na Educação Básica: Múltiplos Olhares. (p.27-43) Jundiaí: Paco Editorial.

Rodrigues, M. L. S. (2015). *Alfabetização Matemática na visão da professora do 1º ciclo do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus (BA).

Silva, J. D. da. (2021). *Problemas do Campo Conceitual Multiplicativo nos libros didáticos do 1º ao 3º ano do Ensino Fundamental*. [Dissertação de mestrado não publicado] - Universidade Federal do Paraná: Curitiba (PR).

Vergnaud, G. A. (1996). *Teoria dos Campos Conceptuais*. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. (2º ed.) Lisboa: Instituto Piaget.

Vergnaud, G. (2014). *A criança, a matemática e a realidade*. Curitiba: Edição Revisada, UFPR.

ORIGEN EPISTÉMICO DE LA MATEMATIZACIÓN DE LOS PROCESOS DE TOMA DE DECISIONES EN CONTEXTOS DE INCERTIDUMBRE

Andrea S. Vergara Gómez

Universidad Católica del Maule

Uno de los objetivos explícitos de las matemáticas escolares es preparar a los estudiantes para la toma de decisiones. Este estudio indaga en los orígenes de la matematización del conocimiento para la toma de decisiones en contextos de incertidumbre, con el objetivo de identificar significados que contribuyan a su problematización desde la matemática escolar. Para ello se analiza una obra histórica, utilizando el método del análisis temático híbrido y siguiendo la perspectiva teórica de la Socioepistemología. Los resultados muestran una distinción conceptual entre azar y aleatoriedad, que cuestiona las formas tradicionales en las que se fomenta el pensamiento probabilístico a nivel escolar.

Azar, epistemología, toma de decisiones, aleatoriedad, incertidumbre.

INTRODUCCIÓN

La incertidumbre puede deberse a la naturaleza del fenómeno en sí o a la falta de capacidad o conocimiento de los individuos que interactúan con el fenómeno (Helton, 1997). En situaciones de incertidumbre, los procesos de toma de decisiones activan el pensamiento probabilístico para comparar y evaluar posibles resultados (Vergara, Estrella y Vidal-Szabó, 2020). Asimismo, este tipo de situaciones se caracterizan por la imposibilidad de calcular las probabilidades de todos los casos y, en consecuencia, los procesos de toma de decisiones que no pueden ser completamente deductivos o inductivos, sino que tienen que ser heurísticos (Mousavi & Gigerenzer, 2017).

Diferentes investigaciones (Arkes, Gigerenzer & Hertwig, 2016; Kahneman & Tversky, 1973) discuten los conflictos entre la intuición y la razón cuando la incertidumbre juega un papel en la toma de decisiones. Las primeras investigaciones consideraban las estimaciones intuitivas como un recurso perjudicial para elaborar inferencias. Sin embargo, investigaciones más recientes han demostrado que para resolver problemas de gran complejidad e incertidumbre, el uso de la intuición, y especialmente de la heurística, debe ser reconocido como un recurso válido (Gigerenzer, 2019).

En situaciones de aprendizaje también se ha analizado la relación entre los procesos de toma de decisiones, considerando el riesgo o la incertidumbre, y el desarrollo del pensamiento probabilístico (por ejemplo, Brovcnik y Kapadia, 2011; Martignon, 2014; Bennett, 2014). En términos generales, estos estudios coinciden en que, si bien la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre exige un razonamiento en términos probabilísticos, existen otros elementos que prevalecen en el momento de decidir, que no se basan en cálculos formales de probabilidad, sino en estrategias simples e intuitivas. De hecho, la intuición ha sido uno de los aspectos más complejos a tratar en la construcción de conceptos probabilísticos (Gandhi, 2018).

De esta manera, el presente estudio indaga en los orígenes de la matematización de los procesos de toma de decisiones en contextos de incertidumbre (PTDCI), con el propósito de caracterizar epistémicamente el conocimiento en uso. Para ello se realiza un análisis temático de la obra *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* de A. A Cournot (1843). El trabajo de Cournot fue un precursor del estudio de la toma de decisiones en contextos de incertidumbre. Los resultados nos revelan una distinción epistémica entre las nociones de azar y aleatoriedad, que podría contribuir a repensar la enseñanza de la probabilidad a nivel escolar.

MARCO TEÓRICO

El marco de la Teoría Socio-epistemológica de la Educación Matemática (TSME), aborda "los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple de las dimensiones del conocimiento en uso, mediante el estudio de la interacción entre epistemología, dimensión sociocultural (énfasis en el valor del uso), procesos cognitivos asociados y mecanismos de institucionalización a través de la enseñanza (patrimonio cultural)". (Cantoral, 2019, p. 791). Desde esta perspectiva, la presente investigación analiza el conocimiento matemático-estadístico en uso en los PTDCI.. La TSME propone problematizar aquellos procesos deliberados que permiten la construcción, el intercambio y el uso del conocimiento matemático. De esta manera, se hace hincapié en entender la toma de decisiones como una actividad humana, considerándola como una parte inmanente de la vida cotidiana y explorándola en sus dimensiones sociales, culturales e históricas.

Una forma de realizar un análisis didáctico en la TSME es estudiando este conocimiento matemático-estadístico en uso a través del análisis de su *historización* (Cantoral, 2013). Se han planteado tres momentos para el proceso de *historización*: *génesis, desarrollo* y *transversalidad* (ver Figura 1).

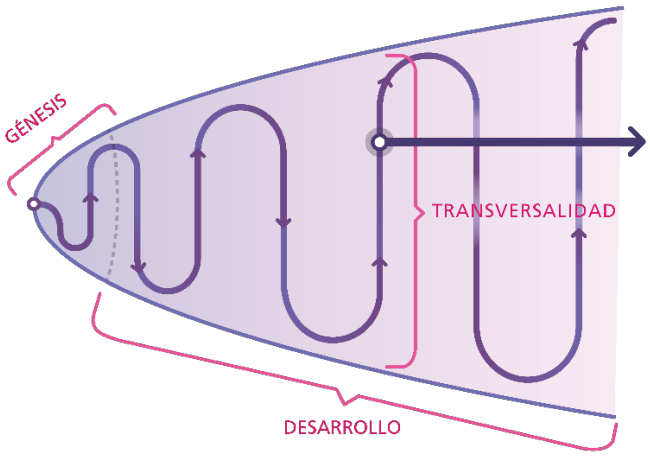


Figura 1: Esquema del modelo teórico para el estudio de la constitución del conocimiento en uso, en Espinoza, Vergara y Valenzuela (2018, p. 252).

En esta investigación, realizamos la *historización* analizando un momento germinal del conocimiento en uso. El interés está en comprender los contextos, intenciones y actividades específicas que acompañaron y fomentaron la producción de conocimiento (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2018). El análisis de los

momentos germinales es de gran importancia, dado que en ellos podemos explorar el significado constitutivo del conocimiento matemático en uso.

METODOLOGÍA

Primero, se identificó la obra titulada *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, publicada en 1843 por el matemático y economista Antoine Augustin Cournot (1801-1877). Este trabajo no solo sintetiza el trabajo de Cournot sobre la teoría de la probabilidad, sino que también expone la epistemología en la que se basa el autor para explicar la relación entre las teorías que constituyen el conocimiento científico y los problemas reales de esa época. Además, proporciona una visión filosófica sobre cómo aplicar el uso de probabilidades y estadísticas para comprender los problemas demográficos, la valoración de las primas de los seguros de vida, el análisis del comportamiento del mercado financiero, el juego y la toma de decisiones en los tribunales civiles, entre otros.

El libro fue analizado utilizando el método híbrido de análisis temático (Boyatzis, 1998), que articula un análisis del libro y su contexto de producción. La codificación y el planteamiento de temas se realizaron utilizando el software ATLAS.ti 8. El análisis temático híbrido considera pasos deductivos (impulsados por la literatura) y pasos inductivos (impulsados por los datos) (véase Tabla 1).

Como resultado de este análisis, se obtuvieron 3000 códigos, organizados en 45 grupos, los que, a través de las funciones de relación y redes de ATLAS.ti 8, dieron lugar a 6 temas: aleatoriedad, variabilidad, distribución, contextos, leyes indeterministas y decisión. Cada uno de estos temas reportó significados característicos de los inicios de la matematización de los procesos de toma de decisiones en contextos de incertidumbre. Para los fines de esta investigación, se consideran solo algunos de los significados germinales proporcionados por los temas aleatoriedad y decisión.

Etapas del análisis temático híbrido	**Pasos**	**Tipo de análisis**
I. Revisión preliminar (codificación primitiva)	1. Delimitación de unidades semánticas. 2. Selección de muestras para codificación inductiva preliminar. 3.Codificación inductiva preliminar completa.	Inductivo
II. Desarrollo de Temas y Código (Codificación Temática)	1. Reducción de la información en bruto. 2. Identificación de relaciones entre códigos primitivos.	Inductivo
	3. Refinación y validación de grupos de códigos primitivos. 4. Tematización a través de las relaciones	Deductivo
III. Evaluación del tema	1. Evaluación cualitativa interna de los temas. 2. Validación cualitativa de los temas, a través del análisis de expertos.	Deductivo

Tabla 1: Etapas y pasos utilizados para el Análisis Temático Híbrido de la obra *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843). Adaptado de Boyatzis (1998).

RESULTADOS

La obra *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* analiza diferentes tipos de problemas, cuya solución se encuentra a través del estudio de las posibilidades de error o riesgo en las decisiones

bajo incertidumbre. El trabajo de Cournot nos proporciona una diferencia conceptual entre el azar y la aleatoriedad, basada principalmente en la noción de independencia de una serie de ocurrencias o causas. Por un lado, para Cournot el azar no es la ausencia de causa ni un estado de ignorancia sobre las causas, sino más bien la multiplicidad de causas, sin dependencia ni una relación rastreable entre ellas, que se manifiesta en la ocurrencia de un evento especifico (Cournot, 1843). Por otro lado, para este matemático, la aleatoriedad es una noción más compleja, que se relaciona con la forma en que percibimos y observamos los fenómenos para analizarlos.

Cournot nos brinda un ejemplo. La trayectoria de un proyectil es susceptible de ser modelado por una curva parabólica, pero esto no significa necesariamente que el comportamiento del proyectil resulte perfectamente en una función cuadrática. Del mismo modo, los fenómenos aleatorios pueden explicarse a través de modelos, en los que se puede mejorar el grado de correspondencia aumentando el número de datos y la calidad de la muestra. De hecho, comenzamos a notar ciertas regularidades cuando tenemos grandes conjuntos de datos o suficientes procesos de acciones/eventos a lo largo del tiempo, adecuadamente recopilados y sistematizados. De esta manera, la aleatoriedad es la expresión regular que surge del registro sistemático de eventos fortuitos, que ocurren bajo condiciones similares del mismo fenómeno. Por lo tanto, la aleatoriedad puede hacerse explícita a través de leyes o propiedades y su distribución adquiere una forma en la medida que se estudia con mayor completitud el fenómeno.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En términos similares a los de Cournot, la diferencia entre azar y aleatoriedad comenzó a ser señalada, con fines educativos, por los estadísticos a principios de la década de 1990. Moore (1990, p. 98), por ejemplo, indica que: “Los fenómenos que tienen resultados individuales inciertos pero un patrón regular de resultados en muchas repeticiones se llama aleatorios. Aleatorio no es sinónimo de azar, sino una descripción de un tipo de orden diferente del determinista que se asocia popularmente con la ciencia y las matemáticas. La probabilidad es la rama de las matemáticas que describe la aleatoriedad". Del mismo modo, Yates, Moore y McCabe (2000, p. 314) definen un fenómeno aleatorio como aquel en el que, "Los resultados individuales son inciertos, pero no obstante hay una distribución regular de los resultados en un gran número de repeticiones". Estas definiciones, por un lado, explican la distinción estadística entre azar y aleatoriedad y, por otro lado, mantienen correspondencia epistémica con lo que Cournot postuló al inicio de la sistematización de los procesos de toma de decisiones. Así, mientras que el azar es la intersección fortuita de varias líneas causales independientes que hacen que un evento se manifiesta, la aleatoriedad es la regularidad que surge debido a la acumulación de datos informados por estos eventos. Esto ayuda a comprender por qué en situaciones de azar, es decir, que involucran un solo evento fortuito, es común que se recurra a la intuición antes que al cálculo de probabilidades. Esto concuerda con Hoffrage, Krauss, Martignon & Gigerenzer (2015), quienes señalan que las estrategias más intuitivas surgen en situaciones con tiempo, conocimiento y capacidad computacional limitados. Son las situaciones instanciadas por la aleatoriedad, antes que, por el simple azar, las que permiten recolectar datos y, en definitiva, analizar procesos probabilísticos.

Referencias

Arkes, H., Gigerenzer, G., & Hertwig, R. (2016). How bad is incoherence?. *Decision, 3*(1), 20-39. https://doi.org/10.1037/dec0000043

Bennett, D. (2014). Sticking to your guns: a flawed heuristic for probabilistic decision-making. In E.J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 261-281). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_14

Boyatzis, R. (1998). *Transforming qualitative information: Thematic analysis and code development.* Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Cantoral, R. (2013). Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Editorial Gedisa SA.

Cantoral R. (2019) Socioepistemology in Mathematics Education. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 790-797). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100041-1

Cournot, A.A. (1843). *Exposition de la théorie des chances et des probabilités.* Paris: Hachette.

David, F. (1962*). Games, gods and gambling: Origins and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era*. New York: Hafner Publishing Company.

Espinoza, L., Vergara, A., & Valenzuela, D. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 21*(3), 247-274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131

Gandhi, H. (2018). Understanding Children's Meanings of Randomness in Relation to Random Generators. In C. Batanero, & E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics* (pp.181-200). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_11

Gigerenzer, G. (2019). Expert Intuition Is Not Rational Choice [Review of Sources of Power, by G. Klein]. *The American Journal of Psychology, 132*(4), 475–480. https://doi.org/10.5406/amerjpsyc.132.4.0475

Helton, J. C. (1997). Uncertainty and sensitivity analysis in the presence of stochastic and subjective uncertainty. *Journal of Statistical Computation and Simulation, 57*(1-4), 3-76. https://doi.org/10.1080/00949659708811803

Hoffrage, U., Krauss, S., Martignon, L., & Gigerenzer, G. (2015). Natural frequencies improve Bayesian reasoning in simple and complex inference tasks. *Frontiers in psychology*, 6, 1473. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01473

Kahneman, D., & Tversky, A. (1973). On the psychology of prediction. *Psychological review, 80*(4), 237. https://doi.org/10.1037/h0034747

Martignon, L. (2014). Fostering children's probabilistic reasoning and first elements of risk evaluation. In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 149-160). Dordrecht : Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_9

Moore, D.S. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95-146). Washington D.C: National Academy Press.

Mousavi, S., & Gigerenzer, G. (2017). Heuristics are tools for uncertainty. *Homo Oeconomicus, 34*(4), 361-379. https://doi.org/10.1007/s41412-017-0058-z

Vergara, A., Estrella, S., & Vidal-Szabó, P. (2020). Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de decisiones. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 23*(1), 7-36.

LA COMBINATORIA EN LA CREACIÓN MUSICAL: EL JUEGO DE DADOS MUSICALES DE KIRNBERGER

M. Alicia Venegas-Thayer

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

En 1579 el teórico musical J.P Kirnberger creó un sistema de compases que podían ser combinados con solo lanzar uno o dos dados y con ello crear millones vals, minuetos y polonesas. Se trata del primer juego de dados musicales de más de una veintena creados en Europa. En su introducción, Kirnberger invita al lector a valorar lo novedoso de su propuesta y detalla orientaciones para su uso. Considerando una aproximación Comognitiva, he realizado un análisis a dicha introducción, en la que identifiqué un discurso metafísico y matemático de la combinatoria. El primero, cuando la combinatoria es considerada como un modelo de creación simple y, el segundo, en la cuantificación de todas las melodías que se pueden obtener al combinar los compases musicales creados para el juego. Finalizo con una reflexión sobre el diseño de experiencias educativas interdisciplinarias basadas en la creación musical y en las cuales estas dos perspectivas estén presentes en la enseñanza de la combinatoria.

Enseñanza de las matemáticas, interdisciplinariedad, historia del arte, matemática combinatoria.

INTRODUCCIÓN

Durante los siglos XVII y XVIII en Europa, la relación entre el cálculo combinatorio y la música venía de la mano con los estudios teóricos de la música y las prácticas pedagógicas de la época, asociadas a la improvisación y la composición musical (Berkowitz, 2010; Knobloch, 2002). Su uso tenía una razón práctica: desbloquear la imaginación de los estudiantes, “el método es mecánico; los materiales son pocos y simples; pero las posibilidades son impensablemente vastas” (Berkowitz, 2010, p. 65).

Otro reflejo de esta relación entre combinatoria y música de la época, son los Juegos de Dados Musicales (*Musikalisches Würfelspiel*). Más de una veintena de estos juegos fueron creados principalmente en Europa del Este (Hedges, 1978). En todos ellos el objetivo era el mismo: ofrecer al público, sin importar su nivel de conocimiento musical, la posibilidad de "componer" pequeñas melodías, según el género de danza intencionado por el autor del juego; minuetos, vals, polonesas o marchas (Hedges, 1978; Zbikowski, 2002). Estos juegos tenían el beneficio de que la música producida con lo que parecía ser algo totalmente azaroso era ordenada y coherente (Hedges, 1978; Zbikowski, 2002). Esto se debe a que estaban compuestos por pequeños trozos de música o compases prefabricados por sus autores, los que debían ser elegidos de una tabla por el jugador solo lanzando uno o dos dados. Para el usuario del juego la habilidad musical era reemplazada por el azar, mientras que para su creador el desafío radicaba en obtener un conjunto de compases musicales que al ser unidos se obtuviera una melodía que respondiera a un cierto género de danza.

2021. En Gómez, D. M., Cornejo, C., & Martínez, M. V. (Eds.) Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, pp. 103-107. Rancagua, Chile.

En este reporte de investigación presento un análisis realizado al texto introductorio del primero de estos juegos de dados musicales, creado por el teórico musical Johann Philipp Kirnberger (1721–1783). En el estudio de dicho texto, identifiqué un uso de la combinatoria que podemos diferenciar entre las dos perspectivas epistemológicas presentes en la historia del análisis combinatorio: metafísica y matemática. La primera entendiendo la combinatoria como una lógica inventiva, en la que se crea un conjunto de partes combinables y reglas para su unión, mientras que la segunda, dice relación con las reglas de cálculo de la combinatoria que permiten cuantificar los alcances de creación de dichas partes.

ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA COMBINATORIA

El filósofo y teólogo catalán Raimundo Lulio (1232-1315), es usualmente considerado como el fundador de la teoría de la combinatoria (Haking, 2006). Entre 1305 y 1308, publicó su obra *Ars Generalis ultima*, su formulación de los signos para representar aquellos principios fundamentales que al ser combinados permiten obtener todos los componentes de mundo (Bonner, 2007; Haking, 2006). Durante el XVI y el XVII, su obra volvió a tener relevancia. Entre sus seguidores se encuentra Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quien se inspiró en esta lógica inventiva para desarrollar su *Dissertatio de Ars Combinatoria* en 1666 (Beuchot, 1985). En ella, Leibniz "desarrolla la idea de que todos los conceptos pueden descomponerse en un pequeño número de elementos simples no-contradictorios" (Cabañas, 2010, p. 73); al determinar esos conceptos, los demás podrían ser obtenidos a partir de su combinación (Cabañas, 2010). Presentó un *calculus universalis* en términos de métodos de combinatoria, los que ejemplificó a través de una serie de problemas y teoremas sobre permutaciones (*situs*) y combinaciones (*complexiones*), con aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento, tales como, lógica, teología, jurisprudencia, medicina y música (Loemker, 1989). Esta disertación no debe ser considerada como una obra matemática sino metafísica; como la ciencia de los entes y las afecciones de esos entes, por lo que estudia las propiedades que son comunes a todas las clases de entes (Leibniz, 1989). En cambio, si hablamos de una aproximación matemática de la combinatoria, corresponde a la formulación de las reglas para cuantificar las combinaciones y permutaciones posibles. Un desarrollo en esa línea se observa en la obra de Jacob Bernoulli (1655-1705), *Ars Conjectandi* de 1713, que contiene una segunda parte llamada *Doctrinam de Permutationibus & Combinationibus* (Bernoulli, 1713).

TEORÍA COMOGNITIVA

A partir de la premisa de que somos seres socialmente comprometidos desde el día que nacemos, Sfard (2008) afirma que todas aquellas habilidades que nos caracterizan como seres humanos, tienen su origen en una actividad histórica y colectivamente implementada. Siendo el pensamiento una de esas habilidades, su precedente es la comunicación interpersonal. De esta manera, el pensamiento puede ser útilmente definido como la acción de comunicarse con uno mismo de la misma forma en que se comunica con otros (Sfard, 2008). Entonces, toda caracterización de comunicación corresponde a una caracterización del pensamiento; cognición y comunicación son el mismo proceso, uno a nivel intrapersonal y el otro, interpersonal, por lo que son unidos bajo el nombre *comognición* (Sfard, 2008).

“Los diferentes tipos de comunicación, o bien de comognición, que reúna a algunos individuos y excluya a otros, son denominados discursos” (Sfard, 2008, p. 91). Es posible distinguir un discurso de otro a partir de cuatro rasgos característicos: términos clave, mediadores visuales, narrativas validadas y rutinas. Estas

últimas corresponden a los hábitos de reaccionar ante ciertas acciones con cierto tipo de reacciones (Sfard, 2008). La distinción entre discursos permite identificar cuál o cuáles son las formas de comognición que subtienden un proceso comunicativo entre uno o más individuos.

Andamiajes discursivos como metodología de investigación

Desde una perspectiva comognitiva, la unidad de análisis es el discurso. "Los discursos están presentes en casi la mayoría de nuestras actividades prácticas, aunque no necesariamente de manera explícita" (Sfard, 2008, p. 117). Incluso cuando nos referimos a aquellas herramientas concretas creadas por el ser humano, "el discurso está ahí, dentro de la herramienta, en la forma de un código de programación" (Sfard, 2008, p. 117). Esto quiere decir, que toda actividad práctica y toda herramienta está mediada por un "cuerpo multicapas de narrativas" que conforman un "andamiaje discursivo" (Sfard, 2008, p. 117). Se trata de todas las narrativas formuladas a lo largo del desarrollo histórico del discurso que han mediado cierta actividad humana, hasta ser practicada de la manera que actualmente se hace.

Para esta investigación, consideré la noción de andamiaje discursivo como un recurso metodológico para el análisis del juego de dados de Kirnberger. Así, el análisis de esta obra consistió en identificar los discursos disciplinarios que pudieron haber fundamentado la propuesta de Kirnberger. El estudio consistió en: (1) revisión de antecedentes históricos de la época asociados a la combinatoria y composición musical; (2) formulación de un andamiaje discursivo, identificando: (a) los potenciales problemas clave que el autor responde a través del juego de dados; (b) las rutinas del discurso de juegos de dados; (c) los discursos disciplinarios de la época que fundamentan el discurso del juego de dados.

SOBRE LA INTRODUCCIÓN DEL JUEGO DE DADOS DE KIRNBERGER

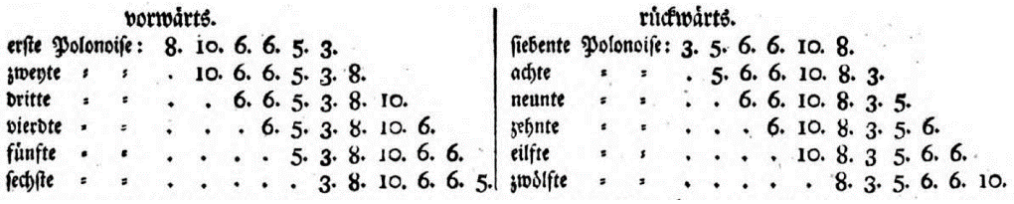
El primer juego de dados musicales se llama "El siempre listo compositor de Polonesas y Minuetos" ("*Der allezeit fertige Polonoisen= und Menuettencomponist*") y fue creado por Johann Philipp Kirnberger. El texto original de la introducción está escrito en alemán y si bien no se realizó una traducción literal, se recopiló suficiente información como para realizar su análisis. En la introducción del el "compositor" de Kirnberger, identificamos tres problemas clave que el autor responde considerando tanto una perspectiva metafísica como matemática de la combinatoria: (1) aproximar el proceso de creación musical a cualquier persona interesada en la música; (2) optimizar la construcción de melodías utilizando el compositor; (3) calcular el número de melodías posibles de obtener a partir de los compases creados.

mit einem Würfel	1	2	3	4	5	6					
mit zwey Würfeln	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 Wurf	70	10	42	62	44	72	114	123	131	138	144
2 ∘ ∘	34	24	6	8	56	30	112	116	147	151	153
3 ∘ ∘	68	50	60	36	40	4	126	137	143	118	146
4 ∘ ∘	18	46	2	12	79	28	87	110	113	124	128
5 ∘ ∘	32	14	52	16	48	22	89	91	101	141	150
6 ∘ ∘ .	58	26	66	38	54	64	88	98	115	127	154

Figura 1: Tabla para la composición de una polonesa (Kirnberger, 1756, p. 7).

Sobre el primer problema, fue posible apreciar la combinatoria desde su perspectiva metafísica, como una lógica inventiva que conduce al músico a modificar sus rutinas de composición musical. Ya no se trata solo de la composición de una melodía, sino de una serie de compases combinables que respondan a la estructura de una melodía galante. Sin embargo, la producción de tales compases es realizada desde los discursos musicales asociados a sistemas métricos y de armonía musical. Todos los compases son numerados y puestos de manera desorganizada en una sola partitura, mientras que sus números están organizados en tablas como la de la Figura 1. Cada fila corresponde a un tipo de compás, determinado por su posición en la melodía. Luego que el usuario haya lanzado uno o dos dados para seleccionar un compás de cada fila es que "aparece" la correcta partitura de una polonesa o un minueto.

Sobre el segundo problema, Kirnberger (1756) ofrece una opción a los jugadores para usar de manera más eficiente los resultados de los dados. En vez de indicar que los compases pueden ser elegidos arbitrariamente por cada fila de la tabla, señala que se puede crear arbitrariamente una secuencia de resultados de los dados. Además, con solo una secuencia de resultados se pueden obtener hasta 12 melodías diferentes. Para ello, el jugador debe considerar el primer número de la secuencia como el último y obtendrá una nueva melodía, cada vez que repita el proceso. Luego, puede invertir la secuencia y realizar el mismo proceso. Ejemplifica ello con la tabla de la Figura 2, en la que presenta la secuencia 8, 10, 6, 6, 5, 3, y las otras secuencias son obtenidas a partir de ella.



vorwärts.		rückwärts.	
erſte Polonoiſe:	8. 10. 6. 6. 5. 3.	ſiebente Polonoiſe:	3. 5. 6. 6. 10. 8.
zweyte	10. 6. 6. 5. 3. 8.	achte	5. 6. 6. 10. 8. 3.
dritte	6. 6. 5. 3. 8. 10.	neunte	6. 6. 10. 8. 3. 5.
vierdte	6. 5. 3. 8. 10. 6.	zehnte	6. 10. 8. 3. 5. 6.
fünfte	5. 3. 8. 10. 6. 6.	eilfte	10. 8. 3 5. 6. 6.
ſechſte	3. 8. 10. 6. 6. 5.	zwölfte	8. 3. 5. 6. 6. 10.

Figura 2: Secuencias de resultados obtenidas a partir de una dada (Kirnberger, 1756, p. 4).

Para el tercer problema, Kirnberger recurre al intelectual de la élite económica judía Aaron Gumpertz, quien aplica las reglas de combinatoria para obtener una aproximación sobre el total de melodías posibles de obtener en este juego. Aquí el rol de la combinatoria es cuantificar; es una nueva narrativa sobre el "compositor" formulada y validada por técnicas matemáticas de cálculo, similares a las observadas en la obra de Bernoulli.

DISCUSIÓN

Si bien podríamos caracterizar la combinatoria como un modelo mecánico y quizás primitivo de creación, parece ser efectivo para una primera aproximación a la creación musical. Para los jugadores, el proceso es simple, sólo hay que reunir las partes para lograr un resultado musical, mientras que, para creador del recurso, el trabajo demandado es mayor, puesto que debe crear un conjunto de partes combinables, así como las instrucciones para su combinación, de tal manera que el resultado final sea una melodía que siga la estructura melódica deseada.

A partir de la revisión de "compositor" de Kirnberger, surge la reflexión sobre la relación entre la aproximación metafísica y matemática de la combinatoria. Posiblemente, si ambas perspectivas estuvieran presentes en el aprendizaje de la combinatoria, permitirían una práctica reflexiva asociada a

estas reglas de cálculo; ofreciendo un propósito a la cuantificación de combinaciones y permutaciones de elementos. Considero que el diseño de experiencias educativas interdisciplinarias asociadas a la creación musical podría ser un medio para dicha práctica reflexiva. Para ello, podemos considerar los tres problemas asociados al desarrollo del discurso del "compositor" de minuetos y polonesas de Kirnberger, donde la combinatoria es presentada como una lógica inventiva y los cálculos son parte de la reflexión en cuanto a los alcances creacionales del juego. El siguiente paso en este estudio es diseñar una actividad de enseñanza basada en los aspectos aquí señalados. Finalmente, dejo la reflexión sobre la incorporación de problemas de creación musical en el proceso de aprendizaje de la matemática como un medio para que los estudiantes se planteen objetivos personales, proyecten metas y operacionalicen sus criterios artísticos por medio de narrativas matemáticas.

Agradecimientos

Al Dr. Hiep Han por su colaboración en la traducción. Financiado por DI Postdoctorado de la PUCV.

Referencias

Berkowitz, A. (2010). The Improvising Mind: Cognition and Creativity in the Musical Moment. Oxford University Press.

Bernoulli, J. (1713). Ars Conjectandi, Opus Posthumum. Accedit tractatus de seriebus infinitis, et epistola Gallicèscripta de ludo pilae reticularis. Impensis Thurnisiorum, Fratrum. https://play.google.com/books/reader?id=kD4PAAAAQAAJ&pg=GBS.PA10&hl=es

Beuchot, M. (1985). El Ars Magna de Lulio y el Ars Combinatoria de Leibniz. Diánoia, 31(31), 183–194. https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.1985.31.734

Bonner, A. (2007). The Art and Logic of Ramon Llull: A user's guide. Koninklijke Brill.

Cabañas, L. (2010). La superación por Leibniz de la lógica aristotélica. Revista Internacional de Filosofía, 3, 67–74. http://revistas.um.es/daimon/article/view/119041

Knobloch E. (2002). The Sounding Algebra: Relations Between Combinatorics and Music from Mersenne to Euler. En G. Assayag, H. G. Feichtinger, J. F. Rodrigues (Eds.), Mathematics and Music (pp. 27–48). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-04927-3_2

Haking, I. (2006). The emergence of probability: A philosophical study of early ideas about probability induction and statistical inference (2a edición). Cambridge University Press.

Hedges, S. A. (1978). Dice music in the eighteenth century. Music & Letters, 59(2), 180–187. https://www.jstor.org/stable/734136

Kirnberger, J. P. (1756). Der allezeitfertige Menuetten- und komponist [El siempre listo compositor de polonesas y minuetos]. George Ludewig Winter. https://imslp.org/wiki/Der_allezeit_fertige_Polonoisen-_und_Menuettencomponist_(Kirnberger%2C_Johann_Philipp

Leibniz, G. W. (1989). Dissertation on the art of Combinations 1666 (Selección). En L. E. Loemker (Ed.) Gottfried Wilhelm Leibniz: Philosophical papers and letters (2a edición, pp. 73–84). Kluwer Academic Publishers.

Loemker, L. E. (1989). Introduction: Leibniz as philosopher. En L. E. Loemker (Ed.) Gottfried Wilhelm Leibniz: Philosophical papers and letters (2a edición, pp. 1–69). Kluwer Academic Publishers.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge University Press.

ESTUDIO DE CLASE PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DESDE UNA MIRADA DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO PERSONAL DEL ESTUDIANTE.

Natalia Alvarado, Leslie Aravena, Rodrigo Rojas-Muñoz y Angélica Viza

Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad Austral de Chile

Este reporte de investigación presenta los resultados de los pilotajes realizados en relación a un Estudio de Clase sobre la Función Cuadrática. Los datos de la aplicación de esta situación de aula fueron analizados usando la Teoría de Espacio de Trabajo Matemático. La clase está diseñada para ser implementada en estudiantes de 2° Año Medio (14-15 años). Estos resultados indican que los estudiantes logran activar la génesis semiótica y la instrumental, pero no la discursiva. Como consecuencia se crea una reformulación que corresponde a una secuencia didáctica de 3 clases que incluye la clase discutida en este trabajo.

Función Cuadrática, Construcción de una Función, Educación Remota, Espacio de Trabajo Matemático, Estudio de Clase Japonés.

ANTECEDENTES

Diversos autores (Carnelli, 2019, Graf *et al.,* 2018, Briceño y Buendía, 2016) han concordado que hay cinco obstáculos acerca de la función cuadrática: la interpretación de la información gráfica, la relación entre la función y la ecuación cuadráticas, la analogía entre la función cuadrática y la función lineal, el papel de los coeficientes nulos y el énfasis en una sola coordenada de los puntos especiales.

En particular, los estudiantes tienden a considerar que la función cuadrática tiene un dominio acotado dentro de los reales. Los estudiantes confunden el parámetro a con la pendiente de una recta. Cuando se cambia del registro tabular al geométrico, los estudiantes completan los espacios con segmentos lineales y no estudian el comportamiento curvo intermedio.

Entre las razones que se esgrimen para la aparición de estos obstáculos son la memorización de reglas y propiedades (Almonacid, 2018), la mayor importancia que se le da a las representaciones simbólicas y verbales sobre las representaciones numéricas y gráficas (Parra, 2015). En este sentido, los autores recomiendan los cambios de registros, aproximaciones preliminares numéricas y gráficas, el uso de secuencias numéricas, el uso de softwares (Huapaya, 2012) y la modelación (Pezoa y Morales, 2016, Briceño y Buendía, 2016).

Lo anterior, nos lleva a inferir que el aprendizaje actual de la función cuadrática, y otras funciones, es superficial y no funcional, priorizando los métodos procedimentales algebraicos, lo que obstaculiza la comprensión de la función cuadrática en contexto, llevando a que los estudiantes les dificulte conectar

situaciones de tipo cuadrático con la función cuadrática. Además, el énfasis curricular en las aplicaciones proporcionales y exponenciales, incentiva a los estudiantes a tratar de generalizar los fenómenos observados a este tipo de modelos.

Por esto, nuestra propuesta espera poder responder la siguiente pregunta de investigación ¿Cómo construir la función cuadrática a partir del modelamiento de una situación cuadrática?

METODOLOGÍA

Este trabajo de investigación se enmarca en la metodología del Estudio de Clase, se realizó el diseño, análisis y reformulación de un plan de clase, en donde se consideraron todos los aspectos pedagógicos y recurso necesarios para lograr el objetivo de la clase, así también destacar que este:

> *"Consta de tres aspectos bien definidos, que se realizan de manera reiterada, de manera de mejorar progresivamente su diseño y ejecución: un grupo de profesores prepara una clase (o conjunto de clase), luego uno de ellos la enseña públicamente-asisten no sólo quienes la prepararon- y finalmente se hace una sesión de revisión y crítica."* (Mena 2007, p.2)

Los resultados de aprendizaje son analizados usando la Teoría de Espacio de Trabajo Matemático, porque permite vincular los aspectos epistemológicos y cognitivos (activación de génesis) para entender el trabajo matemático desarrollado por los estudiantes cuando se enfrentan a una tarea, en este caso, de función cuadrática.

Esta clase fue piloteada con estudiantes de Pedagogía Básica Mención Matemática y estudiantes de 4° Medio (17-18), posterior a este reporte, la clase se implementará en cursos de 2° Año Medio (14-15 años). Los estudiantes participarán en dos formatos: a distancia de forma online sincrónico y presencial. La clase considera 50 minutos de actividades.

Diseño de la clase

Consigna 1 (20 minutos):

Con el papel lustre construya los siguientes cuadrados

Figura 1: Imagen de la Consigna 1 de la Clase (creación propia)

La primera figura corresponde a un papel lustre cuyo lado mide 1u. La segunda figura corresponde a un cuadrado de lado 2u. La tercera figura corresponde a un cuadrado de lado 3u.

Preguntas: ¿Cuántos papeles lustres se utilizaron en la construcción de cada figura? ¿Cómo determinamos la cantidad de papeles a utilizar en el caso de la figura 4?

Plenario: Ahora, si queremos determinar la cantidad de papeles lustre a utilizar en la figura 5, ¿cuántos son? ¿Cuál es la cantidad de papeles que se requiere para la figura 15? ¿Qué pasa con la cantidad de

papeles lustre si la longitud del lado del cuadrado es n? ¿Qué representan la cantidad de papeles lustres en cada figura?

Consigna 2 (20 minutos): Para poder organizar esta información ubicaremos los valores en una tabla. Ahora ubiquemos los valores obtenidos en la tabla como puntos en el plano cartesiano. Ubicaremos la medida del lado en el eje horizontal y el valor del área en el eje vertical. ¿Podemos unir todos estos puntos con una línea recta? ¿Por qué?

Consigna 3 (10 minutos): ¿Qué pasa si la longitud del lado no es un entero?

El profesor presenta la actividad en el pizarrón (proyección desde GeoGebra) y pide a los estudiantes que calculen los valores del área para valores positivos no enteros (por lo menos 3 valores entre cada par de enteros consecutivos). Preguntas en la plataforma Mentimeter, en la cual los estudiantes deben ingresar con un código para responder estas preguntas: ¿Qué representa la gráfica? ¿Cómo se comporta la gráfica?

Institucionalización (10 minutos):

La función tiene un comportamiento creciente, pero no es una función lineal ni afín. La representación gráfica corresponde a un comportamiento parabólico creciente de una función cuadrática. Representación algebraica: $f(x) = x^2$

RESULTADOS

A continuación, se analiza las producciones y respuestas de la aplicación piloto de la clase de la Función cuadrática, aplicada en estudiantes universitarias en formación de la carrera Pedagogía en Educación Básica con mención en Ciencias y Matemática (Estudiante 1) y estudiantes de enseñanza media, específicamente 4° Medio (Estudiante 2).

Actividad 1: Ambas estudiantes activan el plano [Sem - Ins] ya que, las figuras de polígonos (cuadrados) son visualizadas como reglas de formación en la secuencia de las figuras dadas, activando la génesis semiótica. Luego, la operatoria aritmética realizada es usada como un artefacto que le permite construir la potencia al cuadrado (génesis instrumental).

Actividad plenaria: Ambas estudiantes utilizan un lenguaje aritmético cuyo proceso las lleva a visualizar y determinar la regla de formación en la secuencia de figuras (génesis semiótica). Luego, a partir de la operatoria aritmética se construye la expresión $n \cdot n = n^2$ (génesis instrumental), por lo tanto, se activa el plano [Sem - Ins]. Es importante mencionar que la Estudiante 1 no agrega más información respecto a la expresión $n \cdot n = n^2$ ya que, está de acuerdo con la respuesta de sus compañeras.

Finalmente, ante la última pregunta ¿qué representa la cantidad de papeles lustres de cada figura? La Estudiante 2 relata lo que observa, lo que representa la cantidad de papeles lustres “es una división del cuadrado más grande, es una porción”, pero no asocia el concepto del área con la expresión n^2. Así la estudiante no logra activar la génesis discursiva. En cambio, la estudiante 1 en su discurso plantea que la cantidad de papeles lustres es “el área, el lado al cuadrado”, agregando que los procesos de cálculo representan también el área del cuadrado.

Actividad 2: la Estudiante 2 activa la génesis instrumental al utilizar la tabla de valores del lado y el área como un artefacto, interpreta dichos valores como coordenadas y construye la gráfica de la función. Ante la pregunta ¿podemos unir los puntos con una línea recta? ¿Por qué? La estudiante dice que "NO, porque es una exponencial, porque es una curva y es creciente", la respuesta se basa en el comportamiento que observa de la gráfica. Pero no logra fundamentar en base a propiedades de la función lineal o la función exponencial como contenido previo para demostrar que es una exponencial. Por lo tanto, la estudiante 2 no logra activar una génesis discursiva.

Respecto a la Estudiante 1, se observa que desarrolla la tabla de valores, representando la longitud del lado y el área, pero al momento de graficar representa de manera pictórica el área de los cuadrados. Por lo tanto, solo activa la génesis semiótica.

En la actividad final (conclusiones), respecto de la pregunta: ¿Qué podemos observar sobre la función cuadrática?, la Estudiante 1 manifiesta que la gráfica es "directamente proporcional, ya que ambas variables aumentan", por lo tanto, la estudiante activa la génesis semiótica, utilizando el concepto de proporcionalidad directa como un representamen y lo visualiza con la forma creciente de la gráfica. Pero no logra activar una génesis discursiva ya que, a pesar de tener conocimiento respecto a que una proporcionalidad directa está representada por una línea recta, no logra probar en base a las propiedades que la gráfica que se muestra es distinta a una línea recta.

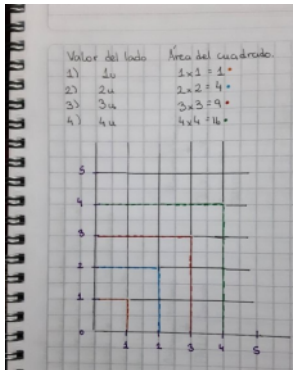
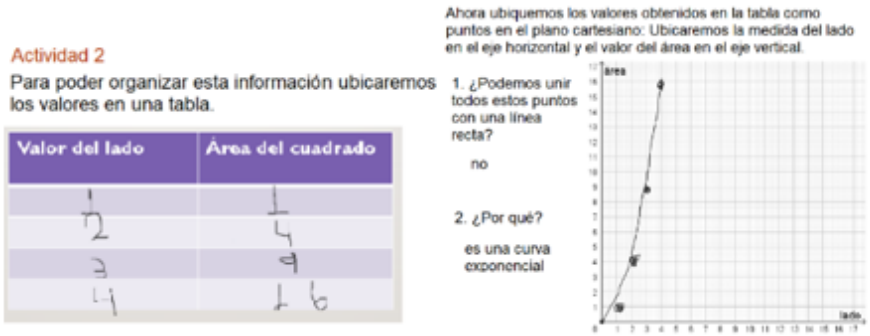
Producción estudiante 1	**Producción estudiante 2**
	

Tabla 1: Producciones de las estudiantes 1 y 2 para la Actividad 2 de la Clase

DISCUSIÓN

La aplicación de aula correspondiente a los estudiantes de 4to medio contó con 40 minutos aproximadamente y en el caso de los estudiantes de educación superior 60 minutos, ambas de forma sincrónica y remota. Los estudiantes en el caso del primer grupo invirtieron tiempo extra al planificado en el proceso de manipulación de las figuras de papel lustre, por lo que en el caso de la segunda aplicación realizada, esta manipulación fue reformulada, para que lo trabajaran en Jamboard (pizarra virtual de Google suite education), la cual se encontraba prediseñado para la aplicación, lo que hizo reducir los tiempos de la clase, pero no de manera significativa, ya que los estudiantes debían tener manejo de la

plataforma, esto implica que al tener tiempos menores a 60 minutos (hora cronológica), no sería posible completar la actividad con los estudiantes.

Otro elemento reformulado entre la primera clase y la segunda clase fue, en el caso de los estudiantes universitarios, que no reconocieron de manera natural y confundieron las variables al momento de determinarlas de forma autónoma y ubicarlas en la tabla, por ello en la segunda aplicación se intencionó la correspondencia de las variables ($\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$) con el lado (variable independiente) y con el área (variable dependiente).

Desde otra arista, rescatamos que tanto la primera aplicación como la segunda, no fueron suficientes para poder construir elementos de la función cuadrática, tampoco la propia función, esto a pesar de que los estudiantes podrían haber reconocido el concepto trabajado como objetivo en la clase, ya que ambos grupos lo revisaron en un nivel previo de escolaridad.

Desde el ETM personal del estudiante, podemos evidenciar que la tarea propicia la activación de la génesis semiótica y la génesis instrumental, y de manera parcial la génesis discursiva, debido a que la tarea busca la construcción de la función cuadrática haciendo uso de las características y propiedades de la función lineal y que en base a este conocimiento puedan validar que la gráfica que se obtiene tiene un comportamiento cuadrático.

PROYECCIONES

Dado que la clase implementada no fue suficiente para generar un producto consistente para caracterizar la función cuadrática y sus elementos, se confeccionaron dos clases sucesivas posterior a esta, las cuales se encuentran enfocadas en la aplicación mediante el uso de patrones y modelación para la construcción del concepto de la función cuadrática y sus elementos característicos.

Referencias

Almonacid, A.I. (2018). *Modelización de Funciones Cuadráticas: Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de humanidades* [Tesis para optar al grado de Magister]. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Briceño, O. y Buendía, G. (2016). Una secuencia para la introducción de la función cuadrática a través de la resignificación de aspectos variacionales. En *Tecné, episteme y didaxis: revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología, 39*, 111-130.

Carnelli, G.F. (2019). *Una Ingeniería Didáctica para la Función Cuadrática* [Tesis para optar al grado de Licenciado]. Universidad Nacional de General San Martín.

Graf, E., Fife, J., Howell, H. y Márquez, E. (2018). *The Development of a Quadratic Functions Learning Progression and Associated Task Shells* (Research Report No. RR-18-47). Princeton, NJ: Educational Testing Service.

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria.* Tesis de Magister, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Mena, A. (2007). *El estudio de clases japonés en perspectiva*, Informe de investigación presentado en la XIII Jornada de la Sociedad Chilena de Educación Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

CONSTRUCCIÓN DEL ISOMORFISMO DE ESPACIOS VECTORIALES A TRAVES DE UNA ACTIVIDAD CONTEXTUALIZADA

Claudio Zamorano Sánchez, Marcela Parraguez Gonzalez

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Basados en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), es de interés analizar los mecanismos mentales que evidencia un estudiante cuando construye el isomorfismo de espacios vectoriales (IEV), a través, de una problemática situada en el estudio de un principio eléctrico, con la cual, se pondrán a prueba no solo la evolución de los esquemas previos cuando son sometidos a tareas propios del problema, sino que también, la articulación de los objetos del Álgebra Lineal (AL) para investigar sobre la naturaleza unificadora del IEV al interior del AL. Resultados preliminares de la investigación dan cuenta de la importancia del contexto y las tareas para el reconocimiento de los objetos del AL en contextos concretos y la existencia de una articulación entre las interpretaciones funcional, matricial y geométrico-figural, para la generación de un esquema multinterpretativo del IEV. Esto último se fundamenta a través del modelo de Descomposición Genética (DG), que pone de relieve los mecanismos mentales asociados a la construcción del IEV.

Didáctica del Álgebra Lineal, Isomorfismo de Espacios Vectoriales, Modelo Multinterpretativo, modelación en APOE.

INTRODUCCIÓN

El presente reporte de investigación aporta a la enseñanza del AL desde la perspectiva de la teoría APOE, aplicada a un contexto concreto no tradicional, con la finalidad que el estudiante enfrente situaciones problemáticas y pueda desarrollar un proceso de modelación. En este sentido, el objetivo principal del reporte de investigación es proponer las construcciones mentales que un estudiante evidencia cuando construye un IEV, a través, de una situación contextualizada en la ley Kirchhoff para voltajes en circuitos eléctricos paralelos, en la que el estudiante deberá enfrentarse a diversas tareas, develando sus estructuras mentales cuando responde a las tareas, para así interpretar la articulación que él hace de los conceptos del AL para construir el IEV.

Ahora bien, es necesario que el estudiante pueda reconocer que los objetos del AL evolucionan en su complejidad, esto es, los sistemas de ecuaciones, matrices, espacios vectoriales, bases, junto con las transformaciones lineales, interactúan para unificarse en nuevos objetos. Por lo tanto, para llevar a cabo el reporte de investigación sobre el IEV, se diseñó una actividad exploratoria contextualizada que, a partir del reconocimiento de un conjunto solución de un sistema de ecuaciones, se aplican acciones sobre los esquemas de función y Transformación Lineal (TL) para (1) analizar las estructuras mentales cuando se construye el IEV y (2) determinar el rol que juegan las tareas (acciones) para mostrar los mecanismos mentales involucrados en la articulación conceptual.

De manera muy general, para alcanzar el objetivo anterior, nos preguntamos cómo se construye el IEV y con ello, si existen elementos, que permitan articular las interpretaciones —funcional, matricial y geométrico-figural del IEV— a través del ciclo metodológico que propone la teoría APOE esto es, (1) con base en un estudio sobre el objeto IEV, se diseña una Descomposición Genética (DG) hipotética que

modela la construcción del IEV en un estudiante, (2) se diseña un instrumento que permita validar o refinar las construcciones declaradas en la DG hipotética, para luego, (3) analizar las respuestas entregadas por el estudiante en contraste con la DG propuesta de IEV.

Finalmente, los resultados mostrarán que el IEV se desarrolla con base en tres interpretaciones —funcional, matricial y geométrico-figural— a través de las cuales la presente investigación busca identificar la existencia de elementos que permitan unificar y articular los componentes de un esquema Multinterpretativo de IEV.

ANTECEDENTES

La importancia del AL radica no solo en la aplicación de sus conceptos en la resolución de problemas propios de la línea o en asignaturas como el cálculo, ecuaciones diferenciales, entre otros, sino que también, la posibilidad de ser una herramienta concreta para resolver problemáticas contingentes en otros contextos ligados al desarrollo del Pensamiento Científico. En este sentido, investigadores de la Didáctica de la Matemática (DM) han reportado en diversas investigaciones (Arnon, et al., 2014) que, la enseñanza del AL carece de contextos donde el estudiante pueda observar de forma concreta, cómo los conceptos del AL son un pilar fundamental para resolver situaciones problemáticas en diversos contextos del conocimiento científico.

Por consiguiente, la realización de actividades contextualizadas en situaciones problemáticas no tradicionales contribuye a visualizar la comprensión que tienen los estudiantes sobre el cómo se construye un objeto matemático. En este sentido, Trigueros (2019), argumenta que las actividades *reales o realísticas* contribuyen a la comprensión de conceptos abstractos del AL y, junto con ello, proporcionan información sobre cómo están estructurados los conocimientos del AL para la identificación de factores que ayuden a su evolución.

Hay que mencionar que, el diseño de actividades, desde la perspectiva de APOE, considera no solo la búsqueda de situaciones ficticias para la aplicación de un teorema o una propiedad, sino que, la posibilidad de que el estudiante pueda mostrar las estructuras mentales que tiene sobre un objeto matemático concreto y el cómo, a través, de tareas −en el contexto de APOE, acciones− permitirá la asimilación para la generación de un nuevo esquema como una evolución más compleja. Por tanto, estas acciones sobre esquemas previos, según Trigueros y Oktac (2019), permitirán medir el razonamiento de los estudiantes sobre un objeto matemático, así como la articulación con dominios que no son propios de la matemática, como por ejemplo la ingeniería.

En consecuencia, el diseño de actividades contextualizadas es un camino viable para develar las construcciones mentales que evidencia un estudiante. En este sentido, es importante cuestionarse sobre *¿Cuál es el rol del IEV para la articulación de los conceptos del AL? y ¿Cómo las tareas contribuyen a analizar las construcciones mentales que muestra un estudiante sobre el IEV?*

Por lo tanto, el objetivo específico es indagar sobre el IEV como un concepto unificador del AL, a través de un problema contextualizado con distintas tareas, para analizar los mecanismos mentales asociados a una DG hipotética del IEV.

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE, acrónimo de *Acción-Proceso-Objeto-Esquema*, es un modelo que describe desde una perspectiva cognitiva como un estudiante aprende un concepto matemático, describiendo cómo estos son construidos mentalmente (Arnon et al. 2014), a través de mecanismos mentales como la *interiorización,*

la encapsulación, desencapsulación, coordinación y reversión, que permiten que las estructuras mentales evolucionen según el nivel de construcción del individuo (Oktac. 2019).

Es así como APOE nos proporciona elementos y fundamentos teóricos para describir el nivel de construcción que muestra un estudiante, con base en un modelo Multinterpretativo del IEV bajo una perspectiva *cognitiva*. De acuerdo con ello, para el presente reporte de investigación, se han considerado unas preguntas de evaluación relacionada con la solución general (S_g) de un sistema de ecuaciones, para realizar una *acción* que afecta a los *esquemas* de función (transformación lineal) y el de matrices, permitiendo explorar aquellos aspectos que articulan lo Multinterpretativo del IEV.

En el escenario de este reporte de investigación, una descripción de DG hipotética considera que el estudiante debe mostrar conocimiento sobre conceptos del AL previos a la construcción del IEV, tal como especificamos a continuación: (i) Sistemas de ecuaciones lineales como un *objeto*, dado que debe poder plantear una situación contextual, determinar el conjunto solución y poder visualizarlo desde una interpretación funcional, matricial y gráfica−figural. (ii) Conjunto solución de un sistema de ecuación S_g cómo un *proceso*. (iii) La noción matemática de Función como un *esquema*, con la cual se evidencie la comprensión de los conceptos de función, dominio, recorrido, imagen y preimagen. Además, propiedades ligadas a la inyectividad y sobreyectividad. (iv) La noción de Transformación Lineal (TL) cómo un *proceso*, tal que el estudiante a través de las bases α, β pueda asociar un vector $v \in \alpha$ a un vector $w \in \beta$, tal que: $T(v) = w$. (v) La noción de base, conjuntos de vectores linealmente independientes (li) y linealmente dependientes (ld) como un *proceso*.

Dado que, se espera que el estudiante muestre los conocimientos previos mencionados anteriormente, él podría resolver el sistema de ecuaciones e identificar al conjunto solución S_g desde una interpretación funcional, matricial y gráfica−figural, y con ello mostrar la desencapsulación en un *proceso* que permita entender S_g como el dominio de una función. En este sentido, al coordinar el conjunto solución S_g con las propiedades de la función, le permitirá construir un nuevo proceso de caracterización del conjunto solución para comprenderlo como el dominio de una transformación. Luego, este último *proceso* se coordina con la noción de base de un espacio vectorial para encapsularse en una TL. Ello propone que, al realizar la *acción* de analizar las propiedades de los espacios identificados sobre el dominio y recorrido de TL, se podrá *tematizar* en un esquema de IEV.

Cabe destacar, que otra forma de presentar el IEV puede ser a través de la matriz cambio de base de T $[T]_{\alpha}^{\beta}$ (α, β son bases de los espacios de partida y llegada de *T*, respectivamente) cuando se solicite analizar las propiedades de la TL construida. Esta manera de proceder permitirá identificar los conceptos que articulan la construcción de un esquema multinterpretativo de IEV.

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo el diseño de investigación se ha considerado aplicar el ciclo metodológico de APOE. Ello conlleva (1) analizar y proponer un modelo de DG viable, que permita mostrar hipotéticamente cómo un estudiante construye el IEV desde una perspectiva multinterpretativa. Luego, (2) diseñar un instrumento que permita validar los mecanismos y estructuras mentales planteados en la DG hipotética y, por último, (3) analizar las respuestas de los estudiantes para validar o refinar la DG hipotética que muestra las construcciones mentales del estudiante. Finalmente, se espera poder identificar aquellos conceptos que permitan diseñar un modelo multinterpretativo para el IEV.

En relación con los estudiantes participantes en esta investigación, para este reporte de investigación se han seleccionado las respuestas de dos estudiantes (E1 y E2) de un curso de AL de la carrera de Pedagogía en Matemática y Estadística, que en sus mallas curriculares considera el IEV. En adición a ello, se ponen

de relieve en el análisis de las respuestas las justificaciones que utilizan los estudiantes para identificar, aplicar y resolver problemas, utilizando conceptos que propician la articulación de las interpretaciones, para la generación las componentes de un esquema Multinterpretativo de IEV.

LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

A continuación, se muestra una situación contextualizada, con la cual se espera que el estudiante pueda activar la construcción del IEV. Para ello, planteamos la situación problemática según el siguiente enunciado.

*La ley de Kirchoff para circuitos paralelos, indica que la sumatoria de los voltajes en una malla es igual a cero. Considerando que una malla es un camino cerrado por la cual la corriente sigue un camino y que, en cualquier resistencia, la caída de voltaje se determina por la ley de Ohm (V=R*I). Determine las corrientes involucradas en el circuito de la Fig. 1.*

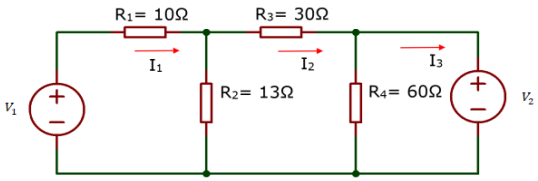


Figura 1: *Circuito paralelo*

Luego de trabajar la situación problema, el estudiante responde preguntas. Una de ellas, solicita determinar el conjunto solución y, así, poder aplicar tareas que le permitan responder a la pregunta general, sobre con cual $\mathbb{R}^n$ se puede *isomorfizar*. Con ello, se podrá caracterizar la evolución del *esquema* del IEV. En este sentido, según Piaget y García (1989) existen tres tipos de esquemas, el *Intra*, *Inter* y *Trans*. El nivel *esquema Intra de IEV* se evidencia cuando el estudiante establece conexiones parciales entre sus componentes de sistemas de ecuaciones y matrices, es decir, esta conexión es producto de un conocimiento práctico, por ejemplo, que un sistema de ecuación está relacionado con una representación matricial. Así mismo, en un *nivel esquema Inter* se establecen relaciones de equivalencias más concretas, esto es, el estudiante vincula las componentes de funciones, sistemas de ecuaciones de manera completa o parcial. Finalmente, en un nivel *esquema Trans*, se han establecido relaciones de equivalencia, entre sistemas de ecuaciones, TL y Matrices, mostrando una coherencia completa para la construcción del IEV.

RESULTADOS

El análisis está en concordancia con los niveles de *esquema Intra*, *Inter* y *Trans*, descritos en el apartado anterior e indican la construcción conceptual hacia un modelo Multinterpretativo de IEV.

En este sentido, cuando el estudiante E1 responde a las preguntas planteadas (1) sobre construir el conjunto solución del sistema de ecuación y (2) sobre isomorfizar con algún $\mathbb{R}^n$, observamos que puede establecer conexiones de correspondencia entre elementos del sistema de ecuaciones y las matrices. Ello se debe a que E1 comprende que un sistema de ecuaciones tiene una representación matricial, tal como se evidencia en la Fig. 2

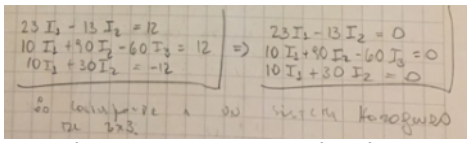


Figura 2: *Sistema de ecuación asociado al contexto problemático.*

A continuación, al seguir indagando en las respuestas de los estudiantes, particularmente en que el conjunto solución determinado corresponde a un subespacio de $\mathbb{R}^3$, es decir, está determinado por una base de 2 vectores y que, gráficamente, representa un plano en el espacio. En relación con esto último, al estudiante se le solicita isomorfizar el conjunto solución con algún subespacio de $\mathbb{R}^n$ (para algún *n*), y esto, lo podemos evidenciar, cuando E2 trata de comenzar a probar un Isomorfismo con $\mathbb{R}^3$, lo que muestra una desconexión con las dimensiones de las bases de los espacios y subespacios involucrados. (Fig.3)

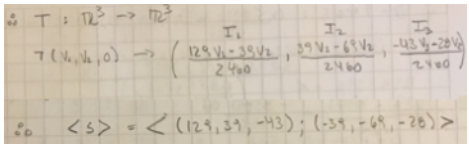


Figura 3: *Determinación de la base del conjunto solución y la TL asociada.*

Por lo tanto, se evidencia que estos estudiantes, tienden a pensar de forma algorítmica para probar un IEV, vinculando el pensar teórico con su forma de construir a un IEV.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

De acuerdo con los datos recopilados en las respuestas de los dos estudiantes, podemos reportar que el nivel de *esquema Intra* es el que predomina en E1 y E2. Ello se debe a que, las *acciones* solicitadas sobre el conjunto solución indicaban que las conexiones que realizaban eran con la intención de llevar a una construcción del IEV a nivel procedimental, es decir, construida por un conocimiento específico a una TL y, como consecuencia, la existencia de un IEV, sobre el cual se verifica la inyectividad y sobreyectividad.

Un componente emergente importante, para verificar el IEV, es la posibilidad de indagar en las interpretaciones del conjunto solución como un plano, para poder *isomorfizarlo* con $\mathbb{R}^2$, es decir, a través del estudio de las dimensiones, se podrá construir la TL del conjunto solución a través de la base canónica, incorporando otros elementos y así poder avanzar a un *esquema Inter*. Para poder indagar en el *esquema Trans*, se sugiere ampliar la muestra a más estudiantes.

Con respecto a las *acciones* solicitadas, es necesario incorporar una entrevista para profundizar en las respuestas de los estudiantes, pero se sugiere avanzar en el planteamiento de a*cciones* concretas que profundicen aún más en la forma que se interpreta un IEV de forma geométrica–figural.

Agradecimientos

ESTA INVESTIGACIÓN HA SIDO PARCIALMENTE FINANCIADA POR EL PROYECTO FONDECYT N°1180468.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS theory. New York: Springer.

Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. ZDM, 51(7), 1043-1054. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01037-9

Trigueros, M. (2019). The development of a linear algebra schema: learning as result of the use of a cognitive theory and models. ZDM, 51(7), 1055-1068. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01064-6

CLASES REMOTAS PARA LA EDUCACIÓN DE LA PRIMERA INFANCIA: ANÁLISIS DE LAS NOCIONES MATEMÁTICAS

Thayná Reis - Estudiante de Maestría en la Universidad Federal de Paraná/Brasil

Neila Tonin Agranionih - Profesora Titular de la Universidad Federal de Paraná/Brasil

El artículo forma parte de la tesis de maestría: Matemáticas en video clases para Educación Infantil en la ciudad de Curitiba / Paraná (Brasil) durante el período pandémico y tiene como objetivo identificar las nociones matemáticas presentes en las actividades pedagógicas remotas de Educación Infantil ofrecidas por la Secretaría Municipal de Educación – SME de Curitiba (capital del estado de Paraná) de abril a septiembre de 2020. Durante este período se dibujaron y visualizaron siete videoclases, dos para el mes de abril y una para cada mes, entre mayo y septiembre. Para analizar y recolectar los datos, nos basamos en Powell, Francisco y Maher (2004) y en Lima (2020), quienes presentan una metodología de observación, transcripción y análisis de videos de fases preestablecidas. En general, las nociones matemáticas estuvieron presentes en las videoclases analizadas, aunque ninguna de ellas tuvo un contenido matemático como tema o asignatura específica, cumpliendo los objetivos de Educación Infantil y la organización del currículo en Campos de Experiencias.

Matemáticas, matemáticas en la educación infantil, clases a distancia, nociones matemáticas.

INTRODUCCIÓN

En Brasil, la Educación Infantil se caracteriza como la primera etapa de la Educación Básica, y su objetivo es el desarrollo integral de los niños de 0 a 5 años, siendo obligatoria solo para los niños de 4 a 5 años. Esta etapa de la Educación tiene el rol de cuidar y educar de manera inseparable, y para ello es necesario acoger los conocimientos y experiencias de los niños desde el contexto familiar y articularlos con propuestas pedagógicas con el fin de ampliar experiencias, conocimientos y habilidades de niños, consolidando y diversificando nuevos aprendizajes (BRASIL, 2018).

Según la Base Curricular Nacional Común (BNCC), la Matemática en Educación Infantil no se presenta como una asignatura a impartir, sino que se inserta en Campos de Experiencia, que son: El yo, el otro y el nosotros; Cuerpo, gestos y movimientos; Rastros, sonidos, colores y formas; Escuchar, hablar, pensar e imaginar; y Espacios, tiempos, cantidades, relaciones y transformaciones. Estos campos deben trabajarse juntos, en relación con los derechos y objetivos del aprendizaje. (BRASIL, 2018). Las conductas, habilidades, conocimientos y experiencias, se consideran aprendizajes imprescindibles para esta etapa, teniendo en cuenta los ejes estructurantes: interacciones y juegos. Así, los aprendizajes se constituyen como metas de aprendizaje y desarrollo (BRASIL, 2018). Además, Matemáticas en la Educación Infantil tiene como objetivo brindar oportunidades para que los niños hagan aproximaciones con algunas nociones matemáticas presentes en su vida cotidiana a través de la elaboración / construcción de sus pensamientos (LORENZATTO, 2006; ARAGÃO, 2010; MONTEIRO, 2010). De esta forma, se entiende que se pueden desarrollar nociones matemáticas en Educación Infantil a partir de juegos y

momentos lúdicos, características que son muy llamativas en la infancia, pero para ello es necesario que la propuesta de juegos tenga intencionalidad por parte de docentes, generando así aprendizajes matemáticos (LORENZATO, 2006; AZEVEDO; PASSOS, 2012).

En la ciudad de Curitiba se interrumpieron las actividades educativas presenciales el 23 de marzo de 2020 y a partir del 13 de abril de 2020, se instituyó la suspensión del calendario escolar en las unidades educativas de la Red Municipal de Educación (RME), y se estableció la oferta de actividades pedagógicas en régimen remoto para la Educación Infantil. También, se estableció para este nivel de educación que los docentes de la Secretaría Municipal de Educación de Curitiba deben grabar las clases y transmitirlas ininterrumpidamente en un canal de televisión abierto de lunes a viernes, con reposiciones los sábados. Sin embargo, ¿cómo es el trabajo con Matemáticas en Educación Infantil cuando hablamos de clases a distancia en el contexto de una pandemia? En este artículo buscamos identificar las nociones matemáticas presentes en las actividades pedagógicas a distancia de Educación Infantil ofrecidas por la Secretaría Municipal de Educación - SME de Curitiba de abril a septiembre de 2020. Para ello, vimos y analizamos siete videoclases de abril a septiembre de 2020, siendo dos para el mes de abril y uno para cada mes entre mayo y septiembre.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de carácter cualitativo y descriptivo y se refiere a las descripciones del contenido de las video clases ofrecidas por la Secretaría de Educación Municipal - SME de Curitiba para la Educación Infantil. Se investigaron las nociones matemáticas trabajadas en clases remotas registradas de abril a septiembre de 2020. Se seleccionaron aleatoriamente dos clases de abril y una clase por mes de mayo, entre los meses de abril a septiembre, totalizando siete clases para el análisis.

Para el análisis y recolección de datos, nos basamos en Powell, Francisco y Maher (2004), quienes presentan una metodología de observación, transcripción y análisis de videos a partir de fases preestablecidas. Para los autores, las fases son como una guía para los investigadores, pero no de forma rígida, es decir, como momentos que se pueden cambiar según las necesidades de cada investigación. La investigación tuvo las siguientes fases: descripción de los datos del video (identificación de clase); asistir la videoclase, describir brevemente la clase; observar escenas que involucran nociones matemáticas y seleccionar eventos críticos; transcribir estos eventos y codificarlos; crear categorías de análisis y analizar los datos. A partir de los eventos críticos, seleccionamos los datos relevantes para la construcción de las categorías de análisis, a partir de un guión de observación relacionado con las nociones matemáticas a identificar con base en Lorenzatto (2006); Monteiro (2010). Este guión incluye temas relacionados con: recitación de series numéricas, conteo, cuantificación, representación numérica, clasificación, seriación, relación parte-todo-parte, reconocimiento del efecto de las operaciones sobre números, cálculos y estimaciones. En este artículo hablamos de la categoría “nociones matemáticas”, que se refiere a las nociones matemáticas que están presentes en las actividades desarrolladas durante las clases.

RESULTADOS

Las lecciones en video analizadas se codificaron en: AA1 (Clase 1 de abril), AA2 (Clase de abril2), AM (Clase de mayo), ALN (Clase de junio), AJL (Clase de julio), AAG (Clase de agosto) y AS (Clase de septiembre) . Las nociones matemáticas encontradas fueron:

NOCIONES MATEMÁTICAS	AA1	AA2	AM	ALN	AJL	AAG	AS	Total
Recitación de series de números	1	2	2	-	3	-	-	8
Contar objetos oralmente	1	-	1	-	3	-	5	10
Contar los números ordinales	1	-	1	1	-	-	3	6
Contar en orden ascendente y descendente	-	-	-	-	-	-	-	-
Contar desde un número	-	-	-	-	-	-	-	-
Contar de 2 em 2 y de 5 em 5	-	-	-	-	-	-	-	-
Cuantificación de objetos	1	1	10	4	2	-	5	23
Representación numérica	1	2	1	1	-	-	2	7
Clasificación	-	-	-	-	-	-	2	2
Seriación	-	-	-	-	-	-	-	-
Relación parte-todo-parte	2	-	-	1	1	-	1	5
Reconocimiento del efecto de operaciones sobre los números.	-	-	3	1	2	-	3	9
Cálculos	-	-	-	-	2	-	-	2
Estimativas	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 1 - Nociones matemáticas trabajadas en videoclases. Fuente: datos de la encuesta de 2021

Las nociones más presentes en las clases fueron la cuantificación de objetos, el conteo oral de objetos, el reconocimiento del efecto de las operaciones sobre los números y la recitación de las series numéricas. La cuantificación de objetos fue la noción que estuvo más presente en las clases de video analizadas, como se muestra en el siguiente ejemplo:

> **Maestro A:** Acá tenemos cuatro latas, ¿verdad? Uno, dos, tres, cuatro. Para este juego necesitamos dos latas, una tijera sin puntas y cordel. (AM)

Entendemos esta noción matemática como "[...] un procedimiento que permite cuantificar un grupo de objetos para determinar cuántos hay". (MONTEIRO, 2010. p.8). Consideramos que la cuantificación de objetos estuvo más presente entre las nociones matemáticas debido a la necesidad de cuantificar objetos como, por ejemplo, los que serían utilizados en alguna actividad. La cuantificación de objetos fue realizada por los docentes, y hubo momentos de las video clases en los que se sugirió que los niños separaran y cuantificaran grupos de objetos, con énfasis en el conteo. No se pidió a los niños que compararan grupos de objetos.

El conteo oral de objetos fue la segunda noción más presente en las clases. “Contar es una actividad que realizan todas las culturas para diferenciar e identificar cantidades” (MONTEIRO, 2010, p.8). Estuvo presente en situaciones que involucran la cuantificación de objetos, como ejemplos:

> **Maestro L:** Maestra L: Ah señora, entonces decidió comprar estas piezas. Las empaquetaré para usted. Veamos cuántas piezas compraste: una, dos piezas. (AJL)

> **Maestra A:** Y luego, para saber quién es el ganador, se lo contamos.

Maestra T: Uno, dos, cuatro.

El reconocimiento del efecto de las operaciones sobre los números, la tercera noción más presente, se refiere a la capacidad o habilidad de los individuos para percibir las consecuencias y cambios sufridos en los números, es decir, si su estado inicial ha sufrido cambios o no (SPINILLO, 2010). En Educación Infantil esta noción matemática no se relaciona con cálculos escritos, sino con actividades lúdicas que permiten a los niños establecer relaciones con operaciones numéricas de forma lúdica y contextualizada, como podemos ver en el siguiente ejemplo, donde los docentes necesitan hacer una división.

Maestra C: Mira, tenemos treinta piezas aquí y todo está listo para jugar. Solo tengo que quedarme con la mitad de esas treinta piezas y la profesora L tiene que quedarse en su tienda con la otra mitad de las piezas también.

Maestra L: ¿Cuál es la mitad?

Maestra C: Entonces, para que podamos dividir la mitad correctamente, hagámoslo así: yo tomo uno y tú tomas uno, yo tomo uno, tú tomas uno y luego contamos para ver si tenemos la misma cantidad. Dale. […]

Maestra C: . A ver cuántos tengo yo, y cuántos tiene Maestra L. ¿Está la misma cantidad, que es la mitad de 30?

Maestra L: Ayuda, niños.

Maestro C: Así que aquí vamos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Maestra L: Correcto, tu feria ahora está completa.

Maestro C: Está completo.

Maestra L: Ahora revisemos la mía. Vamos niños, ayuden allí. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Correcto.

Maestra C: Muy bien. Entonces, la mitad de 30 piezas es 15. Por eso había 15 piezas para cada una de nosotras.

Algunas nociones no se trabajaron en las videoclases analizadas, y son: contar en orden ascendente y descendente, contar desde un número, contar de 2 a 2, de 5 a 5, clasificación, seriación y estimativas.

Consideraciones finales

Trabajar con las matemáticas en la educación infantil es de fundamental importancia para el desarrollo de las primeras nociones matemáticas de la persona. Es en esta etapa que los niños comienzan a desarrollar un interés por los números y es a partir de las relaciones que se establecen a diario, en los momentos de interacción y juego que se pueden explorar y desarrollar estas nociones. Asimismo, las nociones matemáticas son importantes para el desarrollo integral de los niños.

Las nociones matemáticas estuvieron presentes en las videoclases analizadas, aunque ninguna de ellas tuvo como temática un contenido matemático específico, lo que cumple con los objetivos de Educación Infantil y el currículo organizado en Campos de Experiencias. Fueron explorados por los profesores siempre que la actividad o el contexto lo hicieron posible. Sin embargo, se debe considerar que el contexto de las clases a distancia no favorece del todo su desarrollo ya que, es el docente quien realiza las acciones y el niño solo mira, por lo tanto, no hay nada que garantice que durante la videoclase realizarán las actividades propuestas. Además, aunque presentan situaciones y contextos lúdicos, el tiempo de permanencia del niño frente al video tampoco favorece su atención e interés.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con el apoyo de la Coordinación de Perfeccionamiento del Personal de Educación Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamiento 001.

Referencias

ALENCAR, Edvonete Souza de; OLIVEIRA, Mariane dos Santos de. Matemática nos jogos e brincadeiras na Educação Infantil em pesquisas brasileiras. Areté. Manaus | v.12 | n.25 | jan-jun| 2019.

ARAGÃO, R. M. R. Rumo à educação do século XXI: para superar os descompassos do ensino nos anos iniciais de escolaridade. In: BURAK, D.; PACHECO, R. P.; KLÜBER, T.E. (Org.). Educação matemática: reflexões e ações. Curitiba: ORV, 2010. p.11-25.

AZEVEDO, Priscila Domingues de; PASSOS, Cámen Lúcia Brancaglio. Professoras da Educação Infantil discutindo a Educação Matemática na infância: o processo de constituição de um grupo. In: CARVALHO, Mercedes; BAIRRAL, Marcelo Almeida (orgs.) Matemática e Educação Infantil: investigações e possibilidades de práticas pedagógicas. Petrópolis-RJ: Vozes. 2012. p.53-81.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

CURITIBA. Currículo da Educação Infantil: Diálogos com a BNCC. Secretaria Municipal da Educação de Curitiba. 2020a.

DUHALDER, María Elena; CUBERES, María Teresa González. Encontros iniciais com a matemática: contribuições à Educação Infantil. Porto Alegre. Artes Médicas, 1998.

KLEIN, Delci Heinle; KONRATH, Raquel Dilly. A matemática e os campos de experiências da Educação Infantil. VIII congresso de professores do ensino superior da rede sinodal. Faculdade IELUSC. Joinville/SC. 2019

LORENZATO, Sergio. Educação Infantil e percepções matemáticas. Campinas, SP. Autores Associados. 2006.

MONTEIRO, Priscila. As crianças e o conhecimento matemático: experiências de exploração e ampliação de conceitos e relações matemáticas. Anais do I Seminário Nacional: Currículo em Movimento – Perspectivas Atuais. Belo Horizonte, novembro de 2010.

POWELL, Arthur B.; FRANCISCO, John M.; MAHER, Carolyn A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das idéias matemáticas e do raciocínio de estudantes. Bolema. Rio Claro – SP, v. 17, n. 21, maio 2004.

REIS, Sílvia Marina Guedes dos. A matemática no cotidiano infantil: jogos e atividades com crianças de 3 a 6 años para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Campinas/SP. Papirus. 2006.

SPINILLO, Alina Galvão. O Sentido de Número e sua Importância na Educação Matemática. In: BRITO, Márcia Regina Ferreira de. (Org) Solução de problemas e a matemática escolar. Campinas, SP: Editora Alínea, 2010. p. 83-109.

FORTALECIMIENTO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA MEDICIÓN DE LOS DOCENTES A PARTIR DE UN CURSO E-LEARNING

Paulina Araya[1], Daniela Rojas[1], Eugenio Chandía[2], Salomé Martínez[1].

[1] Universidad de Chile, [2] Universidad de Concepción

El desarrollo profesional docente (DP) en formato e-learning presenta distintas ventajas, como permitir el acceso a docentes de distintas zonas geográficas, entre otras. Por lo tanto, resulta relevante conocer en qué medida este puede contribuir a fortalecer el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) del profesorado. El presente estudio, se propuso describir cómo se movilizó el MKT asociado al eje de medición de los profesores participantes de un curso de DP online, enfocado en dicho eje curricular. Mediante un análisis de clases latente, se obtuvieron perfiles de acuerdo con el desempeño en un test al inicio y al término del curso, mostrando la forma en que los profesores se movieron en distintas clases respecto a sus conocimientos. Además, el análisis mostró que todos los docentes, en distinta medida, adquirieron conocimientos sobre la enseñanza del eje de medición.

Desarrollo profesional docente, Conocimiento matemático para la enseñanza, E-learning, Enseñanza de la medición.

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Mejorar los conocimientos matemáticos de los profesores de Educación Básica es un desafío educativo importante en países como Chile. La investigación ha avanzado en conceptualizar, distinguir y estudiar los diversos componentes del conocimiento que los profesores involucran en la tarea de enseñar matemática, lo que se ha aunado bajo el concepto de conocimiento matemático especializado para la enseñanza (MKT) (Ball et al. 2008). Diversos estudios han mostrado que un mayor MKT en los profesores, se correlaciona positivamente con mejores resultados de aprendizaje de los estudiantes (Ball et al., 2008; Hill, Rowan & Ball, 2005). Por lo anterior, comprender las maneras en que los profesores pueden desarrollar e incrementar su MKT es un foco de gran importancia en la investigación actual. Según algunos autores, los programas de formación inicial suelen ofrecer pocas oportunidades para que los futuros profesores desarrollen las capacidades requeridas en el ejercicio docente (Blömeke, Suhl & Döhrmann, 2013; Ingvarson et al., 2013), por lo que el desarrollo profesional (DP) es una estrategia clave para ofrecer a los profesores que se desempeñan en el sistema educativo, espacios de formación donde puedan fortalecer sus conocimientos y habilidades.

Dentro de los distintos formatos de DP, los programas de formación docente en línea presentan algunas ventajas considerables: por un lado, permiten llegar a un gran número de docentes con un costo menor a un programa presencial; además, pueden participar profesores de distintos lugares, incluyendo zonas

remotas y de sectores rurales, siempre que cuenten con conexión a internet; por último, conllevan un mayor nivel de flexibilidad horaria y los profesores pueden organizar sus tiempos (Martínez et al., 2020; UNESCO, 2005). A lo anterior, se añade una consecuencia positiva dejada por la pandemia, gran parte de los profesores ha debido adaptar sus clases al formato online por lo que sus capacidades para manejar dispositivos electrónicos son probablemente mayores que hace dos años, lo que mejora su disposición y competencias de usuario para el aprendizaje en entornos virtuales.

Considerando estas ventajas, resulta relevante explorar en qué medida este tipo de programas permite fortalecer el MKT de los profesores. Por lo anterior, el presente estudio tiene como propósito describir cómo se moviliza el conocimiento matemático para la enseñanza de la medición de los participantes de un curso de DP en formato online.

Programa de desarrollo profesional "Suma y Sigue"

Este estudio se inserta en el contexto de Suma y Sigue, un programa de DP en línea para profesores que enseñan matemáticas en Educación Básica y Media, diseñado para fortalecer el MKT de los docentes (Ball, et al., 2008), a través de una experiencia de aprendizaje activa con un enfoque basado en problemas. El programa ofrece a los docentes cursos de capacitación en distintos temas asociados a los ejes de números y operaciones, patrones y álgebra, geometría, medición, datos y probabilidades. El modelo de instrucción de Suma y Sigue fomenta el aprendizaje en línea autónomo y autodirigido, lo que ha hecho posible su masificación. Este se sustenta en un modelo formativo basado en tecnologías, en donde se integran talleres virtuales asincrónicos para un aprendizaje activo con alta interacción con el contenido, con sesiones de trabajo grupal sincrónicas, que favorecen la interacción entre pares y construcción colaborativa de conocimiento. Los cursos proporcionan oportunidades para desempaquetar y analizar las matemáticas elementales desde una perspectiva de la enseñanza (Yackel et al., 2007). En este modelo las sesiones sincrónicas brindan oportunidades a los docentes para reflexionar sobre el conocimiento adquirido durante el desarrollo de los talleres virtuales y conectarlos con sus prácticas de aula. También, tienen el propósito de ilustrar prácticas efectivas de aula para la enseñanza de un contenido nuclear abordado en el curso, utilizando el enfoque de discusión matemáticas (Chapin et al., 2003) como metodología de interacción. Este estudio se enfoca en el curso "Trabajando con la medida y la medición" dictado a profesores de 3º a 6º año básico.

Enseñanza de la medición

El eje de medición está presente de 1º a 6º básico e incluye los contenidos de medidas estandarizadas y no estandarizadas y la medición de magnitudes de tiempo, longitud, superficie, volumen, ángulos y masas (Ministerio de Educación, 2012). El conocimiento de la medida de magnitudes se considera crucial para la comprensión e interpretación del mundo y para el aprendizaje tanto de las matemáticas como de otras disciplinas (Pizarro, Gorgorió & Albarracín, 2016). Pese a que los conocimientos asociados a la medición son ampliamente usados en distintos ámbitos de la vida cotidiana, su enseñanza conlleva dificultades, ya que el saber social asociado a los procesos de medir puede generar confusiones y vacíos en su enseñanza formal (Chamorro, 2008).

El aprendizaje de la medición requiere que los estudiantes identifiquen en los objetos aquellos atributos susceptibles de ser medidos, los comparen y determinen a cuántas unidades equivale el atributo medido, considerando para ello medidas estandarizadas y no estandarizadas (Reyes, Dissett & Gormaz, 2013). Es relevante, por tanto, que los profesores logren articular la enseñanza de forma tal que los estudiantes vayan construyendo progresivamente el significado de los conceptos esenciales de la medición (Chamorro, 2008).

METODOLOGÍA

Para describir cómo se movilizó el MKT de medición de los participantes del curso se adoptó un diseño cuasiexperimental con pre y post test, aplicando la técnica de análisis de clase latente (ACL). El ACL realiza clasificaciones basado en probabilidades, es decir, los participantes del programa de DP son clasificados en clúster o clases considerando la probabilidad estimada de pertenecer a ellas. Así, el MKT de los participantes es modelado y caracterizado usando indicadores variables distribuidos en los ítems de los test mediante esta técnica. Al aplicar el ACL en ambos momentos se determina la movilidad de los participantes entre clases, explicando el MKT inicial y el final de estos.

En el estudio participaron 110 profesores, quienes se inscribieron en el programa de manera voluntaria. Los participantes rindieron los pre y pos test en la plataforma de los cursos. Los test se componen de seis ítems de preguntas de selección múltiple y diez de verdadero y falso. Presentando buenos índices de discriminación (Media=0.2, SD = 0.18) y dificultad (Media=0.5, SD = 0.21).

RESULTADOS

En este apartado se presenta una caracterización de las clases conformadas por los docentes antes y después de realizar el curso. Posteriormente, se describe cómo se movilizaron entre las clases identificadas.

Caracterización de los docentes antes de iniciar el curso

Antes de iniciar el curso, los docentes se agrupan en dos clases según su MKT para la enseñanza de la medición, considerando el mejor ajuste del ACL aplicado al pretest (AIC=2797.24; BIC (2): 2951.17), siendo la clase 1 la que mostró un mejor desempeño. La clase 1 está compuesta por el 27% de los docentes que participaron en el curso, quienes se caracterizan por tener una alta probabilidad de responder correctamente preguntas de aplicación directa y preguntas de interpretación, pero muestran una baja probabilidad de responder bien preguntas que requieren resolución de problemas más complejos. Por otro lado, la clase 2 está compuesta por el 73% de los docentes que participaron del curso quienes se caracterizan por tener una probabilidad alta de responder correctamente solo preguntas de aplicación directa.

Caracterización de los docentes después de realizar el curso

Después de realizar el curso los docentes se agrupan en dos clases según su MKT de medición, considerando el mejor ajuste del ACL aplicado al pretest (AIC=2104.561; BIC (2): 2258.489), que son distintas a las iniciales, siendo la clase A la que mostró un mejor desempeño. La clase A se compone por el 59% de los docentes que participaron en el curso, quienes se caracterizan por tener altas probabilidades

de responder correctamente los tres tipos de preguntas incluidos en el test. Por otro lado, la clase B está compuesta por el 41% de los docentes que participaron en el curso, quienes se caracterizan por mostrar alta probabilidad de responder correctamente preguntas de aplicación directa e interpretación; sin embargo, aún muestran un conocimiento incipiente en la resolución de problemas más complejos.

Movilidad de los docentes entre clases según su MKT de medición

Para describir cómo se moviliza el MKT de medición de los docentes que participaron en el curso, se estudió la forma en que se movilizan entre las clases latentes que se formaron antes de iniciar el curso y una vez finalizado. Los resultados muestran que el 93% de los docentes que al inicio se encontraban en la clase 1 (mejor desempeño), al finalizar el curso se movilizaron hacia la clase A (mejor desempeño), adquiriendo habilidades para la resolución de problemas complejos de medición. El 7% restante de los docentes de la clase 1 se movilizó hacia la clase B (menor desempeño), lo que muestra un avance acotado en sus conocimientos.

Respecto de la clase 2 (menor desempeño), el 49% de los docentes de esta clase se movió hacia la clase A (mayor desempeño) al finalizar el curso, evidenciando que, si bien al inicio respondían correctamente preguntas de aplicación directa, y solo algunas preguntas de interpretación; al finalizar el curso responden este tipo de preguntas y además, resuelven problemas complejos. El 51% de los docentes de la clase 2 se movió hacia la clase B, lo que indica que después de realizar el curso, además de responder correctamente preguntas de aplicación directa, logran responder preguntas de interpretación. La Figura 1 muestra la movilidad de los docentes entre las clases según su MKT de medición.

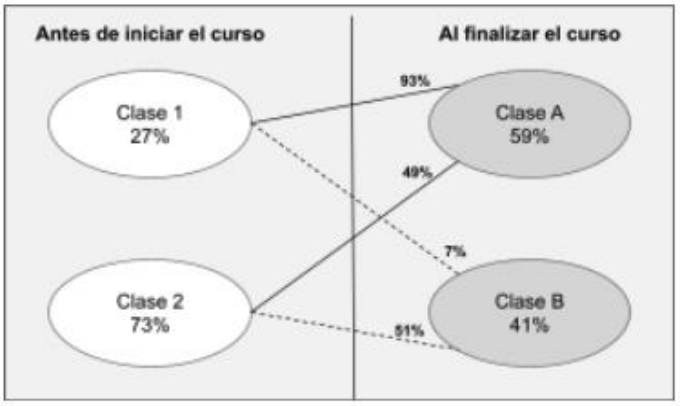


Figura 1: Movilidad de los docentes entre las clases según su MKT de medición

CONCLUSIONES

Mejorar el MKT de los docentes es una tarea compleja y no carente de dificultades (Ball et al., 2008), asimismo, los cursos de DP en formato online presentan ventajas y limitaciones en cuanto a los aprendizajes que logran los docentes (Martínez et al., 2020). Considerando lo anterior, los resultados reportados en este estudio son relevantes para conocer el alcance de este tipo de cursos. En este sentido, encontramos que todos los profesores que participaron del curso, en distinta medida, aumentaron su MKT de medición. Este conocimiento se caracteriza por una comprensión de los procesos de medición, la identificación de situaciones de enseñanza favorables para desarrollarlo y el dominio de las nociones asociadas a las distintas magnitudes que considera el currículo (Chamorro, 2008).

El instrumento para evaluar MKT de medición empleado en este estudio, consideró preguntas en tres niveles de complejidad: aplicación directa, interpretación y resolución de problemas. Los mayores cambios se observaron en el logro respecto a la interpretación de conceptos y si bien se observan mayores dificultades en la resolución de problemas, varios profesores lograron este nivel. Esto es comprensible debido a que, por un lado, se trata de habilidades más complejas y, por otro, el curso es acotado en el tiempo. Asimismo, el ACL sirvió para identificar perfiles de profesores respecto a sus conocimientos y examinar cómo se movieron de clase a lo largo del curso.

Una limitación de este estudio es que solo consideró el progreso de los profesores en un pre y post test con una cantidad limitada de preguntas, sin incorporar en los análisis, los controles que se realizaron a lo largo de todo el curso. Para investigaciones futuras es deseable conocer cómo se moviliza el MKT de los docentes observado en estas evaluaciones intermedias. Asimismo, resultaría interesante indagar en otras variables de caracterización para comprender aspectos que podrían incidir en el progreso de los docentes.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por el Centro de Modelamiento Matemático (CMM), ACE210010 y FB210005, fondos BASAL para centros de excelencia financiados por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID). Además, forma parte de las iniciativas de la Cátedra Unesco: *Formación de docentes para enseñar matemática en el siglo XXI.*

Referencias

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Blömeke, S., Suhl, U., & Döhrmann, M. (2013). Assessing strengths and weaknesses of teacher knowledge in Asia, Eastern Europe, and Western countries: Differential item functioning in TEDS-M. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(4), 795–817.

Chamorro, M. (2008). *Didáctica de las matemáticas para primaria.* Madrid: Pearson-Prentice.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42*(2), 371–406.

Ingvarson, L., Schwille, J., Tatto, M. T., Rowley, G., Peck, R., & Senk, S. L. (2013). *An analysis of teacher education context, structure, and quality-assurance arrangements in TEDS-M countries.* Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

Martínez, S., Guíñez, F., Zamora, R., Bustos, S., & Rodríguez, B. (2020). On the instructional model of a blended learning program for developing mathematical knowledge for teaching. *ZDM, 52*(5), 877-891.

Ministerio de Educación (2012b) Bases Curriculares Educación Básica. Recuperado de: https://educrea.cl/wp-content/uploads/2015/11/bases-curriculares-educacion-basica-2012-191115.pdf

Pizarro, N., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2016). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. *Números*, *91*, 91-103.

Reyes, C., Dissett, L., & Gormaz, R. (2013). *Geometría para futuros profesores de educación básica.* Santiago: Ediciones SM.

UNESCO. (2005). Formación docente y TIC: Logros, tensiones y desafíos. Estudios realizados en Bolivia, Chile, Colombia, Ecuador, México, Panamá, Paraguay y Perú. OREALC/UNESCO, Santiago. Chile. http://unesdoc.unesco.org/images/0014/00141 0/141010s.pdf.

LA EVALUACIÓN DE LA HABILIDAD DE ARGUMENTAR: TENSIONES PERCIBIDAS POR PROFESORES CHILENOS DE MATEMÁTICAS

Manuel Goizueta[1], Constanza Ledermann[2], Helena Montenegro[2]

[1]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [2]Universidad de Chile

Las pruebas estandarizadas chilenas SIMCE y PSU, han sido criticadas por sus consecuencias no deseadas en el aula, por contribuir a la elitización de la educación y por perpetuar la desigualdad social. Sin embargo, rara vez se han tenido en cuenta las percepciones de los profesores sobre estas pruebas y las consecuencias en sus decisiones pedagógicas. En este estudio nos enfocamos en las percepciones docentes sobre la tensión entre el desarrollo de la competencia argumentativa propuesta por el currículo y las pruebas SIMCE y PSU. Recurriendo a entrevistas en profundidad, damos cuenta de la falta de alineación sistémica que perciben los profesores de matemáticas de primaria y secundaria entre el currículum y las pruebas en relación con el desarrollo de la argumentación. Los resultados muestran que esto conduce a una experiencia de aprendizaje empobrecida, sugieren que el diseño del plan de estudios y de las pruebas podría no ser suficiente para fomentar la enseñanza deseada y que las percepciones de los profesores deben tenerse en cuenta.

Argumentación, competencia argumentativa, pruebas estandarizadas, currículum.

INTRODUCCIÓN

La argumentación es clave en la construcción de sociedades participativas y dialogantes. En el ámbito de la educación se espera que los estudiantes-ciudadanos logren argumentar con base en conocimientos, actitudes y competencias que les permitan comprender e incidir en su realidad de manera crítica, reflexiva y valórica. Esto ha llevado a muchos países a incluir la argumentación, como una competencia a desarrollar como parte de la educación para la ciudadanía. En Chile el currículum consigna la argumentación y la comunicación como una de las cuatro habilidades transversales a desarrollar en todos los niveles de la educación matemática (MINEDUC, 2015, 2019).

Pruebas estandarizadas internacionales como el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) o el Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS), han estimulado la necesidad de evaluar el desarrollo de competencias como parte de la evaluación de la calidad de la educación. Dado que en Chile la competencia argumentativa se debe desarrollar durante la educación obligatoria, tanto el Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) como la Prueba de Selección Universitaria (PSU) -Prueba de Transición (PDT) en su última edición- declaran medirla.

Ahora bien, son los profesores quienes diseñan e implementan los procesos de aprendizaje de manera situada en la realidad en la que trabajan, interpretando las exigencias del sistema educativo y tomando las decisiones pedagógicas que permiten el progreso de sus estudiantes. Estas decisiones se ven inmersas

en la tensión entre la aspiración de cubrir el currículum y la necesidad de que los estudiantes tengan un buen desempeño en las pruebas estandarizadas que medirán sus logros y les permitirán continuar con la educación superior, lo que tiene importantes consecuencias. En nuestro estudio exploramos las percepciones de profesores chilenos acerca de las tensiones entre el desarrollo de la habilidad de argumentar propuesta por el currículum y las evaluaciones estandarizadas nacionales SIMCE y PSU, así como las consecuencias que esto tiene en el aula de matemáticas.

La habilidad de argumentar en el currículum chileno

Las Bases Curriculares (BBCC) elaboradas por el Ministerio de Educación (MINEDUC), proveen un marco de referencia obligatorio para los colegios y establecen objetivos de aprendizaje (OA) en relación con conocimientos, habilidades y actitudes para cada nivel. En Matemática, la argumentación se presenta como una de las cuatro habilidades a desarrollar en relación con todos los contenidos y se entiende como una actividad inserta en el diálogo, la expresión de ideas y la colaboración, dirigida a convencer a otros acerca de la validez de los resultados obtenidos. Sin embargo, las BBCC no proveen una definición clara y operativa que permita identificar la habilidad y su desarrollo en los estudiantes.

SIMCE, PSU y la evaluación de la argumentación

La Agencia de Calidad de la Educación (ACE) implementa la prueba SIMCE en 2°, 4°, 6°, 8° básico, y 2° y 3° medio, en varias asignaturas, entre ellas Matemática. Como base de SIMCE, el Ministerio de Educación elabora los Estándares de Aprendizaje, que permiten a los docentes monitorear los avances de sus estudiantes en las evaluaciones en relación con los aprendizajes definidos en las BBCC.

A pesar de que en los Estándares de Aprendizaje se menciona que, los estudiantes deben desarrollar y utilizar “las habilidades matemáticas de resolver problemas, representar, modelar y argumentar, en situaciones directas y en problemas rutinarios” (MINEDUC, 2017, p. 50), es posible constatar que no se presentan indicadores específicos para las habilidades y tampoco se observan indicadores que orienten sobre el desempeño de los estudiantes respecto de ellas. Los requisitos mínimos para alcanzar un nivel de aprendizaje determinado no consideran las habilidades y las actitudes.

El Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE) desarrolla la Prueba de Selección Universitaria (PSU) para el proceso de admisión a las universidades. En su web, DEMRE declara que la PSU evaluará contenidos y habilidades del currículum. La prueba de matemáticas “contendrá 13 preguntas destinadas a evaluar las habilidades referidas a las Bases Curriculares que son: Resolver problemas, Representar, Modelar, y Argumentar". Sin embargo, no se presenta información que permita comprender de qué manera las preguntas permiten evaluar la habilidad de argumentar.

Por otro lado, es necesario considerar las consecuencias que SIMCE y PSU tienen y que las convierten en pruebas de alto impacto (Jones & Egley, 2007). Los resultados PSU permiten/impiden acceder al nivel universitario. En Chile, donde los estudios universitarios son una de las vías principales de movilidad social y económica, estos resultados son de gran importancia para los estudiantes y sus familias. Aunque SIMCE no tiene consecuencias directas para los estudiantes, sus resultados son agregados por escuela y hechos públicos a través de sitios oficiales y medios de comunicación, funcionando *de facto* como ranking. Esto afecta las preferencias de las familias y así, impacta económicamente en los colegios

financiados por el estado a través de un sistema de vouchers basado en la asistencia de los estudiantes (Taut et al., 2009). Los salarios de los profesores suelen también ser afectados por incentivos asociados al desempeño de sus estudiantes (Botella & Ortiz, 2018).

DISEÑO METODOLÓGICO

Realizamos un estudio de caso múltiple (Yin, 2009) orientado a explorar los temas que los profesores de matemática participantes abordan y las diferencias dentro y entre los casos de estudio (N=21). La muestra se conformó con profesores de colegios de distintas dependencias en la Región de Valparaíso y Metropolitana (Chile) que impartían clases de matemática en los niveles de 6° Básico (siete profesores) y IV° Medio (catorce profesores); niveles en los que se aplican las pruebas SIMCE y PSU respectivamente.

Se realizaron entrevistas individuales semiestructuradas (Knox & Burkard, 2009) para indagar las percepciones del profesorado acerca de la argumentación en el aula matemática y su enseñanza; las estrategias que llevan a cabo en el proceso de toma de decisiones para el desarrollo de la habilidad; la relación entre argumentación y pruebas SIMCE y PSU; y el impacto en su práctica docente. El tiempo de entrevista osciló entre 32 y 109 minutos. Las entrevistas fueron grabadas y transcritas para análisis.

Se realizó un análisis temático por dos miembros del equipo de investigación con el propósito de identificar patrones y temas recurrentes en los datos (Braun & Clarke, 2006). En una primera etapa, se realizó una lectura inicial de cada una de las transcripciones para la formulación de códigos iniciales. Cada investigador identificó códigos y extractos de entrevistas conceptualmente similares, agrupándolos en categorías preliminares de análisis. Esta codificación inicial fue discutida entre los investigadores para lograr una mayor confiabilidad y acuerdo. Se identificaron temas clave que agruparan las principales categorías por medio de un proceso iterativo de análisis. La identificación de estos temas permitió generar un mapa temático del análisis (Braun & Clarke, 2006). Finalmente, los resultados se elaboraron en forma de temas narrativos (van Manen, 1990) referidos a las percepciones del profesorado acerca de las tensiones entre el desarrollo de la habilidad argumentativa propuesto por el currículum y las pruebas SIMCE y PSU, así como las consecuencias de esta tensión en el aula.

RESULTADOS

Los profesores participantes coinciden en la importancia de argumentar en el aula de matemáticas, relacionándola con la comprensión -quien puede argumentar comprende lo que hace y lo que hacen otros- y oponiéndola a la ejecución mecánica e irreflexiva de técnicas. Algunos profesores se refieren a la argumentación como parte de la autorregulación de la actividad matemática. Además, destacan que observar a sus estudiantes argumentar les permite evaluar su aprendizaje -los conocimientos y el razonamiento se hacen "visibles" a la hora de argumentar- y tomar decisiones pedagógicas, como señala la profesora P5:

> P5: Al pedirle al niño, por ejemplo, en matemática, que me explique cómo resolvió un problema, qué hizo, qué cálculos hizo, por qué hizo esto o esto otro, es la forma que yo tengo para darme cuenta de los errores que comete, para darme cuenta cómo está pensando, en qué forma está razonando matemáticamente para resolver tal situación.

Sin embargo, señalan diversos motivos por los que no logran implementar actividades para su desarrollo, i) perciben la cobertura de los contenidos del currículum como la exigencia central de las pruebas SIMCE y PSU, por sobre el desarrollo de habilidades y actitudes; y ii) se sienten presionados para dedicar tiempo a actividades dirigidas a mejorar los puntajes de sus estudiantes en las pruebas SIMCE y PSU. Estas demandas impactan sus decisiones pedagógicas sobre las actividades de enseñanza necesarias para satisfacerlas, particularmente en los años en que se aplican las pruebas. En palabras del profesor PS5,

> PS5: Por lo tanto, la normativa, la institución te va exigiendo cobertura curricular y que cuando él se enfrente a un ensayo PSU te lo responda bien, y que cuando llegue a la PSU le vaya bien. Entonces ahí uno automáticamente va marginando. O sea, ¿le vamos a dar a la argumentación? Sí, ¿cuánto? Dentro de las cuatro clases del mes, ¿una? ¿dos? Chuta, ¿dos? Estás dejando de lado la práctica, la aplicación. Entonces, te van a cuestionar. Oye, ¿qué está pasando?

Por otro lado, los profesores consideran que las pruebas SIMCE y PSU, no miden la argumentación y su desarrollo y en cambio, se centran en la memorización y el cálculo. Consideran que para mejorar los puntajes es necesario implementar actividades similares a las pruebas, lo que es visto como un alejamiento de las BBCC y del desarrollo de la habilidad de argumentar. Se expresan negativamente sobre ello, con palabras como ‘entrenamiento’ o ‘adiestramiento’, considerándolo un empobrecimiento del aprendizaje. En síntesis, perciben una falta de alineamiento sistémico entre las pruebas y el desarrollo de la argumentación, lo que impacta negativamente el aprendizaje. Como refiere la profesora S2,

> PS2: Yo creo que de las habilidades que se declaran […] la argumentación es la que está más botadita. […] Al final igual como profesores somos evaluados también por el tema de cómo nos va en los resultados SIMCE, los resultados PSU. Y si el ministerio me da un programa que es… yo encuentro que es inabordable. Es tremendamente largo y complicado, en términos de contenidos. ¿Qué haces tú al final? Haces una pincelada. ¿Esa pincelada dónde está? En los ejercicios de aplicar, modelar, así, más básicos, no de argumentar.

DISCUSIÓN

Estudios anteriores han discutido las consecuencias no deseadas de las pruebas estandarizadas en Chile. Por ejemplo, su uso para rankear a los colegios en una lógica de libre mercado, lo que contribuye a elitizar la educación y a perpetuar la correlación entre nivel socioeconómico y logro escolar (Botella & Ortiz, 2018; Inzunza, 2014). En el caso de SIMCE, Taut et al. (2009) han mostrado que solo "un tercio de los profesores logran distinguir adecuadamente buenos de malos resultados, e incluso menos logran evaluar el cambio en el tiempo y el nivel relativo al comparar colegios similares" (p. 135), lo que cuestiona la posibilidad de utilizar los resultados como diagnóstico y base para la mejora pedagógica. Sin embargo, estos estudios raramente han considerado las percepciones de los profesores acerca de las pruebas y su impacto en el aula, a pesar de que son los profesores quienes toman las decisiones pedagógicas que dan forma al aprendizaje. Nuestro estudio muestra que los profesores perciben una falta de alineamiento sistémica, entre el currículum y las pruebas SIMCE y PSU en relación con el desarrollo de la argumentación, la que elaboran en dos sentidos diferenciados. Por un lado, perciben que las pruebas no permiten la evaluación de la argumentación, pues esta no se pone en juego, al menos de forma que aporte evidencias sobre su desarrollo. Por otro lado, los profesores perciben que la mejor estrategia para mejorar

los puntajes es implementar tareas similares a las pruebas, las que no requieren de la argumentación. En consecuencia, no solo consideran que la argumentación no es evaluada por las pruebas, sino que su desarrollo tampoco ayuda a los estudiantes a tener un buen desempeño. Junto con la presión por buenos resultados, esto redunda en la marginación de la argumentación en la clase de matemáticas y en el empobrecimiento de la experiencia de aprendizaje de los estudiantes. A pesar de ser conscientes de este empobrecimiento los profesores participan de las estrategias orquestadas por los colegios con este fin, aunque todos declaran hacerlo de forma reluctante.

No hemos pretendido determinar si las pruebas SIMCE y PSU, como declaran, miden la argumentación de los estudiantes y su desarrollo. En cambio, hemos mostrado que este grupo de profesores percibe que esto no es así y que ello impacta negativamente su práctica docente. Aunque la dinámica y las consecuencias de SIMCE y PSU, son multifactoriales y deben ser explicadas de manera holística, nuestros resultados sugieren que el diseño del currículum y de las pruebas puede no ser suficiente para impulsar la enseñanza esperada y que las percepciones del profesorado deben ser tomadas en cuenta.

Agradecimientos

Esta investigación es posible gracias al proyecto FONDECYT 11190135, y apoyada por el Centro de Modelamiento Matemático (CMM), ACE210010 y FB210005, fondos BASAL, financiados por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID).

Referencias

Botella, M. T., y Ortiz, C. (2018). Efectos indeseados a partir de los resultados SIMCE en Chile. *Revista Educación, Política y Sociedad, 3*(2), 27-44.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101.

DEMRE (2020). *Contenidos de las Pruebas de Admisión Transitorias: Prueba obligatoria de matemática*. MINEDUC. Retrieved from: https://demre.cl/publicaciones/pdf/2021-20-04-temario-matematica-p2021.pdf

Inzunza, J. (2014). Estandarización en educación: anatomía de una deformación. *Docencia, 52*, 4-13.

Jones, B. & Egley, R. (2007). Learning to Take Tests or Learning for Understanding? Teachers' Beliefs about Test-Based Accountability. *The Educational Forum, 71*(3), 232-248.

Knox, S., & Burkard, A. W. (2009). Qualitative research interviews. *Psychotherapy Research, 19*(4), 566-575.

MINEDUC (2019). *Bases curriculares III° y IV° Medio*. MINEDUC.

MINEDUC (2017). *Estándares de aprendizaje. Matemática. Sexto básico*. MINEDUC.

MINEDUC (2015). *Bases curriculares para 7° básico a 2° medio*. MINEDUC.

Neuman, W. (2006). Social research methods: Qualitative and quantitative approaches (6th ed.). Pearson/Allyn and Bacon.

Taut, S., Cortes, F., Sebastian, C. & Preiss, D. (2009). Evaluating school and parent reports of the national student achievement testing system (SIMCE) in Chile: Access, comprehension, and use. *Evaluation and Program Planning 32*, 129–137.

van Manen, M. (1990). *Researching lived experience: Human science for an action sensitive pedagogy*. Althouse.

Yin, R. (2009). *Case study research*. SAGE.

EL PAPEL DEL LENGUAJE MATEMÁTICO COMO UNA CATEGORÍA DE CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

Rosa Delgado Rebolledo

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Aunque se reconoce que a través del uso del lenguaje matemático los estudiantes comunican sus ideas y argumentos, y en general, desarrollan su conocimiento matemático, es menos notorio el conocimiento que deberían tener los profesores sobre el lenguaje matemático. En este trabajo reflexionamos sobre el papel del lenguaje matemático como una categoría de conocimiento de la práctica matemática de los profesores. Haciendo uso de episodios de una clase desarrollada por un profesor universitario, mostramos componentes de conocimiento sobre el significado de los cuantificadores, el uso de los símbolos para reducir y expresar abreviadamente información y la precisión en el uso del lenguaje matemático. Señalamos la importancia de seguir profundizando en los componentes de esta categoría de conocimiento y en su relación con otras categorías del conocimiento especializado de los profesores de matemáticas.

Conocimiento del profesor, lenguaje matemático, conocimiento de la práctica matemática, educación superior.

INTRODUCCIÓN

El lenguaje matemático posee una función expresiva y comunicativa que lo convierte en un elemento central en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A través del uso del lenguaje matemático los estudiantes obtienen la habilidad de estructurar su pensamiento para comunicar una idea o un argumento a otras personas, a la vez que los profesores son los principales mediadores entre los estudiantes y las formas de comunicar las matemáticas en el aula. En esta línea, los profesores de matemáticas requieren conocimientos acerca del lenguaje matemático, sus características y su uso. Ball (2003), por ejemplo, se refiere a la fluidez y el cuidado que los profesores deberían tener con el lenguaje matemático como parte de su conocimiento de valores fundamentales para hacer matemáticas. A su vez, el uso de la notación convencional, la distinción entre los significados cotidianos de los significados matemáticos de algunos términos y la precisión del lenguaje matemático son características claves de la calidad en la enseñanza de las matemáticas que se relacionan con el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores (Hill et al., 2008).

Por otra parte, el lenguaje matemático tanto en el sentido de la búsqueda del rigor y de la precisión como en su papel en la construcción de conceptos matemáticos se considera como uno de los aspectos que permea al conocimiento especializado de los profesores de matemáticas en todas las etapas educativas (Muñoz-Catalán y Montes, 2016). En relación con lo anterior, en el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) (Carrillo et al., 2018) se incluye conocimiento de la

notación matemática asociada a un contenido en el subdominio conocimiento de los temas, sin embargo, esto se distingue de un conocimiento general de cómo usar el lenguaje matemático y cuál es su papel en el desarrollo de diferentes actividades matemáticas. De acuerdo con lo anterior, en las investigaciones con el MTSK se han reportado algunos descriptores de conocimiento referidos al lenguaje matemático. Por ejemplo, Carrillo et al. (2017) señalan la importancia de la precisión matemática tanto en la argumentación como en el uso de letras y expresiones para comunicar un resultado. Zakaryan y Sosa (2021) por su parte, se refieren al conocimiento del papel de los símbolos para reducir y expresar abreviadamente la información, identificar conceptos y entender el lenguaje matemático. Estos descriptores son considerados como parte del subdominio del conocimiento de la práctica matemática (KPM) y obtenidos al analizar el conocimiento de profesoras de matemáticas de secundaria. Otros componentes asociados al uso de los símbolos y del lenguaje matemático también emergieron en el trabajo de Delgado-Rebolledo (2020), de modo que el *conocimiento del papel del lenguaje matemático* se propone como una categoría del KPM. Siguiendo las ideas anteriores, en este trabajo analizamos una clase de matemáticas de un profesor universitario con el fin de comprender el *conocimiento del papel del lenguaje matemático* que dicho profesor pone en juego.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Carrillo et al. (2018) describen una práctica matemática como cualquier actividad matemática llevada a cabo sistemáticamente, que representa un pilar de la creación matemática y que conforma una base lógica de la cual se pueden extraer reglas. Dichas prácticas están basadas en las formas de trabajar en la disciplina y permiten a quien las desarrolla construir, validar y comunicar conocimiento matemático (Delgado-Rebolledo, 2020).

De acuerdo con lo anterior, en el subdominio del MTSK dedicado al conocimiento de práctica matemáticas —abreviado como KPM— se considera el conocimiento del profesor, de las formas de producción y funcionamiento matemático, en otras palabras, el conocimiento sobre cómo se construyen las matemáticas. Así, en el KPM se estudia cómo el profesor conoce el quehacer matemático subyacente a la actividad matemática. En este sentido, el profesor puede conocer diferentes formas de argumentación, validación, y prueba, características de los enunciados matemáticos o actividades concretas propias del quehacer matemático, como la modelación matemática (Montes et al., 2021). Delgado-Rebolledo (2020) señala que el KPM agrupa el conocimiento del profesor de prácticas matemáticas tales como demostrar, definir y resolver problemas, además de su conocimiento del lenguaje matemático como elemento base para la realización de estas (y otras) prácticas. En esta línea, la categoría referida al *conocimiento del papel del lenguaje matemático* incluye como subcategorías el conocimiento del significado y uso de los símbolos y del uso del lenguaje matemático.

Respecto a los símbolos, Bardini y Pierce (2015) describen tres categorías: letras y formas similares a letras en cualquier idioma como h, α, ∀; figuras, por ejemplo, signos de operación (+, x) y otras figuras como %, ≤, ∫; y plantillas compuestas que combinan letras y figuras, por ejemplo, r^2, E(X). Estos símbolos pueden ser combinados para formar expresiones simbólicas (e. g., $y = mx+b$), las cuales son la base del lenguaje matemático.

Siguiendo las ideas anteriores, el conocimiento asociado a la elección de símbolos (convencionales o no convencionales) con un propósito, su uso de forma coherente en la comunicación de ideas matemáticas, así como el conocimiento del significado de los símbolos en diferentes contextos son descriptores de la subcategoría de conocimiento del papel de los símbolos.

Por otra parte, no hay un límite claro entre el lenguaje matemático formal y el lenguaje cotidiano, pues el lenguaje matemático nunca es completamente formal (Barwell, 2013). En este sentido, nos referiremos al lenguaje matemático entendiendo este como el resultado del uso de los códigos de la lengua natural y la escritura simbólica, asociación que se realiza por razones de economía y que además intenta preservar características como la precisión.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta investigación se desarrolló a través de un estudio de casos instrumental (Stake, 1995), bajo un paradigma interpretativo y una metodología cualitativa. Seleccionamos como caso a un profesor de matemáticas con 6 años de experiencia como profesor en la educación superior. José es doctor en matemáticas, investiga en la línea de Análisis numérico y en el momento de este estudio, estuvo desarrollando los cursos de Cálculo y Análisis Numérico. A estos cursos asisten estudiantes de carreras de Ingeniería (matemática, electrónica, telemática e industrial) de una universidad chilena.

La recolección de los datos se realizó a través de la observación de las grabaciones de las clases virtuales del profesor. Las sesiones de clase —de duración promedio de 70 minutos— fueron organizadas en episodios de acuerdo con las actividades desarrolladas por el profesor como la presentación de una definición, la realización de un ejercicio, o el desarrollo de una demostración. Estos episodios fueron transcritos (incluyendo capturas de vídeo y fotos de la pizarra digital) y posteriormente analizados considerando expresiones en el discurso del profesor que pudieran interpretarse como una manifestación de su conocimiento del papel del lenguaje matemático. Para fortalecer el análisis de las sesiones de clase, se realizó una entrevista semi-estructurada de una hora de duración.

RESULTADOS

A continuación, presentamos un fragmento de la clase de Análisis Numérico en la cual el profesor discute con los estudiantes el Teorema del Valor Intermedio (TVI): Si $f\colon [a,b] \to R$ es continua y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

> José: Si vemos el teorema, en ningún momento te garantiza unicidad. Ojo con eso, aquí cuando decimos existe un, no estamos diciendo existe un único, y eso hay que tenerlo en cuenta porque pueden existir otros. Piensen en una función armónica [dibuja una función], listo supongamos que tenemos esta función con este recorrido, entonces cuántos puntos hay dónde se hace cero [dibuja los puntos y los cuenta 1, 2, 3, 4, 5, 6]. Bueno y qué pasa si yo elijo este puntito que está por aquí como a y luego $f(a)$, y vamos a elegir este como b, por lo tanto, aquí tendríamos $f(b)$. Entonces el teorema se cumple, sigue funcionando, aunque hay más de un cero […] el teorema te garantiza que hay un punto por ahí dónde la función se hace cero, si hay más, bueno al teorema no le interesa, él lo que te dice es hay.

En el fragmento expuesto observamos que José utiliza un ejemplo para profundizar en el enunciado del TVI (Figura 1). El profesor enfatiza que el teorema es un resultado de existencia y no de unicidad, lo anterior debido a que José ha identificado que sus estudiantes tienen dificultades para comprender que el

TVI se cumple aún cuando la función tiene más de un cero en el intervalo seleccionado. Adicionalmente, expresiones de José como "el teorema te garantiza que hay un punto por ahí", o " si hay más, bueno al teorema no le interesa, él lo que te dice es hay" las interpretamos como su *conocimiento del significado del cuantificador existencial*.

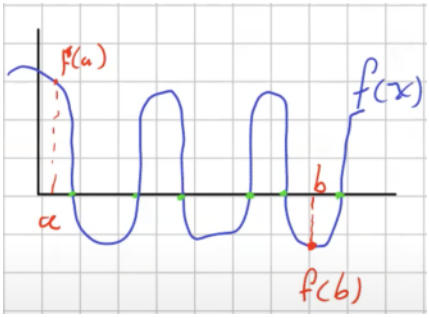


Figura 1: Teorema del Valor Intermedio

El TVI es expuesto por José, pues el mismo es la base teórica del método de bisección, un método para la búsqueda de raíces de una función. Durante la presentación del algoritmo el profesor expone lo siguiente:

> José: Y así lo que hago es que voy partiendo a la mitad cada intervalo y me voy quedando donde esta el cambio de signo, eso va generando una sucesión de intervalos que convergen al cero de tu función [escribe $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$], entonces como les venía diciendo, los intervalos que se van generando cada vez son más chicos. Este (señala el intervalo $[a_0, b_0]$) es el intervalo más grande y luego el a_1, b_1 está formado por el punto medio del intervalo a_0, b_0, por lo tanto, es más chicho y está dentro del grande (señala el intervalo $[a_0, b_0]$) y el a_2, b_2 está formado por el punto medio que sacas de a_1, b_1 y así sucesivamente, el algoritmo va encerrando el punto donde la función es cero.

En el fragmento anterior se observa que el profesor usa la expresión "los intervalos que se van generando cada vez son más chicos" o "el algoritmo va encerrando el punto donde la función es cero", para referirse a que los intervalos que se construyen para encontrar raíces están encajados. En la entrevista cuando preguntamos a José la razón por la cual no utiliza el término encajados el profesor señala:

> Los intervalos están anidados o encajados, sí, pero no lo digo en esos términos porque tengo estudiantes de Ingeniería en general, informática, civil, electrónica, no todos [los estudiantes] son de Ingeniería Matemática, entonces no les puedo hablar en esos términos, tengo que utilizar los términos matemáticos pero sin llegar a abstraerme tanto […] En las notas de clase aparece el encajamiento, y en algún momento lo mencionó pero a la hora de decirlo en la clase, lo digo para que ellos puedan ver que un intervalo se va metiendo en el otro.

Observamos que José utiliza la expresión "un intervalo se va metiendo en el otro" para referirse a la contenencia que describe el encajamiento. El profesor hace una asociación entre el lenguaje natural y el simbólico, dando cuenta de su conocimiento de que los símbolos permiten expresar información de manera abreviada. A su vez, José intenta conservar la precisión en sus afirmaciones.

COMENTARIOS FINALES

De acuerdo con los resultados expuestos, observamos que José toma decisiones de enseñanza basado en las características del curso (estudiantes de diferentes carreras de ingeniería) y en las dificultades e

intereses de sus estudiantes. El profesor además pone en juego su conocimiento sobre el uso de los símbolos y del lenguaje matemático buscando que esto le permita promover la comprensión del TVI y del método de bisección. En la reflexión sobre el TVI es el cuantificador y su significado el elemento matemático que José enfatiza. En cuanto al funcionamiento del método de la bisección, este es expuesto por el profesor haciendo asociaciones entre el lenguaje natural y el simbólico. Vemos entonces la utilidad que tiene el *conocimiento del papel del lenguaje matemático* como parte del KPM de este profesor. Por otra parte, esta categoría de conocimiento sigue siendo un componente a profundizar dentro del modelo MTSK de modo que investigaciones con profesores de matemáticas de otros niveles educativos, son necesarias para describir con mayor detalle sus componentes y las posibles relaciones entre el conocimiento del papel del lenguaje matemático y otras categorías del MTSK.

Referencias

Ball, D., y Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, y D. Schifter (Eds.). *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). National Council of Teachers of Mathematics.

Bardini, C., y Pierce, R. (2015). Assumed mathematics knowledge: the challenge of symbols. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, *23*(1), 1-9.

Barwell, R. (2013). Formal and informal language in mathematics classroom interaction: A dialogic perspective. En A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of 37th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 73-80). Kiel, Alemania: PME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., y Ribeiro M. (2017). Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) in the "dissecting an equilateral triangle" problem. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, *7* (2), 88-107.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzaléz, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253.

Delgado-Rebolledo (2020). *Una propuesta de cate* Muñoz-Catalán y Montes, 2016*gorización del conocimiento de la práctica matemática de profesores universitarios* (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/Txt-0000/UCB0379_01.pdf

Hill, H., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., y Ball, D. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and instruction*, *26*(4), 430–511.

Montes, M., Pascual, M., y Climent, N. (2021). Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *24*(1), 83-104.

Muñoz-Catalán, M.C., y Montes, M.A. (2016). La investigación sobre MTSK en las distintas etapas educativas. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 87-93). Huelva: SGSE.

Stake, R. (1995). *The art of case study research.* London: Sage.

Zakaryan, D. y Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación Matemática*, *33*(1), 71-97.

DEFINICIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS POR FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Vargas-Herrera, J.[a], Giménez, J.[a], Vanegas, Y. [b]

[a]Universidad de Barcelona, [b]Universidad de Lleida

El objetivo de esta comunicación es caracterizar cómo estudiantes de segundo curso de educación primaria describen y definen figuras geométricas y sólidos. Se diseñan dos tareas profesionales y se implementan con 148 estudiantes, ambas, contienen material manipulativo y/o software. Las tareas promueven la visualización e identificación de atributos de figuras 2D-3D. La primera está basada en el estudio de un sólido denominado "medio cubo" que permite componer otros, mientras que en la segunda se trabaja con polígonos y movimientos rígidos en el plano para lograr recubrimientos. Para el análisis se usan herramientas del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-matemáticas del profesor de matemáticas. Se observa que gran parte de los futuros maestros reconocen fundamentalmente elementos perceptivos de las figuras, lo que les hace construir definiciones simples y en ocasiones erróneas, pocos logran definiciones basadas en estructuras geométricas adecuadas.

Definición, Clasificación, Geometría, Futuros maestros

INTRODUCCIÓN

El conocimiento didáctico-matemático de los profesores de matemáticas ha sido estudiado con especial interés durante las últimas décadas. Diversas investigaciones han identificado y definido componentes para caracterizar este tipo de conocimiento (Ball, Thames, y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Ribeiro, 2017, entre otros). Uno de los objetivos de esquematización de este conocimiento es el tener elementos que permitan analizar, describir y perfeccionar la práctica del profesor y, por ende, promover acciones para la mejora del aprendizaje de los estudiantes. Este interés ha llevado al desarrollo de modelos para el análisis y la mejora de la interacción y práctica educativa en el aula. Así, encontramos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas CCDM (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015; Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016).

Desde el modelo CCDM se plantea que, para lograr una enseñanza idónea, el profesor de matemáticas debe poseer distintos tipos de conocimiento. Por un lado, tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo en el que imparte la enseñanza. Además, debe, adicionalmente, conocer elementos de niveles posteriores, lo que se denomina como el "conocimiento del contenido matemático *per-se*". Este conocimiento se divide en dos tipos: *conocimiento matemático común* y *conocimiento matemático extendido*. El primero hace referencia al conocimiento sobre el objeto matemático que es necesario poner en juego para resolver problemas y/o actividades relacionadas con un tema (matemático) específico en un nivel educativo determinado. Generalmente, se asocia al nivel en que se enseña. El segundo se refiere

a que el docente además de saber enfrentar problemas/actividades sobre un tema determinado debe poseer conocimientos más avanzados, que hacen parte de niveles superiores.

Son diversos los tópicos que se han investigado vinculados al conocimiento profesional docente, pero pocos de estos trabajos analizan cómo maestros de primaria caracterizan elementos y clasificaciones de la geometría de sólidos. En la mayor parte de estos trabajos, se muestran figuras que los estudiantes o futuros docentes deben reconocer, y se muestra cómo identifican las propiedades que subyacen a dichas formas y si ello les sirve para clasificarlas (Guillen, 2000; Patkin, 2015). De acuerdo a los planteamientos de Fujita (2012), cuando los estudiantes deciden si un objeto pertenece o no a una determinada categoría, pueden dar respuestas sesgadas porque en su decisión se privilegian formas prototípicas o comunes. En algunas investigaciones centradas en la mirada de Van Hiele se reconoce que lo prototípico, explica las dificultades en pasar de un nivel 1 o 2 al nivel 3. Y ello se cumple tanto en el estudio de figuras 2D como 3D (Gutiérrez y Jaime, 1998).

La geometría es un tópico relevante en el currículo escolar. Sin embargo, no es trabajada suficientemente en las aulas. Muchos de los maestros que abordan los conceptos geométricos tienen un enfoque en el que se privilegia la memorización de nombres de las figuras y algunas de sus características (Copley, 2000). Además, generalmente las representaciones usadas para hablar/mostrar dichas figuras están centradas en una visión prototípica de las mismas. Figuras presentadas siempre en una misma posición y poca variedad de ejemplos que permitan enriquecer la mirada y análisis sobre éstas. Cabe mencionar, que el trabajo geométrico desarrollado en esta etapa (6-12 años) mayoritariamente se focaliza en el estudio de figuras planas y no tanto en figuras tridimensionales. Por otra parte, autores como Sinclair y Bruce (2015) señalan que pocas investigaciones se han centrado en el pensamiento geométrico de los niños en relación con este tipo figuras.

El conocimiento geométrico con el que llegan los estudiantes, futuros maestros, al grado de educación primaria no es alejado de lo señalado anteriormente. Identificar dicho conocimiento es clave para adecuar y mejorar las propuestas de formación en aras a impulsar el razonamiento geométrico en los futuros maestros.

METODOLOGÍA

Se diseñan dos tareas profesionales, la primera titulada “los medios cubos” y la segunda “Teselados como una idea matemática en primaria”, se implementaron con 148 estudiantes del Grado de Educación Primaria de una universidad española, de forma colaborativa, lo que dio lugar a la configuración de 33 grupos para la primera y 25 para la segunda. Nuestros datos son los protocolos escritos de cada uno. A partir del análisis de las producciones de los futuros maestros se identifican el tipo de construcciones; los criterios que usan para definir y caracterizar polígonos y figuras 3D

Como es de nuestro interés analizar los tipos de conocimientos que emergieron en el desarrollo de las tareas propuestas, nos basaremos en el análisis de una pregunta de cada tarea que evidencia elementos fundamentales para la discusión sobre *definir figuras geométricas*. En la Tabla 1 se presentan las preguntas seleccionadas de cada tarea, el tipo de conocimiento que se valora y su intencionalidad.

Para el análisis, se procedió a agrupar las respuestas similares. A partir de esta categorización, se obtiene información que permite describir dificultades, errores y justificaciones presentes en el conocimiento común del contenido que poseen los futuros maestros en relación con la definición de figuras 3D y 2D.

Tarea	Pregunta	Tipo de Conoc.	Intencionalidad
Los medios Cubos	Construye todos los poliedros que se pueden formar con las cuatro piezas (medios cubos). Haz una tabla donde presentes la representación gráfica, el nombre y las características de las figuras obtenidas.	Común 3D	Obtener figuras a través de la composición. Identificar variedad de figuras Conocer lenguaje específico para describir figuras geométricas
Teselados como una idea matemática en primaria	¿Qué polígonos componen los bloques geométricos? ¿qué características tienen?	Común 2D	Identificar y nombrar adecuadamente polígonos conocidos. Caracterizar polígonos Conocer lenguaje específico para describir figuras geométricas

Tabla 1: Preguntas, tipo de conocimiento e intencionalidad

RESULTADOS

Reconocemos a continuación características del conocimiento matemático de los estudiantes en las dos preguntas y presentamos los resultados sobre: conocimiento común sobre figuras 3D y conocimiento común sobre figuras 2D.

Conocimiento común de figuras 3D (tarea medios cubos).

Todos los grupos construyeron y reconocieron diferentes poliedros siendo el prisma triangular el que la mayoría construyó (27,7%), seguido por el prisma trapezoidal (en algunos casos nombrado de forma errónea hexaedro) y el prisma rectangular, ambos con un 23,1%. Sólo 4 grupos (6,2%) hablan de paralelepípedo. Y dos grupos (3,1%) hablan de ortoedro. Algunos grupos cuando no conseguían asignar un nombre matemático "conocido" a la figura construida, proponen nombres reales como "silla", "puente", "podio", entre otros (28,6%). En las descripciones que realizan de cada figura algunos grupos enuncian características relacionadas con paralelismos, incidencias o perpendicularidades, y las expresan correctamente.

Los estudiantes consideran la longitud como un elemento diferenciador de sólidos, así, por ejemplo, un prisma triangular construido con dos medios cubos lo asumen diferente a un prisma triangular construido con tres medios cubos. Por otro lado, identifican cuerpos regulares e irregulares (que se usa como criterio inicial de clasificación en algunos casos). Se evidencia el uso de lenguaje informal para describir elementos que están nombrados en la geometría de los sólidos, llaman esquinas a los vértices, etc. La mayoría de los estudiantes usan el término igualdad para referir situaciones de congruencia, lo que además de ser un error, desencadena elementos de mayor preocupación como la mezcla de términos de la geometría plana con la geometría del espacio. Nos parece que es debido al hecho que en la geometría escolar no se enfatiza suficientemente la diferencia entre igualdad y congruencia.

Entre los errores, encontramos ocho grupos que forman con los cuatro medios cubos un sólido que identifican con un cubo, pero que no lo es. En efecto, con cuatro medios cubos, nunca podemos obtener un cubo. Eso muestra una dificultad asociada a la visualización, porque al unir los cuatro medios cubos, se obtiene un prisma rectangular con dos caras cuadradas y cuatro caras rectangulares.

Conocimiento común de figuras 2D (tarea teselados).

Al preguntar a los estudiantes sobre los polígonos que componían los bloques geométricos, únicamente 3 grupos (12%) asignó el nombre correcto a cada una de las figuras (triángulo equilátero, triángulo isósceles, cuadrado, rombo, paralelogramo), 21 grupos las nominaron de forma parcialmente correcta (84%) y un solo grupo tuvo la mayoría de los nombres incorrectos (4%).

De los 21 grupos que nombraron las figuras en la categoría *parcialmente correcto*, la mayoría refiere a un rombo como romboide omitiendo el hecho de que los lados de los rombos presentes en el applet eran todos congruentes (8 grupos, 36%); el siguiente error más común fue entregar una definición equivocada como enunciar que "un triángulo es una figura con todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales" (5 grupos, 23%); finalmente hay 4 grupos (18%) que cometen algún error geométrico como indicar que "la suma de los ángulos internos de un cuadrado es 180°", los demás grupos (5, 23%) no presentan definición alguna de las figuras entregadas.

Como elemento coincidente a la tarea anterior, encontramos que la mayoría de los grupos (65%) basa sus definiciones en un listado de propiedades físicas, aludiendo a características de tipo perceptivo; solo el 20% (4 grupos) presenta un avance hacia un listado de propiedades matemáticas o algún tipo de relación entre los componentes de las figuras y únicamente el 15% (3 grupos) definen los polígonos mediante un conjunto de propiedades necesarias y suficientes para su identificación.

CONCLUSIONES

En relación al conocimiento común de figuras 2D y 3D, en este estudio se constata que la apariencia perceptual domina sobre ciertos aspectos conceptuales (Bernabeu, Llinares y Moreno, 2017). Los futuros maestros identifican básicamente argumentos visuales, semejantes a los que usan los propios niños en las primeras edades. No se observa una aplicación del conocimiento matemático supuesto de las figuras y los prismas. Presentan definiciones de polígonos, basadas en un listado de propiedades física o matemáticas, pero que no se hacen suficientes para la identificación de una figura 2D.

El lenguaje que se establece en el grupo de estudiantes para maestro es mayoritariamente de naturaleza descriptiva y sugiere que sus miembros se encuentran en el segundo nivel de van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998). Podemos decir que interpretamos nuestros resultados en el sentido de mostrar la dificultad en relacionar la comprensión de las figuras geométricas, con la coordinación de dos sistemas semióticos de representación. En efecto, a pesar de tener los elementos manipulativos los estudiantes no son capaces de formular explicaciones matemáticamente bien formuladas.

En este mismo sentido, los resultados se condicen con los atributos distintivos en los procesos de razonamiento de cada uno de los niveles de Van Hiele, organizados en Gutierrez y Jaime (1998), confirmamos que al solicitar a los estudiantes formular una definición, la mayoría queda en un nivel 1 (propiedades físicas), pocos acceden a un nivel 2 (propiedades matemáticas) y en menor cantidad o casi

ninguno logra los niveles 3 y 4 (conjunto de propiedades necesarias y suficientes, prueba la equivalencia de definiciones, respectivamente).

Los resultados de este estudio ponen de manifiesto que algunos futuros maestros asemejan definir un objeto matemático con describir sus características o propiedades, pero no logran identificar o plantear aquellas características y propiedades que son necesarias y suficientes para una definición correcta en geometría.

El uso de material manipulativo como mediador de las observaciones y respuestas permitió oportunidades de reflexión sobre la congruencia de figuras que se pueden observar en distintas posiciones. Pero no es suficiente para un conocimiento matemático común adecuado, porque muchos grupos no son capaces de sistematizar el proceso de construcción de figuras, y se conforman con haber encontrado unas cuantas.

Agradecimientos

Este trabajo se realiza en el marco de los proyectos PGC2018-098603-B-I00 y PID2019-104964GB-100 MICINN.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017). Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 157-166). Zaragoza: SEIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Ribeiro, C. M. (2017). Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) in the «Dissecting an equilateral triangle» problem. *RIPEM-International Journal for Research in Mathematics Education*, 7(2), 88-107.

Copley, J. V. (2000). The young child and mathematics. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusión relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematica Behaviour*, 31 (1), 60-72.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemá-ticas. UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.

Guillén Soler, G. (2000) Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, *18*(1), 35-53.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics, 20(2/3), 27-46.

Patkin, D. (2015). Various ways of inculcating new solid geometry concepts. International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 3(2), 140-154.

OPORTUNIDADES DE APRENDER CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE EDUCADORES ESPECIALES

Juan Luis Piñeiro G.[1], Juan Pablo Calle G.[2]

[1]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, [2]Universidad de Barcelona

Este trabajo presenta un análisis a los programas relativos a las matemáticas escolares de formación inicial en Educación Especial. Se analizaron 31 programas de carreras, de 12 Universidades del Consejo de Rectores de Universidades de Chile. Los resultados muestran un foco en los números y operaciones y desde una perspectiva procedimental y de definiciones.

Educación Especial, Conocimiento Matemático, Formación de profesores.

La educación inclusiva tiene diversas caracterizaciones, pero "todas apuntan principalmente a garantizar el derecho a una educación de calidad para todos, pero principalmente a los grupos de estudiantes más vulnerables o marginados por la sociedad" (Calle, 2020, p. 22). Esto no se traduce en que todos los estudiantes deban recibir una enseñanza idéntica, sino a que se diversifique la práctica educativa, tomando en cuenta las características y particularidades de cada uno. Este hecho es uno de los factores de que actualmente coexistan profesionales de Educación Especial junto a profesionales de Educación Básica y de Educación Media, que mediante un trabajo colaborativo tienen como misión dar respuesta a la diversidad de estudiantes para que todos puedan obtener las mismas oportunidades de aprender matemáticas. En este sentido, una de las aristas que puede ayudar a que los procesos educativos de aula tengan un enfoque más inclusivo, tiene relación con el conocimiento del profesor, pues los docentes son un elemento clave en el aprendizaje de los estudiantes (Hill et al., 2005).

Desde esta perspectiva, se han desarrollado diferentes instrumentos que apoyan a las escuelas de educación en su rol de formadores: Estándares Orientadores para carreras, la Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial docente, entre otras. No obstante, la Educación Especial ha sufrido un fenómeno particular. Los Estándares Orientadores que fijan los conocimientos disciplinarios y pedagógicos de los futuros profesores de Educación Especial, son sumamente generales cuando se trata de conocimientos disciplinares (e.g. CPEIP, 2021). Concretamente, el documento utiliza el currículo nacional para orientar la formación disciplinar. Particularmente, en el Estándar C relativo al currículo escolar y la respuesta a la diversidad, se establece que el futuro profesor

> comprende los fundamentos y la estructura del currículum vigente en Educación Parvularia, Básica y Media y utiliza este conocimiento para proponer medidas de flexibilización, enriquecimiento y adecuación. Además, reconoce los principios y aportes de las didácticas para analizar las prácticas pedagógicas que favorecen u obstaculizan el aprendizaje, diversificar la enseñanza y adecuar el currículo desde una perspectiva inclusiva (p. 92).

En este contexto cabe preguntarse, ¿qué oportunidades de aprender conocimiento matemático, deberían proveer las actividades curriculares de formación de profesores de Educación Especial relativos al currículum de las matemáticas en Educación Básica? Este hecho es relevante, pues las descripciones de los programas de formación basadas en sus características específicas o de contenido, como su plan de estudios, las oportunidades de aprendizaje que ponen a disposición de los futuros maestros (tipo y contenido de los cursos y experiencias escolares que ofrecen) y si estas ofertas y experiencias curriculares son internamente coherente, tienden a tener un mayor impacto en el conocimiento de los futuros docentes (Tatto, 2018). Asimismo, la investigación sugiere que existe una influencia de los temas estudiados en la formación con el conocimiento especializado utilizado en la enseñanza años después de terminar la formación inicial (Hiebert et al., 2019; Morris y Hiebert, 2017; Qian y Youngs, 2016).

MÉTODO

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo por su carácter descriptivo e interpretativo, debido a que el objetivo es comprender, descubrir e interpretar las oportunidades de aprender conocimiento matemático presentes en los programas de formación inicial de Educadores Especiales.

Muestra y unidades de análisis

Para este trabajo se invitó a participar a las Universidad del Consejo de Rectores de Chile (CRUCH) que imparten la carrera de Educación Especial. De las 30 universidades que componen esta red, 15 de ellas ofrecen dicha carrera en diferentes especialidades. Mediante la red IFPEE-CRUCH (Instituciones Universitarias Formadoras de Profesores de Educación Especial de CRUCH) se les solicitó a los Jefes de Carrera, los programas de asignaturas relativas a las matemáticas escolares que estuvieran insertos en sus trayectorias formativas. De las 15 Universidades invitadas, 12 respondieron a la solicitud enviando los documentos. Al contrastar la información de los programas con las mallas curriculares publicadas en las páginas web oficiales de las instituciones, se constató que solo 9 enviaron todos los programas que tuvieran relativos a matemáticas. Además, se pudo observar la diversidad en cuanto a la cantidad de asignaturas relativas a las matemáticas escolares. Particularmente, el promedio de asignaturas es de 2,5 con un rango entre 0 y 1 hasta 6. Este proceso permitió el análisis de 31 programas de asignaturas.

El procedimiento de selección de las unidades de análisis se realizó con el foco en identificar dimensiones del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas. Para cumplir con este cometido, se utilizaron dos tipos de unidades que conjuntamente proporcionan una mayor fiabilidad al estudio: sintácticas y temáticas. Krippendorff (2004) señala las primeras como elementos sintácticos naturales, cargados de fiabilidad debido a su pequeño tamaño. En la segunda, destaca su correspondencia con una definición estructural particular del contenido. Como aspecto importante, resaltar la necesidad de establecer una regla de numeración para guiar el análisis. En nuestro caso, se utilizará la regla de presencia (Bardin, 1996), pues nuestro objetivo es describir un tipo de conocimiento específico, por tanto, esta presencia o ausencia es significativa.

Análisis y categorías

Para la consecución de nuestro objetivo, nos guiaremos por la técnica de análisis de contenido. Primero, para establecer las categorías de análisis, utilizamos las áreas de conocimiento y subdominios del

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés), propuesto por Carrillo y colaboradores (2018). Particularmente, las dimensiones de conocimiento matemático y conocimiento didáctico y los conocimientos que ellas consideran; asimismo se tuvieron en consideración los ejes de contenido propuestos por el currículo escolar. Este proceso se utilizó para una primera organización de las unidades de análisis y presenta un carácter deductivo. Este análisis inicial se completó con un análisis dentro de cada categoría para identificar patrones, guiado por los subdominios del MTSK. Cabe destacar que una misma unidad de análisis puede contener diversas ideas, las cuales hacen referencia a distintas categorías y subcategorías

RESULTADOS

En lo que sigue, se presentan los resultados según la perspectiva tomada en cada análisis realizado.

Ejes de contenido

Cuando se focaliza en el eje de contenido al que apuntan los diferentes programas, se encontró dos grupos de menciones; un primer grupo en el que no es posible identificar a qué contenido se refieren y otro grupo en que el eje de contenido es claramente identificable. En este último grupo, se han identificado cinco agrupaciones de menciones: habilidades matemáticas, datos y azar, geometría y medida, álgebra y números. En ellas, el eje menos abordado en los programas de formación se corresponde con el algebra escolar y datos y azar, aspectos que solo se ven en dos Universidades. Por otra parte, el eje con mayor presencia es el de números y operaciones, con programas en seis Universidades, seguido por geometría, con menciones en los programas de cinco Universidades.

Eje	Universidades
Generales	U1 – U2 – U3 – U4
Álgebra	U1 – U5
Datos y azar	U1 – U5
Números y Operaciones	U1 – U3 – U4 – U5 – U6 – U7
Geometría y Medición	U1 – U5 – U8 – U7 – U9
Habilidades	U1 – U4 – U5 – U9
Sin menciones	U10 – U11 – U12

Tabla 1: Ejes de contenido presentes en programas de Universidades

Asimismo, si se observa el programa y el eje de contenido que se aborda en él, es posible identificar tres tipos de programas. Un primer grupo que no específica el contenido matemático a enseñar en la asignatura y que está presente en tres Universidades (cuatro programas). Un segundo grupo se corresponde con actividades curriculares que tratan varios ejes de contenido matemático en una sola asignatura, con dos Universidades (dos programas). Finalmente, el tercer grupo reúne a los programas que, o bien focalizan en un área de contenido (por ejemplo, solo números y operaciones o solo geometría y se encuentran en cuatro Universidades), o que focalizan en un área de contenido agregando alguna habilidad matemática como la resolución de problemas (tres Universidades).

Por otra parte, es posible identificar que dos trayectorias formativas cuentan con asignaturas que contienen menciones sobre todos los ejes de contenido, incluidas las habilidades que menciona el

currículo. Asimismo, la tendencia de las trayectorias pareciera focalizar en los ejes de Números y Operación y Geometría y Medición. No obstante, existen tres trayectorias formativas que no consideran conocimiento matemático relativo a ningún eje de contenido en sus programas.

Conocimiento Matemático

Respecto al conocimiento matemático presente en los programas, se ha constatado que los programas analizados hacen alusión a dos subdominios del MTSK: conocimiento de los temas y conocimiento de la práctica matemática. Respecto al primero de ellos, el conocimiento de los temas se observa como el más común en los programas analizados y es posible identificar una tendencia a priorizar aspectos relativos a definiciones (32 menciones), propiedades (27 menciones) y procedimiento (59 menciones). Por otra parte, la fenomenología queda relegada a unas pocas menciones y aparece solo cuando se tratan los problemas aritméticos de enunciado verbal. Sobre el segundo, el conocimiento de las prácticas matemáticas es posible observar una tendencia a priorizar aspectos de la resolución de problemas, seguido de la argumentación y aspectos ligados a la comunicación y el lenguaje matemático.

Subdominio	Conocimiento	Frecuencias
Conocimiento de los temas (KoT)	Procedimientos	59
	Definiciones, propiedades y fundamentos	59
	Representaciones	18
	Fenomenología y aplicaciones	4
Conocimiento de prácticas matemáticas (KMP)	Argumentación	13
	Generalización	1
	Modelización	4
	Visualización	2
	Resolución de problemas	27

Tabla 1: Frecuencias menciones subdominios Conocimiento Matemático

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Uno de los aspectos que revela este trabajo, tiene relación con el foco que la formación de educadores especiales otorga a aspectos relativos al número y sus operaciones y desde una mirada procedimental y de priorizar definiciones por sobre otros aspectos de las matemáticas. El conocimiento sobre la disciplina que se enseñará es fundamental para construir conocimiento didáctico del contenido (Agathangelou y Charalambous, 2021). El presente trabajo pone atención al currículo pretendido que las escuelas de formación explicitan en las trayectorias formativas de educadores especiales. Si bien, se debe tener en cuenta que el currículo pretendido no es sinónimo de currículo implementado, la investigación sugiere que cuando los profesores requieren planificar la enseñanza de las matemáticas, recurren a los conocimientos a los que fueron expuestos en su formación inicial (Morris y Hiebert, 2017) e incluso responden de mejor manera a cuestiones relativas a la enseñanza (Hiebert et al., 2019). En este sentido, explicitar en los programas aspectos que se han reconocido como importantes para enseñar matemáticas (e.g. Carrillo et al., 2018) contribuirá a tener claridad sobre qué aspectos deberán enseñar a los formadores de profesores noveles.

Por otra parte, los resultados aquí presentados pueden servir de insumo para que formadores de profesores tanto en el área de Educación Matemática como de Educación Especial, discutan sobre qué aspectos debería contemplar la formación de los futuros profesores de Educación Especial. Este hecho es relevante, pues al contar con estándares y guías poco claras sobre lo que se espera de los futuros docentes respecto a la enseñanza de las matemáticas, sólo el trabajo colaborativo entre ambas áreas de conocimiento podrá contribuir a la mejora de la formación inicial.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado gracias al Proyecto DIUMCE 23-2021-PIED.

Referencias

Agathangelou, S. A. y Charalambous, C. Y. (2021). Is content knowledge pre-requisite of pedagogical content knowledge? An empirical investigation. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24*(5), 431-458. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09466-0

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido* (2nd ed.). Akal.

Calle, J. P. (2020). *Inclusión y atención a la diversidad en el contexto chileno: Análisis de los factores que facilitan y/o dificultan a las escuelas básicas del país, la puesta en marcha de las nuevas normativas de inclusión* [Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona]. Tesis en Red. https://cutt.ly/pEJ7vxA

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

CPEIP. (2021). *Estándares de la profesión docente. Carreras de pedagogía en Educación Especial/Diferencial*. Ministerio de Educación.

Hiebert, J., Berk, D., Miller, E., Gallivan, H. y Meikle, E. (2019). Relationships between opportunity to learn mathematics in teacher preparation and graduates' knowledge for teaching mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *50*(1), 23–50. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.1.0023

Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371–406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* (2nd ed.). SAGE.

Morris, A. K. y Hiebert, J. (2017). Effects of teacher preparation courses: Do graduates use what they learned to plan mathematics lessons? *American Educational Research Journal*, *54*(3), 524–567. https://doi.org/10.3102/0002831217695217

Qian, H. y Youngs, P. (2016). The effect of teacher education programs on future elementary mathematics teachers' knowledge: A five-country analysis using TEDS-M data. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(4), 371–396. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9297-0

Tatto, M. T. (2018). The mathematical education of primary teachers. En M. T. Tatto, M. C. Rodriguez, W. M. Smith, M. D. Reckase y K. Bankow (Eds.), *Exploring the mathematical education of teachers using TEDS-M data* (pp. 205–256). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92144-0_8

DISEÑO DE TAREAS DE LOS SIGNIFICADOS PARCIALES DE LA NOCIÓN LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UNA VARIABLE

Daniela Araya Bastias, Luis Pino-Fan

Universidad Central de Chile - Universidad de Los Lagos

La presente investigación tiene por objetivo diseñar e implementar tareas que promuevan los significados parciales del objeto límite. Para llevar a cabo lo anterior, se realiza una investigación basada en el Diseño de Tareas y en la Configuración Epistémica basada en el marco teórico y metodológico EOS. La metodología del trabajo se ampara en un paradigma cualitativo, cuyo diseño metodológico es evaluativo, pues la intención es evaluar los significados logrados por once estudiantes de un programa de formación de profesores. Los profesores lograron desarrollar cada uno de los objetos matemáticos primarios de la configuración epistémica pretendida por la tarea.

Diseño de Tareas, Configuración Epistémica, Límite de una función, Design Based Rearch.

ANTECEDENTES

En los últimos años, se han realizado múltiples investigaciones que indagan sobre la complejidad de los procesos de enseñanza aprendizaje sobre la noción de límite. Estos trabajos han evidenciado una serie de dificultades dentro de las cuales podemos identificar tres categorías: a) obstáculos epistemológicos que son propios de la noción (Cornu (1991); Sierspinka (1985); Artigue (1995)) ; b) problemas cognitivos relacionados con el infinito y la complejidad de la noción formal ε, δ (Barahmand, 2017; Mamona-Downs, 2001; Blásquez et al., 2006); y c) dificultades didácticas que surgen en torno a su enseñanza (Caglayan, 2015; Monaghan,1991; Fuente et al, 2012).

Otra problemática que se evidencia en algunas investigaciones se refiere a las tareas que utilizan los docentes para promover la enseñanza del concepto de límite, la cual a menudo, está desprovista de actividades significativas para los estudiantes, pues sus prácticas se centran en técnicas y procedimientos algebraicos (Heine,1988), lo cual impide desarrollar en los estudiantes una comprensión significativa de la noción.

Para responder a las problemáticas mencionadas, diversos autores (Elia et al 2009; Parameswaran, 2006; Fernández-Plaza et al, 2015) han desarrollado tareas para generar el aprendizaje de la noción de límite en los estudiantes o para estudiar sus concepciones, sin embargo, hay escasez de estudios que propongan criterios concretos para diseñar tareas que consideren la riqueza matemática y la complejidad de la noción, adicionalmente no se tienen orientaciones metodológicas que permitan considerar la diversidad de significados que son necesarios para la comprensión del objeto límite.

Debido a lo anteriormente señalado, se propone diseñar tareas que consideren la riqueza matemática y la complejidad de la noción límite, que incorpore sus significados parciales con sus respectivas configuraciones epistémicas propuestos en Araya et al (2021).

Marco teórico

Diseño de Tareas

En la literatura se encuentran diversas acepciones sobre los términos *tarea* y *diseño de tareas,* en esta investigación entenderemos como *tarea* a las situaciones e instrumentos que permiten mediar entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Watson et al, 2013). Por otra parte, consideraremos el *diseño de tareas* como el conjunto de objetos y acciones que considera: los recursos educativos, las secuencias de tareas y los consejos pedagógicos para la implementación de las tareas. El campo de investigación del diseño de tareas enfatiza que el diseño y la implementación dependerá del Marco Teórico en el cual se sustenten. Las herramientas teóricas ayudan a orientar el diseño de la tarea y también el cómo éstas pueden ser aplicadas en el aula. Ruthven et al (2009), plantearon una distinción entre el diseño como intención y el diseño como implementación. El diseño de tareas como implementación está orientado a la aplicación del diseño y el proceso que conlleva la implementación de éstas en el aula, las secuencias son estudiadas y analizadas con el fin de mejorar y refinar progresivamente las tareas. Mientras que el diseño como intención está enfocado a la formulación y diseño de las tareas. Kieran et al (2015) señalan que, por lo general, el diseño como intención utiliza marcos teóricos que están bien desarrollados, con el fin de proporcionar claridad y coherencia a la formulación de las tareas.

Configuración Onto-semiótica

Para confeccionar las tareas de nuestro estudio, se utilizaron algunas herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al, 2007), concretamente, se utilizará la herramienta configuración onto-semiótica (Pino-Fan & Font, 2015) porque permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen y emergen de la practica matemática. Estas configuraciones están asociadas a los significados parciales (Pino-Fan et al, 2011) de la noción de límite, para este trabajo se han considerado los seis significados parciales propuestos por Araya et al (2021).

METODOLOGÍA

La presente investigación, trata de un estudio cualitativo cuyo diseño metodológico es evaluativo, pues el objetivo es evaluar la implementación de las tareas, cuyo fin principal es analizar los significados personales logrados por los estudiantes (Hernández et al, 2016). Para implementar la secuencia didáctica se seguirán las orientaciones metodológicas planteadas en el Design Based Research (Bakker & van Eerde, 2015), la cual consta de tres etapas: la primera etapa es Diseño y Preparación del Experimento; la segunda etapa es la Implementación de la Propuesta Didáctica y Análisis Retrospectivo; y la tercera etapa es la Mejora de las Tareas. En el presente trabajo sólo se utilizan la primera y segunda etapa.

La implementación de las tareas se realizó al inicio de la asignatura de Cálculo Diferencial perteneciente a un programa de formación de profesores. La cantidad de participantes fueron once estudiantes de los

cuales nueve participaron de manera permanente en la implementación de cada una de las tareas, éstos se organizaron en grupos de tres personas. La muestra es por conveniencia, ya que está conformada por sujetos disponibles a los cuales la investigadora tuvo acceso, se han escogido este tipo de estudiantes dada la importancia de que los docentes en formación deben tener sobre la noción exigidos por los nuevos Planes y Programas del Plan Diferenciado de Matemática (MINEDUC, 2021a) y los nuevos Estándares para Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media (MINEDUC, 2021b). La modalidad de la implementación se desarrolló de forma online sincrónica por medio del uso de la plataforma Teams y de manera complementaria se utilizó la plataforma Moodle como repositorio de información. La implementación de las actividades tuvo una duración de 10 sesiones de 70 minutos. El diseño de las tareas fue orientado por los objetos matemáticos primarios de cada configuración epistémica asociada a cada significado parcial de límite y por los criterios de diseño (Pochulu, Font, Rodríguez, 2013), éstas fueron validadas de manera interna (discusión entre pares) y de manera externa por la docente que implementó las tareas.

RESULTADOS PRELIMINARES

A continuación, se describirá de manera sintética las respuestas pretendidas por los estudiantes en el desarrollo de la primera tarea, la cual involucra el significado parcial del objeto límite asociada a la Configuración Epistémica "Límite como aproximación en la matemática griega" (CE N°1).

Figura 1: Tarea N°1 asociado a la CE N°1 (Creación Propia)

Se desarrollan las respuestas esperadas y se realiza un análisis Ontosemiótico de dichas respuestas para identificar los objetos matemáticos primarios involucrados. A continuación, se describe de manera sintetizada los objetos matemáticos de la Tarea 1.

Elementos Lingüísticos: los elementos lingüísticos que involucran la tarea son del tipo verbal, algebraico, gráfico y geométrico. *Conceptos y/o definiciones*: la tarea involucra el concepto de "infinito potencial", números racionales e irracionales y la función discreta al realizar la tabulación de los datos y su gráfica. *Situaciones y/o problemas*: la tarea propuesta tiene por objetivo determinar las relaciones de los perímetros y de las áreas de las figuras geométricas obtenidas, así como también deducir su comportamiento (gráfica de las áreas y perímetros). *Procedimientos:* la tarea involucra procedimientos relacionados al método de exhaución, algebraicos y gráficos. *Propiedades/proposiciones*: la tarea involucra el método de exhaución y el axioma de Arquímedes. *Argumentos*: la tarea evoca un razonamiento deductivo, debido a que el estudiante por medio de la observación del comportamiento de las áreas y perímetros de los triángulos deberán deducir que, mientras más iteraciones las áreas van decreciendo y los perímetros van aumentando.

Análisis de las respuestas

Para el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, se hace el desglose de los objetos matemáticos primarios que emergen, cada respuesta es comparada con el fin de identificar elementos comunes y de esta forma caracterizar cognitivamente las respuestas dadas. Como las tareas fueron desarrolladas por tres grupos de estudiantes, mostraremos de manera sintetizada sus aproximaciones con los objetos matemáticos descritos anteriormente. Respecto a los *elementos lingüísticos* los tres grupos evidenciaron expresiones verbales, algebraicas y geométricas. Es importante señalar que todos los grupos utilizaron GeoGebra para graficar el comportamiento de las áreas y perímetros de los triángulos obtenidos. *Los conceptos y/o definiciones* desarrolladas por los estudiantes son el concepto de infinito potencial (al realizar las iteraciones) y de funciones discretas (al realizar las gráficas de los perímetros y áreas), sin embargo, graficaron funciones cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Los estudiantes utilizaron *procedimientos* algebraicos, tabulares y gráficos para deducir el comportamiento de las áreas y perímetros. Si bien no utilizaron de manera explícita la *proposición* o método de exhaución, ésta se vio reflejada en la repuesta de un solo grupo cuando realizaron la iteración de las figuras en el software GeoGebra. Finalmente, sus *argumentos* fueron deductivos, ya que observaron las tablas y los gráficos obtenidos y así analizaron el comportamiento de las áreas y perímetros. Es importante destacar, que sólo un grupo logró deducir sin errores las tendencias del perímetro y del área de las figuras.

CONCLUSIONES

La implementación de la tarea logró evocar cada uno de los objetos matemáticos asociados a la CE N°1, sin embargo, sólo un grupo logró deducir sin errores las expresiones algebraicas de las áreas. A pesar de lo anterior, se puede concluir que todos los grupos desarrollaron de manera intuitiva el significado parcial de la CE N°1 del objeto límite. Adicionalmente, se recogieron observaciones por parte de los estudiantes en cuanto a las tareas y éstas se mejoraron incorporando applets de GeoGebra. Además, se debe mejorar el tiempo asignado para el desarrollo de las tareas, así como también enseñar a los estudiantes el uso de las herramientas de TEAMS. Una de las proyecciones de la presente investigación, es replicar las tareas en modalidad presencial para generar en los estudiantes situaciones de interacción entre ellos, con el fin de visualizar sus expresiones corporales junto con sus argumentos orales, esto no se suscitó, pues durante el transcurso de todas las actividades los participantes mantuvieron sus cámaras apagadas.

Referencias

Araya, D.; Pino-Fan, L.; Medrano, I. y Castro, W. (2021). Epistemic Criteria for Designing Limit Tasks on a Real Variable Function. *Bolema. 35* (69), 179-205.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 97-140) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barahmand, A. (2017) The Boundary Between Finite and Infinite States Through the Concept of Limits of Sequences. *Journal of Science and Mathematics Education, 15*(6), 569-585.

Bakker, A. & van Eerde, D. (2015) An Introduction to Design-Based Research with an Example from Statistics Education. En Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C. & Presmeg, N. (Eds.), *Approaches to Qualitative Research*

in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods, Advances in Mathematics Education (pp.429-466). London, United Kingdom: Springer

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(2), 189-209.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*, 153-166. Dordrecht: Kluwer Academic Press

Caglayan, G. (2015) Math majors' visual proofs in a Dynamic environment: the case of limit of a function and the ε–δ approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.*46*(6), 797-823

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A, Zachariades, T., Zoulinaki, F. (2009). Geometria and Algebraic Approaches in the concept of "limit" and the impact of the "Didactic Contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*. *7*, 765-790.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. y Rico, L. (2015) Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias,33*(2), 211-229

Fuente, A., Armenteros, M. y Font, V. (2012). Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del límite de una función. *Bolema, 26* (42B), 667-690.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39* (1), 127-135

Heine, M. K. (1988) Resequencing Skilss and Concepts in Applied Calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19* (1), 3-25.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2016). *Metodología de la investigación* (6ta ed.). México: McGraw-Hill.

Kieran, C.; Doorman, M. & Ohtani M. (2015) Frameworks and Principles for Task Design. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education an ICMI Study 22* (pp.19-81). Switzerland: Springer International Publishing Switzerland.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limits of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 259–288.

Monaghan J. (1991). Problems with the language of limits. *Learn Math 11*(3), 20-24.

Parameswaran, R. (2007). On unserstanding the notion of limits and infinitesimal quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education. 5*, 193-216.

Pino-Fan, L. R.; Godino, J. D. & Font, V. (2011) Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1),141-178.

Pochulu, M., Font, V. & Rodríguez, M. (2013) *Criterios de Diseño de Tareas para favorecer el análisis Didáctico en la formación de profesores*. Actas de VII CIBEM, 4999-5009.

Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J., & Tiberghien, A. (2009). Design tools in didactical research: Instrumenting the epistemological and the cognitive aspects of the design of teaching sequences. *Educational Researcher,8*, 329-342.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques 6*(1), 5-67.

Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Bolite Frant, J., Doorman, M., Kieran, C., Leung, A., Margolinas, C., Sullivan, P., Thompson, D., & Yang, Y. (2013). Introduction. In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education Proceedings of ICMI Study 22* (Vol.1) (pp.9-15).

LA VARIABLE ALEATORIA DESDE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Rosa Muñoz-Guajardo, Joel Muñoz-Pardo, Paula Navarro-Hernández.

Este reporte de investigación aborda el objeto variable aleatoria, dando importancia a su naturaleza dual, tanto funcional como probabilística. Los datos se analizan desde la TSD, donde las categorías son las mismas fases del marco teórico. De acuerdo con los resultados obtenidos se logra evidenciar que la situación presenta las fases de acción, formulación e institucionalización. Así mismo, la situación favorece la construcción de la variable aleatoria como una función por parte del trabajo de las y los estudiantes.

Teoría de situaciones didácticas, variable aleatoria, función.

INTRODUCCIÓN

En el currículum nacional, la relevancia del eje de Estadística y Probabilidad va en aumento, siendo un claro ejemplo de esto la incorporación de la asignatura electiva homónima (Bases Curriculares, 2019). La literatura muestra algunos obstáculos epistemológicos relacionados con la comprensión de la naturaleza dual; funcional y probabilística, de la variable aleatoria; obstáculos didácticos ligados a la articulación de conocimientos previos (Ruiz, 2016). Frente a lo anterior, es válido preguntarse cómo mejorar la enseñanza de este objeto considerando los obstáculos señalados, de manera que el estudiante construya su propio aprendizaje. Por tanto, este estudio se enfocará en indagar cómo los estudiantes abordan una situación que introduzca la variable aleatoria, con foco en evidenciar y comprender su naturaleza funcional.

Marco teórico

La teoría de las situaciones didácticas (TSD) propuestas por Guy Brousseau (2007), permite comprender el proceso de enseñanza-aprendizaje a través de las interacciones del sistema didáctico; alumno, docente y saber matemático, focalizándose en la dimensión cognitiva y epistemológica de la construcción del conocimiento. Para esto, se somete al estudiante a una situación o problema que sea factible de resolver con los recursos (conocimientos) con que cuenta, apelando a su autonomía y motivación, de modo que tome el rol de investigador que resuelve, conjetura, teoriza y demuestra el saber que se desea que surja de esta situación. A este tipo de situación se le denomina *situación adidáctica.* En ella se establecen tres situaciones que conducen al estudiante a especificar el conocimiento utilizado, para resolver el problema, entre ellos: situación de *acción*, situación de *formulación* y situación de *validación*. Estas fases son realizadas fundamentalmente por interacciones entre estudiantes y apoyo del docente hasta dar con el objeto principal de estudio. Al llegar a esta instancia, se produce la fase de *institucionalización*, donde el docente formaliza el objeto principal de estudio, los conceptos y procedimientos involucrados.

METODOLOGÍA, TÉCNICA DE RECOGIDA DE DATOS Y CATEGORIZACIÓN

Esta investigación es de carácter cualitativa. Respecto a los sujetos de este estudio, se trata de un grupo de estudiantes de tercer año medio, cuyas edades bordean los 16 años. La organización de los momentos de la clase permite realizar un trabajo inicial individual y un desarrollo en forma grupal. Estos grupos fueron escogidos al azar, juntando dos a tres alumnos, los cuales llamaremos G1, G2 y G3, además las intervenciones de cada estudiante serán denominadas E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 y E_7. En este caso, la implementación se ha realizado de forma sincrónica a través de videoconferencia, en la que se ha permitido grabar tanto la intervención de los docentes como la interacción entre cada grupo de estudiantes. Las evidencias son principalmente diálogos extraídos de dichas grabaciones y las producciones que han realizado los grupos de estudiantes, de las cuales se han extraído algunas fotografías para su análisis. Para el surgimiento de las categorías de análisis se utilizan los conceptos del marco de la TSD, siendo las situaciones de acción, de formulación y de validación las principales categorías, de las cuales se desprenden subcategorías de análisis respecto a las tareas realizadas por los informantes. A continuación, se presentan los descriptores de cada categoría de análisis:

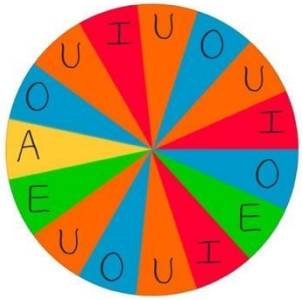
Tipo de Situación	Categoría de Análisis	Definición del Criterio
Acción	C1: Reconocen elementos de un experimento aleatorio. C2: Identifican elementos del espacio muestral. C3: Identificar los elementos de la variable aleatoria. C4: Calculan la probabilidad de cada elemento de la variable aleatoria.	- Reconocen el experimento aleatorio, algunos sucesos y la equiprobabilidad de la ruleta. - Los estudiantes determinan los 15 elementos del espacio muestral, diferenciándolo con subíndices. - Definen el conjunto de los elementos de la variable aleatoria:" premio obtenido". - Calculan la probabilidad de cada elemento del espacio muestral y asocian estos resultados a los elementos de la variable aleatoria.
Formulación	C5: Relacionan ambos conjuntos a través de un diagrama sagital. C6: Relacionan los elementos de la variable aleatoria con la probabilidad a través de un diagrama sagital.	- Identifican la relación entre los elementos del espacio muestral y el premio obtenido, representan ambos conjuntos como una función en un gráfico sagital. - Utilizan diagramas sagitales para representar los elementos de la variable aleatoria y las probabilidades, relacionando estos elementos como una función.
Validación	C7: Utilizan el concepto de función (y composición de funciones) para relacionar los tres conjuntos descritos.	- Describen la relación entre los tres conjuntos como una sucesión de funciones, identificando elementos como dominio y recorrido.

Institucionalización	C8: Se establecen conceptos o procedimientos, dando su sustento teórico o demostración	- A partir del proceso previo, desde el trabajo de los estudiantes, se establece formalmente el concepto de variable aleatoria como función, - Se declaran los elementos involucrados dentro del concepto de variable aleatoria como función, ya sea su dominio y recorrido, tipo de elementos, composición, etc.

Tabla 1: Categorización

Plan de clases

La clase planificada se enmarca bajo el OA10, que se desglosa en "Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas, definiendo la variable como una función*"* (MINEDUC, 2015). Para introducir el concepto de variable aleatoria se propone la siguiente actividad:



Se tiene la siguiente ruleta, dividida en 15 sectores iguales:
Cada sector de la ruleta tiene igual posibilidad de salir. Cuando sale la letra A, se ganan $2.000, cuando sale la letra E se gana $1.000, cuando sale la letra I se gana $500, cuando sale la letra O, se gana $100 y cuando sale la letra U se gana $0.
Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son todos los resultados posibles?
2. Establece una correspondencia entre cada sector de la ruleta y el premio que se obtiene por él.
3. Represente la correspondencia mediante un diagrama.

Figura 1. Actividad propuesta en clase 1.

RESULTADOS Y ANÁLISIS POR CATEGORÍAS

A continuación, se presentan las evidencias a través de una tabla con la transcripción de los diálogos realizados en las grabaciones y fotografías de su producción escrita, seguida de un breve análisis de las situaciones de acción, formulación y validación observadas previa categorización.

Categoría C1: Evidencia transcripción de diálogo Grupo 1

E_2: Las vocales, ¿no?... Cada una de las vocales.
E_1: si, ...Los colores.
P: y, ¿es lo mismo que te salga A o U?
E_2: no
P: Entonces, cómo podemos plasmar esto en los resultados de la ruleta...
E_2: Los resultados serían la plata, ¿no?
P: a ver, es un valor que está asociado, pero cuando yo lanzo la ruleta no me dice el premio, ¿Qué me sale?
E_2: la vocal, la letra o el color

En la transcripción, se evidencia el reconocimiento de los elementos del experimento aleatorio "lanzar la ruleta", pues se logra identificar los resultados posibles como letras o colores y se despejan las dudas sobre los premios como un posible resultado gracias a las devoluciones del profesor. En esta fase, se

observa que las y los estudiantes, sin declararlo, aceptan el desafío y proponen respuestas fluidas a las preguntas planteadas, lo que les sitúa en la fase de acción.

Categoría C2: *Evidencia transcripción diálogo Grupo 3*

P: ¿Qué es lo que te puede salir al lanzar la ruleta?
E_6: AEIOU
P: si los resultados posibles son AEIOU, ¿hay alguna distinción entre que te salga A, o E, o I, etc?
E_7: Que es más probable que te salga una que la otra.
P: bien, entonces… ¿cómo podemos describir los resultados de esta ruleta?
E_6: con las letras y los colores.
P: ¿Cuántos posibles resultados tiene la ruleta?
E_5: 15

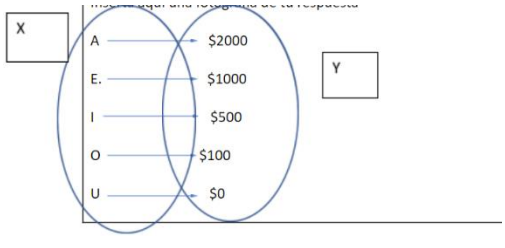
Se observa que los estudiantes identifican los elementos del espacio muestral (las vocales), sin embargo, necesitan de la devolución del profesor para determinar cuántos elementos tiene éste. Una vez reconocen los 15 elementos, logran identificar el concepto de probabilidad. Se evidencia entonces una fase de acción, dado que son los propios estudiantes quienes movilizan sus conocimientos en búsqueda de una respuesta a la situación dada.

Categoría C3: *Evidencia imagen pregunta 2 Grupo 2*

A	2000	x1
E	1000	x2
I	500	x3
O	100	x4
U	0	x5

En la imagen anterior se observan tres conjuntos: en el primero se observan elementos del espacio muestral; en el segundo, elementos del recorrido de la variable aleatoria; y en la tercera columna, la frecuencia con que ocurre cada una de las letras. Están dispuestas de tal manera que existe una relación entre la letra y el valor o premio contiguo, por ejemplo: A está relacionado con 2000, luego la última columna indica que existe un solo caso para que salga A. De este modo, se evidencia que la actividad propuesta genera en el estudiante interés que permite más de una relación, por esto podemos afirmar que se evidencia la fase de acción

Categoría C5: *Evidencia Imagen Pregunta 3 Grupo 1*



En la siguiente imagen, se muestra un esquema producido en la fase de formulación: se observa que logran identificar la correspondencia entre los elementos del espacio muestral, primer conjunto y el

premio obtenido, segundo conjunto y además representan esta correspondencia mediante el diagrama sagital.

Categoría C8: *Evidencia del diálogo al cierre de la clase*

En el siguiente diálogo, vemos que se produce una situación de institucionalización:

> P: ¿habían visto algo así?
>
> E1 y E5 (al unísono): las funciones!
>
> P: ¡Funciones! (...) Esta nueva función se llama variable aleatoria. En otras palabras, cuando tenemos una función donde se tienen los resultados de un experimento aleatorio y se le asocia un número, hablamos de variable aleatoria.

En el diálogo transcrito anteriormente se está abordando el concepto de funciones, proveniente de haber propuesto una representación como diagrama sagital. El docente, viendo que se ha llegado al concepto necesario para la variable aleatoria, procede a formalizarla proponiendo una definición que será utilizada en más, situando este momento en la institucionalización.

CONCLUSIONES

La principal dificultad presentada en la implementación de la clase tiene relación con el establecimiento de los elementos del espacio muestral, tal y como se había advertido en las investigaciones de Ruiz en 2016. Otra dificultad presentada, fue lograr traer la idea de función a través del diagrama sagital, ya que solo uno de los grupos logró establecer esa relación, la que permite la institucionalización de la variable aleatoria. Otro aspecto relevante, es que la función de probabilidad aparece antes que el concepto de variable aleatoria, por lo que podemos concluir que la variable aleatoria se relaciona mucho más con probabilidades que con su relación funcional.

Por otra parte, la situación planteada de la ruleta permite el tránsito entre situaciones de acción y formulación en cada una de las actividades propuestas a los estudiantes. Sin embargo, no se logra evidenciar la situación de validación, debido al poco tiempo establecido en la planificación. De este modo, la fase de institucionalización se ve un poco forzada, pero logra establecer el objetivo de la clase, definir la variable aleatoria como una función a partir de las construcciones de los estudiantes.

Referencias

Bizet, V. Araya, D., Ramos, E. (2018). Una situación adidáctica para el tratamiento de la variable aleatoria. *Revista Chilena de Educación Matemática 11, 21-26.* Disponible en: https://www.sochiem.cl/documentos-rechiem/revista-rechiem-11-N1-2018.pdf.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study* (Vol. 7). Libros del Zorzal.

MINEDUC. (2015). *Bases curriculares 7º básico a 2º medio.* Santiago, Chile: Unidad de Curriculum y evaluación.

MINEDUC 2019). *Bases Curriculares 3º y 4º medio.* Santiago, Chile: Unidad e Curriculum y Evaluación.

Pérez, B. y Parraguez, M. (2013). Construcciones mentales de los conceptos aleatorios y deterministas a partir de la regresión lineal. En R. Flores (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 589-598.

Ruiz, B (2013). Análisis epistemológico de la variable aleatoria y comprensión de objetos matemáticos relacionados por estudiantes universitarios universitarios. Universidad de Granada, España.

PRÁCTICA REFLEXIVA DE FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: EL APORTE DE LA AMISTAD CRÍTICA EN ESTE PROCESO

Marco Catalán[1], Francisco Rojas[1], Helena Montenegro[2], Valentina Giaconi[3] y Flavio Guiñez[2]

[1]Pontificia Universidad Católica de Chile, [2]Universidad de Chile, [3]Universidad de O'Higgins

Mientras que las experiencias de amistad crítica entre formadores de profesores son altamente valoradas por la comunidad, existen escasas evidencias respecto de lo que ocurre al interior de tales experiencias. En el marco de la implementación de un Self Study, dos formadores de profesores de matemática comparten su experiencia de amistad crítica en la preparación e implementación de una secuencia de clases de parte de uno de ellos, mientras el otro toma el rol de amigo crítico. El análisis de las preguntas realizadas por el amigo crítico permitió distinguir cuestionamientos enfocados en comprender tanto los razonamientos pedagógicos, como la práctica docente del formador. Por otra parte, el análisis de las respuestas del formador permitió caracterizar el nivel de profundidad en la reflexión (descriptivo o analítico) y su contenido (profesional o didáctico-matemático). Este resultado permite desempaquetar la relación de amistad crítica e invita a explorar en profundidad las interacciones entre formador y amigo crítico, así como también el posible impacto en el aprendizaje profesional de ambos.

Formador de profesores de matemática, amistad crítica, práctica reflexiva, razonamiento pedagógico, desarrollo profesional.

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Este reporte da cuenta de una de las instancias de amistad crítica que se dieron en el contexto de un Self Study, en la cual dos educadores de matemática adoptaron los roles de formador (autor 1) y amigo crítico (autor 2). En este caso, el autor 1 es un profesor de matemática que ejerce docencia tanto en aula escolar como en la formación de profesores, impartiendo en esta última, un curso de didáctica y de práctica en un programa de prosecución de estudios para futuros profesores de enseñanza media. Por otro lado, el autor 2 es un experimentado formador de profesores tanto de enseñanza básica como media, así como también un investigador que tiene entre sus temas de interés las prácticas docentes de los formadores como modelo. A partir de lo ocurrido en el Self Study y en realizar un seguimiento a lo que fue el trabajo al interior de las amistades críticas, surge una motivación por contribuir a lo que aparece como un espacio poco explorado: el conocimiento acerca del desarrollo profesional que lleva a los formadores de profesores de matemática a erigirse como tales. De esta manera, se espera que la difusión de las experiencias observadas en la instancia de amistad crítica ya descrita invite tanto a investigadores como

a programas de formación de profesores a comprender mejor el tránsito de los docentes hacia la figura de formadores.

Diversos estudios, especialmente aquellos vinculados con la enseñanza como práctica (Beswick & Goos, 2018; Castro Superfine & Li, 2014;), indican que los formadores de profesores de matemática juegan un rol crucial en el desarrollo y logro de aprendizajes complejos en sus respectivos profesores en formación. A través de sus prácticas de enseñanza, los formadores de profesores de matemáticas proveen a los profesores en formación de oportunidades para aprender matemáticas similares a las que se espera que ofrezcan a sus respectivos estudiantes en el aula escolar (Chapman, 2008). Lo anterior tiene como consecuencia que la calidad y efectividad que puede llegar a tener la formación de profesores de matemática depende en gran medida del nivel de experiencia que posee el formador (Goos & Beswick, 2021).

Sin embargo, estudios acerca del desarrollo de los formadores de profesores de matemática son escasos, lo cual impide tener claridad de cuáles son las características y condiciones que describen el proceso y consolidación de un educador como formador de profesores. En esa línea, estudios muestran que un número importante de formadores de profesores de matemática no ha recibido algún tipo de instrucción o acompañamiento en su inicio profesional como formadores que les posibilite incorporar prácticas claves en este campo (Liang et al., 2019; Masingila & Olanoff, 2021), lo cual repercute en que el formador esté en un permanente estado de necesidad de formarse, en tanto percibe que el proceso no ha finalizado (Schuck & Brandenburg, 2020).

Una estrategia para apoyar a los formadores de profesores de matemática en su desarrollo profesional implica fomentar e impulsar espacios para la reflexión y discusión profesional que pueden sostener. De acuerdo con Chapman (2008), el acto de reflexionar respecto de sus propias prácticas de enseñanza es una acción natural del formador, en tanto se espera que distingan y valoren los dilemas propios de las prácticas dentro del aula, a su vez que tengan consciencia de los supuestos y principios que subyacen a tales prácticas. En este escenario, la metodología de *Self Study* permite que los formadores de profesores de matemática puedan analizar sus prácticas de enseñanza (Marin, 2014; Schuck & Brandenburg, 2020). En particular, Schuck et al. (2020) destacan que los formadores pueden mejorar sus prácticas de enseñanza a través del espacio de amistad crítica, el cual invita a generar un diálogo reflexivo con el propósito de generar nuevos aprendizajes; en efecto, un amigo crítico tiene el rol de provocar, criticar y ofrecer una perspectiva alternativa al formador, con el objetivo de reconfigurar o cuestionar sus creencias (Schuck & Brandenburg, 2020).

Aunque la literatura señala que la amistad crítica constituye una importante estrategia para fortalecer el desarrollo profesional en los formadores, no existen mayores antecedentes acerca de lo que acontece en este espacio de reflexión. En ese sentido, hay una tarea pendiente en términos de evidenciar lo que ocurre al interior de la amistad crítica, así como también evaluar en qué medida esta puede ser analizada con detención y compartida con los formadores, de modo que esta práctica forme parte de los procesos de desarrollo profesional.

METODOLOGÍA

Este reporte busca mostrar diversos aspectos propios de una instancia de amistad crítica, particularmente desarrollada en el contexto de un *Self Study*, y en la cual los autores 1 y 2 adoptaron los roles de formador y amigo crítico, respectivamente. Los datos asociados provienen de las grabaciones de audio de las tres reuniones de amistad crítica, las cuales se desarrollaron en paralelo a la implementación de una secuencia de clases por parte del formador en su curso de didáctica, orientada a el trabajo con ecuaciones y funciones cuadráticas. En términos generales, la primera reunión tuvo como propósito la definición de las condiciones y expectativas en que se daría la amistad crítica, así como también la identificación de aspectos clave que el formador quería explorar en el proceso; durante la segunda reunión el formador expuso su propuesta de secuencia de clases, la cual fue analizada y discutida junto al amigo crítico; finalmente, la tercera reunión permitió realizar una retrospectiva tanto de la secuencia de clases implementada como de las temáticas centrales que fueron emergiendo a lo largo de las reuniones.

El análisis de los datos tomó como base las transcripciones de las grabaciones de las reuniones ya descritas. Este análisis de carácter temático (Braun & Clarke, 2006), permitió identificar distintos temas en torno a las tensiones personales y profesionales que ha enfrentado el formador; en ese sentido, se realizaron triangulaciones de datos provenientes de los insumos ya mencionados, etapa en la que otro investigador contribuyó en la revisión de la validez y consistencia de códigos y clasificaciones obtenidas (Cohen et al., 2000).

RESULTADOS

Los análisis realizados permitieron hacer un desglose de las interacciones al interior de la amistad crítica, evidenciándose diversos tipos de preguntas por parte del amigo crítico, las cuales fueron clasificadas de acuerdo con el propósito que tenían, así como también distintos tipos de respuestas provenientes del formador, dividiéndose estas esencialmente en dos grupos (ver tabla 1).

Tipos de preguntas		**Tipos de respuestas**	
Comprender el razonamiento pedagógico	**Comprender la práctica docente**	**Nivel de profundidad**	**Contenido**
Exploración, discusión y profundización	Personalización, experiencias y suposiciones	Descriptivo y analítico	Profesional y didáctico-matemático

Tabla 1. Clasificación de preguntas y respuestas (elaboración propia).

En términos de las preguntas más frecuentes durante las reuniones de amistad crítica, se detectó un primer grupo de aquellas que buscaban *comprender el razonamiento pedagógico* a la base de la enseñanza, enfocadas en el razonamiento del formador sobre las temáticas expuestas, promoviendo discusiones y explicaciones sobre las decisiones adoptadas. En este contexto, se distinguieron tres tipos de preguntas: de *exploración*, que buscaron abrir temas de conversación que llevaran al formador a iniciar sus reflexiones sobre dichos temas; de *discusión*, que permitieron al formador exponer su razonamiento sobre

la toma de decisiones o sobre el tema en discusión; y de *profundización*, que apuntaban a que el formador de docentes reflexionara sobre sus propias explicaciones o razonamientos acerca de las temáticas en discusión.

Por otro lado, se identificaron aquellas preguntas que intentaban *comprender la práctica docente* del formador, con el fin de que este estableciera relaciones entre su experiencia y las decisiones tomadas a la base de su enseñanza, ya sea en el contexto de la formación de profesores o aula escolar, tanto en la actualidad como en momentos previos. Desde esta perspectiva, se levantaron tres tipos de preguntas: de *personalización*, en las cuales el amigo crítico buscaba indagar en las motivaciones o conexiones personales del formador con el tema en discusión, o en las decisiones asociadas a sus clases; de *experiencias*, las cuales facilitaron que el formador integrara en la conversación diferentes experiencias pasadas y de diversos contextos, para ser discutidas en términos del fenómeno en cuestión; y de *suposiciones*, en las que el amigo crítico pone al formador en situaciones que no necesariamente ha vivido o experimentado, a fin de que reflexione y proyecte una decisión al respecto.

En cuanto a las respuestas que se observaron de manera recurrente, fue posible agruparlas fundamentalmente a partir de dos criterios de clasificación: su *nivel de profundidad* y su *contenido*. Para el primer grupo, se distinguieron respuestas que poseían un carácter *descriptivo*, donde el formador no realizó una introspección con respecto a lo que se estaba discutiendo, sino que más bien un proceso de conversación con entrega de información a nivel superficial. En cambio, en otras se evidenciaba un propósito más analítico, las cuales demandaban que el formador pusiera en juego y ahondara en sus creencias, experiencias, expectativas, desafíos, entre otros. En cuanto al contenido de las respuestas, un número considerable de estas y con una presencia transversal dentro de las reuniones, daban cuenta de aspectos *profesionales*, tales como la experiencia en el aula relacionada con la toma de decisiones en virtud del currículum, las expectativas acerca de la visión de la enseñanza que los futuros docentes comienzan a construir durante su formación, o la importancia del cuestionar como una práctica docente permanente; a su vez, se encontraron ciertas respuestas con una presencia más local dentro de las interacciones, vinculadas con temas de orden *didáctico-matemático*, tales como las decisiones en la enseñanza y aprendizaje de las funciones cuadráticas, el diseño de una propuesta para una tarea matemática específica, o el rol de la noción de variable didáctica en la toma de decisiones.

En consecuencia, los resultados indican que la amistad crítica se construye como resultado del desarrollo y aplicación de distintas estrategias por parte de ambos miembros. Por un lado, el formador es capaz de articular y combinar diferentes niveles de profundidad a través de su discurso con diversos contenidos, a fin de discutir y reflexionar en torno a la dimensión profesional del trabajo docente, así como también a la especificidad de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. A su vez, las preguntas formuladas por el amigo crítico ofrecen al formador la oportunidad de considerar diferentes puntos de vista y así cuestionar sus creencias (Schuck & Brandenburg, 2020), hecho que, sumado a lo anteriormente descrito, permite enriquecer el enfoque de Chapman (2008) sobre las distintas maneras de examinar los dilemas internos de la práctica docente.

CONCLUSIONES

La experiencia expuesta permite afirmar que la amistad crítica es un mecanismo efectivo de desarrollo y aprendizaje profesional, en virtud de que tanto el amigo crítico como el formador se benefician de la relación existente entre el propósito de las preguntas planteadas por el primero y lo que el segundo ofrece durante la conversación como respuesta a tales preguntas. En ese sentido, este proceso les permite ser conscientes de las experiencias personales que incorporan a la discusión, contribuyendo así, a la mejora de sus prácticas docentes. Adicionalmente, se convierte en una herramienta que fomenta la evolución de ambos miembros, involucrándose tanto el formador como el amigo crítico en discusiones y reflexiones, lo cual puede potencialmente incidir en sus prácticas docentes.

Finalmente, la experiencia reportada respalda e impulsa la necesidad de fomentar la existencia de relaciones similares entre los formadores de profesores pertenecientes a un mismo programa, lo cual implica evaluar y disponer del tiempo y de las condiciones para que sea posible la generación de espacios de reflexión. Además, la presencia de diversos perfiles de formadores de profesores (supervisores de práctica, formadores en cursos didácticos y disciplinares, etc.) enriquece las discusiones y su análisis, lo cual invita a pensar que la amistad crítica puede incorporar a distintos miembros de la comunidad, con el fin de mejorar y complejizar su desarrollo profesional.

Este trabajo fue apoyado por el Centro de Modelamiento Matemático (CMM), ACE210010 y FB210005, fondos BASAL para centros de excelencia de ANID-Chile.

Referencias

Beswick, K., & Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here? *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(5), 417–427.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Castro Superfine, A., & Li, W. (2014). Exploring the Mathematical Knowledge Needed for Teaching Teachers. *Journal of Teacher Education*, *65*(4), 303–314.

Chapman, O. (2008). Mathematics Teacher Educators' learning from research on their instructional practices. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education volume 4: The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 115–134). Sense.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). Research Methods in Education (Fifth edit). Taylor & Francis e-Library.

Goos, M., & Beswick, K. (2021). *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators. International perspectives*. Springer.

Liang, S., Priya, P., Patterson, C., & Vallines, R. (2019). Improving our practice as mathematics teacher educators through teaching research. *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning*, *13*(2), 1–8.

Marin, K. (2014). Becoming a teacher educator: A self-study of the use of inquiry in a mathematics methods course. *Studying Teacher Education*, *10*(1), 20–35.

Masingila, J., & Olanoff, D. (2021). Who teaches mathematics content courses for prospective elementary teachers in the USA? Results of a second national survey. *Journal of Mathematics Teacher Education*.

Schuck, S., & Brandenburg, R. (2020). Self-Study in Mathematics teacher education. In J. Kitchen, A. Berry, S. Bullock, A. Crowe, M. Taylor, H. Guðjónsdóttir, & L. Thomas (Eds.), *International Handbook of Self-Study of Teaching and Teacher Education Practices* (pp. 869–897). Springer Singapore.

APRENDIENDO A ENSEÑAR MATEMÁTICAS: ¿CUÁLES SON LAS PREOCUPACIONES DE LOS ESTUDIANTES EN FORMACIÓN?

Helena Montenegro[1], Constanza Ledermann[1], Leandro Pérez[2]

[1]Laboratorio de Educación. Centro de Modelamiento Matemático. Universidad de Chile

[2]Magíster en Estudios Curriculares. Facultad de Educación. Pontificia Universidad Católica de Chile

Este estudio profundiza en las preocupaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje que poseen estudiantes a lo largo de su formación inicial. Para ello, se realizaron cuatro grupos focales a una muestra conformada por 17 estudiantes de distintas asignaturas del área de las matemáticas, perteneciente a un programa de formación ubicada en la Región Metropolitana. Por medio de un análisis temático, se identificaron tres tipos de preocupaciones definidas como dominio del contenido a enseñar; forma de lograr el aprendizaje en sus estudiantes; y la complejidad de la enseñanza en el aula escolar. Además, se pudo constatar que dichas preocupaciones van cambiando al interior del grupo, dependiendo del curso y asignatura que cursan los estudiantes. Finalmente, se discuten algunas recomendaciones prácticas respecto de este tema en la formación inicial del profesorado.

Formación docente inicial, estudiantes en formación, preocupaciones, rol docente

INTRODUCCIÓN

Diversos estudios han relevado la complejidad en la tarea de aprender a enseñar, situación a la cual se enfrentan los estudiantes en su formación docente inicial (Korthagen, 2017; Nilsson, 2009). Dentro de los desafíos a los cuales se deben enfrentar, se destaca la necesidad de superar nociones simplistas de la enseñanza como transmisión de contenidos; relacionar sus prácticas de enseñanza con el resultado de aprendizaje de sus pupilos; y desarrollar una identidad profesional como docente, entre otras (Giboney, 2016). En otras palabras, los estudiantes deben aprender los conocimientos teóricos que sustentan la enseñanza, para así poder promover un aprendizaje significativo en los diversos contextos en los cuales se desempeñarán (Loughran, 2006; Westrick & Morris, 2016).

Al respecto, Fuller (1969) argumenta la importancia de considerar las preocupaciones de los estudiantes en formación y cómo cambian a lo largo de su trayecto formativo. Este autor distingue tres etapas: (1) supervivencia, en la cual los estudiantes se preocupan principalmente de su idoneidad y competencias básicas de su futro rol como profesor; (2) preocupaciones sobre la enseñanza, en donde las inquietudes se concentran principalmente en tomar conciencia de las dificultades en el uso de metodologías de aprendizaje efectivas; y (3) preocupación por el aprendizaje y necesidades emocionales de los aprendices, en la cual comienzan a ampliar la preocupación hacia el sujeto que aprende. En su conjunto, estas preocupaciones inevitablemente influyen en las formas de abordar la enseñanza que adoptan los profesores en formación, por lo que es fundamental que los formadores sean conscientes de estas

inquietudes y necesidades, potenciando el avance hacia aquellas más complejas que conceptualizan la enseñanza de manera relacional y situada (Nilsson, 2009).

Varios estudios sugieren, que estas etapas cambian a medida que los futuros profesores aprenden más sobre sí mismos, sus alumnos y desarrollan una comprensión más profunda sobre el rol docente y el aprendizaje (Conway y Clark, 2003; Nilsson, 2009; Smith et al., 2013). Por otro lado, otros estudios encontraron que estas etapas no avanzan secuencialmente (Boz & Boz, 2010; Loughran, 2006; Swennen et al., 2004), y tanto los estudiantes en formación como los docentes nóveles, tienen preocupaciones similares sobre la organización del trabajo en clase y la motivación de los estudiantes (Smith et al., 2013).

A pesar de la relevancia de este tema, en Chile existen pocos estudios sobre esta problemática en la formación docente inicial en matemática. En virtud de ello, el presente estudio explora las distintas preocupaciones que manifiestan estudiantes de distintas promociones que se están formando como profesores de enseñanza básica en matemática. Las preguntas de investigación que guía este estudio son las siguientes: ¿cuáles son las principales preocupaciones que los estudiantes manifiestan acerca su rol como futuros profesores?

METODOLOGÍA

Este estudio adoptó un enfoque de investigación cualitativa para explorar las principales preocupaciones de los estudiantes en formación respecto de su futuro rol docente (Cohen, 2011). Los participantes fueron seleccionados mediante una muestra por conveniencia (Robinson, 2014), y la muestra final estuvo compuesta por 17 estudiantes en formación de distintas asignaturas del área de las matemáticas, perteneciente a un programa de formación ubicada en la Región Metropolitana. Todos los estudiantes participaron de manera voluntaria y firmaron un consentimiento informado.

Los datos fueron recolectados a través de cuatro grupos focales porque este método facilita el diálogo y la discusión entre los participantes, contribuyendo al intercambio de ideas formado dentro de un contexto social. Si bien en un comienzo se contempló la realización de seis grupos focales (tres con estudiantes de 1° y 2° año de carrera y tres con estudiantes de 3° y 4°), sólo se pudo concretar la realización de cuatro grupos focales con una mayor participación de estudiantes de cursos iniciales. Por consiguiente, se optó por ampliar la recolección de los datos por medio de la aplicación de dos entrevistas en profundidad con estudiantes de 4° año. Las características de esta muestra se presentan en la siguiente tabla:

Técnica	Año	Asignatura	N° Participantes
Grupo Focal 1	1° - 2°	Geometría	5
Grupo Focal 2	1° - 2°	Geometría	5
Grupo Focal 3	3° - 4°	Didáctica de la Matemática II	3
Grupo Focal 4	3° - 4°	Didáctica de la Matemática II	2
Entrevista	3° - 4°	Didáctica de la Matemática I	2

Tabla 1: Características de la muestra

Tanto las preguntas de los grupos focales y entrevistas realizadas se focalizaron en las experiencias y preocupaciones de los estudiantes respecto de su futuro rol docente. El análisis de datos se llevó a cabo

mediante un análisis temático (Braun & Clarke, 2006), en el cual se identificaron códigos iniciales y temas recurrentes en el corpus de datos. Durante el proceso de análisis de datos, dos miembros del equipo de investigación verificaron de forma cruzada la codificación de las respuestas, y de manera conjunta refinaron los distintos códigos y categorías en caso de ser necesario. De esta forma, se logró un alto grado de consenso en la estrategia de codificación, permitiendo aportar mayor validez y confiabilidad en el análisis de los datos (Campbell et al., 2013).

RESULTADOS

A continuación, se describirán los principales resultados obtenidos en el análisis de los datos. Se identificaron tres temas relacionados con las principales preocupaciones de los estudiantes: (1) dominio del contenido a enseñar; (2) forma de lograr el aprendizaje en sus estudiantes; y (3) el aula escolar. Además, se pudo constatar que dichas preocupaciones van cambiando al interior del grupo, dependiendo del curso y asignatura al cual pertenecen los estudiantes.

Preocupación por el dominio del contenido a enseñar.

El análisis de los datos recolectados da cuenta que en los estudiantes de cursos iniciales emerge la inquietud que, para llevar a cabo una buena enseñanza, es fundamental aprender de manera profunda el contenido disciplinar, sin contemplar aspectos claves que median en este proceso como su propia práctica o la figura del estudiante. Además, los profesores deben ser capaces de enseñarlo de manera didáctica, siendo bastante críticos si dicha habilidad no la poseen los formadores que les imparten clases.

> Se ve que el profe sabe mucho, en verdad sabe muchísimo. Y me gustaría [que], cuando tenga mi mención, saber todo lo que él sabe para poder explicarlo de mi forma… [porque] lo que a él le pasa es que sabe demasiado, pero quizás no es tan pedagógico como podría ser. Como que explica matemáticamente, pero falta una definición más amigable de lo que estamos hablando (Grupo Focal 1, Geometría, estudiante de 1er año).

En cambio, en los estudiantes de cursos superiores es posible apreciar que focalizan su preocupación en la forma en que este contenido matemático se enseña de manera pertinente a los estudiantes del sistema escolar. En otras palabras, complementan los contenidos disciplinares con los pedagógicos tal como se aprecia en la siguiente cita.

> Yo siento que el foco es que nosotros desarrollemos el pensamiento matemático, y yo creo que eso sí se logra... […] porque al final si uno también es profe de matemáticas uno tiene que desarrollar ciertas competencias que están relacionadas con el pensamiento matemático, con el pensamiento lógico (Grupo Focal 3, Didáctica de la Matemática II, estudiante de 4to año).

Preocupación por la forma de lograr el aprendizaje en sus estudiantes.

Respecto a este tipo de preocupación, llama la atención cómo los estudiantes a lo largo de su formación transitan desde una perspectiva del desarrollo de habilidades docentes, centrada en la transmisión del contenido, hacia el desarrollo de habilidades orientadas en el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, una estudiante de primer año manifiesta que para ella es clave que los profesores sean capaces de enseñar ideas y conceptos matemáticos, argumentando claramente los principios que los sustentan.

> Pucha, que los profesores en general sepamos pensar y que no solamente repitamos cosas… Sí, lo fundamental es eso, usar más la lógica y descubrir que detrás de todas esas cosas que nos enseñaron hay un por qué (Grupo Focal 2, Geometría, estudiante de 1er año).

En contraposición, una estudiante de curso superior relata la importancia de contextualizar y transformar el contenido que se enseña a la experiencia del estudiante que aprende. Es decir, la enseñanza vinculada con el aprendizaje del estudiante, logrando apropiarse del contenido que se enseña.

Esta clase me ha servido mucho para llevarla a la sala, y no solamente que quede acá y solamente yo comprender lo que significan geométricamente los números y la construcción de estos. Sino que también llevársela a los niños para que también ellos puedan trabajar y tengan esta comprensión más global lógico (Grupo Focal 4, Didáctica de la Matemática II, estudiante de 4to año).

Preocupación por el aula escolar.

En los primeros años se observa que los estudiantes consideran pertinente replicar en el aula escolar alguna de las actividades aprendidas en clases. Esto cobra relevancia si se contempla que en el aula universitaria el contexto de enseñanza es muy distinto al aula escolar.

Yo creo que también replicaría eso con los niños, de repente estar conversándoles de la materia. Quizás lo haría más marcado, les diría ahora voy a hacer un paréntesis y el paréntesis es tanto; ahora voy a volver a la materia. Netamente, creo que eso sería bueno (Grupo Focal 2, Geometría, estudiante de 1er año).

En cambio, los alumnos de cursos superiores integran prácticas centradas en la experiencia de aprendizaje, materializando al sujeto que aprende y subjetivándolo. Por ejemplo, ya no los nombran como "los niños", sino que comienzan a llamarlos como "mis alumnos". En otras palabras, los estudiantes simbólicamente comienzan a visualizarse como futuros profesores, imaginado una secuencia de aprendizaje que implementan a sus propios estudiantes.

Es súper importante al final como profesor saber qué es lo que yo espero que mis alumnos logren, en el fondo, saber a dónde quiero llegar con los estudiantes... Y la idea es que todo vaya alineado de tal manera que haya coherencia entre lo que se enseñó, lo que se trabajó en clase, y finalmente lo que uno evaluó (Entrevista, Didáctica de la Matemática I, estudiante de 3er año).

DISCUSIÓN

La presente investigación tuvo como propósito profundizar en las principales preocupaciones que los estudiantes experimentan a lo largo de su formación profesional. Para ello se realizaron grupos focales y entrevistas a una muestra compuesta por 17 estudiantes pertenecientes a un programa de formación ubicado en la Región Metropolitana. Con relación a la primera pregunta de investigación *¿cuáles son las principales preocupaciones que los estudiantes manifiestan acerca su rol como futuros profesores?* Los resultados de esta investigación permiten sostener que se relacionan con tres aspectos fundamentales: el dominio del contenido a enseñar; el modo en que los aprendices logran su aprendizaje; y la forma de visualizar el aula escolar. Estos resultados son ampliamente consistentes con estudios similares que señalan que los estudiantes, en la medida que avanzan en la formación inicial como profesor, pasan de preocuparse por las dificultades de la enseñanza a preocuparse por el aprendizaje y las necesidades emocionales de los educandos (Giboney, 2016; Nilsson, 2009; Smith et al., 2013; Swennen et al., 2004).

Respecto de la segunda pregunta de investigación *¿existen diferencias en las preocupaciones de los estudiantes según el avance de su formación profesional?* Los resultados obtenidos permiten sostener que la naturaleza de las preocupaciones es distinta entre los estudiantes de cursos iniciales respecto de aquellos que se encuentran en cursos superiores. Los estudiantes de primer y segundo año tienen una visión más básica y técnica de la enseñanza, prevaleciendo en ellos la noción de que una buena enseñanza

se relaciona principalmente con el dominio del contenido que se enseña. En cambio, en estudiantes de cursos superiores se aprecia una mayor vinculación entre teoría y práctica, observándose con mayor claridad a un futuro profesor que reflexiona y contextualiza lo aprendido en clases, aplicando dichos conocimientos en un aula situada en un determinado contexto escolar (Giboney, 2016; Nilsson, 2009). Finalmente, se recomienda continuar con la investigación sobre esta temática, en la cual se incluyan abordajes metodológicos más complejos y trabajo colaborativo entre estudiantes de distintos cursos. El desarrollo de iniciativas de esta naturaleza permitiría consolidar espacios de reflexión, los cuales pueden ser un recurso potente y novedoso para fortalecer la formación inicial del profesorado.

Agradecimientos

Esta investigación es posible gracias al proyecto FONDECYT REGULAR 1212067, y apoyada por el Centro de Modelamiento Matemático (CMM), ACE210010 y FB210005 fondos BASAL, financiados por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID). Además, forma parte de las iniciativas de la Cátedra Unesco: *Formación de docentes para enseñar matemática en el siglo XXI.*

Referencias

Boz, Y., & Boz, N. (2010). The nature of the relationship between teaching concerns and sense of efficacy. *European Journal of Teacher Education, 33*(3), 279–291.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101.

Campbell, J. L., Quincy, C., Osserman, J., & Pedersen, O. K. (2013). Coding in-depth semistructured interviews: Problems of unitization and intercoder reliability and agreement. *Sociological Methods and Research*, *42*(3), 294–320.

Conway, P. F., & Clark, C. M. (2003). The journey inward and outward: A re-examination of Fuller's concerns-based model of teacher development. *Teaching and Teacher Education, 19*(5), 465–482.

Cohen, L. (2011). *Research methods in education* (7th ed..). Routledge.

Fuller, F. F. (1969). Concerns of teachers: A developmental conceptualization. *American Educational Research Journal*, *6*(2), 207–226.

Giboney, C. (2016). From student to teacher: Changes in preservice teacher educational beliefs throughout the learning-to-teach journey. *Teacher Development*, *20*(3), 364–379.

Korthagen, F. (2017). Inconvenient truths about teacher learning: towards professional development 3.0. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, *23*(4), 387–405.

Loughran, J. (2006). *Developing a Pedagogy of Teacher Education. Understanding teaching and learning about teaching*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203019672

Nilsson, P. (2009). From lesson plan to new comprehension: Exploring student teachers' pedagogical reasoning in learning about teaching. *European Journal of Teacher Education*, *32*(3), 239–258.

Robinson, O. C. (2014). Sampling in interview-based qualitative research: A theoretical and practical guide. *Qualitative Research in Psychology*, *11*(1), 25–41.

Smith, L., Corkery, G., Buckley, J., & Calvert, A. (2013). Changes in secondary school preservice teachers'

concerns about teaching in New Zealand. *Journal of Teacher Education, 64*(1), 60–74.

Swennen, A., Jörg, T., & Korthagen, F. (2004). Studying student teachers' concerns, combining image-based and more traditional research techniques. *European Journal of Teacher Education, 27*(3), 265–283

Westrick, J., & Morris, G. (2016). Teacher education pedagogy: Disrupting the apprenticeship of observation. *Teaching Education, 27*(2), 156–172.

EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO EN EVALUACIÓN DOCENTE HACIA LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES E INECUACIONES

María Eugenia Reyes Escobar[1], Antonio Moreno Verdejo[1]

[1] Universidad de Granada

En este trabajo se investiga el conocimiento didáctico del contenido matemático (PCK) que manifiestan tres docentes en ejercicio, en su evaluación docente, hacia la enseñanza de ecuaciones e inecuaciones. Se utiliza una metodología cualitativa, específicamente estudios de casos. Se analizan los portafolios con el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), utilizando el software Maxqda en las dos tareas del módulo uno del portafolio con categorías y descriptores del PCK en los tres subdominios: el subdominio del Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), el Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM) y el Conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS). Se presentan los indicios encontrados en estas dos tareas para evidenciar el PCK de las docentes en ejercicio hacia la enseñanza de ecuaciones.

Didáctica de la matemática, pensamiento algebraico, MTSK, educación básica, profesores.

INTRODUCCIÓN

Chile comienza a ser miembro de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico desde enero del 2010, y para lograr este ingreso tuvo que modificar sus políticas de cooperación y de desarrollo con el fin de mejorar el bienestar económico y social de sus ciudadanos (Serrano, 2015). Se modifica el sistema educativo siguiendo lineamientos internacionales frente a las mediciones de estudiantes y docentes, tratando de eliminar la brecha existente. Comenzando la evaluación docente desde el 2013 a través de criterios basados en un marco para la buena enseñanza (MBE) que define los conocimientos y las habilidades mínimas que los docentes deberían cumplir (Roa-Tampe, K.,2017).

El desarrollo profesional docente en Chile, se mide a través de cinco instrumentos: portafolio, pauta de autoevaluación, entrevista por un evaluador par, informe de referencia de terceros y prueba de conocimientos disciplinares guiándose por el MBE, que define cuatro esferas del adecuado desempeño profesional: planificación y preparación de la enseñanza; creación de ambientes propicios para el aprendizaje; evaluación y reflexión sobre la práctica docente; evaluación sobre las tareas y responsabilidades profesionales (Assael y Pavez, 2008; Mineduc, 2008). Siendo el Portafolio el instrumento fundamental de la evaluación docente, por el peso que se le asigna al clasificar al profesorado en las categorías de desempeño, y también porque es el que presenta el mayor poder discriminatorio (Gajardo, 2020). La instancia de planificación y de reflexión es solo una parte que muestra el conocimiento didáctico de lo que el profesor sabe de Ecuaciones, en este sentido, se refleja solo un escenario, dejando de lado las otras implicancias que subyacen en la práctica docente. Los portafolios se solicitaron al Sistema de Evaluación del Desempeño Profesional Docente y Asignación de Excelencia

Pedagógica, se mantiene la confidencialidad de la información de los datos elaborados por las/os docentes y se utilizan únicamente para el fin de esta investigación. El módulo uno del portafolio implica tres tareas y de las cuales contamos con las planificaciones y reflexiones en torno al Objetivo de Aprendizaje (OA14).

La presente investigación busca indagar el conocimiento didáctico que manifiestan los docentes de enseñanza básica, al realizar su evaluación docente en la asignatura de matemática, específicamente en relación a los OA del eje de Patrones y Álgebra, utilizando como herramienta de análisis el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Con fines de difusión internacional, el grupo ha adoptado el uso de las siglas correspondientes a la traducción en inglés *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* del nombre del modelo y de sus subdominios, por lo que de aquí en adelante nos referiremos a él como MTSK.

Como lo expresan Blanton & Kaput (2005), la incorporación del álgebra en la educación básica primaria no es un asunto trivial, si se considera que, generalmente, los profesores de estos niveles no cuentan con una formación inicial exclusiva en matemáticas (Avalos y Matus, 2010), y que ello podría conducir a que su conocimiento carezca de profundidad disciplinar, imposibilitando comprender el cómo y el porqué del álgebra en enseñanza básica.

Frente a este escenario nos surgen distintas preguntas de investigación de acuerdo a las dos tareas del módulo 1 de la evaluación docente:¿Qué conocimiento didáctico sobre patrones y álgebra manifiestan los docentes de enseñanza básica a partir de cómo el profesor redacta sus planificaciones y reflexiones? De esta interrogante surge el objetivo "Evidenciar el conocimiento didáctico de los docentes de enseñanza básica a partir de sus planificaciones y de sus reflexiones sobre las características y el uso formativo de las dificultades de sus estudiantes, en relación a los OA del eje de Patrones y Álgebra".

METODOLOGÍA

Corresponde a una investigación de estudios de casos. Se trata de una revisión de los porfolios de matemáticas realizados por tres docentes generalistas en ejercicio que ejercen en escuelas municipales de la región de O'Higgins. Enseñan matemáticas en cuarto año básico y elaboran su portafolio en el año 2016 eligiendo el OA14 : "Resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados en forma pictórica y simbólica del 0 al 100 y aplicando las relaciones inversas entre la adición y la sustracción".

Para la construcción de las categorías de análisis se utiliza el modelo MTSK, un modelo diseñado desde y para la investigación, cuya finalidad es servir como herramienta teórica y analítica, que permita identificar el conocimiento específico del profesor de matemáticas y comprender la naturaleza de este mismo, desde un punto de vista sistemático y artificialmente organizado para su análisis. (Carrillo et al., 2013; Montes, Contreras & Carrillo, 2013; Carrillo, Escudero & Flores, 2014).

RESULTADOS

Para realizar este primer estudio de caso, se revisan dos tareas del portafolio en el Módulo uno, analizando los productos escritos, la implementación de una unidad de trabajo pedagógico referida al OA

14. La primera tarea de planificación se realiza previo a la implementación y la segunda tarea de reflexión docente es posterior a la implementación, sobre las características y el uso formativo de las dificultades de sus estudiantes.

Cada uno de estos subdominios contempla una serie categorías, descriptores y códigos que van a ir perfilando el conocimiento en cada uno de ellos; es una herramienta analítica del conocimiento. La revisión se realiza de acuerdo a las categorías del MTSK relacionadas con los tres subdominios: el subdominio del Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), el Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM) y el Conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS). El resultado obtenido en la codificación de las categorías requirió del uso del software Maxqda, este instrumento facilitó la codificación de categorías de forma simple y ordenada, se hace referencia a la redacción de planificaciones, se destaca la información de episodios, fragmentos de episodio, frases o palabras relativas a la codificación del modelo, para así obtener un análisis lo más completo posible.

En cuanto a el contexto donde se desempeñan las docentes, ellas ejercen en escuelas municipales, rurales, mixtas, escuelas con un alto índice de vulnerabilidad, enseñan en cuarto básico y las edades de los estudiantes fluctúan entre 9 a 10 años.

DISCUSIÓN

El primer subdominio KMT presenta 63 indicios, en los tres primeros portafolios analizados, la categoría D3: Actividades, ejemplos, ayudas, es la mayor frecuencia con 36 indicios. Las docentes evidencian un mayor conocimiento en esta categoría, hacia el descriptor D3.3: Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Es a través de los ejemplos mencionados, donde se manifiestan los conceptos de igualdad, de ecuaciones y de incógnita en la planificación. Los ejemplos presentados son de nivel concreto, simbólico, representación de enunciado conceptual y escrito, uso de recursos materiales y la mención de autores que sustentan teorías educativas en sus reflexiones.

El segundo subdominio KFLM tiene 44 indicios en los tres primeros portafolios analizados la frecuencia la categoría E2: Fortalezas y dificultades con 26 indicios, hacia el descriptor E2.1: Las dificultades que presentan los estudiantes para comprender el concepto de igualdad, en estos ejemplos se evidencia el conocimiento de la estructura institucionalizada que tienen las docentes de acuerdo a la estructura de clase: inicio, desarrollo y cierre de la clase y sobre las formas de aprendizaje. Con respecto al inicio, se encuentran las preguntas sobre los conocimientos previos de los estudiantes referentes al contenido de ecuaciones, en el desarrollo los ejemplos se evidencian con la resolución de ejercicios del texto o de guías y en el cierre de las clases las docentes redactan preguntas para indagar que el contenido haya sido internalizado por los estudiantes. Respecto a la utilización de los documentos institucionales mencionan actividades sugeridas por las bases curriculares y también del texto escolar proporcionado a los estudiantes.

El tercer subdominio KMLS muestra 41 indicios la frecuencia de los descriptores de la categoría F2 con 16 indicios, hacia el descriptor F2.2: Nivel de desarrollo conceptual de los estudiantes sobre conceptos asociados a igualdad, se ve reflejado en los ejemplos asociados a la igualdad en el modelo de barra sugerido en las bases curriculares, en la utilización de balanzas en forma concreta y pictórica, y en el uso

de material concreto para representar la igualdad con fichas de colores. Los ejemplos asociados a la igualdad y presentados en las planificaciones corresponden a enunciados verbales y conceptuales. Una de las docentes plantea preguntas dentro de la planificación donde se propone indagar y dar el tiempo necesario para conocer el nivel de desarrollo de los estudiantes referente a las operaciones que deben utilizar para resolver las ecuaciones. Pero es frecuente encontrar en la planificación planteamientos de preguntas utilizadas en los distintos momentos de la clase. A continuación, se presenta en la tabla 1, los tres subdominios con las categorías de acuerdo a los descriptores con mayores indicios encontrados.

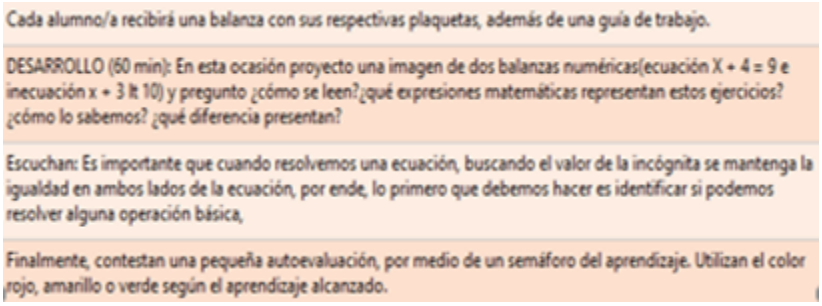
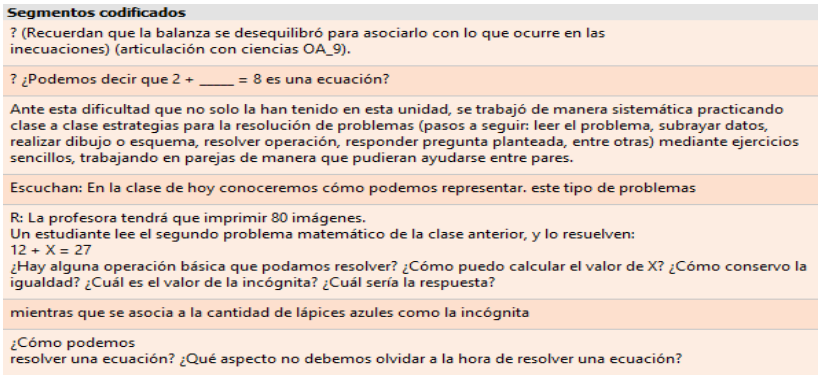
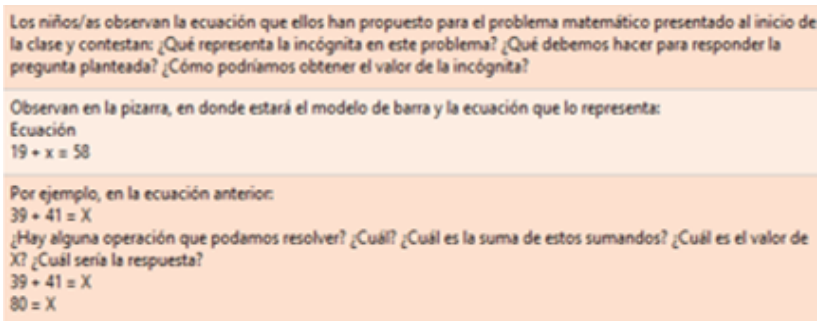
Subdominio	**Categoría**	**Descriptor**
KMT	*D3 Actividades, ejemplos, tareas y ayudas*	D 3.3Una estrategia para la enseñanza sobre el uso de ejemplos y contraejemplos  Cada alumno/a recibirá una balanza con sus respectivas plaquetas, además de una guía de trabajo. DESARROLLO (60 min): En esta ocasión proyecto una imagen de dos balanzas numéricas(ecuación X + 4 = 9 e inecuación x + 3 lt 10) y pregunto ¿cómo se leen?¿qué expresiones matemáticas representan estos ejercicios? ¿cómo lo sabemos? ¿qué diferencia presentan? Escuchan: Es importante que cuando resolvemos una ecuación, buscando el valor de la incógnita se mantenga la igualdad en ambos lados de la ecuación, por ende, lo primero que debemos hacer es identificar si podemos resolver alguna operación básica, Finalmente, contestan una pequeña autoevaluación, por medio de un semáforo del aprendizaje. Utilizan el color rojo, amarillo o verde según el aprendizaje alcanzado.
KFLM	*E2 Fortalezas y dificultades*	Descriptor E2.1: Las dificultades que presentan los estudiantes para comprender el concepto de igualdad  **Segmentos codificados** ? (Recuerdan que la balanza se desequilibró para asociarlo con lo que ocurre en las inecuaciones) (articulación con ciencias OA_9). ? ¿Podemos decir que 2 + ____ = 8 es una ecuación? Ante esta dificultad que no solo la han tenido en esta unidad, se trabajó de manera sistemática practicando clase a clase estrategias para la resolución de problemas (pasos a seguir: leer el problema, subrayar datos, realizar dibujo o esquema, resolver operación, responder pregunta planteada, entre otras) mediante ejercicios sencillos, trabajando en parejas de manera que pudieran ayudarse entre pares. Escuchan: En la clase de hoy conoceremos cómo podemos representar. este tipo de problemas R: La profesora tendrá que imprimir 80 imágenes. Un estudiante lee el segundo problema matemático de la clase anterior, y lo resuelven: 12 + X = 27 ¿Hay alguna operación básica que podamos resolver? ¿Cómo puedo calcular el valor de X? ¿Cómo conservo la igualdad? ¿Cuál es el valor de la incógnita? ¿Cuál sería la respuesta? mientras que se asocia a la cantidad de lápices azules como la incógnita ¿Cómo podemos resolver una ecuación? ¿Qué aspecto no debemos olvidar a la hora de resolver una ecuación?
KMLS	*F.2.-Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado*	Descriptor F2.2: Nivel de desarrollo conceptual de los estudiantes sobre conceptos asociados a igualdad  Los niños/as observan la ecuación que ellos han propuesto para el problema matemático presentado al inicio de la clase y contestan: ¿Qué representa la incógnita en este problema? ¿Qué debemos hacer para responder la pregunta planteada? ¿Cómo podríamos obtener el valor de la incógnita? Observan en la pizarra, en donde estará el modelo de barra y la ecuación que lo representa: Ecuación 19 + x = 58 Por ejemplo, en la ecuación anterior: 39 + 41 = X ¿Hay alguna operación que podamos resolver? ¿Cuál? ¿Cuál es la suma de estos sumandos? ¿Cuál es el valor de X? ¿Cuál sería la respuesta? 39 + 41 = X 80 = X

Tabla 1: Subdominios, categorías y descriptores con mayores indicios

CONCLUSIÓN

La inclusión del álgebra y la importancia que tiene este contenido, es lo que nos motiva a evaluar los conocimientos para la enseñanza de profesores en ejercicio. La principal motivación es evidenciar el conocimiento didáctico de estos contenidos que se han introducido en el currículo nacional hace menos de una década y son medidos en la evaluación docente. Existen pocas investigaciones relativas a caracterizar el conocimiento de docentes en ejercicio, analizar los conocimientos matemáticos en torno al álgebra tiene una gran relevancia, considerando que el dominio de los contenidos matemáticos por parte del profesor de básica, que no es formado como profesor matemática, es primordial en el proceso de aprendizaje en sus estudiantes.

En el subdominio KMT las estrategias usadas son utilización de balanzas en forma concreta y pictórica y material concreto para representar la igualdad con fichas de colores. Los ejemplos mencionados son de nivel concreto, simbólico de representación de enunciado conceptual y escrito. En el subdominio KFLM en relación a las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de ecuaciones, presenta ejemplos en la planificación con inverso aditivo. En el subdominio KMLS utiliza enunciados verbales y conceptuales para el concepto de ecuación y en la reflexión explícita el modelo de barra utilizado para afianzar el concepto de igualdad.

Referencias

Assaél, J., & Pavez, J. (2008). La construcción e implementación del sistema de evaluación del desempeño docente chileno: principales tensiones y desafíos. RIEE. Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa.

Ávalos, B., & Matus, C. (2010). La Formación Inicial Docente en Chile desde una Óptica Internacional. Informe Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS-M.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. Journal for research in mathematics education, 36(5), 412-446.

Carrillo, J., Contreras, L.C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.). Investigación en Didáctica de la Matemática (pp. 193- 200). Granada, España: Comares.

Gajardo Ibáñez, L., González González, D., & Gajardo Guevara, L. (2020). La evaluación docente en Chile: la actitud del profesorado hacia los instrumentos que evalúan el desempeño profesional docente.

Roa-Tampe, K. A. (2017). La evaluación docente bajo la óptica del desarrollo profesional: el caso chileno. Educación y Educadores, 20(1), 41-61.

Serrano, C. (2 de febrero de 2015). Mejoras en educación. La Tercera. Recuperado de http://www.latercera.com/noticia/opinion/ideas-y-debates/2015/01/895-614967- 9-mejoras-en-educacion.shtml.

DESARROLLO DE COMPETENCIAS DE MODELAMIENTO EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN

Flavio Guiñez, Darío González

Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile

Este estudio, presenta resultados preliminares de una investigación que busca evaluar el diseño de un curso de modelamiento matemático para docentes en matemática en formación, particularmente con respecto al desarrollo de competencias asociadas a modelar problemas del mundo real. Los resultados preliminares de su primera implementación sugieren que hubo mejoras en las competencias de modelamiento de los futuros profesores, las cuales se asocian a las distintas fases del ciclo de modelamiento. Con este trabajo se busca dar cuenta de esta experiencia pionera en el país en el diseño de un curso de estas características y contribuir de esta forma a fortalecer los procesos formativos de los docentes en torno a esta habilidad.

Modelamiento matemático; Competencias; Formación inicial docente

INTRODUCCIÓN

El modelamiento matemático es considerado como una competencia importante a ser desarrollada en los estudiantes y en la actualidad se encuentra explícita en los currículos escolares de muchos países (CCSSM, 2010; Blum, 2015; Kaiser, 2017). En Chile, las Bases Curriculares ha posicionado el modelamiento como una habilidad transversal a ser desarrollada en todos los niveles educativos (Mineduc, 2012, 2013, 2019). Todos estos requerimientos curriculares establecen la necesidad de preparar a los docentes de matemáticas para que enseñen modelamiento en la escuela.

Sin embargo, la investigación en educación matemática ha documentado que tanto docentes en formación como docentes en servicio, han demostrado dificultades persistentes al resolver tareas de modelamiento matemático (Anhalt, Cortez, & Bennett 2018; Huincahue, Borromeo-Ferri, & Mena-Lorca, 2018; Ng, 2013; Tan & Ang, 2013). Por lo tanto, es importante el desarrollar competencias de modelamiento en los docentes de matemáticas. La investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del modelamiento ha documentado que es posible desarrollar la competencia de modelamiento por medio de intervenciones pedagógicas (Anhalt, Cortez, & Bennett, 2018; Huincahue, Borromeo-Ferri, & Mena-Lorca, 2018). Por lo tanto, un punto de partida es promover el desarrollo de competencias de modelamiento durante la formación inicial de docentes. Este reporte discute el diseño e implementación de un curso de modelamiento matemático para docentes en formación en la carrera de pedagogía en matemáticas de una universidad en Chile. Ya que este curso es pionero en el país, este trabajo busca compartir elementos considerados en su diseño y algunos resultados preliminares acerca de la efectividad del curso en desarrollar competencias de modelamiento en los docentes en formación.

Marco teórico

El modelamiento matemático es una actividad cognitiva de carácter iterativa, no lineal y dinámica, que está formada por una serie procesos descritos en el *ciclo de modelamiento*. Además, la competencia de modelamiento matemático ha sido definida como la habilidad para ejecutar de forma exitosa cada una de las acciones incluidas en el ciclo de modelamiento (Niss & Højgaard, 2011). Existen varias versiones de este ciclo, cada una con un énfasis distinto, dependiendo de la perspectiva de modelamiento considerada y del uso que se le quiera dar al ciclo (Kaiser, 2017). Para el caso del curso de modelamiento presentado en este reporte, se consideró el ciclo de Maaß (2006) representado en la Figura 1.

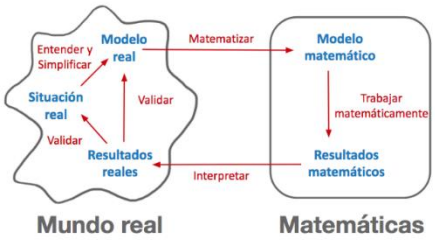


Figura 1. El ciclo de modelamiento descrito por Maaß (2006).

Este ciclo comienza cuando surge un interés por dar solución a una *situación real*, la cual es usualmente compleja y difícil de entender, por lo que el primer proceso del ciclo es *entender y simplificar* esta situación real al identificar los factores más importantes, hacer supuestos razonables y simplificadores, entre otras. Como resultado obtenemos un *modelo real*, o una versión simplificada y estructurada de la situación real que facilita la definición del problema a resolver y el tránsito al mundo de las matemáticas. Este tránsito se lleva a cabo a través del proceso de *matematización*, o el expresar el problema definido por el modelo real como un problema matemático (cuantificar cantidades relevantes, definir notación, expresar relaciones entre cantidades matemáticamente, entre otras). El resultado de la matematización es un *modelo matemático*, por medio del cual es posible *trabajar matemáticamente* para resolver el problema (utilizar algoritmos, operar con cantidades, resolver ecuaciones o inecuaciones, construir y analizar gráficos, entre otras). El trabajo matemático produce *resultados matemáticos*, los que deben ser *interpretados* en el contexto de la situación para entender qué significan en relación con el problema. Llamamos *resultados reales* a lo que se obtiene de esta interpretación. El último proceso, *validar*, consiste en cuestionarse si los resultados reales son razonables y dan respuesta satisfactoria al problema planteado, lo que puede incluir: reflexionar críticamente acerca de las soluciones, revisar o reformular componentes del modelo o el modelo completo, discutir sobre las limitaciones del modelo, o volver a transitar por ciclo de modelamiento completo si las soluciones no son adecuadas.

METODOLOGÍA

Proceso de diseño del curso

El curso de modelamiento es parte de un proyecto de colaboración entre dos universidades en Chile, una de las cuales corresponde a la afiliación de los autores de este reporte. Los autores trabajaron en el diseño de este curso durante el periodo de abril − diciembre del 2019, para ser implementado en el primer semestre de 2020. El proceso de diseño consideró una revisión de la literatura acerca de la enseñanza y

el aprendizaje del modelamiento matemático y la búsqueda de referentes internacionales de cursos de modelamiento para informar sus decisiones acerca del contenido, los objetivos de aprendizaje, las estrategias de enseñanza y los instrumentos de evaluación. A partir de esta información, se elaboró una lista de competencias a ser desarrolladas durante el curso, tanto asociadas a la práctica de modelar (simplificar la situación, definir variables y parámetros, matematizar, interpretar resultados, evaluar el modelo, entre otras), como a la enseñanza de esta habilidad (formulación de problemas, planificación, estrategias de enseñanza, etc.). El diseño del curso se estructuró en tres unidades: 1) *Modelamiento* (6 semanas aprox.), enfocada en entender el proceso de modelamiento y en desarrollar competencias de modelamiento a través de la resolución colaborativa de problemas del mundo real; 2) *Enseñanza del modelamiento* (6 semanas aprox.), la cual aborda competencias relacionadas a la enseñanza efectiva del modelamiento; y 3) *Proyecto* (3 semanas), en la cual los docentes en formación deben aplicar sus aprendizajes para planificar una actividad de modelamiento de varias clases. Para la primera unidad se diseñaron tres problemas de modelamiento genuinos de carácter abierto que facilitaran comprender las distintas fases del ciclo de modelamiento. La primera implementación del curso ocurrió durante el primer semestre del 2020 y fue en formato online debido a la emergencia sanitaria Covid-19. El curso consideró dos clases semanales, cada una de 90 minutos. Un total de 17 docentes en formación en su cuarto año de carrera fueron parte del curso.

Diseño de investigación

Este trabajo, es parte de una investigación en curso para evaluar el impacto del curso de modelamiento en las competencias de los docentes en formación para modelar y enseñar a modelar. Este reporte se centra en los datos recogidos para evaluar las competencias de modelamiento de quince docentes en formación. Se les administró a los docentes, una versión traducida de la prueba de competencias de modelamiento desarrollada por Haines, Crouch, y Davis (2000) con el objetivo de evaluar la capacidad de un individuo para: hacer suposiciones simplificadoras, formular una declaración clara del problema, entender el objetivo del modelo (entender y simplificar); identificar variables, parámetros y constantes, formular el problema en términos matemáticos (matematizar); y evaluar las soluciones del modelo (interpretar y validar). La prueba contiene seis ítems, cada uno con cinco opciones múltiples: una opción correcta (2 pts.), una parcialmente correcta (1pt.) y tres distractores (0 pts. c/u), para un puntaje ideal de 12 puntos. La prueba tiene dos formas para realizar evaluaciones de formato pre y post test y, en su versión en inglés, ha sido administrada a estudiantes de licenciatura en matemáticas y pedagogía en matemática, mostrando evidencia de validez de contenido, de constructo y confiabilidad (Crouch & Haines, 2003; Haines et al., 2000; Hidayat, Zulnaidi, & Zamri, 2018; Kaiser, 2017).

RESULTADOS

En general, los docentes en formación demostraron un nivel relativamente bajo de dominio de las competencias de modelamiento, con una gran variabilidad en sus resultados durante la administración del pre-test (M = 6.00, SD = 2.07). Estos resultados son comparables a los resultados obtenidos por Haines et al. (2000) en su estudio piloto, lo que sugiere que el instrumento podría ser idóneo para evaluar competencias de docentes en formación en el contexto chileno. Las estudiantes mujeres demostraron un mejor rendimiento en el pre-test que sus compañeros hombres, aunque ellas demostraron una variabilidad

más alta (mujeres: M = 6.27, SD = 2.05; hombres: M = 5.25, SD = 1.92). En conjunto, el rendimiento más bajo fue en las subcompetencias asociadas con: comprender el propósito del modelo (0% C, 40% PC, and 60% I), formular un modelo matemático (33% C, 67% PC, and 0% I) y la evaluación de los resultados obtenidos con el modelo (40% C, 7% PC, and 53% I).

Los resultados del post-test muestran una mejora significativa en la competencia general de modelamiento de los docentes en formación (M = 7.67, SD = 1.66), de acuerdo con el test de Wilcoxon (V = 11, p = 0.03, N = 15). Se mantuvo el mejor rendimiento de las docentes mujeres por sobre sus compañeros hombres (mujeres: M = 7.73, SD = 1.81; hombres: M = 7.50, SD = 1.12). Además, se apreció una tendencia al mejoramiento en cada una de las subcompetencias de modelamiento, con la excepción de la subcompetencia de *Evaluación de soluciones* (Figure 2).

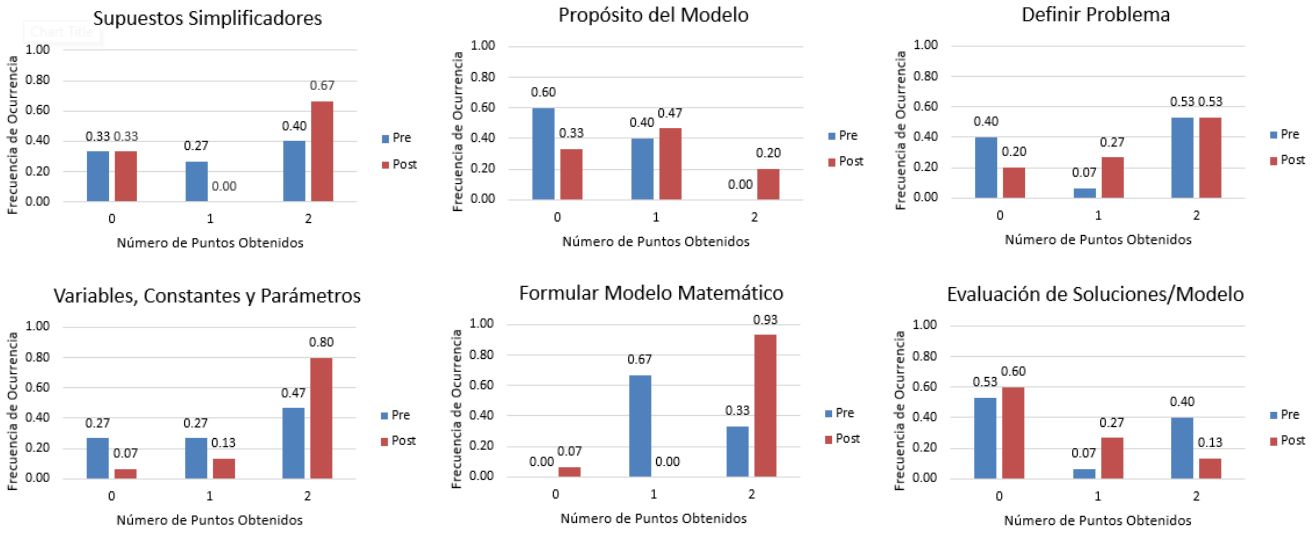


Figura 2. Comparación pre-post por pregunta (subcompetencia).

DISCUSIÓN

Modelar matemáticamente es una habilidad que, aunque priorizada por el currículo nacional, es poco comprendida por los docentes y escasamente abordada en las aulas escolares. Esto se debe en parte a las pocas experiencias con problemas de modelamiento genuinos que tienen los docentes en su formación. Considerando esta realidad y bajo la premisa de que aprender a modelar requiere de una práctica genuina (Blum, 2015), el curso que se describe en este trabajo consideró instancias en las que los futuros profesores tuvieran oportunidades de fortalecer sus competencias de modelamiento a través de la resolución colaborativa de problemas del mundo real de carácter abierto. Muchos autores han señalado la importancia de trabajar en este tipo de problemas, por lo que las tareas o proyectos de modelamiento se utilizan cada vez más para la instrucción en varios países (Borromeo-Ferri, 2017). Los resultados preliminares de esta investigación sugieren que trabajar con este tipo de problemas contribuye a desarrollar subcompetencias asociadas a esta habilidad. Estos resultados deben ser confirmados en futuras implementaciones del curso, pero dan buenos indicios de la efectividad del enfoque con el que fue diseñado.

Agradecimientos:

Este trabajo fue apoyado por el Centro de Modelamiento Matemático (CMM), ACE210010 y FB210005, fondos BASAL para centros de excelencia, financiados por ANID. Además, forma parte de las iniciativas de la Cátedra Unesco: *Formación de docentes para enseñar matemática en el siglo XXI.*

Referencias

Anhalt, C. O., Cortez, R., & Bennett, A. B. (2018). The emergence of mathematical modeling competencies: An investigation of prospective secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 20*(3), 202-221.

Blum W. (2015) Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?. In: Cho S. (eds) The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Springer, Cham.

Borromeo-Ferri, R. (2017). Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education. *In Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education.*

Common Core State Standards Initiative (CCSSM). (2010). Common Core State Standards for mathematics. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSi_Math%20Standards.pdf

Crouch, R. M., & Haines, C. R. (2003). Do you know which students are good mathemathical modellers? Some research developments. Technical Report No. 83, Department of Physics, Astronomy and Mathematics, University of Hertfordshire (p. 25). Hatfield: University of Hertfordshire.

Haines, C., Crouch, R. & Davis, J. (2000). Mathematical modelling skills: A research instrument (Technical Report No. 55). University of Hertfordshire.

Hidayat R, Zulnaidi H, Syed Zamri SNA (2018) Roles of metacognition and achievement goals in mathematical modeling competency: A structural equation modeling analysis. PLoS ONE 13(11): e0206211. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0206211

Huincahue, J., Borromeo-Ferri, R. & Mena-Lorga, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemáticas. Enseñanza de las Ciencias, 36(1), 99-115.

Kaiser, G. (2017). The teaching and learning of mathematical modeling. In J. Cai (Ed.), Compendium for research in mathematics education (pp. 267-291). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies?. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38,* 113–142.

Mineduc (2012) Bases Curriculares Educación Básica. 1º edición. Santiago, Chile.

Mineduc (2013) Bases Curriculares Matemática 7° Básico a 2° Medio. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC). (2019). Bases curriculares: 3° y 4° medio. Santiago, RM: Ministerio de Educación, República de Chile.

Ng, K. E. D. (2013). Teacher readiness in mathematical modelling: Are there differences between pre-service and in-service teachers?. In G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. P. Brown (Eds.), Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice (pp. 339-348). New York, NY: Springer.

Niss, M., & Højgaard, T. (Eds.). (2011). Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. English translation of Danish original (2002). Roskilde University, Denmark: IMFUFA.

Tan, L. S., & Ang, K. C. (2013). Pre-service secondary school teachers' knowledge in mathematical modelling – A case study. In G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. P. Brown (Eds.), Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice (pp. 373-383). New York, NY: Springer

COMUNICACIONES BREVES

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN BÁSICA: INTERPRETACIONES DOCENTES

Daniela Olivares, Isidoro Segovia, José Luis Lupiáñez

Universidad de Granada

El objetivo de este trabajo es analizar las interpretaciones del profesorado de educación básica respecto al papel de la resolución de problemas propuesto en Bases Curriculares y Programas de Estudio. El enfoque de la investigación fue cualitativo-interpretativo. Se realizaron entrevistas semi estructuradas a 8 docentes, las cuales se analizaron a través de teoría fundamentada. Como resultado se encontró que los docentes manifiestan interpretaciones diversas y no siempre concordantes con lo que proponen los materiales curriculares. Se concluye que , al momento de diseñar este tipo de documentos, es necesaria una reflexión sobre su forma de comunicar, sus énfasis y la forma de entregar el mensaje a los docentes que lo aplican.

Diseño curricular, interpretación docente, materiales curriculares, resolución de problemas.

INTRODUCCIÓN

El currículo de matemáticas es una propuesta educativa situada entre declaraciones de principios generales prescritos y su traducción práctica en el aula (Rico y Moreno, 2016). Entre estos dos puntos se encuentra la interpretación que realiza el profesorado de aquellos documentos que conforman el currículo. Algunos estudios han demostrado que la comprensión que logra el profesorado sobre los materiales curriculares afecta a la forma en que estos se utilizan, y que una comprensión más profunda tiene un mayor impacto en las prácticas de enseñanza (Choppin, 2011). Un elemento central para las matemáticas es la resolución de problemas. En las Bases Curriculares y Programas de Estudio de la educación básica en Chile, la resolución de problemas aparece declarada dentro de los propósitos de la asignatura. Sin embargo, estudios previos han encontrado que dentro de estos documentos no hay una postura clara respecto al enfoque para abordar los problemas en el aula (Olivares et al., 2020). Por esa razón nos preguntamos: De todo lo propuesto en Bases Curriculares y Programas de Estudios para la resolución de problemas, ¿qué interpretan los docentes?

MARCO TEÓRICO

Nuestro marco teórico tiene dos focos: el currículo de matemáticas y el papel de la resolución de problemas. Según Rico y Moreno (2016), el currículo puede ser analizado en distintos niveles, entre ellos: fines de la educación, disciplinas académicas, sistema educativo y planificación para el profesorado. En este trabajo nos situamos en el último nivel, para conocer la interpretación que hace el profesorado acerca de documentos diseñados para apoyar sus procesos de planificación. Entendemos el concepto de interpretación curricular como la puesta en práctica de habilidades para dar sentido al

mensaje que transmite el currículo, conectando esas ideas con experiencias, conocimientos previos y creencias (Dietiker et al., 2018). Un aspecto particularmente importante para la educación matemática, es la interpretación del papel de la resolución de problemas. Consideramos al concepto problema como una tarea no rutinaria, cuya estrategia de resolución no es conocida de forma inmediata por su resolutor (NCTM, 2003). Por tanto, la resolución de problemas constituye un proceso en el que un resolutor se implica en este tipo de tarea. Sin embargo, a través del tiempo la resolución de problemas ha tenido distintos roles, no siempre en consonancia con esta definición. Schoenfeld (2016) explica que los problemas han sido entendidos como: (a) cualquier cosa que requiere ser hecha o (b) una pregunta desconcertante. La primera correspondería a la forma tradicional de enseñanza, según la cual, los problemas se usan como simples ejercicios rutinarios. Cuando el currículo promueve la resolución de problemas como una habilidad, digna de instrucción por derecho propio, también se estaría aludiendo a la primera acepción (Schoenfeld, 2016). Para Schoenfeld, la segunda acepción es el corazón de la matemática, si no la matemática misma. El NCTM (2003) concuerda en gran medida señalando que, para encontrar una solución, los estudiantes usan los conocimientos que ya tienen y, a través de este proceso, desarrollan nuevos conocimientos. Esto convierte a la resolución de problemas no sólo en un objetivo de las Matemáticas, sino en el medio principal para alcanzarlo.

MÉTODO

El estudio tuvo un enfoque cualitativo-interpretativo. Nuestro objetivo fue: analizar las interpretaciones del profesorado respecto al papel de la resolución de problemas propuesto en las Bases Curriculares y Programas de Estudio de la educación básica. Los objetivos específicos fueron los siguientes:

- Identificar la interpretación que hacen los docentes respecto al propósito de la asignatura de Matemática propuesto en Bases Curriculares y Programas de Estudio.
- Analizar el significado que los docentes atribuyen al concepto problema según su interpretación de las Bases Curriculares y Programas de Estudio.
- Analizar el rol que manifiesta la resolución de problemas en Bases Curriculares y Programas de Estudio según la interpretación del profesorado.

La muestra estuvo conformada por 8 docentes de educación básica organizados según los siguientes perfiles: (1) Dos docentes noveles, con menos de 10 años de experiencia y sin perfeccionamiento en currículo o resolución de problemas (P-Novel), (2) Dos docentes más de 10 años de experiencia, con dos o tres cursos de perfeccionamiento sobre educación matemática en general (F-General), (3) Dos docentes con más de 10 años de experiencia y tres o más cursos de perfeccionamiento en resolución de problemas, (F-RP) (4) Dos docentes de educación rural, con más de 10 años de experiencia y uno o dos cursos de perfeccionamiento en educación matemática (P-Rural).

La técnica de recogida de datos fue la entrevista semi estructurada. Las entrevistas se llevaron a cabo entre noviembre de 2020 y febrero de 2021. Cada una fue transcrita y analizada individualmente, usando teoría fundamentada (Strauss y Corbin, 2016). Primero llevamos a cabo una codificación abierta de cada entrevista, utilizando las técnicas de análisis microscópico y comparación constante (Strauss y Corbin, 2016). Luego, organizamos los códigos en categorías y subcategorías, es decir, realizamos una codificación axial. En esta etapa elaboramos mapas conceptuales para ayudarnos a visualizar la

información, y organizamos las categorías en tablas. En la siguiente sección presentamos los resultados de estos análisis.

ANÁLISIS

A continuación, presentamos los resultados los cuales se encuentran organizados según las categorías y subcategorías generadas para cada objetivo específico.

Propósito de la asignatura de matemáticas

Corresponde al tipo de propósito que los docentes interpretan a partir de lo propuesto en Bases Curriculares y Programas de Estudio.

Aprender "Matemáticas para la vida": La mayoría de los docentes señaló que el propósito de la asignatura es enseñar contenidos que sean útiles para la vida cotidiana. También hicieron referencia a la utilidad de las matemáticas, ya sea para otras disciplinas o asignaturas:

> F-RP_1: "Lo que yo en general entiendo de lo que he leído, es que la idea es que el alumno aprenda la Matemática para la vida. Que sepa resolver problemas cotidianos".

Uno de los aspectos en que se refleja este tipo de propósitos es en el énfasis que se pone, por ejemplo, en que los problemas estén "contextualizados". Los profesores señalan que, según el currículo, un buen problema es aquél que está inmerso en un contexto cercano a la vida cotidiana de los niños.

Aprender a resolver problemas: Algunos docentes, especialmente P-Novel y F-General, también señalaron que el propósito de la asignatura tiene que ver con formar buenos resolutores. La resolución de problemas se convierte en un objetivo principal:

> P-Novel_1: "Pero en sí mucho que tenga que ver con la resolución de problemas. Hacia eso apuntan las Bases Curriculares. A que sea una persona integral, emocional, y que tenga ahí la resolución de problemas".

Este propósito también está asociado a la comprensión de la resolución de problemas como el desarrollo de una habilidad, para lo cual el estudiante necesita haber adquirido otras habilidades previas. Como consecuencia, se interpreta que lo más importante es que el estudiante sea un buen resolutor, lo cual no se puede conseguir hasta que haya desarrollado otras habilidades, como la comprensión lectora, la argumentación, la representación, etc.

Significado del concepto problema

Corresponde al significado que se atribuye al concepto "problema" según la interpretación docente de lo dispuesto en los documentos curriculares.

Asociado a Tarea Rutinaria: Se asocia el concepto "problema" a una tarea rutinaria. Su característica distintiva no radica en el conocimiento (o desconocimiento) de su método de resolución, sino de cuán cercana es la situación a la vida cotidiana de los estudiantes. Esta fue la subcategoría más presente en las entrevistas, excepto en las entrevistas de las dos profesoras F-RP:

> F-General_1: "¡Ah! Buena pregunta. ¿Qué tiene que ver con la rutina? ¿Qué es para ti la rutina? El ir a comprar. Entonces, para un niño, ¿cuál sería la rutina? Acompañar a su mamá al almacén de la esquina. Inventa un problema de Matemática cuya operación sea la suma. ¡Ah! Dice el

> niño. Fuimos con mi mamá... porque es a través de una historia, ¿no? Entonces mi mamá compró pan, compró queso, compró tomate. Entonces, ¿cuánto gastó? Suma. Cumplió con todo. Eso sería una situación problemática. Ahora, ¿qué sería algo no rutinario? Algo que no esté en tu contexto".

Asociado al desarrollo de una habilidad: Se asocia el concepto "problema" a un tipo de tarea que requiere una habilidad especial previa para poder abordarla. Si los estudiantes no poseen esta "habilidad", no serían capaces de resolver los problemas. En este caso, el foco no está puesto en si un problema es una tarea rutinaria o no rutinaria, sino que se trata de tareas o situaciones que sólo personas hábiles pueden resolver. Por ejemplo:

> P-Rural_1: "Nos cuesta mucho la resolución de problemas, porque los niños no tienen la capacidad, la habilidad para llegar a lograr cierto... ciertos términos que se utilizan o cierta... capacidad para poder llegar a solucionar un tipo de problemas con esas dificultades".

Asociado a los problemas como desafíos: Se asocia el concepto "problema" a un desafío. No necesariamente se habla de "problemas" de forma explícita, pero se entiende que los aprendizajes se logran resolviendo retos adecuados al nivel de los estudiantes. Encontramos esta subcategoría en las entrevistas de docentes con mayor formación sobre el currículo y la resolución de problemas. Por lo general, estas docentes consideraron que el currículo no aporta gran cantidad de ejemplos de problemas como desafíos, pero sí reconocieron un esfuerzo del Ministerio por incluir cada vez más ese tipo de problemas en el currículo, especialmente en comparación a lo que ocurría en el pasado.

Rol de la resolución de problemas que se extrae de los materiales curriculares

Corresponde al rol que cumple la resolución de problemas en los documentos curriculares, según la interpretación del profesorado. En esta categoría organizamos los resultados según las dos acepciones de Schoenfeld (2016).

Los problemas como cualquier cosa que requiere ser hecha: Encontramos este rol cuando se habla que el currículo está orientado al uso de los problemas para ejercitar los contenidos de la asignatura, contextualizar la enseñanza, motivar a los estudiantes o cualquier otro propósito "útil". Este es el rol que encontramos mayormente mencionado durante las entrevistas:

> F-RP_1: "Yo siento que el Programa, de hecho, lo plantea como una "situación problema", que es como algo que el niño debe resolver, aplicando el contenido que hasta ahí tiene aprendido". (F-RP_1)

También lo encontramos al hablar de pasos y estrategias necesarios para desarrollar la habilidad de resolver problemas y llegar a ser un buen resolutor. Cabe señalar que, al referirse a "estrategias", los docentes no señalaron con claridad si estas se trataban de estrategias para la adquisición de un algoritmo o de estrategias para la resolución de problemas.

Los problemas como una pregunta desconcertante: Encontramos referencias a este rol principalmente en las entrevistas de los docentes con mayor formación en resolución de problemas. Se entiende que el currículo está orientado al uso de los problemas como un medio, una estrategia de enseñanza y aprendizaje. En relación al Programa de Estudio, los profesores señalaron que esta concepción se

encontraba en las secciones iniciales del documento, es decir, como declaración general inicial, pero que era difícil saber cómo llevarlo a la práctica sin una formación más profunda.

CONCLUSIONES

Las Bases Curriculares establecen tres propósitos para la asignatura: enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y desarrollar el pensamiento crítico a través del razonamiento. Por su parte, la mayoría de los docentes manifestó interpretar que el propósito es enseñar contenidos para aplicar a la vida cotidiana y aprender a resolver problemas. Consideramos que esta interpretación es limitada. Si bien el desarrollo del razonamiento fue mencionado en varias entrevistas, esto fue en el contexto de las creencias de los docentes y no de su lectura del currículo. A eso se suma el significado que interpretan sobre el concepto problema. Encontramos que hay una confusión entre los "problemas rutinarios y no rutinarios". Sólo aquellos docentes con más formación fueron capaces de atribuir la diferencia al conocimiento del método de resolución y no al contexto de los problemas. Además, resulta paradójico que los docentes sientan que el currículo les exige utilizar "problemas contextualizados", pero los profesores de área rural sientan que los documentos curriculares están descontextualizados de su realidad. Finalmente, el papel de la resolución de problemas parece entenderse como la aplicación de contenidos, la primera acepción de Schoenfeld (2016), en lugar de desafiar a los estudiantes para poner en práctica su razonamiento y alcanzar la comprensión. Estos resultados nos hacen reflexionar acerca de la forma en que el currículo se comunica, sus énfasis y formatos. Los materiales curriculares debieran ser más claros y explícitos acerca de lo que se espera de la resolución de problemas, y aportar lineamientos más directos sobre la forma de implementarla.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el seno del Proyecto de Investigación PGC2018-95765-B-I00 (PROFESTEM) del Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, y gracias a beca CONICYT PFCHA/Doctorado Becas Chile/2018 N° 72190671.

Referencias

Choppin, J. (2011). Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(5), 331-353.

Dietiker, L., Males, L., Amador, J. y Earnest, D. (2018). Curricular noticing: A framework to describe teachers' interactions with curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education, 49*(5), 521-532.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales.

Olivares, D., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2020). Roles de la resolución de problemas en el currículo oficial. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (18), 41-54.

Rico, L. y Moreno, A. (Eds.). (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Pirámide.

Schoenfeld, A. (2016). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1-38.

Strauss, A. y Corbin, J. (2016). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Universidad de Antioquia.

ACCIONES DOCENTES PARA UNA GESTIÓN ARTICULADA DE LA ARGUMENTACIÓN Y MODELACIÓN: UN CASO DE ESTUDIO EN EL AULA PRIMARIA

Andrés Ortiz Jiménez[*]

Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile

(*) Estudiante del Doctorado en Educación. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

El propósito de este trabajo es caracterizar las acciones que desarrolla una docente cuando gestiona en forma articulada, la argumentación y la modelación en el aula matemática de primaria. Cabe señalar que la contribución presentada forma parte de un proyecto de investigación hace poco iniciado y que busca responder cómo una gestión argumentativa contribuye a articular ambas habilidades en el aula. El tema de este estudio se hace relevante desde dos perspectivas: la primera, es que la modelación es uno de los procesos principales en lo que la literatura se refiere a "hacer matemática" y que la argumentación enriquece el ciclo de modelación; la segunda se refiere a que la literatura señala que la relación entre el desarrollo de las competencias y la enseñanza es todavía vaga. La investigación que sustenta esta contribución está enmarcada en el enfoque cualitativo y se realizará mediante un estudio de casos exploratorio, para comprender en profundidad los aspectos de una gestión argumentativa en docentes que están promoviendo articuladamente argumentación y modelación.

Argumentación, modelación, ciclo de modelación, gestión argumentativa, estrategias comunicativas

INTRODUCCIÓN

En las aulas de matemática, la argumentación colectiva promueve una cultura en la que la construcción del conocimiento se considera una actividad situada, crítica y reflexiva, que involucra la participación grupal (Conner, Singletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014; Krummheuer, 2007). En este sentido, la argumentación promueve la comunicación y las oportunidades de aprendizaje en las lecciones de Matemáticas (Lee, 2010; Smith & Stein, 2011), generando un contexto donde los estudiantes juegan un papel principal y el docente es receptivo a las ideas emergentes de los estudiantes, estando dispuesto a adaptar la lección en respuesta a ellas, lo cual es esencial para el desarrollo de la argumentación (Solar, Ortiz & Ulloa, 2016) y también para fomentar el surgimiento de ideas de estudiantes, algunas de las cuales pueden ser inesperadas (Abdulhamid, 2018). En relación con lo anterior, es evidente la importancia que tiene el docente en una gestión de clases que promueve la argumentación colectiva, ya que sus acciones específicas pueden fortalecer o debilitar los procesos de discusión de los estudiantes. (Ayalon & Even, 2016; Solar & Deulofeu, 2016; Solar, Ortiz, Deulofeu & Ulloa, 2020). No obstante, lo anterior, Ayalon y Hershkowitz (2018) señalan que existe poca investigación respecto al conocimiento de los docentes para implementarla en el aula y de las dificultades asociadas a ello. Por otra parte, existe

evidencia sobre la relación entre la argumentación colectiva y la elaboración de modelos matemáticos. Brown y Redmond (2007) observaron que estudiantes que generalmente argumentaban colectivamente en el aula, veían la matemática como un foro de discusión al realizar tareas de modelación, mientras que Dede (2019) ha relacionado los procesos de argumentación con el ciclo de modelación en el aula matemática. En esta contribución, se considera el ciclo de modelación propuesto por Maaß (2006), el cual se puede observar en la Figura 1

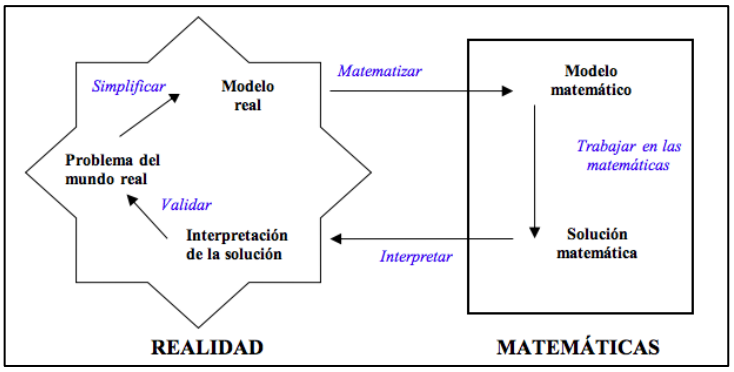


Figura 1: Ciclo de Modelación Matemática (Maaß, 2006)

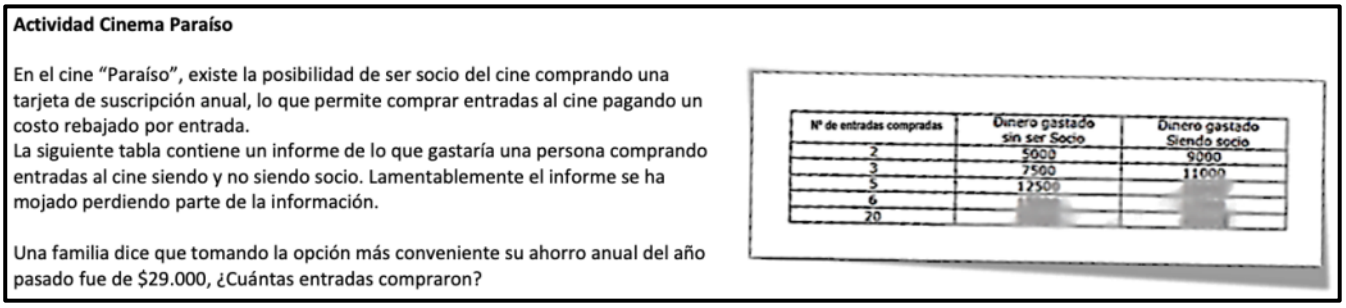
De acuerdo con el esquema presentado, las etapas de la modelación matemática son: la simplificación, la matematización, la interpretación y la validación. Las cuales se describirán brevemente a continuación: La **simplificación (Sim),** es la manipulación del problema proveniente del mundo real mediante la cual se puede obtener un modelo real. La **matematización (Mat),** es la entrada al mundo matemático, se genera mediante la traducción donde se sustituyen palabras por símbolos y expresiones matemáticas. En el **trabajo dentro de las matemáticas (TrMat),** se aplican métodos matemáticos tales como propiedades, teoremas y algoritmos, se realizan cálculos, se verifica mediante ejemplos concretos, se aplican métodos y resultados matemáticos conocidos, simulaciones por computador e incluso nuevos métodos *ad hoc* hasta obtener una solución matemática del problema. La **interpretación (Int)** de la solución matemática implica salir del mundo matemático, para determinar si el modelo desarrollado responde al problema real. La **validación (Val)**, corresponde a la etapa donde se evalúa el modelo con nuevos datos del dominio o proyectando nuevos datos. Finalmente se estudia el **análisis y proyección (AnPr)** del modelo, lo cual a pesar de no aparecer explícitamente en el esquema de Maaß (2006), requiere ser analizado en todo proceso de modelación matemática (Aravena, 2016; Gómez, 2007).

Así entonces, en el marco de un proyecto de investigación más amplio, el propósito de la comunicación presentada es mostrar las acciones que realizan los docentes cuando están promoviendo articuladamente la argumentación y modelación en el aula de matemática, pues al poder aislar ciertas características comunes, trabajando situaciones de modelamiento con sus estudiantes, es posible contribuir con los programas de formación inicial y continua, para que los futuros docentes y profesores en servicio puedan implementar de manera efectiva ambas competencias en el aula matemática.

METODOLOGÍA

La investigación que sustenta esta contribución está enmarcada en el enfoque cualitativo (Bisquerra, 2004) y se realizará mediante un estudio de casos exploratorio (Yin, 2014), para comprender en

profundidad los aspectos de una gestión argumentativa en docentes que están promoviendo articuladamente argumentación y modelación en enseñanza primaria. Los casos en esta investigación son tres docentes de enseñanza primaria, que participaron en instancias de desarrollo profesional docente en Concepción, respecto a argumentación colectiva en el aula. Una de ellas, Sofía, hace clase con niños de 3er y 4° grado y las otras dos profesoras Mafalda y Ángela, hacen clases en 7° y 8° grado. Respecto a la experiencia profesional Sofía y Ángela tienen 4 años de servicio docente, en cambio Mafalda tiene más de 15 años de experiencia en el aula. Es importante señalar que las tres docentes, fueron escogidas como casos de estudio, pues han recibido formación continua en argumentación a través de perfeccionamientos en el marco del Proyecto Fondecyt 1180880 "Aprendizaje de los estudiantes en contextos de argumentación colectiva y modelización en el aula de matemáticas" y por ello en los años 2018 y 2019 implementaron secuencias de 3-4 clases en donde promovían la modelación en el aula, a través de una situación diseñada por ellas. En particular para esta comunicación se mostrarán acciones de la docente Ángela, quien implementó la actividad señalada a continuación en la Figura 2


Actividad Cinema Paraíso

En el cine "Paraíso", existe la posibilidad de ser socio del cine comprando una tarjeta de suscripción anual, lo que permite comprar entradas al cine pagando un costo rebajado por entrada.
La siguiente tabla contiene un informe de lo que gastaría una persona comprando entradas al cine siendo y no siendo socio. Lamentablemente el informe se ha mojado perdiendo parte de la información.

Una familia dice que tomando la opción más conveniente su ahorro anual del año pasado fue de $29.000, ¿Cuántas entradas compraron?

Nº de entradas compradas	Dinero gastado sin ser Socio	Dinero gastado Siendo socio
2	5000	9000
3	7500	11000
5	12500	
6		
20		

Figura 2: Actividad implementada por la profesora Ángela

El análisis de los datos se está haciendo, empleando el método comparativo constante (Glaser & Strauss, 2006), para lo cual se están codificando las etapas del ciclo de modelación junto con las acciones que realizan las docentes en las clases diseñadas e implementadas. Este proceso está siendo apoyado con el uso del software ATLAS.ti lo que facilita trabajar con grandes cantidades de datos, optimizando la velocidad del análisis.

RESULTADOS PRELIMINARES

Los primeros resultados en el análisis del caso Ángela, muestran que la docente realiza las siguientes acciones (ver Tabla 1) en el proceso de clases.

Acciones Docentes	**Etapas del ciclo de Modelación**					
	Sim	Mat	TrMat	Int	Val	AnPr
Favorece la integración de los estudiantes a la discusión	si	si	si	si	si	si
No valida las respuestas o procedimientos de los estudiantes antes de la socialización entre pares	si	si	si	si	si	si
No repara el error unilateralmente, ni promueve que otros lo hagan	si	si	si			

Busca que los estudiantes entiendan el origen del error	si	si	si			
Promueve solicitar explicaciones para entender la actividad matemática de los estudiantes				si	si	si
Favorece el uso de preguntas deliberadas para entender el razonamiento de los estudiantes	si	si	si	si		
Favorece la comunicación bidireccional entre profesor y estudiantes				si	si	si
Favorece la comunicación multilateral entre estudiantes				si	si	si
Favorece la discusión matemática				si	si	si

Tabla 1: Acciones realizadas por el caso Ángela en la gestión de una clase de modelación

Un aspecto evidente de la Tabla 1 es el hecho de que favorecer la integración de los estudiantes a la discusión y no validar anticipadamente las respuestas antes de la socialización con los pares, son acciones que Ángela desarrolla transversalmente en las tres clases. Sin embargo, las acciones señaladas son particularmente importantes en las etapas de Simplificación, Matematización y Trabajando con la Matemática, pues por ello los estudiantes se sienten llamados a dar sus respuestas de cómo entender el problema, aportando con ideas correctas e incorrectas, pero que ninguno de ellos o ellas sabe la respuesta correcta promoviendo que los estudiantes refuten y confronten posturas o respuestas distintas. Lo anterior es coherente con las acciones "Busca que los estudiantes entiendan el origen del error" y "Promueve solicitar explicaciones para entender la actividad matemática de los estudiantes".

DISCUSIÓN

Aunque los resultados son preliminares es posible señalar que Ángela tiende a utilizar estrategias comunicativas enfocadas en oportunidades de participación, gestión del error y preguntas deliberadas (Solar & Deulofeu, 2016; Solar et al., 2020). Estos resultados son consistentes con los reportados en otros estudios que muestran acciones claves tales como oportunidades de participación, reconocer puntos de vistas divergentes, estrategias para promover la argumentación o reconocer patrones de interacción comunicativa (Goizueta & Solar, 2019; Solar & Goizueta, en prensa; Solar et al., 2020).

Referencias

Abdulhamid, V. H. (2018). Primary mathematics teachers' responses to students' offers: An 'elaboration' framework. *Journal of Mathematical Behavior*, *51*, 80–94. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.007

Ayalon, M., & Even, R. (2016). Factors Shaping Students' Opportunities To Engage in Argumentative Activity. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(3), 575–601. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9584-3

Ayalon, M., & Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, *49* (December 2017), 163–173. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010

Aravena, M. (2016). Modelización Matemática en Chile. En: J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp.195-234). Barcelona, España: Gedisa.

Bisquerra, R.(2004). *Metodología de la investigación educativa (Vol. 1)*. Editorial La Muralla.

Brown, R., & Redmond, T. (2007). Collective argumentation and modelling mathematics practices outside the classroom. *Mathematics: Essential research, essential practice, 1*, 163-171

Conner, Anna Marie, Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401–429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Dede, A.T (2019). Argumentos construidos dentro del ciclo de modelado matemático. *Revista Internacional de Educación Matemática en Ciencia y Tecnología*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825

Glaser, B., & Strauss, A. (2006). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New Jersey: Aldine Transaction.

Goizueta, M., & Solar, H. (2019). Relaciones entre la argumentación en el aula de matemáticas y la mirada profesional del profesor. En R. Olfos, E. Ramos, & D. Zakaryan (Eds.), *Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática* (pp. 241-280). Barcelona, España: Graó.

Gómez, J. (2007). *La matemática reflejo de la realidad. La modelización matemática como herramienta para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.* Badajoz, España: Federación Española de Profesores de Matemática (FESPM)

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60–82. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.02.001

Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM -International Journal on Mathematics Education, 38(2),* 113–142

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Mathematics Discussion*. Reston, VA: NCTM.

Solar, H. Ortiz, A. y Ulloa. R. (2016). MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia. *Estudios Pedagógicos.* XLII N° 4, 281 – 298.

Solar, H. y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema*, *30*(56), 1092–1112.

Solar, H., Ortiz, A., Deulofeu, J., & Ulloa, R. (2020). Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*., 1-29. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1733686

Solar, H., & Goizueta, M. (en prensa). Emergencia de patrones de interacción al promover la argumentación en el aula de matemáticas. *Educación Matemática.*

Yin, R. K. (2015). *Qualitative research from start to finish*. Guilford Publications.

CONCEPTUALIZACIÓN DEL CONSTRUCTO TRANSFORMACIÓN DE CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Cristián Bustos Tiemann, Elisabeth Ramos Rodríguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

El presente estudio tiene por objetivo conceptualizar el constructo transformación de conocimiento del profesor de matemática, a partir de un estudio documental. La investigación se estructura en tres etapas. En primer lugar, se realiza, desde la literatura, un acercamiento al constructo conocimiento del profesor. En una segunda etapa, nos introducimos en la noción de transformación de conocimiento del profesor a través de los antecedentes encontrados en otros estudios. Y, en tercer lugar, conceptualizamos la transformación de conocimiento del profesor de matemática a partir de los antecedentes anteriores. Los resultados principales dan cuenta de los procesos reflexivos individuales y colaborativos como elementos fundamentales para lograr la transformación de conocimiento y de la toma de conciencia crítica del conocimiento del profesor para lograr transitar de un estado "de potencial pedagógico" a otro "de capacidades pedagógicas".

Acción pedagógica, abstracción reflexiva, potencial pedagógico, capacidad pedagógica

INTRODUCCIÓN

El estudio del conocimiento del profesor ha estado presente hace varias décadas. En Educación Matemática se puede evidenciar su presencia en los diversos encuentros de investigadores donde destaca su papel en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Amaya et al., 2016). En este contexto, este trabajo pretende avanzar en esta línea, planteándonos como objetivo la conceptualización de la *transformación de conocimiento* (TC) con base en un estudio documental del tema.

En una primera etapa, el estudio se centra en el conocimiento del profesor, en donde se destacan los modelos del conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática. En una segunda etapa, se realiza un recorrido por diversas investigaciones que dan cuenta de la TC del profesor de matemática en diferentes contextos. En la tercera etapa, conceptualizamos la TC a partir de la teoría del aprendizaje transformador (Mezirow, 1991), la propuesta de abstracción reflexiva de Silverman y Thompson (2008) y las distinciones sobre *cambio* y *transformación* propuestas por Valenzuela-Molina (2021), entre otros.

METODOLOGÍA

El paradigma de investigación es cualitativo, dado que este estudio tiene como objetivo analizar la riqueza, profundidad y calidad de los datos que se recogen, más que la cantidad de estos. El trabajo se enmarca en una metodología basada en el estudio documental el cual involucró la búsqueda, selección, organización y análisis de materiales escritos que permitieron acercarnos a la noción de TC para la enseñanza de la matemática. Los principales motores de búsqueda fueron Scielo, ScienceDirect,

Academia, Dialnet y Eric. Sin embargo, también se acudió a Google académico, Springer Link y la base de datos WoS.

El criterio de selección de los documentos utilizados obedece a la relevancia del tema (dentro de los estudios del MTSK, por ejemplo), la cantidad de veces citado (mínimo 5 citas) y el tipo de publicación (revista, tesis doctoral, artículo en handbook, entre otros).

El estudio siguió tres etapas principales. La primera centrada en la búsqueda de fuentes primarias y secundarias en torno al conocimiento del profesor para la enseñanza, la segunda reúne estudios e investigaciones que tratan el tema de la TC para la enseñanza del profesor de matemática y, la tercera etapa, en la que se realiza el análisis de la información encontrada y se conceptualiza la TC.

RESULTADOS

Avances sobre el concepto conocimiento del profesor

Diversas investigaciones (Ball, Thames y Phelps, 2008) consideran que el conocimiento del profesor es un componente fundamental de su desempeño profesional y, si bien, no existe un consenso unánime sobre en qué consiste dicho conocimiento, su discusión ha contribuido al desarrollo de distintas conceptualizaciones que han favorecido su caracterización (Zakaryan et al., 2018).

En este sentido, se relevan los trabajos de Shulman (1987), que destacan la importancia del conocimiento del contenido para la enseñanza diferenciándolo del conocimiento del contenido que tienen otros profesionales.

En el ámbito de la educación matemática resalta Ball et al. (2008) quienes se plantearon la pregunta: ¿Qué necesitan saber los profesores y ser capaces de hacer para cumplir eficazmente el trabajo de la enseñanza de las matemáticas? Y a partir de sus estudios, y sobre la base de los trabajos de Shulman, lograron definir lo que denominaron Conocimiento Matemático para la Enseñanza o MKT (por sus siglas en inglés), como: “el conocimiento matemático que los profesores usan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos” (Ball et al., 2008, p.374). En este modelo, el conocimiento forma parte de uno de sus subdominios, y es entendido como el conocimiento que le permite al profesor realizar tareas tales como brindar argumentaciones y definiciones matemáticas precisas y adecuadas.

Otro modelo para el estudio del conocimiento del profesor es el desarrollado por Rowland et al., (2005) denominado el Cuarteto del Conocimiento. La perspectiva de este modelo es el estudio del conocimiento contextualizado en acciones. Estos autores ponen su foco de atención en la reflexión sobre la relación del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido en matemáticas.

Por otro lado, en la búsqueda por precisar cada vez más la naturaleza de cada dominio de conocimiento del profesor, surge el modelo del “Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas” (MTSK por sus siglas en inglés) el que toma como base las potencialidades del MKT (Carrillo et al., 2013) y define el conocimiento especializado ya no como un subdominio, sino como el modelo completo.

En este sentido, consideramos la noción del conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática entregado por el modelo MTSK como aquel conocimiento especializado, propio de la profesión como profesor de matemática, que los profesores movilizan para lograr aprendizaje en sus estudiantes. Este carácter de especialización del conocimiento conlleva, su relación con colegas, la

planificación y la reflexión, entre otras labores docentes, y es lo que lo diferencia de modelos como el MKT y el QK que se centran en la práctica, tal como es desarrollada en la clase, sin considerar otros espacios donde el profesor pone de manifiesto su conocimiento (Carrillo, et al., 2018).

Avances sobre el concepto transformación de conocimiento del profesor

Los estudios de Pepin, Gueudet y Trouche (2013) dan cuenta del desarrollo profesional de los profesores por medio de redes de trabajo que interactúan con diferentes recursos para la enseñanza y aprendizaje. Los autores señalan que la transformación es entendida como "diseño en uso", noción que involucra a todos los usuarios. Es así como hubo profesores que pasaron de centrarse en aspectos técnicos (relacionados con el dominio de sistema de recursos) a consideraciones didácticas y pedagógicas para la integración del recurso en su práctica. Esta transformación, evidenciada en su práctica, se vio fuertemente favorecida por medio de la colaboración docente. Otras investigaciones analizan la TC de grupos de estudios informales de profesores por medio de redes sociales, demostrando que hay evidencia de cambios manifestados por los mismos sujetos estudiados (Bommel et al., 2020). En estos estudios, la transformación se evidencia por la profundidad del intercambio de conocimiento.

En Milena et al. (2019), se desarrollan tareas de formación que dan cuenta de TC respecto del pensamiento algebraico del profesor de matemática de primaria. El estudio afirma que, en una tarea de formación, la reflexión es un elemento fundamental para la TC del profesor. Tallman (2021) realiza un estudio de caso exploratorio en el que analiza la TC de un profesor de secundaria sobre funciones trigonométricas, donde logró demostrar que las concepciones iniciales de los objetos matemáticos seno y coseno, como razones aritméticas de longitudes, se transformaron en concepciones de medidas de cantidades. Para lograr este resultado se utilizó el proceso de abstracción reflexiva[1].

Conceptualizando el constructo transformación de conocimiento del profesor

En primera instancia, consideraremos la perspectiva sociocultural de Sfard (2008), entendiendo el aprendizaje como una transición gradual desde lo que el individuo es capaz de hacer o conocer participando en el colectivo a ser capaz de hacerlo o conocerlo por sí mismo (Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2014). Desde aquí, el concepto de transformación lleva asociado al de aprendizaje, pero en el sentido del "aprendizaje transformador" (Mezirow, 1991), en el cual aprender significa tener conciencia crítica de nuestro propio conocimiento y así poder evaluar su pertinencia, donde el aprendizaje está ligado a la transformación de ciertas estructuras mentales que él denomina perspectivas y esquemas de significado. Las perspectivas de significado son sistemas generalizados de expectativas habituales que actúan sobre nuestra forma de pensar y aprender. Los esquemas de significado son hábitos de expectativas específicos que conforman una interpretación específica. Una perspectiva puede tener asociada varios esquemas que se derivan de esta (Mezirow, 1991, p. 62). La teoría del aprendizaje transformador (Mezirow, 1991), da un rol esencial a la reflexión en el aprendizaje y entiende la transformación como el resultado de procesos reflexivos y su profundidad. Si la reflexión se realiza a nivel de contenido o proceso de resolución se estará trabajando con esquemas de significado, pero si la

[1] En el sentido de Piaget, como un proceso para desarrollar nuevas estructuras cognitivas desde la abstracción de propiedades que coordinan la acción. Esto considera también la toma de conciencia de la propia experiencia docente.

reflexión conduce al cuestionamiento de premisas más fundamentales se estará en el nivel de transformación de las perspectivas de significado (Espejo y González-Suárez, 2015).

Desde la educación matemática, Silverman y Thompson (2008) proponen la abstracción reflexiva como un elemento necesario para que los docentes transformen su conocimiento matemático de un estado de potencial pedagógico a uno de capacidades pedagógicas. Para lograr esto, el profesor debe participar de la acción pedagógica, entendida en un sentido piagetiano, es decir, cuando el profesor se pregunta: "¿Qué puedo hacer para ayudar a los estudiantes a pensar como lo que tengo en mente?" En este sentido, cuando un profesor ve la acción pedagógica y puede separarse de la acción (y reflexionar sobre ella), la acción pedagógica se transforma en una comprensión pedagógica a partir de la cual, respecto del conocimiento del contenido, el profesor puede extender su red de conexiones produciéndose TC matemático. Este nuevo conocimiento tiene potencial pedagógico que el profesor puede transformar en capacidad pedagógica de su acción, donde se puede decir que llevó TC para la enseñanza de la matemática.

Por otro lado, Valenzuela-Molina (2021), analiza los conceptos de cambio y transformación desde una perspectiva organizacional, dado que las instituciones educativas son también organizaciones. Desde esta mirada, Porras y Silvers (1991) identifican dos tipos de cambios, los planificados y los no planificados. Los primeros se refieren a los cambios realizados a partir de una toma de decisiones consciente y deliberada para mejorar la organización, y el segundo referido a cambios externos no anticipados, que dan respuesta adaptativa, y algunas veces espontánea, a las influencias del entorno. Para este estudio, consideraremos dos tipos de cambios, conscientes o inconscientes, donde, de acuerdo a Mezirow (1991), la TC estará ligada a la toma de conciencia crítica de nuestro propio conocimiento y sus cambios.

Considerando las concepciones presentadas en los estudios e investigaciones precedentes, nuestro constructo de TC lo entenderemos como el proceso en que el profesor de matemática observa su acción pedagógica separada de la acción para que, mediante procesos reflexivos individuales y colaborativos, su acción pedagógica se transforme en una comprensión pedagógica. En este punto, mediante la abstracción reflexiva (Silverman y Thompson, 2008; Tallman, 2021) sobre los esquemas y perspectivas de significado (Mezirow, 1991; Espejo y González-Suárez, 2015), el profesor relaciona su conocimiento matemático y didáctico con otros, desarrollándolo y transformándolo en potencial pedagógico. Este potencial pedagógico puede convertirse en capacidad pedagógica (Silverman y Thompson, 2008) cuando el profesor manifiesta cambios en el diseño, rediseño e implementación de su acción pedagógica de manera consciente (Valenzuela-Molina, 2021) con el fin de lograr aprendizaje en sus estudiantes evidenciando que ha transformado su conocimiento para la enseñanza de la matemática.

CONCLUSIONES

En este estudio nos hemos propuesto conceptualizar el constructo *transformación de conocimiento del profesor de matemática* con base en un estudio documental. Al indagar en este hemos observado que, existe poca literatura que aborde conceptualmente dicha noción, pero sí se pueden apreciar algunos elementos en común tales como la importancia del rol de la reflexión y el trabajo colaborativo. A partir de lo anterior, hemos podido conceptualizar la transformación de conocimiento como un proceso complejo que involucra la reflexión crítica de la acción pedagógica para transitar de un estado de potencial pedagógico a uno de capacidades pedagógicas.

Los alcances y relevancia de la investigación apuntan a avanzar en descripciones más específicas y delimitadas de cómo abordar la TC del profesor de matemáticas, a partir de una conceptualización que abarque los últimos estudios en el área desde el modelo MTSK, junto con aquellos que se han establecido desde otros ámbitos de la educación. En este sentido, se espera aportar en la línea del Domicio D del Marco para la Buena Enseñanza (MINEDUC, 2021) que releva la importancia de la reconceptualización de la acción docente, a través de procesos reflexivos para la mejora y transformación intencionada de su práctica. Además, se espera contribuir en la Educación Matemática con una definición más precisa sobre la TC del profesor que permita a investigadores, formadores o instituciones educativas comprender mejor al profesor y los procesos en donde se involucra, de manera que repercuta en su práctica y en el aprendizaje de sus alumnos, y en relación con sus pares.

Agradecimientos

Se agradece a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile, Proyecto FONDECYT Iniciación Nº11190553, y a la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Beca Postgrado PUCV 2021.

Referencias

Amaya, T., Pino-Fan, L., y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *RELIME, 28*(3), 111-144.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bommel, J., Randahl, A., Liljekvist, Y., y Ruthven, K. (2020). Tracing teachers' transformation of knowledge in social media. *Teaching and Teacher Education, 87*, 102958.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Hasery M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: CERME.

Escudero, I. M., Gavilán, J. M., y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *RELIME, 17*(1), 7-32.

Espejo R., González-Suárez, J. M. (2015). Aprendizaje transformativo y programas de investigación en el desarrollo docente universitario. *REDU - Revista de Docencia Universitaria, 13*(3), 309-330.

Mezirow, J. (1991). *Transformative dimensions of adult learning*. San Francisco: Jossey-Bass.

Milena, S., Santa, Z., y Jaramillo, C. (2019). Transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico. En Y. Morales-López, y A. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas* (pp. 987-995). Editorial tecnológica de Costa Rica

MINEDUC (2021). Marco para la Buena Enseñanza. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

Pepin, B., Gueudet, G., y Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: A collective perspective on resources, their use and transformation. *ZDM*, *45*(7), 929-943.

Porras, J., y Silvers, R. (1991). Organization development and transformation. *Annual Review of Psychology, 42*(1), 51-78.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255–281.

Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*. Santiago de Cali: Editorial UNIVALLE.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Silverman, J., y Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 499-511.

Tallman, M. (2021). Investigating the transformation of a secondary teacher's knowledge of trigonometric functions. *Journal of Mathematical Behavior, 29.*

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., y Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias,36*(2), 105-123

RUTINAS MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN INICIAL DOCENTE: UN APORTE A LA CONSTRUCCIÓN DE SENTIDO DISCIPLINAR

Marco Catalán, Monika Dockendorff

Pontificia Universidad Católica de Chile

Desde el punto de vista de la construcción de sentido disciplinar propia de cada área del conocimiento, la formación inicial docente requiere la incorporación de estrategias de enseñanza que permitan a los formadores contar con un lenguaje común, que permita el modelaje de acciones propias de una docencia de alto nivel, alineada con estándares de formación de vanguardia y que en particular realce las características específicas de la disciplina en cuestión. En el contexto del modelo formativo de las Pedagogías UC, se han identificado "rutinas matemáticas" que permiten, entre otras acciones, afianzar, deducir, estimar, traducir, relacionar, generalizar, interpretar y demostrar, las que en su conjunto permiten lograr una mayor comprensión conceptual de la disciplina. Se espera que la propuesta constituya la base de la construcción de insumos, que permitan caracterizar de mejor forma los desempeños de los docentes, tanto en formación inicial como en su ejercicio profesional en aula.

Formación inicial docente, sentido disciplinar, rutinas matemáticas, prácticas docentes.

INTRODUCCIÓN

El modelo formativo de las Pedagogías UC cuenta con dos ejes fundamentales que cumplen el propósito de desarrollar una visión y un lenguaje común para la formación de profesores: las *prácticas generativas* (Ball & Forzani, 2011) como foco de la formación y una aproximación paulatina a experiencias de enseñanza intencionadas a través de las *pedagogías de la práctica* (Grossman et al., 2009); estas se despliegan en un ciclo que contempla la observación, el registro, el ensayo, la puesta en acto y la reflexión de parte del profesor en formación. En particular, las 19 prácticas generativas (PG) del modelo, que en su dimensión de lenguaje común deben ser identificables, nombrables, enseñables y evaluables, constituyendo un repertorio de capacidades fundamentales para la enseñanza, se pueden organizar de acuerdo al área de la formación docente a la que responden (Müller & García, 2016); para este trabajo, el foco estará en la PG4, definida como *establecer normas y rutinas para el discurso de la sala de clase que sean centrales para el dominio estudiado* (Müller & García, 2016), y perteneciente a la familia de prácticas denominada *interacciones para el aprendizaje*. Dado que esta es una práctica propia de cada disciplina, es específica a la enseñanza y el aprendizaje de esta y sus particularidades, lo cual hace que no se encuentre detallada y descompuesta en el modelo y por lo tanto las pautas y rúbricas de evaluación no la contemplan. Lo anterior genera un vacío y un problema al intentar desarrollar, promover y evaluar prácticas nucleares de la disciplina que no han sido descritas y para las cuales no se cuenta con un lenguaje común; esto ha tenido como consecuencia la asociación más bien forzada de ciertas prácticas propias de la enseñanza de la matemática a la PG1, la cual se vincula tangencialmente con la *explicitación del contenido*. Así, se ha definido como objetivo de este trabajo la incorporación de un mecanismo de

observación de desempeños específicos en formación inicial docente, vinculados particularmente con la construcción de sentido disciplinar y que propician la presencia de la PG4 como una práctica que rescata aspectos clave del ejercicio docente por disciplina.

ANTECEDENTES

Uno de los aspectos fundamentales que motivan el abordaje de la problemática descrita anteriormente, corresponde a la construcción de sentido disciplinar, idea que se vincula directamente con la construcción del conocimiento matemático (Resendes & Dobbie, 2017), noción que a su vez forma parte de las propuestas de enseñanza de la disciplina por competencias (Niss et al., 2017; OECD, 2019), la construcción de una sólida base de conocimiento disciplinar (Adler & Venkat, 2020), y la presencia de estándares de formación inicial disciplinares (CPEIP, 2021). Entendiendo que son los docentes los llamados a conducir a sus estudiantes a niveles superiores en la comprensión de la disciplina, en particular desde la adquisición de ciertos conocimientos y habilidades nucleares, se espera que al menos, motiven a sus estudiantes en términos de la importancia que poseen los distintos tópicos disciplinares a lo largo del tiempo y en una amplia gama de contextos, y evidencien un dominio de las actitudes asociadas al contenido disciplinar manifestado a través de la explicitación del contenido (ligado por tanto a la PG1 ya mencionada).

Si bien ambas acciones están vinculadas con la PG4 ya expuesta, en tanto buscan *dar sentido* a lo que es propio de la disciplina, la primera de ellas representa aquellas actitudes que van en la línea de mostrar a los estudiantes la presencia y aplicación de la disciplina en situaciones reales y cercanas, la aparición concreta y plausible de conceptos matemáticos contextualizados y la respuesta a la interrogante *¿Y esto, para qué me sirve?* Que enfrentan los docentes. La segunda, en cambio, pone el foco en la valoración que se hace de la disciplina de parte del docente (*¿Por qué/Para qué hacemos esto en matemática?*), que trasciende a la que los estudiantes podrán hacer, lo cual complementa el dominio de la disciplina que el docente puede exhibir. A pesar de que ambas acciones tienen una alta relevancia para el logro de los aprendizajes de parte de los estudiantes, en particular la segunda constituye el centro de la formación de un docente, mientras que la primera se puede entender como una consecuencia de haber fortalecido y respaldado la importancia de la disciplina desde su sentido disciplinar. De este modo, parece importante trabajar y fortalecer la segunda de tales acciones, la cual invita a que el docente modele una serie de rutinas que acompañan la explicitación de los contenidos y que son específicas de estos, distinguiendo y caracterizando aquellos elementos que forman parte de lo que se considera fundamental para el desarrollo de la matemática, así como también favoreciendo que los estudiantes alcancen niveles superiores de comprensión en la disciplina. Es relevante destacar el hecho de que se busque abordar y concebir la PG4 desde la perspectiva descrita, debido a que dentro del modelo formativo no existen oportunidades directas para trabajarla, a pesar de que se pueda conectar con la PG1 o se pueda proyectar su presencia en cursos como Didáctica.

En síntesis y considerando que la descripción del problema y los antecedentes expuestos dejan de manifiesto la necesidad de realzar la importancia de la construcción del sentido disciplinar anidado en la PG4, se propone identificar y caracterizar ciertas rutinas que posteriormente darán lugar a indicadores para esta práctica generativa, tanto para el ámbito de la enseñanza como el aprendizaje, que sean

característicos de la construcción del sentido matemático en educación media. Así, se espera identificar rutinas que permitan, por ejemplo, afianzar, deducir, estimar, traducir, relacionar, generalizar, interpretar y demostrar, las rutinas que tributen al logro del objetivo principal, que es la construcción del sentido disciplinar, evitando así, entre otras cosas, la aplicación mecánica y memorística de algoritmos, fórmulas y teoremas. Se entenderá por *rutinas matemáticas* aquellas habilidades y actitudes propias de la construcción de conocimiento matemático profundo que se espera exhiban los docentes, a fin de promover el desarrollo de un sentido disciplinar en los estudiantes que supere un aprendizaje superficial, principalmente procedimental y abra espacio a la comprensión conceptual de la matemática (NCTM, 2015). Estas rutinas matemáticas entonces son "rutinarias" en el sentido de que son prácticas comunes al quehacer docente del profesor de la asignatura, pero complejas y de naturaleza matemática en tanto permiten lograr niveles superiores de comprensión en la disciplina.

METODOLOGÍA

La metodología escogida para el desarrollo de la investigación corresponde a una de carácter cualitativo (Denzin & Lincoln, 2018), con foco en el análisis documental (Bowen, 2009). En ese sentido, el trabajo se ha basado en la revisión bibliográfica de antecedentes en el ámbito de la enseñanza de la disciplina, de criterios o estándares para una docencia efectiva (NCTM, 2000), de pautas de observación de clase para la disciplina (Vásquez et al., 2020), y de la evaluación de desempeños docentes en la disciplina, así como en la experiencia de los autores como profesores de aula y formadores de profesores; en efecto, en este último escenario se consideró el análisis de planificaciones y observaciones de clases de profesores en formación, insumos que se han sistematizado y han permitido levantar las rutinas ya citadas. Adicionalmente, se contempla la incorporación de otros agentes (formadores, profesores en formación, expertos, etc) en fases posteriores del proyecto (elaboración y validación de indicadores que describan los desempeños asociados a la PG4 y construcción y validación de pauta de observación que tribute a los indicadores), con el resguardo ético que esto podría implicar.

RESULTADOS

El proceso ha llevado a detectar aquellas rutinas matemáticas que representan las expectativas que se tienen de una docencia de alto nivel, acorde a estándares pedagógicos y disciplinares actualizados, promotora del sentido disciplinar a través del discurso y del modelamiento permanente, facilitadora de aprendizajes más profundos, etc.

La tabla 1 presenta algunos ejemplos de la propuesta de rutinas matemáticas identificadas, caracterizadas con el nombre (denominación de la rutina matemática, usando un término idealmente propio de la disciplina), la dimensión de enseñanza (D.E: modelamiento por parte del docente), la dimensión de aprendizaje (D.A: manifestación en el estudiante) y ejemplos (EJ: contenido y/o contexto disciplinar en el cual se puede observar y poner en práctica). Como se puede observar, la propuesta busca incorporar, fortalecer e integrar aquellos aspectos que parecen fundamentales para el logro de aprendizajes profundos y el desarrollo de habilidades propias de la disciplina. En esa línea en particular, es posible hacer una valoración importante frente a la incorporación de la PG4 en el modelo formativo ya expuesto, desde el punto de vista del modelaje del formador, entendiendo que las rutinas identificadas podrán ser modeladas por este y observadas por los profesores en formación, permitiendo así una mejor interiorización de los

saberes en formación inicial, junto con una nueva mirada del rol de modelo de desempeños específicos que adopta el formador. Por otra parte, un contraste preliminar con los nuevos estándares obligatorios para la formación inicial permite distinguir una coherencia entre la propuesta de rutinas y tales estándares, los cuales invitan a que prime una docencia centrada en el desarrollo de capacidades matemáticas por sobre una adquisición de contenidos curriculares; en ese sentido, la propuesta de rutinas es un complemento interesante para la implementación de una formación inicial en sintonía con los nuevos estándares.

Demostrar/probar	***Traducir entre registros***	***Verificar/corroborar***	***Explorar/conjeturar***
D.E. Se espera que el docente modele el proceso de demostración de un teorema, propiedad, igualdad, etc, explicitando la manera en que se enfrenta, las decisiones que se toman, las estrategias y herramientas que se aplican, etc.	D.E. Se espera que el docente realce la importancia de trabajar con múltiples representaciones o registros, a partir de la utilidad que posee el "moverse" entre uno u otro, a lo cual subyace en rigor la conexión entre registros de distinta naturaleza.	D.E. Se espera que el docente promueva la verificación de los resultados obtenidos durante y al finalizar un proceso de trabajo algebraico, valorando la autonomía y confianza que genera en quien resuelve, así como también el nivel de comprensión subyacente.	D.E. Se espera que el docente destaque la importancia que tiene la exploración para la deducción de propiedades o teoremas, mediante el uso de herramientas o recursos (tanto concretos como digitales) que favorezcan la exploración intuitiva de los fenómenos.
D.A. Se espera que el estudiante, en una primera instancia, replique las acciones mencionadas, a fin de asimilarlas y hacerlas propias, para luego extender la ejecución de tales acciones a otros casos, desarrollando un modo de pensamiento o razonamiento (deductivo o inductivo).	D.A. Se espera que el estudiante valore la información que entregan los distintos tipos de representaciones, en pos de lograr un mayor nivel de comprensión de los conceptos o nociones involucradas, fortalecido por las conexiones que se generan entre concepto y representaciones.	D.A. Se espera que el estudiante, como una consecuencia de comprender el significado del resultado, aplique la rutina, desarrollando así su capacidad de manipulación algebraica y su nivel de comprensión de conceptos clave asociados (igualdad, equivalencia, sustitución, etc).	D.A. Se espera que el estudiante recurra a la indagación intuitiva y experimental que precede al levantamiento de un posible resultado, lo cual le permita tener una idea previa de lo que busca obtener, pero a su vez registrar o explicitar aquel intento inicial, a fin de contrastar una vez que termine el proceso.
EJ. Propiedades de logaritmos, suma de los primeros "n" cuadrados, fórmula cuadrática, Teorema de Pitágoras.	EJ. Cuadrado de binomio (alg/visual), función cuadrática (alg/gráfico), fracción (numérico/visual).	EJ. Resolución de ecuaciones (verificación del resultado o identificación de un error en algún paso).	EJ. Volumen de cuerpos geométricos (llenado con agua), Teorema de Pitágoras (experimentación vía Geogebra).

Tabla 1: Ejemplos de rutinas matemáticas

CONCLUSIONES

Este trabajo ha buscado ilustrar una vía para incorporar desempeños específicos de la disciplina en formación inicial docente, explicitando la manera en que docentes y estudiantes incorporan rutinas matemáticas en su quehacer habitual. Se espera que la propuesta contribuya a la comunidad educativa matemática, particularmente a los programas de formación inicial docente, ubicando al formador como

modelo para los profesores en formación, acercando la formación inicial a estándares de excelencia y abordando el sentido disciplinar como un componente central, facilitando la construcción de un lenguaje común didáctico-disciplinar que genere una mayor cohesión entre tales dimensiones en el profesor en formación. En concreto, se proyecta que la futura propuesta de indicadores y de una pauta de observación que tribute a las rutinas matemáticas identificadas (las cuales, a su vez, surgen del modelo formativo de las Pedagogías UC), forme parte del repertorio de insumos disponibles para la comunidad educativa, lo cual respondería a la necesidad de instrumentos especializados. Por su parte, se destaca la relevancia que puede tener un alineamiento entre la propuesta y los nuevos estándares de formación inicial, considerando que ambos buscan promover una mirada de la docencia más especializada y analítica, lo cual fortalece la caracterización didáctica de los docentes de acuerdo con sus disciplinas y una apropiación mayor del rol social que posee cada área del conocimiento.

Referencias

Adler, J., & Venkat, H. (2020). Subject Matter Knowledge within "Mathematical Knowledge for Teaching". En Lerman S. (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Cham: Springer.

Ball, D. L., & Forzani, F. M. (2011). Building a Common Core for Learning to Teach: And Connecting Professional Learning to Practice. *American Educator, 35*(2), 17-21.

Bowen, G. A. (2009). Document Analysis as a Qualitative Research Method. *Qualitative Research Journal*, 9(2), 27-40.

CPEIP. (2021). Estándares de la profesión docente carreras de educación media: pedagogía en matemática. *Centro de perfeccionamiento, experimentación e investigaciones pedagógicas*.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Eds.). (2018). *The SAGE Handbook of Qualitative Research (5th ed.)*. SAGE Publications Ltd.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E., & Williamson, P. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record, 111*(9), 2055-2100.

Müller, M., & García, M. (Eds.). (2016). *Manual Sistema de Prácticas, Facultad de Educación UC*. Santiago, Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático de todos.* Reston: NCTM.

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J.A. (2017). Conceptualisation of the Role of Competencies, Knowing and Knowledge in Mathematics Education Research. En Kaiser G. (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 235–248). Cham: Springer.

OECD (2019). PISA 2018 Assessment and Analytical Framework. Recuperado de https://doi.org/10.1787/b25efab8-en.

Resendes, M., & Dobbie, K. (2017). *Knowledge Building Gallery: Teaching for Deep Understanding and Community Knowledge Creation*. D. Maika, E. Hine, L. Ma, E. Heaver, & L. White (Eds.). Recuperado de https://thelearningexchange.ca/wp-content/uploads/2017/04/Knowledge-Building-Booklet-Accessible-1.pdf.

Vásquez, C. A., Alsina, Á., Pincheira, N. G., Gea, M. M., & Chandia, E. (2020). Construcción y validación de un instrumento de observación de clases de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(2), 25-43.

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA: EL POLÍGONO DIDÁCTICO

Carlos Mometti

Facultad de Educación, Universidad de São Paulo, Brasil

En este trabajo, presentamos una propuesta de camino metodológico dirigido a los profesores de Educación Primaria en lo que respecta a la Educación Matemática. Tal propuesta, según las premisas teóricas adoptadas por el trabajo, se ancla en un modelo didáctico reformulado basado en la integración entre los planteamientos teóricos de Brousseau (2008), Chevallard (1991) y Mometti (2021), remodelando para una concepción poligonal de interpretación didáctica. De esta forma, buscamos presentar una propuesta que se encuentra en desarrollo y que toma como contexto la necesidad de repensar la práctica docente en la llamada humanidad digital.

Educación Matemática, Metodología de la Enseñanza, Didáctica, Humanidad Digital.

INTRODUCCIÓN

Cada año, la Educación Matemática está obteniendo nuevos aportes en lo que respecta a los estudios de las metodologías de enseñanza. Además, estos estudios se orientan mayoritariamente hacia el uso de recursos y formas de significado por parte del alumno, dejando a menudo de lado el aspecto relativo a la formación del profesorado.

En este sentido, con este trabajo, buscamos presentar una propuesta metodológica para la formación del profesorado a través de la consideración de una estructura didáctica aquí nombrada por polígono didáctico. Esta propuesta parte de la integración teórica entre las consideraciones didácticas lanzadas por Brousseau (2008) sobre la Teoría de las Situaciones Didácticas, el camino epistemológico guiado por Chevallard (1991) sobre Transposición Didáctica, y el concepto de humanidad digital discutido por Mometti (2021).

MARCO TEÓRICO

Metodología per la enseñanza

Uno de los temas más destacados y relevantes en el campo pedagógico es el de la metodología de la enseñanza. En un mundo segmentado epistemológicamente, como el que hemos experimentado desde mediados del siglo XVIII a través de las transformaciones ilustradas desatadas en la Francia republicana, tener un método para desarrollar cualquier conocimiento se ha convertido en el meollo de lo que se entiende por validación científica.

Según Abbagnano (2018, p.780), el término método proviene del latín *methodus* y tiene dos significados: (a) investigación o guía de investigación y (b) técnica particular o conjunto de ellas. En el primer sentido,

según el autor citado, podemos encontrar validación científica para un área de conocimiento o conocimiento generalizado, convirtiéndose en una doctrina epistemológica. Respecto al segundo significado, lo caracterizamos por un conocimiento específico que opera en el sentido de obtener algo en específico, como el proceso metafísico desarrollado por Descartes en sus *Meditaciones* y, posteriormente, asumido por las Matemáticas a partir del siglo XVII.

Así, en una primera aproximación, debemos establecer qué entendemos por método en la propuesta que aquí se presenta. Siguiendo la perspectiva adicional dada por Abbagnano (2018), consideraremos, por método de enseñanza, el conjunto de técnicas organizadas entre sí, de manera coherente, con el fin de garantizar un objetivo que sigue los órdenes (i) cognitivo, (ii) psicológico y (iii) epistémico. Así, se observa en la proposición anterior que el carácter del método asumido es aquel en el que se considera un conjunto de técnicas específicas para desarrollar algo, es decir, es intencional. En este caso, la intención del método es el aprendizaje del alumno.

Cabe señalar, sin embargo, que tomar esta perspectiva como una metodología de enseñanza no implica el establecimiento de una doctrina a posteriori, como se observó en Brasil, por ejemplo, durante la década de 1970, a través del movimiento *constructivista*. No debemos asumir un método de enseñanza como una prioridad para todos los estudiantes, ya que como su propia definición indica hay un orden psicológico que debe ser considerado, es decir, cada estudiante es un ser completamente individual, con sus propias características ontológicas.

Además, según Astolfi y Develay (2012), un método de enseñanza definirá una metodología de enseñanza para un área de conocimiento, como las Matemáticas, por ejemplo, al considerar los siguientes aspectos: (i) epistemológico, (ii) didáctico, (iii) psicológico y (iv) operativo. Con el primero se establece que existe un conjunto de conocimientos que deben ser considerados y que son específicos para lo que consideramos dentro de esta metodología. En lo que se refiere a la didáctica, se refiere a la interpretación que se le dará al estudiante de conocimiento *puro*, la cual se puede lograr mediante el uso de lenguajes imaginarios, sonoros y de escritura. El tercer aspecto, psicológico, concierne no solo al comportamiento del alumno sometido a dicha metodología, sino también al producto social que se obtendrá como resultado de esta. Finalmente, el cuarto aspecto es la logística involucrada en el desarrollo de las técnicas consideradas.

Así, considerando el área en debate, Educación Matemática, tendremos una metodología de enseñanza cuando los cuatro factores mencionados se contemplen en una cadena de técnicas organizadas entre sí de manera coherente. Así, lo que proponen Brousseau (2008), Chevallard (1991) y Camarena (1995) no es una metodología para la enseñanza de las Matemáticas, sino un modelo didáctico para interpretar el trabajo pedagógico. En cierto modo, podemos decir, como segunda aproximación, que la didáctica se traduce, en un sentido no *commeniano*, como la interpretación de lo que se debe enseñar, mientras que la metodología es la técnica en sí misma para enseñar.

PROCEDIMIENTOS

La propuesta didáctica: el polígono didáctico

Como se mencionó anteriormente, en este trabajo consideramos una interpretación didáctica del conjunto de aspectos didácticos de los docentes que influyen en su práctica pedagógica, es decir, su labor pedagógica en el aula. En este sentido, para proponer un enfoque metodológico de la formación del profesorado, como se establece en el objetivo de este trabajo, necesitamos anclar nuestras ideas en un *modelo didáctico*.

Inicialmente, podríamos considerar los supuestos didácticos de la Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1996, p. 49), que en términos generales establece que toda situación didáctica - entendida aquí como un proceso de enseñanza y muchas veces interpretada por la clásica relación triangular profesor-alumno-conocimiento: contiene algo intencional y el deseo del maestro. Al respecto, Brousseau (1996) no preveía la intensificación del desarrollo tecnológico, así como la incorporación, según Mometti (2021), de la denominada Educación 4.0, producto de la industria 4.0.

Asimismo, Chevallard (1991) propone un modelo para interpretar los aspectos epistémicos esenciales en la transposición del conocimiento puro (conocimiento sabio) al conocimiento adquirido por el estudiante (conocimiento enseñado). Para este autor, además, el docente es el puente necesario para el desplazamiento del conocimiento del entorno en el que se produce a su circulación en forma de aprendizaje.

Además de estos dos enfoques teóricos mencionados, destacamos un tercero, de suma importancia para el desarrollo de la propuesta didáctica del polígono, objeto de este trabajo. Esta perspectiva la da Mometti (2021), que se caracteriza por los aspectos pedagógicos de la humanidad digital. También según el autor, los estudiantes del siglo XXI se caracterizan por la inmersión total en un mundo virtualizado, construyendo sus relaciones y estableciendo su comportamiento a través de intercambios digitales. De esta manera, se establece una nueva ontología para nuestros estudiantes, ya que su forma de ser y estar en el mundo ahora depende de los aspectos digitales.

Sin embargo, si tenemos una humanidad digital formada por estudiantes digitales e inmersos en un mundo virtualizado, esos modelos didácticos antes mencionados ya no contemplan una metodología para la enseñanza de las Matemáticas que considere al estudiante como vive en el mundo. Como demostrará la investigación futura, el estudiante de hoy no es el mismo estudiante de finales del siglo XX. Al igual que el estudiante de principios de la década de 2000, en el *boom* de Internet, no es el mismo estudiante de las redes sociales y la era de los *likes* de hoy.

Dado lo anterior, proponemos una nueva interpretación didáctica basada en la combinación de los tres enfoques teóricos mencionados anteriormente, que ya hemos anunciado por polígono didáctico. En la figura 1 expuesta más abajo, a continuación, representamos la presente propuesta.

En él tenemos un polígono, con cada uno de los vértices caracterizando un eje, que debe ser considerado en la nueva didáctica digital del docente. Si miramos de cerca la figura, veremos una superposición de las teorías de Brousseau (2008) y Chevallard (1991), con las concepciones de Educación 4.0 discutidas por Mometti (2021).

En el centro del polígono tenemos el aprendizaje, mediado por la llamada acción didáctica. La acción didáctica es la acción real del docente dentro del campo didáctico, caracterizando la denominada metodología de enseñanza. Finalmente, cabe señalar que la propuesta didáctica del polígono es una interpretación didáctica aún en construcción y que toma como presupuesto epistemológico los desafíos que nos ha dado la posmodernidad.

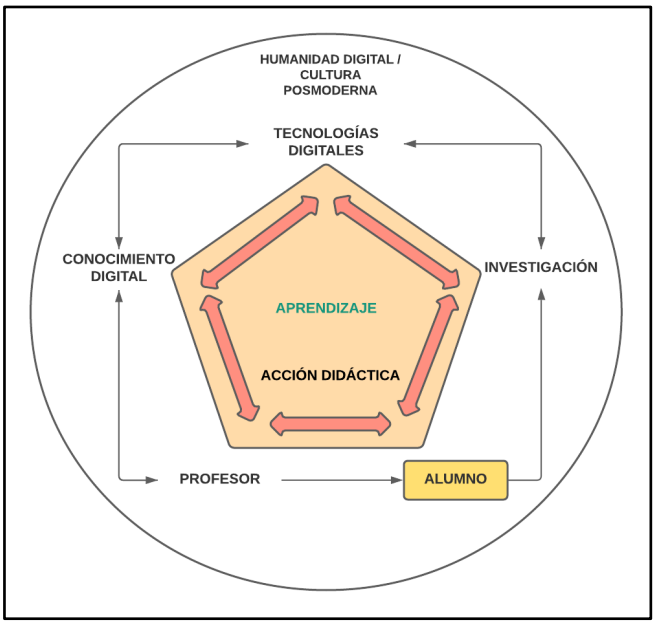


Figura 1: El polígono didáctico. Fuente: el autor.

El polígono didáctico e la formación del profesorado

A partir de la propuesta de polígono didáctico presentada, podríamos preguntarnos: ¿cuál es su contribución al desarrollo de una metodología de enseñanza? En un primer momento, asumimos para este trabajo que, para tener una metodología, entendida como un conjunto de prácticas, debemos tener cubiertos los aspectos (i) epistemológicos, (ii) didácticos, (iii) psicológicos y (iv) operativos. En este sentido, la figura 2 propone un camino metodológico para la formación de docentes a partir de los vértices del polígono didáctico de la figura 1, así como de la interrelación entre ellos.

Como se muestra en la Figura 2 a continuación, para cada aspecto necesario para definir una metodología, tenemos un hecho asociado para el desarrollo de una práctica, es decir, un modus operandi sobre el rol del docente. Así, por ejemplo, cuando consideramos el aspecto epistemológico, lo asociamos con el conjunto de conocimientos que se debe trabajar, junto con el aspecto didáctico, resaltado aquí por el lenguaje y uso de los recursos digitales.

Vale la pena señalar, además, que el paso a paso para describir una metodología varía de un maestro a otro. Sin embargo, durante el proceso de formación continua de los profesores de Matemáticas, por ejemplo para Educación Primaria, se recomienda lo siguiente: (a) Definir el cuerpo de aspectos epistemológicos (conocimientos), (b) establecer estándares para el lenguaje que se utilizará durante el trabajo, (c) delimitar qué elementos psicológicos serán deseados durante y después de la clase

desarrollada, (d) construir un pensamiento socioemocional interconectado con el uso potencial de las tecnologías de la información y la comunicación y, finalmente, (e) personificar el proceso de enseñanza a través de la hibridación, es decir, dotar al alumno de autonomía para construir sus propios conocimientos.

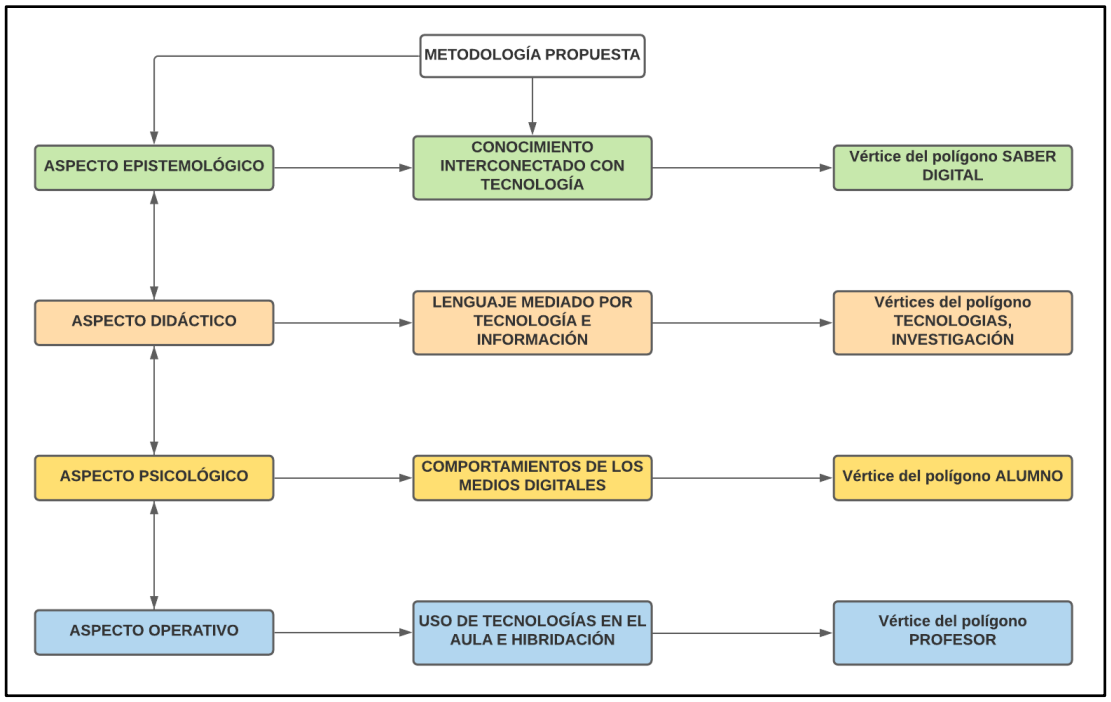


Figura 2: Metodología propuesta. Fuente: el autor.

CONCLUSIONES

La propuesta presentada en este trabajo buscó contemplar todos los aspectos inherentes a una metodología de enseñanza, considerando la didáctica como un área complementaria de la metodología. Con respecto a la Educación Matemática, la propuesta buscó construir enfoques metodológicos para la formación de docentes de Educación Primaria, como se presenta en el ítem anterior.

Referencias

Abbagnano, N. (2018). Dicionário de Filosofia. 2 ed. São Paulo: Editora Martins Fontes.

Astolfi, J. P e Develay, M. (2012). A didática das ciências. Campinas: Papirus.

Brousseau, G. (2008). Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bógea. São Paulo: Ática.

Camarena, G. P. (1995). La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.

Chevallard, Y. (1991). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensee Sauvage Éditions.

Mometti, C. (2021). O saber necessário à prática docente na humanidade digital. *Revista De Educação Matemática*, *18*, e021010. https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id482.

ESTUDIO DE CASO PEDAGÓGICO EN LA ASIGNATURA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA PARA LA ENSEÑANZA MEDIA EN LA FORMACIÓN DISCIPLINAR DE LA CARRERA PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS

Natalia Pérez Cabrera[1], Marianela Castillo Fernández[1], Eugenio Chandía Muñoz[2],

Jorge Cid Anguita[1], Víctor Jara Sánchez[1], Salvador Alarcón Godoy[1]

[1] Escuela de Educación. Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles.

[2] Facultad de Educación. Universidad de Concepción, Campus Concepción.

En el presente trabajo se muestra el avance de una parte del proyecto de docencia de la Universidad de Concepción, denominado "Estudio de Casos Pedagógicos en las asignaturas del Eje de Formación Disciplinar de la carrera de Pedagogía en Matemática". Ejecutado por un grupo de académicos de la carrera, que tienen como propósito vincular los ejes de formación práctica y disciplinar mediante la metodología de estudio de caso pedagógico, utilizando casos obtenidos en las observaciones realizadas en periodos anteriores en la inserción temprana de estudiantes de la misma carrera. En el marco de las asignaturas del eje de formación práctica, se elaboró un caso pedagógico acorde a los resultados de aprendizaje de la asignatura "Enseñanza y aprendizaje del de la geometría para la enseñanza media", que fue presentado a los estudiantes de pedagogía de tercer año de formación durante el primer semestre de 2021.

Estudio de caso pedagógico, formación inicial docente, inserción temprana, enseñanza y aprendizaje de la geometría

INTRODUCCIÓN

El proyecto de investigación se genera a partir del Proyecto de Docencia Colabora C21-001, denominado "Estudio de Casos Pedagógicos en las asignaturas del Eje de Formación Disciplinar de la carrera de Pedagogía en Matemática". En el marco del Proyecto de Docencia, se crean casos pedagógicos a partir de las observaciones realizadas a los y las estudiantes de las asignaturas del Eje de Formación Práctica en su inserción al sistema a educativo, que luego fueron utilizados como estrategia didáctica en dos asignaturas del Eje de Formación Didáctico Disciplinar.

Centrándonos en la formación del eje de geometría, según la investigación de Clemente, Llinares & Torregrosa (2017), los resultados indican que los futuros profesores y profesoras de matemática deben llegar a conocer la geometría en el ámbito curricular de la educación primaria, de forma que les permita ir más allá de simplemente reconocer propiedades y hechos geométricos en las figuras geométricas. Más

aún, de acuerdo con Martín (2015) el problema de la calidad de los aprendizajes (con gran fuerza en la educación superior), precisa de una atención más profunda y centrada en todos los actores del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Sobre todo, si consideramos lo mencionado por Arata y Rodríguez-Ponce (2009), la calidad en la Educación Superior es un concepto de constantes cambios, de múltiples dimensiones y niveles, que vincula los elementos contextuales de un proyecto educacional y sus objetivos, con los logros reales a nivel institucional o de programas (consistencia interna), teniendo en consideración los estándares propios del sistema en que opera la institución (consistencia externa). Por ende, la calidad se configura como una herramienta de gestión, que puede hacer una contribución eficaz para mejorar el desempeño a nivel institucional o a nivel curricular o departamental dentro de una institución (Doherty, 2008), de esta forma, la calidad es un ente catalizador en las instituciones de educación superior que optimiza y mejora los procesos, procurando y resguardando la formación académica de sus estudiantes.

Por lo expuesto anteriormente, es que el proyecto que aquí se expone consiste en utilizar la estrategia de estudio de caso en la asignatura de "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría para Enseñanza Media", considerando casos escritos a partir de las observaciones realizadas a los y las estudiantes de las asignaturas del Eje de Formación Práctica en su inserción en el sistema a educativo entre los años 2018 y 2020.

El estudio de caso (en este trabajo le llamaremos estudio de caso pedagógico) como metodología de enseñanza,

> consiste en presentar un problema real (o al menos verosímil) de alguna disciplina en particular, para que los estudiantes discutan acerca del tema, reconozcan dificultades, propongan soluciones y, finalmente, entreguen un informe con el análisis de la situación y sus posibles soluciones. (Reyes, 2011, pág. 25)

Dado que es la primera vez que se utiliza la metodología de estudio de caso en la carrera de Pedagogía en Matemáticas, Campus Los Ángeles, es necesario dar respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué elementos del caso pedagógico pueden identificar los y las estudiantes de la carrera?
2. ¿De qué forma los y las estudiantes dan respuesta a los conflictos presentados en el caso pedagógico?
3. ¿Cuán identificados se sienten los y las estudiantes con el caso presentado?
4. ¿Qué tan efectiva es la experiencia pedagógica para lograr los resultados de aprendizaje en las asignaturas mencionadas del eje de formación didáctico – disciplinar?

Con el proyecto se espera que las y los estudiantes sometidos a la estrategia, se sientan identificados(as) plenamente con los casos presentados, dado que han sido obtenidos de experiencias reales de estudiantes de la misma carrera y que, por lo tanto, han recibido una formación similar. Además de ser expuestos diferentes elementos en el caso pedagógico que han sido abordados previamente en los contenidos de la asignatura.

OBJETIVOS

El objetivo general de la investigación es:

- Evaluar la implementación del estudio de caso pedagógico como estrategia de enseñanza en la formación inicial de profesores de Matemática de Educación Media en la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría para la enseñanza Media, con el fin de mejorar el proceso formativo en esta área.

Los objetivos específicos son:

1. Caracterizar los elementos del caso pedagógico identificados por los y las estudiantes.
2. Caracterizar las formas en que los y las estudiantes dan respuesta al caso pedagógico.
3. Explorar el nivel de cercanía que los y las estudiantes perciben con el caso pedagógico como profesor en formación.
4. Explorar la percepción de los y las estudiantes sobre la efectividad de la estrategia pedagógica, para el logro de los resultados de aprendizaje de la asignatura.

METODOLOGÍA

La investigación corresponde a un estudio cualitativo, exploratorio y descriptivo.

Los participantes del estudio son los y las estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas de la Universidad de Concepción Campus Los Ángeles, que cursaron la asignatura "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría para la Enseñanza Media" durante el primer semestre de 2021.

La información se recopila considerando dos fuentes de recopilación:

- Primera fuente de información: Corresponde a los trabajos, informes y evaluaciones realizados por los y las estudiantes en el marco de la asignatura "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría para la Enseñanza Media". Esta fuente de información corresponde a documentos y registros elaborados por razones académicas, a priori, y no con fines de esta investigación (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010). Con esta fuente se recopilará información sobre los elementos de los casos pedagógicos identificados por los y las estudiantes y las formas en que dan respuesta a los casos pedagógicos (objetivos específicos 1 y 2).
- Segunda fuente de información: Grupo focal con los y las estudiantes que participaron de la estrategia de estudio de caso pedagógico. En este grupo focal se recopilará información sobre el nivel de cercanía que los y las estudiantes perciben con los casos pedagógicos y sobre la percepción de efectividad de la estrategia pedagógica para el logro de los resultados de aprendizaje de las asignaturas del eje didáctico – disciplinar (objetivos específicos 3 y 4).

RESULTADOS

Para crear el caso pedagógico, se utiliza una situación pedagógica referida principalmente a errores matemáticos y metodológicos cometidos por los estudiantes durante sus prácticas de inserción temprana, en temáticas relacionadas con el Teorema de Pitágoras, Volumen- Área de cono y cilindro, Unidades de Medida, entre otros. Se presta atención, además, a obstáculos asociados desde la perspectiva del estudiante de pedagogía durante sus prácticas de inserción temprana, como también aquellos que se presentan por parte de las y los estudiantes de enseñanza media, considerando todos aquellos elementos

mediacionales, emocionales, interaccionales, entro otros que se desencadenan del proceso y contexto educativo.

De forma preliminar, se puede destacar que la recepción de la estrategia de estudio de caso por parte de los y las estudiantes fue de bastante interés, al considerar un caso que contiene elementos que los hace relacionar tanto el contenido con la práctica; además de exponerse en el caso pedagógico, un contexto que considera diferentes elementos que previamente han tenido compañeros de la misma carrera, lo cual es una situación en la que algunos(as) están prontos a vivir como también hay otros(as) que ya se encuentran experimentando en las asignaturas de prácticas.

Las respuestas generadas por las y los estudiantes que cursan la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, presentan elementos interesantes de analizar, al ser un curso que si bien es para estudiantes de tercer año de carrera, está compuesto por estudiantes de otros niveles, ya sea que han adelantado la asignatura, como otros que la habían postergado; por ende, la forma de estos en cuanto a perspectiva, cercanía y sutileza según abordan el caso pedagógico, da pie a otras investigaciones como generar nuevos casos que pueden ser analizados tanto por el eje de formación práctica como disciplinar.

Dentro de las evidencias recolectadas, se encuentra la grabación de un video con mejoras a las observaciones del caso pedagógico, lo que les permite también obtener una propia mirada de cómo ellos se enfrentan a las situaciones planteadas y puedan reflexionar sobre cómo realizan sus propias prácticas pedagógicas.

CONCLUSIONES

El Estudio de Situaciones Pedagógicas en las asignaturas del Eje de Formación Disciplinar, permite que los y las estudiantes logren desarrollar las competencias necesarias para alcanzar los Estándares de formación Pedagógica que propone el Ministerio de Educación y logremos así formar a las y los profesores que el Sistema Educativo necesita.

Además, la información documentada en las actividades desarrolladas durante la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje para la Enseñanza Media nos permite evaluar el resultado de la implementación del estudio de caso pedagógico aplicada por primera vez en el curso de la asignatura; considerando todos aquellos elementos que resultaron efectivos como también los que se pueden mejorar en otras aplicaciones de casos futuros e ir en una mejora constante en el proceso formativo de esta área.

También es importante la auto reflexión sobre la práctica docente, que permite a los y las estudiantes tener una perspectiva de su formación con una mirada crítica, que a su vez les hace consciente de su propio aprendizaje y de los avances en su formación.

Agradecimientos

Como equipo agradecemos a la Dirección de Docencia de la Universidad de Concepción por la oportunidad de realizar un estudio de caso aplicado en una asignatura del eje disciplinar en la formación de profesores de matemática y poder ser un aporte en el ámbito de la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría para enseñanza Media.

Referencias

Arata A, Rodríguez-Ponce E., *Desafíos de la dirección estratégica de las instituciones universitarias. Introducción de los editores*. En Desafíos y Perspectivas de la Dirección Estratégica de las Instituciones Universitarias, by Arata A, Rodríguez-Ponce E (Eds.) pp. 23-32, Ediciones CNA-Chile. Santiago, Chile (2009).

Clemente, F., Llinares, S. y Torregrosa, G. (2017). Visualización y Razonamiento Configural. BOLEMA. Boletim de Educaçao Matemática, 31(57), 497-516. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a24

Doherty, G. *On quality in education*, Quality Assurance in Education: 16(3), 255-265, (2008).

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación* (Quinta Edición ed.). México: Mc Graw Hill

Martín Sospedra, Diana Rosa. (2015). La formación docente universitaria en Cuba: Sus fundamentos desde una perspectiva desarrolladora del aprendizaje y la enseñanza. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *41*(1), 337-349. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052015000100020

Reyes, C. (2011). Estudio de casos en la formación de profesores de matemática: Integrando matemática y pedagogía. Santiago: Proyecto Fondef D05I-10211.

CONOCIMIENTOS ASOCIADOS A LA ENSEÑANZA DE LA APROXIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL A LA BINOMIAL

Luis Felipe Friz Urrutia, Rodrigo Ignacio Soto Aguilar, Eugenio Chandía.

Universidad de Concepción.

El conocimiento que un profesor necesita para enseñar estadística está siempre en constante discusión debido a las exigencias mínimas que debe poseer. A esto se le añade el reciente cambio curricular en el sistema y a la profundidad con la que se ven los temas. Por lo anterior, en esta investigación se determinará cuáles son los conocimientos que tienen once estudiantes de pedagogía en matemática con octavo semestre aprobado y cuatro profesores en ejercicios, sobre la aproximación de la Normal a la Binomial. Mediante la aplicación de una viñeta se encontró que cerca del 50% de los encuestados no recuerda o no conoce el concepto de corrección de continuidad y tan solo el 20% es capaz de reconocer posibles estrategias utilizadas por estudiantes.

Distribución Binomial, Distribución Normal, Teorema de Moivre – Laplace.

INTRODUCCIÓN

La estadística es la ciencia que permite resolver problemas mediante la recolección, organización, representación, interpretación y análisis de información, abarcando diversas áreas disciplinares y científicas. Por tal motivo en los últimos 5 años, más aún en los últimos dos con la pandemia, se ha vuelto imprescindible su aprendizaje y por ende su enseñanza. Al respecto, el sistema educacional chileno presenta un serio desafío con los conocimientos estadísticos y con el buen aprendizaje de estos. Dado que aun sabiendo que los profesores son el pilar fundamental y la máxima para el logro de aprendizajes, y que para ello deben poseer un conocimiento profundo y especializado de la disciplina (Ma, 1999; Estrella, 2017), en este caso de la estadística, los resultados de las evaluaciones estandarizadas nacionales de egreso de los programas de formación inicial docente demuestran lo contrario. Por ejemplo, los resultados de los años 2018 y 2019 de la Evaluación Nacional Diagnóstica para la Formación Inicial Docente (ENFID), muestran que los estudiantes de pedagogía en matemática alcanzan un 49% y 51% de logro promedio en Datos y Azar. Esto es crítico, dada la actualización del año 2019 del currículo escolar de tercero y cuarto medio en esta disciplina en su plan diferenciado. Por tal motivo, esta investigación presenta una aproximación a los conocimientos de estudiantes de pedagogía en matemática y profesores en ejercicio en uno de los objetivos de aprendizaje de la formación diferenciada matemática relativa a la aproximación de la distribución Normal a la distribución Binomial.

Los resultados parciales de esta investigación proveen orientaciones al conocimiento profundo y especializado de la estadística y su didáctica de docentes y estudiantes de pedagogía en matemática,

además de ejemplificar cuán importante es la teoría dentro de la estadística. Así, la pregunta que orienta esta investigación es: ¿los docentes o futuros docentes poseen el conocimiento estadístico y las estrategias didácticas para enseñar la aproximación de la distribución Normal a la Binomial?

Conocimientos matemática para la enseñanza

Entre las teorías cognitivas que tratan de explicar el marco de conocimiento que debe poseer un profesor para enseñar matemática, destaca la de Ball y sus colegas (2008). Esta teoría comprende y descompone el marco de conocimiento matemático para en seis dominios. En particular esta investigación se centra en el conocimiento del contenido común (CCC) el cual va más allá de lo matemático como tal, pues consiste en notar errores de los estudiantes, notar definiciones incorrectas o incompletas, cómo justificar una preposición, etc. Por su parte, el conocimiento especializado del contenido (CEC) es el conocimiento matemático y habilidad única relativo al proceso de enseñanza (Ball et al., 2008, p.400). Implica una estrecha relación con la enseñanza, ya que trata de descomponer el contenido para poder facilitar la comprensión del estudiante, así como también conocer diferentes estrategias para la enseñanza de un concepto o notar cuando la respuesta de algún estudiante es válida, independientemente del contexto. El conocimiento de contenidos y estudiantes (CCE) es aquel conocimiento que poseen los profesores respecto a sus estudiantes, en particular, permite anticiparse a posibles respuestas, dificultades o errores, esto es un beneficio para la preparación y planificación de una clase.

Distribución Bernoulli, Binomial y Normal

Una variable aleatoria se conoce por ser una variable numérica, que procede de un experimento aleatorio y de la cual se desconoce con exactitud el valor que toma hasta el momento de ser medida, siendo posible conocer solamente la distribución de probabilidades a la que está asociada con diferentes valores posibles. Este concepto es clave en estadística e inferencia y se le puede definir como una función del espacio muestral al conjunto R^1 de todos los números reales (Evans & Rosenthal, 2010).

A raíz de esta noción se pueden caracterizar dos situaciones: variables aleatorias de tipo discreta o de tipo continua. Las variables aleatorias discretas se caracterizan por trabajar con valores de un conjunto numerable infinito o conjunto finito. En una jerga coloquial, se dice que vienen de contar. Existen diferentes distribuciones asociadas a este tipo de variables, entre las más conocidas; la distribución Bernoulli y la distribución Binomial. Una variable aleatoria X se dice tiene una distribución de tipo Bernoulli, cuando tiene un parámetro p y este distribuye de la siguiente manera, $P[X = 1] = p$ y $P[X = 0] = 1 - p$. A esta distribución se le asocia su respectiva función de probabilidad.

Es importante destacar que la distribución Bernoulli trabaja con un solo experimento. En el instante que se repite el experimento cierta cantidad de veces, es decir, "n" veces, se puede decir que la situación se pasa a distribuir de forma Binomial, siempre y cuando, se considere que cada uno de los experimentos realizados son independientes entre sí, además de considerar que la probabilidad de acierto de cada uno de estos ensayos es la misma. Por lo que la distribución Binomial se puede definir como: Si $X_1, X_2, \dots X_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas del tipo Bernoulli con parámetro común p, entonces $X = \sum_{i=1}^{n} \quad X_i$ distribuye de forma Binomial (Lladser, M. 2011, p, 106).

Por su parte, las variables aleatorias continuas consisten en una variable que representa el conjunto real, por ende, infinito. Coloquialmente hablando viene del concepto medir. Una distribución conocida por sus diferentes implicancias en diferentes campos, tanto prácticos como teóricos, y por ser de este tipo de variable es la distribución Normal. Destaca por su gráfica, reconocida por ser una campana simétrica con respecto la media μ. Se identifica como distribución Normal Estándar, cuando los parámetros μ (media) y σ^2(varianza) son 0 y 1 respectivamente.

Teorema del Limite Central

Al Teorema del Limite Central (TLC), se le asocia a una serie de resultados relacionados con el comportamiento de distribuciones que caracterizan una suma de variables aleatorias y que pueden tomar distintos valores en espacios diversos. En cursos introductorios de estadística e inferencia, se suele presentar el caso general de este teorema, haciendo alusión de forma intuitiva a la suma de variables aleatorias muestrales independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2 finita. La importancia del TLC se fundamenta en que independientemente como se distribuyan las variables originales de la población, una nueva distribución formada por el promedio de las sumas muestrales tiende a aproximar a la normal, siempre y cuando la cantidad de la muestra sea suficientemente grande.

El teorema de Moivre – Laplace es considerado el caso particular del TLC y es el teorema que permite aproximar la distribución Binomial con la Normal, eso sí, considerando la distribución Binomial como suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Condiciones para aplicar el Teorema de Moivre – Laplace y la corrección de continuidad

El teorema de Moivre – Laplace, tiene que cumplir ciertas condiciones para poder aplicarse. Al tratarse de una aproximación, las condiciones permiten que sea precisa, pero existen ocasiones en las que cumpliéndose las condiciones, la aproximación no resulta ser buena debido al sesgo que puede tener la distribución. En especial, la condición propuesta en el programa de estudio de 3ero y 4to medio de Formación Diferenciada de Probabilidad y Estadística Descriptiva e Inferencial fue presentada por el autor Schader and Schimd (1989) y consiste en que los parámetros n y p deben cumplir con: $np > 5$ y $n(1-p) > 5$. Esta condición no es la más idónea y según Emura y Lin (2013) es una de las con peor rendimiento, pero también es la condición que permite rangos más amplios para n y p.

La corrección de continuidad es el concepto que está implícito en la aproximación de la Normal a la Binomial, ya que teóricamente estamos pasando de una distribución de tipo discreta a una distribución de tipo continua. Es necesario realizar un ajuste para suplir este "salto" de variables y en el programa de estudio se propone usar la corrección de Yates, que consiste en sumar o restar 0,5 dependiendo del caso, pero también existen otro tipo de correcciones más precisas como la de Cressie.

METODOLOGÍA

Para aproximarse al conocimiento de los participantes se desarrolla una investigación de carácter cualitativa descriptiva, con el uso de viñeta como técnica de recolección de información. En esta investigación participan quince personas, de las cuales once son estudiantes de Pedagogía en Matemática y cuatro profesores de matemática en ejercicio. Con la intención de recopilar información, se enfrenta a

los participantes a una situación ficticia (ver tabla 1) sobre la aproximación Normal a la Binomial, para luego realizar tres preguntas.

Situación descrita a los encuestados.
El profesor Pablo hace clases de matemática en un cuarto medio. En la clase del jueves, Pablo planteó el siguiente ejercicio de estadística: En una fábrica de artículos eléctricos se realizan alrededor de 150 artículos semanales y se calcula que la cantidad de artículos que se logran hacer en perfectas condiciones son 135. Calcular la probabilidad de que menos de 26 artículos eléctricos salgan con fallas. Luego de unos minutos, Pablo pide a Francisco y a Joaquina escribir sus procedimientos en la pizarra y explicarlos, en donde se produce el siguiente dialogo: *Joaquina: Profesor, corroboré que se cumplieran las condiciones para utilizar la aproximación y además utilicé la corrección de continuidad y el resultado que obtuve fue 0.9991.* *Francisco: "Profe, yo solo apliqué la fórmula de aproximación y me dio 0.9986".* Esteban desde su puesto observa la respuesta exacta que escribió Pablo y plantea lo siguiente: *Esteban: Si no me equivoco, el resultado de Francisco es más correcto que el de Joaquina porque está más cerca del resultado exacto que es 0.9981 ¿Cierto?* El profesor Pablo al observar las respuestas de Francisco, Joaquina y Esteban piensa en qué responderles. 1. Dado que Pablo necesita reconocer el razonamiento usado por Francisco y Joaquina, explique detalladamente el conocimiento estadístico usado por ambos estudiantes en sus respuestas. 2. Dada las respuestas, Pablo considera innecesario usar la corrección de continuidad. ¿Estás de acuerdo? Fundamente en función de la aproximación de la distribución Normal a la Binomial. 3. Pablo te plantea la situación y te pregunta sobre estrategias para abordar las diferencias observadas. ¿Qué le podrías sugerir a Pablo?

Fuente: elaboración propia

Tabla 1: “Viñeta utilizada en el cuestionario”

RESULTADOS

Respecto a la primera pregunta de la viñeta, el 60% de los estudiantes y un 25% de los docentes no es capaz de reconocer el razonamiento utilizado por Francisco y Joaquina. Un 30% de los estudiantes y un 50% de los docentes menciona los pasos de cada sujeto, pero no especifica, por ejemplo, qué condiciones utiliza Joaquina o qué tipo de corrección de continuidad se usa. Un 10% de los estudiantes y un 25% de los docentes consigue detallar correctamente el razonamiento usado por Francisco y Joaquina,

mencionando la condición más común para aplicar la aproximación ($np > 5$ y $n(1-p) > 5$) e indican la corrección de continuidad como restar, en este caso, 0.5.

En cuanto a la segunda pregunta, cerca de un 60% de los estudiantes y un 75% de los docentes declara no recordar qué significa corrección de continuidad o no conocer dicho concepto. Aproximadamente, un 40% de los estudiantes y un 25% de los docentes está a favor de utilizar la corrección de continuidad, fundamentado una de las siguientes afirmaciones: 1) Es un requisito de la aproximación. 2) Para no perder precisión en el cálculo de la aproximación. 3) Se está trabajando con una variable discreta y se aproxima a una variable continua, es por esto que se utiliza dicho ajuste.

En la tercera pregunta, el 50% de los estudiantes y un 75% de los docentes no sugiere una estrategia a Pablo, argumentando no tener el conocimiento necesario, no saber quién está en lo correcto, no entender qué hizo cada estudiante o no entender el problema. Un 50% de los estudiantes y el 25% de los docentes entrega diferentes estrategias agrupadas en las siguientes afirmaciones: 1) Realizar un debate con diferentes opiniones entre los estudiantes y llegar a un consenso. 2) Realizar ambos desarrollos en la pizarra y revisar diferencias. 3) Realizar preguntas y/o recordar el concepto de variable aleatoria.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Hasta el momento los datos se ajustan a los resultados de ENFID en estadística, que no son los más alentadores. La falta de conocimiento profundo y específico del contenido respecto de la aproximación de las distribuciones interviene directamente en las formas u estrategias de enseñanza de ella, tanto en los estudiantes de pedagogía como en los profesores en ejercicio. Por otro lado, el docente al conocer el contenido estadístico en profundidad, le permite detectar posibles respuestas o variantes con cierta facilidad, independientemente si se detectan errores o no. Los resultados son relevantes para la formación inicial y continua de profesores en esta área. Se hace necesario crear instancias de desarrollo profesional continuo e inicial para profundizar en el conocimiento especifico relativo a la aproximación de estas distribuciones, así como también en el dominio didáctico del mismo relacionado al conocimiento del contenido y su enseñanza.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Blömeke, S., Gustafsson, J. E., & Shavelson, R. J. (2015). Beyond Dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie*, *223*(1), 3–13.

Emura, T., & Lin, Y. S. (2013). A Comparison of Normal Approximation Rules for Attribute Control Charts. *Quality and Reliability Engineering International*, *31*(3), 411–418.

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. Salcedo, A. (Comp.). Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI, (173 – 194).

Evans, M. J., & Rosenthal, J. S. (2010). *Probability and Statistics The Science of Uncertainty* (2a. ed.). New York: W.H. Freeman and Company.

Lladser, M. (2011). *Variables Aleatorias y Simulación Estocástica*. Jc Saenz Editor.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA DESDE UNA PERSPECTIVA INCLUSIVA: CREENCIAS DE FUTUROS PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA EN MATEMÁTICA.

Nicolás Alvarado-Morales, Valentina Bustamante-Pereira, Claudia Chañafil, Poliana Ulloa-Cárdenas.

Universidad Católica de Temuco

Las creencias de los profesores influyen directamente en el diseño y planificación de la enseñanza, y si estas no están alineadas con una educación inclusiva, entonces el profesor no generará procesos inclusivos en sus prácticas, así, sus creencias pueden representar un obstáculo para una enseñanza inclusiva. Considerando además que, el período de formación docente no es suficiente para modificar las creencias previas del futuro profesor, y que la matemática resulta ser un área crítica en la educación, el objetivo de esta investigación es comprender las creencias de futuros profesores de educación media en matemática sobre la inclusión educativa en la enseñanza de la disciplina. La metodología se enmarca en un enfoque cualitativo fenomenológico, que se desarrolla por medio de una entrevista en profundidad y nos permite obtener información respecto a las creencias del futuro profesor de matemática. Concluimos que, dadas las pocas o nulas experiencias inclusivas de los futuros profesores en su formación escolar y profesional, es necesario que experimenten situaciones que los lleven a implicarse en actividades de enseñanza de la matemática que atienda a la diversidad de los estudiantes.

Creencias de futuros profesores, Inclusión educativa, Educación matemática.

INTRODUCCIÓN

Como respuesta a la inclusión escolar, en Chile se han creado políticas educativas que integran a los estudiantes que habían sido excluidos de las escuelas regulares, entre ellas se encuentran la Ley 20.845 y el decreto n°83/2015. Sin embargo, las políticas inclusivas son insuficientes para garantizar una verdadera inclusión (Sharma et al., 2016), por lo que el Ministerio de Educación [MINEDUC] (2017) entrega a los profesores una serie de orientaciones para cumplir con las exigencias establecidas, así como se propone la implementación del Programa de Integración Escolar (PIE), el cual funciona bajo una modalidad de co-enseñanza, con desarrollo e implementación de estrategias generadas conjuntamente entre el profesor de asignatura y el educador diferencial.

Por consiguiente, el proceso de diseño y planificación de la enseñanza se convierte en un elemento esencial para la inclusión, en el cual el currículo puede adaptarse a las demandas del contexto y a las necesidades individuales de los estudiantes (Navarro-Aburto et al., 2016). Este proceso se ve permeado por las creencias de los profesores (Panes-Chavarría et al., 2018), de esta forma, si estas no se alinean con la inclusión educativa, no generarán procesos inclusivos (Jordan et al., 2009).

Para que las creencias del profesorado estén en línea a la inclusión escolar, es necesario considerar que sus creencias iniciales tienden a no sufrir modificaciones a lo largo de su formación docente (Brownlee et al., 2001), y considerando que la asignatura de matemática tiene un rol significativo en la segregación social (Jorgensen et al. 2014), resulta importante comprender las creencias de futuros profesores de matemática de educación media sobre la inclusión educativa en la enseñanza de la disciplina, frente a la posibilidad de que estas se conviertan en un obstáculo para el desarrollo de procesos inclusivos en la enseñanza y el proceso de enseñanza-aprendizaje (Jordan et al., 2009). De esta forma, se obtiene evidencia que permite a los futuros profesores reflexionar en torno a la propia práctica frente a las exigencias del sistema educativo.

INCLUSIÓN ESCOLAR EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

La inclusión escolar responde a las necesidades educativas de los estudiantes, permitiendo el acceso a una educación de calidad, eliminando las barreras que limitan su participación en el proceso educativo y fomentando su participación en él (Ainscow et al., 2006). De esta forma, las políticas educativas en Chile promueven la inclusión escolar propiciando que los establecimientos educativos sean un lugar de encuentro entre estudiantes diversos (Ley N° 20.845, 2015). Y a modo de apoyo, se dispone de orientaciones ministeriales para el desarrollo de prácticas inclusivas en matemática (MINEDUC, 2013).

Sin embargo, en estas condiciones, el PIE presenta falencias en su implementación, por lo cual, las exigencias para atender a la diversidad estudiantil resultan complejas en la práctica, frente a la realidad educativa (Filippi-Peredo y Aravena-Díaz, 2021). Aun así, no es el entorno por sí sólo lo que resulta crítico para el éxito de los estudiantes, sino que la capacidad de los profesores para educar (Friesen & Cunning, 2018), junto a ello, se ha identificado que sus creencias son un elemento determinante en el desarrollo de una educación inclusiva y las prácticas asociadas a ella (Gale et al., 2017).

CREENCIAS COMO UN OBSTÁCULO PARA LA EDUCACIÓN INCLUSIVA

Las creencias se definen como estructuras mentales dinámicas consideradas como verdades indiscutibles, que surgen de distintos factores y se exteriorizan a través de la conducta y acciones del individuo (Mcleod, 1992). En cuanto a las creencias pedagógicas, pueden definirse como ideas y suposiciones de los profesores sobre los fenómenos y procesos relacionados con la escuela y la enseñanza (Kunter & Pohlmann, 2015). De esta forma, las creencias de los docentes influyen directamente en sus prácticas, determinando su forma de entender y abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje, sus planificaciones e interacciones con el entorno educativo.

Dependiendo de las creencias que tenga el profesor respecto a la educación inclusiva, estas pueden llegar a ser obstáculos o facilitadores para el proceso de enseñanza y aprendizaje (Espinosa y Valdebenito, 2016). En esta línea, Scherer et al. (2016) concluyen que deben propiciarse situaciones que ayuden a los futuros profesores a distanciarse de sus propias experiencias escolares como estudiantes. Esto debido a que las creencias de los futuros profesores se mantienen estables en el tiempo (Brownlee et al., 2001; Menge et al., 2021), y suelen formarse en base a experiencias tempranas, tales como las experiencias en la escuela y de la vida misma (Pajares, 1992). Por lo que, para los futuros profesores, es vital brindarles

experiencias en la enseñanza inclusiva, pues estas tienen un impacto positivo en sus creencias sobre la inclusión escolar (Eichfeld & Algermissen, 2016).

METODOLOGÍA

La investigación a realizar es de tipo cualitativa, bajo un enfoque fenomenológico, en donde se busca analizar la experiencia individual y subjetiva de los participantes (Hernández et al., 2014). Es por esto, que se realizará una entrevista en profundidad, previamente piloteada, de forma individual por cada miembro de la investigación, para lo cual se elabora con anterioridad un guion con preguntas de respuestas abiertas (Verd y Lozares, 2016), el cual fue piloteado previa aplicación. Las entrevistas fueron realizadas siguiendo un protocolo para asegurar la homogeneidad y confidencialidad de los datos personales de los entrevistados, lo cual se explicita en el consentimiento informado que deben firmar los participantes previa entrevista.

Los participantes del estudio corresponden a futuros profesores de educación media en matemática que cursan 3°, 4° o 5° año de la carrera, pues, han realizado al menos una práctica pedagógica. Se tiene una muestra intencional de 28 estudiantes, ya que, con esta cantidad de entrevistas se obtiene un 80% de saturación de datos emergentes (Marshall et al., 2015).

Los datos de la investigación tienen un formato de videograbación, y para analizarlos, cada investigador debe escuchar atentamente las respuestas y levantar códigos a partir de ellas; luego de efectuarlo con las primeras cuatro entrevistas, se comparan grupalmente con el fin de afinar los criterios de análisis, y se crean categorías apropiadas para diversos conjuntos de códigos (Verd y Lozares, 2016).

RESULTADOS PRELIMINARES

Los resultados preliminares muestran que el 50% de los participantes entiende la diversidad en el aula como diferentes maneras de aprender, pues en una de las entrevista, P2F1911 manifiesta que “diversidad en el aula tiene que ser diversidad de alumnos que hay (...) no son iguales, tienen diferentes maneras de aprender”, mientras que un 25% la considera como diferentes culturas en donde el entrevistado P2F1913 comenta que diversidad en el aula son “diversos estilos de aprendizaje, diversas culturas, diversas religiones, diverso todo, una mezcla de varias culturas, creencias, ya sean religiosas, políticas”.

Igualmente, frente al concepto de inclusión escolar, la totalidad de los entrevistados asocia el concepto al de integración escolar, debido a que P2F1913 dice que es “incluir a todos independiente de cómo piensen o aprenden, la idea es que todos los individuos que puedan estar dentro del aula puedan ser parte del aula”, igualmente, en la entrevista de P2F1912 se plantea que inclusión escolar es “tratar de alguna manera igual a los estudiantes que están en situación de discapacidad, igual a los normales, que no se debería decir, sino que ellos tienen esas capacidades que los otros no tienen”.

Los entrevistados creen que la inclusión escolar en el aula de matemática no tiene grandes diferencias con otras asignaturas, en la entrevista P2F1914 se menciona que “de la misma manera, hablamos igual de aula y en matemática no debería ser diferente, todos deberían sentirse parte de la clase”.

Los futuros profesores no creen tener las habilidades para generar una educación inclusiva, por lo que consideran oportuno realizar capacitaciones en la formación docente, especialmente en los cursos de

educación, pues P2F1911 expresa "que nos enseñen más sobre la inclusión en estos ramos de ... más que nada humanistas, que nos enseñen la inclusión no así como el término sino como llevarlo al aula" y manifiestan que el respeto es un elemento esencial para los procesos inclusivos. En relación a su experiencia escolar en todos los niveles, reconocen pocas o nulas prácticas inclusivas generadas por sus profesores; pero de ellas se puede destacar que creen que, al tener profesores mayores, provoca que no haya mucha inclusión escolar, ya que en la entrevista P2F1911 se expone que "a veces los profesores no estaban muy capacitados, porque no tenía profesores muy jóvenes que digamos".

CONCLUSIONES

Al observar los resultados obtenidos a través de las entrevistas en profundidad, podemos concluir que los futuros profesores de pedagogía media en matemáticas no tienen una clara definición del concepto de inclusión escolar, ya que lo confunden con integración escolar, así mismo, creen que la diversidad en el aula de matemática es igual que en otras asignaturas. Los futuros profesores evidencian no sentirse preparados y no tener las habilidades necesarias para generar procesos inclusivos en sus actuales o futuras prácticas docentes, por lo cual, consideran que necesitan más capacitación sobre la inclusión y que ésta se debe entregar en los cursos de educación. En relación a las experiencias en inclusión escolar, se evidencian pocas o nulas por parte de los futuros profesores en su rol de estudiantes, lo que nos muestra que el contexto de la formación inicial docente tampoco evidencia prácticas de inclusión en el área, dejando a los futuros profesores de matemática con escasas herramientas que le permitan modificar sus creencias.

En relación a lo que establece Menge et al. (2021), las creencias de los futuros profesores de matemática se mantienen estables en el tiempo, pues las ideas que tienen sobre los conceptos de diversidad y/o inclusión están asociadas a sus experiencias como estudiantes del sistema educativo. Es por ello que, creemos que se debe implementar una mayor cantidad de prácticas que les permitan realizar adaptaciones curriculares que contemplen la diversidad y necesidades de los estudiantes, con el fin de implicarse en actividades de enseñanza de la matemática que atiendan a la diversidad de los estudiantes, en su magnitud más amplia del concepto, y que estas sean efectivas, lo cual podría interferir en el cambio de creencias y futuras prácticas como profesor de matemática.

Referencias

Sharma, U., T. Loreman & S. Macanawai. (2016). "Factors contributing to the implementation of inclusive education in Pacific Island countries". International Journal of Inclusive Education 20(4), 397-412. https://doi.org/10.1080/13603116.2015.1081636

Ministerio de Educación (2017). Programa de Integración Escolar. PIE. Ley de Inclusión 20.845. Manual de apoyo a la Inclusión Escolar en el marco de la Reforma Educacional. https://especial.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/31/2016/09/Manual-PIE.leyOK_.web_-1.pdf

Navarro-Aburto, B., Arriagada, I., Osse-Bustingorry, S. y Burgos-Videla, C. (2016). Adaptaciones curriculares: Convergencias y divergencias de su implementación en el profesorado chileno. Revista Electrónica Educare, 20(1), 1-18. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194143011015

Panes-Chavarría, R., Friz-Carrillo, M., Lazzaro-Salazar, M., y Sanhueza-Henríquez, S. (2018). Matemática, cultura y práctica docente: un análisis de creencias y elecciones socioculturales. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32(61), 570–592. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a13

Jordan, A., E. Schwartz, & D. McGhie-Richmond. (2009). "Preparing Teachers for Inclusive Classrooms." Teaching and Teacher Education 25(4), 535–542. https://doi.org/10.1016/j.tate.2009.02.010

Brownlee, J., N. Purdie, & G. Boulton-Lewis. (2001). "Changing Epistemological Beliefs in Preservice Teacher Education Students." Teaching in Higher Education 6(2), 247–268. https://doi.org/10.1080/13562510120045221

Jorgensen, R., Gates, P., & Roper, V. (2014). Structural exclusion through school mathematics: Using Bourdieu to understand mathematics as a social practice. Educational Studies in Mathematics, 87(2), 221–239.

Ainscow, M., Booth, T. & Dyson, A. (2006). Improving schools, developing inclusion. Routledge.

Ley N° 20.845 de 2019. Ley de Inclusión Escolar. 25 de abril de 2019. Diario Oficial de la República de Chile.

Ministerio de Educación (2013). Matemática funcional para estudiantes que presentan NEE. MINEDUC.

Filippi-Peredo, C., y Aravena-Díaz, M. (2021). Didáctica e inclusión en las aulas de matemática. Análisis de un caso en Chile. Revista Electrónica Educare, 25(1), 1-19. https://doi.org/10.15359/ree.25-1.23

Friesen, D. & Cunning, D. (2018). Making explicit pre-service teachers' implicit beliefs about inclusive education. International Journal of Inclusive Education, 24(14), 1494–1508. https://doi.org/10.1080/13603116.2018.1543730

Gale, T., Mills, C., & Cross, R. (2017). Socially inclusive teaching: Belief, design, action as pedagogic work. Journal of Teacher Education, 68(3), 345–356. https://doi.org/10.1177/0022487116685754

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. Grows (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 575-596. Macmillan Publishing Company.

Kunter, M., & Pohlmann, B. (2015). Lehrer. In E. Wild & J. Möller (Eds.), Pädagogische Psychologie (2 ed.), 261-281. Springer.

Espinosa, J. y Valdebenito, V. (2016). Explorar las Concepciones de los Docentes respecto al Proceso de Educación Inclusiva para la Mejora Institucional. Revista latinoamericana de educación inclusiva, 10(1), 195-213. https://doi.org/10.4067/S0718-73782016000100010

Scherer, P., Beswick, K., DeBlois, L., Healy, L., & Moser, E. (2016). Assistance of students with mathematical learning difficulties: how can research support practice? ZDM, 48(5), 633–649. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0800-1

Menge, C., Euler, T., & Schaeper, H. (2021). Überzeugungen und Selbstwirksamkeitserwartungen zum inklusiven Unterricht bei (angehenden) Lehrkräften: der Einfluss von Lerngelegenheiten. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft. https://doi.org/10.1007/s11618-021-01038-z

Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. Review of Educational Research, 62(3), 307–332.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P., Méndez, S., y Mendoza, C. (2014). Metodología de la investigación (6a ed.). McGraw-Hill Education.

Verd, J. M., y Lozares, C. (2016). Introducción a la investigación cualitativa. Editorial Síntesis.

Marshall, B., Cardon, P., Poddar, A. y Fontenot, R. (2015) ¿Importa el tamaño de la muestra en la investigación cualitativa? A Review of Qualitative Interviews in is Research, Journal of Computer Information Systems, 54(1), 11-22.

Eichfeld, C., & Algermissen, P. (2016). Aber nicht in Sachsen...? Synopse von Studien zu Einstellungen sächsischer Grundschullehrkräfte zu inklusivem Unterricht. In K. Liebers, B. Landwehr, S. Reinhold, S.

CONCEPCIONES SOBRE CO-DOCENCIA MANIFESTADAS POR FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Rocío Díaz C., Maritza Droguett G., Camila Huentecura D. y Millaray Muñoz P.

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Esta investigación explora las concepciones de futuros docentes de Licenciatura en Educación en Matemática y Pedagogía en Matemática acerca de la co-docencia. Para dar cumplimiento a este objetivo se utilizó un enfoque cualitativo y se recopiló información a través de entrevistas semiestructuradas a representantes de cada año del plan de estudio de una universidad estatal chilena. Los resultados indican que los futuros profesores sostienen concepciones que los hacen ver a las profesoras/es de educación especial como asistentes y no como un profesional con el que trabajar en equipo para lograr la inclusión de todos los y las estudiantes.

Co-docencia, Creencias, Concepciones, Futuros profesores.

ANTECEDENTES

Dentro de las labores que surgen al interior de la escuela, una de ellas es la co-docencia que se define como una metodología de enseñanza centrada en que la realización laboral y el aprendizaje funcionan de mejor manera cuando se desarrollan diversas estrategias de forma cooperativa para dar respuestas a las demandas educativas (Mineduc, 2013). En esta práctica, cada profesional desde su disciplina y sus conocimientos debe aportar al proceso de co-construcción, con el fin de responder a la diversidad del aula. Sin embargo, en el sistema educativo nacional se prioriza el trabajo individual por sobre el colaborativo en los diferentes agentes educativos. Esto ha provocado que las y los educadores diferenciales se hagan cargo de los estudiantes que se encuentran en los programas PIE de manera aislada de los demás integrantes de las comunidades educativas (Inostroza, 2019).

Asimismo, el desempeño de las y los profesores en el aula está determinado por concepciones y creencias sobre los contenidos matemáticos escolares y su enseñanza (Pajares, 1992). Por tanto, es esperable que las concepciones y creencias que sostengan sobre la co-docencia y sobre los roles de cada profesional en esta estrategia determinará el tipo de co-docencia que se llevará a cabo en las aulas. En este sentido, Scruggs y colaboradores (2007) diferencian cinco tipos de co-docencia: a) uno enseña-uno ayuda/asiste; b) enseñanza paralela; c) enseñanza de la estación; d) enseñanza alternativa; y e) enseñanza en equipo/interactiva. Además, Graziano y Navarrete (2012) postulan un sexto tipo de co-docencia: uno enseña-uno observa.

En este contexto, este trabajo tiene por objetivo caracterizar las concepciones y creencias de futuros profesores de matemáticas acerca de su propio rol y el de un/una profesor/a de educación especial en acciones de co-docencia.

METODOLOGÍA

Para poder cumplir con el objetivo de esta investigación, la metodología utilizada fue cualitativa dado que "se focaliza en la comprensión de la realidad social o educativa desde el punto de vista de los actores involucrados" (Abero et al., 2015, p. 102). La investigación está hecha bajo un paradigma interpretativo, permitiendo conocer en profundidad la cosmovisión de los y las participantes, simultáneamente interpretar sus acciones y significado de estas, dado que el paradigma mencionado busca "comprender e interpretar la realidad construida por los sujetos" (Abero et al., 2015, p. 44).

Concretamente, se optó por la entrevista semiestructurada como instrumento de recolección de información. El instrumento basado en los tipos de co-docencia fue validado por expertos y aplicado a cinco profesores en formación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Específicamente, se pidió formar parte a un estudiante por cada año del plan de estudio de la carrera "Licenciatura en Educación en Matemática y Pedagogía en Matemática". Cabe destacar que tres de ellos se encontraban cursando una malla curricular actualizada, la cual cuenta con una práctica en co-docencia en 3º año y los dos de los últimos años se encuentran cursando una malla que no contempla asignaturas relativas al trabajo en co-docencia. La muestra se eligió estratégicamente, utilizando el formato de "casos-tipo" debido a que, su "objetivo es la riqueza, profundidad y calidad de la información, no la cantidad ni la estandarización" (Hernández et al., p. 566).

La información desprendida de las entrevistas se analizó a través del método de análisis de contenido, ya que como menciona Bardin (1996) es "un conjunto de técnicas de análisis de las comunicaciones utilizando procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes" (p. 29). El análisis se realizó en dos etapas y combina un desarrollo *concept-driven* y *data-driven*, que fue llevado a cabo secuencialmente (Kuchartz, 2019). Primero, se realizó un análisis deductivo para el que se definieron tres categorías: rol de los profesores, organización del trabajo en el aula y rol del estudiante. Estas categorías surgen de los elementos comunes que pueden encontrarse en los tipos de co-docencia reportados por la literatura (Graziano y Navarrete, 2012; Scruggs et al., 2007). En una segunda etapa se realizó un análisis inductivo dentro de cada una de las tres categorías deductivas. En este trabajo, se presentan los resultados de la primera categoría: rol de las/los profesores.

RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados de la investigación organizados de acuerdo con las dos categorías que surgen del análisis inductivo llevado a cabo dentro de la codificación hecha a frases bajo la etiqueta *rol del profesor*. La información obtenida de las respuestas de las y los docentes en formación, en relación con el rol docente en contexto de co-docencia, se agruparon en dos categorías: *responsabilidad compartida* y *responsabilidad del educador/a especial*.

Responsabilidad compartida

En esta categoría se agrupan las respuestas de las y los futuros educadores que entienden la co-docencia como un trabajo en conjunto, simétrico y mutuo. Por tanto, ambos profesionales se hacen cargo del proceso de enseñanza. Así, todas las tareas llevadas a cabo, como la planificación y la evaluación, se

realizan de manera conjunta. En esta categoría se encontraron dos subcategorías: *enseñanza en equipo* y *responsabilidad del profesor/a de matemáticas sobre la inclusión*.

En la primera subcategoría, *enseñanza en equipo*, encontramos respuestas que hacen alusión a un trabajo en que ambos profesionales realizan tareas en las que se co-construye a partir de las individualidades. En este grupo encontramos respuestas como las siguientes:

> Estudiante X año: el profesor PIE se nutre de lo que el profesor de matemáticas habla y a la vez el profesor de matemáticas se nutre de lo que el profesor PIE le entrega.
>
> Estudiante X año: si yo llego ahora a hacer clases de matemáticas a un aula y tengo que trabajar con profesor PIE (...) saber generar espacio con este profesor y también generar estas planificaciones, las que incluye al profesor y en las que podamos trabajar en conjunto en un aula.

La subcategoría la hemos etiquetado como *responsabilidad del profesor/a de matemáticas sobre la inclusión* y hace referencia a la responsabilidad que se adjudica el futuro profesor/a de matemáticas de dar una respuesta a la diversidad del aula. Concretamente, las respuestas de esta subcategoría especifican que no es algo que solo debe hacer la educadora diferencial sino de ambos, por lo que las respuestas apuntan a trabajar de manera colaborativa dentro del aula con todos los estudiantes. A continuación, se evidencian respuestas que ejemplifican lo anterior:

> Estudiante X año: no porque yo sea un profesor de matemáticas no tengo que preocuparme nada de las necesidades de los estudiantes, no puedo deshacerme de eso tampoco. Es un trabajo colaborativo dentro del aula.
>
> Estudiante X año: el profesor de cualquier asignatura tiene que tratar de incluir a todos sus estudiantes y no dejar a un grupito aparte.

Estas respuestas van más allá de la co-docencia, ya que los participantes explican que necesitan estar al tanto de estrategias y ser capaces de realizar las adaptaciones correspondientes acorde a las necesidades individuales y colectivas del curso.

Responsabilidad del educador/a especial

En esta segunda categoría, queda en evidencia la visión de los/las futuros/as profesores/as de matemática sobre las funciones de los y las educadores especiales, y cómo la responsabilidad de la diversificación de la enseñanza recae exclusivamente sobre ellos y ellas. Cabe destacar, que todos los y las participantes en algún momento de la entrevista coinciden en que es responsabilidad de la Educadora diferencial hacerse cargo de la diversidad. Además, se percibe una aparente dicotomía entre la enseñanza de matemáticas y la inclusión, donde la educadora puede aportar en la medida en que hace adecuaciones o entregar pautas en el contenido y en las evaluaciones para *ciertos* estudiantes. Así, en esta categoría se observan dos subcategorías: *desconocimiento sobre diversificación de la enseñanza* y *desconocimiento del rol de la/el educador especial*.

La primera subcategoría agrupa las respuestas que fueron etiquetadas como *desconocimiento sobre diversificación de la enseñanza*. En ella, las y los participantes mencionan que no tienen las herramientas para responder a lo que *no es el común*, debido a que su formación está enfocada en enseñar matemáticas al *general de estudiantes*, al *estudiante promedio*. Esto se ve reflejado en las siguientes respuestas:

> Estudiante X año: No me han dicho nada de diversidad en aula, se ha ambientado en un "curso perfecto" por así decirlo.
>
> Estudiante X año: Si bien nos enseñan como a… enseñar, pero es como solo un tipo de estudiante, como el… el estudiante promedio.

La segunda subcategoría fue etiquetada como *desconocimiento del rol de educador/a especial*, y se observa en las respuestas en que se jerarquizan los roles de los profesores. Con esto nos referimos a que los/las futuros/as profesores/as entienden que la figura principal dentro del aula la mantiene el/la profesor/ra de matemáticas y el rol secundario la educadora. Particularmente, esta concepción hace referencia al tipo de trabajo colaborativo en uno enseña y el uno ayuda. A partir de lo anterior, se les cataloga a los y las educadoras especiales con los siguientes términos: ayuda, traductoras, guías, orientadora, asistente, persona que da Tips, salvadora, profe extra, reforzamiento, y consejera, entre otros. Estas ideas fueron inferidas desde respuestas tales como:

> Estudiante X año: el profesor de matemáticas para mí es un portavoz de las matemáticas, que bueno no es solamente un portavoz, sino que es un profesor, es una eminencia en cuanto al conocimiento de las matemáticas y el profesor PIE muchas veces es un traductor.
>
> Estudiante X año: el educador o educadora diferencial que vendría siendo el que le colabora solamente.

A modo de resumen la tabla 1 muestra la frecuencia de cada categoría.

Categoría	Sub-categorías	Frecuencia
Responsabilidad compartida	Enseñanza en equipo	8
	Responsabilidad del profesor/a de matemáticas sobre la inclusión	11
Responsabilidad de la educador/a especial	Desconocimiento del rol de educador/a especial	24
	Desconocimiento sobre diversificación de la enseñanza	12

Tabla 1: Frecuencia de las subcategorías

En la tabla anterior se puede observar que la categoría que más se menciona es responsabilidad de la educador/a diferencial y dentro de esta, la subcategoría que más se repite (de ambas categorías) es desconocimiento del rol de educador/a.

CONCLUSIONES

Las concepciones y creencias de los y las profesoras de matemáticas sobre co-docencia en aula surgen desde mucho antes de su formación universitaria, desarrollándose a lo largo de su etapa escolar. En su formación profesional las nuevas concepciones se tensionan con las antiguas para acomodarse a nuevos entendimientos, es decir, se van reestructurando. Esto se logra evidenciar en el discurso de los participantes, debido a que se contradicen por creencias arraigadas a sus etapas escolares. Ejemplo de esto es la poca consistencia y coherencia en sus respuestas donde generalmente se alude a un trabajo colaborativo "codo a codo" de carácter simétrico, pero finalmente todos los y las participantes coinciden

en que el rol de la educadora diferencial es ser una ayuda a su labor docente y la participación de esta en el aula se limita a la disposición del profesor de matemática en relación con la dinámica de la clase.

El tipo de co-docencia que más prevalece es el de "uno enseña, uno ayuda", pues conciben la co-docencia como el profesor de matemáticas es el que hace la clase. Esto se traduce en que el profesor de matemáticas es el que enseña, entrega el contenido, y, por otro lado, el educador/a especial es el que ayuda y da apoyo a los y las estudiantes *traduciendo* el contenido entregado por el profesor de matemáticas.

Las respuestas que exponemos en este trabajo demuestran que existe un evidente desconocimiento sobre el rol de él o la Educadora Diferencial dentro del aula. Esto claramente afectará el futuro trabajo colaborativo, ya que sus concepciones promueven una relación asimétrica dentro del aula. De esta manera, queda predeterminado el rol y la participación que tendrá el o la profesora especial como una ayuda hacia el profesor, y no para lograr que todos y todas las estudiantes aprendan. La ayuda que esperan las y los futuros profesores de matemáticas es de carácter asistencialista, evadiendo su rol en lograr la inclusión de todos los estudiantes. Hecho que se contrapone con los lineamientos y orientaciones establecidos en el decreto 170, que regula el funcionamiento del PIE.

Referencias

Abero, L., Berardi, L., Capocasale, A., García, S. y Rojas, R. (2015). *Investigación educativa: abriendo puertas al conocimiento*. Clacso.

Bautista, N. (2011). *Proceso de investigación cualitativa. Epistemología, metodología y aplicaciones*. Manual Moderno.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido* (2a ed.). Akal.

CPEIP (2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media*. MINEDUC y Lom.

Graziano, K. J. y Navarrete, L. A. (2012). Co-teaching in a teacher education classroom: Collaboration, comprise, and creativity. *Issues in Teacher Education, 21*(1), 109-116.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ª ed). McGraw-Hill.

Inostroza, F. (2019). *La puesta en práctica de las políticas de inclusión escolar desde la perspectiva de las educadoras diferenciales*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Alberto Hurtado y Universidad Diego Portales, Santiago de Chile.

Kuckartz, U. (2019). Qualitative text analysis: A systematic approach. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in Mathematics Education* (pp. 181-198). Springer.

MINEDUC. (2013). *Orientaciones técnicas para programas de integración escolar (PIE)*. Unidad Educación Especial.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(39), 307-332.

Scruggs, T. E., Mastropieri, M. A. y McDuffie, K. A. (2007). Co-teaching in inclusive classrooms: A metasynthesis of qualitative research. *Exceptional Children*, 73(4), 392-416.

OBSERVACIÓN DE LA CLASE DE MATEMÁTICA DESDE EL ENFOQUE INCLUSIVO: UN CASO DE ESTUDIO

Ximena Oyarzo Velásquez, Marcela Silva Hormazábal

Universidad Austral de Chile

El presente reporte, expone los resultados preliminares de una investigación más amplia desarrollada en el sur de Chile, que pretende observar la clase de matemática, caracterizando las prácticas pedagógicas inclusivas presentes en ella. En esta comunicación se presenta un caso de estudio de una profesora de enseñanza básica (primaria), analizado a través de un enfoque observacional, utilizando una pauta elaborada para fines propios de esta investigación que incorpora la inclusión. De tal forma se espera reflexionar en torno a las estrategias diversificadas observadas en la práctica habitual de una profesora de matemáticas. Por último, se plantean los desafíos que emergen al incorporar esta mirada en las aulas heterogéneas.

Educación primaria, matemática educativa, enfoque inclusión.

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años, el concepto de inclusión ha cobrado fuerza en la sociedad a nivel internacional, convirtiéndose en un eje común en los sistemas educativos con foco en la atención a la diversidad (Armstrong, et al, 2016). De esta manera, los propósitos de equidad e igualdad en el contexto educativo cobran mayor relevancia en aquellos grupos de exclusión como lo son: movimientos migratorios, diversidad lingüística y cultural, entre otros; desafiando a los establecimientos educacionales a incorporar el desarrollo de prácticas pedagógicas inclusivas.

En este escenario, Chile ha desarrollado políticas públicas que impulsan una educación inclusiva, donde el docente cumple un rol protagónico, reconociendo y valorando la diversidad al interior de la sala de clases; en este sentido podemos mencionar la Ley de Inclusión (MINEDUC, 2015) que busca eliminar la selección en el proceso de admisión y asegurar la participación de todos los estudiantes a través del diseño de planes de inclusión. Todo esto para favorecer una escuela más heterogénea. De la misma forma, los establecimientos han recibido orientaciones para la implementación del Programa de Integración, acompañada del Decreto 170, el cual fortalece la co-enseñanza, relevando el trabajo colaborativo en las prácticas pedagógicas (MINEDUC, 2013). Posteriormente, el Ministerio de Educación promulga el Decreto 83 (MINEDUC, 2015), donde se promueve la diversificación de la enseñanza a través de la contextualización del currículum. Esta transformación en nuestro sistema educativo trae consigo profundas reflexiones pedagógicas, promovidas por las políticas educativas y que van en directa relación con el trabajo en aulas heterogéneas (Apablaza, 2014). En este marco, cabe preguntarse ¿qué características debe tener una práctica pedagógica que responda a un contexto inclusivo?

En particular, en este trabajo se utilizará el contexto de la enseñanza de la matemática, ya que, por generaciones ha existido en el ambiente una imagenería popular (Lara-Barragán, 2011) que ha dotado a las matemáticas de un aura de inaccesibilidad en el cual sólo pueden triunfar personas excepcionales. Sin embargo, esto visto desde la mirada de la inclusión, sería un factor que ayudaría a perpetuar las brechas de acceso y oportunidades hacia la matemática educativa. Por consecuencia, es preponderante instaurar prácticas docentes inclusivas que, por una parte, rompan con esta estigmatización de la disciplina y que, por otra, favorezca el aprendizaje de todos y todas en igualdad de oportunidades.

Como consecuencia del contexto y sus directrices explicitadas en los argumentos anteriores, es que esta comunicación breve busca identificar la presencia de prácticas inclusivas en el aula de matemática, por medio de un enfoque observacional.

METODOLOGÍA

Para responder al objetivo de esta investigación, el cual dice relación con "analizar prácticas pedagógicas inclusivas de una clase de matemática", se realizó un estudio enmarcado en la metodología cualitativa a través de un análisis de caso único (Yin, 2014) desde un enfoque observacional (Anguera, 1983), utilizando como instrumento una pauta de observación de clase de matemática inclusiva.

Se consideraron las normas éticas de una investigación social, por tal motivo las videograbaciones se realizaron previo consentimiento informado por todos los participantes, para el posterior análisis de los datos recolectados. El equipo de observadoras estuvo compuesto por dos académicas, una de ellas del área de educación matemática y la otra de Educación Inclusiva.

Se examina el desarrollo de una clase de una profesora de matemática en educación básica (en adelante Ana) de tercero básico (estudiantes entre 8 y 9 años) de una escuela pública chilena. La selección de Ana responde a su trayectoria pedagógica y actual establecimiento en el que se desempeña, el cual se encuentra adscrito al Programa de Integración Escolar. Al momento del estudio, Ana tiene una experiencia de 20 años en aula general y 10 años en aula de matemática en educación básica.

Se grabaron cinco sesiones de clase, de dos horas pedagógicas en la asignatura de matemática impartida en el segundo semestre de un tercero básico. Para efectos del estudio, sólo se consideró una sesión, la elección se debió a que es la primera clase en la que se introduce el concepto de multiplicación. En líneas generales, el contexto de la clase se desarrolla con la participación de 35 estudiantes; la utilización de grupos de trabajo y el empleo de una guía de aprendizaje que contiene ejercicios para desarrollar.

El instrumento de observación utilizado fue diseñado especialmente para este fin y validado a través de un juicio de experto, por académicos y docentes de aula. La pauta de observación considera tres de los dominios del Marco para la Buena Enseñanza (CPEIP, 2008), observables dentro de una clase de matemática desde el enfoque inclusivo: **Preparación para la Enseñanza, Creación de un Ambiente propicio para el aprendizaje y Enseñanza para el aprendizaje de todos los estudiantes**. De esta manera, se generan tres dimensiones desde las cuales se desprendieron siete categorías a observar.

Tabla 1. Descripción de pauta de Observación de clases de matemática desde un enfoque inclusivo.

Dimensiones	Categorías
Preparación de la enseñanza	Preparación de la clase de matemática Gestión de la clase de matemática
Creación de un ambiente propicio para el aprendizaje	Comunicación docente - estudiante Interacciones Organización y clima de aula
Enseñanza para el aprendizaje de todos los estudiantes	Estrategias diversificadas Comprensión de la información

Fuente: Elaboración Propia con base en CPEIP (2008)

RESULTADOS

En este apartado, se describen los resultados de la aplicación de la pauta de observación de clases de matemática inclusiva. Para efectos de este reporte se consideró sólo la dimensión tres, Enseñanza para el aprendizaje de todos los estudiantes y las dos categorías correspondientes: Estrategias diversificadas y Comprensión de la Información.

Tabla 2. Resultados observados en la clase de matemática

Dimensión 3: Enseñanza para el aprendizaje de todos los estudiantes.		
Categorías	Observación de la clase	Sugerencias enfoque inclusivo
Estrategias diversificadas	Se observa una escasa variedad de estrategias de enseñanza, utilizando como único recurso una *guía de apoyo* que promueve el aprendizaje memorístico.	Se esperaría una incorporación de diversos recursos y estrategias, que permitan el acceso al aprendizaje por todos y todas las estudiantes, incorporando el enfoque inclusivo, tales como material concreto, interactivo, juegos y elementos del propio contexto. (Ver Alsina, 2016)
	Las actividades realizadas por la docente tienen características poco desafiantes, centradas en los algoritmos mecánicos de la multiplicación, potenciado la memorización de tablas, aplicando sólo la etapa simbólica de la multiplicación sin transitar por lo concreto y lo pictórico. Además, la actividad ofrecida, sólo permite una forma de resolver el ejercicio.	Se esperaría en una clase inclusiva el desarrollo de actividades que fortalezcan y desarrollen las habilidades, competencias y actitudes en todos y todas las estudiantes. Para ello se sugiere la utilización de actividades matemáticas en contexto, en las cuales puedan comprender y aplicar

	Si bien se conecta con el contexto local, los problemas ofrecidos son sólo del tipo rutinario, potenciando la mecanización al resolver problemas.	la matemática, al mismo tiempo que desarrollan habilidades, actitudes y competencias.
	La docente prepara sólo una actividad, ofrecida por medio de una guía de resolución de problemas y ejercicios, sin otro recurso de apoyo al aprendizaje.	Se esperaría que se ofrezca una variedad de actividades que permitan cumplir las metas colectivas y personales de los estudiantes. Por ejemplo, actividades de simplificación y ampliación.
Comprensión de la información	Es complejo verificar la comprensión de los aprendizajes, debido a que la gestión de la clase no intenciona que los estudiantes relacionen los saberes previos y nuevos con el contexto.	Se esperaría que la gestión de la clase apunte a proveer experiencias suficientemente diversificadas para que todos y todas las estudiantes puedan realizar estas conexiones y con ello verificar la comprensión de las ideas principales.
	La docente ofrece una clase homogénea en cuanto a los soportes que ofrece para que los estudiantes puedan representar la información. Centrándose mayoritariamente en elementos simbólicos.	Se esperaría que la profesora guiara el procesamiento de la información, ofreciendo soportes adecuados y diversos para la entrega de esta, así como también las estrategias que modela y las habilidades que desarrolla, con las cuales el estudiantado podrá relacionar los aprendizajes previos y nuevos con su experiencia de vida, convirtiéndose así en aprendizaje significativo.

Fuente: Elaboración Propia.

En líneas generales se pueden destacar que, en este caso en específico, las experiencias de aprendizaje planificadas por la docente tienen características que distan de cumplir con los descriptores de la pauta de observación elaborada, esto en relación con elementos presentes que permitan ofrecer diversas oportunidades para que todos y todas las estudiantes adquieran y consoliden su aprendizaje, logrando así tanto metas colectivas como individuales.

Así mismo, es importante resaltar la necesidad de planificar la evaluación desde diversos agentes y momentos evaluativos para la toma efectiva de decisiones pedagógicas, que permitan el logro progresivo de las metas de aprendizaje de todos los y las estudiantes.

De esta misma forma, vale la pena mencionar la importancia de diversificar la enseñanza utilizando variadas estrategias pedagógicas inclusivas. Ofreciendo así opciones para comprender la información, vinculándolas con experiencias previas y elementos del entorno.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados preliminares corroboran que en general la clase observada dista de presentar un enfoque inclusivo para el aprendizaje. Esto debido a que se centra en procesos memorísticos, representaciones algorítmicas y en general actividades poco desafiantes cognitivamente, en las cuales la docente es protagonista y los y las estudiantes receptores.

A partir de la experiencia vivida por las investigadoras, tanto en el análisis como en la construcción del instrumento de observación, es posible indicar que existen escasos elementos de diversificación de la enseñanza propuestos por el decreto 83 (MINEDUC, 2015)

Si bien no es posible generalizar, las observaciones realizadas permiten sugerir la necesidad de incorporar y formalizar prácticas inclusivas en el aula de matemática. Así como también, resaltar la importancia de la formación continua del profesorado en temas como planificación, didáctica y evaluación, desde la co-enseñanza hacia el enfoque inclusivo, así como lo menciona el Marco de la Buena Enseñanza (CEPEIP, 2008).

Estas acciones permitirán introducir gradualmente, tanto en el discurso como en las acciones del docente de matemática, la promoción del aprendizaje para todos y todas en equidad de condiciones.

Referencias

Alsina, A. (2016) Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. Épsilon, 33(1), 7-29.

Anguera, M. T (1983). *Manual de prácticas de observación*. Trilla.

Apablaza, M. (2014). Representaciones sociales de profesores respecto de la diversidad escolar en relación a los contextos de desempeño profesional, prácticas y formación inicial. *Estudios Pedagógicos, 40*(1), 7-24.

Armstrong, F., Armstrong, D. y Barton, L. (2016). *Inclusive education: Policy, contexts and comparative perspectives*. Routledge.

Eccius-Wellmann, C., y Lara-Barragán, A. (2016). Hacia un perfil de ansiedad matemática en estudiantes de nivel superior. *Revista iberoamericana de educación superior*, *7*(18), 109-129.

Decreto Supremo 170 del 2009. Fija normas para determinar los alumnos con necesidades educativas especiales que serán beneficiarios de las subvenciones para educación especial. 14 de mayo de 2009. D.O. No. 39641.

Decreto Exento 83 del 2015. Aprueba criterios y orientaciones de adecuación curricular para estudiantes con necesidades educativas especiales de educación parvularia y educación básica. 30 de enero de 2015. D.O. No. 41075.

Ley 20.845 del 2015. De inclusión escolar que regula la admisión de los y las estudiantes, elimina el financiamiento compartido y prohíbe el lucro en establecimientos educacionales que reciben aportes del estado. 29 de mayo de 2015. D.O. No. 41177.

Ministerio de Educación de Chile (2013). *Orientaciones técnicas para programas de integración escolar (PIE)*. https://especial.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/31/2016/09/Orientaciones-PIE-2013-3.pdf

Yin, R. (2014). *Case study research: Design and methods* (4ª ed.). Sage Publication

CREENCIAS DE PROFESORES DE EDUCACIÓN MEDIA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN CONTEXTO MAPUCHE

Sebastián Bascur, Luis Boguen, Anahí Huencho, Aylen Huenul, Sadrac Miranda, Miguel Pinolef, María de los Ángeles Salas

Universidad Católica de Temuco

Todo grupo sociocultural tiene derecho a ser educado en el marco de los conocimientos de su cultura, independiente del área de conocimiento o la edad de los educandos. En este contexto, la educación media en matemática tiene una deuda pendiente y desde la Región de la Araucanía, en el marco del pueblo mapuche, es de nuestro interés comprender las creencias que tienen los/as profesores/as chilenos/as de educación media sobre la enseñanza de la matemática en contexto mapuche. Así, desde un enfoque fenomenológico, se aplicó una entrevista en profundidad a 25 profesores de educación media en matemática que ejercen como docentes en enseñanza básica, media y superior, distribuidos entre la región Metropolitana y la región de Los Lagos. Las entrevistas fueron grabadas y analizadas con la ayuda del programa ATLAS.ti. Los resultados dan cuenta de un nulo desarrollo en aula, principalmente por desconocimiento sobre el contenido matemático del pueblo mapuche y su conexión con los requerimientos curriculares de enseñanza media; si bien se estima pertinente la inclusión de una educación matemática indígena, se espera que ésta atienda el contexto geográfico de cada uno de los pueblos originarios del país.

Creencias de profesores, Educación intercultural, Matemática, Pueblo Mapuche.

INTRODUCCIÓN

La Educación Intercultural se comprende como una forma de entender y vivir la educación desde un enfoque pedagógico de carácter inclusivo, donde la diversidad se vuelve indispensable como herramienta para proporcionar una educación integral y de calidad, la cual debe ser igualitaria, pues los grupos socioculturales minoritarios tienen derecho a ser educados en su cultura (Ibañez et al., 2018; Peña-Rincón et al., 2017). Esto en Chile ha acarreado un problema histórico, pues las escuelas han transmitido la monoculturalidad del Estado (Quilaqueo et al., 2014), siendo este de carácter uninacional, es decir, no reconocería a las culturas y sólo impondría la de mayor predominancia. Ante esto, el gobierno chileno ha intentado incorporar a través de leyes y decretos educacionales, a las diferentes culturas en el proceso de enseñanza y aprendizaje escolar, dando énfasis a la cultura de los pueblos indígenas desde una mirada externa. En el fondo "se crea una ley para los indígenas, sin los indígenas" (Arias-Ortega y Riquelme, 2019. P. 185).

De la misma forma, los/as profesores/as que perciben este problema, han intentado abordar la matemática desde los saberes propios de los distintos grupos socioculturales. De esta forma se genera la Educación

Matemática Intercultural (EMI), la cual busca proporcionar "mejores oportunidades de aprendizaje matemático, lo cual incluye diversificar los métodos de enseñanza y el conocimiento matemático" (Huencho et al., 2017, p. 311). Por este motivo el rol del/la docente en el proceso enseñanza-aprendizaje es fundamental, pues un/a profesor/a capacitado en EMI poseerá mejores herramientas e insumos para generar un aprendizaje significativo en sus estudiantes. Es por ello, que desvelar las creencias pedagógicas que subyacen a la práctica de aula, contribuye a tomar decisiones orientadas a mejorar el desempeño profesional (Bolívar, 2010).

Educación matemática en contexto intercultural

La educación tiene un rol fundamental para el desarrollo y la transmisión de la cultura en el proceso enseñanza-aprendizaje. Rodríguez y colegas (2018), en su investigación acerca de la Educación y Escuela, describen la educación como "el vehículo a través del cual se estructura una forma de conocimiento del mundo social, a través de la búsqueda de respuesta a problemas relacionados con su realidad humana y su interacción con el colectivo" (p. 35). Por este motivo, es necesario tener una noción del concepto de cultura, la cual corresponde a la herencia social de la humanidad (Linton, 1976). Del mismo modo, los pueblos indígenas al tener su propia cultura tienen conocimientos propios, los cuales corresponden a diferentes maneras de percibir y explicar el mundo (Peña-Rincón et al., 2017).

La ausencia del componente sociocultural dentro de la enseñanza de las matemáticas, no favorece el desarrollo del pensamiento crítico e identitario de los estudiantes (Skovsmose, 1999), en este sentido los conocimientos indígenas matemáticos deben ser contextualizados al momento de incorporarse en las escuelas, pues de esta forma se establecerán conexiones entre los contenidos matemáticos y los conocimientos de los/as estudiantes, lo que les permitirá encontrar el sentido a la disciplina desde su propio saber (Peña-Rincón et al., 2017).

Considerando que cada pueblo cuenta con un saber matemático propio que los identifica, el pueblo mapuche no se excluye de aquello y cuenta con aspectos de esta disciplina, tales como numerales, cuantificadores, operatoria básica, números racionales, mediciones y diseños geométricos (Huencho, 2015), los cuales se encuentran de forma implícita en los quehaceres cotidianos de la cultura como por ejemplo sembrar, tejer, cocinar, construir y cuidar animales (Huencho et al., 2021).

Por otra parte, entendemos que las creencias son "construcciones psicológicas formadas por ideas, comprensiones, imágenes o proposiciones que se consideran verdaderas" (Richardson, 1996, p. 106), las cuales derivan de experiencias con un fuerte componente evaluativo y afectivo. En relación a la enseñanza de la matemática, existen dos ejes que interfieren en las creencias de los/as docentes en torno a una Educación Matemática Intercultural, estas son las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y las creencias suscitadas por el contexto social (McLeod, 1992). Así, las creencias de los/as docentes son importantes para la mejora en el rendimiento de los/as estudiantes, como también son factores que condicionan su práctica profesional y las acciones que toma en el aula.

METODOLOGÍA

Esta investigación aborda un paradigma cualitativo con enfoque fenomenológico, de tipo no experimental descriptivo, la cual permite interpretar la realidad y los datos del fenómeno investigado

desde varias perspectivas, además de reconocer la evolución de este, lo que puede propiciar una redefinición y a su vez nuevos métodos para comprenderlos (Sarduy, 2007). Un enfoque fenomenológico, ayuda a profundizar en la investigación aportando como base del conocimiento la experiencia subjetiva inmediata de los hechos tal como se perciben (Forner y Latorre, 1996). Al respecto, en nuestra investigación consideramos que las creencias de los profesores derivan de las experiencias vividas y entendidas por cada uno de ellos/as.

Los participantes del estudio fueron 33 docentes de Enseñanza Media en Matemática, quienes ejercen docencia en Enseñanza Básica, Media y Superior. Los/as docentes fueron invitados/as a participar de una entrevista en profundidad, previamente piloteada, en el marco de la Educación Media en Matemática en contexto Mapuche, por medio de la plataforma Meet, las cuales fueron grabadas. Los participantes recibieron una carta de información y un consentimiento que firmaron donde se establece anonimato y confidencialidad.

Para el análisis se aplicó una codificación abierta, axial y selectiva desde el audio-video de las entrevistas a través del programa Atlas.ti 9. En este, se levantaron etiquetas emergentes desde la selección de fragmentos de las entrevistas, con las cuales se constituyeron 15 códigos fundamentales, agrupados finalmente en 5 dimensiones.

RESULTADOS PRELIMINARES

En los resultados preliminares de la investigación se realizaron tres tipos de análisis, el descriptivo, análisis relacional dentro de cada dimensión y análisis relacional entre las dimensiones.

Desde el análisis descriptivo de las entrevistas, las creencias de Profesores de Educación Media Sobre la Enseñanza de la Matemática en Contexto Mapuche (PEMEMCP), se descompone analíticamente en cinco dimensiones emergentes que son, el Conocimiento Mapuche (CM), Educación Intercultural (EI), Docente (D), Implementación Educativa (IE) y Políticas Educativas (PE). Las que están caracterizadas por las creencias que surgen de los/as entrevistados/as y sus respectivos componentes conceptuales, donde se describe la presencia y ausencia de las diferentes dimensiones y sus creencias. Las creencias con más alta frecuencia están relacionadas con la formación inicial docente, formación que incluya saberes mapuches y la necesidad de incorporar los conocimientos del pueblo en el currículum de matemática.

Con el análisis relacional dentro de cada dimensión, se analizaron las creencias por cada una de las dimensiones mediante el diagrama de Sankey, interpretando los resultados y relacionando las creencias de acuerdo al número de veces que los/as entrevistados/as hicieron alusión a estas.

Por ejemplo, respecto a la dimensión Conocimiento Mapuche (CM) los/as entrevistados/as creen que el pueblo mapuche tiene elementos matemáticos y son capaces de identificar algunos de ellos, sin embargo, no conocen la manera de involucrar esos elementos o se les dificulta aplicarlos en los aprendizajes de los estudiantes, como se puede evidenciar en la siguiente frase dicha por uno de ellos:

> "El uso del "*püron*", no he tenido la oportunidad de usar este tipo de elemento por la modalidad insisto (...), el juego de las habas que es bien popular, (...), "*awar kuzen*" creo que es su nombre, hay otros juegos que no recuerdo bien su nombre, pero sí son buenos elementos". PEM9

En cuanto a la dimensión Educación Intercultural (EI), los/as entrevistados/as coinciden en que la incorporación de la matemática intercultural en la enseñanza debe ser contextualizada, lo que se evidencia en la siguiente cita:

> "Si miramos bien a nivel país, no tenemos por qué solo mirar al pueblo mapuche, (...), tenemos que aprender harto del mundo Aymara (...), recordemos que, en esa época, y hoy en día porque no decirlo, las fronteras occidentales son de los occidentales poh', no de los pueblo originarios, (...), entonces los matices para referirse a una educación matemática intercultural, van a estar afecto no solamente desde un matiz del mapuche, si no que de matices de otros pueblos originarios". PES1

Es decir, la matemática intercultural debe ser atendida no sólo de manera localizada en la zona de mayor población indígena mapuche, sino, que debe considerar las diversas etnias existentes a nivel nacional.

Finalmente, en el análisis relacional entre dimensiones, en base a una codificación selectiva de Strauss y Corbin, se rescata que las creencias con mayor frecuencia mencionadas por los/as profesores/as son Condiciones de aula (CA), Interculturalidad en la educación (IE), Educación media matemática e interculturalidad (EMMI), Saberes mapuche (SM), Curriculum y matemática mapuche (CMM), Matemática intercultural para todos y todas (MITT), Política educativa en general (PEE), Propuesta de políticas educativas para la matemática intercultural (PPEMI), Características del docente (CD) y FID.

CONCLUSIONES

En función de los principales temas que emergen en torno a nuestra investigación, cuyo objetivo es comprender las creencias de profesores de educación media sobre la enseñanza de la matemática en contexto mapuche, se manifiestan cinco grandes dimensiones que están asociadas al Conocimiento Mapuche (CM), Educación Intercultural (EI), Docente (D), Implementación Educativa (IE) y Políticas Educativas (PE). En base a estas dimensiones los/as docentes concuerdan en que la aplicación de elementos mapuches en el contexto educativo es válido y pertinente, pero no se visualiza un uso extendido de estos dentro del aula. Además, explicitan una falta de conocimiento en esta materia.

Si bien, este es un tema que interfiere a nivel de una educación matemática intercultural mapuche para todos y todas, se evidencian similitudes de opinión entre los/as profesores cuando se discute si debiera ser incorporada en toda la población o sólo en aquellas regiones donde se concentran una mayor población de estudiantes mapuches. Ante esto, se constata que los/las profesores/as sostienen que una educación Matemática Intercultural no puede ser monopolizada exclusivamente bajo los conocimientos y saberes del pueblo originario con mayor predominancia en el país, en este caso, la cultura mapuche, sino que debe considerar y dar respuesta a las distintas necesidades socioculturales presentes en nuestro territorio nacional.

Finalmente, creemos que es necesaria una demanda ministerial, ya que en la actualidad la incorporación de la matemática en contexto intercultural sólo está sujeta al qué y el cómo enseña el docente en el aula, es decir, su interés personal. Además, sostenemos que es pertinente extender ciertas proyecciones donde se requiera una mayor investigación en la matemática indígena que atienda a la diversidad étnica de cada región de nuestro país y que pueda ser incorporada en la educación matemática de enseñanza media de

manera aplicada.

Referencias

Arias-Ortega, K. E., y Riquelme, P. A. (2019). (Des) encuentros en la Educación Intercultural en Contexto Mapuche, Chile. *Revista de estudios y experiencias en educación*, *18*(36), 177-191. https://dx.doi.org/10.21703/rexe.20191836arias8

Bolívar, A. (2010). El liderazgo educativo y su papel en la mejora: Una revisión actual de sus posibilidades y limitaciones. *Psicoperpectivas*, *9*(2), 9-33. https://dx.doi.org/10.5027/psicoperspectivas-Vol9-Issue2-fulltext-112

Forner, A. y Latorre, A. (1996). *Diccionario terminológico de investigación psicopedagógica*. Editorial EUB.

Huencho, A. (2015). Estudio de las Orientaciones curriculares del Programa Intercultural Bilingüe: un análisis emergente en función de la matemática y la cultura mapuche. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8*(2), 214-236. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274041586010

Huencho, A., Chandía, E., Rojas, F., y Williamson, G. (2021). Modelo de desarrollo del conocimiento matemático desde el Saber y Hacer del pueblo mapuche. *Educación Matemática*, *33*(2), 7-36 https://doi.org/10.24844/EM3302.01

Huencho, A., Rojas, F. y Webb, A. (2017). Educación matemática intercultural: Propuestas y proyecciones desde el pueblo mapuche. En E. Treviño, L. Morawietz, C. Villalobos y E. Villalobos (Eds.), *Educación intercultural en Chile: Experiencias, pueblos y territorios.* (pp. 301-331). Ediciones Universidad Católica de Chile.

Ibáñez-Salgado, N., Figueroa-Espínola, A. M., Rodríguez, M. S., y Aros-Nuñez, A. (2018). Interculturalidad en la formación docente: Un aporte desde las voces de personas de los pueblos originarios. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *44*(1), 225-239. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052018000100225

Linton, R. (1976). *Cultura y Personalidad*. Fondo Cultura Económica.

McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning* (575-598). Macmilla.

Peña-Rincón, P., Blanco-Álvarez, H. y Aroca-Araujo, A. (2017). Incorporación de los conocimientos matemáticos indígenas en los sistemas educativos de Colombia y Chile (1990-2013). En E. Treviño, L. Morawietz, C. Villalobos y E. Villalobos (Eds.), *Educación intercultural en Chile: Experiencias, pueblos y territorios.* (pp. 261-300). Ediciones Universidad Católica de Chile.

Quilaqueo, D., Quintriqueo, S., Torres, H., y Muñoz, G. (2014). Saberes educativos Mapuches: Aportes epistémicos para un enfoque de educación intercultural. *Chungará (Arica)*, *46*(2), 271-284. http://dx.doi.org/10.4067/S0717-73562014000200008

Richardson, V. (1996). "The Role of Attitudes and Beliefs in Learning To Teach", en John P. Sikula (ed.),

Handbook of Reseaarch on Teacher Education, Nueva York, Simon y Schster Mamillan, pp. 102-119.

Rodríguez, A., Herrera D., Bañol, W., y Vanegas, K. (2018). Educación y escuela: espacio para la ciudadanía, convivencia y diálogos. *Poiésis*, (35), 41-51. https://doi.org/10.21501/16920945.2960

Sarduy Domínguez, Y. (2007). El análisis de información y las investigaciones cuantitativa y cualitativa. *Revista Cubana de Salud Pública*, *33*(3), 4-6. https://doi.org/10.1590/s0864-34662007000300020

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Una empresa docente.

CONOCIMIENTOS Y CAMBIOS DEL REGISTRO DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE LA CARRERA DE INGENIERÍA DE UNA UNIVERSIDAD CHILENA

Solange Aranzubia, Natalia Klein y Sandra Ortúzar

Universidad Central de Chile, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

El presente trabajo tiene como objetivo identificar los conocimientos y cambios de registro de representación semiótica en el concepto de función que posee un grupo de estudiantes de primer año de la carrera de ingeniería de una universidad chilena, mediante una metodología cuantitativa de tipo descriptiva. Para la recolección de los datos se aplicó un cuestionario basado en la Teoría de Registro de Representación Semiótica de Duval a 20 estudiantes de un curso de Cálculo I. Los resultados muestran que a los estudiantes se les dificulta hacer la conversión y tratamiento entre registros semióticos en el concepto de función y no pueden explicar con sus palabras la definición de función ni relacionar las reglas de asignación con el dominio y codominio dado. Concluimos que para promover una comprensión profunda del concepto de función se debería dar énfasis a todos los registros semióticos y no solo al registro algebraico.

Funciones, registro semiótico, Cálculo, gráficos

INTRODUCCIÓN

En Chile, el concepto de función se enseña en 8° básico (13-14 años) comenzando con la definición de función, utilizando distintos recursos, tales como la metáfora de la máquina, el establecimiento de una regla entre *x* e *y*, las tablas, entre otros (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012, p.114). Más adelante, en la educación superior para las carreras afín, se profundiza este concepto, específicamente en las carreras de Ingeniería.

De acuerdo con Hitt (2003), los profesores de enseñanza media utilizan solamente la representación algebraica para introducir el concepto de función, produciendo una limitación en su comprensión. Desde este punto de vista, la actividad matemática de utilizar distintas representaciones de un concepto matemático no es considerado por muchos profesores para la construcción del conocimiento. Adicionalmente, Amaya de Armas et. al. (2016, p. 140) menciona que, a pesar de los esfuerzos de los estudiantes por establecer conexiones entre diferentes representaciones de las funciones estudiadas, la generalidad es que privilegian transformaciones tipo conversión hacia un sólo registro, donde recodifican la información, realizan algunos tratamientos y proceden a responder.

El objetivo de este trabajo es identificar los conocimientos y cambios de registro de representación semiótica en el concepto de función que posee un grupo de estudiantes de primer año de la carrera de ingeniería de una universidad chilena. La pregunta que guio nuestro estudio es: ¿Cuáles son los conocimientos y los cambios de registro de representación semiótica del concepto de función, que tienen los estudiantes de primer año de ingeniería en la asignatura de Cálculo I de una universidad chilena?

MARCO TEÓRICO

Esta investigación se encuentra enmarcada en la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas propuesta por Duval (1998), el cualseñala que los objetos matemáticos son accesibles a través de los registros de representación. Lo anterior, se vuelve importante dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, debido a que los objetos matemáticos se logran identificar a partir de diferentes representaciones semióticas.

Además, de acuerdo con Duval (1998), para que el sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe tener en cuenta tres actividades cognitivas fundamentales: (1) La formación de una representación debe ser reconocible dentro de un registro dado, es decir, se deben considerar las reglas propias del registro semiótico en el cual está la representación, para así asegurar la identificación y el reconocimiento de la representación; (2) se debe poder realizar la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada, lo que se conoce como tratamiento y (3) se debe poder realizar la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial, lo cual se denomina conversión.

METODOLOGÍA

El estudio está enmarcado en una metodología cuantitativa de tipo descriptiva. La técnica de recolección de datos utilizada fue un cuestionario, validado por un investigador experto. El cuestionario consistió en dos partes, la primera parte de antecedentes con dos preguntas, una relacionada con el género con el que se identifican los estudiantes y otra con la forma en que fue enseñado el concepto de función en educación básica y/o media. La segunda parte del cuestionario apuntaba a dos ejes fundamentales: uno referido a la definición de función (cuatro preguntas) y el otro a la conversión y/o tratamiento de los registros semióticos (seis preguntas). Los registros utilizados fueron el algebraico, el tabular, el gráfico y el figural.

El grupo que participó respondiendo el cuestionario fue de 20 estudiantes, de 25 que asistían a la asignatura de cálculo I de primer año de una universidad de Chile. La edad de los estudiantes fluctúa entre los 17 a 20 años, con un participante de 24 años, de ellos siete son mujeres y trece hombres.

Las preguntas del cuestionario se presentan en la figura 1.

1. ¿Cómo definirías una función?
2. Si $f: A \to B$ es una función, entonces, ¿Cuál de las siguientes alternativas es correcta?
3. Dada la siguiente expresión $x^2 + y^2 = 1, x \in [-1,1]$ ¿Es una función?, ¿Por qué?
4. Dada la siguiente expresión $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si\ n\ es\ par \\ -(n-1)^2 & si\ n\ es\ \text{impar} \end{cases}$ ¿Es una función?, ¿Por qué?
5. ¿Cuál(es) de las siguientes imágenes representan una función? (puedes seleccionar todas las que encuentres correctas) (registro figural)
6. ¿Cuál(es) de los siguientes gráficos representan una función? (puedes seleccionar todas las que encuentres correctas) (registro gráfico)
7. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones representan una función? (puedes seleccionar todas las que encuentres correctas) (registro algebraico)
8. Asocia las figuras con su respectiva función. (registro al figural al registro algebraico)
9. Asocia la función con la tabla que más la represente (registro tabular al registro algebraico
10. Asocia los gráficos con su respectiva función (registro gráfico al registro algebraico)

Figura 1: Preguntas del cuestionario. Elaboración propia

En el análisis de las preguntas abiertas emergieron tres grandes categorías: (1) respuesta correcta, (2) respuesta incorrecta y (3) no sabe la respuesta. En la categoría (1) encontramos como subcategorías la presentación de una justificación correcta, una justificación incorrecta o respuestas sin justificación. En cuanto a las categorías (2) y (3), se evidenciaron justificaciones utilizando los elementos de una función y respuestas sin justificación. Para analizar las respuestas a las preguntas cerradas, se trasladó la información contenida en el formulario de Google a un documento de Excel, en él cual se analizaron las categorías de respuesta correcta, respuesta con mayor porcentaje y respuesta esperada.

Por otro lado, para analizar las preguntas donde se podía seleccionar más de una alternativa (preguntas 2, 5, 6 y 7) hubo dos tipos de análisis: el primero con las categorías antes mencionadas (respuesta con mayor porcentaje y respuesta esperada) y el segundo por alternativa observando el porcentaje de respuestas en cada una de ellas, realizando una descripción de lo ocurrido y destacando algunas respuestas.

Finalmente, en las preguntas 8, 9 y 10 donde se buscaba que los estudiantes pasaran de un registro figural, tabular o gráfico al registro algebraico se desarrollaron dos tipos de análisis: el primero con una mirada general de las respuestas y el segundo por tipo de registro y su respectiva alternativa. Por último, realizamos una descripción de lo ocurrido seleccionando respuestas destacadas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la primera parte del cuestionario, particularmente, en la pregunta sobre la enseñanza de las funciones un 85% de los encuestados respondió que le enseñaron el concepto de función y el 15% restante respondió que no.

A continuación, mostramos la Tabla 1 que sintetiza el porcentaje de respuestas correctas en las preguntas 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

N° de pregunta	1	2	5	6	7	8	9	10
% respuesta correcta	45%	5%	50%	10%	5%	50%	45%	25%

Tabla 1: Porcentajes de respuestas correctas de las preguntas 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9 y 10. Elaboración propia

A continuación, mostramos la Tabla 2, que sintetiza los resultados de las respuestas abiertas de la pregunta 3 y 4.

N° pregunta	Respuesta correcta			Total	Respuesta incorrecta		Total	No sé		Total
	JC	JI	SJ		JF	SJ		JF	SJ	
3	10%	25%	5%	40%	15%	5%	20%	5%	35%	40%
4	5%	45%	15%	65%	0%	0%	0%	5%	30%	35%

Tabla 2: *Porcentaje de codificación respuestas abiertas. Nota:* JC= Justificación Correcta; JI= Justificación Incorrecta; SJ= Sin Justificación; JF= Justificación con elementos de Función. Elaboración propia

A partir de los resultados obtenidos en esta investigación, aunque esperábamos que todos los estudiantes respondieran que el concepto de función fue abordado en algún momento en la enseñanza escolar, encontramos que un 15% respondió no haber visto dicho contenido, lo anterior llama la atención debido a que las funciones se enseñan desde 8° básico continuando en la enseñanza media (MINEDUC, 2012).

En las preguntas 1 y 2 menos del 50% de los estudiantes responde correctamente. Lo anterior coincide con los resultados de la investigación de Amaya de Armas et. al. (2016), realizada con futuros profesores de matemática donde se encontraron serias dificultades con la comprensión de la noción función, específicamente con la identificación y uso de los elementos de las funciones involucradas.

En las preguntas abiertas 3 y 4, los encuestados escribieron las siguientes respuestas: (1) "no por que no dice que es una función en la expresión", (2) "no lo es porque no me dan un dom y cod." y (3) "no porque no tiene una función que la esté trabajando" esto se podría deber a que los alumnos están acostumbrados que cuando aparece $f(x)$ sea automáticamente una función, lo que produce una mecanización por parte del estudiante y según Prada et al. (2016), la acción del estudiante a realizar procesos mecánicos de forma correcta o no, no implica que se haya comprendido de forma completa las nociones estudiadas.

Para las preguntas 5, 6 y 7, los encuestados respondieron de forma correcta un 50%, 10% y 5% respectivamente. Tal como lo mencionan Artigue (1995) y Planchart (2002), desde la experiencia de docentes, se ha evidenciado que los estudiantes luego de enfrentarse al concepto de función solo se limitan al uso de una regla para probar si es una relación. De esta forma, validan la regla de asignación solo con el registro algebraico, limitando así su comprensión, debido a que es necesario que el estudiante pueda comprender el concepto en todas sus formas de representación para así entenderlo en su totalidad (Prada, et al., 2017, p.16).

Luego, en las preguntas 8, 9, y 10, donde se le pedía al encuestado la conversión de registros, podemos apreciar que solo un 50% alcanza la respuesta correcta. Según Hitt (2003), es frecuente que la actividad de conectar distintas representaciones de un concepto no sea visualizada por muchos docentes como una tarea importante en la construcción del conocimiento matemático y en particular, las tareas de conversión son subestimadas por parte de los docentes con relación al concepto de función. Sin embargo, las tareas de conversión promueven un mejor entendimiento de las funciones y permiten el desarrollo de procesos de visualización.

De acuerdo con los resultados obtenidos, podemos mencionar que los encuestados tienen dificultades cuando deben realizar cambios de registros. Es importante considerar que, según lo mencionado por Duval (2016), la comprensión matemática empieza cuando se realiza la coordinación de registros. Reconocer un mismo objeto matemático a través de representaciones de dos o más registros diferentes no es una operación local u ocasional, sino es un resultado de una coordinación global de registro. Además, mediante variados tipos de conversiones, más que tratamientos, se visualiza la complejidad cognitiva de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas y en los desarrollos de actividades matemáticas específicas requeridas.

CONCLUSIONES

El principal hallazgo de este estudio es que la mayoría de los estudiantes encuestados no pueden definir ni explicar con sus propias palabras si una expresión dada es o no una función. Además, no pueden relacionar las reglas de asignación con el dominio y codominio dado. Adicionalmente, podemos decir que una de las dificultades que presentan los estudiantes es la conversión de los registros semióticos tabular, gráfico y figural al registro algebraico, debido a que, si no se les pide explícitamente en la pregunta del cuestionario, ellos no lo realizan de forma habitual. Junto con ello, los estudiantes tienen dificultades al reconocer la función cuadrática en el registro algebraico, dados dos gráficos muy similares,

ya que, como lo señala Duval (2016), esto requiere que el estudiante al momento de discernir necesite una condición cognitiva más profunda. Con respecto a los conocimientos de los estudiantes, podemos mencionar que solamente tienen nociones del concepto de función y mencionan ciertos elementos de ella, pero no pueden definir ni reconocer la función como tal.

Por otra parte, el concepto de función debe ser enseñado dando el mismo énfasis a todos los registros semióticos y no solo al registro algebraico para así promover una condición cognitiva más profunda, tal como lo señala Hitt (2003), es frecuente que la actividad de conectar distintas representaciones de un concepto no sea realizada por muchos docentes y en particular, las tareas de conversión son subestimadas por parte de los docentes con relación al concepto de función.

Finalmente, reflexionando sobre las limitaciones de este estudio, encontramos que, al realizar un cuestionario anónimo, al momento de analizar los resultados no es posible profundizar más allá de las respuestas dadas, ya que algunas de ellas no se entienden y no es factible contactarse con los estudiantes posteriormente. Siguiendo con las proyecciones de este estudio, se puede mejorar aplicando el mismo cuestionario (pretest) al grupo de estudiantes, pero no solo quedarse con los resultados obtenidos, sino poder intervenir con una clase y volver a aplicar otro cuestionario (postest), realizando así una investigación cuasi experimental.

Agradecimientos

Beca Postgrado PUCV 2021 y Beca De Rendimiento Académico de Postgrado de Magister en Didáctica de la Matemática, PUCV 2021.

Referencias

Amaya De Armas, T., Pino, L., y Medina A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. Educación matemática, 28(3), 111-144.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V.Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2016). *Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas*. En Duval, Raymond; Sáenz-Ludlow, Adalira (Eds.), Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis. (pp. 61-94). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2012). *Bases Curriculares 2012*. Autor.

Prada, R., Hernández, C. y Ramírez, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. *Revista Científica, 25*, 188-205.

Prada, R., Jaimes, L. y Hernández, C. (2017). Representación Semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del colegio a la universidad. *Panorama, 11*(20), 34-44.

UN ESQUEMA ARTICULADOR DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL Y SU IMPLICANCIA EN LA ENSEÑANZA

Patricia Rojas Salinas

Universidad del Bío-Bío

Uno de los problemas del aprendizaje y la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral en el nivel universitario es la ausencia de relaciones entre los conceptos primordiales de esta disciplina; la derivada y la integral. Esta ***"Comunicación Breve",*** *plantea cómo una Descomposición Genética (DG) y la construcción de un Esquema, que describe relaciones entre los conceptos, es usado como modelo para la construcción de estos dos objetos matemáticos en simultáneo lo que denominamos: Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Desde la teoría APOE (acrónimo de: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), se observa la forma en que los estudiantes muestran evidencia de las estructuras conforme aprenden, y con ello las relaciones entre los mecanismos de abstracción reflexiva, evidenciando así la construcción del propio esquema mediante una caracterización de los estudiantes de un curso de ingeniería, exhibiendo, el tipo de relación que muestran en cada uno de los niveles del Esquema ya sea este nivel: Intra- CDI, Inter-CDI o Trans-CDI.*

Esquema, Cálculo, Derivada, Integral, Teoría APOE.

INTRODUCCIÓN

Vasta literatura muestra, la dificultad de los estudiantes para comprender los conceptos abstractos del cálculo diferencial e integral además de su dificultad para aplicarlos en la solución de distintos problemas cotidianos (por ejemplo, Tatar & Zengin, 2016; Bresoud, 2017; Wagner, 2018; Pino-Fan, et al., 2018; Fuentealba, et al., 2019). Los autores, ponen de manifiesto que los estudiantes presentan dificultades importantes frente al aprendizaje del cálculo diferencial e integral y que, cuando terminan de cursar, los conceptos de derivada y de integral que construyen quedan compartimentalizados, es decir, no construyen relaciones claras entre ellos. Es por eso necesario intentar acercamientos con nuevos diseños didácticos. Presentamos entonces, una contribución a la literatura que consiste y tiene como objetivo diseñar y analizar una propuesta didáctica en la que se establecen relaciones simultáneas entre estos dos conceptos que dan origen al cálculo diferencial e integral valorando la evolución del Esquema del Cálculo Diferencial e Integral.

Se diseñó una Descomposición Genética que permite el diseño de la propuesta didáctica y de actividades para que los estudiantes trabajen durante todo un curso, basados en la Teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) de la educación matemática que cuenta con las estructuras teóricas y una metodología asociada a ellas para llevar a cabo el trabajo completo de diseño e investigación (Arnon, et al., 2014).

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE parte del análisis de los conceptos matemáticos, haciendo hincapié en las construcciones cognitivas necesarias para el aprendizaje. Toma como referencia las ideas que plantea Piaget en torno a cómo el estudiante pasa de un estado de conocimiento a otro (Dubinsky 1996; Czamocha, et al., 1999). La teoría se preocupa por como se aprenden y enseñan las Matemáticas, estudiando cómo los estudiantes cambian de un nivel de conocimiento a otro; en este contexto, la definición que la teoría APOE da para el conocimiento matemático es: "*El conocimiento Matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas, problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas"* (Dubinsky, 1996, pág. 32). Por su parte, los mecanismos de construcción de este conocimiento están basados en la noción de "*abstracción reflexiva*" de Piaget (Trigueros, 2005).

La estructura de Esquema se define como una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas y las relaciones entre ellos de manera que, para el estudiante forman una estructura coherente. Un Esquema se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua. Por lo tanto, los Esquemas son estructuras que se describen mediante su organización y las estructuras mentales que lo componen y que un estudiante muestra haber construido sobre un concepto matemático en un momento dado (Arnon, et al., 2014).

Los Esquemas son dinámicos, evolucionan, según las relaciones que se construyan entre los conceptos. La descripción de esta evolución se hace mediante la "Triada" de Piaget y García (1982), que corresponde a una progresión de tres niveles: Intra-, Inter- y Trans- de estructuración. Los mecanismos que permiten pasar de un nivel a otro son la asimilación y la acomodación; cada nivel incluye distintos tipos de relaciones y transformaciones entre los componentes del Esquema, además del desarrollo de la coherencia de este mismo. Cuando es necesario hacer Acciones sobre un Esquema o estudiar sus propiedades el Esquema se tematiza en un Objeto. En la teoría APOE el Esquema se utiliza para hacer las descripciones del conocimiento matemático a otro nivel de generalidad (Arnon, et al., 2014).

En el nivel Intra- el estudiante enfoca cada componente del Esquema, las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas individuales están aislados de otros objetos cognitivos de naturaleza similar construyéndose relaciones internas centradas básicamente en similitudes y diferencias; este nivel se manifiesta mediante el análisis de casos particulares que no están vinculados entre sí, o lo están, pero de manera insuficiente. En el nivel Inter- se comprenden las transformaciones entre las estructuras componentes del Esquema, esto es importante dado que permite la comparación de los casos particulares y la construcción de transformaciones al poner en evidencia tanto las diferencias como las correspondencias entre ellos. Por último, en el nivel Trans- surge la necesidad de determinar las razones tras esas transformaciones entre componentes del Esquema; éste se ve como un todo y se construye una estructura. El individuo puede dar cuenta de su composición, mediante una síntesis; cuando las transformaciones son "*dominadas y generalizadas permiten nuevas síntesis, o sea se construyen totalidades hasta entonces inaccesibles, con sus nuevas propiedades*" (Piaget & García, 1982, pág. 171).

En cada etapa de la triada, el estudiante reorganiza conocimientos construidos durante la etapa anterior; el paso de una etapa a la otra incluye no sólo un aumento en los elementos del esquema, sino la construcción de nuevas formas de relaciones entre los elementos de éste (Arnon, et al., 2014).

METODOLOGÍA

Se realizó un estudio cualitativo de carácter exploratorio; la investigación se centra en el diseño de una Descomposición Genética (DG) de derivadas e integrales "en simultáneo", es decir, a construirse conjuntamente permitiendo generar un Esquema de la matemática muy distinto a lo disponible actualmente en la mayoría de las instituciones (Ver resumen de la DG en figura 1). El Esquema y sus niveles Intra- CDI, Inter- CDI y Trans-CDI pueden ser revisados en Rojas y Trigueros (2020).

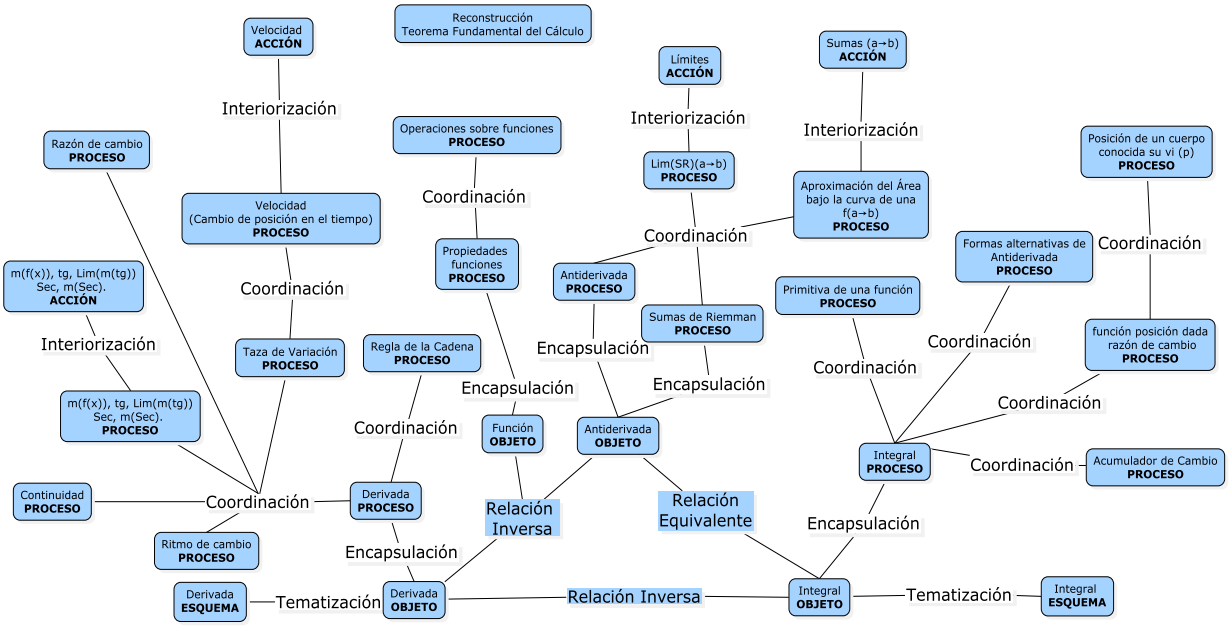


Figura 1: Mapa de la Descomposición Genética de derivadas e Integrales en simultáneo (Rojas y Trigueros, 2020).

Esta descomposición genética es original. Con este diseño se planificó y diseñó la propuesta de aula con actividades para llevar a cabo en clases usando diversos dispositivos; la asignatura implementada corresponde a la segunda dentro del plan de Ciencias Básicas en el área del cálculo (es posterior a

Introducción al Cálculo); tiene una duración de un semestre, donde todos los cursantes rinden por primera oportunidad el curso. Al finalizar el curso se realizó una entrevista individual a los 17 estudiantes que cursaron la asignatura.

La entrevista se enfocó en 14 problemas distribuidos en cinco categorías de análisis: herramientas del cálculo, concepto de derivada, concepto de integral, relación entre derivada e integral y su aplicación; a su vez, está compuesta por subcategorías: desarrollo analítico, manejo de procesos infinitos, sumas de Riemman, recta tangente, métodos de integración, aplicaciones de la integral, interpretación de derivadas e integrales en distintas representaciones, problemas y el teorema fundamental del cálculo.

RESULTADOS

El análisis de las entrevistas detalló para cada estudiante el tipo de concepción que muestra en términos de la teoría APOE, el tipo de relación existente en cada una de las cuestiones consultadas y la relación dada por la construcción del esquema que se ha evocado en ese momento. Para efecto de esta comunicación se presenta un resumen de las cuestiones encontradas mostrando la caracterización del análisis respectivo basado en cada uno de los niveles del Esquema, señalando si los estudiantes se encuentran en un nivel Intra- CDI, Inter-CDI o Trans-CDI según corresponda.

Seis alumnos mostraron evidencia de haber desarrollado su Esquema a un nivel Intra -CDI. Sus respuestas muestran que todos ellos interpretan la derivada como una razón de cambio y que han construido la relación de la derivada con la pendiente de la recta tangente, como Procesos u Objetos aislados de la integral la que interpretan como antiderivada también como Proceso u Objeto; no muestran claramente haber construido relaciones de transformación entre los Objetos derivada e integral.

Se observó que 6 alumnos mostraban evidencia del nivel Inter– CDI del Esquema. Ellos muestran, haber construido las interpretaciones de la derivada y la anti-derivada como transformaciones inversas una de la otra, y una clara interpretación de la relación entre ellas en la definición que entregan para la integral. Al construir la derivada, los alumnos la relacionan con un ritmo de cambio, aplican la transformación que han realizado de la derivada como inversa de la integral construyéndola como una función que se puede denominar primitiva que corresponde a la función inversa de la razón de cambio y que consideran en la solución de problemas como equivalente a encontrar la posición de un cuerpo conociendo su velocidad, o a encontrar una función a partir del conocimiento de la pendiente de tangente a su gráfica.

Solo un estudiante, mostró evidencia de haber desarrollado el Esquema al nivel Trans – CDI; en su trabajo se observan una evolución más rápida del Esquema.

CONCLUSIONES

A lo largo de la investigación, se obtuvo evidencia de la evolución del Esquema CDI identificando las tres etapas de su evolución. La propuesta didáctica planteada en la construcción del Esquema del Cálculo Diferencial e Integral ofrece a los estudiantes oportunidades para reflexionar sobre las estructuras que componen el esquema y observando al Cálculo Diferencial e Integral como un todo.

El uso de la teoría APOE permite entre otras cosas, entender cómo pasa un estudiante de un nivel de conocimiento al otro y cómo preparar mejoras para el proceso de Enseñanza y Aprendizaje.

Referencias

Arnon, I., Cotrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York: Springer.

Bressoud, D., Mesa, V., & Rasmussen, C. (2015). Insights and recommendations from the MAA National Study of College Calculus. New York: MAA Press.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, .. ,., & Vidakovic, D. (2001). Conceptions of area in students and history . The College Mathematics Journal, 32(2), 99- 109.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática, 8(3), 24-41.

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoro, G., & Cárcamo, A. (2019). The Understanding of the Derivative Concept in Higher Education . Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15(2).

Piaget, J., & García, R. (1982). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. Siglo XXI.

Pino-Fan, L. R., Gordillo, W., Font, V., Larios, V., & Bredas, A. (2018). Analysis of the meanings of antiderivative used by tudents of the first engineering courses. International Journals of Science and Mathematics Education, 16(6), 1091- 1113.

Rojas y Trigueros (2020). El esquema del Cálculo Diferencial e Integral para ser enseñado en simultáneo. Revista electrónica de investigación en Educación en Ciencias, 15(2), 12-26.

Tatar, E., & Zengin, Y. (2016). Conceptual Understanding of Definite Integral with GeoGebra, Computers in the Schools. Theory, and Applied Research, 33 (2), 120-132.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación Matemática, 17(1), 5-13.

Wagner, J. F. (2018). Student' obstacle in using Riemann um interpretations of the definite integral. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4 (3), 327- 256.

EN BUSCA DE EVIDENCIAS SOBRE EL ROL DE LA INHIBICIÓN EN LA COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Valeria Randolph[1], Marcela Parraguez[1], David M. Gómez[2]

[1]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [2]Universidad de O'Higgins

Esta comunicación presenta un estudio en curso que aborda la comprensión de los números complejos desde una perspectiva cognitiva interdisciplinaria, que reúne a la Didáctica de la Matemática y la Neurociencia Cognitiva a través de la integración teórica de una variedad de los Modos de Pensar la Matemática de Sierpinska y la función ejecutiva de Inhibición. En lo específico, a partir de evidencias concretas se plantea un problema de control inhibitorio que estaría implicado en la resolución de tareas de números complejos y se exhibe una propuesta teórica y metodológica para su abordaje que contempla un enfoque de métodos y técnicas mixto. Además, como un primer avance de la investigación, se precisan algunas tareas que fueron aplicadas a un caso de estudio preliminar y que entregan evidencias respecto a la conformación que tiene el pensamiento y el papel de la Inhibición en la comprensión de los números complejos en profesores de matemáticas.

Números Complejos, Comprensión Matemática, Modos de Pensar, Inhibición, Neurociencia

La comprensión de los números complejos desde una perspectiva interdisciplinarian de investigación

Es de interés para este estudio contribuir al conocimiento para la comprensión y la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje en un campo numérico avanzado, el de los números complejos. Es preciso indicar que este objeto matemático no solo se interpreta como un conjunto de números, es decir, como una colección de elementos que poseen una característica común; sino que, más precisamente, es interpretado desde su definición como un sistema —sistema numérico— en cuanto a que está provisto de tres estructuras que están entrelazadas entre sí: una estructura algebraica, una estructura de orden y una estructura topológica. Tal distinción permite enfrentar la comprensión de estos números desde un punto de vista superior —como una categoría—, considerándolos en todas sus dimensiones y no tan solo como la adjunción de un conjunto de números a uno preexistente, cuyas propiedades y características no son explícitas.

En tal sentido, el sistema de los números complejos (**C**) se constituye como un objeto matemático de complejidad inherente. Su comprensión conlleva un gran desafío intelectual que genera ciertas demandas a su enseñanza. En efecto, para desarrollar una comprensión más allá de lo procedimental, es necesario que los aprendices alcancen niveles superiores de abstracción y contrapongan ideas arraigadas bastante resistentes al cambio, sobre conceptos y propiedades construidos en sistemas numéricos precedentes. En lo concreto, el tránsito cognitivo de los números reales a **C** acarrea, entre otros, un importante cambio de

la naturaleza epistemológica del número, que permite ampliar su significado a uno que lo dispone fuera de la habitual recta numérica real. Así, una interpretación sumamente arraigada del número se ve problematizada, revelándose como una fuente de dificultades y errores en el proceso de comprensión de **C** como sistema de *números*.

La literatura especializada da cuenta de diferentes investigaciones que se han encargado de detectar dificultades y errores en la comprensión de **C** (e.g., Karakok et al., 2015), así como de generar propuestas de enseñanza concretas que contribuyan a su apropiación (e.g., Aznar et. al, 2018), toda vez que se ha concluido que un alto porcentaje de los aprendices rechaza al número complejo como número (Bagni, 2001); y se ha detectado el problema de una enseñanza *algebrizada* que lo acentúa, frenando oportunidades de desarrollo para su comprensión como sistema de números propiamente tal (Randolph y Parraguez, 2019). Estudios recientes (Kontorovich, 2018; Randolph y Parraguez, 2019) han ido más allá en el tema de las dificultades y errores ligados a la comprensión de **C** y han identificado un importante fenómeno de naturaleza cognitiva del cual poco se conoce: un *sesgo de los números reales sobre **C***, de características muy similares al ampliamente documentado sesgo de los números naturales (o enteros) sobre los números racionales (Ni y Zhou, 2005), en el que estudiantes, tanto universitarios como escolares, extrapolan conceptos y propiedades válidas en un dominio numérico más básico a otro más avanzado, en el que estos conceptos y propiedades ya no son necesariamente verdaderos.

Bajo este escenario y con el fin de describir con mayor fineza los procesos cognitivos que subyacen a la interpretación de **C,** en relación con la comprensión profunda del mismo, se consideran en este estudio resultados de investigaciones actuales sobre cognición matemática derivados del campo de la Neurociencia Cognitiva. En lo específico, se aborda el constructo de las Funciones Ejecutivas (FE), habilidades mentales de nivel superior que son requeridas para monitorear y controlar el pensamiento y la acción (Cragg y Gilmore, 2014) y que, por tanto, permiten a una persona autorregularse, planificar, monitorear y evaluar su actuación en la resolución de un problema. Más precisamente, interesa explorar uno de los subcomponentes de las FE, a saber, la función de Control Inhibitorio, toda vez que un pensamiento inapropiado en términos de números reales en tareas de números complejos puede ser, en parte, un problema de Inhibición. De hecho, algunas tareas de números complejos pueden resolverse basándose en el conocimiento previo de los números reales —como sumar los números complejos (2,3) y (-1,9)—, pero otras necesitarán que ese conocimiento sea inhibido, pues requerirán un razonamiento cualitativamente distinto para responder correctamente —como, por ejemplo, calcular $\sqrt[4]{1}$—.

De esta forma, se aborda la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo se interpreta el proceso de comprensión de **C** considerando el rol de la función ejecutiva de Inhibición?

Constructo teórico

Desde la Didáctica de la Matemática, se utiliza la teoría de los Modos de Pensar la Matemática (Sierpinska, 2000, 2005) que brinda elementos para el estudio de la conformación que tiene el pensamiento en el proceso de comprensión de un fragmento de la Matemática. Concretamente, Sierpinska (2000) identificó tres modos de pensar objetos del Álgebra Lineal y que en esta investigación se han extendido al tópico de los Sistemas Numéricos, con la finalidad de hacer explícito el Modo de Pensar Práctico (PP) y Teórico (PT) de un dominio numérico. Un avance de la investigación ha

caracterizado los Modos PP y PT de **C** como: el modo PP *Sintético Geométrico-Gráfico* (SGG), ligado al plano complejo; el modo PT *Aritmético-Algebraico* (AA), vinculado a la expresión algebraica $a + bi$ tal que a y b números reales e i la unidad imaginaria; y el modo PT *Analítico-Estructural* (AE), correspondiente a la estructura algebraica de cuerpo $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ tal que $i^2 = -1$.

En relación a la Inhibición, algunos autores del campo de la Neurociencia Cognitiva apuntan a ella como la función unificadora de procesos ejecutivos (memoria de trabajo, cambio, flexibilidad, atención, entre otros) y destacan el papel evidente que tendría en la Matemática, por ejemplo, en tareas que provocan una respuesta intuitiva pero incorrecta (Van Dooren y Inglis, 2015). En este estudio, se entiende la Inhibición —de acuerdo a una adaptación de la definición que brinda MacLeod (2007)— como: la detención o anulación de un Modo de Pensar la Matemática, con o sin intención. Detener o anular implica que debería haber un acto de retención mental en el que se asume que es requerido cierto esfuerzo. En este sentido, el desempeño de un aprendiz en ciertas tareas de números complejos debiera evidenciar *interferencia*, es decir, una disminución debida al procesamiento de alguna información irrelevante. Así, la Inhibición es entendida como el mecanismo teórico que potencialmente explica esa interferencia. En el estudio que se presenta, se busca explorar si los Modos de Pensar los números reales o los Modos de Pensar **C** se configuran como elementos interferentes, que hagan necesario inhibir cierto tipo de información para la resolución exitosa de tareas de números complejos.

Aspectos metodológicos

Para alcanzar los propósitos planteados, este estudio considera un diseño metodológico mixto complementario, que permite recopilar, analizar e integrar datos cuantitativos y cualitativos en alguna etapa del proceso de investigación en un solo estudio. La razón para incorporar ambos tipos de datos viene dada por la naturaleza interdisciplinaria de la investigación, que busca proporcionar una imagen más completa del problema de estudio (comprensión de **C**). Específicamente, se llevará a cabo un diseño de estrategia integral secuencial (CUAL integra CUAN) (Creswell, 2013) que consta de dos etapas. En este diseño los datos cuantitativos se recopilan y analizan primero, mientras que los datos cualitativos se recopilan durante todo el estudio y se analizan en segundo lugar, aunque son la fuente primaria de datos. En particular, los datos cuantitativos apoyan la medida de Inhibición (test de Inhibición), el desempeño en la resolución de tareas de números complejos (test de números complejos) y la selección intencionada de grupos para la siguiente fase. Luego, se sigue con un enfoque cualitativo de estudio de casos múltiple, para analizar en profundidad el rol que juega una medida baja o alta de Inhibición en el tránsito cognitivo de números reales a **C** y en los tránsitos bidireccionales AA-SGG y AE-SGG (entrevista semiestructurada basada en tareas). Por lo tanto, los datos y resultados cuantitativos proporcionan una primera imagen parcial del problema de investigación, mientras que los datos cualitativos y su análisis complementan estos resultados estadísticos al abordar con mayor fineza y profundidad los tránsitos cognitivos en el contexto de la comprensión profunda de **C**.

Un caso de estudio preliminar

Un primer avance de la propuesta de investigación fue aplicada a un caso de estudio (Stake, 2010), entregando evidencias respecto a la disposición del pensamiento de profesores de matemáticas en

ejercicio en el desarrollo de ciertas tareas de números complejos. Específicamente, 18 profesores de diversas regiones del país respondieron un cuestionario de manera virtual y sincrónica que contempló cuatro tareas. El instrumento se diseñó en Google Forms y se aplicó considerando un tiempo determinado para solucionar cada ítem, además de solicitar que no se utilizara lápiz, papel y calculadora, con el fin de interpretar qué Modos de Pensar eran priorizados y venían primero a la mente en la resolución de los problemas.

Las preguntas de las tareas se centraron, principalmente, en el tránsito SGG-AA. Las respuestas fueron recopiladas en un archivo Excel y fueron interpretadas por dos investigadoras utilizando indicadores definidos para este propósito. El análisis de las producciones realizadas por los informantes evidencia que los profesores que movilizan su pensamiento desde un modo AA hacia un Modo de Pensar SGG (y viceversa), logran resolver con éxito los problemas. Para ello, transitan de un Modo de Pensar a otro a partir de la forma (a, b) de un número complejo, elemento de la matemática que es validado como un articulador entre estos Modos de Pensar **C**. Además, se observa la interferencia de modos de pensar los números reales, que no son inhibidos y llevan a respuestas erróneas, tal como pensar que un número complejo z es mayor que 4 y menor que 3.

CONCLUSIÓN

Las evidencias obtenidas permiten refinar las tareas matemáticas que se propondrán a los casos de investigación —futuros profesores de matemáticas— e incorporar nuevos ítems en los instrumentos que se utilizarán para medir la función de Control Inhibitorio, que esperamos se complete durante los próximos meses.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el programa de Formación de Capital Humano Avanzado de CONICYT, a través de la Beca de Doctorado Nacional CONICYT-PFCHA/Doctorado Nacional/2019-21191199.

Referencias

Aznar, M. A., Distéfano, M. L., Moler, E., y Pesa, M. (2018). Una secuencia didáctica para favorecer la conversión de representaciones semióticas de curvas y regiones del plano complejo. *Uniciencia*, *32*(1), 46-67. doi: 10.15359/ru.32-1.4

Bagni, G. (2001). La Introducción de la Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de los Números Complejos. Una Investigación Experimental Desempeñada en la Educación Media Superior. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, *4*(1), 45-61.

Cragg, L., y Gilmore, C. (2014). Skills underlying mathematics: The role of executive function in the development of mathematics proficiency. *Trends in neuroscience and education*, *3*(2), 63-68. doi: 10.1016/j.tine.2013.12.001

Creswell, J. (2013). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approach*. SAGE Publications.

Karakok, G., Soto-Johnson, H., y Anderson Dyben, S. A. (2015). Secondary Teachers' Conception of Various Forms of Complex Numbers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(4), 327-351.

Kontorovich, I. (2018) Undergraduates' images of the root concept in R and C. *The Journal of Mathematical Behavior*, *49*, 184-193. doi: 10.1016/j.jmathb.2017.12.002

MacLeod, C. M. (2007). The concept of inhibition in cognition. In D. S. Gorfein & C. M. Macleod (Eds.), *Inhibition in cognition* (1st ed., pp. 3–23). Washington, DC: American Psychological Association.

Ni, Y., & Zhou, Y.D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.

Randolph, V., y Parraguez, M. (2019). Comprensión profunda del Sistema de los Números Complejos: Un estudio de caso a nivel escolar y universitario. *Formación Universitaria*, *12*(6), 57-82. doi: 10.4067/S0718-50062019000600057.

Sierpinska, A. (2005). On Practical and Theoretical Thinking and other False Dichotomies in Mathematics Education. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard and F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education*, (pp. 117-135). doi: 10.1007/0-387-24270-8_11

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. En J.L. Dorier (Ed.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. (2010). Investigación con Estudio de Casos. Madrid, España: Morata.

Van Dooren, W., y Inglis, M. (2015). Inhibitory control in mathematical thinking, learning and problem solving: a survey. *ZDM Mathematics Education 47*, 73-721.

LA TABLA ESTADÍSTICA: UN ANÁLISIS DE SU PRESENCIA EN EL CURRÍCULO Y EN LOS LIBROS DE TEXTOS CHILENOS PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA

Laura Santibáñez Guerra[1], Daniela Latorres Rebolledo[2], Claudia Vásquez Ortiz

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile[1-2], Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile

En este trabajo se analiza la presencia y articulación del objeto tabla estadística en el marco curricular chileno y los libros de texto chilenos desde primero a cuarto año básico (6 a 9 años). En la muestra se incluyen las bases curriculares chilenas vigentes y 16 libros textos de matemática, todos vigentes a la fecha en que se realizó el estudio. Hemos utilizado una metodología cualitativa de tipo descriptiva basada en un análisis de contenido, estudiando los tipos de tabla estadística y las actividades que se proponen para el logro de su aprendizaje. Los resultados obtenidos evidencian que los textos analizados cumplen con los objetivos de aprendizajes requeridos por el marco curricular, pero el tratamiento que se le da a la tabla estadística es insuficiente para su real aprendizaje y desarrollo de un pensamiento estadístico.

Tablas estadísticas, educación básica, currículo, libros de texto, representaciones estadísticas

INTRODUCCIÓN

En el último tiempo, y sobre todo por la situación sanitaria, la sociedad se ha familiarizado con la estadística, consolidándose como una disciplina que ofrece herramientas para la representación de datos y el desarrollo del pensamiento crítico. Además, la Educación Estadística proporciona herramientas para formar ciudadanos con habilidades para interpretar, analizar y evaluar críticamente la información, lo que conllevará a que puedan decidir entre lo relevante o lo que se ha comunicado adecuadamente (Ben-Zvi y Garfield, 2004).

Dentro de las representaciones estadísticas mayormente utilizadas, se encuentran las tablas estadísticas, las cuales forman parte de la cultura estadística (Gould, 2017), la que de acuerdo con Del Pino y Estrella (2012), se configura como derecho ciudadano que implica "(...) leer e interpretar tablas, gráficos y medidas de resumen que aparecen en los medios; interpretar, evaluar críticamente y comunicar información estadística (…)" (p. 55).

A su vez, esto se ve plasmado en diversos lineamientos curriculares, como, por ejemplo, los estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), en los que se observa un énfasis en el desarrollo de conocimientos, desde la etapa Pre-K2 (3 a 8 años)hasta la etapa 5 (9 a 11 años), centrados en: formulación de preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas; selección y utilización de métodos estadísticos apropiados para analizar datos. Estos lineamientos coinciden en gran parte con lo propuesto en el marco curricular chileno, estableciendo que los estudiantes desarrollen habilidades para representar e interpretar datos. Lo que ha

llevado a que las tablas estadísticas, se incorporen desde los primeros niveles educativos (MINEDUC, 2012).

En lo que respecta a los libros de texto, estos son considerados como un importante recurso para la enseñanza de la matemática en educación básica (Alsina y Vásquez, 2016), sin embargo, no hemos encontrado estudios que evidencien si existe una articulación de la presencia de la tabla estadística entre el currículo nacional y los libros de textos, desde 1° a 4° año básico. Por esto, el objetivo propuesto es revelar coherencia entre lo que los estudiantes deben aprender y lo que se ofrece para ser enseñado y ejercitado. De este modo pretendemos, identificar si estos dos escenarios interactúan y responden a los requerimientos básicos, para iniciarse en una formación con cultura estadística.

MARCO CONCEPTUAL

Como sostiene Estrella (2014), la tabla estadística es:

> "un arreglo rectangular con una estructura que comprende filas y columnas, que permite presentar los datos correspondientes a una o más variables en forma clasificada y resumida, para permitir la visualización del comportamiento de los datos y facilitar la comprensión de la información que se puede extraer" (p. 6).

Por tal, en las revistas científicas, el formato tabular, es el más utilizado para representar resultados (Feinberg y Wainer, 2012). A pesar, de la relevancia que cumple, estudios previos indican (Estrella, 2014) que tanto el currículo y su enseñanza, no recibe el tratamiento correspondiente, por lo que se propone que su enseñanza debiese ser explícita (Martí, Pérez y De la Cerda, 2010).

Por su parte, el curriculum nacional, ha incorporado a las tablas estadísticas en las Bases Curriculares, en el eje de Datos y Probabilidades, esperando que los estudiantes "registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades" (MINEDUC, 2012, p. 219).

Mientras los libros de textos, son creados por autores que deben interpretar el marco curricular, y así transformarlo en una oportunidad de aprendizaje y situaciones concretas que deban realizar el docente y estudiante (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt y Houang, 2002), convirtiéndose en herramientas emisoras de los objetivos de aprendizajes y habilidades. Lo anterior, ha dado razones para estudiar la presencia de las tablas estadísticas en los libros de texto de matemática chilenos, evidenciado lo siguiente: Díaz- Levicoy, Morales, López- Martín (2015), analizan textos escolares de 1° y 2° básico y concluyen que la tabla de conteo es la con mayor presencia, seguida por la de frecuencia. Su uso, se enfoca principalmente para leer datos y realizar cálculos. Otro estudio relevante, es el realizado en los textos de 3° básico, Díaz- Levicoy, Vásquez y Molina- Portillo (2018), concluyen que, de un total de 91 actividades relacionadas con el uso de la tabla estadística, la mayoría son de interpretar y transformar, dentro de un contexto personal, es decir, actividades que se relacionan con alguna acción que puedan realizar los estudiantes.

METODOLOGÍA

De acuerdo con el objetivo del estudio, que es analizar la presencialidad y articulación de la tabla estadística dentro del marco curricular chileno y los textos de estudio, desde primero a cuarto año básico (6 a 9 años), es que esta investigación sigue una metodología cualitativa, de carácter descriptivo y basada en un análisis de contenido (Bernete, 2014). La muestra de análisis fue intencionada y está constituida

por las Bases curriculares chilenas (2012) y 16 libros de texto de Matemática (Tabla 1), los cuales tienen una difusión gratuita por el Ministerio de Educación chileno a establecimientos públicos y subvencionados. Cada libro de estudio se conforma por dos ejemplares por nivel: el libro de texto del estudiante es donde se encuentran los temas, con sus procesos, explicaciones, definiciones y ejemplos; y el cuaderno de actividades, que es un complemento del anterior, siendo el espacio de aplicación y ejercitación.

Código	Título	Autor/es	Editorial	Año
C1	Textos del estudiante, tomo 2. 1° básico/ Cuaderno de actividades, tomo 2. 1° básico.	Isoda, M	Gakko Tosho Co, LTD.	2020
C2	Texto del estudiante Matemática 1° básico/ Cuaderno de actividades Matemática 1° básico.	Droguett, S.	Santillana	2020
C3	Texto del estudiante, tomo 2, 2°básico/ Cuaderno de actividades, tomo 2, 2°básico.	Isoda, M	Gakko Tosho Co, LTD.	2020
C4	Texto del estudiante Matemática 2° básico/ Cuaderno de actividades Matemática 2° básico.	Ubilla, C., Cerda, V	Santillana	2020
C5	Texto del estudiante, tomo 2, 3° básico. / Cuaderno de actividades, tomo 2, 3° básico.	Isoda, M	Gakko Tosho Co, LTD.	2020
C6	Texto del Estudiante de Matemática 3° básico. / Cuaderno de actividades de Matemática 3°	Córdoba, C. y Droguett, S	Santillana	2020
C7	Texto del estudiante, tomo 2, 4° básico. /Cuaderno de actividades, tomo 2, 4° básico.	Isoda, M	Gakko Tosho Co, LTD.	2020
C8	Texto del Estudiante de Matemática 4° básico. / Cuaderno de actividades de Matemática 4° básico.	Fuenzalida, A., Quezada, C., y Cerda, V.	Santillana	2020

Tabla 1. Libros utilizados en el estudio. Fuente: Fuente: MINEDUC (2012)

Las unidades de análisis, en cada código corresponden a las relacionadas con objetivos de aprendizaje del eje de Datos y Probabilidades, en la que se observó el tipo de tablas y las actividades en que se ven implicadas.

RESULTADOS

Los Objetivos de Aprendizaje (OA) que se proponen en los primeros cuatro niveles de educación básica, relacionados a la tabla estadística, los podemos separar en dos categorías. La primera, son los objetivos que se nombran de forma explícita el objeto tabla para su enseñanza-aprendizaje y la segunda categoría, son los objetivos que no están centrados en la tabla, pero la utilizan como un medio para lograr el objetivo. En 1° básico, el currículo establece que la tabla de conteo debe ser usada para el registro e interpretación de datos. Los textos escolares de este nivel responden a su uso, sin embargo, en el texto C2 la primera tabla que aparece es de frecuencia lo que indica una falta de coherencia con lo que se solicita en el currículo. En este mismo texto se promueve la recolección de datos, pero se observa en la instrucción que debe organizar los datos en una tabla, pese a que no hay actividades previas para su construcción, lo que tampoco está señalado en el currículo.

En 2° básico, la tabla de conteo es establecida por el currículo para registrar datos de juegos aleatorios y para recolectar y registrar datos que servirán para la construcción de pictogramas y gráficos de barras

simples. Las actividades de los textos en general responden a las necesidades del currículo, pero al igual que en 1° básico, C4 se sugieren actividades con tabla de frecuencia (figura 1), lo que no se ajusta a los objetivos. Los aspectos de la construcción de la tabla no son mencionados en el currículo, ni en los textos para los estudiantes, pero se nombran en la guía de didáctica del docente de C3, indicando aspectos generales de su elementos y estructura.

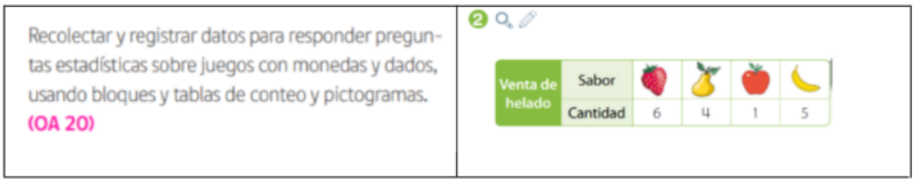


Figura 1. Objetivo de aprendizaje 2°básico y actividad de C4 (p. 127)

El marco curricular en 3° básico, establece la continuidad del uso de la tabla de conteo, a pesar de esto los textos C5 y C6 de igual forma incorporan la tabla de frecuencia. En este nivel la tabla no solo se trabaja como objeto, sino que también como una herramienta para el logro de otros objetivos. Se destaca en C5 que antes de usar la tabla para construir otra representación estadística, se hace necesario interpretar los datos. En este nivel, en el currículo se hace mención el uso de la lista, para el registro de datos, sin embargo, las tareas de los textos analizados no la consideran en sus actividades.

En 4° básico no se específica en los objetivos de aprendizaje el tipo de la tabla con el que se debe trabajar, pero mediante las actividades que sugiere el currículo aparece la tabla de frecuencia, lo que es acorde a las tablas que se usan en C7 y C8. Al igual que en 3° básico, la tabla se usa como un medio para recoger datos y traducir a otras representaciones. En este nivel tampoco se establece en el currículo los convenios de construcción de la tabla, mientras que en los textos solo hace alusión a los elementos que esta debe contener. Se incorpora como objetivo el uso de software educativo para tabular y hacer gráficos, pero el marco curricular y los textos, no sugieren plataformas para que el docente se instruya e incorpore esta tecnología en sus clases o para que el alumno pueda explorar.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este estudio muestran una incorporación progresiva del objeto tabla estadística a nivel curricular, pero no así en los textos de estudios analizados. Por otro lado, en los niveles de 2°, 3° y 4° básico la tabla no solo es un objeto matemático, sino que también una herramienta para la construcción de otros objetos estadísticos, por ejemplo, el gráfico de barra.

Con respecto a la construcción de la tabla estadística, el currículo no menciona, al igual que en los textos analizados, aspectos didácticos y estructurales para su construcción, dándose por hecho que su elaboración es una tarea ya aprendida tanto por el docente y los estudiantes.

En síntesis, si bien a nivel general, los textos analizados cumplen con los OA requeridos por el marco curricular, consideramos que el tratamiento que se da a la tabla estadística no es suficiente para su real aprendizaje y el desarrollo del pensamiento estadístico. Como afirman Van Den Ham y Heinze (2018), los libros de texto tienen un impacto sustancial en el rendimiento matemático en la escuela primaria, siendo un recurso importante y ampliamente utilizado para el proceso de enseñanza- aprendizaje, además, los profesores lo utilizan como base para la planificación y ejecución de las clases (Mullis, Martin, Foy

y Drucker, 2012). Por lo anterior, es que consideramos la necesidad de replantear la incorporación de la tabla estadística en la enseñanza escolar, proponiendo un tránsito de aprendizaje que considere la lista, para luego reconocer, construir y usar la tabla en diferentes contextos.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT Nº 1200356 y Beca de Magister Nacional año 2021 Folio: 22210129, financiados por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile.

Referencias

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016): «La probabilidad en educación primaria. De lo que debería enseñarse a lo que se enseña». Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, núm. 71, pp. 46-52.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking.* New York: Springer. (pp. 3-15).

Bernete, F. (2014). Análisis de contenido. En A. Lucas y A. Noboa (Eds.), Conocer lo social: estrategias y técnicas de construcción y análisis de datos (pp. 221-261). Madrid: Fragua.

Feinberg, R., y Wainer, H. (2012) Extracting sunbeams from cucumbers. Journal of Computational and Graphical Statistics, 20(4), 793-810.

Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49(1), 53-64.

Díaz-Levicoy, D., Morales, R. y López-Martín, M. (2015). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de educación primaria. Revista Paranaense de Educação Matemática, 4(7), 10-39.

Díaz-Levicoy, D., Vásquez, C. y Molina-Portillo, E. (2018). Estudio exploratorio sobre tablas estadísticas en libros de texto de tercer año de Educación Primaria. TANGRAM. Revista de Educação Matemática, 1(2), 18-39.

Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. Revista Actualidades Investigativas en Educación, 14(2), 1-23.

Gould, R. (2017). Data literacy is statistical literacy. Statistics Education Research Journal, 16(1), 22-25.

Martí, E., Pérez, E., y de la Cerda, C. (2010). Alfabetización gráfica. La apropiación de las tablas como instrumentos cognitivos. Contextos, 10, 65-78.

Ministerio de Educación de Chile. (2012). Bases Curriculares Primero a Sexto Básico. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

Mullis, I, Martin, M., Foy, P. y Drucker, K. (2012). PIRLS 2011 international results in reading. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Valverde, G. B., Wolfe, L., Schmidt, R., Houang, W., y R. (2002). *Uso de TIMSS para investigar la traducción de políticas a la práctica a través del mundo de los libros de texto*. Springer , Holanda.

Van Den Ham, A. y Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. Studies in Educational Evaluation, Amsterdam: Elsevier, 59 (1), 133-140. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.07.005

REFLEXIONES DE PROFESORES DE PK-3 EN UN GRUPO DE ESTUDIO DE CLASE SOBRE EL RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL

Jocelyn Aguilera Aravena, Maritza Méndez-Reina, Pedro Vidal-Szabó, Alejandra Mondaca, Sergio Morales y Soledad Estrella

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

La Inferencia Estadística Informal -como articulador entre la Estadística Descriptiva y la Inferencia Estadística- permite que profesores y estudiantes puedan experimentar situaciones que involucren realizar inferencias al generalizar, basándose en los datos como evidencias y utilizando expresiones que dan cuenta de la incertidumbre. La presente comunicación describe el proceso de reflexión a través de la técnica de revisión activa 4F, en la fase de descubrimientos, a partir de la experiencia vivida por cinco docentes, de PK a 3º, en un Grupo de Estudio de Clase, quienes durante dos meses han diseñado e implementado un plan de clases, y en sus reflexiones sobre lo aprendido explicitan componentes del razonamiento inferencial informal.

Razonamiento Inferencial Informal, Reflexión docente, Estudio de Clase, Técnica de Revisión Activa

INTRODUCCIÓN

Uno de los primeros investigadores que posicionó la reflexión docente como un elemento fundamental para el educador fue Dewey (1910). A partir de sus investigaciones, autores como Schön (1983) y Korthagen (2001) y Korthagen et al. (2005), han investigado sobre la reflexión en la acción profesional docente. Korthagen ha propuesto un modelo reflexivo mediante un ciclo que inicia con una experiencia docente para la cual se genera una idea sobre lo sucedido, se focaliza la atención en los puntos claves ocurridos para solucionar o abordar la problemática, y posteriormente, se estudia una nueva situación a partir de la reflexión realizada. Así, la reflexión permite organizar la acción de una nueva manera y con mayor fundamento. Procesos de reflexión colaborativa y activa como los que proporciona la metodología de desarrollo profesional Estudio de Clases, permite a los profesores investigar su clase y reflexionar sobre su práctica en el aula escolar.

El Estudio de Clases (EC), considera el estudio de una lección a través de ciclos investigativos iterativos y situados desde un plan de clase, construido de manera colaborativa por un equipo de profesores que mantienen el foco en el aprendizaje de los estudiantes (Estrella et al., 2020), y en que el diseño del plan de clases junto al aprendizaje de nuevos conocimientos, genera una relación de enseñanza y aprendizaje entre docentes y profesores externos con experiencia en EC.

Inferencia Estadística Informal

Investigaciones sobre educación en estadística apuntan a la necesidad de crear y reflexionar sobre el diseño de tareas que den la oportunidad a los estudiantes de razonar sobre el comportamiento de datos reales y de interés, generando inferencias informales desde los primeros niveles escolares que sientan las bases para la posterior generación de inferencias basadas en métodos formales. Actualmente, la inferencia estadística informal y por tanto, el razonamiento asociado, están incluidos en los nuevos estándares de formación docente de los profesores de matemática en Chile, específicamente en el

Estándar C sobre Probabilidades y Estadística, se señala "Vincula la estadística descriptiva y la inferencial, usando los datos como evidencia, generalizando más allá de la descripción de los datos, y expresando conclusiones con cierto grado de incertidumbre para conectar con la inferencia formal." (Estándares Docentes Mineduc, 2021, p.88).

Watson y Moritz (1999), sugirieron que a partir del currículum escolar se podría promover a nivel escolar las nociones e ideas iniciales sobre inferencia informal a partir de la comparación de datos en contexto. La inferencia informal puede considerarse como "una afirmación sobre una población o proceso que es inferida de una muestra, junto con un nivel explícito de confianza" (Makar, Baker y Ben-Zvi, 2011, p. 153). Para Makar y Rubin (2009) los tres componentes que caracterizan el Razonamiento Inferencial Informal (RII) son: (a) *usar datos como evidencia* a través de la valoración de datos disponibles para generar argumentos relacionados con una pregunta o problema determinado, privilegiando la evidencia por sobre experiencias u opiniones personales; (b) *generalizar más allá de los datos* comunicando conclusiones generadas a partir de datos particulares logrando producir inferencias para un conjunto más amplio de casos; (c) e*xpresar la incertidumbre* utilizando un lenguaje con niveles de incerteza en las generalizaciones expresadas más allá de los datos.

Como parte de un proyecto Fondecyt en curso, se invitó a un grupo de profesores de PK al grado 3 a ser partícipes de un Estudio de Clases, quienes colaborativamente diseñaron e implementaron una propuesta de enseñanza promotora del RII en estudiantes de los primeros niveles escolares (Cf. Méndez-Reina et al., 2021). El propósito de la presente comunicación se enfoca en el análisis cualitativo de las reflexiones de profesores que participaron en dicho Grupo de Estudio de Clase (GEC) sobre RII a nivel escolar, en particular, cómo los docentes manifiestan aspectos del RII en sus reflexiones.

METODOLOGÍA

Se ha adoptado un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo interpretativo, analizando las reflexiones de los profesores como unidad de análisis en concordancia con categorías asociadas al RII.

Participantes. El GEC estuvo conformado por dos educadoras de párvulos, una educadora diferencial y tres profesores de educación básica, de una escuela municipal de Viña del Mar, e investigadores en Didáctica de la Matemática con experiencia en EC. Para la implementación de las sesiones diseñadas por el equipo, se contó con el apoyo del equipo directivo de la escuela, con las autorizaciones correspondientes y consentimientos informados de apoderados. Las reuniones del grupo se realizaron en modalidad virtual atendiendo a la contingencia por el Covid-19.

Procedimiento. El GEC se reunía semanalmente en sesiones de noventa minutos durante ocho semanas. Las actividades del ciclo de EC fueron previstas a partir de cuatro ejes de trabajo: experiencias auténticas de RII; planificación de una secuencia de aprendizaje; implementación, revisión y ajuste del plan de clase; y análisis y reflexión del proceso de EC. En las sesiones 1 y 2, los educadores experimentaron situaciones auténticas del RII, reflexionaron sobre los elementos que caracterizan el RII y compararon sus propias respuestas y la de otros profesores del país a la luz de los componentes: generalizar más allá de los datos, usar datos como evidencia, y expresar la incertidumbre de la inferencia. En las sesiones 3 y 4 identificaron las necesidades de los estudiantes, formularon objetivos, establecieron una tarea que permita promover el RII, anticiparon las dificultades y las respuestas de los estudiantes, delinearon las posibles intervenciones docentes, y determinaron aspectos a evaluar.

En las sesiones 5 y 6 se implementó el plan de clase diseñado, algunos integrantes del GEC registran los tiempos de episodios de video junto a notas de campo de lo observado. Se comparten las experiencias de los profesores en la implementación, en conjunto el GEC revisa, ajusta y rediseña el plan de clase considerando algunas sugerencias y recomendaciones de lo sucedido. En las sesiones, 7 y 8, se revisan

los registros en video y notas de campo de las intervenciones de los niños para identificar fortalezas del plan de clase previsto, y se reflexiona grupalmente sobre las actividades del proceso describiendo la experiencia del EC, a través de la técnica de revisión activa 4F (Greenaway, 2002).

Fuente de datos. Las grabaciones de las sesiones 7 y 8 del GEC y los registros escritos de los profesores se encuentran en la plataforma web Padlet. Dicha plataforma permite que los participantes puedan escribir y jerarquizar conceptos e ideas, compartir información y producir conocimiento a partir de un tema.

Las reflexiones tras el proceso completo emergen durante las dos últimas sesiones, en la última sesión los investigadores dirigieron una revisión activa 4F. Esta es una herramienta que ayuda a descubrir el valor de la experiencia reciente a través de la reflexión, comunicación, análisis y retroalimentación. Se propuso una revisión o análisis de las experiencias en cuatro dimensiones que operan como etapas de un ciclo. Facts (Hechos), Feelings (Emociones), Findings (Descubrimientos) y Future (Futuro). Debido a la breve extensión de esta comunicación, se elige mostrar algunas evidencias solo de dimensión Descubrimientos, cuyas preguntas orientadoras fueron ¿Qué descubrí de la experiencia? ¿Qué estoy viendo ahora que antes no había visto? ¿Qué aprendizajes docentes alcancé al liderar una enseñanza que promovía el RII?

RESULTADOS

El análisis de las reflexiones docentes tras la revisión 4F consideró las categorías: [1] usar los datos como evidencia, [2] generalizar más allá de los datos, [3] expresiones con niveles de incertidumbre y [4] ideas generales sobre el RII. (ver Tabla 1); las que fueron consensuadas por cinco de los investigadores.

Reflexiones docentes	Categorías			
	1	2	3	4
E1: realizar mediaciones con los estudiantes que no influyeran en las respuestas de los otros niños y que promuevan el pensamiento inferencial. Pienso que esta habilidad es algo innato en ellos, pero que debe ser estimulada y reforzada.				●
E2: Principalmente, incluir espacios lúdicos dentro de la enseñanza al igual que el uso de imágenes en los niveles de incertidumbre. Plantear situaciones en las que los niños y niñas puedan intervenir de manera más espontánea, también fue un aprendizaje. Finalmente, me cambia un poco la percepción de lo estructurada que es la matemática y en el caso de la estadística puedo incorporar este razonamiento inferencial informal.			●	●
E3: El principal aprendizaje fue, el poder explotar en mayor medida el análisis y trabajo que nos entregan los datos, explorar con preguntas de profundidad, sin duda, es una estrategia que no había utilizado ya que, siempre se analizan, pero de manera más concreta, con lo que muestra en la tabla, creo que, viviendo este nivel de profundidad y extensión del análisis, enriquece el trabajo de todos los que trabajamos.	●			

E4: La importancia y lo enriquecedor que resulta el trabajo colaborativo entre docentes. Incentivar a los niños y niñas a analizar basándose en datos concretos. Incluir niveles de incertidumbre a través de vocabulario y estrategias lúdicas.	•	•
E5: Uno normalmente, ocupa las matemáticas siempre como una ciencia exacta y que no permite ninguna incertidumbre, que es lo que es. Sin embargo, el generar en los niños el pensamiento de que ellos pueden, digamos, descubrir a través de lo que observan, a través del dibujo[...]porque uno pasa este contenido de gráficos y de toda esta parte de matemática, pero nunca como niveles de incertidumbre, digamos y ninguno de los contenidos lo ve de esa manera, entonces que los niños razonen, piensen, hacerlos pensar, hacerlos analizar, buscar la pregunta adecuada además para ellos, eso fue muy enriquecedor, el buscar, buscar, buscar hasta que el niño descubra, digamos, que uno lo hace en sus clases, trata de hacerlo habitualmente, de que ellos descubran, pero aquí que ellos se den cuenta, a través de lo explicito que es mirando un gráfico mirando lo que a ellos mismos le sucedió lo que ellos mismos experimentaron es una cosa distinta.	•	•

Tabla 1. Reflexiones docentes de los profesores en ejercicio en la fase de descubrimientos de 4F.

DISCUSIÓN

En el GEC los profesores tuvieron la experiencia de mejorar e implementar una tarea de resolución de problemas sobre RII que permitía a los estudiantes profundizar en su razonamiento al comparar múltiples soluciones expresadas y compartidas por sus compañeros. Al finalizar el proceso de Estudio de Clases, se ofrecieron espacios para la reflexión docente, cuyo análisis desde el RII y de sus descubrimientos, permitió reconocer que tres de los profesores integran aspectos del RII (ver Tabla 1), abordando al menos un componente del RII y, dos integran el RII como idea global.

Una de las fortalezas de la metodología de Estudio de Clase es tanto aprender algo nuevo como diseñar y mejorar un plan de clase según contenidos curriculares. Una reflexión de E2 sobre su pertenencia a un GEC y que expresa su nueva valoración de los contenidos de estadística fue “me motivó el trabajo colaborativo que se realiza en estas instancias [pertenecer a un grupo de EC]. Además, el hecho de abordar contenidos estadísticos me llamó mucho la atención, pues siento que en la práctica docente se aborda poco este contenido [estadística]. Finalmente, también me motivó conocer más sobre el razonamiento inferencial informal, considerando que la matemática se ve tan estructurada y uno acostumbra a pensar que se obtienen resultados exactos, la idea de inferir me llamó la atención.”

El Estudio de Clases permitió a estos profesores en ejercicio organizar la acción docente de una nueva manera y otorgar fundamento mediante la propuesta de desarrollar el razonamiento inferencial informal en los estudiantes. El espacio de reflexión promovió que los profesores se escucharan y comunicaran ideas sobre su práctica en el aula escolar con un plan de clases compartido y enfocado en el aprendizaje del RII. La integración de aspectos del RII en las reflexiones docentes de este GEC es destacable, pues en Chile, como señalan Vidal-Szabó y Estrella (2021), todavía es un desafío para los profesores en ejercicio la comprensión de conceptos estadísticos básicos, y se requiere un apoyo-mayor y sostenido en el tiempo- para el desarrollo de sus conocimientos especializados de estadística y de su habilidad para interactuar efectivamente con sus estudiantes.

Agradecimientos

Se agradece el financiamiento ANID Fondecyt 1200346; FONDEF ID20i10070; Beca Nacional de Doctorado ANID 21210862; VRIEA PUCV 039.439/2020.

Referencias

Dewey, J. (1910). *How we think.* Boston: D.C. Heath.

Estándares Docentes Mineduc (2021). Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2021/08/Matematica-Media.pdf

Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R., & Espinoza, G. (2020). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 293 – 310.

Greenaway, R. (2015). Reviewing Skills Training. Recuperado desde http://www.reviewing.co.uk/index.htm

Korthagen, F. (2001). *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Korthagen, F., & Vasalos, A. (2005). Levels in reflection: Core reflection as a means to enhance professional growth. *Teachers and Teaching, 11*(1), 47-71.

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 152-173.

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 82-105.

Méndez-Reina, M., Estrella, S., & Olfos, R. (2021). Caracterización de tareas promotoras del razonamiento inferencial informal en estadística temprana. *34° Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Relme34*, Guatemala. (*por aparecer*).

Schön, D. (1983). *The training of reflective professionals: Towards a new design of the teaching and learning in the professions.* Madrid: Paidós.

Vidal-Szabo, P., & Estrella, S. (2021). Conocimiento Estadístico Especializado en Profesores de Educación Básica, basado en la taxonomía SOLO. *RECHIEM, Revista Chilena de Educación Matemática, (por aparecer).*

TAREAS DE PATRONES EN EDUCACIÓN INFANTIL: UN ANÁLISIS DESDE LOS LIBROS DE TEXTO DE CHILE Y ESPAÑA

Nataly Pincheira, Yeni Acosta y Ángel Alsina

Universidad de Girona

En este estudio se analiza la presencia de las tareas vinculadas con la enseñanza de patrones en cinco libros de texto, dos chilenos y tres españoles de Educación Infantil (3 a 5 años). Para la investigación se ha seguido una metodología cualitativa, utilizando la técnica de análisis de contenido. Los resultados obtenidos muestran una presencia no significativa de tareas sobre patrones en los libros de texto analizados. Se concluye que es necesario ofrecer a través de los libros de texto tareas que permitan profundizar en el tratamiento de los patrones en esta etapa escolar, puesto que este contenido ofrece una puerta de entrada al pensamiento algebraico temprano.

Patrones, libros de texto, tarea matemática, Educación Infantil

INTRODUCCIÓN

Durante las últimas dos décadas el desarrollo de numerosas investigaciones dedicadas al estudio del álgebra y su didáctica, a nivel internacional, han impulsado una propuesta de cambio e integración curricular conocida como *Early Algebra*, desde ahora álgebra temprana.

El álgebra temprana propone promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros niveles de escolaridad y facilitar una mejor comprensión de las matemáticas en las etapas educativas posteriores (Cai y Knuth, 2011; Kaput, 2000).

Esta nueva corriente plantea introducir el desarrollo del pensamiento algebraico principalmente desde la Educación Primaria, no obstante, algunos autores y organismos proponen su incorporación desde niveles inferiores (Alsina, 2019; Blanton y Kaput, 2005; *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2000). Además, diversas investigaciones han informado que los estudiantes de Educación Infantil pueden desarrollar conocimientos vinculados con el álgebra temprana desde las primeras edades, adquiriendo nociones algebraicas elementales (e.g. Acosta y Alsina, 2020; Papic, 2015; Rittle-Johnson et al., 2019), tales como, el reconocimiento de patrones repetitivos, clasificaciones de objetos, uso de representaciones de relaciones numéricas, entre otras.

Papic (2015), señalan que el pensamiento algebraico comienza a desarrollarse a través del proceso de generalización. Carraher et al. (2007) plantean que para abordar la generalización matemática en Educación Infantil se requiere trabajar a partir de la identificación de patrones, relaciones y estructuras. De este modo, los patrones contribuyen al desarrollo de la representación y abstracción matemática, proporcionando una base esencial para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Papic, 2015).

La incorporación de los patrones en la Educación Infantil requiere contar con profesores capaces de conducir su enseñanza de manera efectiva promoviendo los inicios del pensamiento algebraico. En este contexto, el libro de texto influye considerablemente en el proceso de instrucción en el aula, puesto que conforma un elemento de apoyo para el profesorado en la preparación de la clase (Even y Olsher, 2014). Sin embargo, no se han encontrado estudios que analicen las tareas relacionadas con patrones en los libros de texto de Educación Infantil.

Dado el impacto que tiene el libro de texto como herramienta para suscitar la enseñanza, el objetivo de este estudio es analizar la presencia de tareas sobre patrones que proponen cinco libros de texto, dos chilenos y tres españoles de Educación Infantil (3 a 5 años).

ENSEÑANZA DE PATRONES EN EDUCACIÓN INFANTIL

El pensamiento algebraico temprano se desarrolla a través de la conciencia estructural de los patrones y más tarde en la estructura de la aritmética (Mason et al., 2009). Este tipo de pensamiento permite "[…] analizar las relaciones entre cantidades, ser consciente de la estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir" (Kieran, 2004, p. 149). El NTCM (2003) apoya estos planteamientos y apuesta por la introducción del álgebra a partir de los 3 años, con el propósito de construir una base sólida de aprendizajes que favorezca la adquisición y tratamiento de un conocimiento algebraico más sofisticado en niveles posteriores. Papic (2015), constatan que el pensamiento algebraico se inicia mediante una conciencia estructural que se desarrolla en los alumnos a través de los patrones. Estudios contemporáneos en esta línea, señalan que un desarrollo temprano del patrón y una comprensión de su estructura facilita de manera efectiva el rendimiento matemático y consolida un cimiento veraz para el pensamiento algebraico (Mulligan y Mitchelmore, 2009).

Desde esta óptica, la exploración de patrones se puede considerar como una especie de trampolín útil para promover la generalización, la anticipación, la conjetura, la justificación, la representación y el inicio del uso preciso del lenguaje matemático. Warren y Miller (2013), exponen que hay una relación clara entre la capacidad para ejecutar tareas con patrones y la capacidad en matemáticas del individuo. Reconocer patrones es fundamental para muchos dominios del conocimiento, como la lectura, las matemáticas o las artes, puesto que los patrones aportan significado y cohesión (Björklund y Pramling, 2014).

Al hablar de patrones matemáticos, es necesario distinguir entre patrón como una secuencia o seriación ordenada, y entre estructura de patrón, es decir, organización, regla o núcleo que subyace al patrón (Mulligan y Mitchelmore, 2009). Los patrones se consideran más que un contenido, ya que se configuran como un proceso, una habilidad de estudio y un hábito de la mente (Clements y Sarama, 2015). Estudios recientes afirman que la enseñanza de patrones en edades tempranas promueve el desarrollo cognitivo de los niños favoreciendo la comprensión de las matemáticas y estimulando los inicios del pensamiento algebraico (NCTM, 2000; Clements y Sarama, 2015; Wijns et al., 2019). Por tanto, Papic (2015) sugiere la necesidad de promover la conciencia de los niños sobre los patrones para estimular el desarrollo estructural, la comprensión relacional y la generalización desde una edad temprana.

METODOLOGÍA

De acuerdo con el propósito del estudio que, como se ha indicado, es analizar la presencia de tareas sobre patrones que proponen dos colecciones de libros de texto chilenos y españoles de Educación Infantil (3 a 5 años), se ha adoptado un enfoque cualitativo (Creswell, 2009), utilizando como técnica el análisis de contenido (López-Noguero, 2002).

La muestra fue intencionada y está constituida por cinco libros de texto, dos chilenos y tres españoles (Tabla 2). Los libros de texto chilenos analizados están dirigidos a las edades de 4 y 5 años de Educación Infantil y son entregados de manera gratuita por el Ministerio de Educación chileno (MINEDUC) a establecimientos educativos públicos y subvencionados, teniendo una amplia difusión en Chile. Mientras que, los libros de texto españoles analizados están dirigidos a las edades de 3 y 5 años de Educación Infantil, han sido diseñados por una editorial de prestigio en el contexto educativo español. Cabe destacar que los libros de texto utilizados para el análisis se encuentran vigentes al momento de realizar el estudio.

País	Código	Edad	Título	Editorial	Año
Chile	T1	4 años	Cuaderno de actividades del Nivel Transición 1 de Educación Parvularia	SM Chile S.A Edición especial para MINEDUC	2019
	T2	5 años	Cuaderno de Actividades del Nivel de Transición 2 de Educación Parvularia	Ediciones Rau y Bedenburg. Edición especial para MINEDUC	2020
España	T3	3 años	Cric Crac Matemáticas 3 años	Cruilla	2017
	T4	4 años	Cric Crac Matemáticas 4 años	Cruilla	2017
	T5	5 años	Cric Crac matemáticas 5 años	Cruilla	2017

Tabla 1: Libros de texto utilizados para el análisis

Las unidades de análisis corresponden a las secciones de los libros de texto que presentan tareas para abordar el contenido de patrones.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos consideran la presencia de las tareas sobre patrones en los libros de texto de Chile y España de acuerdo con cada edad a la cual están orientadas (Tabla 2).

En total se analizaron 258 tareas matemáticas (n), de las cuales 19 (7%) corresponden al estudio de patrones.

País	Edad	n	f	%
Chile	3 años	-	-	-
	4 años	17	0	0
	5 años	19	1	5
España	3 años	60	6	10
	4 años	81	5	6
	5 años	81	7	8

Tabla 2: Distribución de las tareas analizadas según país y edad a la cual están orientadas.

Como se aprecia en la Tabla 2, los libros de texto chilenos analizados no consideran una propuesta para alumnos de 3 años, como sí ocurre en libros de texto españoles. A su vez, se observa una presencia de tareas sobre patrones prácticamente nula, existiendo sólo una tarea (5%) para abordar este contenido a los 5 años. Por otra parte, en los libros de texto español analizados se aprecia una presencia mayor de tareas sobre patrones a los 3 años (10%), frente a un 6% a los 4 años y un 8% a los 5 años.

A nivel general, aunque se aprecia una frecuencia mayor de tareas sobre patrones en los textos españoles en comparación con los textos chilenos, continúa siendo una presencia limitada para profundizar en la enseñanza de este contenido. Puesto que, sólo 18 tareas de 222 analizadas corresponden a patrones.

Las tareas analizadas en ambos contextos educativos, tanto chileno como español, se enfocan principalmente en continuar una serie a partir de un patrón de repetición. Cabe destacar que, en los libros de texto españoles, se observa el planteamiento de una dificultad creciente en relación con la estructura de la regla o núcleo del patrón que se debe aplicar en la tarea. Esta dificultad es observable en la progresión de la edad a la cual están orientados los libros de texto. A modo de ejemplo, se muestran dos tareas sobre patrones:

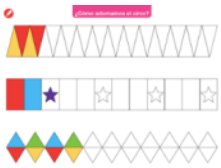


Figura 1: Actividad de seriación a partir de un patrón de repetición (5 años) en un libro de texto chileno
Fuente: T2 (2019, p.30)

Figura 2: Actividad de seriación a partir de un patrón de repetición (4 años) en un libro de texto español
Fuente: T4 (2017, p.27)

CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio se ha analizado la presencia de tareas sobre patrones en cinco libros de texto, dos chilenos y tres españoles de Educación Infantil (3 a 5 años). Los resultados obtenidos muestran un tratamiento limitado de la enseñanza sobre patrones en los libros de texto para la Educación Infantil. Teniendo en cuenta que este recurso es una herramienta de apoyo para el profesorado (Remillard, 2000), es necesario aumentar la presencia de este contenido en los libros de texto, puesto que permite promover la generalización, la anticipación, la conjetura, la justificación, la representación y el inicio del uso preciso del lenguaje matemático (Carraher et al., 2007; NCTM, 2000; Papic y Mulligan 2007; Rittle-Johnson et al., 2019). Finalmente, el estudio permite abrir futuras líneas de investigación ampliando el análisis a otras colecciones de libros escolares. Asimismo, se hace necesario indagar en las habilidades de modelado que se movilizan para resolver de manera exitosa las tareas sobre patrones en los libros de texto.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447 y el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España en el marco de la Beca de Formación del Profesorado (FPU16-01856).

Referencias

Acosta, Y., & Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, 1-16.

Alsina, Á. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6*: *Educación Matemática en la Infancia*, 8(1), 1-19.

Björklund, C., & Pramling, N. (2014). Pattern discernment and pseudo-conceptual development in early childhood mathematics education. *International Journal of Early Years Education, 22* (1), 9-104.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer.

Carraher, D. W., Martínez, M. V., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.

Clements, H.D., y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Learning Tools LLC.

Creswell, J. W. (Eds.). (2009). *Research Design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (3ª ed.). Sage

Even, R., & Olsher, S. (2014). Teachers as participants in textbook development: The Integrated Mathematics Wiki-book Project. In: Y. Li, G. Lappan, (Eds.). *Mathematics Curriculum in School Education. Advances in Mathematics Education*. 333-350. Springer.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

López-Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. XXI, *Revista de Educación*, 4, 167-179.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 2*(2), 10–32.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M.C. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

Papic, M.M. (2015). An Early Mathematical Patterning Assessment: identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal, 27*(4), 519-534.

Rittle-Johnson, B, Zippert, E. L., & Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly*, 46, 166–178.

Warren, E., & Miller, J. (2013). Young Australian indigenous students' effective engagement in mathematics: the role of language, patterns, and structure. *Mathematics Education Research Journal, 25*(1), 151-171.

Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B., & Torbeyns, J. (2019). Which early patterning activities count the most? En M. Graven, H. Venkat, A. Essien, y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 446-453). Pretoria, South Africa: PME.

ESTUDIO DE LOS NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN TABLAS ESTADÍSTICAS EN LIBROS DE TEXTO CHILENOS Y ESPAÑOLES

Jocelyn D. Pallauta, María M. Gea y Pedro Arteaga

Universidad de Granada

El presente trabajo analiza los niveles de razonamiento algebraico implicados en la resolución de tareas que involucran el uso de tablas estadísticas en una muestra intencional de 6 libros de texto chilenos y 6 españoles dirigidos a estudiantes de Educación Básica (Chile) y Educación Secundaria (España), los que abarcan las edades de 12 a 13 años. Se realiza un análisis de contenido basado en la clasificación de las tablas estadísticas sugerida por Lahanier-Reuter y los niveles de razonamiento algebraico elemental propuestos por Godino y colaboradores. Los resultados muestran una variedad de tipos de tablas estadísticas, las que implican un nivel de algebrización diferenciado al aplicar tanto conocimientos estadísticos y aritméticos como el razonamiento algebraico de acuerdo al nivel escolar. La distribución de los tipos de tablas estadísticas indica que los libros de texto de ambos países consideran la variedad en la tipología, las mayores diferencias se aprecian en el nivel de algebrización requerido en las tareas propuestas, principalmente, en cuanto a las tablas de datos y de doble entrada.

Tablas estadísticas, niveles de algebrización, libros de texto, educación estadística

INTRODUCCIÓN

Las tablas estadísticas son ampliamente utilizadas para comunicar información en diferentes ámbitos y áreas de conocimiento, pues su estructura permite representar y organizar datos para su consecuente análisis (Estrella y Estrella, 2020). Dada su relevancia, los lineamientos curriculares de diferentes países incorporan su estudio desde los primeros cursos de la educación primaria (ACARA, 2016; MECD, 2014; MINEDUC, 2018; NCTM, 2014), e involucran el desarrollo de habilidades asociadas a su interpretación y construcción. Las investigaciones en torno a este contenido matemático son limitadas, y su enseñanza y aprendizaje suele considerarse "transparente" debido a su aparente facilidad (García-Mila et al., 2014), sin embargo, se debe considerar la variedad de tipos de tablas cuya estructura y objetos matemáticos implicados requieren una lectura e interpretación que las caracteriza e incrementa su dificultad. En el presente estudio se realiza un análisis comparativo de la actividad algebraica requerida en las tareas con tablas estadísticas, aspecto que no ha sido considerado, en una muestra de libros de texto dirigidos a los últimos cursos de Educación General Básica (EGB) en Chile y los primeros niveles de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en el contexto de España. Cabe señalar nuestro interés por analizar el libro de texto al considerarlo un recurso con un importante rol en la enseñanza de la matemática (Alkhateeb, 2019), el que se ha acrecentado en el contexto de la crisis sanitaria generada por el COVID-19, debido a que en algunos entornos es el único medio de aprendizaje con el que cuentan los estudiantes.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Niveles elementales de razonamiento algebraico

Para el análisis de las tareas sobre tablas estadísticas se emplea los niveles de razonamiento algebraico propuesto por Godino y colaboradores (Godino et al., 2014; 2015), quienes proponen diferentes niveles para analizar la actividad matemática, al considerar el grado de generalidad de los objetos utilizados, los procesos matemáticos involucrados (generalización, particularización y representación) y el tipo de lenguaje utilizado. El trabajo en cada uno de estos niveles, de los que utilizamos los presentados en la Figura 1, requiere cumplir al menos una de las condiciones propuestas (generalidad o transformaciones de los objetos, así como del lenguaje matemático), sin necesidad de utilizar todas ellas. Entre los objetos algebraicos, se consideran las relaciones binarias (equivalencia/orden), las operaciones realizadas sobre los elementos de un conjunto y sus propiedades, las funciones y los objetos implicados en las mismas.

Nivel	Generalidad de los Objetos	Transformaciones de los objetos	Lenguaje matemático
A0	- Objetos con primer grado de generalidad (números particulares). - Significado operacional de la igualdad.	- Operaciones aritméticas con números particulares. - Se aplican propiedades de las operaciones o de N.	- Natural, numérico, icónico, gestual. - Pueden intervenir símbolos, pero su valor se obtiene operando con números particulares.
A1	- Objetos con segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números). - Significado relacional de la igualdad. - Variables como incógnitas.	- Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.	- Se puede usar símbolos como resultados de operaciones, pero no se opera con ellos.
A2	- Objetos con segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números). - Significado relacional de la igualdad. - Variables como incógnitas, números generalizados y cantidad cambiante.	- Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N. - Ecuaciones de la forma, ax+b=c en tareas funcionales, pero no se opera con variables para obtener formas canónicas de expresión.	- Simbólico – literal, aunque ligados a la información del contexto
A3	- Se usan indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares. - Objetos intensivos con segundo grado de generalidad.	- Ecuaciones de la forma ax ± b = cx ± d en tareas estructurales. - Se opera con incógnitas o variables para obtener formas canónicas de expresión.	- Simbólico – literal; se usan los símbolos de manera analítica (sin significados), sin referirse a información contextual.

Figura 1: Características de los niveles de algebrización 0 a 3 (Godino et al., 2014)

Tipos de tablas estadísticas

En el estudio de la estadística, Lahanier-Reuter (2003) diferencia tres tipos de tablas estadísticas considerando las funciones específicas que cada una posee: 1) Tabla de datos. Su estructura contempla tantas filas (o columnas) como elementos tenga la muestra, mientras que en el encabezado de cada columna (o fila) se indica la variable observada para cada uno de los elementos considerados en la muestra y en las celdas interiores se registran los valores correspondientes; 2) Tabla de distribución de una variable. Se presenta la distribución de frecuencias de una variable estadística unidimensional y su estructura, generalmente, contempla presentar en la primera columna las modalidades o valores de la

variable representada, mientras que en las siguientes columnas se pueden registrar diferentes tipos de frecuencias (absolutas, relativas, porcentuales o acumuladas) asociadas a la modalidad de la fila; y 3) Tabla de contingencia. Representa el cruce de dos variables estadísticas unidimensionales, sus modalidades son representadas en la primera fila y columna respectivamente.

METODOLOGÍA

El presente estudio es de corte cualitativo y se realiza mediante un análisis de contenido (Díaz Herrera, 2018), en el que se seleccionan como unidades de análisis las tareas (propuestas, resueltas, así como ejemplos) que involucran tablas estadísticas en la sección de estadística y probabilidad de los libros de texto dirigidos a estudiantes de 12 a 13 años. La muestra está compuesta de seis libros de texto chilenos de 7º y 8º básico, y seis españoles de 1º y 2º de educación secundaria que se ajustan al currículum vigente de ambos países (MECD, 2015; MINEDUC, 2015). Los libros fueron seleccionados de manera intencional, en el caso del contexto chileno pertenecen a tres series diferentes: una subvencionada por el Ministerio de Educación en Chile y publicada por dos editoriales diferentes en edición especial como SM (7º básico) y Santillana (8º básico); y otros textos disponibles en el mercado editados por Santillana y SM. Los libros de texto españoles se utilizan en los centros educativos y fueron publicados por tres editoriales de prestigio y amplia difusión en España (Anaya, Edelvives y Santillana).

Para el análisis de las tareas se siguió un procedimiento inductivo y cíclico, en donde se clasificaron las tablas estadísticas considerando la actividad algebraica implicada, para ello se utilizaron los tres niveles elementales de razonamiento algebraico descritos por Godino et al. (2014). Así también, para profundizar el análisis se subdividió la clasificación propuesta por Lahanier-Reuter (2003), considerando las frecuencias acumuladas y los intervalos de clase representados en la tabla estadística.

RESULTADOS

Se analizó un total de 1.174 tareas que involucraban tablas estadísticas, de ellas 568 correspondían a los textos chilenos y 606 a los libros de España. En la Figura 2 se presentan los diferentes tipos de tablas presentes en los libros de texto analizados, según nivel educativo y país. Los resultados muestran que la tabla que se presenta con mayor fuerza es la de distribución de una variable con frecuencias ordinarias (absolutas, relativas o porcentuales), que se plantea, generalmente, en un primer nivel de razonamiento algebraico (A1), pues se presenta el concepto de variable y se realiza una relación de equivalencia con tantas clases diferentes de equivalencia como modalidades tome la variable, aunque la simbología aplicada suele estar contextualizada y no se opera con objetos de segundo grado de generalidad. Además, el símbolo igual se usa con sentido relacional, por ejemplo, al relacionar la frecuencia con el valor de la variable. La representatividad de este tipo de tabla decrece conforme avanza el nivel educativo, en ambos países, siendo mayor la diferencia en el contexto español (1ºESO: 74%; 2ºESO: 53,4%) que en el chileno (7ºEGB: 53,7%; 8ºEGB: 39,4%).

Con la subdivisión desarrollada para el análisis de la clasificación propuesta por Lahanier-Reuter (2003), se observan diferencias entre países tanto en el tratamiento de la tabla de distribución de una variable como de la tabla de doble entrada. En la tabla de distribución de una variable, el empleo de las frecuencias acumuladas o los intervalos de clase requiere un razonamiento algebraico de mayor dificultad. Así, las

tablas de distribución de una variable con datos agrupados en intervalos para cualquier tipo de frecuencia (ordinaria o acumulada) se constituyen como primer paso en el estudio de las variables aleatorias continuas, y se enmarcaría en un nivel A1 o A2 de razonamiento algebraico. Este tipo de tabla aparece con mayor fuerza en los libros de texto chilenos (7ºEGB: 20,1%; 8ºEGB: 38, 3%) que en los españoles (1ºESO: 10,2%; 2ºESO: 9,4%). Asimismo, las tablas de distribución de una variable con frecuencias acumuladas implican un nivel A1 o A2 de razonamiento algebraico, pues implican el manejo de desigualdades o percentiles, en la mayoría de los casos para despejar incógnitas y obtener valores relativos a porcentajes. Se observa que en el contexto español se incrementa su uso conforme avanza el nivel educativo (1ºESO: 0,8%; 2ºESO: 8,5%), mientras que en el contexto chileno su presencia es escasa (7ºEGB: 5,6%; 8ºEGB: 0%) y nula en el último curso de Enseñanza General Básica.

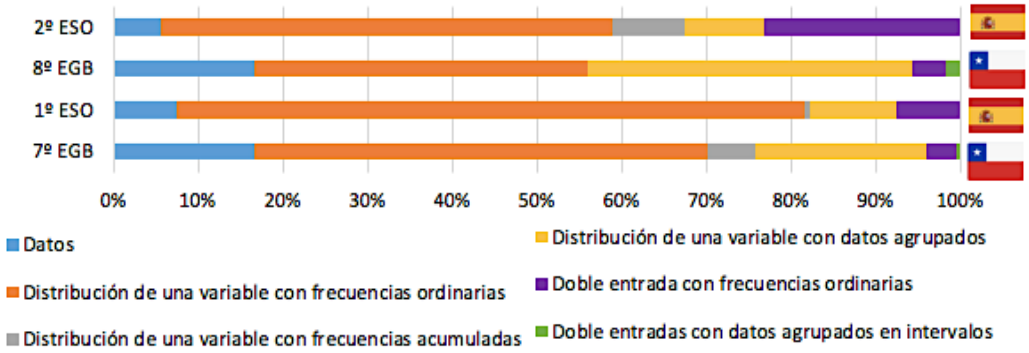


Figura 2: Porcentaje de tipos de tablas por curso y país

Las tablas de doble entrada con frecuencias ordinarias tienen una mayor presencia en los textos españoles (1ºESO: 7,5%; 2ºESO: 23,2%) que en los chilenos (7ºEGB: 3,6%; 8ºEGB: 4%), sin embargo, estos últimos sí consideran, a diferencia del contexto español, las tablas de doble entrada con datos agrupados en intervalos, aunque de manera escasa (7ºEGB:0,5%;8ºEGB:1,7%). Estos tipos de tablas, que pueden presentar frecuencias absolutas, relativas o porcentuales, poseen al menos un nivel algebraico A2 porque las celdas contienen diferentes frecuencias (conjuntas, marginales y condicionadas), lo que implica una gran complejidad en su interpretación (Garcia-Mila et al., 2014).

Por último, las tablas de datos, que son más frecuentes en el contexto chileno (7ºEGB: 16,5%; 8ºEGB: 16,6%) que en el español (1ºESO: 7,5%; 2ºESO: 5,6%), suelen tener un nivel de algebrización incipiente, dado que no se representan distribuciones de las variables, y esto implica el nivel A0.

CONCLUSIONES

El trabajo con tablas estadísticas requiere la aplicación de conocimientos estadísticos y aritméticos además de un razonamiento algebraico, los cuales son un medio para alcanzar de manera progresiva niveles superiores de generalización, representación y operación (Godino et al., 2014). En esta línea, las tablas estadísticas pueden contribuir a este objetivo, debido a que su estudio se contempla en los lineamientos curriculares de variados países, de forma particular en Chile y España, a partir de los primeros cursos de educación primaria. Como se describió anteriormente, el tratar con este objeto matemático requiere, al menos, de los tres primeros niveles de algebrización, que pueden variar

dependiendo de la tarea y el resolutor de esta. En este sentido, cobra importancia que el profesor sea consciente de la complejidad que supone para el estudiante su aprendizaje, por lo que es necesario que el docente tenga conocimientos que le permitan analizar y diseñar tareas que promuevan el tránsito hacia niveles superiores de razonamiento algebraico, por medio del estudio de los diferentes temas que propone el currículum, para que de manera integral el aprendiz desarrolle un pensamiento más abstracto.

Agradecimientos:

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 (MICIN), Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía) y Beca ANID Folio: 72190280.

Referencias

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA). (2016). *The Australian curriculum: Mathematics.* Sydney, NSW: Author.

Alkhateeb, M. A. (2019). The Language Used in the 8th Grade Mathematics Textbook. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(7). https://doi.org/10.29333/ejmste/106111

Díaz Herrera, C. (2018). Investigación cualitativa y análisis de contenido temático. Orientación intelectual de revista Universum. *Revista General de Información y Documentación*, *28*(1), 119-142. https://doi.org/10.5209/RGID.60813

Estrella, S., & Estrella, P. (2020). Representaciones de datos en estadística: De listas a tablas. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *12*(1), 21-34. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.20

Garcia-Mila, M., Marti, E., Gilabert, S., & Castells, M. (2014). Fifth Through Eighth Grade Students' Difficulties in Constructing Bar Graphs: Data Organization, Data Aggregation, and Integration of a Second Variable. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(3), 201-233. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921132

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Lahanier-Reuter, D. (2003). Différents types de tableaux dans l'enseignement des statistiques. *Spirale-Revue de recherches en éducation*, *32*(32), 143-154. https://doi.org/10.3406/spira.2003.1386

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria*. Ministerio de Educación, Cultura y Deportes.

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Ministerio de Educación, Cultura y Deportes.

MINEDUC. (2015). *Bases curriculares 7º básico a 2° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.

MINEDUC. (2018). *Bases curriculares Primero a Sexto Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

EDUCACIÓN ESTOCÁSTICA PARA EDUCAR EN SOSTENIBILIDAD: UNA APROXIMACIÓN DESDE LOS LIBROS DE TEXTO

Claudia Vásquez, Israel García-Alonso, María José Seckel, Ángel Alsina

Pontificia Universidad Católica de Chile, Universidad de La Laguna, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Universidad de Girona

Desde el marco de la alfabetización estadística y probabilística como herramienta para promover la Educación para el Desarrollo Sostenible, se analizan las tareas de estadística y probabilidad para educar en sostenibilidad, de una colección de libros de texto chilenos de matemáticas de Educación Primaria (6-14 años). Se realizó un análisis de contenido a partir de las categorías: contextos para la sostenibilidad, niveles de articulación, demanda cognitiva y autenticidad. Los resultados muestran una baja presencia de contextos para la sostenibilidad; las tareas no se articulan para desarrollar ninguno de los Objetivos de Desarrollo Sostenible; hay un claro predominio de las tareas de memorización; la enseñanza de la estadística y la probabilidad en los libros de texto no está alineada a la EDS.

Educación para el Desarrollo Sostenible, Educación Estocástica, Libros de texto.

INTRODUCCIÓN

El contexto socioeconómico y sanitario actual, ha evidenciado la necesidad de avanzar en el desarrollo de habilidades y conocimientos que permitan formar ciudadanos alfabetizados en estadística y probabilidad, capaces de "extraer información significativa de los datos, comprender qué significan los datos, incluyendo cómo leerlos de manera apropiada, extraer conclusiones, así como reconocer cuándo se utilizan de manera engañosa o inapropiada" (OECD, 2019, p. 5). No solo se trata de contar con ciudadanos informados, sino que, a partir de una toma de decisiones fundada en la evidencia cuantitativa, sean capaces de cambiar su modo de actuar, en pos de un presente y un futuro sostenible. Desde esta perspectiva y más allá del contexto actual, la Educación Estocástica (Batanero, 2019) cobra especial importancia, posicionándose como una herramienta para impulsar el desarrollo de competencias, capacidades y actitudes que generen cambios en el comportamiento de los ciudadanos del siglo XXI. Sin duda alguna la Educación Estocástica, es un terreno fértil para ayudar a crear consciencia, comprender, reflexionar y actuar en torno a uno de los desafíos más apremiantes del mundo actual: la Educación para el Desarrollo Sostenible (EDS). Desde este posicionamiento, Vásquez (2020), Vásquez y García-Alonso (2020) y Vásquez y Alsina (2021) proponen una Educación Estocástica para Educar en Sostenibilidad, cuyo propósito es promover que todas las personas tengan la oportunidad de desarrollarse como ciudadanos alfabetizados en estadística y probabilidad, además de adquirir conocimientos, competencias, valores y actitudes con los que puedan contribuir al desarrollo sostenible. Si queremos contar con ciudadanos alfabetizados desde este enfoque, se debe desarrollar desde temprana edad la motivación y

capacidad para comprender, interpretar, evaluar críticamente y cuando sea pertinente, expresar opiniones en cuanto a mensajes e información cuantitativa y estadística. A la vez, se deben potenciar argumentos basados en datos, o cuestiones relacionadas con la incertidumbre y el riesgo del mundo real, que los lleve a tomar decisiones para crear un mundo más sostenible.

Desde esta perspectiva, nos centramos en las oportunidades que ofrecen los libros de texto de matemáticas para la inclusión de la educación para la sostenibilidad en el aula. Para ello, nos preguntamos ¿qué oportunidades de aprendizaje ofrecen las tareas estocásticas presentes en los libros de texto de Educación Primaria para educar en sostenibilidad?

Nos centramos en los libros de texto porque, además de formar parte del primer campo de acción para promover la educación para la sostenibilidad (UNESCO, 2017), son un recurso ampliamente utilizado por el profesorado en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Vásquez y Alsina, 2021). Considerando estos antecedentes, nuestro objetivo es analizar las tareas de estadística y probabilidad de una colección de libros de texto de matemáticas de Educación Primaria para educar en sostenibilidad. En concreto, se trata de una colección de libros chilenos que tienen un gran impacto en el proceso de enseñanza de las matemáticas en Chile, pues son distribuidos por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), impactando a más de tres millones de estudiantes de 1º a 8º curso (6-14 años).

La educación estocástica una puerta al desarrollo sostenible

De acuerdo con Vásquez (2020), la Educación Estocástica permite promover la incorporación de competencias vinculadas a la EDS, pues "los datos no son sólo números, sino números en contexto" (Cobb y Moore, 1997), es decir, no se puede pensar el análisis de los datos sin pensar sobre el contexto en el que se ofrecen. El objetivo de la estadística es profundizar en el contexto para desarrollar una comprensión del contexto en sí mismo, lo que conlleva a una "constante interrelación entre lo concreto y lo abstracto en el razonamiento estadístico" (Weiland, 2019). El contexto determina de qué forma y qué datos recoger, cómo analizarlos e interpretar los resultados (Weiland, 2019). Es más, la enseñanza de la estadística y la probabilidad tienen un enorme potencial para incorporar discusiones sobre la vida cotidiana de los estudiantes en las aulas de matemáticas (Usiskin, 2014). Por consiguiente, es primordial desarrollar competencias en la ciudadanía para "empoderar y equipar a las generaciones presentes y futuras para satisfacer sus necesidades mediante un enfoque equilibrado e integrado de las dimensiones económica, social y ambiental del desarrollo sostenible" (Leicht, Heiss, y Byun, 2018, p.7). Desde este prisma, la Educación Estocástica se constituye como una herramienta poderosa que contribuye directamente al desarrollo de las competencias clave de sostenibilidad y, por ende, va en ayuda directa a formar ciudadanos de sostenibilidad. Es en este sentido, que la necesidad de desarrollar competencias para el desarrollo sostenible se constituye en un propósito para enseñar estocástica y a su vez la estocástica se convierte en un pretexto para formar en sostenibilidad (Vásquez, 2020). Pero, asumiendo que no se trata sólo de que los estudiantes comprendan las distintas problemáticas (sociales, económicas y medioambientales), sino que es necesario ir más allá, de manera tal que los estudiantes tomen consciencia de estas problemáticas y actúen para avanzar hacia un mundo más sostenible (UNESCO, 2017). De acuerdo con Vásquez y García-Alonso (2020), es necesario que el profesorado diseñe e implemente tareas de estadística y probabilidad con diversas características: que involucren contextos

para la sostenibilidad; que muestren articulación a lo largo de la lección; que sean tareas desafiantes, que motiven y ayuden a los estudiantes a construir nuevo conocimiento estadístico y probabilístico por medio de la resolución de problemas; y por último, que sean auténticas.

Desde este marco, en este trabajo que se detalla con mayor profundidad en Vásquez et al. (2021), se analizan las tareas estocásticas de una colección de libros de texto chilenos de matemáticas para estudiantes de 1º a 8º año básico (6-14 años).

METODOLOGÍA

Este estudio es de tipo exploratorio-descriptivo y utiliza como metodología de investigación el análisis de contenido (Stemler, 2001), puesto que el propósito es indagar en las oportunidades que ofrecen los libros de texto de matemáticas para promover la EDS en el aula escolar, a través de contextos vinculados al desarrollo sostenible para enseñar estadística y probabilidad. La muestra seleccionada para el análisis es intencional y está conformada por una colección de ocho libros de texto chilenos de matemáticas que son distribuidos gratuitamente por el MINEDUC (Figura 1).

Código	Título	Autores	Editorial	Edición
T1	Matemática 1° Básico	Isoda, M.	Unidad Curriculum y Evaluación, Mineduc	2020
T2	Matemática 2° Básico	Isoda, M.	Unidad Curriculum y Evaluación, Mineduc	2020
T3	Matemática 3° Básico	Urra, A., Córdova, C., y Quezada, C.	Santillana	2017
T4	Matemática 4° Básico	Rodríguez, R., García, D., y Romante, P.	SM	2018
T5	Matemática 5° Básico	Ho, F., Kee, G., y Ramakrishnan, Ch.	Santillana y Marshall Cavendish Education	2017
T6	Matemática 6° Básico	Maldonado, L., y Castro, C.	Santillana	2016
T7	Matemática 7° Básico	Iturra, F., Manosalva, C., Ramírez, M., y Romero, D.	SM	2019
T8	Matemática 8° Básico	Torres, C., y Caroca, M.	Santillana	2019

Figura 1: serie de libros de texto de matemática utilizados en el análisis.

En primer lugar, se identificaron las lecciones vinculadas al estudio de la estadística y la probabilidad en los libros de texto, para luego categorizarlas y codificarlas a partir de un conjunto de indicadores refinados y adaptados del estudio de Vásquez y García-Alonso (2020), que abordan las siguientes categorías: 1) contextos para la sostenibilidad vinculados a los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS); 2) niveles de articulación; 3) demanda cognitiva; y 4) autenticidad.

RESULTADOS

Se han analizado 283 tareas matemáticas. En lo que sigue se presentan los resultados de cada categoría:

Contextos para la sostenibilidad

En las tareas vinculadas al estudio de la estadística, se observa que un 52% de las tareas analizadas incluyen contextos para la sostenibilidad, donde el contexto social es el que se aborda mayoritariamente (28%), a partir de tareas que se diseñan a partir de temas como los medios de transporte, el deporte, la alimentación, los hábitos saludables o la pobreza. La siguiente temática más habitual es la relacionada con el contexto medioambiental (14%), siendo el reciclaje el contexto más utilizado. Cabe destacar también el elevado porcentaje de tareas con contextos poco significativos o sin contexto, que representan casi la mitad de las tareas de estadística analizadas.

Niveles de articulación

En los libros de texto analizados hemos observado que sólo tres lecciones de estadística y probabilidad, de todos los libros de la Educación Básica, desarrollan un nivel de articulación diferente al nivel 0: la lección 1 de 4º de primaria (recolectar información y comunicar conclusiones), que se encuentra en el nivel 2 (se presenta una temática relacionada con el ODS 11: Ciudades y comunidades sostenibles); y las lecciones 1 y 2 de 8º de primaria (estadística y probabilidades), que se encuentran en el nivel 1 (inician su presentación en el deporte, que podemos vincularlo al ODS-3: Salud y bienestar). Con este dato, se evidencia que los libros de texto, en su mayor parte, no parten de temáticas cercanas a los ODS.

Demanda cognitiva

En todos los niveles, excepto en 1º de primaria, prevalecen las tareas que se categorizan dentro de la demanda de Memorización (84%), es decir, son tareas cuya finalidad es la aplicación directa de los procesos o conocimientos expuestos previamente en la lección. Estos datos evidencian un enfoque de enseñanza de la estadística fundamentado en el uso de procesos y no en la aplicación de los mismos para resolver problemas y tomar decisiones, que requieren de una demanda cognitiva mayor.

Autenticidad

Esta categoría se ha analizado, entendiendo la lección como una unidad que promueve el conocimiento de la estadística y la probabilidad y su uso para que los ciudadanos sean capaces de desarrollarse en nuestra sociedad. Adicionalmente, se analiza si la lección se aproxima a algún ODS o se centra en contextos orientados al desarrollo del ODS. Por lo tanto, cuantos más aspectos se verifiquen, la lección es más legítima, profundizando en el conocimiento del ODS.

En general, tras un análisis global, situamos la mayor parte de las lecciones en la categoría ficticia, pues a lo largo de la lección no se verifican las características de la autenticidad con enfoque a una EDS.

REFLEXIONES FINALES

Dentro de los principales hallazgos, destaca la baja presencia de los contextos para la sostenibilidad. En las tareas de estadística, el alto porcentaje de tareas que consideran contextos poco significativos o sin contexto (46%), evidencia una enseñanza de la estadística alejada de la realidad y en muchas ocasiones carente de sentido para los estudiantes; mientras que, en las tareas de probabilidad, un 95% aluden a contextos poco significativos, centrados mayoritariamente en el lanzamiento de dados, monedas, ruletas, etc. Sabemos que "las tareas en contextos no reales continúan promoviendo la división entre el mundo y la escuela, y los estudiantes continúan creyendo que el conocimiento de la escuela es sólo útil y funcional en la escuela y que el mundo necesita otro tipo de conocimiento" (Zapata-Cardona y Marrugo Escobar, 2019). La importancia de incorporar contextos cercanos y con significado para los estudiantes, que les permita desarrollar el sentido de los datos, es algo que se viene promoviendo con fuerza por distintos autores y organismos internacionales pues "lo que importa no son los datos, sino las respuestas y los conocimientos que buscamos en los datos" (Gal, 2019, p. 4). Se hace necesaria esta reflexión, pues podría ser un camino diferente que desarrolle una conexión con el mundo real.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT Nº 1200356 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile.

Referencias

Batanero, C. (2019). Thirty years of stochastics education research: Reflections and Challenges. In J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-15).

Cobb, G., & Moore, D. (1997). "Mathematics, Statistics, and Teaching". *American Mathematical Monthly, 104* (9), 801–823. https://doi.org/10.1080/00029890.1997.11990723

Frankenstein, M. (2009). Developing a critical mathematical numeracy through real real-life word problems. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooran, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 111–130). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Leicht, A., Heiss, J., & Byun, W.J. (2018). *Issues and Trends in Education for Sustainable Development.* Paris, France: UNESCO Publishing.

OECD (2019). *OECD Future of Education and Skills 2030: OECD Learning Compass 2030.* Paris: OCDE.

Stemler, S. (2001). An overview of content analysis. *Practical Assessment, Research & Evaluation, 7*(17), 1-6. https://doi.org/10.7275/z6fm-2e34

UNESCO. (2017). Education for Sustainable Development Goals: learning objectives. Retrieved from https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000247444

Usiskin, Z. (2014). On the relationships between statistics and other subjects in the K-12 curriculum. In K. Makar, B. de Sousa, y R. Gould (Eds.), *Sustainability in Statistics Education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-9)*, Flagstaff, AZ. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Vásquez, C. (2020). Educación estocástica: una herramienta para formar ciudadanos de sostenibilidad. *Matemáticas, Educación y Sociedad 3*(2), 1-20.

Vásquez, C., & Alsina, Á. (2021). Conectando educación estadística y educación para la sostenibilidad: un marco para promover el desarrollo sostenible en la formación del profesorado.

Vásquez, C., & García-Alonso, I. (2020). La educación estadística para el Desarrollo Sostenible en la Formación del Profesorado. *Profesorado. Currículum y formación del profesorado*, 24(3), 125-147. https://doi.org/10.30827/profesorado.v24i3.15214

Weiland, T. (2019). The contextualized situations constructed for the use of statistics by school mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, 18(2), 18-38.

Zapata-Cardona, L., & Marrugo Escobar, L.M. (2019). Critical Citizenship in Colombian Statistics Textbooks. In G. Burrill & D. Ben-Zvi (Eds.), *Topics and Trends in Current Statistics Educations Research*. ICME-13, Monographs. Springer, Cham, 373-389. https://doi.org/10.1007/978-3-030-03472-6_17

Vásquez, C., García-Alonso, I., Seckel, M.J. & Alsina, Á. (2021). Education for Sustainable Development in Primary Education Textbooks—An Educational Approach from Statistical and Probabilistic Literacy. *Sustainability*, *13*(6), 3115. https://doi.org/10.3390/su13063115

Vásquez, C., y Alsina, A. (2021). Analysing Probability Teaching Practices in Primary Education: What Tasks do Teachers Implement? *Mathematics*. 2021; 9(19):2493. https://doi.org/10.3390/math9192493

LA EDUCACIÓN PARA EL DESARROLLO SOSTENIBLE EN CHILE: UNA APROXIMACIÓN DESDE EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Claudia Vásquez; Juan Luis Piñeiro

Pontificia Universidad Católica de Chile; Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

En este estudio indagamos en las oportunidades que ofrece el currículo chileno de Educación Básica en la asignatura de matemática, para alfabetizar en sostenibilidad en el aula escolar. Para ello, consideramos los cuatro enfoques de la Educación para el Desarrollo Sostenible propuestos por la UNESCO. Los resultados muestran que, si bien se incorporan aspectos vinculados a los cuatro enfoques, este es desbalanceado con un fuerte énfasis en lo contextual por sobre el enfoque integral, que es el que se encuentra menos presente. Por tanto, se evidencia la necesidad de promover que los estudiantes apliquen la matemática a la comprensión de distintas problemáticas (sociales, económicas y medioambientales) a las que a diario nos vemos enfrentados, así como las medidas que se deben adoptar para transformar y actuar en pos de un mundo más sostenible.

Alfabetización en sostenibilidad, Competencias de sostenibilidad, Educación Matemática.

INTRODUCCIÓN

Desde finales de los años 80’ nos vemos desafiados a impulsar de manera urgente acciones prácticas, que permitan construir juntos un futuro mejor, que contribuyan a acabar con la pobreza, las desigualdades, alcanzar la paz y la justicia, proteger los derechos humanos y proteger el planeta (UNESCO, 2015). Esto, implica (re)pensar las funciones de la escuela y del profesorado como agentes responsables de promover dicha transformación (Calero et al., 2019; Vásquez, Seckel y Alsina, 2020). En este sentido, la UNESCO (2017) subraya que “no es sólo integrar contenidos como el cambio climático, la pobreza y el consumo sostenible […] sino también crear contextos de enseñanza y aprendizaje interactivos y centrados en el alumno” (p.7). Por tanto, es urgente formar al profesorado de acuerdo con los principios rectores de: diversidad cultural y tolerancia, paz y no violencia, derechos humanos y libertades fundamentales, supervivencia humana y bienestar. De manera que el profesorado cuente con las herramientas para contribuir al desarrollo de la Educación para el Desarrollo Sostenible (EDS) que les posibilite:

> Garantizar que todos los alumnos adquieran los conocimientos teóricos y prácticos necesarios para promover el desarrollo sostenible, entre otras cosas mediante la educación para el desarrollo sostenible y la adopción de estilos de vida sostenibles, los derechos humanos, la igualdad de género, la promoción de una cultura de paz y no violencia, la ciudadanía mundial y la valoración de la diversidad cultural y de la contribución de la cultura al desarrollo sostenible (UNESCO, 2015, p. 20).

En esta dirección, es imperativo dirigir los esfuerzos hacia oportunidades de desarrollo profesional adecuadas en lo que respecta a la formación del profesorado para la inclusión de la sostenibilidad en las

distintas disciplinas escolares (Vilches y Gil, 2012), ya que finalmente son los profesores los encargados de liderar el proceso de integrar la sostenibilidad en el aula y de posibilitar que sus estudiantes desarrollen las competencias clave necesarias para fomentar el desarrollo sostenible (Calero et al., 2019). La complejidad de este desafío radica también en la convergencia de saberes de diversas disciplinas en la EDS, que de manera integrada contribuyen al desarrollo de las competencias clave que, si bien no se pueden enseñar directamente, sí pueden ser desarrolladas durante la acción, sobre la base de la experiencia y reflexión (UNESCO, 2015, 2017). De este modo, se requiere "renovar la enseñanza, en todos sus niveles, para que el aprendizaje responda a un proceso de indagación, de investigación en torno a problemas relevantes, de interés para los estudiantes" (Vilches y Gil, 2012, p. 33).

En este sentido, la Educación Matemática es un terreno fértil para ayudar a crear conciencia, comprender, reflexionar y actuar en torno a uno de los desafíos más apremiantes del mundo actual: la Educación para el Desarrollo Sostenible, situándose como un conocimiento crucial que todo ciudadano puede utilizar para contribuir a desarrollar una mejor sociedad, tanto en lo económico, social y medioambiental (Vásquez y García-Alonso, 2020; Vásquez et al., en prensa). Considerando estos antecedentes, en este estudio nos centramos en indagar en las oportunidades que ofrece el currículo chileno de Educación Básica en la asignatura de matemática (MINEDUC, 2012) para alfabetizar en sostenibilidad; puesto que la interpretación que realiza el profesorado sobre el currículo impacta en sus prácticas de enseñanza y en su desarrollo profesional (Choppin, McDuffie, Drake y Davis, 2018).

La educación para el desarrollo sostenible

Hoy en día la necesidad de promover el desarrollo sostenible es entendida como un desafío crucial que debe impulsar acciones prácticas para que todos podamos construir juntos un futuro mejor, que permita acabar con la pobreza, las desigualdades, alcanzar la paz y la justicia, proteger los derechos humanos y proteger el planeta (UNESCO, 2015). En este sentido, la ONU reconoce tres grandes dimensiones de acción: económica, social y ambiental, a partir de las que se sugieren 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS).

De acuerdo con la UNESCO (2017), para alcanzar estos objetivos es necesario contar con una educación holística, integradora y transformadora, que converja en una EDS como elemento integral de una educación de calidad y motor del desarrollo sostenible. De esta manera, se espera que a través de la EDS, las generaciones actuales y futuras puedan desarrollar competencias clave de sostenibilidad: pensamiento sistémico, anticipación, normativa, estratégica, colaboración, pensamiento crítico, autoconciencia y finalmente, la competencia integrada de resolución de problemas. Conviene precisar que, si bien estas competencias son transversales, multifuncionales e independientes, deberían ser desarrolladas por todo el alumnado a nivel mundial (a distintos niveles según la edad) y no reemplazan a las competencias específicas para ciertas situaciones y contextos, pero las comprenden y tienen un mayor alcance (Rychen, 2003). En esta dirección, la UNESCO (2014) a través de su programa de acción mundial para el desarrollo sostenible, establece cuatro enfoques (Figura 1) a considerar por el profesorado a la hora de diseñar e implementar procesos de enseñanza con base en la sostenibilidad.

Figura 1. Enfoques para la EDS (Vásquez y García-Alonso, 2020).

Como es posible observar, se trata de que por medio de la EDS se contribuye a "promover cambios sociales, económicos y políticos" (UNESCO, 2017, p. 8) en pos de un presente y un futuro sostenibles. Por tanto, para alcanzar el tan ambicioso propósito de implementar el aprendizaje de los ODS a través de la EDS, es necesario integrar la EDS en las políticas públicas, programas educativos, planes de estudio, libros de texto y, especialmente en la formación del profesorado, pues ellos "son agentes de cambio poderosos, que pueden dar con la respuesta educativa necesaria para alcanzar los ODS. Sus conocimientos y competencias son esenciales para reestructurar los procesos y las instituciones educativas en pos de la sostenibilidad" (UNESCO, 2017, p. 51).

METODOLOGÍA

Este estudio es de tipo exploratorio-descriptivo (McMillan y Schumacher, 2001) y utiliza como metodología de investigación el análisis de contenido (Stemler, 2001), puesto que el propósito es indagar en las oportunidades que ofrece el currículo chileno de Educación Matemática (MINEDUC, 2012) para alfabetizar en sostenibilidad en el aula escolar. Para ello, hemos analizado a la luz de los cuatro enfoques para la EDS antes mencionados, el currículo de Educación Básica en la asignatura de matemática.

RESULTADOS

En lo que sigue presentamos los resultados de acuerdo con cada enfoque de enseñanza.

Transformador

Las diferentes alusiones que realiza el documento chileno sobre este enfoque tienen relación con la preparación de los estudiantes para el cambio. Concretamente, se han encontrado nueve fragmentos relativos a cómo la Educación Matemática debe proveer a los estudiantes de competencias que les

permitan actuar para el cambio, tomar decisiones para cambiar su realidad, buscar caminos y soluciones o ser flexibles y adaptables. Por ejemplo, una de las alusiones señala que la resolución de problemas en matemáticas ofrece al estudiante la oportunidad de enfrentarse a tareas desafiantes que requieren "conocimientos que no siguen esquemas prefijados" (MINEDUC, 2012, p. 87).

Contextual

El enfoque contextual es el mayoritario en el documento, con 21 alusiones en total. En ellas es posible identificar tres patrones de referencias. El primero de ellos señala que la Educación Matemática debe estar conectada con situaciones cotidianas. Por ejemplo, un fragmento señala que la asignatura "está siempre presente en la vida cotidiana, explícita o implícitamente" (MINEDUC, 2012, p. 86). En el segundo grupo, se encuentran menciones que tratan la resolución de problemas. Concretamente, encontramos alusiones que señalan que el propósito de la asignatura es "facilitar la selección de estrategias para resolver problemas" (MINEDUC, 2012, p. 86). Por último, el tercer grupo trata de fragmentos que unen la resolución de problemas y la conexión con situaciones cotidianas. En este patrón encontramos que la asignatura debe "contextualizar el aprendizaje mediante problemas reales relaciona la matemática con situaciones concretas, y facilita así un aprendizaje significativo de contenidos matemáticos fundamentales" (MINEDUC, 2012, p. 86).

Integral

El enfoque integral es el menos presente en el currículo, con solo dos menciones. Las referencias que se encuentran en el documento aluden al papel de la matemática para comprender la realidad señalando que, "la matemática es en sí misma un aspecto importante de la cultura humana: es una disciplina cuya construcción empírica e inductiva surge de la necesidad y el deseo de responder y resolver situaciones provenientes de los más variados ámbitos" (MINEDUC, 2012, p. 86).

Crítico

El análisis ha encontrado 8 alusiones al enfoque crítico. En ellas, se señala cómo la Educación Matemática desarrolla un pensamiento crítico que permite interactuar adecuadamente con el entorno. Por ejemplo, el documento señala que "aprender matemática es fundamental para la formación de ciudadanos críticos y adaptables; capaces de analizar, sintetizar, interpretar y enfrentar situaciones cada vez más complejas; dispuestos a resolver problemas de diversos tipos" (MINEDUC, 2012, p. 86).

REFLEXIONES FINALES

A través de este análisis, hemos identificado que el actual currículo de Educación Básica para la asignatura de matemática, si bien incorpora aspectos vinculados a los cuatro enfoques propuestos por la UNESCO (2014), este es desbalanceado con un fuerte énfasis en lo contextual por sobre el enfoque integral, que es el que se encuentra menos presente. Finalmente, no cabe duda de que la Educación para el Desarrollo Sostenible es un reto que la UNESCO ha lanzado a toda la sociedad y a la comunidad educativa en particular. Esto implica, no sólo cambios en la selección de los contenidos a enseñar, sino que también en los recursos que utilizamos para la enseñanza. En este sentido, queremos insistir en la necesidad de reorientar la enseñanza de la matemática en el aula escolar, para avanzar hacia un enfoque

centrado en la formación de ciudadanos educados en sostenibilidad, con un pensamiento crítico que les permita tomar decisiones fundamentadas (Vásquez et al., 2021).

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT REGULAR Nº 1200356 financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile.

Referencias

Calero, M., Mayoral, O., Ull, A., & Vilches, A. (2019). La educación para la sostenibilidad en la formación del profesorado de ciencias experimentales en Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 157-175. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2605

Choppin, J., McDuffie, A., Drake, C. & Davis, J. (2018). Curriculum ergonomics: Conceptualizing the interactions between curriculum design and use. *International Journal of Educational Research, 92*, 75-85.

McMillan, J.H. & Schumacher, S. (2001). Research in Education. A conceptual introduction 5th edition: Pearson: New Jersey, US.

MINEDUC (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Rychen, D.S. (2003). Competencias clave: Abordar desafíos importantes en vida Rychen, D.S. y Salganik, L.H. (eds). *Competencias clave para una vida exitosa y una sociedad sana.* Cambridge, MA, Hogrefe y Huber, pp. 63–107.

Stemler, S. (2001). An overview of content analysis. Practical Assessment, Research & Evaluation, 7(17), 1-6. https://doi.org/10.7275/z6fm-2e34

UNESCO. (2014). Hoja de ruta para la ejecución del Programa de acción mundial de Educa- ción para el Desarrollo Sostenible. Francia: Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

UNESCO. (2015). Transforming our world: the 2030 Agenda for Sustainable Development. Retrieved from https://www.un.org/ga/search/view_doc.asp?symbol=A/RES/70/1&Lang=E

UNESCO. (2017). Education for Sustainable Development Goals: learning objectives. Retrieved from https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000247444

Vásquez, C., & García-Alonso, I. (2020). La educación estadística para el Desarrollo Sostenible en la Formación del Profesorado. *Profesorado. Currículum y formación del profesorado,* 24(3), 125-147. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2605

Vásquez, C., García-Alonso, I., Seckel, M.J. & Alsina, Á. (2021). Education for Sustainable Development in Primary Education Textbooks—An Educational Approach from Statistical and Probabilistic Literacy. *Sustainability*, *13*(6), 3115. https://doi.org/10.3390/su13063115

Vásquez, C., Seckel, M. J. & Alsina, A. (2020). Sistema de creencias de los futuros maestros sobre Educación para el Desarrollo Sostenible en la clase de matemática. *Revista Uniciencia*, v. 34, n. 2, 16-30.

Vásquez, C., Seckel, M. J., Rojas, F., Errázuriz, C. & Valdivieso, G. (en prensa). Los proyectos estadísticos: un puente entre la alfabetización estadística y la alfabetización en sostenibilidad. *Revista UNO de Didáctica de las Matemáticas.*

Vilches, A. & Gil, D. (2012). La educación para la sostenibilidad: el reto de la formación del profesorado. *Profesorado, Revista de currículum y formación de profesorado*, 16(2), 25-43.

LA EDUCACIÓN PARA EL DESARROLLO SOSTENIBLE EN LA CLASE DE ESTADÍSTICA: ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA

Daniel Burgos[1], Danitza González[1], Fernanda Sanhueza[1], Anahí Huencho[1], Claudia Vásquez[2]

Universidad Católica de Temuco[1] y Pontificia Universidad Católica de Chile[2]

Esta investigación, se centra en el pensamiento crítico desde la interpretación de gráficos y las acciones basadas en la sostenibilidad de una intervención de aula en relación con la Crisis Hídrica en la Región del Biobío, se realizó a 165 estudiantes de 7º básico a 4º año medio de un mismo establecimiento. La metodología se enmarca en un enfoque cualitativo descriptivo, desarrollado por medio de un cuestionario centrado en la interpretación de gráficos, la toma de decisiones y sus argumentos. Los resultados evidencian que los estudiantes señalan los datos utilizados en el eje de las ordenadas como la principal diferencia entre los dos gráficos y reconocen cómo la apariencia del gráfico puede cambiar dependiendo de los datos utilizados. La argumentación se concentra en un nivel de demanda sin respaldo y acciones para la sostenibilidad centradas en lo personal, independiente del nivel académico o el género de los estudiantes.

Pensamiento crítico, Comprensión gráfica, Educación para el Desarrollo Sostenible, Educación Estadística.

INTRODUCCIÓN

Vivimos en una sociedad que se enfrenta a una crisis global sin precedentes, en la que dialogan tres crisis simultáneas: socioambiental, de valores y de conocimiento (Bonil et al., 2010). La educación no puede quedar ajena a este cambio de época y debe ser un medio para provocar el "despertar" de estudiantes capaces de transformar aquellos escenarios de crisis, en escenarios de oportunidad (Bonil et al, 2010). De acuerdo con esto, la inserción de la Educación para el Desarrollo Sostenible (EDS) en los sistemas educativos a nivel mundial se presenta como alternativa, por tratarse de un tipo de educación que trabaja desde perspectivas complejas permitiendo profundizar en las relaciones que se producen en una realidad (Moreno-Pino et al., 2018).

La omnipresencia de las matemáticas en la escuela, el carácter holístico de efecto sistémico-complejo de las grandes problemáticas que afectan hoy al mundo, sumado a la escasa información de material didáctico para la enseñanza de la estadística asociada al desarrollo del pensamiento crítico, nos lleva a formular el objetivo de esta investigación en los siguientes términos: evaluar el pensamiento crítico desde la interpretación de gráficos y las acciones basadas en la sostenibilidad de una intervención de aula sobre la crisis hídrica en la Región del Biobío, en estudiantes desde séptimo año básico a cuarto año medio.

El pensamiento crítico y la comprensión gráfica.

El pensamiento crítico es entendido como un proceso en el que intervienen diversas habilidades como el análisis, la argumentación y la evaluación, con el fin de tomar decisiones (Cangalaya, 2020). El currículum chileno de Educación Matemática potencia el desarrollo del pensamiento crítico a través del eje temático de Probabilidades y Estadística, pues se espera formar estudiantes críticos que utilicen la información para validar sus opiniones y decisiones; capaces de determinar situaciones conflictivas a raíz de interpretaciones erróneas de un gráfico y de manipulaciones intencionadas de los datos (MINEDUC, 2015). Por tanto, la estadística por medio de la interpretación de gráficos permite formular preguntas críticas y adoptar una postura crítica fundamentadas en actitudes y creencias propias (Gal y Murray, 2011). En este sentido y de acuerdo con Friel, Curcio y Bright (2001), es posible identificar cuatro factores principales que influyen al momento de interpretar un gráfico, estos son: el propósito del gráfico, características de la tarea, de la disciplina y del alumno. Además, es importante considerar los niveles de comprensión de los gráficos. Curcio (1989) sugiere tres niveles de respuesta de los alumnos: leer los datos, leer entre los datos y leer más allá de los datos. Por otro lado, el modelo de Aoyama (2006) responde de mejor forma ante las variables cualitativas, sugiere 5 niveles: Idiosincrático, Lectura gráfica básica, Racional/Literal, Critico y por último Hipótesis y modelado.

La educación para el desarrollo sostenible

La EDS, de acuerdo con la Asamblea General de las Naciones Unidas, es entendida como la satisfacción de las necesidades de la generación presente, sin comprometer la capacidad de las generaciones futuras para satisfacer sus propias necesidades. Se fundamenta en 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), cuyo objetivo es asegurar una vida sostenible, pacífica, próspera y justa en el mundo, en la actualidad y en el futuro. Para ello, se debe potenciar una educación holística y transformadora, que considere entornos de aprendizaje autodidacta, la colaboración y la participación, la orientación hacia los inconvenientes y la construcción de vínculos entre el aprendizaje formal e informal (Vásquez, 2020). Permitiendo a los estudiantes tomar decisiones fundamentadas y realizar actividades responsables en pro de la integridad medioambiental, la viabilidad económica y la justicia social.

En tal dirección, el contexto desempeña un rol fundamental, ya que aumenta el entusiasmo y mejora la actitud frente al contenido (Romero et al., 2021). Por ello, se aborda el ODS 6 “Agua limpia y saneamiento: garantizar la disponibilidad y la gestión sostenible del agua y el saneamiento para todas las personas”, desde la problematización de la crisis hídrica que se produce por falta de agua lluvia como consecuencia del cambio climático. En Chile, la región del Biobío en el año 2020 presentó un 38% de déficit de precipitaciones en promedio, dejando en evidencia la alta escasez de agua en la región.

METODOLOGÍA

La investigación se desarrolla dentro de un paradigma cualitativo, descriptivo, interpretativo y deductivo. El estudio se lleva a cabo en un Liceo de dependencia Municipal de la ciudad de Mulchén, provincia de la Región del Biobío, Chile. Con una muestra intencional de 165 estudiantes de séptimo básico a cuarto año medio, caracterizados por un nivel socioeconómico bajo, con un índice de vulnerabilidad de un 92,8% y un nivel de desempeño medio.

La intervención se inspira en el artículo de Romero et al. (2021) y posee dos fases, la primera de contextualización para generar interés en los estudiantes, donde se presenta el video "Las postales que va dejando la sequía y la escasez hídrica en Chile" y se responde a las preguntas: 1) ¿Tiene algún conocimiento sobre esta problemática?, 2) ¿Has experimentado esta realidad?, 3) ¿Qué opinas sobre la escasez hídrica? En la segunda fase, se entrega el instrumento a los estudiantes para que respondan vía formulario Google. El instrumento presenta dos gráficos relacionados a la caída de agua en la región del Biobío elaborados con los datos disponibles en La Dirección Meteorológica de Chile. Intencionadamente, ambos gráficos muestran el mismo conjunto de datos utilizando una escala diferente en el eje Y. El instrumento fue llevado a pilotaje.

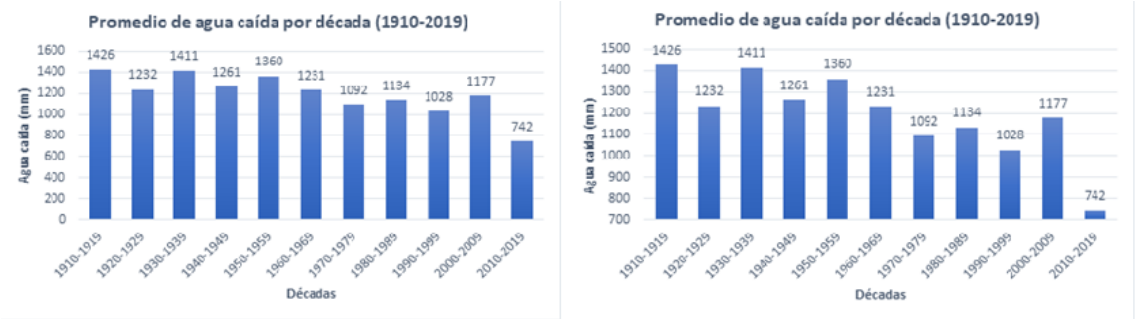


Figura 1: Gráficos utilizados para discutir la cantidad de agua caída en la Región del Biobío

Las preguntas asociadas a la Figura 1 fueron: 1) ¿Son iguales los dos gráficos? Si responde que sí, debe justificar en la pregunta 2) ¿En qué se diferencian los dos gráficos?, 3) Si participaras en un debate sobre la escasez hídrica y quisieras apoyar que la lluvia caída en los últimos 100 años ha disminuido considerablemente, ¿qué gráfico elegirías? ¿Por qué?, 4) Si participaras en un debate sobre la escasez hídrica y quisieras apoyar que los datos disponibles son irrelevantes para aceptar que nos enfrentamos a una posible sequía, ¿qué gráfico elegirías? ¿Por qué? Desde donde se espera que el estudiante visualice la diferencia de escala del eje Y y su influencia en el aumento o disminución de la percepción visual del agua caída en el último siglo. Por último, la pregunta 5) Señala 3 acciones que realizarías para mejorar la problemática de escasez hídrica, permite acceder a las ideas de gestión sostenible del agua en la región.

Para el análisis de las preguntas 2, 3 y 4 se categorizo 4 niveles de acuerdo con la argumentación en relación a la lectura de gráficos: i) demanda sin respaldo, ii) afirmación respaldada por información poco precisa, iii) declaración respaldada por datos concretos y iv) afirmación respaldada por datos concretos y explicaciones científicas de los fenómenos. Estas categorías se basan en Curcio (1989), Aoyama (2006) y Romero, et al. (2021). Para la pregunta 5 en relación con las acciones para mejorar la escasez hídrica se definen 3 categorías: Personal, Institucional y Políticas Públicas.

RESULTADOS

El análisis del contenido de sus respuestas relacionadas con los gráficos mostrados en la Figura 1, muestra que el 81,8% responde que los gráficos no son iguales dada la forma en que se presentan los milímetros de agua en el eje Y (39,6%). Además, argumentan que las diferencias de agua caída se aprecian mejor en el gráfico 2, debido a la forma en que se presentan los datos en el eje Y (51,51%) y que el gráfico 1

muestra diferencias más pequeñas donde no se nota que ha disminuido el agua de acuerdo con el tamaño de las barras (37,78%).

De acuerdo con los niveles de argumentación, predomina el nivel 1 - *Demanda sin respaldo,* en donde se obtienen decisiones sin explicación como "Gráfico 2" E147P3 o errores entre la información del gráfico y el contexto "Elijo el gráfico de barras ya que puedo graficar datos o valores" E164P4. Por otro lado y con menor frecuencia, encontramos al nivel 2 - *Afirmación respaldada por información poco precisa,* en donde se identifica el gráfico pero se argumenta de manera general y no establece relaciones entre los datos como "Elegiría el gráfico 2, ya que es más fácil de explicar por la forma en que está escrita la cantidad de agua caída" E22P3; y al nivel 3 - *Declaración respaldada por datos concretos,* en donde se identifica el gráfico de manera correcta y explica el significado de alguno de los datos del gráfico como por ejemplo "Se diferencia en que uno es más específico que otro, ya que cuenta con más cantidad de clasificación mm. El primero empieza del 0 al 1600, en cambio el segundo empieza del 700 al 1500" E61P2.

En cuanto a los niveles de argumentación alcanzados por cada curso, observamos que los estudiantes desde 7º básico a 4º medio presentan una argumentación del nivel 1 – *Demanda sin respaldo* en más del 50% de sus producciones dentro de cada curso. Un 8º básico y 4º medio alcanzan el nivel 2 - *Afirmación respaldada por información poco precisa* en sus producciones, con un 39,13% y 48,79% dentro de cada curso respectivamente. Un 3º medio es quien sobresale dentro del nivel 3 de argumentación - *Declaración respaldada por datos concretos,* alcanzando un 24,53% de sus producciones dentro de este nivel. Finalmente, ninguno de los cursos ha mostrado producciones dentro del nivel 4 de argumentación en el marco de la interpretación de gráficos, el cual se asocia a afirmaciones respaldadas por datos concretos y explicaciones científicas de los fenómenos que van más allá de los datos entregados en la actividad.

Por otro lado, y de manera independiente del curso de los estudiantes, se observa un equilibrio de género en las respuestas entregadas dentro de las categorías que describen los niveles de argumentación, alcanzando una frecuencia casi idéntica para cada nivel de argumentación en torno a las contribuciones al nivel desde el género masculino o femenino. Por ejemplo, el nivel 2 de argumentación presenta un total de 117 respuestas en total, de las cuales 60 pertenecen al género masculino y 57 al femenino.

Por último y respecto a las acciones que realizarían para mejorar la problemática de la escasez hídrica, el 51,31% de las respuestas pertenecen a una categoría personal, en donde priman los actos domésticos como "Tomar duchas cortas, reutilizar agua siempre que se pueda, como para regar plantas una vez ya haya sido usada" E6P5. El 21,63% de las acciones se relacionan con un nivel institucional relacionados con características propias de la región, como por ejemplo "Reducción de plantaciones forestales" E48P5 o "Disminuir la cantidad de represas" E82P5. Finalmente, un 12,24% de las acciones se relacionan con políticas públicas a nivel nacional, como por ejemplo "Dejar de vender agua a empresas" E27P5 o "Restauración y conservación de nuestros ecosistemas hídricos y servicios ecosistémicos para la gestión sostenible" E51P5.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El pensamiento crítico desde la interpretación de gráficos en contextos de sostenibilidad, medido desde la argumentación frente a la toma de decisiones y acciones propuestas emergentes de la intervención de

aula realizada, nos permite concluir que los estudiantes no son capaces de producir niveles de argumentación elevados (Nivel 3 y 4) asociados a una lectura entre los datos y más allá de los datos (Curcio, 1989), aun cuando logran tomar en la mayoría de los casos, la decisión correcta. Además, este hecho es independiente del año escolar que curse y el género del estudiante. Así, creemos al igual que Vásquez y colegas (2021), se necesita insistir en la necesidad de reorientar la enseñanza de la estadística en el aula escolar, con un enfoque centrado en la formación de ciudadanos educados en sostenibilidad, con un pensamiento crítico que les permita tomar decisiones fundamentadas que logren explicitar y permitan, por ejemplo, convencer a otros. La crisis hídrica, como tema relevante y de actualidad, ofrece oportunidades para ejercitar el pensamiento crítico mientras se utilizan las matemáticas para interpretar gráficos. Los retos para la aplicación de este trabajo están relacionados con el hecho de que los alumnos no están acostumbrados al ejercicio del pensamiento crítico en matemáticas. Además, el uso de temas no tradicionales en matemáticas trae al aula escenarios complejos que requieren la aplicación de conocimientos y habilidades tradicionalmente enseñados en materias escolares aisladas (Romero et al., 2021).

Agradecimientos

Este trabajo corresponde a una tesis de pregrado que ha sido desarrollado en el marco del FONDECYT Nº 1200356 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias

Aoyama, K. (2006). Investigating a hierarchy of students' graph interpretation. In Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. Salvador, Brazil: International Statistical Institute.

Bonil, J., Junyent, M. y Pujol, R. M. (2010). Educación para la sostenibilidad desde la perspectiva de la complejidad. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 7 (Nº Extraordinario), 198-215

Cangalaya Sevillano, L. M. (2020). Habilidades del pensamiento crítico en estudiantes universitarios a través de la investigación. *Desde el Sur, 12*(1), 141-153. https://doi.org/10.21142/DES-1201-2020-0009

Curcio, F. 1989. Developing Graph Comprehension. NCTM

Romero, M., Quesada, A., y Estepa, A. (2021). Promoting critical thinking through mathematics and science teacher education: the case of argumentation and graphs interpretation about climate change. *Revista Europea de Formación del Profesorado*, 1-35. https://doi.org/10.1080/02619768.2021.1961736

Friel, S. N., Curcio, F. R., y Bright, G. W. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 124-158. DOI:10.2307/749671

Gal, I. y Murray, S. (2011). Responding to diversity in users' statistical literacy and information needs: Institutional and educational implications. *Statistical Journal of the International Association for Official Statistics, 27*(3), 185-195. https://doi.org/10.3233/SJI-2011-0730

Moreno-Pino, F., García-González, E., y Jiménez-Fontana, R. (2018). Educación para la Sostenibilidad y su incidencia en la Educación Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(1), 824-831.

Ministerio de Educación. (2015). *Bases Curriculares de 7° básico a 2° medio.* MINEDUC

Vásquez, C. (2020). Educación Estocástica en el aula escolar: una herramienta para formar ciudadanos de sostenibilidad. *Matemáticas, educación Y Sociedad*, *3*(2), 1-20.

Vásquez, C., García-Alonso, I., Seckel, M. J., y Alsina, A. (2021). Education for Sustainable Development in Primary Education Textbooks-An Educational Approach from Statistical and Probabilistic Literacy. *Sustainability*, *13*(6), 3095-3115. https://doi.org/10.3390/SU13063115

EL TRABAJO MATEMÁTICO QUE PROPONE EL PROFESOR DESDE LA PERSPECTIVA DE SU CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO AL REPRESENTAR LA FUNCIÓN

Gonzalo Espinoza-Vásquez[a], Paula Verdugo-Hernández[b]

[a]Universidad Alberto Hurtado, [b]Universidad de Talca

Este trabajo busca estudiar la práctica del profesor de matemática sobre la representación de la función. Para ello se considera el uso en conjunto de los modelos del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) y Espacio de Trabajo Matemático (ETM). Basado en un estudio de caso, analizamos extractos de una clase sobre funciones en un 1° año de educación media. El análisis en conjunto con MTSK y ETM, permite proporcionar elementos más detallados sobre el trabajo matemático del profesor y del trabajo que privilegia en el aula a la luz del conocimiento que sustenta dicho trabajo.

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK), Espacio de Trabajo Matemático (ETM), representación, función.

INTRODUCCIÓN

El estudio del quehacer del profesor ha tomado diferentes orientaciones, entre ellas se encuentran las que centran su mirada sobre la práctica matemática y otras sobre el conocimiento que pone en juego durante el proceso de enseñanza (Carrillo *et al*., 2018). En este reporte ponemos atención a la práctica matemática del profesor en relación al conocimiento que la sustenta, entendiendo que las acciones y decisiones del profesor, en el contexto de la enseñanza de la matemática, responden a un tipo de conocimiento específico para su quehacer.

Considerando lo anterior, nos proponemos como objetivo caracterizar el desarrollo de la tarea de representar una función desarrollada por un profesor de matemáticas a la luz del conocimiento que lo sustenta. Para ello, consideramos los modelos teóricos para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo *et al*., 2018) y el modelo del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011). Pese a que ambos modelos tienen orientaciones diferentes y permiten plantear preguntas dentro de su perspectiva, ha sido posible su uso en conjunto para analizar el quehacer del profesor de matemáticas y el conocimiento que moviliza (Gómez-Chacón, Carrillo *et al*., 2016) cuando se combinan sus componentes teóricos, en el sentido de Prediguer *et al*. (2008) sobre la conexión de teorías, en el análisis de una misma porción de datos; en este caso están referidos a la práctica del profesor.

MARCO TEÓRICO

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas - MTSK

El modelo MTSK (Carrillo *et al*., 2018) constituye una herramienta para la interpretación y análisis del conocimiento del profesor considerando dos dominios de conocimiento: el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). El MK, a su vez, contempla tres subdominios: Conocimientos de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). Por su parte, el PCK, contempla el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Además, el MTSK incluye el componente de las Creencias, referidas a aquéllas que el profesor tiene sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, las cuales pueden influenciar en los conocimientos de los otros dominios.

Espacio de Trabajo Matemático - ETM

El modelo ETM (Kuzniak, 2011) contempla las dimensiones epistemológica y cognitiva, representadas como dos planos horizontales. El plano epistemológico está compuesto por el representamen, los artefactos y el referencial. Por su parte, en el plano cognitivo están los componentes de visualización, construcción y demostración. Ambos planos se articulan por la génesis semiótica (representamen-visualización), instrumental (artefacto y construcción) y discursiva (referencial-prueba), las cuales se activan en la resolución de una tarea matemática.

En este modelo se distinguen tres tipos de Espacio de Trabajo Matemático. El ETM de *referencia* se define idealmente de acuerdo con criterios matemáticos. El ETM *personal* está relacionado a cada persona y se define por la forma en la cual intenta resolver la tarea con su propio conocimiento y capacidades cognitivas. El ETM *idóneo*, relativo a todo aquello que el docente organiza para la enseñanza, i.e., cuáles tareas propone, qué componentes del ETM utiliza y cómo las conecta para otorgar la oportunidad a los estudiantes de resolver las tareas propuestas.

La complementariedad ETM-MTSK

Varias investigaciones han abordado la relación entre los modelos ETM y MTSK (ver Gómez-Chacón, Carrillo *et al*., 2016), mostrando ser un campo fértil de estudio, basados en la conexión de teorías (Prediguer *et al*., 2008). Ambos modelos coinciden, estructuralmente, en la conceptualización para las teorías que propone Radford (2008) sobre Principios, Metodología y Preguntas de Investigación Paradigmáticas, por lo que se puede hablar de conexión entre teorías al relacionar ETM y MTSK. Su uso en conjunto ha permitido precisar algunas relaciones entre ellos y explicar algunas interacciones entre práctica y conocimiento del profesor. Por ejemplo, en el trabajo de Henríquez-Rivas y Espinoza-Vásquez (2018) establecen relaciones entre la génesis semiótica y los conocimientos matemáticos del profesor en la representación de funciones, mientras que Verdugo-Hernández, Espinoza-Vásquez y Carrillo (bajo revisión) abordan y ejemplifican la complementariedad para el caso de las sucesiones numéricas.

Considerando esta complementariedad, nuestro interés está en analizar la práctica del profesor, reconociendo el poder explicativo y descriptivo que poseen ambos modelos y su conexión, beneficio

declarado desde la conexión entre teorías (Prediger *et. al*., 2008), y aplicar la complementariedad como un refinamiento que producen los elementos de cada marco cuando se analiza un mismo fenómeno (Gómez-Chacón, Carrillo *et al*., 2016) para el caso de la representación de una función.

METODOLOGÍA

Para conseguir nuestro objetivo, adoptamos el diseño de estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 2007), bajo una metodología de corte cualitativo. El caso corresponde a un profesor de matemáticas, Arturo (pseudónimo), quien cuenta con más de 13 años de experiencia, posee estudios de postgrado en Matemáticas (Magister) y es reconocido entre sus pares como buen profesor.

Los datos se recolectaron mediante la videograbación de clases en un 1° año de enseñanza media (nueve en total) donde Arturo enseñó el concepto de función, abordó la definición, ejemplos, representaciones y procedimientos asociados. Las videograbaciones fueron transcritas y se han complementado con los registros de la pizarra. Para este reporte, hemos seleccionado extractos en los que se presenta la definición de la función y las consecutivas representaciones que realiza Arturo. Se ha rotulado con P las intervenciones del profesor.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En la primera clase, Arturo define a la función, establece una analogía con una máquina lavadora y, finalmente, construye varias representaciones. El profesor define oralmente el concepto de función como una correspondencia entre elementos de dos conjuntos y también lo escribe en la pizarra. Posteriormente, presenta una interpretación en lenguaje de conjuntos y cuantificadores, lo cual caracteriza su ETM idóneo, evidenciando la manera en que Arturo está enfocando la enseñanza de las funciones.

> P: Entonces, ¿cómo vamos a definir una función? Como una correspondencia de elementos de dos conjuntos, en la que a cada elemento de un conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada... lo voy a escribir. [escribe en la pizarra la definición de función […] (continúa con la explicación)

La definición se presenta también en lenguaje simbólico, activando la génesis semiótica. Esto permite a Arturo reforzar este lenguaje, las notaciones usuales, $y = f(x)$, la forma de leerlas y construir los primeros ejemplos mediante diagramas sagitales, evidenciando el paso del representamen a la visualización (ver izquierda de Figura 1).

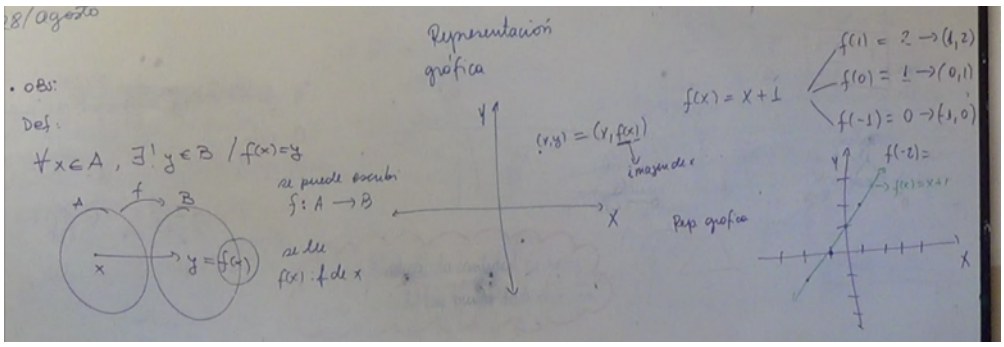


Figura 1: Representaciones del concepto de función realizadas por Arturo

Posteriormente, Arturo presenta el plano cartesiano, recordando la ubicación de puntos y asociando los pares (x,y) con los conceptos de imagen y pre imagen, activando la génesis semiótica. A continuación, Arturo relaciona los puntos del plano con puntos de la gráfica de la función, usando el significado de correspondencia incluido en la definición.

> P: Si los puntos son (x,y), la segunda coordenada ¿quién será? Si estos elementos pertenecen a una función en particular, sería la $f(x)$. Esta coordenada sería la imagen de la primera, o sea que, estos puntos, si pertenecen a un gráfico de una función, van a ser $(x, f(x))$.

Arturo reconoce al plano cartesiano como un tema previamente estudiado (KMLS) y los usa para construir una representación, dando estructura al ETM idóneo. Por su parte, el cambio semiótico de (x,y) a $(x, f(x))$ le permite asociar imagen y pre imagen en una representación simbólica (centro de la Figura 1) previa a la construcción de la tabla de valores, transitando de lo semiótico a lo instrumental. El siguiente extracto, muestra dicha relación y el procedimiento usado para llegar a la representación cartesiana, evidenciando su conocimiento sobre representaciones y procedimientos como estructuradores de su ETM idóneo.

> P: Como el 2 es la imagen del 1, y la segunda coordenada es la imagen de la primera, quiere decir que, si yo metí el 1 en la función y me arrojó el 2 como imagen, la segunda coordenada es el 2.

Arturo selecciona la función $f(x) = x+1$ para ejemplificar la evaluación de funciones (procedimientos en su KoT) y activar la génesis instrumental. La selección de esta función y la facilidad al evaluar los valores utilizados se sustentan, respectivamente, en su conocimiento de la enseñanza (KMT) y en su conocimiento sobre los estudiantes (KFLM) y le permiten diseñar el ETM idóneo.

> P: Yo podría encontrar la imagen de un montón de puntos. En particular, elegí asignarle al x el 1, el 0 y el -1. ¿Por qué elegí estos? Porque son fáciles de evaluar.

Arturo reconoce que todas las funciones admiten una representación gráfica, distinguiendo entre objeto y representación. Esto muestra que Arturo, en términos de ETM idóneo, privilegia la génesis semiótica e instrumental y que reconoce las características del resultado al representar la función lineal.

> P: Me quedó una recta. A las funciones les podemos dar una representación gráfica y ¿cómo se hace esa representación? Elegimos elementos, números cualquiera. Si tenemos su imagen, podemos obtener puntos, y esos puntos los meto al plano cartesiano.

La relación entre función y representación se realiza mediante el cálculo de imágenes (procedimiento), la ubicación de puntos en el plano (representación) y el significado de la función como un proceso, lo que refleja el trabajo instrumental y semiótico que el profesor privilegia en su clase.

COMENTARIOS FINALES

En la práctica de representar una función, el profesor muestra cómo estructura el ETM idóneo, relacionando las formas de representar la definición de función y las representaciones del concepto. En estas acciones intervienen conocimientos sobre: el tema - KoT-, la enseñanza -KMT- y sobre los estudiantes -KFLM-, los que estructuran el trabajo que privilegia con sus estudiantes durante la

enseñanza como ETM idóneo. La activación de diferentes génesis permite caracterizar este ETM e interpretarlo mediante los conocimientos que sustentan estas activaciones.

La conexión ETM-MTSK y su uso conjunto permite profundizar la comprensión de la actividad matemática que promueve el profesor y el conocimiento involucrado. En esta línea, siguen abiertas preguntas sobre la incidencia del conocimiento del profesor en la estructuración del ETM idóneo y qué otros beneficios se obtienen con el estudio en conjunto del ETM y del MTSK.

Agradecimientos

P. Verdugo-Hernández agradece el financiamiento al Convenio Marco FID-TAL 1856, de la Universidad de Talca (2021). Este trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Carrillo J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education, 20(3), 236-253. https//doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Gómez-Chacón, I., Carrillo, J., Oktaç, A., Espinoza-Vásquez, G. y Henríquez-Rivas, C. (2016). Génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor, el formador y las interacciones. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard y L. Vivier (Eds.), Actas Quinto Simposio Internacional ETM (pp. 395-402). Universidad Macedonia Occidental.

Henríquez-Rivas, C. y Espinoza-Vásquez, G. (2018). Relación ETM-MTSK: conexiones entre la génesis semiótica y el conocimiento de los temas. En E. Montoya, P. Richard, L.Vivier, I. Ma. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Machietto y D. Tanguay (Eds.), Espacio de Trabajo Matemático. Actas ETM6 (pp. 507-512). Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Kuzniak, A. (2011). The mathematical work space and its geneses. (L'espace de travail mathématique et ses généses.). Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 40 (2), 165-178.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40(2), 317–327.

Stake, R. E. (2007). Investigación con estudio de casos. Madrid, España: Morata.

Verdugo, P., Espinoza, G., Carrillo, J. (Bajo revisión). Comprensión de las herramientas del espacio de trabajo matemático y las conexiones del conocimiento matemático del profesor: un aporte a la interacción desde dos marcos teóricos. Enseñanza de las Ciencias (Aceptado con modificaciones menores).

ESTUDIO DE CASO SOBRE EL ANÁLISIS DE UNA PLANIFICACIÓN E IMPLEMENTACIÓN BASADA EN LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA ASOCIADA A LA ENSEÑANZA DE POTENCIAS CON EXPONENTE RACIONAL EN SEGUNDO AÑO MEDIO

Carlos Ruz Fuenzalida, Nicolás Sánchez Acevedo

Universidad Central de Chile

La planificación escolar constituye una de las principales herramientas pedagógicas y didácticas que tiene el profesor y profesora a la hora de diseñar y gestionar la enseñanza en virtud del contenido matemático y el aprendizaje de los y las estudiantes. Este instrumento no está alejado ni es autónomo de los marcos conceptuales y didácticos que debe dominar el profesor a la hora de saber cómo enseñar matemática. Uno de esos marcos es la transposición didáctica (TD), sumida dentro de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), lo que constituye un elemento central de este trabajo, u*tilizando además una metodología de tipo cualitativa, orientada al análisis de casos. El nuestro, es una profesora de matemáticas de un colegio dentro de la Región Metropolitana, con quien se realizó una mentoría de discusión sobre este marco, con la finalidad que ella - más tarde - diseñara una planificación bajo este ámbito y así implementarla con estudiantes. Algunos de los hallazgos en el estudio mostrarían una intencionalidad de la profesora al transponer los contenidos bajo este marco con los estudiantes, a partir del análisis de la clase videograbada. Estos resultados entregarían indicios sobre la forma de pensar de la profesora y la forma en que diseña e implementa sus clases, al valorar los elementos integrantes de la transposición didáctica.*

Planificación escolar, transposición didáctica, potencias con exponente racional, vigilancia epistemológica, implementación didáctica.

INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza y aprendizaje constituye un reto fundamental en educación, siendo el rol del profesor y profesora de suma importancia, ya que constituye una de las fuerzas más importantes con miras a garantizar la calidad de la educación, la equidad y el acceso universal a la enseñanza obligatoria (Unesco, 2020). En este sentido, la planificación como instrumento curricular, es un medio esencial para guiar el accionar de los profesores y profesoras en las diversas aulas, que cada día enfrentan los retos de articular aprendizajes significativos en los y las estudiantes (Carriazo, Perez y Gaviria, 2020).

Un elemento central en esta investigación es la forma en la que el profesor o profesora, es capaz de transformar el saber sabio a un plano de saber enseñado. Es aquí donde aparece la idea de *transposición*

didáctica (Chevallard, 1991) como instancia de cambio y transformación entre un conocimiento más asequible.

Comprender el proceso de transposición didáctica,en el ámbito de la planificación como instrumento curricular de enseñanza, y a su vez en su posterior implementación en la sala de clases con los y las estudiantes, son aspectos fundamentales de este trabajo. En ese sentido, el proceso de enseñanza y aprendizaje elaborado por el profesor no está exento de situaciones, donde el educador no necesariamente construye de forma correcta las planificaciones, por ejemplo, integrando los contextos y las particularidades de los y las estudiantes, lo que puede desencadenar más tarde en dificultades y errores en las y los estudiantes una vez que aplicamos en el aula la planificación, lo que también puede manifestarse en el proceso de evaluación posterior.

Por otro lado, la investigación de Martínez (2002) centra su interés en las interacciones didácticas de objetos y convenciones matemáticas, específicamente en el tratamiento de los exponentes no naturales. Sus resultados evidenciaron la complejidad del fenómeno didáctico entre el conocimiento propiamente tal y el funcionamiento didáctico involucrado, dando cuenta de lo difícil que son las relaciones entre el concepto de exponente no natural, el o la estudiante y el profesor o profesora, bajo el análisis de la teoría de las situaciones didácticas. Esencialmente, se desprende lo relevante que es la comprensión de las convenciones matemáticas en la construcción social del conocimiento.

Por último, de acuerdo con el trabajo de Herrera (2010), se analizaron los errores de estudiantes de tercer año medio en el aprendizaje de los números irracionales a través de la indagación de los cuadernos y evaluaciones escritas de los y las estudiantes, obteniendo como conclusiones que los errores expuestos por ellos no son simples descuidos o equivocaciones sencillas, sino que son consecuencias de dificultades y obstáculos provenientes de años anteriores.

METODOLOGÍA

El trabajo consideró un enfoque de investigación de tipo cualitativo (Vasilachis, 2019), dado que se busca comprender y explicar mejor las situaciones que involucran procesos humanos, como lo es la enseñanza y aprendizaje y que representan fenómenos complejos (Cerda, 1997). Además, se enmarca en un paradigma interpretativo, el que de acuerdo a Corbetta (2007) ubica al investigador y lo que se investiga como la base de un proceso cognitivo.

Esta investigación, se enfoca en el contenido de potencias con exponente racional dentro de la primera unidad de números en segundo año de enseñanza media, la que producto de las circunstancias de la pandemia, fue trabajada de forma remota, enfocándose en estudiantes de tercero medio durante el proceso de priorización y refuerzo curricular a inicios del año escolar 2021. Por lo anterior, nos planteamos como objetivo analizar los elementos y particularidades que surgen de la planificación que hace una profesora del contenido, a partir de la TD, como asimismo de su implementación en la sala de clases con las y los estudiantes.

Diseño de Investigación

En esta investigación se utilizó el estudio de casos como diseño metodológico (Muñiz, 2010) centrándonos en el caso único, que tiene por finalidad estudiar de forma profunda una cierta unidad de

análisis, de tal manera de comprender y conocer a la persona, comunidades o colectivos, en sus emociones, habilidades y características internas. En esta investigación participó una profesora de matemática de un establecimiento particular subvencionado, quien trabaja hace un año con cursos de primero a cuarto año medio, con grupos de 32 estudiantes, abordando mediante talleres contenidos del área con la modalidad de refuerzo en los primeros niveles y preparación de prueba de transición en tercer y cuarto año medio.

Instrumentos de recolección de información

La recolección de información se llevó a cabo a lo largo del proceso investigativo, el cual constó de tres momentos fundamentales (Figura 1). El primero corresponde al proceso de mentoría con la profesora, que constituye el instante en donde se introducen las nociones de situaciones didácticas y en particular, de transposición didáctica. Un segundo momento corresponde a la construcción de la planificación por parte de la profesora, intencionada desde la Teoría de Situaciones Didácticas y la transposición didáctica. Finalmente, un tercer momento, donde se implementa la clase con los estudiantes y que fue documentada mediante videograbación remota.

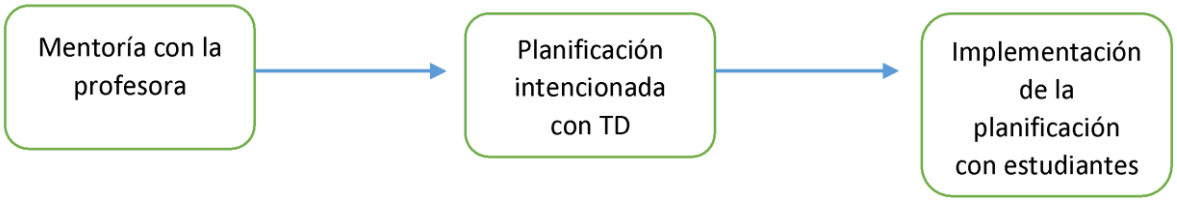


Figura 1: Secuencia de momentos fundamentales de la investigación. Elaboración propia

En este caso al tratarse de una profesora, los datos relevantes fueron obtenidos a través de la observación de la implementación de la clase junto con la planificación realizada. Sin embargo, bajo el contexto de la pandemia de COVID-19, este proceso de observación de clase se efectúa de forma indirecta, mediante la grabación que la profesora realiza de la clase. Además, se buscó obtener datos asociados a ella como también de su propio contexto; tales como experiencia laboral, cursos con los cuales ha trabajado y datos personales de ella. Esta información permitió más tarde analizar y comprender la estructura de su planificación del contenido de potencias con exponente racional y que se asocia al plano de la enseñanza con su implementación. Para eso se utilizó un cuestionario de caracterización inicial, además de la mentoría capacitante al inicio del proceso, enfocada en TSD y TD en particular, junto con las observaciones de la propia mentoría y rúbricas de análisis de la planificación escolar y de la clase, instrumentos validados previamente por expertos en didáctica.

RESULTADOS

Los principales hallazgos y resultados en los tres momentos que articulan esta investigación correspondiente a; la mentoría con la profesora, el desarrollo de la planificación intencionada con TD y la implementación de la planificación con los estudiantes, fueron los siguientes:

Proceso de acompañamiento (mentoría) con la profesora

El proceso de mentoría con la profesora se realizó el 19 de abril de 2021. En esa oportunidad se procedió a la formación e instrucción sobre la TSD y en especial, de la TD. La mentoría fue videograbada en acuerdo con la profesora, mediante la plataforma Zoom, considerando el contexto sanitario producto de la pandemia en ese momento en el país.

En esta instancia la profesora reflexionó al finalizar la mentoría, indicando que "sin duda hoy la transposición didáctica es fundamental para sortear las complejidades y dificultades que tienen los estudiantes para enfrentar sus asignaturas y las diversas tareas que enfrentan en el colegio" (extracto de la mentoría). Profundiza el sentido que tiene aproximar los contenidos a este escenario tan diferente a lo que teníamos antes de la pandemia. Concluye agradeciendo la mentoría, ya que le sirvió para recordar los conceptos e ideas sobre TSD y TD.

Diseño de la planificación de clases

Posteriormente a la mentoría, la profesora elaboró una planificación intencionada con la TD, utilizando el contenido de potencias con exponente racional, de acuerdo con lo visto en la jornada anterior con potencias y raíces. Los hallazgos en este caso se realizaron mediante la rúbrica de análisis diseñada y construida para estos fines, donde los principales resultados fueron los siguientes:

En la planificación, se encuentran elementos que orientan a las y los estudiantes sobre el trabajo que se realizará en la clase, los que son reforzados por la actividad grupal y su desglose. En general, el análisis de la planificación evidencia que existe una articulación entre los contenidos vistos anteriormente y el objetivo de la clase, que corresponde a potencias con exponente racional. Se presenta un inicio muy breve que da paso a la actividad grupal, donde movilizan los conocimientos previos sobre potencias y raíces. Existen también algunas preguntas que guían el proceso de trabajo con los estudiantes. Al volver de la actividad se espera integrar lo aprendido, a manera de conectar las ideas claves con potencias de exponente racional desde el trabajo realizado por los mismos estudiantes. En síntesis, se aprecia marginalmente el uso de TD en la planificación elaborada.

Implementación de la planificación de clases

Luego de la planificación construida por la profesora, se implementó con el curso de tercero medio en virtud del reforzamiento que el colegio determinó a partir de la priorización curricular producto de la pandemia. Se ejecutó de forma remota, de acuerdo con la condición sanitaria y de cuarentena que tenía la comuna al momento de llevarse a cabo. Sin duda, estas condiciones modificaron el escenario tanto de planificación intencionada como de la propia implementación. Los análisis también se realizaron mediante una rúbrica diseñada y construida para estos fines, donde los principales hallazgos fueron los siguientes:

En primer lugar, existió un muy breve inicio de clase. Se presentaron los objetivos y contenidos de la jornada, pasando posteriormente a las indicaciones para la actividad grupal. No hubo una conexión sustantiva de conocimientos previos, sólo se recordó un par de elementos al mostrar el tipo de actividad grupal. Por otra parte, se gastó mucho tiempo en la conformación de grupos y la disponibilidad de las salas de trabajo. Más tarde la profesora comenzó a entregar los links con las pizarras virtuales de trabajo a cada grupo distribuido, destinando demasiado tiempo de la clase.

En segundo lugar, posterior a la etapa inicial, comienza la revisión de trabajo de cada grupo por parte de la profesora. La estrategia utilizada fue ir pasando por sala en sala viendo los avances de cada grupo, atendiendo preguntas y retroalimentando desarrollos de ejercicios avanzados. Es aquí donde la profesora usa algunos recursos de TD para aproximar las respuestas a esas preguntas desde otra óptica, por ejemplo, modificando sus explicaciones sobre potencias ajustándolo al contexto remoto.

Finalmente, la profesora convoca a los y las estudiantes a regresar a la sala principal de trabajo, desarrollando la actividad que se propuso al inicio, recogiendo los alcances y comentarios que los grupos avanzaron en su trabajo previo. Esto lo articuló de forma de elaborar conceptos y propiedades más sólidas sobre potencias con exponente racional desde la mirada de potencias y raíces vistas en la clase anterior. Efectúa consultas a los estudiantes, quienes responden adecuadamente concluyendo con cuatro ejemplos finales.

CONCLUSIONES

Lo observado a lo largo de este trabajo, el aporte que tuvo la transposición didáctica tanto en la planificación como posterior implementación en la clase, permitirían inferir que el tratamiento del contenido de potencias con exponente racional tuvo un valor distinto que al realizarlo de la forma habitual. Esto ya que habría permitido a las y los estudiantes comprender el contenido desde una perspectiva diferente, a partir de las aproximaciones que la profesora realizó durante el transcurso de la clase, como asimismo en el diseño y preparación de la planificación de esta misma. Esto posee un valor relevante y contribuye a dar sentido a esta investigación.

Por otra parte, a partir de este trabajo se evidencian otras diferentes líneas de trabajo, tanto en el contexto de la práctica docente, la didáctica matemática y en especial, de la transposición didáctica, con énfasis principalmente en el análisis del comportamiento entre las planificaciones intencionadas con transposición didáctica y su implementación comparativa en escenarios de clases normales con presencialidad, modalidad híbrida y a distancia. Esto es relevante considerando las condiciones que hoy tenemos, como las que en el corto y mediano plazo estarán presentes producto de la pandemia.

Referencias

Carriazo, C., Pérez, M., & Gaviria, K. (2020). Planificación educativa como herramienta fundamental para la educación de calidad. *Revista internacional de filosofía y teoría social*, 87-95.

Cerda, H. (1997). *La investigación total. La unidad metodológica en la investigación científica.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Corbetta, P. (2007). *Metodología y técnicas de investigación social.* Madrid, España: McGraw-Hill.

Herrera, M. (2010). *Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales.* Caracas, Venezuela: Unidad educativa nacional: Creación Barrio 19 de abril. UNESCO. (22 de diciembre de 2020). *UNESCO*. Obtenido de UNESCO: https://es.unesco.org/themes/docentes.

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. *Revista oficial del comité latinoamericano de matemática educativa A.C*, 45-78.

Muñiz, M. (2010). *Estudios de Caso en la investigación cualitativa.* Nueva León, México.: Universidad Autónoma de Nueva León.

Vasilachis, I. (2019). *Estrategias de Investigación Cualitativa.* Barcelona, España: Gedisa.

TRANSFORMACIONES ENTRE LOS REGISTROS ALGEBRAICO Y GRÁFICO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN CUESTIONARIO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA.

Valentina Rojas-Seals[a] y Gonzalo Espinoza-Vásquez[b]

[a]Universidad de Concepción; [b]Universidad Alberto Hurtado.

En este trabajo, se busca describir las transformaciones en las representaciones que construye y utiliza un profesor al responder preguntas de un cuestionario sobre la función cuadrática a la luz del conocimiento especializado. Mediante el análisis de las respuestas, se obtienen evidencias de conversiones y tratamientos que se realizan entre los registros algebraico y gráfico de la función cuadrática, así como diferencias entre las representaciones gráficas que aparecen al tener éstas un objetivo diferente. Los resultados dan cuenta de la profundidad y amplitud del conocimiento del profesor.

Función cuadrática, registros de representación, conocimiento de los temas, cuestionarios, educación secundaria.

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

Este trabajo se enmarca en el desarrollo de una tesis de magister, que estudia la función cuadrática desde la perspectiva del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo et al., 2018), focalizándose en aspectos específicos del conocimiento matemático sobre este tipo de función. La motivación de este estudio proviene del interés tanto por profundizar en el conocimiento del profesor, como por comprender desde una perspectiva profesional, el objeto *función cuadrática* en sí.

Por una parte, el estudio del conocimiento del profesor de matemática con respecto a función cuadrática, cobra especial relevancia y pertinencia pues desde el año 2020, dicho tema se ha convertido en uno de los objetivos priorizados del Nivel 1 en segundo medio (MINEDUC, 2020), mencionando explícitamente sus representaciones en tablas y gráficas cartesianas como objetos de enseñanza y aprendizaje para este nivel.

Reconocemos que el trabajo matemático es esencialmente semiótico. Los registros de representación permiten la producción de representaciones semióticas, que constituyen una forma de acceder a los objetos matemáticos (Duval, 2012) y construir conocimiento, más aún, la importancia de estas representaciones radica en su capacidad para ser transformadas en otra, lo que es observable (Duval, 2006) dejando ver otras características del objeto representado.

Por otro lado, a la fecha no se han realizado estudios enfocados en la función cuadrática desde el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática, sin embargo, es posible encontrar trabajos

centrados en Álgebra y funciones y parábola (e.g. Espinoza, 2020; Advíncula, et al, 2021) que aportan antecedentes sobre lo que se puede obtener al estudiar la función cuadrática.

Con respecto a investigaciones enfocadas en registros de representación, estudios como Hitt (2003) y Amaya, Pino-Fan y Medina (2016) señalan que estudiantes universitarios y profesores privilegian registros algebraicos al trabajar en Álgebra y funciones, lo que dificulta la coordinación entre registros, fundamentalmente en la comprensión matemática (Duval, 2006).

Considerando lo anterior y la tarea abierta de aplicar el MTSK a diferentes temas (Carrillo, 2020), en este escrito intentaremos responder a la pregunta ¿qué representaciones para la función cuadrática construye el profesor de matemática y cómo las relaciona?

Marco de referencia

Nuestro referente teórico es el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, Carrillo et al., 2018), que se presenta como un modelo analítico que busca comprender el conocimiento del profesor desde su naturaleza y caracterizarlo (Espinoza, 2020).

El MTSK se compone de dos dominios de conocimiento: Mathematical Knowledge (MK) y Pedagogical Content Knowledge (PCK), cada uno con tres subdominios. Además, incluye las creencias del profesor sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

El MK incluye los subdominios de conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura matemática (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KPM). Por su parte el PCK incluye los subdominios de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

El KoT, subdominio central en el presente trabajo, describe el qué y el cómo conoce el profesor el tema que enseña (Carrillo et al., 2018) y se compone por las categorías Fenomenología y aplicaciones, Definiciones, propiedades y fundamentos, Procedimientos y por último, la categoría en que nos hemos enfocado: Registros de representación, la que consiste en el conocimiento de las diversas formas de representar un objeto que en el caso de función, según Espinoza (2015), son tablas de valores, descripción verbal, gráficas, algebraica, conjuntista y corporal.

Es recomendable que el profesor conozca las ventajas y limitaciones de las diversas representaciones y las utilice resaltando la conexión entre ellas (Espinoza, 2020), pues toda actividad matemática se encuentra en un contexto de representaciones (Duval, 2006). Además, el análisis de la actividad matemática se debe centrar en las transformaciones observables entre registros (Duval, 2012), es decir, la conversión y el tratamiento. La primera consiste en cambiar de un registro a otro sin variar los objetos, mientras que la segunda, realiza transformaciones en un mismo registro (Duval, 2006). Según estas ideas claves, comprender en matemática requiere la coordinación implícita o explícita de al menos dos registros.

METODOLOGÍA

Con el objetivo de describir las transformaciones que construye y utiliza el profesor de matemática, escogimos un diseño de estudio de casos (Stake, 2007). El profesor partícipe de este estudio (P1) fue escogido por poseer características atribuidas a profesores expertos (según Rojas, Carrillo y Flores, 2012), como por ejemplo su experiencia reciente en el nivel donde se enseña el objeto función cuadrática, además de mostrarse accesible y dispuesto a colaborar con esta investigación.

Los datos provienen de la aplicación de un cuestionario con preguntas abiertas, diseñado para obtener evidencias de conocimiento en cada una de las categorías del KoT. Este instrumento fue validado por tres expertos, dos de ellos en el modelo MTSK y un tercer experto matemático. Considerando el contexto de salud nacional, las preguntas e indicaciones para responder al cuestionario se enviaron vía correo electrónico al profesor. Luego de la recepción y análisis de las respuestas, se realizó una entrevista semi estructurada para profundizar en algunas de las respuestas esgrimidas por el sujeto en cuestión. Finalmente, se transcribieron todas las respuestas y fueron analizadas por dos investigadores.

Para este reporte hemos seleccionado las preguntas 6.b, 6.i y 12.a., pues, en ellas podemos observar transformaciones entre registros de representación, gracias a la intención con que fue formulada la pregunta y a la riqueza de la respuesta del profesor.

Ítem	Pregunta
6.b	Dada la función $g: A \subseteq R \longrightarrow R,\ x \longmapsto -x^2 + 2x + 3$. ¿Cómo se determina el dominio de esta función?
6.i	Bosqueje la gráfica de la función g.
12.a	Considere la función $f: A \subseteq R \longrightarrow R,\ f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. Realice el estudio de concavidad, máximos y mínimos en todo su dominio.

Tabla 1: Ítems del cuestionario escogidos para su análisis.

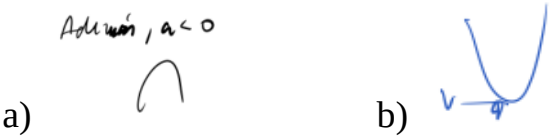
RESULTADOS PRELIMINARES SOBRE LAS REPRESENTACIONES

En el ítem 6.b, P1 recurre a la fórmula del vértice de la parábola a partir de los parámetros de la función dada para determinar el intervalo del recorrido. P1 se apoya en el registro gráfico al decir:

> siempre habrá un punto extremo, además de la concavidad de la función. Puesto que *a* es negativo, la gráfica de *g*(*x*) es una parábola cóncava hacia abajo; sólo falta determinar el límite superior del intervalo que representará el recorrido.

En esta respuesta se observa que P1 utiliza propiedades analíticas de la función cuadrática (concavidad y punto extremo) para determinar el recorrido mediante la visualización de su gráfica.

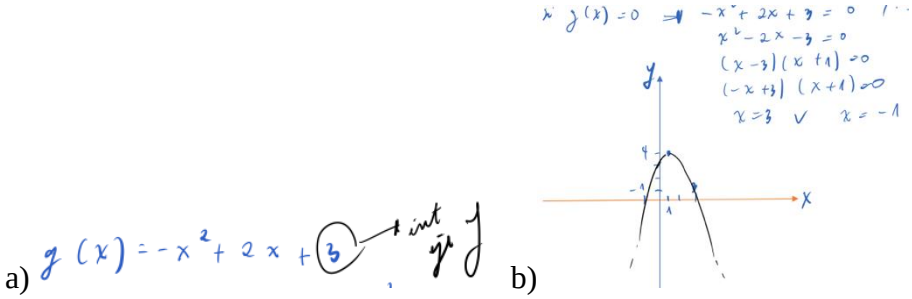
La recurrencia a propiedades gráficas se aprecia en las respuestas a las preguntas 6.i. y 12.a. al utilizar una representación que indica la concavidad de la función en relación al coeficiente *a* y una representación que ilustra el vértice de la gráfica en relación a su concavidad (Figura 2a y 2b).



a) b)

Figura 2: a) Gráfica auxiliar de P1 para pregunta 6.i y b) Gráfica auxiliar de P1 para pregunta 12.a

Por su parte, en el ítem 6.i. se pide a P1 que bosqueje la gráfica de la función $g(x)$. Para ello, P1 calcula el vértice de la parábola asociada y marca en el coeficiente *c* la frase "int eje y" (Figura 3.a), haciendo referencia al punto de intersección de la gráfica con el eje Y. Esto establece una coordinación entre la representación algebraica y la gráfica. Nuevamente, P1 evoca la relación entre concavidad y coeficiente *a* para iniciar la construcción en la representación cartesiana con la Figura 2.a. En ella, observamos que no posee ejes, rótulos, puntos destacados ni otra información sobre la función más que la concavidad en relación al coeficiente *a*. Se aprecia que las figuras 2.a y 2.b tienen un carácter auxiliar, pues no buscan representar formalmente la función, sino que muestran una característica de ella.



a) b)

Figura 3: Respuesta al ítem 6.i a) intersección con Y, b) representación gráfica

Asimismo, notamos que P1 representa la función pedida de forma gráfica (Figura 3.b), haciendo uso de elementos tales como ambos ejes coordenados con sus etiquetas y alguna graduación, así como la identificación de otros puntos pertenecientes al gráfico. Lo que constituye una diferencia con la gráfica auxiliar anterior (Figura 2.a) al resaltar otras características de la función. Por último, en la Figura 3.b podemos observar que P1 desarrolla un procedimiento algebraico para encontrar los puntos de intersección de la gráfica con el Eje X, realizando un tratamiento dentro del mismo registro.

COMENTARIOS FINALES

Podemos observar que el profesor es capaz de realizar transformaciones de registros de representación y coordinar al menos dos de ellos: el algebraico y el gráfico. Esta coordinación es fundamental según Duval (2006) para la comprensión en matemática. P1 desarrolla conversiones de registros cuando transita desde la representación algebraica de la función, hacia la cartesiana y realiza un tratamiento dentro del registro algebraico al calcular los puntos de intersección de la gráfica con el Eje X.

El profesor, además, muestra que la construcción de ciertas representaciones está ligada a lo que pretende responder. Así, existen diferencias entre representaciones en el registro gráfico, cuando debe ilustrar la gráfica de una función como tal y cuando debe ilustrar una característica particular de la función, por ejemplo, su concavidad. En estas gráficas existen diferencias significativas, por ejemplo, el rótulo de los ejes y su graduación. Esto manifiesta parte de la capacidad del profesor para conocer las ventajas y

limitaciones de un registro y seleccionar una representación acorde a sus necesidades, que deje ver aquello que es útil y oculte aquellos elementos que no signifiquen utilidad. Lo que podría ser el punto de partida para estudiar el Conocimiento Didáctico del Contenido.

Reportes como éste, pretenden focalizar el estudio del MTSK a un subdominio y una categoría en particular, para profundizar en ella tanto como sea posible. Reconocemos que esto podría constituir una limitación de este trabajo en torno a las respuestas analizadas, las que incluyen sólo evidencia del conocimiento sobre los registros de representación sin abordar otras categorías. Por ello, una proyección de trabajos en esta línea es incluir en los análisis, preguntas y respuestas que aborden otros conocimientos sobre los registros de representación, sobre otras categorías del KoT u otros subdominios del MTSK para ampliar la comprensión del conocimiento especializado del profesor sobre la función cuadrática.

Referencias

Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I. y Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia, 35*(1), 190-209. doi: 10.15359/ru.35-1.12

Amaya, T., Pino-Fan, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática 28*(3), 111-144.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. doi: 10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J. (2020). Panorámica de la investigación con MTSK en el mundo. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

Duval, R. (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. En U. Malaspina (coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp. 14-17). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Espinoza, J. (2015). Identificación de indicadores del conocimiento especializado del profesor de matemática sobre funciones mediante el análisis didáctico. En M. Parraguez, H. Rivas, C. Vásquez, N. Pincheira, H. Solar, F. Rojas y E. Chandía (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 389-393). Villarrica: SOCHIEM.

Espinoza, G. (2020). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función.* (Tesis Doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 213-223.

MINEDUC. (2020). *Priorización Curricular Matemática.* Santiago, Chile. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Bases-curriculares/177735:Priorizacion-Curricular-Matematica-1-basico-a-4-medio

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos* (5ta ed.). Madrid, España: Ediciones Morata S.L.

Rojas, N., Carrillo, J., Flores, P. (2012) Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, À. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds), *Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 479. 485). SEIEM.*

SECUENCIA DIDÁCTICA QUE FOMENTE LA CONVERSIÓN DE REGISTROS EN LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Nicole Martínez M., Miguel Díaz F.

Universidad Alberto Hurtado

De las reformas y ajustes curriculares implementados desde 1998 hasta el 2020, el Currículo Nacional ha experimentado diversas modificaciones con el fin de que los estudiantes puedan desenvolverse efectivamente en su entorno. Así, el Currículo Nacional actual está centrado en habilidades, las cuales aún no están bien desarrolladas en la práctica escolar (MINEDUC, 2016). Desde una investigación más amplia y de tipo cualitativa fundamentada en tres componentes: las dificultades en la enseñanza de la función cuadrática, los registros semióticos y la importancia del tránsito entre registros en el proceso de enseñanza aprendizaje (Duval, 2006), se construyó una secuencia didáctica compuesta de seis actividades de tipo congruentes (Duval, 2006) y que permiten la conversión entre registros considerando el modelo propuesto por Janvier (1987). Dicha secuencia se aplicó, de manera hibrida en un Segundo Medio de un colegio de San Bernardo y la investigación se encuentra en la fase de análisis de los resultados. En esta oportunidad, se presentará el modelo para la construcción de las actividades y los resultados preliminares de la aplicación de un par de ellas.

Habilidades, Registros, Función, Conversión, Congruentes

INTRODUCCIÓN

Sin duda la matemática es considerada como una asignatura alejada de la realidad, en donde es necesario aprender fórmulas, símbolos y procedimientos que carecen de utilidad para los estudiantes. Desde la Reforma Curricular de 1998 se busca romper con esta concepción y mostrar una matemática dinámica, creativa y que emerge por una necesidad a lo largo del tiempo. Debido a lo anterior, en el actual Currículo Nacional se espera que el estudiante desarrolle un pensamiento matemático, es decir, que sea capaz de interactuar con su entorno y que los conocimientos matemáticos le permitan comprender su mundo y resolver problemas que se le presenten (MINEDUC, 2016). Para ello, es necesario modificar la forma tradicional de enseñar y evaluar, puesto que el currículo vigente se basa en el desarrollo de habilidades, a saber, representar, modelar, argumentar y resolver problemas.

Además, y de acuerdo con lo que establece Duval (2006), se hace necesario el uso de los diversos registros que posee un objeto matemático, promoviendo las diversas representaciones de éste, transitando entre las diversas representaciones, de manera que el estudiante logre aprendizajes más profundos.

En esta comunicación breve, se presenta parte de una secuencia didáctica de la función cuadrática, en que sus actividades han sido construidas de manera que el tránsito en determinados registros de

representaciones sea congruente, contribuyendo explícitamente al desarrollo de las habilidades propuestas en el currículo nacional

Antecedentes y justificación

Diversos son los estudios respecto a las dificultades que poseen los estudiantes en el aprendizaje de las funciones, en especial en la cuadrática. Entre ellos, podemos mencionar la vinculación del concepto de función con otros (variable, dominio, recorrido, entre otros), donde cada uno de estos conceptos posee una particular complejidad para el estudiante (Abrate, Puchulu, & Vargas, 2006). La dualidad del concepto de función cuadrática en el ámbito escolar, al ser considerada como concepto y como objeto, sin realizar las necesarias distinciones (Martín Hernández & González Astudillo, 2006); y la no comprensión de la gráfica de la función y su relación con sus parámetros (Abrate, Puchulu, & Vargas, 2006).

Como se comentó anteriormente, las representaciones tienen un rol importante, por ello los libros de textos las usan frecuentemente (Janvier, 1987). En el caso de la función cuadrática se usan diagramas, flechas, cadenas, entre otras (Doorman & Drijvers, 2011); por lo que una adecuada articulación entre ellas permitirá comprender el concepto (Duval, 2006). No obstante, estudios muestran que los profesores tienen dificultades para traducir entre representaciones, incluso cayendo algunos en contradicciones (Hitt, 1998).

En la enseñanza–aprendizaje de la matemática, se usan de igual manera diferentes modos de representación y se alterna entre ellas para una mejor comprensión de los conceptos matemáticos (Mainali, 2021). El alternar entre representaciones, corresponde a la conversión y esta tiene igual relevancia que el uso de las representaciones en la enseñanza–aprendizaje de las matemáticas (Duval, 2006). La conversión permite el desarrollo de habilidades en los estudiantes, lo que enriquece el desempeño en la resolución de problemas; facilitando además la adquisición y el uso de conceptos matemáticos (Mainali, 2021).

Diversos autores han propuesto formas de categorizar los registros de las funciones y sus conversiones correspondientes, en particular en la investigación de la referencia, se trabajará la propuesta de Janvier (1987) de la cual se muestra un esquema del modelo en la Figura 1. En ella se presentan las conversiones entre cuatro modos de representación y las habilidades que necesitan los estudiantes para transformar una representación a otra.

Desde \ Hasta	Descripciones verbales	Tablas de datos	Gráficos cartesianos	Expresiones algebraicas
Descripciones verbales		Medir	Esbozar	Modelizar
Tablas de datos	Leer		Dibujar	Ajustar
Gráficos cartesianos	Interpretar	Leer		Ajustar
Expresiones algebraicas	Reconocer una fórmula	Calcular	Dibujar	

Figura 1: Proceso de traducción entre cuatro representaciones. Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Página 28. Lawrence Erlbaum Associates

Si bien hay un número considerable de estudios respecto a las representaciones, traducciones y su importancia en el proceso de enseñanza–aprendizaje, hay un número muy pequeño de investigaciones que expliquen la elección de representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo cual esto aún debe explorarse aún más (Mainali, 2021). De lo anterior, surge la necesidad de diseñar actividades y secuencias que permitan el desarrollo de habilidades en los estudiantes, al transitar desde un registro a otro con el contenido función cuadrática.

METODOLOGÍA

Teniendo en cuenta los tres aspectos señalados anteriormente y a través de una indagación de tipo exploratoria y cualitativa, cuyo propósito es finalizar con una secuencia didáctica que aporte al proceso de conversión en la enseñanza de la función cuadrática, se elaboró una secuencia y se implementó en un segundo medio de un colegio de la comuna de San Bernardo, teniendo en cuenta parte de la Ingeniería Didáctica (Artigue, Douady, Moreno, & Gómez, 1995).

La implementación se realizó durante el año 2021 en cinco fases: en la Fase 1 se analizó el objeto matemático en sus dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva. Además, se observó el grupo de estudiantes en el cual se aplicaría la secuencia de actividades. En la Fase 2 se diseñó la secuencia considerando los tres componentes descritos anteriormente. En la Fase 3, se desarrolló el análisis a priori para cada una de las actividades, esto es, respuesta experta, posibles respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes, posibles errores y dificultades que podrían tener y las eventuales preguntas que podrían surgir entre los estudiantes. En la fase 4, se aplicó la secuencia en modalidad híbrida a un Segundo Medio de un colegio de San Bernardo durante seis sesiones de 40 minutos cada una. Por último, en la Fase 5, se hizo un análisis de las producciones realizadas por los estudiantes, contrastando el análisis a priori y lo que efectivamente ocurrió con la aplicación de la secuencia.

Elaboración de la secuencia didáctica

Para el diseño de la secuencia se consideran seis actividades que permitan una, dos o tres conversiones congruentes entre registros a partir de uno dado, de acuerdo con el modelo de Janvier. Diremos que una conversión es congruente, si al dividir cada una de las representaciones en unidades significantes (son los valores que pueden tomar las diferentes variables en un registro) y corresponderlas, se cumplen tres condiciones simultáneamente: correspondencia semántica entre unidades significantes de cada registro (C.S.), univocidad semántica terminal (U.S.T.) y conservación del orden (C.O.) de organización de las unidades significantes en las representaciones (Duval, 2006).

Para el diseño de las actividades se buscó la relación con otras disciplinas como el arte, la historia y las ciencias naturales. Se promovió el uso del software Geogebra y el trabajo en grupos. A continuación, se explican dos de las seis actividades y sus respectivas conversiones. Para ello, se introducen las siguientes abreviaturas en los registros: Descripción Verbal (DV), Tabla de Datos (TD), Expresión Algebraica (EA) y Gráfico Cartesiano (GC).

- En la Actividad N°1 “Llueve sobre la ciudad”, se presenta una situación en la que el estudiante debe tomar decisiones respecto a la medida de una canaleta de aguas lluvias para que el diseño de ella permita la máxima recolección posible. Al inicio de la actividad se describen las

características de la canaleta mediante un dibujo y una descripción verbal. El estudiante debe completar una tabla con la información dada y sacar algunas conclusiones a partir de ella. Así, las conversiones presentes son DV→TD y TD→DV.

- En la actividad N°3 "Catedral de Chillán", el estudiante debe modelar a través de una función cuadrática, el frontis del edificio utilizando esa información para determinar, entre otros, las dimensiones de la puerta de acceso. Para ello, se describen las características de su arquitectura respecto a los arcos parabólicos que forman el frontis. Así, las conversiones presentes corresponden a DV→GC y DV→EA.

Algunas de las actividades propuestas promueven uno, dos o tres conversiones en ella, esto se debe a que según Duval (2006), se debe exponer al estudiante a varias representaciones a la vez para comprender las relaciones entre ellas. Además, según Mainali (2021), es primordial presentar más de un modo de representación, ya que se priva del uso de otras representaciones y de otras conversiones. Por ello, se sugiere usar conversiones con distintos tránsitos entre distintos registros, y que idealmente permitan transitar de un registro inicial a otro final y viceversa.

El orden de las actividades se determinó de acuerdo con el posible interés de los estudiantes en el tema, promoviendo que las actividades iniciales fuesen desafiantes e interesantes. Los registros más usuales en la enseñanza de las funciones son de expresión algebraica a tabla de datos y/o gráfica, por ello se privilegió aquellos tránsitos poco usuales y los más utilizados se dejaron para el final, es decir, se incluyeron en las últimas actividades de la secuencia.

Cada una de las conversiones propuestas en cada actividad, cumple simultáneamente con los criterios de congruencia mencionados con anterioridad. Para ello, se elaboró la actividad considerando la existencia coherente y necesaria de datos para resolver el problema en un registro determinado. Luego, se resolvió el problema y se determinaron las unidades significantes del enunciado y su solución. Las unidades significantes, fueron contrastadas para determinar si los tres criterios de conversión congruente se cumplían a la vez y por ende, la conversión era de tipo congruente. Por ejemplo, en la actividad N°3 "Catedral de Chillán" se entrega la situación problema empleando el registro descripción verbal. Desde ahí, se procede a identificar las unidades significantes presentes en este registro, las cuales están relacionadas con la altura máxima de la catedral, el ancho de la base y su eje de simetría. Se resuelve expertamente el problema, obteniendo la expresión algebraica que modela el frontis de la catedral y las unidades significantes asociadas al registro expresión algebraica. Se comparan con las obtenidas en el registro descripción verbal, analizando si cumplen con los tres criterios de congruencia. Si cumple con los criterios se acepta la actividad, en caso contrario, la conversión propuesta no seguiría los lineamientos de las actividades, lo que implica que el proceso anterior debe rehacerse desde el enunciado en adelante.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES PRELIMINARES

Durante la secuencia se presentaron actividades que promovieran el desarrollo de habilidades a través de las conversiones congruentes. Así, las producciones realizadas por los estudiantes son confrontadas con el análisis a priori obteniendo las siguientes conclusiones preliminares:

- Todas las conversiones propuestas en la secuencia didáctica tienen como mínimo un 60% de logro, lo cual indica que la secuencia permitió el tránsito entre distintos registros, además de facilitar el desarrollo de habilidades.
- Las conversiones con menor porcentaje de logro (60%) corresponden a: DV→ EA y TD→ EA. Este porcentaje tan bajo, puede corresponder a que este tipo de conversiones no son usualmente enseñadas por los profesores en la enseñanza de la función cuadrática.
- Las conversiones con mayor porcentaje de logro corresponden a: EA→ GC (87,5%), EA→ DV (87,5%) y EA → TD (86%). Cabe mencionar que los dos porcentajes más altos corresponden a la última actividad de la secuencia didáctica.
- Las conversiones con más alto porcentaje de logro, corresponden a conversiones donde transitan del registro expresión algebraica hacia otro registro. Esto podría deberse a que los estudiantes, habitualmente trabajan problemas en donde es conocida la expresión algebraica.

Referencias

Abrate, R., Puchulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática: Análisis de causa y sugerencia de trabajo.* Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Doorman, M., & Drijvers, P. (2011). Secondary Algebra Education. Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown. En P. Drijvers, *Algebra in Fuction* (págs. 119 - 135). SensePublishers.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 103 - 131.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 123 - 134.

Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Mainali, B. R. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 1 - 21.

Martín Hernández, E., & González Astudillo, M. T. (2006). Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas. *Matemáticas para el siglo XXI*, 197 - 205.

MINEDUC, M. d. (2016). *Bases Curriculares 7° Básico a II° Medio.* Santiago: Unidad de Curriculum y Evaluación.

TRABAJO MATEMÁTICO EN TORNO A UNA TAREA PARA GEOMETRÍA 3D CON TECNOLOGÍA. EL CASO DE LA HOMOTECIA

Fabiola Arévalo-Meneses

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

La presente investigación de enfoque cualitativo tiene como objetivo indagar en el trabajo matemático del estudiante ante una tarea contextualizada para geometría 3D en relación con la homotecia, que consideró la utilización de un software de geometría dinámica en la modalidad de clases remotas dada la contingencia. A través de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, recientemente se recogieron datos que están siendo analizados mediante el marco teórico Espacio de Trabajo Matemático (ETM), observando algunos resultados preliminares que dan muestra de la activación de los planos semiótico-instrumental e instrumental-discursivo, lo que da cuenta de una tarea que permite al estudiante establecer relaciones entre la representación geométrica en 2D y 3D, ajustándose a los objetivos del nuevo programa de estudios de formación diferenciada para tercer y cuarto año medio titulado Geometría 3D.

Espacio de trabajo matemático, geometría 3D, software de geometría dinámica, educación matemática.

INTRODUCCIÓN

El estudio del objeto matemático homotecia en la educación escolar, se propone desde las bases curriculares, así como en los textos de estudio, dando mayor énfasis a la utilización de la razón para obtener figuras homotéticas como resultado de una transformación geométrica del plano (Ministerio de Educación Chile, 2020). De este modo nos preguntamos, el marcado énfasis del estudio de la homotecia desde la razón, a través de las actividades propuestas en los textos de estudio ¿propicia que el estudiante logre comprender la homotecia y la relación entre sus elementos constitutivos?

Esto nos presenta un escenario complejo en relación con el estudio de la geometría proporcional y en consecuencia de la homotecia, que a la vez está conectada con otros objetos matemáticos, tales como semejanza de figuras planas y teorema de Tales. De este modo, surge el interés de indagar en relación con cómo se aborda el aprendizaje de homotecia en el aula, más aún ante la reciente incorporación del nuevo programa de estudios de tercero y cuarto año medio de formación diferenciada en matemática, Geometría 3D. Este programa vincula la homotecia con el dibujo en perspectiva y la geometría proyectiva, resaltando la importancia de la utilización de herramienta digitales para el logro de los objetivos (Ministerio de Educación Chile, 2020).

Problemática y antecedentes

Algunos estudios destacan el escaso enfoque de la proporcionalidad desde el pensamiento geométrico en la educación escolar (Rodríguez, 2015), debido en gran medida a un marcado énfasis en un tratamiento meramente aritmético.

En relación con la incorporación de herramientas digitales en contextos geométricos, existen numerosas investigaciones que señalan la relevancia que esta adquiere en educación matemática. En particular, existe un estudio (Galleguillos y Candia, 2011) que consideró el uso de GeoGebra en una secuencia de aprendizaje en torno a la homotecia, concluyendo que el uso integrado de la herramienta digital es un aporte para procesos de visualización de propiedades de la homotecia.

La homotecia es compleja epistemológicamente dada sus características, pues se trata de una transformación geométrica del plano en el plano, donde se operacionaliza mediante relaciones de proporción entre distancias. De este modo, es fundamental propiciar no solo un proceso de visualización, sino también de construcción y justificación. Picard (2006) presenta una descripción de transformaciones en el plano, entre estas la homotecia, indicando que la percepción antecede a la concepción del objeto matemático, para lo cual recomiendan el uso de software de geometría dinámica, que favorezcan la visualización. En el mismo sentido Ferrarello et al. (2018), se refieren a la importancia de incorporar Sistemas de Geometría Dinámica (DGS) en educación matemática en torno a transformaciones geométricas, en cuyas demostraciones se consideran transformaciones homotéticas. Los DGS permiten la visualización y comprobación de manera instantánea lo que favorece la comprensión. Así también destacan que existen dificultades en la enseñanza y aprendizaje de geometría tridimensional de acuerdo con la representación gráfica y la visualización mental que requiere.

Pensando en el desarrollo histórico de la noción de homotecia, esta emerge a raíz de los problemas asociados a transformaciones geométricas en el espacio, es así como ante la necesidad de dibujar objetos que no están al alcance de la mano, surge en el siglo XV una serie de máquinas matemáticas que facilitaban el trabajo de artistas y arquitectos (Bartolini y Maschietto, 2006). Potenciar esta idea de la homotecia como una herramienta útil, puede permitir acercar la homotecia al estudiante y darle sentido al estudio de esta a través de la utilización de diferentes softwares.

Por otra parte, desde la experiencia docente se observa el escaso dominio del objeto matemático homotecia en los profesores, lo que se transforma en una dificultad que podría afectar la manera en que es abordado su estudio y por ende el aprendizaje del estudiante. Esto se confirma en la literatura, por ejemplo, Castro et al. (2019) manifiestan que existe una discordancia entre elementos conceptuales y cognitivos sobre el concepto de homotecia en relación con las definiciones y ejemplos sugeridos, atribuidos a su formación docente, así como el escaso conocimiento histórico, lo que es apoyado por González et al. (2020) transformándose en un desafío importante para instituciones con programas de formación inicial y continua de profesores.

En consecuencia, considerando por un lado las dificultades de los estudiantes ante un objetivo de aprendizaje particular y por otro, las limitaciones en el proceso de enseñanza aprendizaje producto de la contingencia, nace la siguiente pregunta de investigación; ¿Cuál es el trabajo matemático de los estudiantes ante una tarea contextualizada que involucra el objeto matemático homotecia y la utilización de un artefacto digital?

Marco teórico

Los resultados de la presente investigación serán analizados utilizando como marco teórico el Espacio de Trabajo Matemático (ETM).

El ETM es una teoría cognitiva, que permite estudiar el trabajo matemático realizado por un individuo ante una tarea determinada, considerando elementos cognitivos y epistemológicos. El propósito es poder comprender desde un punto de vista didáctico, lo que se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un contexto educativo (Kuzniak et al., 2014). Se basa en la articulación de dos planos horizontales, por una parte, el plano epistemológico que considera tres componentes, un conjunto de signos llamado Representamen, un conjunto de artefactos o herramientas y un sistema teórico de referencia basado en definiciones, teoremas y propiedades. Por otra parte, se encuentra el plano cognitivo en que se encuentran tres procesos, un proceso de visualización de la información aportada por los signos, un proceso de construcción de acuerdo con los instrumentos utilizados y un proceso discursivo que permite argumentar y producir pruebas. Estos dos planos se articulan a través de la activación de tres génesis; semiótica, instrumental y discursiva. La génesis semiótica se basa en los registros de representación semiótica y da un sentido de objeto matemático a los objetos tangibles o signos. La génesis instrumental permite hacer operarios los artefactos en el proceso constructivo y la génesis discursiva otorga sentido a las propiedades para evocarlas en el razonamiento matemático. Del mismo modo, la articulación de las distintas génesis permite la activación de los planos verticales, plano semiótico-instrumental, plano instrumental-discursivo y plano semiótico-discursivo.

METODOLOGÍA

La presente investigación es desarrollada con un enfoque cualitativo dadas las características del objeto de estudio, considerando la ingeniería didáctica como metodología de investigación (Artigue et al., 1995). Se llevan a cabo las cuatro fases de la ingeniería didáctica, en primer lugar, un análisis preliminar, luego la concepción y análisis a priori de la situación de aprendizaje que considera la tarea en relación con la homotecia. Luego se realiza la experimentación desde donde se toman los datos para el análisis de la investigación y finalmente el análisis a posteriori y evaluación.

Para levantar los datos se trabajó con estudiantes de un curso de matemática de educación superior, quienes anteriormente han estudiado funciones reales. La clase fue grabada y se realizó en modalidad virtual dada la contingencia por Covid-19.

Existen dos componentes fundamentales que describiré a continuación, el diseño de la tarea y la implementación.

Descripción de la tarea

Se diseña una tarea que consiste en un problema contextualizado que involucra el objeto matemático homotecia y la utilización de una figura dinámica (applet de GeoGebra).

La tarea hace mención del arco británico ubicado en la Av. Brasil de la cuidad de Valparaíso, ante el cual un arquitecto necesita realizar una réplica del arco, pero de mayor tamaño, se presenta el contexto y las medidas del arco original, mediante una presentación power point en donde se muestran fotografías del arco. Posteriormente se presenta la siguiente tarea a los estudiantes (Ver Figura 1).

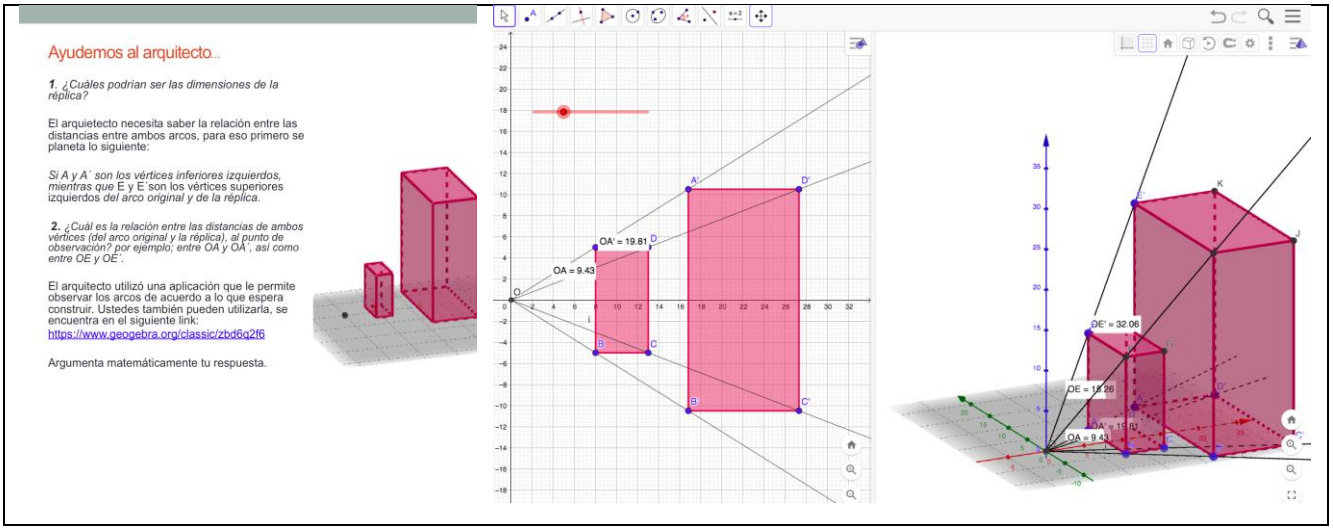


Figura 1: Presentación de la tarea y applet de GeoGebra.

Junto con el desafío de ayudar al arquitecto en su tarea, se comparte a los estudiantes la figura dinámica que presenta una vista 2D y una vista 3D. El applet posee un deslizador, que permite observar cómo varían las figuras representativas de manera coordinada en ambas vistas.

Descripción de la implementación

La implementación se lleva a cabo en el desarrollo de una clase en modalidad virtual, donde se realiza una presentación de la situación y de la tarea en una sala común, para luego formar grupos de trabajo de tres estudiantes. Los grupos trabajan en salas individuales, teniendo a su disposición el applet de GeoGebra. El profesor, luego de un tiempo de trabajo individual, visita las salas para observar el trabajo realizado por los estudiantes y realizar las retroalimentaciones que sean necesarias de acuerdo a las consultas de los estudiantes. Finalizado el trabajo los estudiantes envían sus producciones. Posteriormente se realiza un plenario en que cada grupo comparte su trabajo, para luego finalizar la clase con la institucionalización del objeto matemático homotecia.

RESULTADOS PRELIMINARES Y CONCLUSIÓN

Si bien el presente estudio se encuentra en etapa de análisis de los datos, lo observado en la implementación, permite apreciar algunos resultados preliminares interesantes. Gran parte de los estudiantes intentan entregar dimensiones para el nuevo arco que consideran el doble o triple de las dimensiones originales, algunos de los cuales las obtienen por amplificación y otros mediante la manipulación de la figura dinámica, sin embargo, solo un grupo argumenta que mediante la figura dinámica lograron obtener valores decimales para el nuevo arco, dando cuenta de utilización del applet como artefacto digital (génesis instrumental). Ahora bien, todos los estudiantes logran expresar que existen infinitas posibilidades de dimensiones para el nuevo arco, utilizando el applet para poder argumentar sus conjeturas. No obstante, presentan dificultades para establecer las relaciones entre los objetos representados en la vista 2D y 3D, utilizando principalmente la vista 2D tanto en el trabajo realizado como en los argumentos entregados. Los estudiantes logran observar los elementos de la homotecia llegando algunos a establecer la relación entre las distancias entre los vértices y el centro de homotecia en relación con las dimensiones de la réplica del arco. Por otra parte, un punto importante a destacar es que los estudiantes dan muestras de que carecen de referencial teórico o bien de las etiquetas

de los conceptos involucrados, ya que continuamente expresan que comprenden algunas relaciones, pero no conocen los conceptos matemáticos apropiados para poder explicar. Si bien finalmente logran expresar sus ideas, esto dificulta la comunicación y la fluidez del desarrollo de la clase, por lo que sería interesante indagar al respecto en futuras investigaciones.

Aun cuando el proceso de análisis está en curso, se puede decir que la tarea permitió activar los planos semiótico-instrumental ([Sem-Ins]) e instrumental-discursivo ([Ins-Dis]), lo que bajo la teoría del ETM es un aspecto importante, pues mientras la tarea o secuencia de tareas propicie la activación de la mayor cantidad de génesis, el trabajo del estudiante será más completo (Kuzniak & Richard, 2014). Sin embargo, pese a que el diseño de la tarea permitió abordar la homotecia sin dar realce a la razón de homotecia, la tarea no logró propiciar el tránsito entre los objetos de la vista 2D y 3D, lo que da cuenta de las dificultades de orientación espacial que tienen los estudiantes, de ahí la importancia de diseñar tareas que permitan potenciar el trabajo matemático de geometría en el espacio. Por otra parte, la tecnología ha sido siempre una herramienta importante al servicio de la educación, sin embargo, por sí sola no es suficiente, debemos ampliar nuestros conocimientos de tecnología para poder ligarlo a nuestros conocimientos didácticos de la disciplina, y de esta manera lograr utilizar de forma adecuada sus múltiples elementos, más aún cuando hoy en día el uso de la tecnología se transforma en una necesidad.

Referencias

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Bartolini, M., y Maschietto, M. (2006). Macchine matematiche: dalla storia alla scuola (Vol. 51, Issue 1).

Castro, A., Jaramillo, J. C., y Obregón, I. (2019). Una aproximación al concepto de homotecia a partir de la noción de proporcionalidad geométrica en séptimo grado. Tesis de pregrado. Universida del Valle.

Dana-Picard, T. (2006). Plane transformations in a complex setting I: Homotheties-translations. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37(6), 726–734. https://doi.org/10.1080/00207390500064247

Ferrarello, D., Mammana, M. F., y Pennisi, M. (2018). Magic of centroids. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49(4), 628–641. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1418917

Galleguillos, J., y Candia, L. (2011). Uso de herramientas interactivas en el aprendizaje de homotecias. Acta Conferencia Latinoamericana de Matemática Educativa, 13, 35–43.

González, Y., Arias, I., y Picado, M. (2020). La Homotecia: Análisis conceptual y análisis de contenido. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33, 283–294.

Kuzniak, A., y Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 17(4(I)), 17–27. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741b

MINEDUC, B. C. (2020). Programa de estudio Geometría en 3D 3o y 4o medio.

Rodríguez, L. (2015). Porpuesta didáctica para mediar la inseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad geométrica y la formación de imágenes en el ojo humano. Tesis de mágister. Universidad Nacional de Colombia.

REFLEXIONES EN TORNO A LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA. VOCES DE PROFESORES Y PROFESORAS DE MATEMÁTICA DE LA REGIÓN DE ÑUBLE Y BIOBÍO

Carmen Espinoza Melo, Erich Leighton Vallejos

Universidad Católica de la Santísima Concepción

En esta investigación en curso, se presentan los análisis de resultados de una entrevista semiestructurada que se aplicó a un grupo de profesores de matemática de las regiones de Ñuble y BioBío pertenecientes a colegios subvencionados y públicos. Esto con la finalidad de recoger su visión sobre la enseñanza de la geometría en enseñanza media y la mirada que tienen hacia la educación matemática en un contexto Educación Virtual, debido a la pandemia del Covid-19. Se utilizó una metodología cualitativa, las entrevistas fueron analizadas por el software cualitativo Atlas.ti donde se obtuvieron dos categorías de análisis.

INTRODUCCIÓN

Los constantes cambios que se están produciendo actualmente, tales como la globalización, el flujo migratorio, entre otros; demanda una nueva mirada en la función y rol docente que debe estar presente desde su formación inicial (Maestre et al., 2017). En la actualidad se observan ciertas dificultades en la formación del profesorado, tales como: preeminencia de una clase tradicional donde se predomina la exposición de contenido, restringiendo espacios para la participación, el cuestionamiento y planteamiento de preguntas en el aula (Corica y Otero, 2014). En el paradigma tradicional, en un curso de matemática, el currículo es una guía que conduce al alumnado a admirar y reproducir el conocimiento, sin poder manipular y manteniendo cierta distancia (Parra y Otero, 2018). El nuevo paradigma, nos invita a disponer de metodologías innovadoras que, al interior de las salas de clases, sintonicen con las necesidades de los estudiantes, puesto que el foco del proceso educativo debe ser el aprendizaje. En nuestro país, hace un tiempo ya existe evidencia investigativa respecto a algunas debilidades en la formación de los profesores, ya que aún prima una desarticulación entre la formación teórica y práctica, presentando una escasa relación entre la formación disciplinar y profesional (Ulloa y Solar, 2017).

METODOLOGÍA

Para realizar esta investigación se utilizó una metodología cualitativa, se llevó a cabo un estudio de caso. El instrumento a través del cual se recogió la información fue una entrevista semiestructurada realizada a fines del 2020, la cual pretendía recabar información sobre el trabajo en el eje de geometría en enseñanza media durante el año en un contexto de educación a distancia, debido a la pandemia del Covid-19. Se utilizó el software ATLAS.TI, luego se analizaron las transcripciones de las entrevistas realizadas

a los participantes, los cuales serán entrevistados nuevamente este año 2021, luego de dos años de experiencia en este contexto de educación virtual.

Muestra

Para llevar a cabo el estudio cualitativo, la muestra fue conformada por diez profesores y profesoras del sistema educativo de las regiones de Ñuble y Biobío, que se desempeñaban en educación media pertenecientes a colegios subvencionados y públicos. El muestreo fue de tipo intencionado.

RESULTADOS

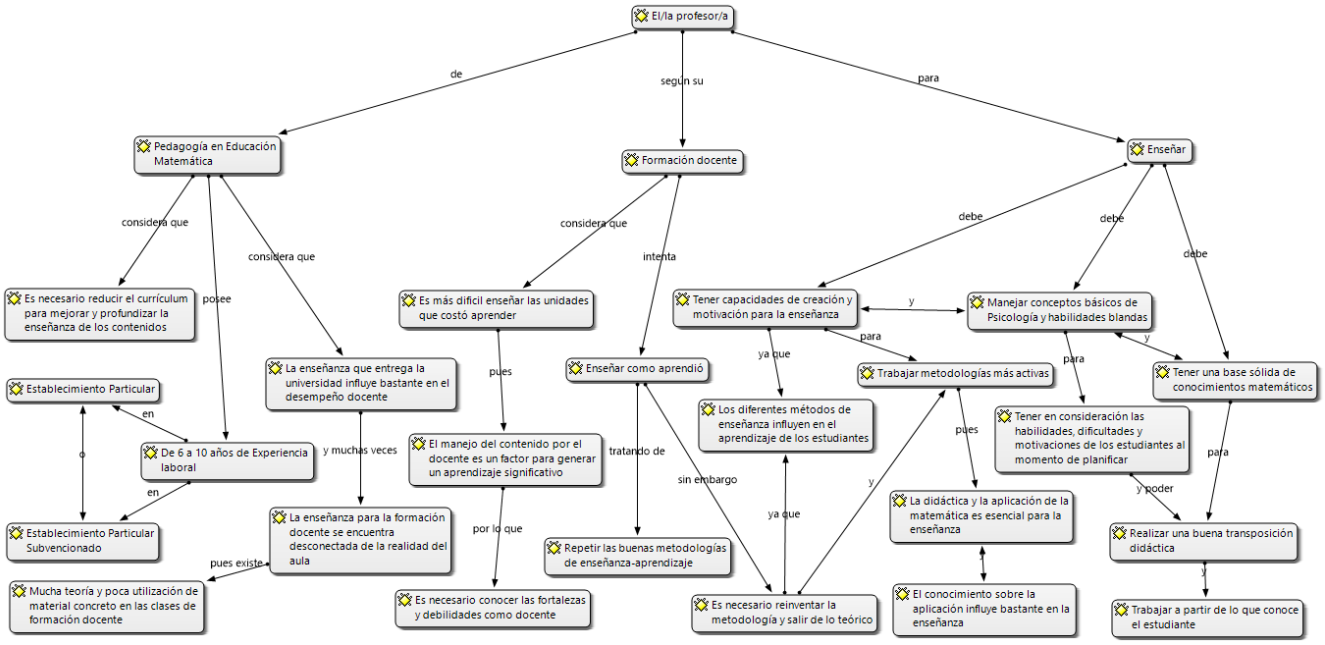


Figura 1: Red semántica categoría 1

En la figura número 1, que lleva por nombre “El Profesor”, entendido como el docente de matemática a cargo de la asignatura en un curso, está compuesta por 3 subcategorías, la primera de ellas es “Pedagogía en Educación Matemática”, la que corresponde a su formación inicial, donde se observa que la formación que tuvieron influye en cómo ellos van a realizar sus clases. La mayoría de los profesores al egresar no diferencian o no tienen claridad entre los variados tipos de establecimientos y sus dependencias administrativas. Reconocen que la formación del profesorado está desconectada de la teoría a la práctica.

La segunda subcategoría es la “Formación Docente”, se entiende esta como la formación recibida en la educación superior por los profesores de matemática. Aquí se observa que los docentes de matemática tienden a enseñar como a ellos les enseñaron en la universidad, rescatan de sus años de formación en pregrado las buenas metodologías que en algún momento pudieron conocer, como también señalan la importancia de la reflexión sobre la práctica.

En la tercera subcategoría denominada “enseñar”, que se entiende como la acción realizada por el docente para llevar a cabo el proceso de aprendizaje. Se observa que es importante considerar los conocimientos

previos de los estudiantes, que el profesor sea capaz de realizar una transposición didáctica según las necesidades de los estudiantes; valorar los conocimientos didácticos para poder realizar una buena entrega de conocimientos, tener en consideración las limitaciones, habilidades e intereses de los estudiantes al momento de planificar; fomentar el pensamiento crítico a través de uso de metodologías activas.

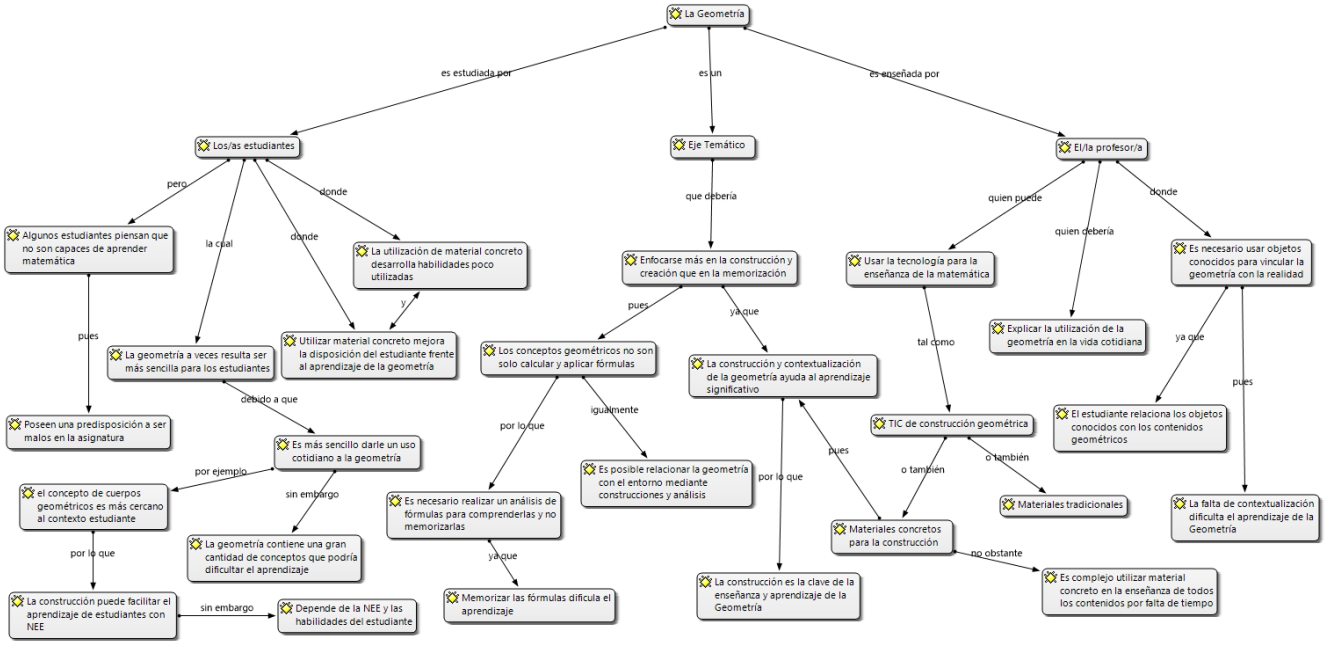


Figura 1: Red semántica categoría 2

En la figura 2 denominada “La Geometría”, que se entiende como la rama de la matemática que centra sus estudios en la medición y cálculo de áreas, superficies y volúmenes. Está compuesta por tres subcategorías, la primera denominada “Los Estudiantes” hace referencia a los estudiantes señalando la poca motivación que estos tienen hacia los contenidos asociados a este eje, lo que conlleva a una baja afectividad. En algunas oportunidades la utilización de material concreto o construcción facilita la comprensión de los conceptos e ideas.

La segunda subcategoría denominada “Eje Temático”, entendida como el eje del currículo nacional al cual los profesores se rigen para dictar sus clases. Se observa que es el más fácil de relacionar con el entorno, de tal manera que facilita el aprendizaje significativo. Además, al utilizar las construcciones geométricas permite que el estudiante se motive al trabajo con regla y compás, quedando de manifiesto que la geometría no solo son teoremas o cálculos.

La tercera subcategoría es “El Profesor”, que se entiende como el docente de matemática responsable de la materia, se observa que ha debido incorporar a sus prácticas el uso de la tecnología para la enseñanza de la geometría, permitiendo salir de la enseñanza tradicional de este eje. El desafío del profesor al

enseñar geometría es que debe llevar lo enseñado a situaciones de la vida cotidiana, transformándose en un facilitador del aprendizaje.

CONCLUSIONES

Se observa a través de las entrevistas que los profesores de matemática consideran que en la enseñanza de la geometría debe abarcar aspectos como: los conocimientos previos de los estudiantes, el desarrollo de habilidades, la motivación, la vinculación con situaciones reales y el uso de material concreto y tecnologías.

La formación inicial de los profesores influye en cómo ellos llevarán a cabo sus prácticas pedagógicas al enfrentar un curso, de tal manera que esto permita una vinculación con sus estudiantes y acercarlos al estudio de la geometría.

En el contexto de la pandemia Covid-19, los profesores son conscientes de la importancia de las tecnologías para favorecer y facilitar la transferencia de conocimiento a sus estudiantes, permitiendo acercar la geometría a la cotidianeidad

Agradecimientos

A los profesores y profesoras participantes de las entrevistas realizadas.

Referencias

Corica, A. R. y Otero, M. R. (2014). La formación de profesores de matemática desde la teoría antropológica de lo didáctico: un estudio de caso. Perspectiva Educacional. Formación de Profesores, 53(2), 20-44.

Maestre M., Nail, O. y Rodríguez-Hidalgo, A. J. (2017). Desarrollo de competencias tic y para la educación inclusiva en la formación inicial práctica del profesorado. *Bordón: Revista De Pedagogía*, 69(3), 57-72.

Parra, V., y Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. *REIEC: Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, (13), 1-18.

Ulloa. R, y Solar, H. (2017). Observando el aula de formación inicial: desarrollando conocimiento matemático para la enseñanza en dos casos de formación de profesores de educación básica. *Revista Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, 43(2), 333-354.

PÓSTERS

GRADOS DE CONFIANZA COMO UNA MEDIDA DE AUTO-EVALUACIÓN

Jorge Peña Araya, David Maximiliano Gómez, Ma. Victoria Martínez

Universidad de O'Higgins (UOH)

Todas las universidades chilenas que forman docentes deben aplicar evaluaciones diagnósticas a sus estudiantes recién ingresados, con el fin de proveer oportunidades de nivelación y acompañamiento. Desde el año 2019, la Escuela de Educación UOH, ha utilizado una evaluación que aborda conocimientos matemáticos, creencias y actitudes hacia la matemática, su enseñanza y aprendizaje (Martínez Videla et al., 2019). Buscando obtener mayor información sobre el conocimiento evaluado, Leclerq (2014) propuso preguntar el grado de confianza de una persona respecto de sus respuestas a ítems que evalúan contenido matemático. En este trabajo, presentamos una experiencia piloto de aplicación de este tipo de preguntas con estudiantes UOH de la cohorte 2021.

Se utilizó una metodología cuantitativa, explorando descriptivamente los datos de estudiantes de las carreras de Pedagogía en Educación Básica (PEB, n=22) y en Matemática (PEM, n=18). La evaluación diagnóstica de conocimientos incluyó 41 preguntas de selección múltiple que abordan las habilidades matemáticas de conocer (16 ítems), aplicar (19 ítems) y razonar (6 ítems). Para cada ítem se aplicó una pregunta adicional, en la cual cada estudiante debía seleccionar cuán seguro estaba de que su respuesta estuviera correcta en una escala de 0% a 100%.

Para el análisis, de acuerdo con Leclerq (2014), clasificamos cada respuesta como *correcta/incorrecta* y con *alta/baja confianza* (>50% y <50%, respectivamente), para así calcular la *confianza útil* (proporción de respuestas con alta confianza dentro de las respuestas correctas) y la *confianza peligrosa* (proporción de respuestas con alta confianza dentro de las respuestas incorrectas). Los resultados se presentan en la Tabla 1.

Habilidad	Respuestas Correctas		Confianza útil		Confianza peligrosa	
	PEM	PEB	PEM	PEB	PEM	PEB
Conocer	91%	79%	97%	86%	82%	43%
Aplicar	79%	59%	96%	80%	71%	46%
Razonar	66%	48%	92%	63%	74%	38%
Prueba completa	82%	65%	96%	82%	74%	44%

Tabla 1: Respuestas correctas, confianza útil y peligrosa, desagregados por habilidad para ambas carreras.

En línea, con un mayor grado evidenciado de conocimiento matemáticos, el estudiantado de PEM muestra en general un mayor grado de confianza en sus conocimientos que el de PEB. Sin embargo, notamos que en PEM este nivel de confianza se mantiene alto también en el caso de los ítems respondidos incorrectamente (confianza peligrosa), lo cual sugiere un menor nivel de conciencia respecto de las limitaciones del propio conocimiento. En esta presentación discutiremos estos y otros elementos que surgen de la consideración de los niveles de confianza en el análisis de datos diagnósticos, entre ellos el valor y la importancia de utilizar este tipo de ítems para obtener una mayor información en un instrumento de evaluación.

Referencias

Leclerq, D. (2014). Autoevaluación con grados de certeza: Un microscopio para la evaluación de los aprendizajes. En Leclerq y Cabrera (Eds.), *Ideas e innovaciones en dispositivos de evaluación de los aprendizajes en la enseñanza superior* (pp. 329-356). Editorial Universitaria.

Martínez, M. V., Rojas, F., Ulloa, R., Chandía, E., Ortiz, A. & Perdomo-Díaz, J. (2019). Creencias y conocimiento matemático escolar al comienzo de la formación inicial docente en estudiantes de Pedagogía General Básica. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 56*(2), 1-19.

EL USO DE SIMULACIÓN COMPUTACIONAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON CON FUTUROS INGENIEROS

Gabriela Cisternas, Jocelyn D. Pallauta y Daniela Bonilla

DUOC, Universidad de Granada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Las carreras de ingeniería incluyen el estudio de la distribución de Poisson en las asignaturas de Estadística, habitualmente se aborda como una aproximación a la distribución binomial B (n, p), o como un proceso de Poisson (Cruz-Ramírez et al, 2014). Este tipo de distribución está definida para variables discretas y representa la cantidad de veces que ocurre un evento en un intervalo de tiempo determinado, su conocimiento es importante para el ingeniero, pues esta distribución es empleada como un modelo probabilístico en diferentes fenómenos aleatorios asociados a variados campos de las ciencias y la ingeniería (Zacks, 2014).

Batanero et al. (2019) sostienen que este tipo de distribución forma parte de los contenidos fundamentales de la inferencia. En este sentido, algunos autores (Garfield et al., 2008), advierten de la necesidad de incorporar recursos tecnológicos en su enseñanza, como simuladores, los cuales facilitan el análisis e interpretación de los datos, pues a través de estos es posible realizar un gran número de experimentos, además de obtener de manera inmediata diferentes estadísticos. Dicha advertencia coincide con las sugerencias del documento de las *Pautas para la Evaluación e Instrucción en Educación Estadística* (GAISE) (FRANKLIN et al., 2005), el cual destaca el rol de la tecnología en la comprensión de diferentes conceptos.

En este trabajo, se presenta el proceso de implementación de un diseño de enseñanza, en el cual participaron 20 estudiantes de ingeniería que cursaban la asignatura de métodos estadísticos de una universidad chilena. Se incorporó el uso de un software de simulación (Fathom) para la enseñanza de la distribución de Poisson. El uso del simulador computacional fue un mediador semiótico el cual, además de motivar la participación de los participantes, facilitó la comprensión de las principales características de esta distribución (discreta, parámetro mayor o igual a cero) de manera dinámica.

Referencias

Batanero, C., Begué, N., Gea, M. y ROA, R. (2019). El muestreo: Una idea estocástica fundamental. *Suma*, *90*, 41-47.

Cruz, M., Álvarez, S. y Pérez, F. (2014). Sobre la Enseñanza de la Distribución de Poisson en Carreras de Ingeniería. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28*(50), 1117-1134. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a06

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K- 12 curriculum framework. Alexandria*, VA: American Statistical Association.

Garfield, J., Ben-Zvi, D., Chance, B., Medina, E., Roseth, C. y Zieffler. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning*. Springer, Dordrecht.

Zacks, S. (2014). *Parametric statistical inference: basic theory and modern approaches*. Oxford, Reino Unido: Pergamon Press.

COMPETENCIAS DIGITALES E INTERACCIONES EN AULAS VIRTUALES SEGÚN PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR TÉCNICO PROFESIONAL

Natalia Ruiz Garrido[1], Paula González Isamit[1] , Sergio Celis Guzmán[2]

[1] CIAE & CMM, Universidad de Chile.

[2] Escuela de Ingeniería y Ciencias, FCFM, Universidad de Chile.

Por varias décadas, las interacciones entre estudiantes y profesores han sido un área de interés para la comunidad en educación matemática (Larson & Lovelace, 2013). Además, debido a la pandemia actual estas interacciones se han visto fuertemente afectadas ya que, las clases han migrado de un ambiente presencial a uno virtual. Por otro lado, desde hace años la comunidad educativa ha puesto atención a las competencias digitales, y el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado del gobierno de España las clasificó en cinco áreas: Información y alfabetización informacional, Comunicación y colaboración, Creación de contenido digital, Seguridad y Resolución de problemas. Así, una de las preguntas de investigación de este estudio es: ¿Cuáles son las competencias digitales relacionadas con interacciones docente-estudiantes que los profesores relevan en sesiones de análisis de video? El contexto de este estudio es la iniciativa ARPA, Activando la Resolución de Problemas en las Aulas, de la Universidad de Chile. En particular, ARPA realiza programas de desarrollo profesional docente que contemplan Sesiones de Análisis de Videos (SAV). En una SAV se reúne un grupo de 3 o 4 docentes junto a un facilitador para observar, analizar y discutir episodios de clases de resolución de problemas (RP) de los propios docentes. En este estudio, los docentes participantes pertenecen a una institución chilena de educación superior técnico profesional quienes implementaron clases de RP en matemáticas de manera online, y los datos disponibles corresponden a filmaciones de las SAV en formato online. El análisis de las filmaciones se realiza haciendo una revisión preliminar, transcribiendo las sesiones y codificando los pasajes a partir de estas transcripciones. Para este trabajo se analiza el video de la primera SAV de un grupo de cuatro docentes donde se discute en torno a episodios que muestran el inicio y desarrollo de clases de RP. La duración del video SAV analizado es de 2 h, 1 min y 36 s.

Al analizar los diálogos docentes en la SAV, ellos dan importancia a la competencia digital: Compartir información y contenidos. Los docentes notan que un problema matemático se puede compartir en diferentes formatos como, por ejemplo, archivo Word, pdf o foto; y que se puede compartir de diferentes formas: subirlo a una plataforma de trabajo, mediante chat o usando la herramienta "compartir pantalla" en una video-llamada. Esta conversación deriva a un diálogo más profundo sobre qué formato o medio es más adecuado considerando el contexto de los estudiantes (por ejemplo, estudiantes utilizando celular). Otra competencia digital relevada es: Colaboración mediante canales digitales. Los docentes destacan el hecho que los grupos de estudiantes utilicen tecnologías y medios (en este caso, pizarras virtuales) para trabajar colaborativamente, en particular, para crear la solución de un problema en conjunto y no de manera individual. Además, los docentes notan diferencias entre compartir información y colaborar. Por ejemplo, ellos señalan que si bien un grupo de estudiantes en una video-llamada pueden compartir información mediante la herramienta "compartir pantalla", no necesariamente están colaborando. En cambio, si un grupo de estudiantes en una video-llamada están dialogando para elaborar la solución de un problema, ellos están en un proceso colaborativo aunque no estén compartiendo pantalla.

Referencias

Larson, L. R. & Lovelace, M. D. (2013). Evaluating the efficacy of questioning strategies in lecture-based classroom environments: Are we asking the right questions? *Journal on Excellence in College Teaching*, *24*(1)

LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN LA COMPRENSIÓN DE SUPERFICIES CUADRÁTICAS

Felipe de Jesús Jacobo Alfaro, María Guadalupe Vera Soria, Marcela Parraguez González

Universidad de Guadalajara, Jalisco, México

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Se presentan los avances de una tesis de maestría que se encuentra en su fase inicial, cuyo objetivo es explorar el proceso de comprensión de superficies cuadráticas en estudiantes de tercer semestre de Ingeniería que desarrollan una secuencia didáctica con el empleo del programa *GeoGebra.* El análisis de datos utiliza el modelo de la comprensión en matemáticas y los modos de pensamiento Sintético – Geométrico, Analítico – Aritmético y Analítico – Estructural de Sierpinska. Se trata de una investigación cualitativa de corte interpretativo, en la que se aborda evidencia extraída de entrevistas y grupos de enfoque para evaluar la construcción de superficies cuadráticas, a través de la valoración de las distintas formas de percibir su significado a partir de la articulación de los modos de pensamiento. En el póster que participa en las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, se muestra información del trayecto teórico-metodológico de la investigación, y en particular sobre el contexto, el análisis epistemológico y la interpretación de los modos de pensar las superficies cuadráticas, que dan cuenta de la construcción de los instrumentos de recogida de datos.

Comprensión conceptual, Modos de pensamiento, Estudio interpretativo, Superficies Cuadráticas.

Referencias

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniarías. (11 de octubre de 2020). *Infraestructura.* Universidad de Guadalajara Red Universitaria de Jalisco. Recuperado el 11 de octubre de 2020 de http://www.cucei.udg.mx/es/acerca-de/infraestructura

Martínez, M. (2006). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. Trillas.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. The Falmer Press. Recuperado de la base de datos Ebrary (10096967).

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students´ Thinking in Linear Algebra. In: J.L. Dorier (ed) On the Theaching of Linear Algebra, 23, 209-246. Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/0-306-47224-4_8

EVOLUCIÓN DEL USO DEL CONCEPTO "CUADRÁTICO"

Rodrigo Rojas-Muñoz

Universidad Austral de Chile

Este trabajo trata sobre los pilares histórico-epistemológicas de la construcción de la función cuadrática. El relato tiene una mirada socio-epistemológica, destacando los problemas que generaron las soluciones que hoy conocemos como la función cuadrática.

Epistemología de la función cuadrática según Mesa y Villa, 2008

Mesa y Villa (2008), mencionan cuatro grandes fuentes epistemológicas, que forman la génesis histórica de las nociones cuadráticas: las ecuaciones cuadráticas, las cónicas, la cinemática y las funciones.

Socio-epistemología

Montiel y Buendía (2013), explican desde la Teoría Socio-epistemológica que la naturaleza epistemológica del saber "es una búsqueda histórico-epistemológica, lo cual no implica la relatoría de hechos históricos, sino la búsqueda de las circunstancias socioculturales que rodean la generación de conocimiento matemático". La socio-epistemología aborda la resignificación del Discurso Matemático Escolar (DME), como una didáctica centrada en entidades abstractas ejemplificadas como verdades preexistentes, desnudadas del proceso de construcción de este saber (Cantoral y Reyes, 2012).

Implicancias en la didáctica de la matemática

El concepto de función cuadrática es enseñado en la escuela en su forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) como un producto terminado (Ministerio de Educación, 2015). Pero, los problemas de tipo cuadrático y la parábola se desarrollaron por condiciones de uso, Galileo es quien logra combinarlas en la forma que generan la base de lo que hoy se conoce como función cuadrática para modelar el movimiento de proyectiles, y Descartes logra construir una expresión algebraica de segundo grado.

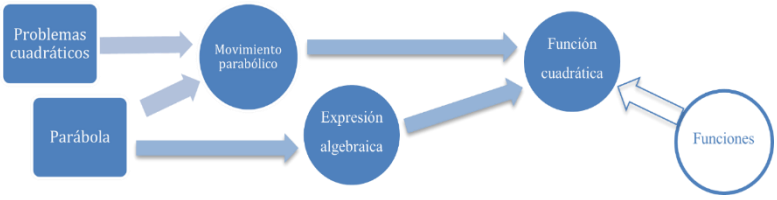


Figura 1. Evolución del uso del concepto "cuadrático" hacia la construcción de la función cuadrática.

Referencias

Cantoral-Uriza, R. y Reyes-Gasperini, D. (2012). Matemáticas y práctica social. Construcción social del conocimiento matemático. En *Novedades Educativas, 261,* 60-65.

Mesa, Y. y Villa-Ochoa, J. (2008). *Reflexión histórica, epistemológica y didáctica del concepto de función cuadrática*. Comunicación presentada en HPM 2008

Ministerio de Educación (2015). *Bases Curriculares. 7° básico a 2° medio*. Gobierno de Chile.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En Rosas, A. y Romo, A. (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones,* 61-88. Editorial Lectorum, México.

ESTUDIO DE CASO PEDAGÓGICO EN LAS ASIGNATURAS DEL EJE DE FORMACIÓN DISCIPLINAR DE LA CARRERA DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA

Marianela Castillo Fernández[1], Eugenio Chandía Muñoz[2], Natalia Pérez Cabrera[3], Jorge Cid Anguita[1], Víctor Jara Sánchez[1], Salvador Alarcón Godoy[1]

[1] Escuela de Educción, Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles; [2] Facultad de Educción, Universidad de Concepción, Campus Concepción; [3] Independiente

En el presente trabajo se muestran los avances del proyecto de docencia de la Universidad de Concepción denominado "Estudio de Casos Pedagógicos en las asignaturas del Eje de Formación Disciplinar de la carrera de Pedagogía en Matemática", ejecutado por un grupo de académicos de la carrera Pedagogía en Matemáticas. El objetivo general es implementar la estrategia didáctica de estudio de casos pedagógicos en asignaturas del eje de formación disciplinar, obteniendo los casos a partir de las prácticas pedagógicas tempranas de las asignaturas del eje de formación práctica. Los ejes de formación disciplinar y prácticos surgen del rediseño curricular que se implementa a partir del año 2016 (Cisterna, Soto, & Rojas, 2016). La forma en que se aplica la estrategia se basa en el trabajo de Reyes (2011).

Los objetivos específicos del proyecto son: (1) Levantar casos pedagógicos a partir de las observaciones de las prácticas pedagógicas tempranas de las asignaturas del eje de formación práctica, clasificándolas de acuerdo a los resultados de aprendizaje de las asignaturas del eje de formación disciplinar; (2) Utilizar la estrategia de estudio de caso pedagógico en asignaturas del eje de formación disciplinar, con el fin de mejorar los aprendizajes de los estudiantes; (3) Vincular las prácticas pedagógicas tempranas con la autorregulación del plan de estudio, detectando falencias en la formación y remediándolas dentro de las asignaturas obligatorias; (4) Evaluar la implementación del estudio de caso pedagógico como estrategia de enseñanza en la formación inicial de profesores de matemática en educación media, con el fin de mejorar el proceso formativo.

Resultados preliminares

Desde el año 2018 se recopilaron situaciones pedagógicas referidas principalmente a errores matemáticos y metodológicos cometidos por los estudiantes durante sus prácticas de inserción temprana, en temáticas relacionadas con el Teorema de Pitágoras, logaritmos, funciones y equiprobabilidad. Durante el 2021 se ha aplicado la metodología en dos asignaturas del eje de formación disciplinar asociadas a la enseñanza de la estadística y a la enseñanza de la geometría.

La experiencia aquí presentada nos ha permitido aprovechar las oportunidades de integración entre asignaturas de distintos ejes de formación, favoreciendo además el trabajo interdisciplinario de los académicos dentro de la misma carrera.

Referencias

Reyes, C. (2011). Estudio de casos en la formación de profesores de matemática: Integrando matemática y pedagogía. Santiago: Proyecto Fondef D05I-10211.

Cisterna, C., Soto, V., & Rojas, C. (2016). Rediseño curricular en la Universidad de Concepción: la experiencia de las carreras de formación inicial docente. Revista Calidad en la Educación (44), 301-323. doi:https://doi.org/10.31619/caledu.n44.41

EXPERIENCIAS DE AULA

EVALUACIONES ONLINE, DEL DICHO AL HECHO: LA EXPERIENCIA DEL EQUIPO DOCENTE DE MATEMÁTICA DEL CUARTO BASICO DEL LICEO TENIENTE DAGOBERTO GODOY DE LO PRADO

Lizardo Miguel Barrera González

Fundación Zig-Zag

El presente trabajo describe la experiencia de implementación de evaluaciones en Matemática (en tiempos de pandemia), a través de la Plataforma Alexia Classroom, en los cuartos básicos del Liceo Teniente Dagoberto Godoy de Lo Prado.

Dentro de los lineamientos para la planificación del año escolar 2021, en particular en lo referido a los aspectos generales de esta planificación, el MINEDUC determinó que la evaluación, calificación y promoción se regiría por el decreto N° 67, el cual "*pone el énfasis en el uso pedagógico de la evaluación, integrando el diagnóstico, la evaluación formativa y Sumativa organizada de forma sistémica y frecuente"* (Ministerio de Educación, 2020, p. 17). Asimismo, se estableció que cuando -por efecto de las medidas sanitarias- no fuera posible cumplir con el acceso de los estudiantes a la modalidad presencial, las clases debían dictarse en modalidad online y/o en un sistema mixto (hibrido), asegurando la continuidad del servicio educativo. Por otro lado, se resolvió que la priorización curricular -y su correspondiente selección de objetivos de aprendizaje- mantenía su vigencia durante el año2021.

En este contexto, el equipo docente del liceo -asesorado por Fundación Zig-Zag - implementó un Plan de Evaluación Formativa y Sumativa de modalidad online para cuarto año básico, a través de la Plataforma Alexia Classroom - entorno de aprendizaje basado en la Plataforma Moodle-.

A continuación, se presentan a consideración algunos de los hallazgos en el proceso de implementación de este plan de evaluación:

- La incorporación y uso de la plataforma Alexia Classroom -en contextos escolares-, requiere un proceso de inducción y capacitación -para docentes y estudiantes (incluidos los apoderados)-, que debe ser previo a la aplicación de instancias de evaluación. Si bien los vídeos tutoriales son una buena opción, no son suficientes en sí mismos para promover una visión de la evaluación con sentido pedagógico.
- La notación y la edición en lenguaje matemático, son un desafío al momento de incluir preguntas abiertas a los estudiantes. En esta dimensión disponer -en la plataforma- de un editor de ecuaciones, es una oportunidad para el desarrollo de la habilidad de argumentación y comunicación en Matemática de los estudiantes.
- La opción -que incluye la Plataforma Moodle- de entregar resultados inmediatos y agregar textos estandarizados para la retroalimentación de las preguntas, son una ventaja para la evaluación formativa en particular. Asimismo, el formato de entrega de resultados -que incorpora este entorno- posibilita un detallado análisis para la toma de decisiones durante el proceso de aprendizaje de los estudiantes.
- Las Plataformas LMS facilitan el proceso meta-cognitivo autónomo de los estudiantes y de su aprendizaje, desarrolla una actitud crítica respecto del conocimiento logrado y de las estrategias de aprendizaje utilizadas.
- La validez y confiabilidad de los resultados de las evaluaciones de modalidad online, representan la mayor preocupación e incertidumbre, respecto del verdadero nivel de logro de los aprendizajes de los estudiantes.

2021. En Gómez, D. M., Cornejo, C., & Martínez, M. V. (Eds.) Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, pp. 337-338. Rancagua, Chile.

Referencias

Colman, H. (13 de noviembre de 2020). *Instituto para el futuro de la educación - Observatorio Tecnológico de Monterrey*. 5 maneras de evalaur el aprendizaje en línea: https://observatorio.tec.mx/edu-bits-blog/cinco-maneras-de-evaluar-el-aprendizaje-en-linea

Ministerio de Educación. (Diciembre de 2020). *Biblioteca digital*. Lineamientos para la planificación del año escolar 2021 en Educación Especial.: https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/15748/Lineamientos2021EdEspecial.pdf?sequence=1&isAllowed=y

CUANDO EL AULA ES UNA RED SOCIAL: EXPERIENCIA DE DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA CUENTA DE INSTAGRAM @APRENDER_DATOS_Y_AZAR

Valentina Giaconi

Universidad de O'Higgins

La enseñanza a distancia y en línea ha planteado enormes desafíos a docentes de diversos contextos (Saadati, et al. 2021). Específicamente en el área de Estocástica, entendida como la integración de las probabilidades y la estadística, donde se necesita mayor desarrollo en la formación del profesorado (Ruz et al. 2021). En este sentido, para aportar al sistema educativo, se han desarrollado diversos recursos digitales, por ejemplo, los presentados en Vásquez, et al. (2020). Un espacio que presenta muchas potencialidades para promover recursos de aprendizaje digitales son las redes sociales, Carpenter y colegas (2020) reportan que los educadores perciben amplias ventajas para usar las redes como herramientas de aprendizaje, en particular indican que: (1) permiten construir comunidades, (2) permiten proponer y desarrollar sus propias ideas educativas y (3) son una gran fuente de material. En particular, Instagram es una red de acceso abierto cuyo foco es el compartir imágenes y videos cortos, lo que permite hacer propuestas visualmente atractivas que están disponibles para todo público.

En función de lo anterior, y para aportar al desafío de enseñar y aprender estocástica a distancia, en esta propuesta de aula se presenta la experiencia de crear la cuenta de Instagram @aprender_datos_y_azar. El objetivo de este recurso es proveer un espacio de aprendizaje entretenido y basado en fuentes confiables sobre datos y azar y su enseñanza. La audiencia principal está conformada por estudiantes de pedagogía, profesores de matemáticas y público general interesado en el tema.

El diseño considera una estrategia visual y de publicación acorde a recomendaciones de las redes sociales. Además, ordena los contenidos en espiral, y los simplifica para promover su comprensión en una audiencia amplia. Los contenidos se organizan en tres temas: (1) Enseñanza y naturaleza de la estocástica, por ejemplo, publicaciones sobre el currículum escolar en esta área; (2) Conceptos de la estocástica, en este tema se abordan conceptos de estadística y probabilidad, por ejemplo, el promedio, el ciclo de investigación, la frecuencia relativa; y (3) Software estadístico, en este tema se presentan pequeños tutoriales y consejos para el adecuado uso de software educativo que permita trabajar temas de educación estocástica, por ejemplo, Google Sheets o Jamovi.

Los resultados han sido positivos, con altos niveles de interacción y un aumento sostenido de seguidores. Sin embargo, se observan limitantes, como la imposibilidad de mantener diálogos sostenidos con la audiencia y la carga de trabajo que conlleva desarrollar un recurso de este tipo.

Referencias

Carpenter, J. P., Morrison, S. A., Craft, M., y Lee, M. (2020). How and why are educators using Instagram?. *Teaching and teacher education*, *96*, 103-149. https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103149

Ruz, F., Chance, B., Medina, E., & Contreras, J. M. (2021). Content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in pre-service chilean mathematics teachers. *Statistics Education Research Journal*, *20*(1), 1-30. https://doi.org/10.52041/serj.v20i1.100

Saadati, Giaconi, Chandía, Fuenzalida, Donoso (2021) Beliefs and Practices About Remote Teaching Processes During the Pandemic: A Study with Chilean Mathematics Teachers. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education (EJMSTE).* https://doi.org/10.29333/ejmste/11201

Vásquez, C., Ruz, F., & Martínez, M. (2020). Recursos virtuales para la enseñanza de la estadística y la probabilidad: un aporte para la priorización curricular chilena frente a la pandemia de la COVID-19. *TANGRAM-Revista de Educação Matemática*, 3(2), 159-183. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12299

PROGRAMACIÓN DE SEMÁFOROS CON FUNCIONES DE PRIMER GRADO Y PROCESADOR GEOMÉTRICO

Marcela Muñoz Lira

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

La presente experiencia de aula se inserta en un III año medio de un colegio subvencionado de la quinta región y en formato educación remota. A través de la triada: situación concreta, contenido matemático y uso pedagógico de la tecnología, se pretendió utilizar el concepto de función de primer grado de tal manera que el estudiantado, a través de una situación concreta titulada "programación de semáforos", determinaran la respectiva función lineal y/o afín que modela el ingreso y egreso de vehículos hasta cierto semáforo. Los creadores de esta actividad lúdica es la Comunidad InGenio, programa de extensión y educación del Instituto de Sistemas Complejos de Ingeniería (ISCI, 2021), quienes fortalecen el uso de la tecnología en docentes de matemáticas a través de sus estudios de casos insertos en problemáticas concretas y reales. La actividad comienza planteando una gama de preguntas que motivan el diálogo, la reflexión y la participación: ¿cómo te movilizas para ir a tu colegio?, ¿consideras que es un viaje expedito?, ¿por qué?, ¿existe alguna hora del día en que el conflicto para poder movilizarse por la ciudad sea mayor?, ¿por qué crees que ocurre esto? Luego, se contextualiza la actividad entregando antecedentes reales como los siguientes: existen medidas del comportamiento del tránsito para evitar o reducir la congestión vehicular y los conflictos en las calles, cómo es el ejemplo del semáforo. En 1926 se instaló el primero en Chile, con el objetivo de gestionar el tráfico en las calles (sólo tenía luz verde y roja). En la actualidad, hay más de 4.000 intersecciones semaforizadas y sólo en Santiago existen alrededor de 3.000. En proporción, hay más semáforos en la ciudad de Sao Paulo o en Nueva York (Aarón, Gómez, Fontalvo y Gómez, 2019; Di Rado, García, Devincenzi y Silvero, 2017). Un punto relevante de esta actividad es el uso pedagógico de la tecnología. Se utilizó GeoGebra, software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo (Arteaga, Medina y Del Sol Martínez, 2019); o bien, Desmos que es un software interactivo de matemática para geometría analítica. Ambos promueven los procesos de enseñanza y de aprendizaje con la ayuda de una tecnológica didáctica, accesible, gratuita, de cómoda manipulación e instalación. La actividad planteada fue: Si los vehículos ingresan al cruce semaforizado cada 3 segundos, y salen cada 2 segundos indica cuál es la ecuación de la recta de cada situación (ecuación de la recta para la entrada de vehículos y otra para la salida de vehículos) considerando que hay un semáforo que dura 9 segundos en rojo con un ingreso y salida de vehículos de forma constante. Planteándoles: ¿cómo representarías gráficamente el funcionamiento de un semáforo?, ¿qué funciones utilizarías? Se les pide explícitamente que determinen la ecuación de la recta indicando su procedimiento y la respectiva gráfica con el uso de un graficador. Los resultados muestran procedimientos que dan cuenta de un proceso de aprendizaje articulado, donde cobra fuerza la cohesión entre el objeto matemático, el contexto y un procesador gráfico optimizando el tiempo empleado y motivando la habilidad de comunicación y argumentación.

Referencias

Aarón, M. A., Gómez, C. A., Fontalvo, J., & Gómez, A. J. (2019). Análisis de la Movilidad Vehicular en el Departamento de La Guajira usando Simulación. El Caso de Riohacha y Maicao. *Información tecnológica*, *30*(1), 321-332. 10.4067/S0718-07642019000100321

Arteaga Valdés, E., Medina Mendieta, J. F., & Del Sol Martínez, J. L. (2019). El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Revista Conrado*, *15*(70), 102-108. Recuperado de http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado

Di Rado, G. R., García, D. S. P., Devincenzi, G. H., & Silvero, F. (2017). Modelo de Simulación de Tránsito de un Vehículo de Paseo Terrestre en Trayectoria Curva Estable. *Mecánica Computacional*, *35*(20), 1111-1136. http://venus.santafe-conicet.gov.ar/ojs/index.php/mc/article/view/5332/5285

ISCI. (02 de octubre de 2021). Comunidad InGenio. https://www.comunidadingenio.cl/

MINICURSO VIRTUAL DE NÚMEROS COMPLEJOS: UNA EXPERIENCIA EXTRACURRICULAR, INTERINSTITUCIONAL Y EN CO-DOCENCIA

Pamela González[1], Sergio Guzmán[2], Sebastián Herrero[2], Valeria Randolph[2], Paulina Sepúlveda[2]

[1]Universidad Autónoma de Madrid, [2]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

La cápsula que se presenta tiene como propósito compartir una experiencia de aula innovadora en la formación inicial de profesores de matemática en Chile: el minicurso IMNOVA de números complejos. Este minicurso abordó aspectos disciplinares y didáctico-pedagógicos del sistema de los números complejos y fue implementado el presente año en una modalidad de aprendizaje en línea. Con una duración aproximada de cinco minutos, el equipo de formadores narra el diseño, la implementación y los principales aprendizajes y conclusiones de esta experiencia, que se caracterizó por ser una actividad extracurricular, interinstitucional y en co-docencia.

Parte 1. Diseño de la experiencia. El minicurso surgió desde la unidad de Matemáticas e Innovación (IMNOVA) de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, como una propuesta para complementar la formación de futuros profesores de matemática. El equipo docente estuvo compuesto por dos expertos en matemática, pura y aplicada, una didacta de la matemática y una especialista en educación. Los participantes fueron 22 profesores en formación inicial de carreras de pedagogía en matemática y áreas afines, de cuatro universidades chilenas. En línea con el Ministerio de Educación (2021), el minicurso constó de cuatro unidades temáticas que fueron planificadas con base en el desarrollo histórico-epistemológico (Jankvist, 2009) de los números complejos y que profundizaron en aspectos algebraicos, analíticos, geométricos y formales de estos números desde un punto de vista matemático y didáctico-pedagógico.

Parte 2. Implementación de la experiencia. Las actividades del minicurso se distribuyeron en momentos sincrónicos (talleres a través de Zoom), y momentos asincrónicos (visualización de cápsulas y trabajo autónomo en grupos de 3 o 4 estudiantes), sumando aproximadamente 40 horas pedagógicas. En estas instancias, se integraron diversas herramientas tecnológicas (GeoGebra, Jamboard, formularios de Google, entre otras), fomentando el aprendizaje activo y el uso significativo de TIC. Además, se dispuso de una plataforma Moodle en la que se registraron y organizaron todas las actividades del minicurso.

Parte 3. Principales aprendizajes y conclusiones. A partir de los análisis de las producciones de los participantes se observó que el uso de la historia, así como el tipo de actividades propuestas, llevó a movilizar conocimientos, habilidades, actitudes y creencias respecto al tópico abordado y a su enseñanza. Además, la experiencia contribuyó a la comprensión esperada a través del trabajo en equipo y a la dinámica de co-docencia que mejoró en gran medida la calidad de las discusiones en cada taller sincrónico. Finalmente, para el equipo docente esta experiencia fue sumamente enriquecedora tanto a nivel formativo como académico, permitiéndoles desarrollar conocimientos especializados sobre la formación inicial de profesores de matemática.

Referencias

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educ Stud Math 71*, 235–261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9

Ministerio de Educación. (2021). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para carreras de Pedagogía en Matemática*. Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas CPEIP. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2021/08/Matematica-Media.pdf

2021. En Gómez, D. M., Cornejo, C., & Martínez, M. V. (Eds.) Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, pp. 342. Rancagua, Chile.

"CODIFICANDO RACIONALES": UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Cristhoper Gallardo Pérez, Francisca Gallardo Vega y Monserrat Torres Ávalos

Universidad de La Serena, Chile

La enseñanza del conjunto de los números racionales y su operatoria, se ha convertido en una de las principales dificultades para los estudiantes de octavo año básico. Tal como afirma Morales (2014) esto se debe a que "se prioriza el fraccionamiento de la unidad o se centra en la mecanización de algoritmos, que dejan de lado el razonamiento y la comprensión del concepto que permitirían el planteamiento y solución de diferentes problemas matemáticos".

Dado lo anterior, es que se presenta una propuesta de innovación didáctica centrada en el objeto matemático del conjunto de los números racionales, actividad que será implementada en un curso de octavo año básico y se enmarca como parte del trabajo final, en la asignatura Proyecto de Educación Matemática de la carrera Pedagogía en Matemáticas y Computación de la Universidad de La Serena.

Para la realización de esta experiencia de aula, se ha modificado y adaptado una de las tareas matemáticas propuestas en el programa de estudio de octavo básico, en la cual los estudiantes a través de esta actividad grupal denominada "Codificando Racionales", experimentarán una nueva forma de aplicar los conceptos aprendidos. En el ámbito curricular, el propósito de esta experiencia de aula es dar cumplimiento al objetivo de aprendizaje N°2 (OA2) de la Unidad 1 de octavo básico, el cual apunta a "utilizar las operaciones de multiplicación y división con los números racionales en el contexto de la resolución de problemas: Representándolos en la recta numérica. Involucrando diferentes conjuntos numéricos" (Programa de Estudios 8° Básico Matemática, 2016).

Para la implementación de "Codificando Racionales", en primer lugar, el docente activará los conocimientos previos asociados a la actividad, para luego explicar las instrucciones del juego, el cual se puede realizar en grupos de 4 o 5 integrantes. La actividad consiste en la transformación de palabras a números en distintos sistemas numéricos (Naturales, Enteros y Racionales), según la recta numérica con las claves que serán entregadas por los docentes. A medida que los estudiantes vayan obteniendo las secuencias en la recta numérica y codificando las palabras correspondientes, irán sumando puntos a su equipo. Finalmente, la actividad concluirá con la realización de una síntesis de lo aprendido en clases.

"Codificando Racionales" será implementado antes de finalizar el año escolar 2021, y pretende además de dar cumplimiento al OA asociado, fomentar habilidades como el liderazgo, la empatía y la sana competencia. De la Cruz (2010) indica que, para que un equipo funcione bien, es necesario tener en claro

2021. En Gómez, D. M., Cornejo, C., & Martínez, M. V. (Eds.) Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, pp. 343-344. Rancagua, Chile.

lo que se quiere lograr, reconocer qué labores puede desarrollar cada uno de los miembros del equipo, lo que permite que el objetivo propuesto se logre con mucho menor esfuerzo y en un menor tiempo.

Referencias

Morales, R. (2014). *Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales* [Tesis de Magíster, Universidad Autónoma de Manizales, Colombia]. http://repositorio.autonoma.edu.co/handle/11182/531

Ministerio de Educación (2016). *Programa de Estudio 8° básico Matemática*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

De la Cruz, E. (2010). *El trabajo en equipo como enseñanza didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la escuela primaria*. [Tesina de Licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional, México]. http://200.23.113.51/pdf/27833.pdf

LA DISCUSIÓN MATEMÁTICA COMO ESTRATEGIA DE FOMENTO DE LA PARTICIPACIÓN Y EL APRENDIZAJE COLABORATIVO

Daniela Fuentes Gajardo

Universidad de O´Higgins

El currículum nacional de educación general en el área de matemática señala que, dentro de sus orientaciones didácticas el éxito educativo es inherente a cualquier metodología de aprendizaje si esta se acompaña de situaciones que promuevan el diálogo, estimulen la curiosidad y diferentes capacidades de los y las estudiantes, al mismo tiempo que son capaces de generar discusión matemática en torno al contenido. Por este motivo resulta fundamental estudiar la discusión matemática (DM) como una estrategia que a su vez funciona como herramienta, promoviendo la participación de estudiantes al mismo tiempo que fortalece el aprendizaje colaborativo y la co-construcción del aprendizaje.

La siguiente experiencia de aula, se llevó a cabo durante el periodo de práctica profesional en el Colegio Diego Portales de la comuna de Machalí. En la fase de observación y diagnóstico, se observó que la gran mayoría de los y las estudiantes no participaban activamente, de manera que fue muy difícil identificar aprendizajes en ellos y ellas. Esto, sumado al foco de la clase que estaba centrado en el cálculo y la mecanización de algoritmos y procedimientos, generaron que los espacios de reflexión y discusión matemática fuesen prácticamente nulos.

Por tales motivos se han diseñado e implementado espacios de discusión matemática, particularmente en primero medio durante el desarrollo del OA13 que señala:

> "Comparar poblaciones mediante la confección de gráficos "xy" para dos atributos de muestras, de manera concreta y pictórica: -Utilizando nubes de puntos en dos colores. -Separando la nube por medio de una recta trazada de manera intuitiva." (p.58)

De esta manera, y siguiendo el modelo de Smith y Stein (2011), se propone la planificación de situaciones de DM poniendo énfasis en la etapa de anticipación. Este momento se refiere a una planificación previa de la actividad desde una mirada holística, considerando por ejemplo, establecer metas ambiciosas y objetivos de aprendizaje claros, seleccionar tareas matemáticas desafiantes y en concordancia con estos objetivos, anticipar posibles respuestas y estrategias de resolución, tanto correctas como incorrectas para elaborar preguntas que se valgan de las producciones de los y las estudiantes, con el fin de profundizar en el contenido matemático, así como también para dirigir la discusión matemática propiamente tal.

El análisis de los datos se realizó mediante la modalidad de self-study, metodología que en sí misma es una evaluación de impacto, ya que permite a docentes evaluar y caracterizar sus propias prácticas docentes. Así el análisis estará en las prácticas docentes que promueven la DM y la participación, tales

como lo son el dar tiempo para que los y las estudiantes elaboren sus respuestas, la capacidad del docente de preguntar además de contrapreguntar y la gestión de las palabras, con la finalidad de facilitar la DM.

Referencias

Smith, M.S.& Stein, M. K. (20011). *5 Prácticas para orquestar discusiones productivas en Matemática.* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

Ministerio de Educación (2016). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Santiago, Chile.

MAT-OPOLY: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LOS PRODUCTOS NOTABLES

Nicolás Álvarez González, Allison Cornejo González y Soledad Pizarro Torres

Universidad de La Serena, Chile

Se presenta la experiencia de aula enfocada en el objeto matemático de productos notables, desarrollada en el contexto de la asignatura Proyecto de Educación Matemática de la carrera de Pedagogía en Matemáticas y Computación de la Universidad de La Serena. La cual se implementará en alumnos de primer año medio, cuyo objetivo principal es evaluar de manera formativa este contenido a través de un juego colaborativo, utilizando un tablero interactivo de formato digital similar al juego de mesa Monopoly.

Los productos notables, según diversos estudios, presentan dificultad al momento de ser enseñados. Es por este motivo que hemos decidido seleccionarlo como objeto de estudio en este proyecto de innovación didáctica. Por otro lado, cabe destacar que este objeto, tal como lo menciona Chilan (2019), presenta una gran influencia en el desarrollo de otros aprendizajes, por ende, su correcta enseñanza es fundamental en el proceso educativo de los estudiantes. Además, si bien, en el programa de estudios se indica que este objeto debe ser enlazado con otros contenidos relacionados, la metodología de enseñanza en la mayoría de los casos está basada en la memorización y no en un aprendizaje profundo. Es por esta razón que implementar una clase con nuevas estrategias para evaluar los productos notables de manera innovadora, permite a los docentes apreciar el cumplimiento y comprensión de los objetivos de aprendizaje. Como mencionan Wagner, Giraldo, Hoyos y Gutiérrez (2017), incorporar estas nuevas estrategias didácticas, proporciona en los estudiantes una consecución de un aprendizaje significativo respecto a dicho objeto, dejando de lado la enseñanza tradicional y monótona que en la mayoría de los casos se utiliza en el aula de clase.

El juego digital que será utilizado en esta experiencia se llama “Mat-Opoly”, el cual consiste en una serie de partidas grupales, utilizando un tablero construido digitalmente. Este tablero consta de múltiples casillas, cada una de ellas con un ejercicio de productos notables y su respectiva tarjeta. Para la implementación de este juego, en primer lugar, los docentes explican y ejemplifican las reglas. Luego, designan los grupos de manera equitativa, e indican que cada integrante tendrá la oportunidad para participar. Durante el transcurso del juego, cada uno de los estudiantes se verá enfrentado a preguntas relacionadas al contenido de productos notables en sus diversos tipos de representaciones, cuyas respuestas beneficiarán o afectarán el puntaje de su grupo. Finalmente, el grupo ganador será aquel que presente mayor cantidad de puntaje y propiedades.

2021. En Gómez, D. M., Cornejo, C., & Martínez, M. V. (Eds.) Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, pp. 347-348. Rancagua, Chile.

Por último, la implementación de esta experiencia de aula permitirá a los docentes, evaluar habilidades matemáticas como la resolución de problemas, representar, argumentar y comunicar (Programa de Estudios 1° Medio Matemática, 2016).

Referencias

Chilan, D. (2019). *Los productos notables en el aprendizaje significativo. Propuesta: Guía didáctica con estrategias activas* [Trabajo de Titulación, Universidad de Guayaquil, Ecuador] http://repositorio.ug.edu.ec/handle/redug/39208

Ministerio de Educación (2016). *Programa de Estudio 1° medio Matemática*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

Wagner G., Giraldo, A., Hoyos, E. y Gutiérrez H. (2017). El álgebra geométrica como mediadora en la enseñanza de la factorización y los productos notables. *Revista De Investigaciones Universidad Del Quindío, 26*(1), 139-144.

TRIVIA – PORCENTUAL

Javier Leyton, Jahell Vidaurre

Universidad de La Serena, Chile

Se propone la siguiente experiencia de aula para trabajar el objeto matemático de porcentajes, en un curso de séptimo básico de un establecimiento educacional, la cual tiene como objetivo generar una mejor comprensión y aprendizaje de los porcentajes en sus diferentes tipos de representaciones, mediante la resolución de diversas tareas matemáticas en un juego tipo trivia similar al programa "Quien Quiere Ser Millonario".

El concepto de porcentajes es uno de los contenidos de las matemáticas con más uso dentro de nuestra vida cotidiana, esto lo vemos diariamente en ofertas de productos en centros comerciales y promociones en diversos medios de comunicación. Así como lo mencionan Mendoza y Block (2010):

> "el porcentaje es una noción matemática de frecuente uso social que, sin embargo, es difícil de comprender y de usar para muchas personas, es aquí donde la interiorización correcta del objeto matemático debe ser significativa, para evitar que los alumnos pierdan interés y gusto por las matemáticas, y no generar a su vez niveles bajos de comprensión y competencias en el momento de resolver problemas, es por esto que la situación demanda creatividad y flexibilidad de los docentes al momento de enseñar estos conceptos matemáticos".

Para comenzar la experiencia de aula, el docente activará los conocimientos previos asociados a esta actividad, haciendo preguntas dirigidas a los estudiantes para luego proceder a explicar las reglas del juego. Para el desarrollo de la trivia, el docente presentará a los participantes del juego, preguntas relacionadas con porcentajes, las cuales serán expuestas utilizando representaciones simbólicas y pictóricas con el fin de que los estudiantes realicen el tránsito entre estos dos tipos de representaciones, realizando preguntas en un nivel ascendente, partiendo desde cálculos sencillos hasta resolver problemas de la vida cotidiana. Cada pregunta tendrá cuatro alternativas de las cuales una es la correcta, para lo cual los estudiantes tendrán un determinado tiempo para responder realizando los cálculos utilizando lápiz y papel. A medida que vayan resolviendo las tareas matemáticas irán respondiendo una encuesta, la cual determinará la alternativa propuesta por el curso.

La implementación de esta experiencia de aula se realizará antes de finalizar el año escolar 2021 y busca que los estudiantes logren un aprendizaje significativo de este objeto matemático, trabajando sus distintos tipos de representaciones.

Finalmente, esta propuesta se enmarca en la asignatura Proyecto de Educación Matemática correspondiente a la carrera de Pedagogía en Matemáticas y Computación de la Universidad de La Serena.

2021. En Gómez, D. M., Cornejo, C., & Martínez, M. V. (Eds.) Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, pp. 349-350. Rancagua, Chile.

Referencias

Mendoza, T. y Block, D. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 13* (4-1), 177-190.

APRENDIZAJE DE LA DISTRIBUCIÓN EMPÍRICA DE UNA VARIABLE POR ESTUDIANTES DE INGENIERÍA, A TRAVÉS DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS BASADAS EN LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS CON EMPLEO DE TECNOLOGÍA

José Luis Barraza Castro, Humberto Gutiérrez Pulido, Martha Elena Aguiar Barrera

Universidad de Guadalajara

En la actual era digital abundan los datos y la necesidad de analizarlos adecuadamente. En la presente investigación se busca comprender cuáles son las actividades cognitivas que desarrollan los estudiantes de ingeniería, por medio de ejercicios didácticos basados en el software GeoGebra para el concepto de distribución de una variable a partir de datos muestrales. Se parte de datos generados aleatoriamente y se busca caracterizar su distribución empírica mediante la implementación de una secuencia didáctica con el software GeoGebra, que utiliza conceptos y técnicas de la estadística descriptiva. Esta secuencia, permite encauzar al estudiante de ingeniería en el desarrollo de actividades en las que emplea diferentes tratamientos y conversiones de acuerdo con la teoría de representaciones semióticas.

Estadística descriptiva, representaciones semióticas, actividades didácticas, tecnología, GeoGebra.

Enlaces GeoGebra

Tendencia Central: https://www.geogebra.org/m/sutzsqyh

Tabla de Frecuencia e Histograma: https://www.geogebra.org/m/xeqjwmpz

Diagrama de Caja y Bigote: https://www.geogebra.org/m/qqh7gmuq

Referencias

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representation.* Springer International Publishing.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensaminento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitive del pensamiento. Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* 173-201. Cinvestav.

Gutiérrez P., H. (2020) *Calidad y productividad 5ed.* McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. D.

sochiem
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

XXV

Universidad de O'Higgins

Jornadas Nacionales de Educación Matemática

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN UNA SOCIEDAD QUE SE TRANSFORMA

AUSPICIA

CIAE Centro de Investigación Avanzada en Educación Universidad de Chile

Universidad de Chile Instituto de Estudios Avanzados en Educación IE

PATROCINA

Fundación Zig-Zag