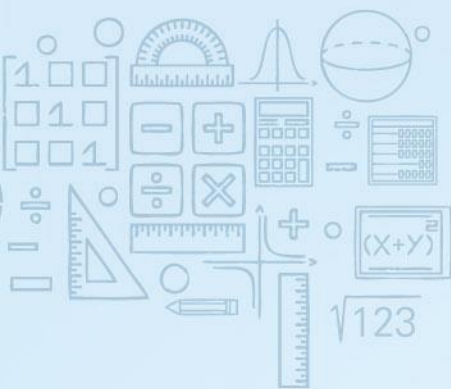




XXIV JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LIBRO DE ACTAS

28 y 29 de abril 2021
Universidad Católica Silva Henríquez
Santiago de Chile



Universidad
Católica

**Silva
Henríquez**



Actas XXIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática

XXIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática

Universidad Católica Silva Henríquez

Sociedad Chilena de Educación Matemática

ISBN: 978-956-9805-03-5

Comité Editorial

Álvaro Figueroa, UCSH, afigueroal@ucsh.cl

Gabriel Meza, UCSH, gmeza@ucsh.cl

Mauricio Moya, UCSH, mmoyam@ucsh.cl

Sally Navarrete, UCSH, snavarrete@ucsh.cl

Maritza Silva, UCSH, msilva@ucsh.cl

Alonso Quiroz, UCSH, aquiroz@ucsh.cl

Diseño Libro de Actas XXIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática

Álvaro Figueroa López

Universidad Católica Silva Henríquez

Cómo Citar

Apellido1, A1., & Apellido2, B2. (2021). Título del capítulo. En Figueroa, A., Meza, G., Moya, M., Navarrete, S., Silva, M., & Quiroz, A. (Eds.) *Actas XXIV JNEM*. Santiago, Chile: SOCHIEM, EEMIE-UCSH. ISBN 978-956-9805-03-5

COMISIÓN ORGANIZADORA

PRESIDENTE

Dr. Alonso Quiroz Meza, Universidad Católica Silva Henríquez

VICEPRESIDENCIA

Mg. Mauricio Moya Márquez, Universidad Católica Silva Henríquez

Mg. Miguel Díaz Flores, SOCHIEM, Universidad Alberto Hurtado

SECRETARIA

Mg. Sally Navarrete Fabio, Universidad Católica Silva Henríquez

COMITÉ CIENTÍFICO

PRESIDENTA

Dra. Maritza Silva Acuña, Universidad Católica Silva Henríquez

VICEPRESIDENTE

Mg. Gabriel Meza Pereira, Universidad Católica Silva Henríquez

Dr. Eugenio Chandia Muñoz, SOCHIEM, Universidad de Concepción

SECRETARIO

Mg. Álvaro Figueroa López, Universidad Católica Silva Henríquez

INTEGRANTES COMITÉ CIENTÍFICO

Aravena D. María, Universidad Católica del Maule
Benavides G. Raúl, Universidad de La Frontera
Carrasco H. Eduardo, Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación
Chandía M. Eugenio, Universidad de Concepción
Cortínez P. Álvaro, Universidad de Tarapacá
Fritz C. Miguel, Universidad del Biobío
García M. Isabel, Universidad Católica del Norte
Gutiérrez T. Eduardo, Universidad Adventista
Henríquez R. Carolina, Universidad de Talca
Martínez M. Carlos, Universidad de los Lagos
Martínez V. María Victoria, Universidad de O'Higgins
Menares E. Romina, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Miranda V. Isaías, Instituto Politécnico Nacional de México
Montaño E. Rosa, Universidad de Santiago de Chile
Navas F. Andrés, Universidad de Santiago de Chile
Ortiz J. Andrés, Universidad Católica de la Santísima Concepción
Parraguez G. Marcela, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Pinto R. Irma, Universidad Católica del Norte
Pizarro C. Noemí, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Rojas S. Francisco, Pontificia Universidad Católica de Chile
Silva C. Carlos, Universidad de Playa Ancha
Silva-Crocci. Héctor, Universidad de Santiago de Chile
Solar B. Horacio, Pontificia Universidad Católica de Chile
Soto S. Daniela, Universidad de Santiago de Chile
Vásquez O. Claudia, Pontificia Universidad Católica de Chile
Vergel C. Rodolfo, Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Colombia
Vidal C. Roberto, Universidad Alberto Hurtado
Zamorano V. Alicia, Universidad de Chile

PROLOGO

La pandemia de la enfermedad por coronavirus (COVID-19) ha puesto de relieve, de forma inédita la manera de enseñar y de aprender. Se privilegia el trabajo remoto y el distanciamiento físico con el fin de evitar la propagación del virus y mitigar su impacto. En este contexto se llevan a cabo las XXIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática (JNEM) en modalidad Online.

Este libro de actas son un registro de las XXIV JNEM, organizadas conjuntamente por la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM) y la Universidad Católica Silva Henríquez (UCSH). Estas jornadas constituyen el evento más importante de nuestro país en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en todos los niveles del sistema educativo nacional.

En esta versión de las jornadas, las actas incluyen los resúmenes de tres conferencias plenarias, nueve conferencias especiales, veintinueve reportes de investigación, veintiséis comunicaciones breves, once talleres y siete experiencias de aula. Estos trabajos dan cuenta de las investigaciones que se están realizando en Chile en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Agradecemos a la Sociedad Chilena de Educación Matemática por confiar en el equipo de la Escuela de Matemática e Informática Educativa. A los invitados internacionales que aportaron con sus conferencias: Dr. Luis Radford, Dr. Bruno D'Amore y Dra. Paola Valero y a las y los connotados especialistas e investigadores en el área de la Educación Matemática. Destacamos la participación de las universidades socias de la SOCHIEM, quienes aportaron con los y las conferencistas especiales: Ángela Castro & Roberto Jiménez, Raimundo Olfos, Jaime Israel García-García, Carolina Garrido & Gabriela Cartes, Gabriel Meza, Jorge Gaona, María Aravena Díaz, Maximina Márquez Torres y Roberto Vidal. Asimismo, agradecemos al Comité Científico y los evaluadores.

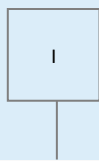
De igual manera agradecemos a los auspiciadores que confiaron en la organización de las jornadas: Umáximo, Educación 2020, Cruzando Fundación, Exacta, La Tienda Científica, Scratch al sur y Centro de Estudios Tecya.

Finalmente, quiero destacar el invaluable apoyo y compromiso de los estudiantes y docentes de la Escuela de Matemática e Informática Educativa de la UCSH, sin su ayuda este evento no hubiera sido posible.

Maritza Silva Acuña
Presidenta Comité Científico

ÍNDICE

CONFERENCIAS PLENARIAS	1
REIMAGINAR EL AULA DE MATEMÁTICAS: LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES COMO PRAXIS EMANCIPADORA	1
UNAS REFLEXIONES BÁSICAS SOBRE EL TEMA DE LAS RELACIONES ENTRE LA ÉTICA Y LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA	16
CONFERENCIAS ESPECIALES	22
ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO Y FORMACIÓN DOCENTE: UNA COMPETENCIA PROFESIONAL PENDIENTE	22
BREVE REVISIÓN SOBRE LOS INICIOS DEL MODELO DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS.....	28
CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE PROBLEMAS DE DIVISIÓN- MEDIDA	33
ESTUDIO DE CLASES EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE ANDAMIAJE EN MATEMÁTICA PARA EDUCADORAS DE PÁRVULO	39
MODELADO MATEMÁTICO PARA EDUCACIÓN STEM. UNA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA	45
NIVEL DE CONOCIMIENTO DE LAS EDUCADORAS DE PÁRVULOS EN EL ÁREA DE LAS CIENCIAS Y MATEMÁTICAS UNA REVISIÓN SISTEMATIZADA	51
PARTICIPACIÓN DE ESTUDIANTES EN ARGUMENTACIONES EPISTÉMICAS EN TORNO A LAS FRACCIONES UTILIZANDO TECNOLOGÍA	57
UNIDADES CURRICULARES STEM INTEGRADAS: UNA PROPUESTA PARA DESARROLLAR HABILIDADES DEL SIGLO XXI EN CONTEXTOS MULTIGRADO	62
RESUMEN DE: CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.....	68
REPORTES DE INVESTIGACIÓN	69
ANÁLISIS DE LA DEMANDA COGNITIVA DE UNA TAREA MATEMÁTICA SOBRE MCD	69
CARACTERIZACIÓN DE LA ARGUMENTACIÓN Y METACOGNICIÓN EN TAREAS DE MODELACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS	76
CONCEPTUALIZACIONES QUE PERMITEN ORGANIZAR LA CONSTRUCCIÓN DEL LÍMITE, EN ESTUDIANTES DE 16 A 17 AÑOS.....	81
CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL A PARTIR DE LA LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON	86
CONSTRUCCIÓN DEL ISOMORFISMO DE ESPACIOS VECTORIALES: CONCEPTO ARTICULADOR PARA UN MODELO MULTINTERPRETATIVO	92
CREENCIAS DE AUTOEFICACIA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: ADAPTACIÓN Y VALIDACIÓN DE UN CUESTIONARIO PARA PROFESORES EN SERVICIO	98



DE LA FUNCIÓN LINEAL A LA NO LINEAL: ANÁLISIS DE LA CONGRUENCIA ENTRE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LOS LIBROS DE TEXTO	104
DESARROLLO PROFESIONAL DE DIDÁCTAS DE LA MATEMÁTICA: LECCIONES APRENDIDAS A PARTIR DE UN SELF-STUDY COLABORATIVO INTERINSTITUCIONAL	110
DISEÑO Y VALIDACIÓN DE DOS CUESTIONARIOS PARA EVALUAR EL NIVEL DE COMPRENSIÓN LECTORA Y DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE ESTUDIANTES CHILENOS DE CUARTO MEDIO.....	116
DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: UNA MIRADA HISTÓRICA EPISTEMOLÓGICA DESDE DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO	122
EL DESAFÍO DE LA FORMACIÓN CONTINUA EN TIEMPOS DE PANDEMIA. EL CASO DEL PROGRAMA SUMA Y SIGUE BÁSICA DURANTE EL AÑO 2020	128
EMOCIONES DE UNA PROFESORA DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN EN EL DISEÑO DE UNA PLANIFICACIÓN DE CLASE EN ESTADÍSTICA. UN ESTUDIO EXPLORATORIO	134
ENSEÑANZA DE ÁREAS DE CUBOS Y PARALELEPÍPEDOS PARA UN ESTUDIANTE DE 6TO BÁSICO, DIAGNOSTICADO EN EL ESPECTRO AUTISTA: UN ESTUDIO DE CASO	141
ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ALUMNOS DE PRIMERO DE PRIMARIA PARA ESTABLECER UNA FUNCION INVERSA	147
ESTUDIO PRELIMINAR DEL SIGNIFICADO ATRIBUIDO POR EL FUTURO PROFESORADO DE PRIMARIA A LOS <i>NÚMEROS</i> QUE APARECEN EN UNA TABLA ESTADÍSTICA	153
EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DESDE UN ENFOQUE BIDIMENSIONAL LECTO-MATEMÁTICO. UN ANALISIS INTERDISCIPLINARIO.....	159
EXPLORANDO NOCIONES DE INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD EN LOS TEXTOS ESCOLARES DE MATEMÁTICAS.....	165
HACIA UNA EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS: UNA MIRADA DESDE LOS FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.....	170
HACIA UNA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE QUE DESARROLLA EL RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL EN ESTUDIANTES DE K A 3	177
LA ETNOMATEMÁTICA EN EL PROCESO DE COMUNICACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE SABERES: UNA APROXIMACIÓN ENTRE LA MATEMÁTICA Y LA LINGÜÍSTICA DE LAS COMUNIDADES	183
LA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA: UNA MIRADA DESDE EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO.....	189
LOS MODOS DE PENSAR EL CONCEPTO DE GRUPO DESDE LOS MODOS DE PENSAMIENTO – EL CASO DEL GRUPO DE ORDEN 2	195
PERCEPCIÓN DOCENTE SOBRE LA ARTICULACIÓN DE LA MATEMÁTICA EN LA TRANSICIÓN KÍNDER-PRIMERO BÁSICO. UN ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE EL CURRÍCULUM Y LA PERCEPCIÓN DOCENTE.....	200
PERSPECTIVA DE CORRESPONDENCIA VERSUS PERSPECTIVA DE COVARIACIÓN PARA ENTENDER RELACIONES	205

PRINCIPIOS PARA PROGRAMAS EFECTIVOS DE DESARROLLO PROFESIONAL PARA PROFESORES DE MATEMÁTICAS	211
PROBLEMATIZANDO LAS NIVELACIONES MATEMATICAS EN LA EDUCACION SUPERIOR Y SUS DISCURSOS DEL DEFICIT ESTUDIANTIL	217
PROPUESTA Y PERCEPCIÓN ESTUDIANTIL DE UN MODELO DE EVALUACIÓN INTEGRADO DE DESEMPEÑO PARA UN CURSO DE ÁLGEBRA EN CARRERAS DE LA INGENIERÍA	223
RELACIÓN FAMILIA-ESCUELA: ACOMPAÑANDO EL APRENDIZAJE INTEGRAL.....	229
UN ACERCAMIENTO AL SIGNIFICADO HOLÍSTICO DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DESDE UN ESTUDIO HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO	233
COMUNICACIONES BREVES	239
¿CÓMO CONSTRUYEN GRÁFICOS ESTADÍSTICOS ESTUDIANTES DE 8 A 9 AÑOS DE EDAD?: ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA EN TIEMPOS DE CONFINAMIENTO.....	239
ACTIVIDADES SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA EN EDUCACIÓN INFANTIL: ¿QUÉ PROPONE EL CURRÍCULO Y QUÉ ABORDA EL LIBRO DE TEXTO?	245
ASPECTOS QUE CONSIDERAN DUPLAS DE DOCENTES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y DIFERENCIAL PARA EL DISEÑO DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE ÁREA Y PERÍMETRO DEL CÍRCULO, EN UN CURSO DE 7° BÁSICO CON ESTUDIANTES DIAGNOSTICADOS CON TRASTORNO POR DÉFICIT DE ATENCIÓN E HIPERACTIVIDAD.	251
CARACTERIZACIÓN DE LAS ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN LIBROS DE TEXTO EN FUNCIÓN DE SU CONSTRUCCIÓN HISTÓRICA.....	257
CONCEPCIONES DE PROFESORES SOBRE LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA TEMPRANA	263
CONCEPTUALIZACIÓN DEL OBJETO DE TRANSFORMACIÓN LINEAL A PARTIR DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN EL MODELO DE VAN HIELE	267
CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE MCD DE PROFESORES EN EL CONTEXTO DE UN ESTUDIO DE CLASES.....	272
DEL INFINITO POTENCIAL AL ACTUAL: UN RECORRIDO HISTÓRICO	278
DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: ANÁLISIS DE SUS SIGNIFICADOS EN EL CURRÍCULO CHILENO DE CUARTO MEDIO.....	281
EL PENSAMIENTO METAFÓRICO PRESENTE EN LA MODELIZACIÓN	287
EL PERÍMETRO DESDE LA TEORÍA DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO; EL TANGRAM COMO RECURSO EDUCATIVO.	293
EPISTEMOLOGÍA CONTEMPORÁNEA DE LAS NOCIONES DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA Y RECURSIVIDAD, EN LA INTERFAZ ENTRE MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA.....	299
ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS: UN ESTUDIO EXPLORATORIO CON ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE INGENIERÍA.....	304
ESTRATEGIA PEDAGÓGICA APLICADA EN EL AULA EXTENDIDA DE ESTADÍSTICA PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN COLOMBIA.....	310

ESTRUCTURAS Y MECANISMOS MENTALES DE LOS ESTUDIANTES EN LOS CONCEPTOS DE PERMUTACIÓN Y COMBINACIÓN ANALIZADAS DESDE LA TEORÍA APOE	315
HACIA UNA DESCOMPOSICIÓN GÉNÉTICA DE LA REGLA DE DERIVACIÓN DEL PRODUCTO	320
IMPORTANCIA DE LA MODELIZACIÓN EN LAS PROPUESTAS DIDÁCTICAS DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA.....	325
LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LAS BASES CURRICULARES DE EDUCACIÓN INFANTIL CHILENAS.....	330
LOS ENTORNOS DE APRENDIZAJE VIRTUAL Y LA FORMACIÓN INICIAL DE LOS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA.	336
OPORTUNIDADES QUE OFRECEN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN INFANTIL PARA INICIAR LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA Y PROBABILÍSTICA	343
REPRESENTACIONES DE GÉNERO EN TEXTOS ESCOLARES PÚBLICOS DE MATEMÁTICA DE 1° A 4° BÁSICO.....	349
REPRESENTACIONES UTILIZADAS EN LA DISCUSIÓN PLENARIA DE SIMULACIONES DE CLASE EN EL MARCO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: APORTES DESDE LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA.....	355
TRABAJO MATEMÁTICO EN TORNO A LA INTERSECCIÓN DE LA GRÁFICA DE FUNCIONES, EL CASO DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS.....	362
UNA APROXIMACIÓN A LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DEL CÁLCULO EN PROFESORES CHILENOS	368
UNA MIRADA AL SENTIDO NUMÉRICO DE PROFESORES CHILENOS.....	374
UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA DESARROLLAR COMPONENTES DE LA INFERENCIA ESTADÍSTICA INFORMAL.....	380
EXPERIENCIAS DE AULA.....	387
ALFABETIZACIÓN DIGITAL EN ADULTOS MAYORES. UNA EXPERIENCIA EN MODALIDAD VIRTUAL EN EL CONTEXTO DEL APRENDIZAJE SERVICIO	387
APRENDIZAJE DEL CÁLCULO: UNA PROPUESTA DE INNOVACIÓN INCORPORANDO TECNOLOGÍA	394
ENSEÑANDO MATEMÁTICA (Y OTRAS CLASES) VIRTUALMENTE EN CONTEXTOS RURALES: UNA EXPERIENCIA DESDE HONDURAS	400
ESTUDIO DE CLASES EN CONTEXTOS VIRTUALES: REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS HASTA 100	405
UN ESTUDIO DE CLASES CONCERNIENTE AL CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UN ELIPSOIDE DESDE UN ANÁLISIS INFINITESIMAL	411
UNA PROPUESTA INTERDISCIPLINARIA ENTRE MATEMÁTICA Y MÚSICA: EL METRÓNOMO Y SU GÉNESIS INSTRUMENTAL	417
UNA PROPUESTA PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS: UN CASO DE ESTUDIO DE CLASES EN EL CONTEXTO DEL JUEGO DE TETRIS.....	423

CONFERENCIAS PLENARIAS

REIMAGINAR EL AULA DE MATEMÁTICAS: LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES COMO PRAXIS EMANCIPADORA

Luis Radford
Laurentian University, Canadá

Mi propósito en este artículo es reimaginar el aula de matemáticas. Empiezo reflexionando acerca de las escuelas reformadas, aquellas que, en occidente, asumieron la tarea de educar las nuevas generaciones para enfrentar los problemas de la industrialización hace 100 años, y que hoy, están orientadas a la producción de sujetos portadores de competencias para avanzar en el proyecto neoliberal de las sociedades atadas a la economía de mercado. En la primera parte, abordo algunos elementos que me ayudan a explicar lo que pudo haber salido mal en el proyecto de la escuela reformada occidental, en particular, busco comprender, a través de un análisis histórico-crítico, qué la ha llevado a ser un sitio de producción de sujetos alienados. La pregunta es: ¿Qué es eso que da a la escuela moderna o posmoderna su configuración actual y la mantiene allí, atada? En la segunda parte, comparto algunas ideas que hemos explorado con profesores y estudiantes de nuestras escuelas en un esfuerzo por salir de las garras de la alienación y que nos han llevado a repensar las matemáticas escolares como praxis emancipadora.

Escuela reformada, alienación, emancipación, Teoría de la Objetivación, ética.

INTRODUCCIÓN¹

El propósito de este artículo es invitar a reimaginar el aula de matemáticas. El prefijo “re” significa que ya hemos imaginado dicha aula, y sugiere, al mismo tiempo, que hay que hacerlo de nuevo, porque parece que algo nos salió mal. El aula de matemáticas no parece ser lo que queríamos.

El subtítulo del artículo sugiere un rumbo a seguir: matemáticas escolares y praxis emancipadora. La primera parte del subtítulo circunscribe el alcance o el límite de mi argumento: se trata de las *matemáticas escolares* que, aunque no son el título principal, van a tener que ser reimaginadas también. La segunda parte del subtítulo menciona algo diferente: emancipación.

Emancipación es un concepto cuyo significado no es transparente; es un término filosófico con una historia compleja. El Diccionario de la Real Academia Española lo define como la acción de “Liberarse de cualquier clase de subordinación o dependencia” (RAE, s. f. definición 2). Ahora bien, en mi invitación a reimaginar el aula de matemáticas, ¿de quién o de qué habría que emancipar esa aula?

¹ Este texto tiene origen en una conferencia plenaria dictada en las XXIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática de Chile que tuvo lugar en abril de 2021. En la redacción, he dejado el estilo oral de la presentación. Una versión más amplia de este texto aparecerá en la revista RECHIEM.

¿Estoy acaso diciendo que hay alguien o algo que la sujeta, la oprime, la fuerza, la maltrata y que, al hacerlo, no la deja ser lo que *debería ser*?

Aunque no se menciona de forma clara en la definición de *emancipación*, si miramos con detenimiento, podemos darnos cuenta de que la idea de emancipación se funda en *relaciones* entre unos y otros; se basa en relaciones de poder por medio de las cuales se ejerce eso que oprime y mantiene en su lugar a aquello que es oprimido.

¿Qué es eso que oprime? No es siempre lo mismo. Por ejemplo, tuve la oportunidad de participar en la charla dirigida por Aldo Parra hace algunas semanas en el marco de un ciclo de conferencias virtuales organizada por la *Asociación Aprender en Red*. Durante esta, Aldo nos habló de una pequeña comunidad indígena del Cauca en Colombia (Parra, 2021); no habló de emancipación directamente, pero eso no quiere decir que el problema de la emancipación no estuviera allí. En esta comunidad indígena caucana, la categoría de “lo que oprime” está configurada por una serie de dispositivos políticos, económicos y militares que la comunidad en cuestión debe enfrentar para mantener su espacio de acción y realización. Aquello que oprime allí es probablemente diferente de eso que ejerce una presión en las escuelas en las cuales yo realizo mi trabajo educativo.

En mis escuelas los estudiantes vienen de familias de clase media de una minoría lingüística en el norte de Ontario, en Canadá; son escuelas francófonas. Estas hacen parte de lo que se conoce como *escuelas reformadas* (Darling y Nordenbo, 2002; Labaree, 2005; Rohrs y Lenhart, 1995), es decir, aquellas que, en occidente, asumieron la tarea de educar las nuevas generaciones para enfrentar los problemas de la industrialización hace 100 años, y que hoy, están orientadas a la producción de sujetos portadores de competencias para avanzar en el proyecto neoliberal de las sociedades atadas a la economía de mercado.

No obstante, parece que el resultado no nos ha quedado bien. De aquí parte mi invitación a *reimaginar* la escuela en general, y el aula de matemáticas en particular. En este intento necesitamos hacer primero un esfuerzo para repensar críticamente el aula contemporánea de matemáticas, especialmente en sus supuestos teóricos e ideológicos. De esta excavación crítica podemos esperar que emerja una comprensión de qué es lo que sujeta y mantiene al aula de matemáticas en su posición actual.

Claro, lo que sujeta a mis escuelas no es necesariamente lo mismo que sujeta a la escuela de la que nos habla Aldo o a las que figuran en las investigaciones de cada uno de ustedes, aunque probablemente compartimos los satélites de vigilancia y las mismas embestidas de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), y la nueva forma de imperialismo que despliega sin cesar. Nuestros contextos son diferentes, pero dado que la emancipación, en su esquema general, es un problema de poder, de relación con un otro, creo que podemos aprender mutuamente de nuestras luchas e intentos emancipadores.

Mi presentación tiene dos partes: en la primera, abordo algunos elementos que me ayudan a explicar lo que pudo haber salido mal en el proyecto de la escuela reformada occidental, en particular, busco comprender qué la ha llevado a ser un sitio de producción de sujetos alienados. La pregunta es: ¿Qué es eso que da a la escuela moderna o posmoderna su configuración actual y la mantiene allí, atada? En la segunda parte, comparto algunas ideas que hemos explorado con

profesores y estudiantes de nuestras escuelas en un esfuerzo por pensar las matemáticas escolares como praxis emancipadora.

Empecemos.

EL AULA DE MATEMÁTICAS EN LA HISTORIA RECIENTE

¿Qué veríamos si miramos el aula de matemáticas occidental en los últimos 50 años? Creo que no es una exageración decir que veríamos un aula halada por dos fuerzas opuestas y cada una va en la dirección de un paradigma educativo diferente: uno centrado en el *profesor* y el *saber*, y el otro centrado en el *estudiante*.

El primer paradigma es el de la *transmisión del saber*. Este pone al profesor en un lugar privilegiado y plantea el aprendizaje como la adquisición relativamente pasiva y obediente de contenidos matemáticos por el estudiante. El segundo paradigma es el *constructivista*. Este pone al estudiante en un lugar privilegiado y plantea el aprendizaje como resultado de la actividad del estudiante.

Durante una larga historia de oposiciones, estos dos paradigmas han terminado fusionados en un tercer paradigma que algunos llaman “socioconstructivista” y otros “de indagaciones por el estudiante” (*inquiry based paradigm*). Este paradigma fusión nos ofrece una nueva idea del aula de matemáticas en la que el estudiante y el profesor figuran en primera plana. En las aulas inspiradas por este paradigma, se trata de fomentar la *participación activa* del estudiante y su autonomía, por un lado, y, por el otro, se trata de asegurar un espacio al profesor para que pueda *guiar* al estudiante y *facilitar* su aprendizaje². Este paradigma da lugar a una variedad de modelos de enseñanza que podrían ordenarse según la *intensidad* de participación del profesor, desde una participación máxima hasta mínima. Voy a dar tres ejemplos.

El primero, que llamo de “guía pedagógica máxima”, funciona de forma muy similar al de la enseñanza tradicional. El profesor controla la producción y circulación de ideas en el aula (Figura 1, cuadro izquierdo), y solo le permite al estudiante una participación mínima e insignificante, por ejemplo, llamándolo al pizarrón, haciéndole preguntas muy cortas, etc. (Figura 1, cuadro del medio). Es una enseñanza tradicional que añade elementos constructivistas de una manera cosmética. Maritza Silva, Alonso Quiroz y yo hemos analizado este tipo de enseñanza en una investigación acerca de prácticas pedagógicas de profesores chilenos destacados.

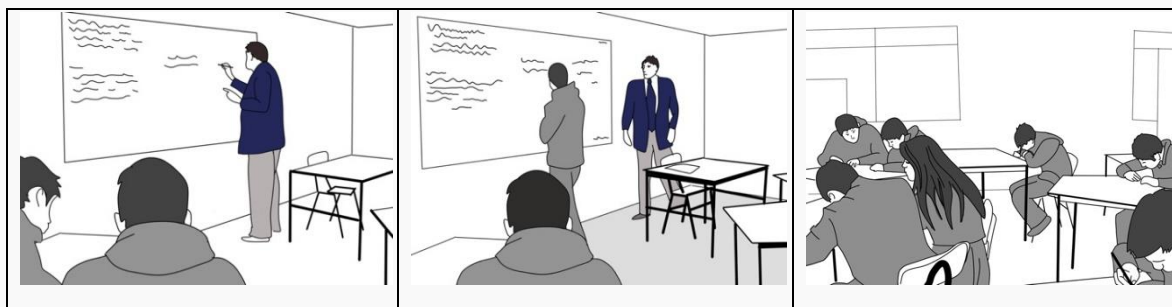


Figura 1: Ejemplo de un aula que opera bajo la “guía pedagógica máxima”.

² Una definición ofrecida por el sitio web Thirteen.org es: el paradigma por indagación, en oposición al método tradicional de enseñanza, “está más centrado en el estudiante, con el profesor como facilitador del aprendizaje”. Traducción propia.

Fuente: elaboración propia.

En el segundo modelo, llamado en Ontario “la enseñanza por modelaje”, el profesor “modela” la solución del problema para los estudiantes; es decir, empieza *mostrando* a los estudiantes cómo hacer las cosas (por ejemplo, cómo resolver un problema nuevo). Luego, el profesor desaparece progresivamente y de esta manera deja poco a poco la responsabilidad al estudiante (Gauthier, Bissonnette y Richard, 2013).

Al otro extremo de esta gama de modelos de enseñanza encontramos el de la “guía pedagógica mínima” que proponen Godino y Burgos (2020). Estos autores argumentan que, debido a la complejidad del conocimiento matemático, la autonomía del alumno no puede ser el punto de partida del aprendizaje. Se puede partir del paradigma de la transmisión del conocimiento, con una “guía pedagógica mínima” (p. 96), y luego pasar al paradigma constructivista.

Cada modelo de enseñanza de este paradigma sintético socioconstructivista —o de la indagación— conduce a un aula de matemáticas con dinámicas un poco diferentes. Las diferencias se explican según la manera como se distribuyen los grados de importancia entre los quehaceres del estudiante y los del profesor. Estas aulas se inspiran en varios *supuestos teóricos* que parecen casi indiscutibles; operan, en silencio, diríamos casi a escondidas. Entre estos supuestos, están:

a) Primero, el aprendizaje es visto como un atributo del estudiante.

Esto quiere decir que el aprendizaje es un fenómeno que se predica o se dice de un sujeto, de un individuo: Pedro aprendió o no tal cosa. No se dice, por ejemplo, que una clase de 30 alumnos aprendió esto o lo otro. Suena raro ¿no? Suena *impreciso*. Y si esto se dice, rápidamente van a preguntar por Pedro: ¿Aprendió? ¿Cuánto aprendió? Hay un discurso socioeducativo que asigna una *realidad* a la idea del aprendizaje como fenómeno que acontece (o no) a alguien, al *estudiante*.

b) Segundo, un estudiante aprende cuando puede responder a las preguntas que se le hacen de manera *autónoma*.

Esto quiere decir que la autonomía se toma como criterio de aprendizaje. Este es el caso de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2002; para una discusión, ver Radford, 2018). Es por eso que, en los dos últimos ejemplos de modelos de enseñanza que he mencionado, el profesor está allí, pero como si no debiera, algo así como una nota falsa en una pieza musical.

c) Tercero, se asume que el estudiante piensa “naturalmente” de ciertas maneras.

En este contexto, el trabajo del profesor es *guiar* al estudiante. Por ejemplo, en el método de la guía pedagógica mínima, se trata de dar al estudiante esa guía mínima que le hace falta para llegar a los conceptos matemáticos; hay que darle un pequeño empujón, algo así como ese soplo que se le daría a un barquito de papel para que llegue a su destino.

d) Cuarto, se concibe al estudiante como una *entidad psicológica*.

El estudiante es visto como “sujeto cognitivo” (Valero, 2004, p. 39), como si llevara en la cabeza una cajita con ideas y representaciones del mundo. En su tesis doctoral, Maritza Silva señala un pasaje en el que un profesor le dice al estudiante: “eso es lo que tienes que meterte en la cabecita [...] ¡denominador distinto de cero!, ¡distinto de cero!, ¡distinto de cero! y te lo grabáis ¡distinto de

cero!” (2021, p. 119). La metáfora detrás es que hay ideítas que se mueven dentro de la cabeza del estudiante y de allí salen.

Creo que estos supuestos nos dan una idea del aula contemporánea. Por ejemplo, podemos ver que autorizan al profesor y a los investigadores a ver al estudiante y a su aprendizaje de ciertas maneras. Así, del lado del profesor, resulta “natural” hacer evaluaciones individuales para dar cuenta del aprendizaje del estudiante. Del lado del investigador, resulta “natural” que este de cuestionarios con problemas matemáticos a los estudiantes para que nos revelen lo que piensan “en la cabecita”.

Sin embargo, tenemos que ir un poco más lejos en nuestra discusión de las aulas contemporáneas de matemáticas. Ustedes podrían objetar que mi análisis no ha tomado en cuenta algo muy importante: la *interacción social*, que se ha convertido en un rasgo predominante de la práctica y del discurso científico en educación (Radford, 2011). Es cierto; incluso en el aula de la guía pedagógica máxima, los estudiantes interactúan entre ellos. Es esto lo que muestra el esbozo a la derecha de la Figura 1. El esbozo nos permite ver que hay estudiantes que están solos, pero otros están en parejas, sugiriendo que hay algún intento de fomentar la interacción social. La pregunta entonces es: ¿Cuál es el *sentido* de lo social en la dinámica del aula en las clases “socioconstructivistas”? ¿Cómo conciben lo social los socioconstructivistas? Para responder a estas preguntas tenemos que entender el paso del átomo a la mónada.

DEL ÁTOMO A LA MÓNADA

Si desde hace algún tiempo en el discurso con el que se define la educación se habla cada vez más de *los* estudiantes (en plural) y no del estudiante (en singular), es que hemos pasado del *átomo* a la *mónada*. Esto quiere decir que los estudiantes no son más que un plural, es decir, una *pluralidad* de entidades separadas unas de otras. Cada uno es una mónada-estudiante que piensa con sus *propias* capacidades cognitivas.

En el nuevo caso, el de la mónada, lo que vemos en el aula no es *una* actividad, sino tantas actividades como estudiantes, cada estudiante realiza su propia actividad. Si hay n estudiantes en la clase, cada estudiante e_i realiza su propia actividad a_i . El aula de matemáticas es la suma $\sum e_i$ de sus mónadas y lo que ocurre en una lección de matemáticas es una colección $\{a_i\}$ de actividades individuales.

Evidentemente, el discurso educativo puede llegar a tomar en cuenta la interacción entre estudiantes, la comunicación e incluso puede hacer referencia a la lección que siguieron los estudiantes *con* el profesor. Sin embargo, todos estos elementos sociales son vistos de forma instrumental: son considerados *estímulos externos* que ofrece el entorno a la actividad cognitiva del estudiante (se pueden ver detalles y ejemplos en Radford, 2020a).

¿Y CUÁL ES EL PROBLEMA?

En este tipo de aulas que reducen la interacción social a un puro estímulo, la concepción de la interacción es muy pobre, por no decir equivocada. El trabajo de Vygotsky (1987) sobre la “zona de desarrollo próximo” muestra que la interacción con otros, y en particular con el profesor, juega un papel crucial en el aprendizaje.

Esto que estoy diciendo es válido también para los elementos culturales e históricos. En efecto, el problema es que los elementos sociales, culturales e históricos no pueden ser considerados *instrumentalmente* en el aprendizaje de los estudiantes. Esos elementos *no* son estímulos externos que ofrece el entorno a la actividad cognitiva del estudiante, al contrario, son parte de las maneras en que llegamos a pensar el mundo (Campbell, 2002; Lerman, 1996; Otte, 1998; Roth, 2011 y Valero, 2004, 2010).

Klaus Holzkamp (2013), por ejemplo, hace ver que las conceptualizaciones de un individuo, sin ser determinadas por el contexto y las circunstancias, no son arbitrarias; están sujetas a procesos y conceptualizaciones socioculturales que preceden la acción del individuo.

Cabe recordar aquí que el lenguaje opera, entre otras cosas, como portador de una conceptualización cultural. Esto nos recuerda la experiencia que vivió una aspirante a profesora, Krista, que fue a hacer su práctica docente en Uganda. En medio de una lección de geometría, esta estudiante inglesa se encontró con que el lenguaje de la comunidad, el runyankore, no tiene “palabras para triángulo, rectángulo o incluso cuadrado. Hay una palabra, *oriziga*, que significa circular o curvo, pero no se refiere específicamente a un círculo” (Bradford y Brown, 2005, p. 16).

Es muy fácil olvidar que el mundo en que vivimos está repleto de conceptualizaciones histórico-culturales que nos abarcan, y que se muestran en la materialidad del mundo, en el lenguaje que usamos y en nuestras acciones. Es muy fácil olvidar también que las maneras de pensar el mundo no son naturales, sino *culturales*. Cuando olvidamos esto, terminamos creyendo que la actividad cognitiva es puramente nuestra, que se origina *en nosotros*, que sale de nuestra cabeza.

Diríamos que, en realidad, la cosa va al revés. Tenemos que darle un giro de 180° a todo esto para entender que la cognición y las ideas que cada uno forma vienen de afuera, y para darnos cuenta de que cada uno de nosotros es lo que el filósofo holandés Benedicto de Spinoza (1989) llamaba un “modo” de la “substancia,” es decir —en lenguaje del siglo XXI— que cada uno es una realidad singular, individual y limitada de la sociedad y que es en esta que encontramos los elementos por medio de los cuales pensamos subjetivamente el mundo.

¿Y cómo es que semejante cosa se nos pasó por alto?

La pregunta es: ¿Y cómo es que semejante cosa haya pasado desapercibida y que hayamos terminado pensando que, para comprender la cognición, el aprendizaje y la dinámica del aula, había que centrar esta dinámica en el estudiante, y añadir al profesor como la guía que podría hacer falta al estudiante en los momentos de desmayo o desfallecimiento?

La respuesta es demasiado compleja para ser tratada aquí en detalle. Voy a limitarme a mencionar que tiene que ver con la concepción del humano que surgió en la Alta Edad Media y el renacimiento occidental, cuando el incipiente capitalismo artesanal y las nuevas formas de producción económica llevaron a la emergencia de una nueva conciencia social que culmina en lo que Colin Morris (1972) ha llamado “el descubrimiento del individuo”. Desde entonces, el occidente se embarcó en una ruta nueva en la que, a diferencia de otros periodos históricos, el individuo se ubicó poco a poco en el centro del universo.

Se produjo, entonces, el proceso de personalización, según Gilles Lipovetsky; es decir, el proceso que “ha promovido y encarnado masivamente un valor fundamental, el de la realización personal”

(1989). La modernidad produjo procedimientos de subjetivación de los que emergió, gloriosa, una visión nueva del humano: el individuo como fundamento. Con esto quiero decir que el individuo se convirtió en su propio fundamento y en el fundamento del mundo. Como dice el filósofo francés Etienne Balibar,

“es solamente a posteriori, cuando ya se han constituido como individuos [...] que los individuos [de la modernidad] pueden relacionarse entre sí de diferentes maneras. Pero estas relaciones son por definición accidentales, no definen su esencia” (2014, p. 213).

En el ámbito de la política, el neoliberalismo encapsula esta idea del individuo como fundamento al considerarlo cimiento social. La filosofía acierta esta misma idea al reclamar que el fundamento del ser está en su libertad de acción (como lo hace la filosofía Kantiana). En el ámbito de la psicología, esta idea se afirma en la concepción del sujeto que se forma desde adentro, desde su propia interioridad. Así, por ejemplo, la mente es considerada un atributo del individuo. En el ámbito de la educación, esta idea del humano como fundamento de sí mismo repercute en el concepto de aprendizaje que se concibe como resultado de las ideas que el estudiante se hace él mismo a partir de sus propias acciones y representaciones. En la educación matemática, como nos dice el constructivismo, el estudiante construye su propio saber.

Política	El cimiento social es el individuo
Filosofía	El fundamento del ser está en su libertad de acción
Psicología	La mente es un atributo del individuo
Educación	El aprendizaje resulta de las ideas que se va haciendo el estudiante a partir de sus propias acciones.
Educación Matemática	El estudiante construye su propia saber.

Figura 2: El individuo como fundamento.

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 2 se muestra que cada una de estas esferas *societales* solo traduce, a su manera y en su propio lenguaje, la forma ideal más general posible del humano como lo conciben la modernidad y la posmodernidad. La concepción que despoja al humano de todas sus determinaciones sociales, históricas y culturales, y lo convierte así en un yo lánguido, vaciado, que solo se lleva a sí mismo en su núcleo más íntimo, lo que los filósofos llaman su ipseidad, es decir, su mismidad. Pedro aprendió algo en el aula de matemáticas y lo que aprendió tiene que ver con su entorno histórico-cultural solo de manera circunstancial. Lo que Pedro aprendió es *suyo*, es producto de *su* esfuerzo personal y como tal *le pertenece*. ¡Sacó 80% en geometría! El número da realidad objetiva al aprendizaje de Pedro; lo afirma en su soledad ontológica.

Llegamos a un punto en el que podemos dar respuesta a la pregunta que planteamos al inicio, la pregunta de eso que da a la escuela moderna y posmoderna occidental su configuración actual y

que la mantiene en donde está, oprimida. La respuesta se encuentra en esta figura histórica que podemos llamar la *figura de la ontología moderna*, que toma al individuo como fundamento.

Ahora, creo, podemos entender lo que configura por detrás, a escondidas y en silencio, la dinámica de tantas aulas de matemáticas. Ahora podemos entender cómo y por qué la clase de matemáticas se ha convertido en un sitio de alienación, y esto es una de las cosas que salió mal en el proyecto de la escuela reformada.

El alumno y el profesor permanecen ajenos entre sí. Su relación es casi comercial; uno tratando de maximizar sus propios aprendizajes y el otro ayudándolo o guiándolo allí donde se pueda requerir. Ambos viven la enseñanza y el aprendizaje como si ese vivir fuese ajeno al amplio contexto histórico y cultural, como si entre profesores y estudiantes no pudiese haber una conexión *real humana* posible.

LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES COMO PRAXIS EMANCIPADORA

¿Cómo podríamos plantear la dinámica del aula de matemáticas para recuperar la dimensión histórico-cultural y concebir el aula como un espacio portador de relaciones sociales y productor de aprendizajes no alienantes?

La investigación sociocultural ha mostrado la tremenda complejidad que subyace en el aula de matemáticas y el aprendizaje, y ha puesto atención (entre otras cosas) en:

- 1) el lenguaje;
- 2) las estructuras sociales y simbólicas imbricadas en la escuela;
- 3) la cultura material (por ejemplo, los artefactos), y
- 4) las cuestiones de poder y género.

Una parte importante de la investigación sociocultural ha intentado ver el aprendizaje como la participación progresiva del niño en la práctica social o su ingreso en las comunidades de práctica (Lave y Wenger, 1991). Nuestro camino en la teoría de la objetivación (TO) (Radford, 2021a) retoma los cuatro puntos anteriores, pero tematiza el aula y el aprendizaje de manera un poco diferente. La TO no es una teoría constructivista ni conductista ni participacionista; con la discusión acerca de esta tematización un poco diferente quisiera terminar esta conferencia.

Conviene, primero, disipar un malentendido potencial: cuando digo que no se trata de concentrar la atención en el estudiante, no quiero decir que no hay que ver más al estudiante. Tampoco quiero decir que lo que tenemos que hacer ahora es voltear la mirada hacia el profesor o el saber. Lo que quiero decir es que hay que ver al estudiante y al profesor, pero no con los lentes de la psicología cognitiva individualista que los asume como sujetos *ya dados*, ya constituidos; convendría ver al estudiante y al profesor como sujetos históricos y culturales que se constituyen de forma cotidiana y conjunta en el aula, en el transcurso de la actividad de enseñanza y aprendizaje.

En efecto, las aulas de matemáticas no producen solamente saberes, sino también subjetividades (Radford, 2021a). Tomando en cuenta esta idea, la propuesta que ofrece la TO considera al aula de matemáticas como un aula que gira en torno a dos ejes, el del *saber* y el del *ser*. Y es a partir de esos dos ejes que se sugiere conceptualizar el aprendizaje. En otras palabras, el problema del aula de

matemáticas ya no es solo acerca de los saberes que el estudiante aprende, sino también acerca del *tipo de sujeto* que nuestras prácticas educativas tienden a fomentar.

Esto que acabo de decir suena terrible cuando lo escuchamos con los oídos constructivistas, puesto que estos operan bajo los preceptos de la libertad y autonomía del individuo. Los constructivistas consideran que el aula es un sitio de realización de los proyectos personales del estudiante. Dado que piensan que el estudiante se forma desde adentro, de acuerdo con su esencia y sus propias potencialidades, el aula no puede ser un sitio que forma al estudiante. Sin embargo, el punto es que no hay educación que no favorezca cierto tipo de saberes y que no promueva la producción de ciertas subjetividades (Popkewitz, 2004). Paulo Freire lo había señalado en su trabajo: “la educación nunca ha sido ni será neutra” (Freire, 2016, p. 38). La educación siempre será una cuestión política y económica, por lo cual la educación matemática, tanto en su práctica como en su investigación, no puede dejar de hacerse la pregunta sobre el tipo de individuo que se fomenta explícita o implícitamente.

En la teoría de la objetivación, entendemos el proyecto educativo como un proyecto emancipador de las prácticas corrientes que reducen al estudiante a un sujeto cognitivo (como en el paradigma constructivista) o a capital humano (como en el paradigma de la transmisión de saberes), y que, en un caso y en el otro, ofrecen una práctica matemática alienante (Radford, 2014, 2016). Concebimos el objetivo de la educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural dirigido a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente, y que reflexionan sobre nuevas posibilidades de acción y pensamiento.

En la TO, el aprendizaje se concibe como un *encuentro* con el saber cultural, cuya característica fundamental es de ser ético y crítico. A partir de estas dimensiones éticas y críticas, el estudiante tiene oportunidad de ubicarse y posicionarse en el plano social del aula de matemáticas y más allá, y de constituirse cotidianamente, con otros, como subjetividad. El punto fundamental es que es en el *tipo de actividad*, que los estudiantes y profesores producen en el aula, en el cual se encuentra la posibilidad de una práctica emancipadora (Radford, 2020b).

En nuestro caso, esta práctica emancipadora está orientada por las siguientes ideas:

- a) En primer lugar, se rompe con la separación tradicional entre profesores y estudiantes que pone al estudiante en un lugar de inferioridad y obediencia respecto a la producción y circulación del saber en el aula. Rompe también con la separación constructivista en la que el profesor es visto como un guía que ayuda a los estudiantes a llegar tan lejos como puedan con sus propias cogitaciones.
- b) En la actividad emancipadora no hay $\overline{n+1}$ actividades llevadas a cabo simultáneamente en el aula, las $\overline{n}$ actividades $\overline{a_1, a_2, \dots, a_n}$ de las mónadas $\overline{e_1, e_2, \dots, e_n}$ más la actividad de enseñanza $\overline{a_p}$ del profesor, $\overline{p}$. Hay solamente *una* actividad: la actividad de enseñanza-aprendizaje en la cual estudiantes y profesores laboran hombro con hombro para producir y hacer circular el saber matemático en el aula.

- c) En segundo lugar, la actividad emancipadora permite un *encuentro* colectivo con el saber cultural. Aquí, el aprendizaje no es propiedad de un estudiante sino de un colectivo. Recordarán que mencioné que el primer supuesto que informa el aula contemporánea de matemáticas es que el aprendizaje es *propiedad del alumno*. Aquí damos un giro de 180°. Aprendemos juntos, en medio de tensiones, objeciones, etc., pero juntos, *colectivamente*.
- d) En tercer lugar, la actividad de enseñanza-aprendizaje ofrece condiciones para que ese encuentro colectivo incluya voces y perspectivas diferentes en las que la diferencia es valorada. Pero no se trata de la inclusividad condescendiente y superficial que propone el neoliberalismo. Se trata de un encuentro inclusivo en el que los estudiantes *se involucran e interactúan con las ideas del otro y asumen la responsabilidad de entender esa voz diferente y tomar posición crítica ante ella*.
- e) Cuarto, la meta del encuentro con el saber mediante procesos colectivos no es hacer que los estudiantes acepten las ideas y significados de las matemáticas dominantes (aquellas ya inscritas en el *currículum*). Es precisamente encontrarlas, examinarlas críticamente, apreciarlas en su fuerza y dimensión estética y teórica, y de verlas como expresión de una de las *posibles* racionalidades humanas, sin que, por tanto, tengan que aceptarlas. Me parece que una práctica emancipadora debe reconocer, a la vez, las racionalidades y lo que ofrecen, pero también lo que limitan.
- f) Quinto, una práctica emancipadora de las matemáticas escolares se realiza a través de la práctica de una ética que valoriza la responsabilidad, el compromiso con el trabajo colectivo y el cuidado del otro (Radford, 2021b).

A título de ejemplo, voy a referirme a una actividad de enseñanza-aprendizaje en una clase de 5º grado (estudiantes de 10 y 11 años)³. Luego de haber resuelto colectivamente ecuaciones lineales con ayuda de material concreto constituido de cartas de cartón y sobres de papel que contenían un mismo número desconocido de cartas en su interior, los estudiantes fueron invitados a trabajar en pequeños grupos de 3 - 4 miembros y a efectuar la siguiente tarea:

Van a escribir un texto que explique los pasos que hay que seguir para resolver una ecuación como las que vimos anteriormente. El texto está dirigido a un estudiante de 5º grado de otra escuela, y no se sabe si este estudiante sabe resolver ecuaciones.

Su explicación debe ser clara, justa y convincente:

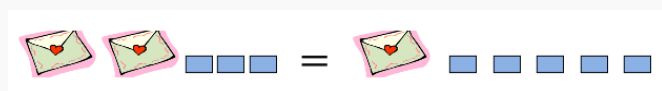
- a. Claro: ¿se entiende lo que se dice en el texto?
- b. Justo: ¿es la respuesta correcta?
- c. Convincente: ¿son realmente convincentes los argumentos del texto?

³ Una presentación más detallada de este ejemplo se encuentra en Radford (en preparación).

A diferencia de los problemas anteriores, que tenían que ver con la resolución de ecuaciones *particulares*, en esta tarea se trata de explicar, en términos generales, las etapas a seguir para resolver una ecuación *cualquiera*.

En el grupo de José, Elisa, Celeste y Carina, la discusión se dio alrededor de aquello que el texto debía incluir. Este grupo produjo el texto que se muestra en la Figura 3, cuadro izquierdo. Luego, alentados por la profesora, este grupo intercambió su texto con el texto de otro grupo (el grupo de Walton y David). El intercambio tenía el fin de aprender juntos de lo que los otros hicieron y de posicionarse críticamente frente al texto de los otros. El texto de Walton y David aparece en el cuadro del medio de la Figura 3. A la derecha vemos a los estudiantes del grupo de Elisa estudiar con atención el texto del grupo de Walton y David.

El grupo de Elisa se sorprende de ver que la hoja del otro grupo tiene pocas etapas. Celeste dice: “Solo tienen cuatro pasos; ¡creo que podría ser un poco más largo...!” Elisa dice: “No entiendo”. Este grupo observa que, en lugar de considerar una ecuación cualquiera, el texto de Walton y David considera una ecuación *particular*:



José, que se siente a gusto con un texto ilustrado con un ejemplo, añade: “¡Dieron un ejemplo! Si la persona [el estudiante de 5º grado] lee el ejemplo, comprenderá el sentido”.

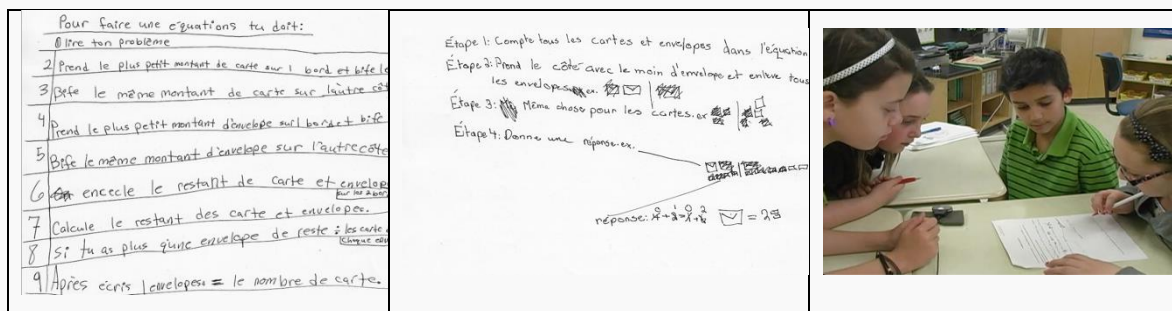


Figura 3: Izquierda: el texto de José, Elisa, Celeste y Carina. Medio: el texto de Walton y David. Derecha: el grupo de José estudiando el texto de Walton y David.

Fuente: archivo del autor.

Los estudiantes deciden escribir una crítica tomando turnos. Una de las críticas tiene que ver con la etapa 2 propuesta por Walton y David. Esta etapa dice: “Toma el lado [de la ecuación] con menos sobres y quita todos los sobres”. El primer grupo argumenta que debieron decir que ese mismo número de sobres debe también ser quitado del otro lado de la ecuación. La Figura 4 (cuadro izquierdo) muestra las anotaciones hechas al texto de Walton y David.



Figura 4: Izquierda el texto de Walton y David con anotaciones críticas. Centro y derecha, el encuentro de los dos grupos que se dio más tarde.

Fuente: archivo del autor.

Después de haber concluido su análisis crítico de manera independiente, los grupos se encontraron frente a frente (Figura 4, medio y derecha).

Walton (el cuarto de izquierda a derecha): quitamos 3 cartas aquí (*señala el pasaje en su hoja. Ver Figura 4, cuadro del medio*).

Carina (la primera de izquierda a derecha): tú debías haber dicho “y también 3 cartas del otro [lado]” (*Figura 4, cuadro de la derecha*).

Como vemos, el examen crítico del texto del otro grupo, así como la discusión entre los grupos, es la ocasión para aprender más *juntos*. El aprendizaje no es considerado propiedad de un estudiante, es producto de un proceso colectivo.

SÍNTESIS

La idea de esta presentación fue abrir una reflexión en torno al aula de matemáticas, un intento de reimaginarla. Vimos que dos paradigmas educativos importantes —uno centrado en el profesor y el saber, el otro en el estudiante— se han fusionado en un nuevo paradigma (el paradigma socioconstructivista o de indagaciones por el estudiante) que intenta poner al profesor y al estudiante al frente de la escena. Pero el “y” que une al profesor y al estudiante se convierte en un gran problema ya que, amparado en los preceptos de la libertad y la autonomía del estudiante no puede concebir al profesor más que como guía (Radford, 2014). Una solución es pensar el conectivo “y” *sincrónicamente*, como proponen el método de modelaje o el método de la “guía pedagógica mínima” de Godino y Burgos (2020), en el cual el foco de atención es primero el profesor y, luego, el estudiante.

En la primera parte de mi presentación sugerí algunos supuestos que asume el aula de matemáticas socioconstructivista. Luego emprendí una breve excavación histórico-crítica para intentar entender aquello que nos condujo a concebir el aula en esos términos. La breve excavación histórico-crítica que emprendí sugiere que la concepción del aula contemporánea (en su estructura, dinámica y naturaleza) no ha sido accidental o fortuita. Es parte de un proceso histórico de las sociedades occidentales de naturaleza económica y política; un proceso de refinamiento progresivo y agresivo de las relaciones que definen al individuo; un proceso no solo de individuación, sino de individualización que los filósofos, sociólogos y antropólogos llaman *individualismo* (Lipovetsky, 1989; Taylor, 2003).

Vimos que la respuesta a la pregunta que planteamos al inicio, sobre *eso* que configura la escuela moderna y posmoderna occidental en la actualidad y que la mantiene donde está, oprimida, se encuentra en esta figura histórica, que llamé la *figura de la ontología moderna*, que toma al individuo como fundamento de *sí* y de *su* mundo. Dentro de este contexto, no debería sorprendernos que la respuesta a la pregunta encuentre una realidad efectiva en la materialización cotidiana de esta figura ontológica que caracteriza las sociedades capitalistas contemporáneas.

En la última parte, mencioné algunas ideas que han surgido de mi investigación con profesores y estudiantes, y que iluminan nuestro quehacer pedagógico en la búsqueda de medios que puedan delinear una praxis escolar diferente, una praxis emancipadora. Esas ideas aparecen en acción en el ejemplo que di de una actividad de enseñanza-aprendizaje en una clase de 5º grado.

Evidentemente, es imposible abordar con la profundidad que se requiere el tema propuesto. Espero, sin embargo, que este corto artículo sugiera nuevas pistas de acción y reflexión.

Reconocimientos

Este artículo es resultado de un programa de investigación subvencionado por the Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

Referencias

- Balibar, É. (2014). *La philosophie de Marx*. París: La Découverte.
- Bradford, K. y Brown, T. (2005). Ceci n'est pas un "circle". *For the Learning of Mathematics*, 25(1), 16-19.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Campbell, S. (2002). Constructivism and the limits of reason: Revisiting the Kantian problematic. *Studies in Philosophy and Education*, 21, 421-445.
- Darling, J. y Nordenbo, S. (2002). Progressivism. En Blake, N., Smeyers, P., R. Smith, y P. Standish (Eds.), *The philosophy of education* (pp. 288-308). Oxford: Blackwell.
- Freire, P. (2016). *Pedagogia da solidariedade*. São Paulo, Brasil: Paz & Terra.
- Gauthier, C., Bissonnette, S., y Richard, M. (2013). *Enseignement explicite et la réussite des élèves. La gestion des apprentissages*. Québec, Canada: Éditions du Nouveau Pédagogique Inc.
- Godino, J. y Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y ciencias experimentales? Resolviendo el dilema entre transmisión e indagación. *Revista Paradigma*, 41, 80-106.
- Holzkamp, K. (2013). *Psychology from the standpoint of the subject*. Hampshire, UK: Palgrave Macmillan.
- Labaree, D. (2005). Progressivism, Schools and Schools of Education: An American Romance. *Paedagogica Historica*, 41(1-2), 275-288.
- Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133-150.
- Lipovetsky, G. (1989). *L'ère du vide. Essais sur l'individualisme contemporain*. París: Gallimard.

- Morris, C. (1972). *The discovery of the individual, 1050-1200*. New York, NY: Harper & Row.
- Otte, M. (1998). Limits of constructivism: Kant, Piaget and Peirce. *Science & Education*, 7, 425-450.
- Parra, A. (16 de abril 2021). *Una educación matemática propia es posible: ¿pregunta o afirmación?* [Conferencia] Seminario de la Asociación Aprender en Red, Venezuela. <https://www.youtube.com/watch?v=A7c0UiYZC9g>.
- Popkewitz, T. (2004). The alchemy of the mathematics curriculum: Inscriptions and the fabrication of the child. *American educational research journal*, 41(1), 3-34.
- Radford, L. (2011). Classroom interaction: Why is it good, really? *Educational Studies in Mathematics*, 76, 101-115.
- Radford, L. (2014). On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 1, pp. 1-20). Vancouver: PME.
- Radford, L. (2016). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, 79, 258-266.
- Radford, L. (2018). On theories in mathematics education and their conceptual differences. En B. Sirakov, P. de Souza y M. Viana (Eds.), *Proceedings of the international congress of mathematicians. Vol. 4* (pp. 4055-4074). Singapore: World Scientific Publishing Co.
- Radford, L. (2020a). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación A journey through the theory of objectification. En S. Takeco Gobara y L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 15-42). São Paulo, Brazil: Livraria da Física.
- Radford, L. (2020b). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, RECME, Número especial de la Teoría de la Objetivación*, 5(2), 15-31.
- Radford, L. (2021a). *The theory of objectification. A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Leiden & Boston: Brill/Sense.
- Radford, L. (2021b). La ética en la teoría de la objetivación. En L. Radford y M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: Entre educación y filosofía* (pp. 107-141). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Radford, L. (en preparación). La enseñanza-aprendizaje del álgebra en la teoría de la objetivación. En L. Radford y V. Moretti (Eds.), *Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais: Diálogos e Complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural*. São Paulo: Livraria da Física.
- Real Academia Española RAE. (s. f.). *Emancipar*. En Diccionario de la lengua española. Recuperado de <https://dle.rae.es/emancipar>
- Rohrs, H. y Lenhart, V. (1995). *Progressive Education Across the Continents: A Handbook*. Berne: Peter Lang.
- Roth, W.-M. (2011). *Passibility: At the limits of the constructivist metaphor*. New York: Springer.
- Silva, M. (2021). *Modelo pedagógico para los docentes de matemática que dictan clases en carreras de la salud en universidades privadas no selectivas de la Región Metropolitana*. [Tesis de doctorado inédita]. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

- Spinoza, B. (1989). *Ethics Including the Improvement of the Understanding*. (R. Elwes, Trad.). Buffalo: Prometheus.
- Taylor, C. (2003). *The ethics of authenticity*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Thirteen.org. (s. f). *Concept to classroom. How does it differ from the traditional approach?* https://www.thirteen.org/edonline/concept2class/inquiry/index_sub1.html
- Valero, P. (2004). Postmodernism as an attitude of critique to dominant mathematics education research. En M. Walshaw (Ed.), *Mathematics education within the postmodern* (pp. 35-54). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Valero, P. (2010). Mathematics education as a network of social practices. En *Proceedings of the 6th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6)* Lyon, Francia (28 de enero a 1 de febrero, 2009). <http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/plenary2-valero.pdf>
- Vygotsky, L. S. (1987). *The Collected Works of L. S. Vygotsky* (Vol. 1). R. W. Rieber and A. S. Carton (Eds.). New York: Plenum.



UNAS REFLEXIONES BÁSICAS SOBRE EL TEMA DE LAS RELACIONES ENTRE LA ÉTICA Y LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Bruno D'Amore

PhD in Mathematics education, University of Nitra (Eslovaquia)

PhD honoris causa in Social sciences and Education, University of Cyprus

Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis Matemática, Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Resumen. En este texto se examinan las relaciones más básicas entre la ética y la educación matemática.

Abstract. In this text we examine the most basic relationship between ethics and mathematical education.

Nota:

Este texto es una reducción de:

D'Amore, B. (2021). Prologo. L. Radford y M. S. Acuña (Eds.), *Ética: entre educación y filosofía*. Pp. IX-XVII. Bogotá: Universidad de los Andes - Centro de Ética Aplicada.

El término “ética” puede ser interpretado en referencia al conjunto de normas y de valores sobre los cuales se fundamentan las reglas del comportamiento humano en una sociedad de la cual uno es parte.

Pero, puede también ser considerado como un criterio de juicio relativo a los comportamientos tanto propios como de los otros.

Dado que la descripción precedente está sujeta a interpretaciones personales, son muchos quienes confunden la ética con la moral.

En mi opinión, sin embargo, la ética comprende una reflexión lógica y racional sobre los eventos sociales, que en la moral no se requieren.

Si se razona así, se comienza a intuir el por qué tiene sentido hablar de ética en un tema como la didáctica.

También son obvios los aspectos institucionales, normativos y sociales: el ser humano es parte de la institución (por ejemplo, la clase, la escuela) y la ética no tiene que ver con un determinado individuo en sí, sino que tiene que ver con la *relación* de éste con los otros individuos *dentro de la institución misma*.

Se trata de un tema relacional y social.

Al interno de la institución, la ética guía la acción del individuo en relación con los demás y condiciona los sentimientos; y tiene profundos aspectos sociales porque lleva a evitar el deseo de satisfacer sólo los intereses personales en favor de objetivos más amplios, los objetivos sociales, precisamente.

Hasta hacer del *ser individual* un *individuo social*: un juego de palabras iluminante.

El filósofo británico George Edward Moore, uno de los fundadores de la filosofía analítica, y por esto, muy cercano a la posición logicista de Bertrand Russell y cercano a toda la matemática, nos ha explicado que en ética se deben evitar definiciones, sólo se debe recurrir a nominalizaciones y a descripciones. Por ejemplo, no se debe intentar dar una/la definición de “mal”, sino dar ejemplos y descripciones de hechos y eventos; es decir situaciones en las cuales tenga sentido usar dicho sustantivo abstracto, *ética*.

En su trabajo principal *Principia Ethica* (publicado en 1903), Moore sugiere que la conducta individual debe basarse, precisamente por los principios éticos, en la persecución y en la búsqueda del bien.

Funda su propio análisis en la distinción entre moral y conocimiento, dos polos de atracción muy diferentes del ser humano. La ética no es un aspecto del conocimiento ya que está en relación con emociones y sentimientos.

Pero nada nos impide pensar y constatar que el conocimiento crea emociones y sentimientos.

Ahora bien, pensemos en todos los factores emocionales, sociales, interpersonales que encontramos en el trabajo didáctico.

Los conceptos de labor conjunta, de subjetivación, de objetivación, inducen a pensar que, más allá de lo que emerge en la labor común en aula entre docente y alumno, entre alumno y compañeros, en la sociedad concreta y no sólo en la sociedad ideal “clase”, los principios éticos, relacionados con los sentimientos personales implicados en los procesos de objetivación son relevantes, complejos, y, al mismo tiempo, espontáneos, y forman parte de aquello que a veces, ingenuamente, se llama *aprendizaje*.

Es así como adquiere sentido completo la idea que algunos estudiosos de didáctica de la matemática centren sus análisis en el tema de la ética, en particular para quienes se inspiran en aquellas teorías de la didáctica de la matemática que se aglutinan bajo el nombre de *teoría de la objetivación*, en la cual se promulgan ideas que no encuentran espacio en teorías precedentes relacionadas con las interacciones sociales que se desarrollan en aula y a la idea que aprender (la matemática) significa formar parte de una sociedad, desarrollar un conocimiento y una consciencia histórica de pertenencia.

Quiero aquí recordar que la teoría de la objetivación está ubicada entre las teorías llamadas socioculturales.

En dichas teorías se supone que el saber es generado por los individuos en el curso de prácticas sociales construidas histórica y culturalmente.

La producción del saber no depende por tanto de exigencias de adaptación, sino que está incorporada en formas culturales de pensamiento, relacionadas con una realidad simbólica, política, económica y material que ofrece las bases para interpretar, comprender y transformar el mundo de los individuos, los conceptos y las ideas que ellos se forman a propósito de dicha realidad.

El aprendizaje es la realización de un saber culturalmente objetivo que los estudiantes obtienen a través de un proceso social de objetivación mediado por signos, lenguajes, artefactos e interacciones sociales, cuando los estudiantes se empeñan en formas culturales de reflexiones y de acción (D'Amore, 2015, 2018).

Respecto a los paradigmas precedentes, las bases de las teorías sociales culturales se presentan como una ruptura en el verdadero sentido del significado; se trata, de hecho, de interpretar en forma decididamente nueva las ideas de conocimiento y saber.

Según las teorías socioculturales, el concepto de adaptación como forma de aprendizaje no es suficiente para entender en toda su profundidad la idea de producción de saberes, de su manifestación concreta en las prácticas sociales o de su apropiación como conocimiento (el aprendizaje).

Según estas teorías el saber y el conocimiento no son el resultado de estructuras de carácter epistémico que trascienden la cultura, sino que esas mismas estructuras son los resultados de una forma cultural, constituida de reflexiones y de acciones incorporadas en las mismas prácticas sociales, con la mediación del lenguaje, debida a la interacción social, gracias al uso de signos y a la creación de oportunos artefactos (Radford, 2006, 2011; D'Amore, & Radford, 2017).

La teoría de la objetivación, en particular, se basa en la idea considerada fundamental que el aprendizaje es, al mismo tiempo, conocer y devenir, es decir, no puede ser circunscrito al único ámbito del conocimiento, sino que debe afrontar el ámbito del ser y aquello específico de los sujetos.

El objetivo de la educación matemática es un esfuerzo dinámico, político, social, histórico que lleva a sujetos reflexivos y éticos hacia la creación dialéctica relativamente a discursos temáticos y hacia prácticas de carácter matemático que se constituyen histórica y culturalmente, discursos y prácticas que están en evolución continua.

A estas reflexiones me ha llevado la lectura atenta y crítica de un libro reciente:

Luis Radford y Maritza Silva Acuña (Compiladores) (2021), *Ética: entre educación y filosofía*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Este libro es el resultado de un diálogo entre educadores de la matemática y filósofos: trata del problema de la ética, considerándola como disciplina que se investiga a la luz de dos direcciones de interés general, la educación y la filosofía. Aunque la ética sigue relativamente eludiendo la atención de la investigación en la educación matemática, un examen de la literatura permite descubrir una serie de estudios que incluyen trabajos de Paul Ernest y Luis Radford.

Entre aquellos que más me han impresionado cabe mencionar algunos de Ernest (1988, 1991, 1994, 1998, 2011, 2018a, 2018b; 2019) y otros de Radford (2011, 2012, 2014, 2016a, b, c, d, 2017a, b).

Este libro adquiere así un interés especial, iniciando con el título, ya insinuado en mis notas precedentes: propone una “ética” vista como punto de pasaje entre educación y filosofía.

Cada una de las tres partes de las cuales se compone el libro plantea una problemática específica y no sólo culturalmente atractiva.

En la Parte 1, la ética se presenta como puente de conjunción y de debate entre la filosofía y la educación, con análisis muy precisos y significativos, incluso concretos acerca del papel del docente, incluyendo discusiones sobre la sensibilidad, el espacio ético del cuerpo y las funciones estéticas interpretadas como elementos descriptivos de una ética pedagógica.

En la Parte 2, la relación se invierte, y el debate se sitúa entre educación y filosofía; no son situaciones idénticas, sino simétricas, algunas incluso pueden ser concretas, como la presencia de la problemática de la ética en la matemática y en su enseñanza.

Como afirmaba arriba, el encuentro con el otro determina la dimensión ética pero siempre de forma específica y significativa en la educación matemática. Es esta especificidad, esta forma de ver e interpretar, esta forma de situarse lo que define y describe la relación específica de esta segunda parte del libro.

Desde este ángulo teórico, tan específico y significativo, como esperábamos y como lo anuncié en el caso específico de la teoría de la objetivación, se determina con precisión que se entiende en ésta con “ética”.

Un ejemplo significativo y específico se tiene en la teoría de la objetivación en la cual la educación matemática, como mencioné anteriormente, es vista como esfuerzo social volcado a la creación de sujetos que vienen a idear, imaginar y compartir formas de vida colectiva, como resultado del impulso que han recibido hacía formas potenciales de acción y de pensamiento.

Es evidente como el contenido matemático de las acciones que se cumplen en didáctica de la matemática no es nada más que *una* componente, no estamos hablando de *la* componente.

Acción no sólo sobre el *saber*, sino sobre el *ser*, tanto de llegar a concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje como una dimensión que involucra estos dos aspectos fundamentales del individuo, saber y ser.

Dado que aquel sobre el cual este proceso de aprendizaje está construido/hipotizado/realizado es un ser humano, los aspectos culturales deben ser parte de ese proceso; pero también deben serlo los aspectos relacionales, colectivos y sociales, éticos precisamente; y siendo este fenómeno tan absorbente en el plano humano, ninguno de los aspectos emocionales puede ser minimizado: aprendiendo, el individuo se transforma porque entra en contacto con hechos históricos culturales e históricamente situados en la sociedad.

Es por esto que se habla siempre, a este propósito, de “encuentro”, dado que se ponen en contacto sistemas de pensamiento, de evoluciones vitales, de acciones que determinan la sociedad con la cual el estudiante se relaciona. Este encuentro no es sólo heterólogo, sino que también es personal. Gracias a este proceso, quien aprende entra en contacto con sí mismo, en su singularidad y en su pertenencia a una sociedad que está, ética e históricamente, descubriendo y al mismo tiempo construyendo.

En otras ocasiones he analizado en profundidad estos aspectos, por ejemplo, estudiando el concepto de *labor* y el de relaciones entre la subjetivación y la objetivación; por tanto, no voy a profundizar y mi límite a un par de citas de textos en español (D’Amore, 2015, 2018).

Es decisivo entender cómo individuo y cultura son entidades no sólo puestas en mutua relación sino coexistentes, nunca inmóviles; son entidades sometidas a cambios continuos, con influencias que determinan sus relaciones y que conllevan a continuos cambios.

Alumnos y docentes están, por tanto, también ellos en continuo cambio relativo, activos en la transformación de sí mismos y en las recíprocas relaciones, representando proyectos de vida nunca firmemente determinados sino en continua evolución, con cambios de sensaciones y de experiencias recíprocas; en otras palabras, por lo tanto, sujetos éticos con influencias recíprocas.

En la Parte 3 se abre un esperado camino significativo, en un cierto sentido determinante: en esa parte se aborda la cuestión de cómo la ética se revela y se especifica en la educación. Se llega a argüir que la acción del docente de matemática se sitúa entre ética y estética. Se propone que la inclusión, en las clases de matemática, debe ser considerada un imperativo ético.

Este tema ha sido debatido en todo el mundo desde hace años sin llegar a ser resuelto; en ocasiones es interpretado de manera opuesta de lo que la ética sugiere, es más, de lo que la ética impone.

Así como la reflexión y la postura ética forman parte esencial de la formación docente, tal y como se ve en los profesionales de la salud, de los periodistas o de quienes crean fuentes o canales de información, resulta igualmente ser muy importante la reflexión específica de los aspectos éticos presentes en la actividad matemática.

Este libro regala al lector, al docente de matemática, al investigador en didáctica de la matemática reflexiones e indicaciones muchas veces omitidas, olvidadas o dadas por descontadas; estas reflexiones no son secundarias a aquellas que ocupan un mayor debate en el campo de análisis de investigación, sino que, por el contrario, de alguna manera los determinan.

Es por esto que saludo con entusiasmo y con favor este libro, texto que presenta ámbitos de estudio muchas veces marginalizados, presentándolos con un gran número de detalles, incluso concretos, con reflexiones profundas, densas y significativas que sorprenderán, lo sé, lo imagino, a los lectores.

Referentes bibliográficos

- D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: una contribución a la teoría de la objetivación. En L. Branchetti (Ed.), *Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education*. Pp. 151-171. Isonomia, Online Journal of Philosophy — Epistemologic. University of Urbino Carlo Bo. ISSN 2037-4348. <http://isonomia.uniurb.it/epistemologica/> / <http://isonomia.uniurb.it/node/30>
- D'Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA*, 12(2), 97-127.
- D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Ernest, P. (1988) The Attitudes and Practices of Student Teachers of Primary School Mathematics, *Proceedings of 12th International Psychology of Mathematics Education Conference, Veszprem, Hungary: OOK*. Vol. 1; pp. 288-295.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Routledge.

- Ernest, P. (Ed.) (1994). *Mathematics Education and Philosophy: An International Perspective*. Washington DC: Falmer.
- Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany, New York: State University of New York Press.
- Ernest, P. (2011). *Mathematics and Special Educational Needs*. Saarbrücken, Germany: Lambert Academic Publishing.
- Ernest, P. (Ed.) (2018a). *The Philosophy of Mathematics Education Today*. Switzerland: Springer, 2018
- Ernest, P. (2018b). The Ethics of Mathematics: Is Mathematics Harmful? In P. Ernest (Ed.), *The Philosophy of Mathematics Education Today*. Switzerland: Springer.
- Ernest, P. (2019). The ethical obligations of the mathematics teacher. *Journal of Pedagogical Research*. 3(1), 80-91.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. En L. Radford & B. D'Amore (Eds.) (2006), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. Relime, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. Numero speciale (en idioma inglés, francés y español). Pp. 103-129. Cinvestav, México DF., México. http://www.luisradford.ca/pub/56_Relime_semiotics_06PP157313.pdf (available at: <http://luisradford.ca>).
- Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. En J. Vallès, D. Álvarez & R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docente: intervenció, innovació, investigació*. Pp. 33-49. Girona (Spain): Documenta Universitaria.
- Radford, L. (2012). Education and the illusions of emancipation. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1), 101-118.
- Radford, L. (2014). On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 1, pp. 1-20). Vancouver: PME.
- Radford, L. (2016a). The ethic of semiosis and the classroom constitution of mathematical subjects. *13th International Congress on Mathematical Education. Topic Study Group 54: Semiotics in Mathematics Education*. Hamburg, Germany, 24-31 July 2016
- Radford, L. (2016b). The epistemic, the cognitive, the human: a commentary on the mathematical working space approach. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 925-933.
- Radford, L. (2016c). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, 79, 258-266.
- Radford, L. (2016d). The theory of objectification and its place among sociocultural research in mathematics education. *International Journal for Research in Mathematics Education—RIPEM*, 6(2), 187-206.
- Radford, L. (2017a). La consapevolezza dell'importanza del contesto sociale, culturale e politico del pensiero, dell'insegnamento e dell'apprendimento: alcuni elementi del mio percorso. *La matematica e la sua didattica*, 25(1), 65-74.
- Radford, L. (2017b). Ser, subjetividad y alienación. En D'Amore, B., & Radford, L. *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Pp. 137-166. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

CONFERENCIAS ESPECIALES

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO Y FORMACIÓN DOCENTE: UNA COMPETENCIA PROFESIONAL PENDIENTE

Roberto Vidal C., Pamela Medina, Héctor Hevia, Cristián Bustos, Martín Quintanilla, Javiera Soto
Marcos Barra, Evelyn Isla.
Universidad Alberto Hurtado

En esta conferencia se propone considerar el Análisis de Libros de Texto (ALT) como una competencia profesional docente, dada la alta valoración de los libros como recurso de apoyo para los procesos de enseñanza y aprendizaje, en nuestro caso, de la Matemática. Se presenta una breve panorámica respecto del rol de estos dispositivos en la historia para la difusión y permanencia de los conocimientos. Luego se expone la necesidad de incorporarlos en la formación inicial docente, más allá de lo que se puede hacer en los cursos de didáctica de la matemática y por tanto, transversalizando el uso del libro de texto (escolar y disciplinar) a los ámbitos de la formación práctica, pedagógica y disciplinar. En otras palabras, el ALT requiere de la convergencia de estos dominios, para procesos de selección y modos de uso, pero también para la producción de textos, lo que resulta ser una tarea pendiente en la preparación de los futuros profesores de Matemática.

Libros de texto, manuales escolares, textos escolares, formación de profesores.

Análisis de libros de texto: Una competencia docente

De los pupitres anclados al piso, a mesas y sillas móviles que permitan el trabajo en equipos, de la tiza al plumón y a las pizarras interactivas y por qué no, del cuaderno quizá, a la tableta digitalizadora. Mientras todo esto ocurre, los libros de texto, siguen vigentes, aunque hoy contengan complementos informáticos o lleguen a transformarse en entes completamente digitales, su textualidad se ajusta a los tiempos y le permite conservarse con una alta valoración por el profesorado, valoración que resulta clave y estratégica (Gutiérrez-Saldivia, Díaz-Levicoy, Barría Navarro y Salgado-Orellana, 2019, Braga y Belver, 2016, Rodríguez-Hidalgo, 2013)

Esta posición nos lleva a considerar que el Análisis de Libros de Texto, en adelante ALT, más allá de una tarea del ejercicio docente, debe ser considerada como una competencia que desarrollar en la formación inicial docente, dada su alta complejidad (Villarroel y Bruna, 2017), en la que convergen los diversos tipos de conocimientos que caracterizan diversos modelos como los propuestos por Shulman en 1986, Grossmann en 1990, Ball, Hill y Bass en 2005, y últimamente, el grupo de Carrillo en 2013 en adelante, y que por tanto, no puede ser parte de un curso o de un breve período de preparación.

El rol de los libros de texto en la historia de la matemática

Una antigua cita latina “*Verba Volant, scripta manent*” puede interpretarse como “las palabras se las lleva el viento, lo escrito permanece”. El gran legado del conocimiento que ha trascendido fronteras y épocas, ha sido producto de lo escrito en libros. Los más antiguos conocimientos matemáticos, han sido accesibles a través de los antepasados del libro; las tablillas de arcilla como la famosa Plimpton 322, fechada entre 1.900-1.600 a.C o los papiros, como el de Rhind por el 1.650 a.C, entre otros. Que hoy sepamos que el teorema llamado “de Pitágoras” haya sido conocido y aplicado por los egipcios de varios siglos antes de este destacado personaje (o escuela destacada) de la Grecia del siglo V a.C. o que la Geometría Euclidiana haya permanecido por casi 2.000 años sin modificaciones notables para efectos de su enseñanza, constituyen evidencia empírica de la importancia del libro y en especial del libro de texto.

No solo en occidente, también los orientales tienen sus respectivas obras. Tal es el caso del Jiǔzhāng Suànshù o Tratado de los 9 capítulos del arte matemático escrito por el matemático chino Lui Hui, por allá por el siglo III d.C. Todas estas obras han sido de alta importancia para la difusión de conocimientos por cientos y cientos de años. La técnica de restauración y balanceo, que hoy se utiliza bajo la etiqueta de pasar un término al otro lado de una ecuación o bien sustraer una misma cantidad a cada lado, provienen del que es considerado el primer libro del álgebra *al – Jabr al – Muqabala*, que data del 850 d.C. en la era de la hegemonía árabe, escrito por uno de sus más reconocidos matemáticos: Mohamed Ibn Musa Al-Jwaritzmi. Lo suyo, tiempo después en el siglo XVIII le correspondió a Leonhard Euler, cuando escribe su *Tratado de Álgebra* por allá por 1770, que se convertiría en prácticamente el primer libro de texto con la organización más habitual de los contenidos actuales del álgebra escolar, cuyo camino fuese seguido por los clásicos libros de álgebra para fines exclusivamente educativos de Hall&Knigh, Pröschle, Baldor o Mercado -Schuler de amplio uso en el siglo pasado. También, los libros nos informan acerca de las formas de escritura, desde su intento de unificación, como el signo igual que hoy usamos desde la propuesta del galés Robert Recorde en su libro [The Whetstone of Witte](#) (1557), pero también las que no lo han logrado, lo que se evidencia entre los trabajos de Leibniz y Newton respecto de la notación para la derivada.

Los libros por otra parte, también nos han permitido acceder a los modos en los que se conciben los conocimientos en determinadas épocas; en Los Elementos de Euclides hay una perspectiva epistemológica claramente distinta de la que se encuentra en Los Fundamentos de la Geometría de David Hilbert, lo que explicaría por ejemplo, la necesidad de fundamentar en una u otra obra, una propuesta de organización temática para la enseñanza en un determinado nivel de la escolaridad.

En la primera mitad del siglo XX en Chile, como en otras partes del mundo, los libros de texto de manufactura nacional, son escritos por profesores para sus propios estudiantes, como es el caso de libros de matemática que indican estar escritos para estudiantes de la Escuela Naval o del Instituto Nacional, práctica que se ha perdido dada la progresiva masificación de estos materiales de apoyo a fines del siglo XX e inicios del XXI, por lo que el Ministerio de Educación levanta una política de libros de texto, reconociendo en ellos una alta valoración por parte del profesorado, la que no ha perdido vigencia. Así es como en el año 2002, aparece el nuevo sitio [www.textosescolares.cl](#), hoy desaparecido o bien reemplazado desde hace unos años, por uno más general en cuanto recursos: [www.curriculumnacional.cl](#), pero que continua promoviendo el texto escolar para su uso en las aulas.

Libros de texto y formación del profesorado

En el campo de la Didáctica de la Matemática, ha sido progresiva la investigación que se ha centrado en los libros de texto, tanto así como para que sea catalogada como una línea de investigación en dicho campo. La producción de tesis de doctorales y de maestrías, artículos publicados en revistas afines, congresos, seminarios o eventos en general que le han dado su lugar en los últimos años, dan cuenta de la importancia y su ascendiente interés por este tipo de dispositivo para la enseñanza, para estudiar fenómenos educativos.

La literatura al respecto es variada, pasando por aquellos que se enfocan en el análisis de un contenido específico, los que aluden a estudios comparativos, otros referidos a los procesos de uso, selección y valoración de los libros de texto, uso de la historia, por nombrar algunos tópicos. Sin embargo, el vínculo entre libros de texto y formación del profesorado, ha sido poco explorado. Braga y Véliz (2016), Burgos, Castillo y Godino (2020), muestran resultados interesantes en esta dirección, que muestran experiencias concretas de intervención, que permiten pensar que es posible su incorporación desde distintos marcos teóricos de la didáctica de la matemática, desde la pedagogía, la práctica e incluso la epistemología disciplinar, lo que enriquece aún más el propósito que queremos mostrar.

Analizar libros de texto, consiste en una actividad que permite estudiar una gran cantidad de fenómenos, entre los cuales está el estudio de errores conceptuales, mutilaciones conceptuales, banalizaciones, la adecuación de representaciones, imágenes, demostraciones o aplicaciones, definiciones, existencia de reglas nemotécnicas, procesos que siempre resultan, simplificaciones, usos y abusos de lenguaje y de notación, por solo nombrar algunos.

En la Universidad Alberto Hurtado, hemos conformado un grupo de investigación referido al Análisis de libros de texto, en adelante ALT, que ha comenzado a operar en 2020 y que recoge la experiencia acumulada por académicos y profesores de las áreas de matemática y ciencias naturales, que puede ampliarse a otras disciplinas en las cuales, los libros de texto cuentan con una alta valoración.

Se ha asumido como objetivo de este grupo, la incorporación, implementación y evaluación del ALT en las carreras de pedagogía, que en el caso de la formación de profesores de matemática, se justifica en torno a las siguientes proposiciones consideradas como postulados elementales, en revisión:

1. El ALT apela a nuestra relación con el saber disciplinar, constantemente en nuestra labor profesional.

Al realizar un ALT al encuentro con la matemática allí desarrollada, nos plantea un ir y venir de pensamientos a modo de una revisión de lo que conocemos, cómo lo conocemos y legitimamos, en otras palabras un viaje a la epistemología construida y que nos puede ser desafiante, contradictoria, elemental, pero nunca neutra. Siempre hay algo que decir en este aspecto, pues el deseo de mejorar el texto para que lo utilicen nuestros estudiantes o bien perfeccionar nuestro saber, es una potente motivación que permanece en el tiempo.

2. En la formación inicial, el ALT acerca a la práctica docente, incluso antes de iniciarla formalmente.

Podríamos preguntarnos ¿Cómo aportaría el ALT en la formación inicial del profesorado?. Conocer cómo se organiza el conocimiento en el currículo escolar, es una buena aproximación incluso antes de la formación práctica en establecimientos educacionales. Pero hacerlo con libros de texto, acerca más aún eso que ocurre efectivamente en el aula. Para un estudiante de pedagogía que realiza ALT, antes de comenzar su práctica o pasantía en los colegios o liceos, lo conduciría a elaborar ideas acerca de cómo se pueden abordar distintas temáticas, examinando las actividades, los modos de introducción y las tareas asociadas, frente a otro que llega a este conocimiento mediante la propia experiencia cuando tiene que asistir a un aula real. Pero si se continua con el ALT mientras asiste al aula, puede potenciar la discusión con su profesor guía, en torno a una necesaria reflexión no solo pedagógica, sino por sobre todo, didáctica.

3. Recurrente relación entre matemática formal y matemática escolar

Una problemática para desarrollar en la formación en la disciplina y que revoluciona la costumbre, es dar espacio al ALT de obras matemáticas. ¿Por qué quedarse con una única introducción y desarrollo (la que otorga el formador del profesorado) sobre la derivada, los espacios vectoriales, la demostración de un teorema o la organización incluso del contenido?. Imaginemos cómo se puede encausar una rica discusión constructivista sobre cómo se presenta o se llega a un determinado concepto, teorema, definición, etc.

En relación a la relación de la matemática formal con la matemática escolar, esta diferenciación puede hacerse más patente siguiendo el mismo trabajo descrito anteriormente, en los cursos de didáctica, en los que el ALT podría formar parte de una selección de ideas para crear un diseño de clases, con claros fundamentos obtenidos de marcos de referencia que se hayan estudiado con anticipación y que pueden hacer converger constructos de corrientes pedagógicas ad-hoc con la perspectiva constructivista actual.

Si hay un buen grado de conocimiento disciplinar, el ALT producirá sin duda, la constante vigilancia epistemológica e incluso epistémica, respecto del futuro profesor. Este tipo de experiencias podrían abrir los espacios de reflexión constante, entendiendo el hecho educativo en una perspectiva dinámica y que varía de acuerdo a las normativas o restricciones de las diferentes instituciones.

Una reciente investigación que hemos finalizado, muestra que el ALT es una actividad situada más bien en el desarrollo profesional de los profesores de matemática y de biología, siendo escaso en los procesos de la formación inicial docente. Y peor aún, cuando se realiza, éste se despliega bajo un conjunto de orientaciones que son propias de cada formador que decide hacerlo o asume tal tarea, por lo que el ALT con distintos formadores, produce distintos efectos en los estudiantes de pedagogía.

4. El ALT opera en todos los niveles educativos

Se puede realizar un ALT en la formación del profesorado de Educación Parvularia, Educación Básica y Enseñanza Media, incluso se podría implementar, como señalamos más arriba, en la Educación Superior, que para el caso de Matemática, el libro de texto y también el libro disciplinar, puede ser utilizado para tal propósito. Así concluimos que el ALT tiene un carácter multinivel.

5. El ALT opera para libros escritos en distintas épocas (análisis longitudinal)

Tanto para la formación disciplinar, didáctica, práctica y pedagógica, hemos señalado que el ALT es una oportunidad y se puede utilizar para estudiar libros de diferentes épocas, con cualquiera de estos fines o aproximaciones. En especial, si la carrera cuenta con cursos de historia de la matemática, puede también intervenir examinando las obras históricas de la antigua Grecia y del siglo XIX, como el caso de los procesos de exhaustión de Arquímedes y el de las sumas superiores e inferiores desarrollados por Riemann, con dos milenios de distancia temporal, pero que presuponen una misma idea inicial y que puede conformar un argumento histórico para iniciar llegar primero a la integral indefinida, en lugar de un tránsito algebraico y abstracto, desde la antiderivada a la integral definida o bien de cómo proponer la derivada en forma previa al límite, con sus alcances y limitaciones, respecto de la clásica organización estructurada de los libros de cálculo infinitesimal.

6. Permite diversidad de enfoques y teorías, desde lo didáctico, lo epistemológico, lo pedagógico y lo práctico. En cada una de estas instancias de formación, es posible incluir actividades relacionadas con el ALT, lo que enriquece una formación integrada y sistémica, que ayuda a valorar aún más la necesidad de “buenos comunicadores” que han de ser los docentes, comunicación que ha de desenvolverse en lo oral y en lo escrito.

Concluimos aquí, esta breve comunicación, la que es un adelanto de los detalles de una investigación que estamos desarrollando en el grupo ALT de la Universidad Alberto Hurtado cuyos resultados constituirán un aporte a un enfoque teórico que paralelamente está en construcción, que pretende orientar el camino de la incorporación del ALT en la formación del profesorado de Matemática y de Ciencias, al que probablemente se puedan unir otras disciplinas para las cuales, los libros de texto, tengan una alta valoración. Para finalizar, les compartimos nuestra máxima:

Si el libro de texto es y ha sido tan importante para la labor de la enseñanza, entonces postulamos que el ALT ha de ser una competencia docente, desarrollada al interior de la formación inicial.

Referencias

- Braga, G. y Belver, J. L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, 27(1), 199-218.
- Burgos M., Castillo, M.J., Godino, J.D. (2020). Formación de profesores de Matemáticas en el análisis de libros de texto. *Acta Latinoamericana de Matemática educativa, CLAME*, 33(1), 534-546.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Gutiérrez-Saldivia, X., Díaz-Levicoy, D., Barría-Navarro, C., Salgado-Orellana, N. (2019). Acceso a la información en el libro de texto de matemática de primer año en educación primaria en Chile. *Revista Espacios*, 40(41), 22-34.
- Rodríguez, C. (2013). El potencial curricular de los libros de texto para generar experiencias de aprendizaje *Educación*, 37(1), 119-129

- Villarroel, V., Bruna, D. (2017). Competencias Pedagógicas que Caracterizan a un Docente Universitario de Excelencia: Un Estudio de Caso que Incorpora la Perspectiva de Docentes y Estudiantes. Revista Formación Universitaria, 10(4), 75-96.

BREVE REVISIÓN SOBRE LOS INICIOS DEL MODELO DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Gabriel Alejandro Meza Pereira
Universidad Católica Silva Henríquez

El presente resumen de conferencia muestra una revisión bibliográfica del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Cronológicamente, se revisan los orígenes del modelo desde las dificultades que presentaba el modelo Mathematical Knowledge for Teaching (Ball, Thames & Phelps, 2008) a los investigadores hasta la definición del conocimiento del docente como especializado. Se finaliza con los últimos artículos que tienen el modelo como eje central para vislumbrar las posibles nuevas líneas de investigación.

MTSK, conocimiento especializado, revisión bibliográfica.

Introducción

En el campo de la Matemática educativa se ha considerado que la función del profesor en el proceso de Enseñanza – Aprendizaje es fundamental. Entonces, se hace evidente el que se convierta en un importante objeto de estudio en los últimos años. Cómo lo señalan Escudero, Flores y Carrillo (2012), una de las líneas de investigación que responde a este interés se centra en el estudio del conocimiento y habilidades que ponen en juego los profesores cuando están en este proceso.

Para enfrentar este desafío se han propuesto en las últimas décadas diversos modelos para sistematizar el conocimiento que requiere un profesor para enseñar matemáticas. Aquellos que podemos citar provienen a su vez del trabajo primordial de Shulman (1986) que proponía la distinción entre dos formas o dominios del conocimiento del profesor. En él se definen el “Pedagogical Content Knowledge for Teaching” (Conocimiento pedagógico del contenido para la enseñanza) como un área de estudio. Se especifica que existe un tipo de conocimiento de la matemática en sí, necesario para la enseñanza y que pertenece únicamente a los profesores.

En esta línea Rojas (2014) señala:

... El conocimiento profesional de los profesores de matemáticas incluye una diversidad de aspectos, de los cuales, en este estudio nos interesan aquellos que se activan al enseñar, especialmente buscamos profundizar en el conocimiento que el profesor presenta en su práctica y en cómo lo organiza al enseñar matemáticas.

Es decir, se considera que aquello que conoce el profesor de matemáticas y como lo pone en juego en el momento de enseñar es parte fundamental del proceso. Por tanto, es un objeto de estudio en sí mismo.

Desde los trabajos de Shulman (1986) se deriva en el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (Conocimiento matemático para la enseñanza, MKT desde ahora) desarrollado por Ball, Thames y Phelps (2008). Éste, se propone como un modelo para analizar, organizar y operativizar el conocimiento del profesor de matemáticas.

En Escudero, Flores y Carrillo (2012) se menciona que dicho modelo se presenta como el conjunto de dos tipos de conocimiento: el *Pedagogical Content Knowledge* (conocimiento pedagógico del contenido) y el *Subject Matter Knowledge* (Conocimiento de la materia). El primero deriva directamente del esquema de Shulman, refinando su propuesta al categorizar este conocimiento a través de los subdominios. Ambos se dividen a su vez en tres subdominios.

Desde principios de la década de 2010 se desarrollan investigaciones utilizando este modelo para analizar el conocimiento de los profesores de matemáticas detectando dificultades en el reconocimiento de ciertos subdominios (Montes, 2011; Escudero, Flores y Carrillo, 2012; Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013, entre otros). Esto llevó a un replanteamiento, surgiendo así el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*Mathematical Teacher's Specialized Knowledge* en inglés, MTSK desde ahora) para resolver estas dificultades. Su principal característica es considerar el conocimiento del profesor como especializado en su totalidad, y no solamente en un subdominio.

En la presente conferencia se realiza una revisión bibliográfica de forma cronológica del modelo MTSK, desde sus inicios antes de ser definido hasta las más actuales investigaciones desarrolladas en los últimos meses.

Las etapas previas e iniciales del modelo mtsk

La revisión bibliográfica se llevó de forma cronológica, principalmente para determinar los orígenes y motivaciones iniciales del modelo. A partir de investigaciones sobre el conocimiento de los profesores se originan las primeras luces de este. Así, la primera etapa, que llamaremos **etapa previa** consiste en investigaciones anteriores que buscaban definir el conocimiento que los profesores ponían en práctica cuando enseñaban (Montes, 2011; Carmona y Climent, 2011; entre otros).

En Montes (2011) se estudia el conocimiento que los profesores de secundaria tienen sobre las dificultades que experimentan sus alumnos al trabajar con el concepto de infinito, en cualquiera de sus posibles formas. A partir de la observación de clases de dos profesores con distintos grados de experiencia. Se describen las dificultades que los profesores observan, así como también se obtiene información sobre los métodos que usan para solventarlas.

El análisis se lleva a cabo desde diversas perspectivas y está referido a los subdominios del modelo MKT. Entre sus conclusiones destaca que les parece necesario refinar el modelo, ya que podría tratar de alcanzar un mayor grado de profundización caracterizando los procesos de enseñanza respecto al concepto tratado. Crean que el conocimiento para la enseñanza no debe ser el mismo si se abordan contenidos algebraicos, como geométricos o referidos al análisis, y aunque se puedan elaborar descriptores generales para cada subdominio, sería interesante refinarlos para subdominios referidos a cada área de las matemáticas o incluso por conceptos clave de cada campo. Sus principales dificultades se encontraron con el sub-dominio del conocimiento especializado.

En Carmona y Climent (2011) se caracteriza el conocimiento que se evidencia cuando se plantean actividades relacionadas con la ecuación de la recta. Los autores admiten que sus resultados refuerzan las limitaciones de estudiar el MKT del profesor sólo a partir de la observación de su práctica.

Una vez identificada la dificultad podemos ver estudios e investigaciones que apuntan hacia lo especializado del conocimiento del profesor de matemáticas. Podríamos decir que se trata de una etapa inicial, dónde se cuestiona el modelo MKT y se estudian formas de mejorarlo. Aquí se comienza a hablar de conocimiento especializado y se identifica este subdominio como el factor que genera las dificultades.

Escudero, Flores y Carrillo (2012) estudian el carácter especializado del modelo MKT y hacen énfasis en la delimitación de los subdominios. Entre los resultados de esta investigación encontramos que ninguna de las definiciones caracteriza el conocimiento en sí, sino que lo hace a través de referentes externos. Así tratan de enfocar la especialización desde otra mirada. En vez de hablar del conocimiento especializado del contenido como un subdominio, definen el conocimiento del profesor de matemáticas como especializado. Por ejemplo, un profesor de matemáticas debe conocer como sumar y restar fracciones de distinto denominador de la misma forma que lo hace cualquier persona en su vida diaria. Sin embargo, las preguntas que el profesor se hace en torno a este conocimiento, lo que problematiza, es muy distinto a las demás personas u otros profesionales. Se habla en este artículo, por primera vez de un conocimiento especializado del profesor de matemáticas o MTSK por sus siglas en inglés (Mathematic's Teacher Specialized Knowledge).

En Rojas, Carreño, Montes y Flores (2013) se presentan reflexiones sobre el conocimiento para la enseñanza vinculados al modelo MKT. Se sugiere la necesidad de analizar el modelo MKT (de la misma forma que en Escudero, Flores y Carrillo (2012)). Se discute el modelo a partir de los descriptores generales definidos por el grupo de investigación de la Universidad de Huelva. Reconocen los autores la necesidad de poner la matemática en el centro y concentrar las miradas en el conocimiento que es significativo solamente para los profesores. Esta postura da lugar al modelo MTSK, que en esta época se encontraba aún en construcción. se vislumbraba su avance futuro hacia definirlo con mayor precisión, tanto el modelo como sus descriptores.

Ya en Carrillo, Contreras y Flores (2013) se presentan subdominios y aportes al modelo MKT y se pueden apreciar claramente las dificultades que presentó a los investigadores. Podemos ver complementado esto en Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz.-Catalán (2013) quienes ponen atención en diversas áreas del modelo MKT. Estas se pueden explicar en la definición del subdominio SCK (specialized Content Knowledge o Conocimiento especializado del contenido). Se pone una atención en el conocimiento matemático (MK, Mathematics knowledge).

Como una forma de superar estas dificultades se presenta el modelo MTSK y se definen sus subdominios separados en dos grandes grupos:

El conocimiento matemático (MK):

- El conocimiento de los tópicos (Knowledge of topics, KoT), relacionado con conceptos y procedimientos matemáticos.
- El conocimiento de la estructura de la matemática (Knowledge of structure of mathematics, KSM), relacionado con la estructura interna de la matemática.
- Conocimiento de la práctica de la matemática (Knowledge of practice of mathematics, KPM), relacionado a la forma de construir el conocimiento matemático, a la forma de establecer su forma, mecanismos y demostraciones.

El conocimiento pedagógico del contenido (KPC)

- Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (Knowledge of features of learning mathematics, KFLM), relacionado a como aprenden y se enfrentan los estudiantes a la matemática.
- Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (Knowledge of mathematical teaching, KMT), relacionado al conocimiento que permite tomar decisiones a los profesores. Como que ejemplos presentar o que respuesta dar a las dudas de sus estudiantes.
- Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (Knowledge of mathematical learning standards, KMLS), relacionado al conocimiento sobre los contenidos que se imparten en cada año o nivel escolar. También se relaciona a los estándares internacionales del conocimiento matemático.

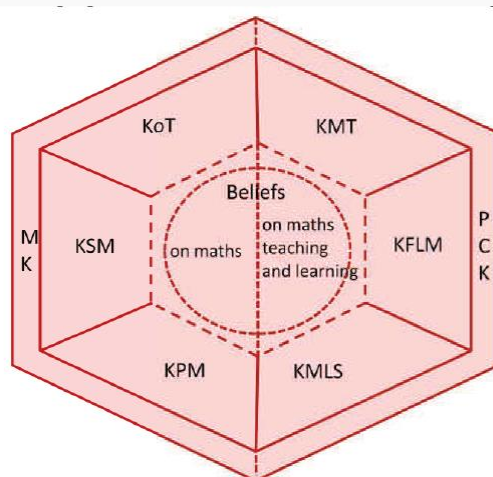


Figura I: Los subdominios del modelo MTSK (Climent, Carrillo, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013)

Conclusiones

El modelo MTSK pone al profesor como principal objeto de estudio, reconociendo que su función en el proceso de Enseñanza – Aprendizaje es fundamental. Se estudia mediante este modelo el conocimiento y las habilidades que ponen en juego los profesores cuando se lleva este proceso.

Hemos visto que desde los trabajos de Shulman (1986) se propone que existe un tipo de conocimiento que solo es necesario y que compete a los profesores. En el marco de los distintos caminos de sistematización de estas ideas que a partir de las dificultades del modelo MKT tenemos el modelo MTSK. Este atiende a los diversos aspectos que posee el conocimiento del profesor entendiendo que es especializado en su conjunto.

En la última década el modelo MTSK se ha situado como uno de los principales marcos de referencia y análisis para investigar el conocimiento del profesor de matemáticas.

Referencias

- Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), (pp 389-407).

- Escudero, D., Flores, E. y Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Memoria de la XV escuela de invierno en matemática educativa. (pp. 35 – 42). Ciudad de México. México.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2) (pp. 4 – 14).
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, un estudio de caso*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.
- Montes, M. (2011). El conocimiento del profesor en relación con las dificultades para la comprensión del concepto de infinito. Tesis de máster no publicada. Universidad de Huelva. Huelva. España.
- Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.
- Carmona, E. y Climent, N. (2011). Comprensión del conocimiento matemático para la enseñanza que sustenta el diseño de una actividad sobre las ecuaciones de la recta en 1º de Bachillerato. En Estepa, A., Contreras, Á., Deulofeu, J., Penalva, M.C., García F. J. y Ordóñez, L. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 165 - 175). Jaén: SEIEM.
- Rojas, N., Carreño, E., Montes, M. y Flores, P. (2013). Mathematics teacher's specialized knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. Congress of the European Research of Mathematics Education VIII. (pp. 2976 – 2984). Antalya. Turquía.
- Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L., Rico, M.C. Cañadas, J. Gutierrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193 – 200). Granada. España.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. & Muñoz-Catalán, M. (2013) Determining specialized knowledge for mathematics teaching. Congress of the European Research of Mathematics Education VIII. (pp. 2985 – 2994). Antalya. Turquía.

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE PROBLEMAS DE DIVISIÓN- MEDIDA

Maximina Márquez Torres
Universidad de Los Lagos
maximina.marquez@ulagos.cl

En esta ponencia se reporta un estudio con un grupo de estudiantes de la carrera Pedagogía en Educación Media en Matemática y Computación de la Universidad de Los Lagos, Chile, acerca de la relación entre el éxito en la resolución de problemas de estructura multiplicativa de isomorfismo de medida (Vergnaud, 1997) y la evaluación de diferentes soluciones dadas por alumnos de Educación Primaria a estos mismos problemas. Se indaga sobre el conocimiento especializado de contenido matemático, desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS), de los futuros profesores cuando interpretan las respuestas dadas por alumnos de séptimo básico (12-13 años) a problemas de división-medida con resto, en el dominio de los números naturales y fracciones. Con el presente trabajo se pretende aportar nuevos conocimientos y recursos teórico-metodológicos sobre el uso que hacen los profesores en formación sobre este conocimiento matemático para enseñar. Los resultados preliminares muestran que los profesores en ejercicio valoran más las soluciones basadas en el algoritmo de la división que las soluciones basadas en métodos alternativos.

Palabras clave: Problemas de división-medida, profesores en ejercicio, conocimiento profesional

Introducción

En la actualidad, la resolución de problemas es considerada una competencia fundamental en Chile. Al respecto, las Bases Curriculares del 2013 sugieren a los profesores brindar oportunidades a sus estudiantes para desarrollar esta competencia, poniendo en práctica estrategias de resolución que apoyen la comprensión, planificación, acción y comprobación de resultados, y puedan ser usadas en situaciones diversas (MINEDUC, 2013). Para ello, es necesario que los docentes reciban una formación que les permita enfrentar eficientemente esta demanda de una enseñanza basada la resolución de problemas y, en este sentido, consideramos necesario que para tal formación se incluyan contenidos referidos a las estrategias usadas estudiantes para resolver dichos tipos de problemas.

En cuanto al conocimiento profesional del profesor de matemáticas se han centrado en cómo los profesores adquieren el conocimiento necesario para enseñar matemáticas (Ball, 1990; Llinares, 2013; Pino-Fan, Godino & Font, 2015) y en la identificación y relación entre distintos tipos de conocimientos relevantes para enseñar (Shulman, 1986; Pino-Fan, Assis, & Castro, 2015).

Jacobs, Lamb & Philipp (2010) consideran que la actividad de identificar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes es un proceso inferencia a partir de la interpretación de lo que el estudiante escribe, dice o hace. Estos autores ponen de relevancia cómo los estudiantes para profesor interpretan actividades resueltas por los alumnos, más allá de indicar que la respuesta sea incorrecta. Por tanto, esta competencia permite al profesor ser capaz de analizar e interpretar las producciones matemáticas de los alumnos, utilizando los conocimientos de Didáctica de la

Matemática sobre el aprendizaje matemático dotando de significado actividades resueltas por alumnos.

Problemas de Estructura Multiplicativa

Vergnaud (1997) identifica tres tipos de problemas de estructura multiplicativa: isomorfismo de medidas, un solo espacio de medidas y producto de medidas. Para esta investigación nos centramos en la primera.

La primera clase, isomorfismo de medidas (Figura 1), comporta una estructura que engloba problemas de proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M1 y M2 y pone en juego cuatro cantidades, de las cuales, en problemas más simples, una de éstas es 1. Dependiendo de cuál cantidad representa la incógnita en el problema, se tienen tres grandes tipos de problemas de isomorfismo de medidas: multiplicación, división medida (búsqueda de la cantidad de unidades) y división partitiva (búsqueda del valor unitario).

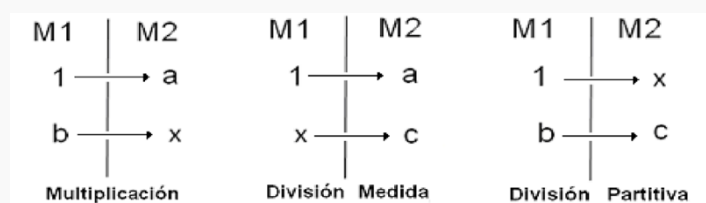


Figura 1. Correspondencia entre magnitudes en problemas de isomorfismos de medidas, Vergnaud (1997).

Conocimiento profesional del Profesor

Shulman (1986) realiza grandes aportes que son clave para la identificación del conocimiento necesario para enseñar, haciendo distinciones entre conocimiento de la materia y conocimiento de contenido pedagógico. Este último conocimiento se ha utilizado para referirse a diversos aspectos relacionados con la disciplina a enseñar y con la enseñanza, por lo que es necesario un desarrollo teórico específico en el área de matemáticas

Ball, Thames & Phelps (2008), a partir del esquema de Shulman, se centran de forma específica en el conocimiento que requiere el profesor para enseñar matemáticas y establecen el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), señalando dos grandes dominios de conocimiento: (1) Conocimiento del Contenido a Enseñar (SMK) y (2) Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), que a su vez subdividen cada uno de ellos en tres subdominios: conocimiento común del contenido (common content knowledge), que es el conocimiento que cualquier persona puede usar para resolver un problema matemático; conocimiento especializado del contenido (specialised content knowledge), que es el conocimiento matemático específico para enseñar, y conocimiento del horizonte matemático (horizon content knowledge), que es el conocimiento que integra la capacidad de relacionar los conceptos matemáticos entre sí y con el currículo.

Pino-Fan & Godino (2015) presentan una versión ampliada del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del profesor, basado en la aplicación de las herramientas del análisis didáctico propuestas en el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) con el fin de analizar diversas categorías de conocimientos del profesor de matemáticas.

Para este estudio nos proponemos indagar cómo los profesores utilizan sus conocimientos de matemáticas cuando realizan diferentes tareas profesionales, por ejemplo, analizar e interpretar el pensamiento matemático en actividades hechas por alumnos de enseñanza básica.

Metodología

En este estudio se indagará sobre el conocimiento especializado de contenido matemático de 10 profesores en formación, cuando interpretan respuestas dadas por alumnos de séptimo curso de primaria (12-13 años) a problemas de división-medida con resto distinto de cero en el dominio de los números naturales. Los profesores en formación corresponden al 8vo semestre de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Los Lagos.

Estos futuros profesores respondieron dos cuestionarios en los que se les pedía: Para el cuestionario 1, a) resolver tres problemas de división- medida y b) mostrar otra solución si sabían otra forma de resolverlo, y para el cuestionario 2, interpretar cuatro respuestas dadas por alumnos de primaria (12-13 años) a estos mismos problemas (Figuras 2). Las 4 respuestas a cada problema se seleccionaron de las soluciones que dieron 100 alumnos de 7° de educación básica. De los tres problemas que se plantearon se muestra el siguiente: Albergue. 103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

Este problema pertenece a la categoría de los problemas con dos espacios de medidas, la clase de isomorfismo de medidas y al tipo de problemas de división con valor unitario conocido. En este problema hay dos espacios de medida, M1: número de mesas y M2: número de estudiantes, siendo la estructura del problema la del esquema siguiente:

M1 (Mesas)	M2 (estudiantes)
1	20
x	103

Tabla 1. Correspondencia entre magnitudes del problema Albergue.

Para la elaboración del cuestionario 2 se utilizaron soluciones dadas por alumnos de 7° básico a estos mismos problemas propuestos a los profesores. De sus respuestas se seleccionaron procedimientos de resolución identificados en investigaciones como la de Lima & Carvalho (2013), por ejemplo, división y otros procedimientos alternativos a la división, como se muestra en la Figura 2, respuesta B del problema Albergue.

Entre las preguntas que se realizaron a los futuros profesores tenemos:

- ¿Qué tipo de estrategias consideras apropiadas o adecuadas para este nivel educativo?
- ¿Cuáles son las dificultades o errores que los alumnos cometen al tratar de solucionar los problemas?

Análisis

Las respuestas de los futuros profesores al problema Albergue en el Cuestionario 1 fueron clasificadas como correctas cuando tanto el procedimiento como la respuesta eran correctos con independencia del método utilizado; como regulares cuando los profesores realizaban un procedimiento correcto pero no interpretaban el resto de la división para dar la respuesta (por ejemplo expresar la respuesta con decimales; y como incorrectas cuando no interpretaban bien el enunciado o la respuesta no tenía sentido.

Albergue: 103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?			
	Respuesta proporcionada por el estudiante	Describe el procedimiento desarrollado por el estudiante	Describe los conceptos matemáticos que utilizan los alumnos para resolver el problema
A	$ \begin{array}{l} 1 \text{ mesa} = 20 \text{ personas} \\ 2 = 40 \\ 3 = 60 \\ 4 = 80 \\ 5 = 100 \\ 6 = 120 \\ \text{R: Ocuparán 6 mesas para todos.} \end{array} $		
B	$ \begin{array}{l} 103 : 15 = 6 \\ \text{Los estudiantes tendrán que usar 6 mesas, pero en una mesa se usará 13 asientos ya que solo hay 103 estudiantes.} \end{array} $		

Figura 2. Cuestionario 2 del problema Albergue respuestas de los estudiantes A y B.

En relación al Cuestionario 2, se hizo un análisis de las justificaciones dadas por los profesores a la valoración de las estrategias utilizadas, la identificación de conceptos matemáticos utilizados por los alumnos en la resolución de problemas o en la explicación del método empleado

Algunos resultados

En relación a la resolución de problemas, en la parte a se le pedía a los participantes resolver el problema, en la parte b, se les pedía que si conocían otra forma de resolver el mismo problema lo escribiera. La mayoría de los profesores en formación resolvieron correctamente el problema Albergue (Figura 3). Sólo un profesor en formación no tomó en cuenta el resto para dar respuesta a la pregunta planteada.

son 103 estudiantes
 hay 20 asientos en cada mesa
 son 15 mesas
 $103 : 20 = 5 \text{ MS}$
 $\frac{30}{100}$
 Se ocuparán ~~103~~ 5 mesas.

Figura 3. Resolución del problema Albergue del profesor P2 utilizando el algoritmo de la división.

En relación a las estrategias utilizadas por los profesores en formación para resolver el problema, 9 de los 10 profesores utilizaron el algoritmo de la división, uno utilizó la modelación-agrupamiento.

Respecto a la pregunta que se les realizó sobre qué tipo de estrategias consideras apropiadas o adecuadas para este nivel educativo, 5 profesores afirman que es la división la más adecuada, 2 hacen referencia a la representación gráfica o alternativas a la división. Un profesor en formación no respondió a la pregunta y 2 consideran que cualquier estrategia utilizada es apropiada si lleva al resultado correcto.

En relación a los errores o dificultades que los profesores en ejercicio mencionaron que se pueden presentar en la resolución de estos problemas tenemos: No tomar en cuenta el resto (un profesor en formación), no comprender el enunciado (4 profesores en formación), omitir datos (5 profesores en formación) y error de cálculo (no realizar correctamente una operación 1 profesor en formación).

Conclusiones

La mayoría de los profesores en formación logró resolver de forma correcta, siendo la división el único procedimiento utilizado (sólo uno lo realizó por procedimiento alternativo).

Sólo 7 profesores en formación pudieron proponer otra solución, entre las estrategias identificadas tenemos: multiplicación (2), modelación (1), sumas repetidas (3), agrupamiento (1).

El error más común que cometen los estudiantes en este tipo de problema es que no interpretan correctamente el significado del resto cuando se realiza una división (Callejo & Vila, 2009), sin embargo, sólo un profesor en formación hizo mención al respecto.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte del Proyecto Regular CR22/18 “Caracterización del conocimiento para la enseñanza de futuros profesores sobre la división medida”, financiado por la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado de la Universidad de Los Lagos.

Referencias

- Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for research in mathematics education*, 21(2), 132-144.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- Callejo, M. L., & Vila, A. (2009). Approach to mathematical problem solving and students' belief systems: two case studies. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 111-126.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for research in mathematics education*, 41(2), 169-202.
- Lima, R. R. y Carvalho, M. (2013). Algumas estratégias de resolução de problemas de divisão. *Boletim GEPEM*, 62, 87-100.
- MINEDUC (2013). *Matemática Educación Básica. Bases curriculares en Educación Básica*. Santiago de Chile: Autor.
- Pino-Fan, L. R., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Pino-Fan, L. R., Godino, D. J., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 60-89.

- Pino-Fan, L. R., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(6), 1429-1456.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.
- Vergnaud, G. (1997). *El niño, la matemática y la realidad*. México: Trillas.



ESTUDIO DE CLASES EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE ANDAMIAJE EN MATEMÁTICA PARA EDUCADORAS DE PÁRVULO

Raimundo Olfos, Soledad Estrella, Tatiana Goldrine, Grace Morales, Patricia Estrella, Silvia Herrera, Claudia Cornejo, Rodrigo Salinas, Tamara Rojas, Jorge Carocca, Deborah Rosende, Elisa Torres y

*Andrea Vergara

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y *Universidad Academia Humanismo Cristiano

Existen evidencias internacionales de la contribución del Estudio de Clases al desarrollo profesional docente. En esta conferencia se muestra cómo se usa de manera indirecta a tal propósito, sirviendo de base para la construcción de un sistema de andamiaje que contempla experiencias de aprendizaje video grabadas como insumo. Además, se da cuenta de los entramados y las estructuras que soportan y hacen operativo al sistema de andamiaje y de cómo, a modo de ejemplo fue concebido y llevado adelante uno de los Estudios de Clases que se utilizan en los procesos de andamiaje para educadoras de párvulo para educadoras en la Región de Valparaíso.

Estudio de Clases, Formación Continua, Educación Parvularia, Educación matemática, Socio afectividad

Sistema de andamiaje en matematicas para educadoras

El uso de los sistemas de andamiaje, con componentes virtuales o presenciales ha mostrado ser exitoso en la formación continua de profesionales de la educación y en otras áreas de la formación profesional. Los proyectos actuales para la formación docente en matemáticas muestran la importancia de proveer entrenamiento y andamiaje al docente utilizando computadores, cápsulas de video, aplicaciones telefónicas y/o sitios WEB (Raes, Schellens, De Wever & Vanderhoven, 2012; Belland, Walker, Kim, & Lefler, 2016). El andamiaje se muestra como una estrategia eficaz para mejorar el conocimiento de los docentes; y para ayudarles a realizar sus tareas en un nivel alto de competencia (Darling- Hammond & Youngs, 2002; Espinoza y Rosas, 2016). Entre los programas para formar profesores en la enseñanza de la matemática destacan JumpMath para profesores de primero a octavo, E-Mentoring for Student Success (eMSS) para profesores de ciencias y matemáticas, basado en mentoría y TeachingWorks (<http://www.teachingworks.org/>).

Andamiaje para alcanzar Prácticas Apropriadas para el Desarrollo infantil

En las últimas décadas se ha investigado “el cuerpo de comprensiones, conocimientos, habilidades y disposiciones que un docente necesita para enseñar efectivamente en una situación dada” (Shulman, 1987); cuerpo que incluye el Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC), el cual integra el conocimiento disciplinar del docente con el conocimiento del currículo, las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje, y la capacidad del docente para diseñar situaciones de enseñanza. El CC y el CPC del profesor, se asocian a la efectividad de la enseñanza en matemática (Krauss et al., 2008) y se han especificado a través del Mathematics Knowledge for Teaching (Hill, Ball, & Schilling, 2008) y el MTSK (Carrillo, Contreras, y Flores, 2013). En relación al CP, la tendencia socio-constructivista de los años 1990 (von Glasersfeld, 1989) llevó a tildar como “prácticas

inapropiadas” para infantil, a aquellas basadas en lápiz y papel, aprendizaje rutinario y enseñanza directa al grupo completo. Con el tiempo se redefinieron las Prácticas Apropriadas para el Desarrollo del párvulo, PAD, y se precisó como importante la interacción con el párvulo. Los párvulos se benefician si las educadoras planifican las actividades y brindan apoyo a medida que atienden habilidades más complejas (Chien et al., 2010); constituyéndose en PAD, aquellas en que las educadoras toman decisiones pedagógicas en base al conocimiento del desarrollo y aprendizaje infantil, las necesidades individuales y el contexto social y cultural en el que viven los niños (Copple & Bredekamp, 2009). La investigación en la última década ha delimitado algunos significados acerca de las PAD, el CC y CPC.

Específicamente, en relación a las PAD, Prácticas Apropriadas para el Desarrollo de los párvulos; se destaca la relevancia de poner el foco en las habilidades sociales y emocionales como condición para el desarrollo cognitivo del párvulo; lo que se sintetizan en la capacidad de elogiar, consolar, cuestionar y responder a los párvulos, ejercer liderazgo y resolver conflictos o contingencias en el aula. Son prácticas de las educadoras que proveen un ambiente acogedor y desafiante, pero no abrumador, para desarrollar disposiciones positivas en los párvulos hacia el aprendizaje de conceptos y destrezas para la vida. Estas prácticas están en la base de las capacidades de las educadoras para generar entornos enriquecidos y estimulantes y proveer pedagogía de alta calidad; se sustentan en decisiones pedagógicas basadas en el conocimiento del desarrollo y aprendizaje infantil, las necesidades individuales, y el contexto socio cultural de los párvulos. La investigación evidencia que las PAD pueden afectar positivamente el desarrollo cognitivo (Brown & Mowry, 2015), el aprendizaje temprano holístico, y el desarrollo de habilidades socioemocionales (Hartley, 2019; Lettington, 2018; OCDE, 2019), aspectos que afectan significativamente el aprendizaje infantil (Hemmeter, Hardy, Schnitz, Adams, and. Kinder, 2015).

Entrenamiento Basado en la Práctica (EBP) como componentes de un Andamiaje

La investigación en formación de profesores ha desarrollado la noción de Entrenamiento basado en la Práctica, EBP. Las prácticas de enseñanza (Snyder, Hemmeter, & Fox, 2015) se acotan como en los ejemplos siguientes: (a) la educadora saluda a los niños por su nombre al llegar al aula, (b) la educadora construye una matriz de actividades para registrar los intentos de aprendizaje instruccional basado en lo planificado para los niños, y (c) la educadora utiliza estrategias de instrucción sistemáticas para enseñar a un niño habilidades específicas. Las prácticas de enseñanza ya rotuladas derivan de prácticas recomendadas a través de la investigación que, cuando se implementan con fidelidad, se asocian positivamente con la participación y el aprendizaje del niño. El término fidelidad significa, cuán cercana está la práctica real de la práctica “apropiada específica”. En los procesos de entrenamiento, las prácticas “apropiadas específicas” de enseñanza se definen de manera operativa como declaraciones específicas, acordadas entre el monitor y la educadora, de los comportamientos de la educadora que involucran la manipulación del entorno físico, temporal, de interacción o instrucción para apoyar la adaptación, la competencia o el aprendizaje del párvulo. Las “prácticas apropiadas específicas” son observables y medibles. Los rótulos de las prácticas de enseñanza también derivan de las interacciones con profesores experimentados o de instrumentos diseñados para medir la fidelidad de los docentes en la implementación de buenas prácticas, como: a) el Sistema de puntuación de evaluación en el aula, CLASS (Pianta, La Paro, y Hamre, 2008), b) Early Childhood Environment Rating Scale (ECERS-3; Harms, Clifford, & Cryer, 2014), c) la pauta de observación piramidal de la enseñanza (Hemmeter, Fox, & Snyder, 2014); d) la

matriz de evaluación de necesidades basada en el rendimiento (Snyder & Wolfe, 2008), o de los planes de estudio para la primera infancia, que especifican prácticas pedagógicas a ser consideradas en el diseño e implementación de experiencias para el aprendizaje. En el modelo piramidal, por ejemplo, la fidelidad de implementación de práctica se ha medido usando 2 horas de observación y 15 a 20 min de entrevista. El Instrumento usado consta de 108 indicadores organizados en 15 aspectos claves sobre la práctica. El registro indica la presencia de los 15 aspectos y porcentaje de tiempo sin faltas, en tramos de 10 minutos. Se ha usado su aplicación en tres sesiones para caracterizar la fidelidad con que implementa la educadora.

El estudio de clases para La sustentación del Sistema de andamiaje

Bajo el modelo de “Lesson Study” -Estudio de Clases- (Isoda, Arcavi y Mena, 2007) y Open Approach -enfoque abierto- para la enseñanza (Isoda y Olfos, 2009), Goldrine, Olfos y Estrella (2014) exploran el CC y CP en futuras educadoras de párvulos, como modelo de capacidad para enseñar el número, para luego validar la efectividad de un sistema de andamiaje sobre conocimiento, creencias y prácticas de futuras educadoras de párvulos, en comunidades de aprendizaje, usando ciclos de Lesson Study (Olfos, Goldrine, y Morales, 2019). Los logros alcanzados muestran el potencial de las Comunidades de Reflexión sobre la Práctica (CRP) para proveer andamiaje a educadoras en formación y en servicio, dando luces para el escalamiento de la iniciativa.

Los Estudios de Clases son realizados entre los investigadores y 14 Educadoras distribuidas en 5 grupos. Cada grupo de estudio de clases se reúne semanalmente, con al menos un investigador, experto en didáctica o en socio emocionalidad, responsable de un grupo elaborador de materiales. Los grupos interactúan con monitores y el desarrollador informático, para construir 2 secuencias de 3 experiencias de aprendizaje por cada una de las 12 unidades temáticas del andamiaje, adaptables a NT1 o NT2, atendiendo a la diversidad de contextos en que se podrían implementar. Cada experiencia para el aprendizaje, de 30 a 40 minutos se implementa en dos oportunidades vía estudios de clases. Los asistentes y el editor gráfico, guiados por los planes de clases e investigadores, producen los videos, PPT y prototipos de materiales concretos para las sesiones de cada secuencia a colocar en la plataforma de Andamiaje. Las presentaciones de video y PPT son interactivas para los párvulos, con audio y temporizador de imágenes, también controlables por la educadora. Se incluyen dos tipos de videos: los Videos-inicios presentan un tema, desafío a los párvulos, dando tiempos e indicaciones a la educadora para que provea materiales y lidere las interacciones adecuadas. Los Video-casos muestran interacción de educadoras con párvulos, estrategias y sub-comprensiones de párvulos. El PPT muestra productos, representaciones, compara estrategias, ofrece tareas de refuerzo. El material, simultáneamente aporta al párvulo y ofrece un andamiaje a la educadora en Conocimientos y e PAD. Las educadoras podrán elegir secuencias de cada unidad temática, atendiendo a su contexto sociocultural (v.g. urbano marginal, rural, migrante, de diversidad familiar, diversidad étnica, entre otros), al contexto de exigencia de dignidad a las personas y de tolerancia a la diversidad que demanda el movimiento nacional actual, y a los requerimientos de cambio climático (desastres naturales, energías limpias y reciclaje). Cada secuencia busca atender a intereses diversos (artísticos, prácticos, comunicativos) de los párvulos. El enfoque de las Experiencias para el Aprendizaje es holístico, con desafíos en contextos cotidianos y significativos para la edad, lúdico, para desarrollar el pensamiento matemático y la socio emocionalidad en los párvulos. Los materiales y videos mencionados proveerán a las educadoras los insumos y protocolos de actividades ejemplares, desafiantes, acorde al currículo y temáticas ligadas

a contextos familiares para el aula, en conformidad a las contingencias sociales nacionales y requerimientos de la sustentabilidad global.

Síntesis

Frente al requerimiento actual, de que las educadoras de párvulo implementen actividades de aprendizaje en ambientes lúdicos que desarrollen la convivencia y las habilidades sociales y emocionales en los párvulos (Brown & Mowry, 2015) desde la transversalidad en el currículum (Ministerio de Educación, 2018), variadas experiencias de Estudio de Clases están siendo implementadas para proveer los componentes de un sistema de andamiaje en matemática para educadoras de Párvulo. Un sistema que opera desde el Entrenamiento Basado en la Práctica (EBP) y la Reflexión en Comunidades de Práctica (RCP). De esta forma se consolida una propuesta innovadora a la oferta de cursos para el desarrollo profesional de las Educadoras de Párvulo en servicio en nuestro país.

Referencias

- Belland, B. R., Walker, A. E., Kim, N. J., & Lefler, M. (2017). Synthesizing results from empirical research on computer-based scaffolding in STEM education: A metaanalysis. *Review of Educational Research*, 87(2), 309-344.
- Brown, C. P., & Mowry, B. (2015). Close early learning gaps with Rigorous DAP. *Phi Delta Kappan*, 96(7), 53-57.
- Carrillo, J., Contreras, L.C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro*, 193-200. Granada, España: Comares.
- Chien, N., Howes, C., Burchinal, M., Pianta, R., Ritchie, S., Bryant, D., & Barbarin, O. (2010). Children's classroom engagement and gains in academic and social-emotional outcomes across pre-kindergarten. *Child Development*, 81(5), 1534-1549.
- Copple, C., & Bredekamp, S., Eds. (2009). *Developmentally appropriate practice in early childhood programs serving children from birth through age 8*, (3rd Ed.). National Association for the Education of Young Children. Washington, DC: NAEYC.
- Darling-Hammond, L., & Youngs, P. (2002). Defining "highly qualified teachers": What does "scientifically-based research" actually tell us?. *Educational researcher*, 31(9), 13-25.
- Espinoza, V., & Rosas, R. (2016). Creencias de educadoras y miembros de equipos directivos de centros educativos de educación parvularia respecto del uso de recursos tecnológicos como herramientas de aprendizaje. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 42(2), 95-112.
- Gauvain, M., & Perez, S. M. (2015). Cognitive development in cultural context. In R. M. Lerner, L. Liben, & U. Müller (Eds.), *Handbook of child psychology and developmental science*, Vol. 2: Cognitive processes (pp. 854-896). Hoboken, NJ: Wiley.
- Glasersfeld, E. von (1989). Cognition, Construction of Knowledge and Teaching. *Synthese*, 80(1), 121-140.
- Göll-Güven, M. (2017). Play and flow: Children's culture and adults' role. *Erken Çocukluk Çalışmaları Dergisi*, 1(2), 267-281.

- Goldrine, T., Olfos, R. y Estrella, S. (2014). Conocimientos para la enseñanza del número en educadoras de párvulos en formación docente inicial. *Revista Chilena de Educación Matemática*. 8 (1), 40-45.
- Hill, H. C.; Ball, D. L.; Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372 - 400.
- Harms, T., Clifford, R. M., & Cryer, D. (2014). Early Childhood Environment Rating Scale, third edition (ECERS-3). New York, NY: Teachers College Press.
- Hartley, B. (2019). Developmentally appropriate practice: An evolving framework for teaching young children En Kostelnik, M., Soderman, A., Whiren, A., and Rupiper, M. (2019). Developmentally appropriate curriculum: Best Practices in Early Childhood Education. Pearson.
- Hemmeter, M. L., Hardy, J. K., Schnitz, A. G., Adams, J. M., & Kinder, K. A. (2015). Effects of training and coaching with performance feedback on teachers' use of Pyramid Model practices. *Topics in Early Childhood Special Education*, 35(3), 144- 156.
- Isoda y Olfos, (2009), El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Valparaíso. Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Isoda, M, Arcavi, A. & Mena, A. (2008) "El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global". Valparaíso. Ediciones Universitarias de Valparaíso. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Krauss, S., Baumert, J., & Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *Zdm*, 40(5), 873-892.
- Lettington, M. (2018). Developmentally Appropriate Practice in Early Childhood Education. Master Thesis. Northwestern College.
- Ministerio de Educación (2018). Bases Curriculares Educación Parvularia.
- OCDE (2019) "Estrategia de Competencias de la OCDE 2019: competencias para construir un futuro mejor". Capítulo 4. Desarrollar las competencias necesarias a lo largo de la vida. Fundación Santillana, España.
- Olfos, R., Goldrine, T. y Morales, S. (2019). Diseño y valoración de una secuencia de sesiones para desarrollar la capacidad de enseñanza sobre la cuantificación en la Formación Inicial de Educadoras de Párvulos. En R. Olfos, E. Ramos y D. Zakaryan (Eds.), *Formación de profesores: Aportes a la práctica docente desde la Didáctica de la Matemática* (pp. 6-45). Barcelona, España: Graó.
- Pianta, R. C., La Paro, K. M., & Hamre, B. K. (2008). Classroom Assessment Scoring System: Manual Pre-K. Education Review//Reseñas Educativas.
- Raes, A., Schellens, T., De Wever, B., & Vanderhoven, E. (2012). Scaffolding information problem solving in web-based collaborative inquiry learning. *Computers & Education*, 59(1), 82-94.
- Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

- Snyder, P. A., Hemmeter, M. L., & Fox, L. (2015). Supporting implementation of evidence-based practices through practice-based coaching. *Topics in Early Childhood Special Education*, 35(3), 133-143.
- Snyder, P., & Wolfe, B. (2008). The big three process components of effective professional development: Needs assessment, evaluation, and follow-up. En P. J. Winton, J. A. McCollum, & C. Catlett (Eds.), *Practical approaches to early childhood professional development: Evidence, strategies, and resources* (pp. 13–51). Washington, DC: Zero to Three Press.

MODELADO MATEMÁTICO PARA EDUCACIÓN STEM. UNA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

María D. Aravena Díaz

Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas,
Universidad Católica del Maule, Talca, Chile

El estudio formó parte del Proyecto FONIDE 1700070, donde se implementó una propuesta STEM para formar a los futuros profesores en el desarrollo de estas habilidades, tomando el Modelado Matemático como base del proceso. El marco de referencia se basa en modelado para educación STEM, como puente para la integración de las disciplinas, pues aún los profesores no están preparados para lidiar en escenarios que requiere la escuela del Siglo XXI. La metodología fue de corte cuantitativa, donde se seleccionó una muestra no probabilística de 31 futuros profesores/as y los datos fueron recogidos mediante pretest y postest. Para el análisis de resultados se utilizó estadísticos descriptivos, prueba de Wilcoxon y componentes principales. En los resultados se observa altos niveles de logro en las habilidades STEM, en contraste con el pretest, donde las habilidades matemáticas tienen una influencia positiva muy alta con el uso de las tecnológicas. Se evidencia que Modelado para STEM resulta prometedor para una verdadera alfabetización científica y tecnológica en formación inicial de profesores y en alumnos del sistema escolar.

Modelado matemático, desarrollo de habilidades, formación de profesores, Educación STEM

Introducción

El Modelado Matemático para educación STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) está siendo cada vez más abordado en los sistemas educativos, para preparar a las futuras generaciones en los nuevos desafíos que requiere la escuela del siglo XXI (Corfo y Fundación Chile, 2017, Kurup, Li, Powell & Brown, 2019). Las razones que están en la base de las propuestas se centran en que hoy más que nunca los avances de la sociedad giran en torno a la ciencia, la tecnología y la ingeniería, apoyados por las herramientas analíticas de la matemática (Fadzil & Saat, 2014; Hallström & Schönborn, 2019). Considerando que la formación inicial de profesores, tanto en Chile como en diversos países, no está respondiendo a las demandas actuales, permeada por el acelerado progreso en el ámbito científico y tecnológico, se considera como esencial que dicha formación esté enfocada en el desarrollo de habilidades STEM. Para lograr el desarrollo de habilidades, tanto en la formación de profesores como de alumnos, se recomienda abordar la educación STEM mediante el modelado matemático, como base para promover la integración en estas áreas (Hallström & Schönborn, 2019), así como un medio para promover una auténtica alfabetización STEM (Li & Schoenfeld, 2019). El modelado matemático ha sido considerado como un puente para integrar estas disciplinas, ayudando a los estudiantes a transitar entre las áreas STEM (Gilbert, Boulter & Elmer, 2000). Sin embargo, trabajar en procesos de modelado, todavía es una tarea pendiente y en el caso STEM, los futuros profesores, como profesores en servicio, aún no están preparados para lidiar en estos escenarios (Kurup et. al, 2019), para que los alumnos logren una “auténtica alfabetización científica y tecnológica” (Hallström & Schönborn, 2019, p 9; Sanders, 2009).

En este contexto, se abordó este desafío de integrar ambos campos a la vez, mediante un programa de intervención didáctica, enfocado a la resolución y diseño de problemas en contextos auténticos, que involucra aspectos culturales, ambientales y sociales (Orey & Rosa, 2018), para su posterior implementación en las aulas, de tal manera de potenciar y retroalimentar el proceso formativo de los profesores en formación (Hallström & Schönborn, 2019; Li & Schoenfeld, 2019).

Modelación matemática para la educación STEM

La formación de profesores ha sido foco de investigación durante décadas, especialmente en proceso de modelado matemático, donde se han generado propuestas para apoyar sus procesos formativos con el propósito de mejorar las prácticas en el sistema educativo (Aravena 2016; Aravena, et al., 2019). Sin embargo, sobre la naturaleza del modelado como un puente entre las disciplinas STEM es aún incipiente, pero se reconoce como importante para preparar a los profesores y alumnos en educación STEM (Hallström & Schönborn, 2019; Li & Schoenfeld, 2019). Las razones que están en la base para educación STEM, es debido a que la integración de estas disciplinas permite profundizar en los conocimientos, ampliando su comprensión mediante su uso social y contextos STEM culturalmente relevantes (Beers, 2013; Ritz & Fan, 2014). Cuando se hace referencia al concepto de integración STEM, en el estudio se ha considerado como una oportunidad para que los estudiantes puedan experimentar el aprendizaje en situaciones auténticas del mundo real (Wang, et al., 2011), donde la integración STEM no son meras fusiones entre las disciplinas, sino más bien una cooperación interdisciplinaria que ayude a desarrollar habilidades que atraviesan las disciplinas (Hallström & Schönborn, 2019).

El modelado matemático como base de STEM se considera como campo natural de aplicación de los fenómenos del mundo real (Hallström & Schönborn, 2019), especialmente en la actualidad, por la aplicación del desarrollo de la ciencia y la tecnología, mediante la búsqueda de relaciones y su descripción a través del lenguaje matemático (Hallström & Schönborn, 2019), que acompañado de soporte tecnológico, proporciona una mayor comprensión para el desarrollo del conocimiento (Sanders, 2009; Wang et al. 2011; Greefrath 2011). Sobre el significado de modelo matemático se ha considerado lo propuesto por Blum & Niss (1991), donde los modelos matemáticos son representaciones simplificadas de la realidad observada mediante métodos matemáticos, distinguiéndose diferentes ciclos para usar y crear un modelo matemático (Blum & Niss, 1991; Maaß, 2006). En el estudio se tomó como referente el ciclo de Maaß (2006) y las recomendaciones de Blum & Borromeo (2009), para trabajar en las diferentes etapas del ciclo de modelado.

MÉTODO

La metodología seguida en el estudio fue de corte cuantitativa, cuasi-experimental, sin grupo control. A continuación, se presenta las etapas seguidas en la Investigación.

Contexto y participantes. Para la selección de la muestra se utilizó un muestreo no probabilístico, debido a que los sujetos debían cumplir criterios mínimos para formar parte del proceso formativo: estar cursando el 6to semestre académico donde realizan su primera pre-práctica de aula y haber superado asignaturas de especialidad hasta ese nivel, junto a las asignaturas de educación. Los estudiantes que cumplieron con los requisitos fueron 31, de los cuales fueron 10 (32,26%) mujeres y 21 (67,74%) hombres. Las razones de tales criterios aseguran la fidelidad para orientarlos en el

diseño de una propuesta con STEM, intervenir en el sistema escolar y analizar los efectos de la implementación, para proporcionar retroalimentación sobre su proceso formativo.

Propuesta de intervención. El proceso de aprendizaje es un proceso constructivo, que se caracteriza por los significados asociados a las tareas de modelado en contextos STEM. El enfoque fue profundizar conocimientos, desarrollar las habilidades STEM y diseñar e implementar problemas para promover experiencias de aprendizaje, sin perder de vista el entorno sociocultural de los estudiantes. En la implementación se consideró: 1) Pretest; 2) Diseño de un plan de clases que incorpora tareas de modelado en contextos auténticos de la región (agricultura, agroecología, sistemas de riego, energía sustentable y construcción); 3) implementación del Plan de clases en el aula de secundaria; 4) Análisis de implementación; 5) retroalimentación del proceso formativo y 6) Postest.

Instrumentos de recogida de datos. Se diseñaron dos pruebas (pretest y postest) con las siguientes habilidades: (1) Matemáticas: Modelar, representar, argumentar y comunicar; (2) Científicas: explorar, procesos investigativos, experimentar y comunicar y argumentar; (3) Tecnológicas: selección y uso de medios tecnológicos para organizar y procesar información, simulaciones, representaciones; visualizaciones de objetos en 2D y 3D y comunicarse a través de estos objetos; y (4) Ingeniería: uso de plataformas, experimentación y simulaciones. Los instrumentos fueron sometidos a expertos, seleccionados en base a perfiles disciplinarios y metodológicos.

Métodos de Análisis. Para el análisis de resultados, entre el pretest y el postest, se utilizó estadísticos descriptivos, análisis de consistencia interna, Prueba de Wilcoxon para analizar el progreso en las habilidades, con un nivel de significancia del 5%, y componentes principales para caracterizar las habilidades STEM. En el análisis estadístico se utilizó el software R, no comercial, de código fuente abierto.

RESULTADOS

En la tabla 1 se muestran los resultados por género, donde se puede observar los logros en las habilidades relacionadas con la prueba preliminar donde, tanto hombres como mujeres, muestran bajas tasas de rendimiento. En el caso de las habilidades matemáticas, en promedio, no superan el 17 %. Lo mismo ocurre con las habilidades científicas y tecnológicas, ya que los porcentajes de logro inicial no superan el 22% y el 40%, respectivamente. Al final de la experiencia, se puede observar un progreso en dichas habilidades. En las habilidades matemáticas, superan el 50%, y el mayor desempeño promedio son las tecnológicas, donde superan el 67%, cuyo logro promedio en las mujeres es superior al 80%. Respecto de las habilidades científicas, aunque progresaron superando el 40%, son las que alcanzan los menores logros.

Sobre el progreso obtenido, se puede observar que en las habilidades matemáticas tanto hombres ($p < 0,001$) como mujeres ($p < 0,009$), han logrado avances significativos al final de la experiencia. Lo mismo se aplica a las habilidades científicas y tecnológicas, donde los hombres ($p < 0,001$ y $p < 0,001$) y las mujeres ($p < 0,049$ y $p < 0,007$), han alcanzado altas tasas de rendimiento.

Habilidad/Categoría	Pretest		Posttest		W-p	
	M	F	M	F	M	F
1. Matemáticas	13.7	16.8	50.4	63.8	<0.001	<0.009
Modelar	15.0	16.3	47.8	58.5	<0.001	<0.009
Representar	31.5	35.8	66.0	82.1	<0.001	<0.008
Com. y argumentar	13.1	17.0	58.8	66.5	<0.001	<0.009
2. Científicas	16.0	21.3	41.6	40.0	<0.001	<0.049
3. Tecnológicas	36.5	39.8	67.9	84.2	<0.001	<0.007

Tabla 1. Resultados porcentuales entre pretest y posttest y Prueba de Wilcoxon por género

En la figura 1 se muestra la gráfica de componentes principales y un ejemplo del problema implementado en el pretest, donde modelan el volumen de las barricas de vino y estudio de condiciones para almacenar vino. En el gráfico se indica la influencia de los coeficientes de cada variable para el primer componente (*Eje X*), versus el segundo componente (*Eje Y*). Se observa que las habilidades matemáticas tienen una influencia positiva, con alta correlación con las habilidades tecnológicas, no así con las habilidades científicas, aunque es positiva, se encuentran más alejadas.

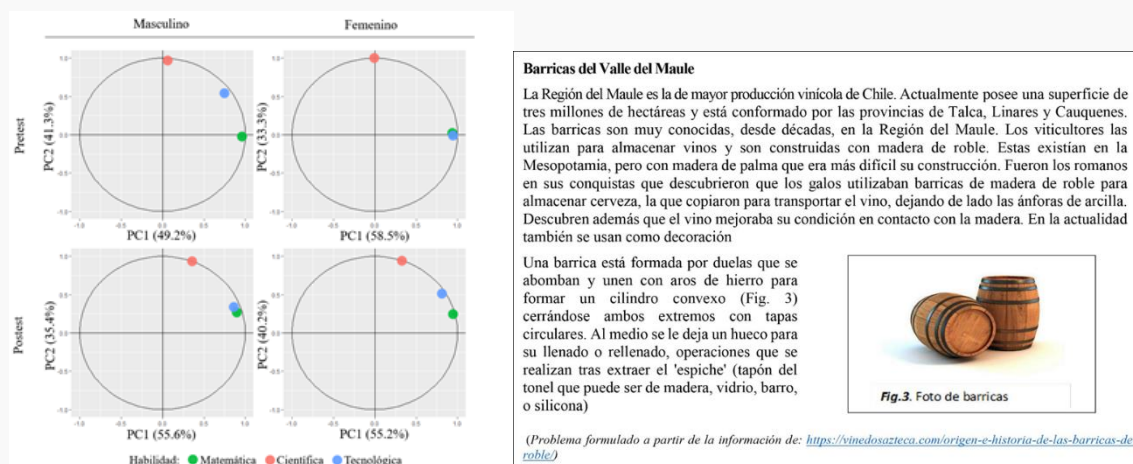


Figura 1. Gráfica de componentes principales y ejemplo problema del pretest

CONCLUSIÓN

Un trabajo matemático basado en procesos de modelización con enfoque STEM es prometedor para formar a los futuros docentes, ayudándoles a fortalecer su formación. Al final de la experiencia hay un progreso significativo en el desarrollo de las habilidades, considerando que al inicio de la experiencia los resultados estaban muy descendidos, en particular, en el ciclo de modelado. Las herramientas tecnológicas, ayudó a los futuros profesores a adquirir conocimientos integradores, al observar los fenómenos desde diferentes perspectivas (Wang, et al., 2011). Asimismo, ha dado luces para fortalecer las habilidades científicas y generar un mayor acercamiento entre las habilidades.

Sería de interés en la formación de futuros profesores, formular problemas auténticos STEM e integrar su formación con la práctica real, por la efectividad en la retroalimentación de sus procesos formativos (Kurup, et al., 2019). No obstante, no es posible extrapolar estos resultados, debido al tamaño de la muestra, por lo que sería recomendable implementar este tipo de propuesta en contextos similares para poder validar este estudio.

Referencias

- Aravena, M., Rodríguez, M; Sanhueza, S.; Seckel, M.; Urrutia, A. (2019). *Informe final FONIDE 1700070*. Fondo Nacional de Investigación y Desarrollo en Educación. Ministerio de Educación de Chile.
- Aravena, M. (2016). Modelación Matemática en Chile. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.). *Investigaciones Latinoamericanas*. Barcelona. Gedisa.
- Beers, S.Z. (2013). 21st Century skills: Preparing students for their future. STEM: Science, technology, engineering, math. Retrieved from: https://www.mheonline.com/mhmymath/pdf/21st_century_skills.pdf.
- Blum, W. & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68. <https://doi.org/10.1007/bf00302716>.
- Corfo y Fundación Chile. (2017). Preparando a Chile para una sociedad del conocimiento. Hacia una coalición que impulse la educación STEAM. Recuperado de http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/Image/portal/documentos/STEM_FCh_digital.pdf.
- Fadzil, H. M., & Saat, R. M. (2014). Enhancing STEM Education during School Transition: Bridging the Gap in Science Manipulative Skills. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 10(3), 209-218. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2014.1071a>
- Gilbert, J. K., Boulter, C. J., & Elmer, R. (2000). Positioning models in science education and in design and technology education. In J. K. Gilbert & C. J. Boulter (Eds.), *Developing Models in Science Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling—Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling, ICTMA 14* (pp. 301–304). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30.
- Hallström, J., Schönborn, K.J. (2019) Models and modelling for authentic STEM education: reinforcing the argument. *IJ STEM Ed* 6, 22. <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0178-z>.
- Kurup, P.M., Li, X., Powell, G., Brown, M. (2019). Building future primary teachers' capacity in STEM: based on a platform of beliefs, understandings and intentions. *IJ STEM Ed* 6, 10. <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0164-5>.
- Li, Y., Schoenfeld, A.H. Problematising teaching and learning mathematics as “given” in STEM education. *IJ STEM Ed* 6, 44 (2019). <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9>.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, Vol. 38, pp.113-142. Retrieved from: <https://pdfs.semanticscholar.org/0303/d30d25016a810887169b23259d7aa83683d1.pdf>.

- Orey, D. C., & Rosa, M. (2018). Developing a mathematical modelling course in a virtual learning environment. *ZDM*, 50(1-2), 173-185. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0930-8>.
- Ritz, J. M., & Fan, S. C. (2015). STEM and technology education: International state-of-the-art. *International Journal of Technology and Design Education*, 25(4), 429-451. <https://doi.org/10.1007/s10798-014-9290-z>.
- Wang, Hui-Hui; Moore, Tamara J.; Roehrig, Gillian H.; and Park, Mi Sun (2011) "STEM Integration: Teacher Perceptions and Practice," *Journal of Pre-College Engineering Education Research (J-PEER)*: Vol. 1: Iss. 2, Article 2. <https://doi.org/10.5703/1288284314636>.



NIVEL DE CONOCIMIENTO DE LAS EDUCADORAS DE PÁRVULOS EN EL ÁREA DE LAS CIENCIAS Y MATEMÁTICAS UNA REVISIÓN SISTEMATIZADA

Carolina Leiva; Carolina Ramírez; Carolina Garrido; Constanza Espinoza; Gabriela Cartes
Universidad Adventista de Chile

El propósito de la presente investigación es explorar a través de evidencias científicas el conocimiento que tienen las Educadoras de Párvulos en las Áreas de las Ciencias y Matemática. Mediante una Revisión Sistemática se pretende dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación ¿Cuál es el nivel de conocimiento de las Educadoras de Párvulo en las áreas de Ciencias y Matemática? El estudio tiene un diseño de investigación cualitativa por tanto presenta información descriptiva, para esto se realizó una búsqueda de artículos publicados entre los años 2010 al 2019 en tres bases de datos (Ebsco, ProQuest, Web Of Science). Los artículos seleccionados abordan factores que influyen en la temática investigada, estos son: conocimiento pedagógico; actitudes, creencias y confianza; y las dificultades que tienen los Maestros de Preescolar en las áreas de las ciencias y la matemática. En cuanto a los hallazgos encontrados es posible declarar algunos aspectos que influyen en la disposición de los maestros para enseñar dichas materias.

Maestro de Preescolar; Conocimientos; Ciencias; Matemática.

Introducción

La Educación Parvularia de acuerdo con al Art. 18 de la Ley N° 20.370, citado en las Bases

Curriculares de la Educación Parvularia (2018 p.29), se define como:

El nivel educativo que atiende integralmente a niños desde su nacimiento hasta su ingreso a la Educación Básica, sin constituir antecedente obligatorio para ésta. Su propósito es favorecer de manera sistemática, oportuna y pertinente el desarrollo integral y aprendizajes relevantes y significativos en los párvulos.

En la actualidad la Educación Parvularia ha adquirido una creciente relevancia en Chile, como fue mencionado anteriormente, este realce se manifiesta en las recientes políticas públicas anunciadas, como ha sido la creación de la Subsecretaría de Educación Parvularia, el ingreso de las Educadoras Párvulos al Sistema del Desarrollo Profesional Docente, entre otros. Esto coincide con lo que ocurre a nivel internacional, donde además existe evidencia de grandes expectativas en lo que respecta a los aprendizajes y logros de los niños pequeños. Pese a ello, tales expectativas no necesariamente se relacionan con lo que ocurre en esta materia acerca de la preparación y formación de los educadores de este nivel, las cuales suelen ser bastante cuestionadas (Bowman et al., citado en Opazo, 2015). Así lo evidencia los resultados de la prueba INICIA (Ministerio de Educación, 2013), la cual señala que los estudiantes de las diversas carreras de Pedagogía poseen la mitad de los conocimientos que deberían tener para realizar su labor apropiadamente. Cabe mencionar que la percepción del conocimiento de las Educadoras de Párvulos no coincide con el conocimiento real. Esto lo afirma Moreno & De la Herrán (2017), en su investigación sobre el conocimiento disciplinar y pedagógico de las Educadoras de Párvulos en Chile, ya que ellas califican como excelente sus

conocimientos y en la evaluación aplicada en las áreas que debe manejar una profesional de educación inicial obtuvieron menos de la mitad, en respuestas correctas, siendo muy bajo los resultados en relación a la percepción declarada al inicio del estudio.

Por otro lado, la enseñanza de las Ciencias y Matemáticas en niños y niñas de edad preescolar resulta relevante para su desarrollo, así lo mencionan distintos autores como Andersson y Gullberg (2012, p.276). En cuanto al área de las matemáticas Piaget (1975) postula que:

El niño construye el conocimiento lógico matemático, coordinando las relaciones simples que previamente ha creado entre los objetos, lo cual, viéndolo desde este punto de vista, exige que el docente sea conocedor de todos los aspectos relacionados con dicho tema para orientar y potenciar estos procesos en los niños y así lograr la consolidación de un aprendizaje significativo, integrador, autónomo, comprensivo.

En este aspecto, la Educadora de Párvulos adquiere un rol esencial en el proceso educativo que ocurre en los distintos programas del nivel educacional, “Esto implica desplegar habilidades, disposiciones y conocimientos (...) mostrando así la importancia de la educación inicial, para los niños y niñas” (BCEP, 2018 p. 28).

Debido a lo expuesto anteriormente, resulta necesario responder la pregunta ¿Cuáles son los conocimientos de las áreas de Ciencias y Matemáticas, que deben desarrollar los Educadores de Párvulo? Tal como lo manifiestan las BCEP (2018, p. 81 y 94):

En el área de la Matemática se deben desarrollar habilidades tales como: ubicación en el espacio tiempo, relaciones de orden, comparación, clasificación, seriación, identificación de patrones. Además, la construcción de la noción de número y uso inicial de la función ordenadora y cuantificadora del mismo, en un ámbito numérico pertinente al nivel de enseñanza (...) En cuanto al área de las Ciencias se deben desarrollar habilidades tales como: Indagar, observar, preguntar, inferir, predecir comunicar, buscando establecer relaciones entre los hechos, y experiencias o vivencias que se le propician al párvulo.

En este marco, resulta oportuno investigar sobre los conocimientos generales que poseen los Educadores de Párvulos, específicamente en lo que refiere a las áreas de Ciencias y Matemática, mediante la recolección de insumos teóricos y científicos que sustentan este estudio. Y cómo pueden influenciar en el proceso de enseñanza aprendizaje de los párvulos.

La investigación de este nivel educacional es limitada, “hasta la fecha pocos estudios se han centrado en los profesores de preescolar” (Andersson & Gullberg, 2012, p. 277). Un ejemplo de esto es la tesis *Percepción sobre el Conocimiento Disciplinar y Pedagógico de Ciencias y Matemática en Educadoras de Párvulos, Chillán* realizado por Alarcón et al. (2018), en el cual se han enfocado en los Educadores del nivel Medio de Educación Parvularia. Por ende, esta investigación pretende abarcar todos los niveles de Educación Inicial, puesto que, los Educadores deben tener los conocimientos necesarios, para desenvolver su papel mediador y cognitivo en los tres niveles de Educación Parvularia (Sala Cuna, Medio y Transición). Pretendiendo dar así una acertada respuesta a la pregunta planteada, ¿Cuál es el Nivel de Conocimiento de las Educadoras de Párvulos en las áreas de Ciencias y Matemática?

El Objetivo General de este estudio fue analizar la evidencia científica sobre el conocimiento de Educadoras de Párvulos en las áreas de Ciencias y Matemática.

Objetivos específicos.

- (1) Identificar cuáles son los conocimientos que tienen las Educadoras de Párvulos en las áreas de Ciencias y Matemática.
- (2) Describir el nivel de conocimiento de las Educadoras de Párvulos en el área de Ciencias.
- (3) Describir el nivel de conocimiento de las Educadoras de Párvulos en el área de Matemática.

Método

El método de investigación, consistió en una revisión sistematizada, la cual proporciona un marco de trabajo riguroso y fiable para llevar a cabo las revisiones bibliográficas, las cuales son (o deberían ser) una fase obligada de todo nuevo proyecto de investigación académica (Codina, 2020). Respecto a la búsqueda de información, se utilizaron artículos de revistas indexadas buscadas en las bases de datos de ProQuest, Ebsco y Web of Science.

Los criterios generales de elegibilidad para la búsqueda se basaron en las siguientes características:

Período de tiempo, desde el año 2010 al 2019; Idioma, los idiomas de búsqueda estuvieron en español e inglés; Tipo de documento, la búsqueda se limitó únicamente a artículos publicados en revistas científicas indexadas y académicas de texto completo; Profesores que se desempeñen en nivel inicial.

Siendo los criterios de exclusión artículos publicados años anteriores al período de búsqueda, aquellos que no pertenecían a artículos de investigación, participantes que se desempeñan en otro nivel educativo o maestros preescolares en formación, y por último por no tener relevancia con el tema de estudio.

Para realizar la búsqueda en las bases de datos Ebsco, ProQuest y Web of Science se utilizaron operadores booleanos como AND y OR.

Discusión

A continuación, se realiza una interpretación de los resultados obtenidos en los artículos analizados, el cual contempla la información exacta de los documentos sin exponer ningún tipo de juicio de valor.

En los artículos seleccionados se ha obtenido e incorporado información que es relevante para el estudio. En este sentido los autores Chee et al. (2017), Lee (2017), Andersson & Gullberg (2012), y Bose et al. (2016), mencionan en sus postulados los conocimientos pedagógicos que tienen los Docentes de Preescolar en el área de Ciencias y Matemática, además de brindar recomendaciones para mejorar la enseñanza y conocimientos de dichas materias.

En el estudio de Chee et al. (2017) se realizó una investigación acerca del conocimiento tecnológico y pedagógico de los profesores de preescolar para preparar a los estudiantes para el primer año escolar. En el cual se indagó en la comprensión, la transformación y la práctica de los docentes en

la sala de clases, en donde los autores concluyeron que los profesores de preescolar tienen la necesidad de capacitarse, para así obtener mayor conocimientos de contenidos, pedagógicos y tecnológicos. Se llegó a la conclusión de que los maestros de preescolar sí tienen los conocimientos para enseñar acerca de Matemática y Ciencias, aunque solo pueden enseñar estas áreas utilizando el método convencional.

En el estudio de Lee (2017), se realizó una entrevista de matemáticas (PCK), la cual presentaba una situación hipotética, en donde los encuestados debían responder preguntas que apuntaban a tres capacidades (notar, interpretar y mejorar), esto en relación a las oportunidades para enseñar Matemática. Siendo un aporte del estudio al proporcionar, la instancia para apoyar a los maestros de preescolar, otorgando las situaciones para poder analizar e identificar, oportunidades para la enseñanza de la Matemática en la cotidianidad del aula. En cuanto a los resultados obtenidos, arrojaron que la mayoría de los maestros evaluados eran capaces de interpretar conceptos matemáticos como: clasificación, sentido numérico y la medición. Este estudio concluyó que es muy importante que los maestros puedan identificar y proveer de situaciones en las cuales puedan enseñar las matemáticas mediante el juego, pero además de esto es notable destacar que el papel del desarrollo profesional está muy ligado a la formación inicial de los maestros en sus universidades y a la cantidad de años de experiencia en el aula y por último la búsqueda de conocimiento constante y estudios posteriores que pudieran prepararlos de una mejor manera.

En cuanto a los artículos restantes, creados por los autores Chen et al. (2013), y Pendergast et al. (2015), se ha planteado las actitudes, creencias y confianzas que tienen los maestros de la primera infancia sobre la enseñanza de las Matemática y Ciencias tempranas. Sin embargo, estos resultados son difíciles de comprobar debido a que fueron obtenidos mediante encuestas, por ende, reflejan la comprensión que tiene cada individuo frente a las preguntas de la encuesta y la voluntad de ser sincero, siendo posible que estos sean alterados por los maestros por demostrar creencias más “socialmente aceptables”.

Otros autores como Ormeño et al. (2017), observaron y analizaron cuáles son las dificultades de las Educadoras de Párvulos en relación al desarrollo del pensamiento Lógico - Matemático y las estrategias que utilizaban para potenciarlo en niños/as de entre tres y seis años, para la recolección de datos en esta investigación se creó un guión de grupo focal y observación en el aula.

Conclusión

Este estudio tenía como objetivo identificar y describir el conocimiento de los maestros de preescolar en las áreas de Ciencias y Matemática, de acuerdo a las evidencias científicas disponibles, es posible declarar que no se logró dar respuesta a estos propósitos iniciales, sin embargo, estos nos han permitido descubrir aspectos que influyen en la disposición de los docentes para enseñar dichas materias.

A pesar de los escasos artículos relacionados a la línea de investigación, los resultados de los estudios recopilados revelan que algunos maestros de Educación Inicial consideran requerir de apoyo para mejorar y potenciar sus conocimientos en las áreas mencionadas, del mismo modo no cuentan con estrategias adecuadas para reforzar los diferentes contenidos, también argumentan que su falta de conocimiento es a causa de la formación académica que recibieron, asimismo parte

de los docentes perciben tener conocimientos insuficientes, por lo que se privan de enseñar estas disciplinas.

Esta búsqueda nos invita y demuestra la necesidad de realizar futuras investigaciones en cuanto al tema de estudio.

Referencias

- Andersson, K., & Gullberg A. (2012). What is science in preschool and what do teachers have to know to empower children?. *Cultural Studies of Science Education*. Recuperado de: <https://search.proquest.com/docview/1536622261/fulltextPDF/32498E66B5FA457FPQ/1?accountid=45418>
- Bose., Kabita., Seets & Grace. (2016). Science and Mathematic teaching through local games in preschools of Botswana. Recuperado de: <https://search.proquest.com/docview/1896123634/E2B5EC8C0C142EFQ/1?accountid=45418>
- Chee. J., Mariani, M., Jalil, A. & Mashitan, M. (2017). Exploring the issue of content, pedagogical and technological knowledge among preschool teachers. Recuperado de: <http://science-gate.com/IJAAS/Articles/2017-4-3/20%202017-4-3-pp.130-136.pdf>
- Chen, J., McCray, J., Adams, M. & Leow, C. (2013). A Survey Study of Early Childhood Teachers' Beliefs and Confidence about Teaching Early Math. Recuperado de: <https://search.proquest.com/docview/1612161176/488680E8D5D24C65PQ/1?accountid=45418>
- Codina, LI (2020). Revisiones bibliográficas sistematizadas En Ciencias Humanas y Sociales. 1: Fundamentos. Recuperado de: file:///C:/Users/Alumno/Downloads/Codina_Metodos_05.pdf
- Lee, E. J. (2017). Preschool Teachers' Pedagogical Content Knowledge in Matematics. Recuperado de: <https://search.proquest.com/docview/1927406123/8FD2574F517A43FCPQ/1?accountid=45418>
- Lugo, J., Vilchez, O. & Romero, J., (2019). Didáctica y desarrollo del pensamiento lógico matemático. Un abordaje hermenéutico desde el escenario de la educación inicial. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/jatsRepo/5177/517762280003/html/index.html>
- Moreno Vera, F. y De la Herran Gascón, A. (2017). Conocimientos Disciplinarios y Pedagógicos de las Educadoras de Párvulos en Chile. Recuperado de: <https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/47489/58061-172216-1-SM%2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Opazo, M. (2015). El conocimiento práctico de las estudiantes de Educación Parvularia sobre la enseñanza del lenguaje oral y escrito al término de su formación inicial. (Tesis de Magíster, Universidad de Chile). Recuperado de: http://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/136927/Tesis%20Mg%20Soc_MjoseOpazo.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Ormeño, C., Rodríguez, S., & Bustos, V. (2013). Dificultades que presentan las Educadoras de Párvulos para desarrollar el pensamiento lógico - matemático en los niveles de transición. Recuperado de:

<http://web.a.ebscohost.com/ehost/detail/detail?vid=2&sid=3c0b5f fd-85b8-4239-98a2-6a0492bfd408%40sdc-v-sessmgr01&bdata=JnNpdGU9ZWWhvc3QtbGl2ZQ %3d%3d>

- Pendergast, E., Lieberman-Betz, R., & Vail, C. (2015). Attitudes and Beliefs of Prekindergarten Teachers Toward Teaching Science to Young Children. *Early Childhood Education Journal*. Recuperado de: <https://search.proquest.com/docview/1855687132?accountid=45418>
- Quiroga, M., Arredondo, M. & Cafena, D., Merino, C. (2014). Desarrollo de competencias científicas en las primeras edades: el Explora Conicyt de Chile. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/pdf/834/83432362002.pdf>
- Sub Secretaria de Educación Parvularia. (2018). Bases Curriculares de Educación Parvularia. Recuperado de: https://parvularia.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/34/2018/03/Bases_Curriculares_Ed_Parvularia_2018.pdf



PARTICIPACIÓN DE ESTUDIANTES EN ARGUMENTACIONES EPISTÉMICAS EN TORNO A LAS FRACCIONES UTILIZANDO TECNOLOGÍA

Jorge Gaona

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación,
jorge.gaona@umce.cl

En esta presentación se muestran los primeros resultados de una experimentación con profesores de primer año en formación inicial donde se trabajó la argumentación a partir de una tarea sobre fracciones en una plataforma. La tarea tenía infinitas soluciones lo que permitió que emergieran diferentes estrategias, las que se discutieron y justificaron en una clase virtual. Los resultados muestran que hay un juego interesante entre las dimensiones instrumentales y discursivas, donde artefactos simbólicos fueron justificados a partir de las preguntas del profesor y donde justificaciones pasaron a ser artefactos simbólicos para conjeturas más avanzadas sobre el mismo tema.

Formación inicial de profesores, evaluación en línea, espacio de trabajo matemático.

Introducción

Según Balacheff (1987, p. 148) hay que diferenciar entre una *explicación* o *argumentación* que es un discurso que busca hacer entendible la veracidad de una proposición, una *prueba* es una explicación aceptada por una comunidad y una *demostración* es un tipo de prueba con una estructura específica que se caracteriza por ser una cadena de enunciados organizados con reglas determinadas. En el ámbito educativo se propone valorar aquellas pruebas que puedan ayudar a explicar y justificar conjeturas apoyándose en elementos matemáticos (Hanna, 2001).

Las bases curriculares de primero a cuarto medio en Chile explicitan la argumentación como una de las habilidades que se deben desarrollar en matemáticas (MINEDUC, 2019). La comunidad ha estado reportando el trabajo en formación inicial de párvulos para polígonos (Morales & Rosas, 2016), en formación inicial de profesores de enseñanza media con sistemas de ecuaciones lineales (Rodríguez-Jara et al., 2019) y con los procesos de prueba y demostración en geometría (Montoya, 2014).

Por otra parte, en el contexto de la pandemia y las clases virtuales de emergencia durante el 2020 la participación de los estudiantes es una de las problemáticas que ha emergido. El acceso y la conexión a las clases virtuales ha sido la primera barrera. Se ha reportado un promedio de 27% para el quintil más pobre y 89% para el quintil más rico de acceso a las clases virtuales en educación obligatoria (2019). En educación superior aún no hay datos reportados.

A nivel más micro, en un contexto universitario, se ha detectado poca participación de los estudiantes en las clases virtuales. De alguna forma los estudiantes no se sienten comprometidos a participar, donde las cámaras y micrófonos apagados son la tónica. En este cambio obligado hacia clases virtuales de emergencia se analizan las argumentaciones epistémicas que pueden existir entre los estudiantes y con el profesor en el contexto de una clase virtual cuando es apoyada por un sistema de evaluación en línea para una tarea de fracciones. De forma más específica, la pregunta

de investigación que se propone es ¿cuál es el trabajo matemático puesto en juego en un contexto de clase virtual donde se usa una tarea en un artefacto de evaluación en línea?

Marco Teórico

Goizueta (2019) define las cuestiones epistémicas como las instancias de conocimiento sobre la construcción y justificación del conocimiento matemático escolar cuyo uso se puede rastrear en la actividad de los alumnos. De forma más precisa, usamos el Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak et al., 2016) para descomponer la discusión epistémica en las distintas génesis y planos que ofrece este marco teórico.

El Espacio de Trabajo Matemático o ETM permite identificar y analizar el trabajo matemático de un sujeto, en este caso las discusiones entre pares y con el profesor, tomando en cuenta aspectos epistemológicos y cognitivos del tema abordado y de quien resuelve respectivamente. Estos aspectos se articulan mediante las génesis semiótica, instrumental y discursiva.

La génesis semiótica conecta el proceso de visualización en el plano cognitivo con el *representamen* en el epistemológico. Esta génesis puede comenzar por el signo en el *representamen* que es decodificado por el sujeto mediante la visualización. También puede iniciar por el sujeto que codifica y produce un signo. La instrumental conecta el proceso de construcción en el plano cognitivo con el polo de los artefactos. Cuando se trabaja con herramientas materiales, informáticas o simbólicas, está compuesta de dos procesos: el de instrumentalización y el de instrumentación. El primero, comprende la emergencia y evolución de los esquemas de uso del artefacto y la utilización de las posibilidades que ofrece el artefacto. El segundo, parte desde el sujeto y es relativo a la emergencia y evolución de los esquemas de uso y de las acciones instrumentadas, su constitución, funcionamiento, coordinación, combinación, inclusión y asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos. El trabajo matemático podría ser considerado rutinario si es que no se conecta con la validación y justificación de los artefactos. Finalmente, la discursiva, conecta el proceso de prueba con el polo del referencial teórico en el plano epistemológico y está asociado al proceso de razonamiento deductivo mediante teoremas y propiedades. En este último caso, el foco está puesto en las propiedades y teoremas, por lo que se está pensando en razonamientos que van más allá de los visuales o instrumentales, pero que pueden ser desencadenadas por estos.

Cuando no es posible distinguir qué génesis está siendo privilegiada, lo que se da de manera frecuente, el trabajo matemático se puede caracterizar mediante la conexión de dos génesis, considerando algunos de los tres planos verticales: semiótico-instrumental, semiótico-discursivo o el instrumental-discursivo (Coutat & Richard, 2011).

Metodología

La presente investigación espera ser desarrollada a través de un enfoque cualitativo, dada la naturaleza del fenómeno en estudio (Creswell & Poth, 2017).

En la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación los alumnos de primer año de la carrera Pedagogía en Matemáticas tienen una asignatura denominada TICs para el aprendizaje de las matemáticas. Uno de los objetivos propuestos fue propiciar la discusión y la argumentación sobre distintos conceptos matemáticos utilizando herramientas tecnológicas.

Se propusieron una serie de tareas en una plataforma Moodle (<http://moodle.org>) que tenía incorporado el plugin Wiris (<http://www.wiris.com>). Estas herramientas permitieron crear tareas con infinitas respuestas con el fin de propiciar la discusión.

En el cuestionario que se analiza en este trabajo cada estudiante tenía un espacio (virtual) individual donde tenía que dar tres respuestas distintas a la misma pregunta, la cual consistía en ingresar una fracción de la forma $\frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, que esté entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$. En la figura 1 se muestran algunas de las respuestas ingresadas por los estudiantes.

Figura 1: preguntas que debía responder cada estudiante.

La primera respuesta es parcialmente correcta porque ingresó un decimal en el numerador. La segunda, también es parcialmente correcta porque el valor ingresado es mayor que $\frac{1}{4}$ pero no menor que $\frac{1}{2}$. Finalmente, la tercera respuesta está correcta.

Una vez que el estudiante ingresa la respuesta, el sistema además de calificar como correcto o incorrecto lo ingresado, le entregaba un feedback automático que se muestra en la figura 2.

Figura 2: feedback automático generado por el sistema una vez que el estudiante ingresa una respuesta.

En este feedback se ubica en la recta numérica el valor ingresado y se indica si cumple con el resto de las condiciones, es decir, el feedback indica por qué es correcto o incorrecto, pero no cómo hacerlo. Además, en el caso de ser correcto lo invita a buscar otro valor que sea cualitativamente distinto al ingresado, por ejemplo, en la figura 2 que está más hacia la derecha se pide ingresar un valor más cercano a $\frac{1}{4}$.

Estas tareas se aplicaron durante el segundo semestre del 2020, fueron 15 profesores en formación (de primer año) quienes trabajaron en un primer momento en forma individual respondiendo en la plataforma durante 10 minutos y luego vino una fase de discusión. La clase al ser virtual fue grabada y se transcribieron los pasajes donde se produce una discusión epistémica.

Resultados y Conclusiones

Se trabajó en tres etapas. Clase 1: se hizo un trabajo individual en la plataforma de 10 minutos donde debían encontrar una fracción entre $1/4$ y $1/2$. El resto de la clase se discutió sobre las estrategias y generalización de resultados. La clase terminó con la pregunta: encuentre una secuencia infinita de fracciones entre $1/4$ y $1/2$. Clase 2 se hizo un trabajo grupal donde debían trabajar en buscar una respuesta a la pregunta que quedó planteada al final. Evaluación: se hizo una parte virtual donde tenían que encontrar fracciones entre dos fracciones dadas de forma aleatoria y luego, en papel, tenían que buscar una secuencia de infinitas fracciones que estuvieran entre las fracciones que habían respondido en la plataforma.

En la clase 1, posterior al trabajo individual en la plataforma, se comenzó a discutir con los estudiantes sobre las estrategias utilizadas. Solo declararon dos estrategias, una de ellas hizo aparecer la conjetura: si $1/4$ y $1/2$ se amplificaba por n entonces aparecían $n-1$ fracciones entre ellas. Uno de los estudiantes hizo la demostración de ella al finalizar la clase.

Además, en la discusión apareció otra estrategia que fue por ensayo y error que permitió entrar en una discusión epistémica. Esta discusión se caracterizó por la aparición de preguntas por parte del profesor a partir de lo relatado por los estudiantes y de respuestas que se obtenían a partir de artefactos simbólicos, por ejemplo: para solucionar una desigualdad en los números naturales se hizo “invirtiendo una desigualdad cuando se multiplicaba cruzado”. El profesor buscó la justificación de estos artefactos simbólicos llegando hasta los axiomas de orden. También se observó la aparición de argumentos circulares, donde los estudiantes usaban el mismo argumento que querían demostrar, pero expresado de una forma distinta.

En una segunda clase se extendió la pregunta hacia la búsqueda de secuencias infinitas de fracciones cuyos valores se encuentren entre $1/4$ y $1/2$. Fue una tarea más compleja para los estudiantes, pero hubo al menos dos grupos que encontraron algunas que satisfacían. Se discutió sobre la diferencia entre mostrar que una secuencia cumple para varios valores y demostrar para todo n natural, lo que se denominan argumentos empíricos versus una demostración.

Finalmente, en la evaluación se pidió a cada estudiante ingresar en la plataforma un valor entre dos fracciones dadas de forma aleatoria. Luego, de forma grupal encontrar una secuencia infinita de fracciones que estuviera entre esas mismas fracciones y demostrar que tal secuencia estaba entre ambas fracciones dadas. La respuesta y la corrección de las últimas dos se realizaba en forma manual. El argumento principal para demostrar que una secuencia infinita estaba entre dos fracciones fue análogo al mostrado en la clase 1, dicho de otra forma, la estructura de la argumentación pasó a ser un artefacto simbólico para todos los grupos.

Se observa que es difícil saber cuáles son los caminos que tomarán estas discusiones, los cuales dependen, en gran medida, del papel mediador del profesor. Es difícil pensar en una planificación a priori para saber hacia dónde llevará la discusión por lo que lo replicable no es lo que se demuestra sino el proceso de argumentación en sí mismo. También se constató un juego interesante entre las dimensiones instrumentales y discursivas, donde artefactos simbólicos fueron justificados y donde justificaciones pasaron a ser artefactos simbólicos.

El rol de la tecnología es devolver la responsabilidad de comprometerse con una respuesta a cada estudiante y a partir de esto que cada uno tenga algo que decir. En clases previas, de alguna forma,

los estudiantes no se sentían comprometidos a responder a las preguntas planteadas, las discusiones eran escasas y forzadas.

Referencias

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147–176.
- Coutat, S., & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 97–126.
- Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2017). Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches. In *Sage Publications*.
- Goizueta, M. (2019). Epistemic issues in classroom mathematical activity: There is more to students' conversations than meets the teacher's ear. *Journal of Mathematical Behavior*, 55(February), 100691–100703. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.007>
- Hanna, G. (2001). *Proof, explanation and exploration: an overview*. 5–23. <https://doi.org/10.1023/A:1012737223465>
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - Mathematics Education*, 48(6), 721–737. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- MINEDUC. (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° medio*.
- Montoya, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico : profesores en formación inicial. *Enseñanza de Las Ciencias*, 3(1), 263–284.
- Morales, A., & Rosas, L. (2016). Una propuesta para el desarrollo de modelos geométricos en las Educadoras de Párvulos. El caso del polígono. *Estudios Pedagogicos*, 42(2), 247–267. <https://doi.org/10.4067/S0718-07052016000200014>
- Rodríguez-Jara, M. A., Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Vásquez, P., & del Valle, M. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de Las Ciencias*, 1, 71–92. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194>

UNIDADES CURRICULARES STEM INTEGRADAS: UNA PROPUESTA PARA DESARROLLAR HABILIDADES DEL SIGLO XXI EN CONTEXTOS MULTIGRADO

Angela Castro y Rodrigo Jiménez
Universidad Austral de Chile

Si bien se ha destacado el potencial de la educación STEM integrada en el desarrollo de habilidades del siglo XXI en contextos tradicionales de escolaridad; su potencial en contextos multigrado es algo que no se ha explorado. Se presenta un estudio en curso que tiene como objetivo determinar el efecto de la implementación de una propuesta de STEM integrada en el desarrollo de habilidades del siglo XXI en estudiantes de un aula rural multigrado. Con base en un diseño de investigación evaluativa basada en objetivos: (i) identificamos, a nivel teórico, las habilidades necesarias para el ciudadano del siglo XXI, (ii) diseñamos una propuesta STEM integrada para promover el desarrollo de estas habilidades en contextos multigrado; y (iii) elaboramos instrumentos que nos permitan evaluar el impacto de esta. Los resultados preliminares ofrecen una vía para hacer frente al desafío asociado a la conceptualización, medición y la perspectiva instruccional de las habilidades del siglo XXI en contextos multigrado.

Palabras clave: STEM, integración, habilidades del siglo XXI, multigrado, unidades curriculares.

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes de hoy necesitan nuevas habilidades que los preparen para desenvolverse con éxito en un mundo que cambia a una velocidad abrumadora. El rápido avance de las disciplinas STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, por sus siglas en inglés) demanda ciudadanos capaces de pensar de manera crítica al evaluar situaciones multidisciplinarias que se dan en contextos reales (Nadelson et al., 2012). Bajo esta perspectiva, la educación STEM integrada se plantea como un enfoque educativo multidisciplinario que remueve las barreras tradicionales de estas cuatro disciplinas, integrándolas al mundo real con experiencias que permiten a los estudiantes comprender cómo se combinan temas o dominios aparentemente no relacionados en la resolución de problemas (Nadelson & Seifert, 2019). Sin embargo, este tipo de experiencias no siempre se promueven en todos los contextos y no todos los niños pueden optar a ellas.

El aula multigrado, como espacio de encuentro y convivencia de niños de distintas edades, intereses, capacidades y grados de escolaridad (Taole & Cornish, 2017), en muchas ocasiones dificulta la labor docente y los procesos de aprendizaje tradicionales (MINEDUC, s.f.), y aún más, la posibilidad de pensar en el desarrollo de estos desde una perspectiva STEM integrada.

La revisión de la literatura en el área evidencia diversas propuestas para desarrollar habilidades del siglo XXI en contextos tradicionales de escolaridad (e.g. English & Kind, 2015; 2019; entre otros). No obstante, la investigación centrada en cómo desarrollar estas habilidades en contextos multigrado es escasa (e.g. Lozano et al., 2018). En este contexto, presentamos parte un proyecto en curso que busca determinar el efecto de la implementación de una propuesta de STEM integrada en el desarrollo de habilidades del siglo XXI en un grupo de estudiantes de un aula multigrado.

Desafíos de la educación multigrado

La enseñanza en contextos multigrados no es una tarea sencilla e involucra diversos desafíos. El primero de ellos, es garantizar el acceso a las mismas experiencias de aprendizaje que se pueden dar en contextos tradicionales de escolaridad (MINEDUC, s.f.). En segundo lugar, la utilización de estrategias y materiales educativos que promuevan el aprendizaje activo con un enfoque global e integral del currículo, la circulación de saberes y atiendan la heterogeneidad del aula (e.g. Abós Olivares & Bustos-Jiménez, 2015; Abós Olivares y Boix, 2017; Boix y Bustos, 2014; Hyry- Beihammer & Hasche, 2015; Rivadeneira 2020).

En esta línea, con el propósito de ayudar a los docentes a enfrentar los desafíos de la enseñanza en contextos multigrado, el Ministerio de Educación (2017) propone estrategias para abordar la didáctica del aula multigrado en las asignaturas de matemáticas, lenguaje, ciencias naturales e historia. Específicamente, estos documentos proporcionan directrices generales sobre cómo abordar la cobertura curricular y organización de los temas en las asignaturas señaladas, ofreciendo una graduación de las habilidades a desarrollar de acuerdo con el nivel cognitivo en que se deban abordar. Si bien estas orientaciones, en algunos casos, plantean el desarrollo de una misma clase bajo una temática, no abordan problemas transdisciplinarios complejos desde una perspectiva multidisciplinar, así como tampoco el desarrollo de las habilidades del siglo XXI con una intencionalidad instruccional.

LA EDUCACIÓN STEM INTEGRADA Y LAS HABILIDADES DEL SIGLO XXI

Los estudiantes de hoy y del mañana deben estar preparados con un conjunto de habilidades, que les permitan comprender y abordar problemas complejos con un carácter interdisciplinar (Castro et al., 2020). Aunque las habilidades de supervivencia o habilidades del siglo XXI pueden diferir en su nombre dependiendo del país, existe un consenso en que son habilidades que van más allá de la aptitud técnica y funcional (Herde et al., 2019). Estas incluyen habilidades como el pensamiento crítico, la resolución de problemas, las habilidades comunicativas, liderazgo, responsabilidad social, creatividad e innovación, entre otras; que permiten a los ciudadanos participar efectivamente en la toma de decisiones asociadas en situaciones complejas (P21, 2009).

En esta línea, la educación STEM integrada se ha propuesto como una alternativa para el desarrollo de tales habilidades. Esto se debe esencialmente a que esta facilita la comprensión de los estudiantes sobre cómo se combinan temas o dominios aparentemente no relacionados para resolver problemas (Nadelson y Seifert, 2019), involucrando habilidades que van más allá del saber y el saber hacer (Castro. et al., 2020). Se han desarrollado diversas propuestas que buscan promover el desarrollo de habilidades del siglo XXI basadas en un enfoque STEM, que han demostrado resultados positivos en el desarrollo de algunas de estas habilidades, aumento del interés, motivación y rendimiento de los estudiantes (e.g. English & Kind, 2015; 2019). No obstante, se requiere más investigación en el área que permita comprender cuál es la mejor forma de evaluarlas y desarrollarlas dentro de este tipo de propuestas, tanto en contextos tradicionales como multigrado.

METODOLOGÍA

Con base en un diseño de investigación evaluativa basada en objetivos (Bisquerra et al., 2009): (i) identificamos, a nivel teórico, las habilidades necesarias para el ciudadano del siglo XXI, (ii) diseñamos una propuesta STEM integrada para promover el desarrollo de estas habilidades en contextos multigrado; y (iii) elaboramos instrumentos que nos permitan evaluar el impacto de esta.

Técnicas de recolección de datos y análisis de la información

Para la identificación de las habilidades necesarias para el ciudadano del siglo XXI, y el diseño de la propuesta STEM integrada, se utiliza como método de búsqueda, selección y análisis, el análisis documental (Bisquerra et al., 2009). Para la elaboración de instrumentos que permitan evaluar el nivel de desarrollo de habilidades del siglo XXI, se consideró el diseño y la aplicación de un cuestionario cerrado de tipo Likert (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), y la observación de los participantes en escenarios situacionales. Dado que las personas tienden a sobreestimar sus habilidades y niveles de habilidad cuando se auto informan (Herde et al., 2019), resulta conveniente probar a los participantes con situaciones desafiantes que requieran del uso de habilidades del siglo XXI para tener una respuesta más objetiva (Nadelson et al., 2017), y de esta forma triangular los resultados obtenidos. Como registros de observación, se consideran grabaciones de video de las sesiones y notas de campo por parte de los investigadores (Bisquerra et al., 2009; Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Criterios de selección de documentos y los participantes

Para la revisión general de la literatura sobre habilidades del siglo XXI, se realiza una búsqueda con combinaciones de palabras claves en la Web of Science en el periodo 2015-2020. Para la selección de los participantes, se opta por una muestra por conveniencia (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), que considera el caso de una escuela rural multigrado, ubicada en una isla de la X región que ha manifestado su interés en participar del estudio. En ella hay 14 estudiantes que se distribuyen de 1º a 6º año.

RESULTADOS PRELIMINARES

En la literatura del área se evidencian diferentes propuestas que agrupan habilidades del siglo XXI de un mismo conjunto de habilidades (e.g. Binkley et al., 2012; Jang, 2016; P21, 2009; entre otros). No obstante, solo algunos marcos proporcionan componentes operativos que permitan definir estas habilidades o que se centren en conceptualizar más de una habilidad (van Laar et al., 2017). Esto se debe principalmente a tres grandes problemáticas asociadas a esta temática, el cómo se conceptualizan las habilidades del siglo XXI, cómo se evalúan, y cuál debería ser su perspectiva instruccional.

Entre los marcos más reconocidos y utilizados en la investigación en el área, se destaca el de la Asociación para el Aprendizaje del Siglo XXI (P21, 2009). Este marco organiza las habilidades del siglo XXI en tres grandes grupos: habilidades para la vida y la carrera (flexibilidad y adaptabilidad, liderazgo y responsabilidad, entre otras), habilidades de aprendizaje e innovación (creatividad, el pensamiento crítico, la comunicación y la colaboración), y habilidades de la información, medios y tecnología (alfabetización de información mediática y TIC). A su vez, plantea que el desarrollo de estas habilidades debe ser promovido con una intensionalidad instruccional, fomentando la

integración de los recursos comunitarios más allá de los muros de la escuela, por medio de materias clave, como las ciencias y matemáticas; y a través del abordaje interdisciplinario de temáticas clave del siglo XXI, como la alfabetización ambiental.

Tomando como base este marco, seleccionamos dos habilidades clave del siglo XXI: colaboración y comunicación. Estas habilidades son fundamentales no tan solo para la vida y el éxito profesional, si no que también para la circulación de saberes en contextos multigrado, por lo que son foco de la propuesta. A partir de esta selección, tomamos como base un marco desarrollado a partir de este estudio que operativiza el diseño de lecciones STEM integradas en contextos multigrado en base a grandes ideas STEM y la instrucción diferenciada, y elaboramos nuestra propuesta. Esta propuesta aborda el aprendizaje interdisciplinario de las matemáticas y ciencias naturales en el contexto del estudio de la crisis hídrica como consecuencia del cambio climático. La unidad se desarrolla en torno a la pregunta: ¿Cómo podemos ayudar a nuestra comunidad a hacer un mejor uso del agua dulce de nuestra isla? Este tema es de alta pertinencia territorial, pues la comunidad en la que se encuentra la escuela destinataria de esta intervención ha experimentado un gran déficit hídrico durante los últimos años, siendo necesario promover la capacidad de agencia para enfrentarla.

CONCLUSIONES

Los resultados preliminares obtenidos en este estudio ofrecen una vía para hacer frente al desafío asociado a la conceptualización, medición y la perspectiva instruccional de las habilidades del siglo XXI en contextos multigrado. Respecto a la conceptualización de estas habilidades, se concluye que el marco de la P21(2009) es uno de los que proporcionan una mayor cantidad de componentes que permiten conceptualizar y evaluar estas habilidades. En lo que respecta a la evaluación, se recomienda la utilización de múltiples medidas por la complejidad asociada a la evaluación de estas habilidades.

El marco utilizado en este estudio como base para el diseño de la unidad STEM integrada en contextos multigrado, ofrece una vía para hacer frente a la problemática asociada al desarrollo de estas habilidades desde una perspectiva instruccional. Este marco contempla distintos tipos de actividades STEM diferenciadas que responden a un modelo sugerido para desarrollar habilidades de comunicación y colaboración desde una perspectiva instruccional, a través de la promoción de actividades que promueven la participación, exploración, explicación, elaboración y evaluación (Kivunja, 2015).

Referencias

- Abós Olivares, P., & Bustos-Jiménez, A. (2015). Teaching strategies and space organisation in multigrade classrooms. *Sisyphus-Journal of Education*, 3(2), 58-77. Doi:10.25749/sis.7886.
- Abós Olivares, P., & Boix, R. (2017). Evaluación de los aprendizajes en escuelas rurales multigrado. *Aula abierta*, 45(1), 41-48. Doi:10.17811/rifie.45.2017.41-48
- Binkley, M., Erstad, O., Herman, J., Raizen, S., Ripley, M., Miller-Ricci, M., & Rumble, M. (2012). Defining twenty-first century skills. In: Griffin P., McGaw B., Care E. (eds) *Assessment and teaching of 21st century skills* (pp. 17-66). Springer, Dordrecht. Doi.org/10.1007/978-94-007-2324-5_2

- Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa* (2a edición). Madrid, España. La Muralla.
- Boix, R. y Bustos, A. (2014). La enseñanza en las aulas multigrado: una aproximación a las actividades escolares y los recursos didácticos desde la perspectiva del profesorado. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 7(3), 29-43.
- Castro, A., Iturbe, C., Jiménez, R., y Silva, R. (2020). ¿Educación STEM o en humanidades? Una reflexión en torno a la formación integral del ciudadano del siglo XXI. *Utopía y Praxis Latinoamericana*, 25, extra 9, 197-208. Doi. <http://doi.org/10.5281/zenodo.4110904>
- English, L. (2016). STEM education K-12: perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*, 3(3). Doi. 10.1186/s40594-016-0036-1
- English, L.D., King, D. (2019). STEM Integration in Sixth Grade: Designing and Constructing Paper Bridges. *Int J of Sci and Math Educ* 17, 863–884. Doi:10.1007/s10763- 018-9912-0
- Herde, C. N., Lievens, F., Solberg, E. G., Harbaugh, J. L., Strong, M. H., & J Burkholder, G. (2019). Situational Judgment Tests as Measures of 21 st Century Skills: Evidence across Europe and Latin America. *Revista de Psicología del Trabajo y de Las Organizaciones*, 35(2), 65-74.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Hyry-Belhammer, E. K. & Hascher, T. (2015) Multi-grade teaching in primary education as a promising pedagogy for teacher education in Austria and Finland, in: C. Craig & L. OrlandBarak (Eds) *International teacher education: Promising pedagogies (Part C)* (Advances in Research on Teaching, Vol. 22C)(pp. 89–113). Bingley, Emerald Publishing. Doi:10.1108/s1479- 368720150000022005
- Jang, H. (2016). Identifying 21st century STEM competencies using workplace data. *Journal of Science Education and Technology*, 25(2), 284-301. Doi.org/10.1007/s10956-015-9593-1
- Kivunja, C. (2015). Exploring the Pedagogical Meaning and Implications of the 4Cs “Super Skills” for the 21st Century through Bruner’s 5E Lenses of Knowledge Construction to Improve Pedagogies of the New Learning Paradigm. *Creative Education*, 6, 224-239. Doi.org/10.4236/ce.2015.62021
- Lozano, Y., Rosales, A. & Giraldo, J. C. (2018). Competencias del siglo XXI: ¿cómo desarrollarlas mediante el uso de videojuegos en un contexto multigrado? *Revista Panorama*, 12(23), 7-17. Doi:<http://dx.doi.org/10.15765/pnrm.v12i23.1191>.
- Ministerio de Educación (2017). *Orientaciones Pedagógicas para el Aula Multigrado*. Ministerio de Educación. Educación Rural. Recuperado de: <https://rural.mineduc.cl/orientaciones-pedagogicas-para-el-aula-multigrado/>
- Ministerio de Educación (sf). *Educación rural*. Ministerio de Educación, Educación Rural. Recuperado de <https://rural.mineduc.cl/presentacion/>
- Nadelson, L. S., & Seifert, A. L. (2019). Teaching and Learning Integrated STEM: Using Andragogy to Foster an Entrepreneurial Mindset in the Age of Synthesis. In *STEM Education 2.0* (pp. 53-71). Brill Sense. Doi:10.1163/9789004405400_004
- Nadelson, L., Seifert, A., Moll, A., & Coats, B. (2012). i-STEM Summer Institute: An Integrated Approach to Teacher Professional Development in STEM. *Journal of STEM Education*, 13(2), 69-83.

- Nadelson, L. S., McGuire, S. P., Davis, K. A., Farid, A., Hardy, K. K., Hsu, Y. C., ... & Wang, S. (2017). Am I a STEM professional? Documenting STEM student professional identity development. *Studies in Higher Education*, 42(4), 701-720.
- Partnership for 21stCentury Skills. (2009). *State initiatives: overview of state leadership initiative*. Retrieved from http://www.21stcenturyskills.org/index.php?option=com_contentandtask=viewandid=505andItemid=189.
- Ribadeneira, F. (2020). Estrategias didácticas en el proceso educativo de la zona rural. *Revista Conrado*, 16(72), 242-247.
- Taole, M. J., & Cornish, L. (2017). Identifying the professional knowledge base for multi-grade teaching. *The Online Journal of New Horizons in Education*, 15(4), 10419-10434.
- UNESCO (2014). Practical Tips for Teaching Multigrade Classes. Retrieved from <http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002201/220101e.pdf>
- Van Laar, E., Van Deursen, A. J., Van Dijk, J. A., & De Haan, J. (2017). The relation between 21st-century skills and digital skills: A systematic literature review. *Computers in human behavior*, 72, 577-588.



RESUMEN DE: CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Jaime Israel García-García
Universidad de Los Lagos, Chile
jaime.garcia@ulagos.cl

Resumen

Esta ponencia tiene como propósito mostrar resultados parciales de un proyecto de investigación, el cual tienen por objetivo caracterizar el conocimiento matemático de futuros profesores de Educación Media sobre la distribución binomial. Para ello, en este primer acercamiento, se presentan las configuraciones epistémicas asociadas al significado holístico de la distribución binomial a partir de un estudio histórico-epistemológico.

De manera breve, se describen las dificultades de este tipo de estudios para objetos matemáticos estadísticos (esto debido a su naturaleza); además, se establecen relaciones entre las diferentes configuraciones que se identificaron con el fin de desarrollar el significado holístico de la distribución binomial.

Dentro de los resultados, se presenta la potencialidad de este tipo de estudios para establecer trayectorias hipotéticas de aprendizaje apoyadas en las configuraciones epistémicas identificadas, así como proponer elementos para analizar documentos curriculares, por ejemplo, los libros de texto.



REPORTES DE INVESTIGACIÓN

ANÁLISIS DE LA DEMANDA COGNITIVA DE UNA TAREA MATEMÁTICA SOBRE MCD

Sebastián Albornoz Guerra, Elisabeth Ramos Rodriguez

En la actualidad, la enseñanza de la matemática ha significado un desafío, por los bajos resultados de las pruebas internacionales o estandarizadas a nivel nacional, por lo que estudiar la Demanda Cognitiva (DC) de tareas matemáticas puede significar un cambio en el entendimiento y apropiación de conceptos y contenidos matemáticos. Se presentan los resultados de un estudio cuyo objetivo fue indagar la gestión de la demanda cognitiva que realiza un profesor en una clase sobre Máximo Común Divisor con estudiantes de Pedagogía en Educación General Básica. Para ello, considerando los criterios de aumento y disminución de la demanda cognitiva de una tarea, se analiza el diálogo acontecido en la clase. Los resultados muestran que si bien la clase con una gestión centrada en una baja demanda cognitiva, al avanzar en ella, se observa que la demanda cognitiva aumenta.

Máximo Común Denominador, Algoritmo de Euclides, Demanda Cognitiva.

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

La presente investigación se construye a partir del supuesto de que la demanda cognitiva (DC) de una tarea tiene directa relación con la gestión que realiza el docente en las clases de matemática.

Noblet (2013) hizo un estudio a futuros maestros desde una mirada de la enseñanza en la formación inicial, y comprueba que existía una comprensión de los conceptos y contenidos de MCD, sin embargo, descubrió que este conocimiento es limitado, por lo que, si se les pedía a estos profesores en formación plantear, crear o resolver un problema tenían serias dificultades en hacerlo, pues no tenían las herramientas necesarias para desarrollarlas. Se visualiza de igual forma que no presentaban conocimientos de divisibilidad que pudieran conducir a un entendimiento mayor sobre el MCD.

Parece ser necesario que el MCD debe ser enseñado a los estudiantes de pedagogía a partir de tareas de diferente demanda cognitiva (Stein y Smith, 1998), pues, por una parte, estos contenidos están presentes en los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para la Formación Inicial Docente, donde se establece que el futuro profesor “es capaz de conducir el aprendizaje de la multiplicación y división de números naturales” (MINEDUC, 2012. p. 88) y además, de donde se desprende el conocimiento explícito de este contenido al mencionar que el egresado “relaciona y da definiciones para los conceptos de número primo, descomposición en factores primos, máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (MCM). Comprende la validez de procedimientos usados para calcular el máximo común divisor y mínimo común múltiplo” (p.89).

Con ello se plantea la pregunta de investigación: ¿Cómo el profesor gestiona la demanda cognitiva en las actividades propuestas en una clase de MCD a estudiantes de Pedagogía en Educación General Básica? En relación a ello, este trabajo presenta los resultados de un estudio cuyo objetivo fue indagar en cómo un profesor gestiona la demanda cognitiva de tareas matemáticas en una clase sobre MCD.

MÉTODOLOGIA

La investigación se ciñe al paradigma cualitativo, con enfoque exploratorio descriptivo. El contexto del estudio se enmarca en una clase de matemáticas para futuros profesores de educación básica (de tercer año) que fue realizada por un académico universitario.

La clase se desarrolló de manera online, utilizando como recursos tecnológicos las aplicaciones *Zoom*, *Google Sheets* y *Power Point*. Por lo que la recopilación de datos se realizó a partir de la grabación de video y audios de las clases realizadas.

Los resultados obtenidos durante el desarrollo de la presente investigación se analizaron a partir de los factores de mantención y disminución de la demanda cognitiva (Stein y Smith, 1998) (tabla 1).

Categoría	Descripción	Rótulo
Factores de mantención de la demanda cognitiva	Se proporciona andamiaje del razonamiento y pensamiento de los estudiantes.	M1
	Los estudiantes reciben los medios para controlar su propio progreso.	M2
	Los estudiantes capaces modelan el desempeño de alto nivel.	M3
	El profesor interroga para obtener justificaciones, explicaciones y significados a través de preguntas o comentarios.	M4
	La tarea se basa en el conocimiento previo de los estudiantes.	M5
	El profesor frecuentemente extrae conexiones conceptuales.	M6
	Se permite suficiente tiempo para la exploración, ni muy poco, ni demasiado.	M7
Factores de disminución de la demanda cognitiva	Los aspectos problemáticos de la tarea se vuelven rutinarios.	D1
	El profesor cambia el énfasis desde los significados, conceptos, o comprensión hacia la exactitud o completitud de la respuesta.	D2
	No se proporciona suficiente tiempo para lidiar con los más exigentes aspectos de la tarea, o bien, el tiempo ofrecido es demasiado y los estudiantes se implican poco a poco o se adormecen en su comportamiento.	D3
	Los problemas de gestión del aula impiden una participación sostenida en actividades cognitivas de alto nivel.	D4
	La tarea no es apropiada para un grupo dado de estudiantes	D5
	Los estudiantes no son responsables por productos o procesos de alto nivel.	D6

Tabla 1: Categorías de análisis de factores de gestión docente en clases de matemática (traducción propia) (Stein y Smith, 1998, p. 274).

Para analizar los datos se utilizarán los criterios y el rótulo. Si una acción que generó los profesores en la clase se debió a una mantención o disminución de la demanda cognitiva, dando cuenta del rótulo en la interacción, como también si fue el profesor 1 o 2. En la clase se implementó considerando tres momentos claves, los que se ilustran

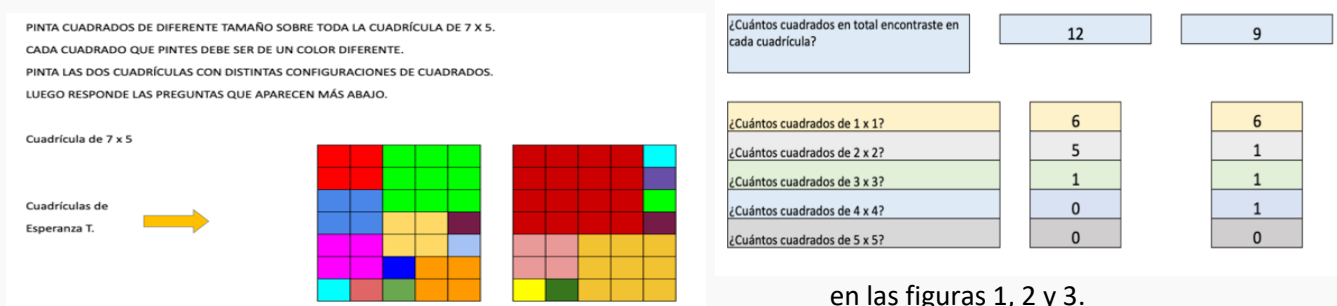


Figura 1: Tarea matemática implementada en el momento 1 de la clase

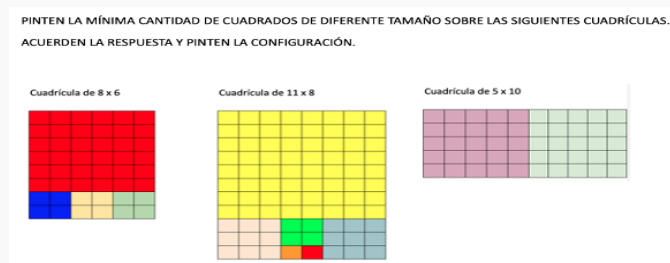


Figura 2: Tarea matemática implementada en el momento 2 de la clase

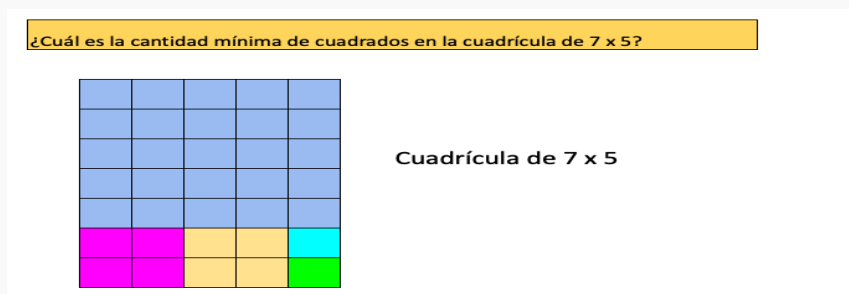


Figura 3: Tarea matemática implementada en el momento 3 la clase

ANÁLISIS DE LOS DATOS

A continuación, se presentan extractos de los diálogos en que participaron los docentes y los estudiantes, atendiendo especialmente a las intervenciones realizadas de manera espontánea por los profesores, y asociándolas a las categorías de Stein y Smith (1998). Para una mejor comprensión se analiza considerando los tres momentos de la clase.

Momento 1

En primer lugar, al iniciar la clase el profesor da las instrucciones para que los estudiantes manejen el zoom de la hoja de cálculo, con el objetivo de que visualicen las cuadrículas con mayor comodidad. El profesor, luego de leer las indicaciones de la actividad, da la siguiente instrucción (figura 4)

Trabaje cada uno en su página y pinten cuadrados de diferente tamaño sobre las cuadrículas. Ojalá las dos cuadrículas tengan cuadrados de diferente tamaño. La idea es que cubran las cuadrículas con cuadrados. Si tienen alguna duda abran el micrófono y me preguntan por favor.

Figura 4: Extracto de diálogo en el momento 1 de la clase

Con esto, el docente desarrolla una acción que genera que el nivel de demanda cognitiva se mantenga alto, pues los estudiantes recibieron las indicaciones para controlar su propio progreso (M2) en cuanto a la tarea solicitada, ya que establece que deben ser diferentes las configuraciones de cada una de las cuadrículas presentadas.

Se observa un error de uno de los estudiantes, el que pinta en la cuadrícula rectángulos en vez de cuadrados. En esta situación los profesores proporcionan andamiaje para desarrollar el razonamiento (M1) y recurrir a sus conocimientos previos, para que de esta manera guiarlo para que pueda visualizar su error, como se muestra en el episodio que se ilustra en la figura 5.

P2: chicos, ¿cuál es la mejor característica de ser cuadrado? Si tuvieran que definir un cuadrado, ¿qué es lo que diferencia al cuadrado de todas las otras figuras? ¿qué es ser cuadrado?

P2: con nombre entonces, E2, ¿cuál es la mejor característica de un cuadrado?

E4: yo quierooooo...

E2: emmm, tiene 4 lados

P2: perfecto. ¿E1, quieres agregar algo más?

E1: que sus 4 lados tienen la misma medida.

P2: perfecto, chicos, pinten cuadrados sobre sus cuadrículas.

Figura 5: Diálogo entre profesor 1, profesor 2 y estudiantes.

Como se puede ver en el diálogo, los docentes hacen una pregunta que evoca los conocimientos previos de los estudiantes con relación a las características de un cuadrado, de esta manera hay una mantención de una alta demanda cognitiva, dado que los docentes no les dan la respuesta, ellos hacen que el estudiante cuestione su actuar, y genere metacognición de su acción.

Momento 2

En esta parte de la clase se les muestra a los estudiantes sus producciones y luego se les pregunta sobre quién obtuvo la menor cantidad de cuadrados en su cuadrícula. Posterior a eso se le solicita dibujar esa configuración, y sucede la situación que se ilustra en la figura 6:

E4: ¿profe?

P2: dime E4.

E4: estoy un poco confundido con ... un ...de mi guía.

P2: E4 no cierres el micrófono porque no alcanza a aparecer la voz entonces no te alcanzo a escuchar. Abre el micrófono.

E4: estoy confundido con un cuadrado de mi guía.

P2: ya, pero dejémoslo, pasemos a esta actividad. Te ruego me disculpes, pero ¿volvamos a tu guía después que hagamos esta?

E4: ya

Figura 6: Diálogo entre profesor 2 y estudiantes 4.

En la situación se visualiza que no se proporciona suficiente tiempo para lidiar con los más exigentes aspectos de la tarea (D3), por lo que se genera una disminución de la demanda cognitiva en la clase, ya que no se le da el espacio al estudiante para que comente su duda. Esta acción por parte del docente genera que el estudiante difícilmente pueda seguir desarrollando la tarea, pues no comprende la configuración porque él generó algunos rectángulos en su cuadrícula.

Finalmente es preciso señalar, que durante la realización de este momento de la clase un estudiante no logró resolver la tarea, ya que no pudo encontrar la estrategia para determinar la mínima cantidad de cuadrados en la cuadrícula, escatimando sus esfuerzos, por lo que la participación fue poco constante y dependiente del apoyo del docente (D6), o bien porque la gestión del aula impidió una participación sostenida en la actividad (D4), generándose dificultades disciplinares.

Momento 3

El siguiente diálogo se muestra como el profesor gestiona el conocimiento en torno al MCD, ya que los estudiantes no recordaban el contenido, a pesar de que el docente da una especie de definición, hace preguntas las que buscan determinar el conocimiento previo de los estudiantes (M5), como se muestra en la figura 7.

P2: ¿ven la pregunta que hay ahí? ¿se acuerdan qué significa MCD?

E7: yo no

E4: no sé

P2: ya, perfecto, denme un segundito. Ok, ya chicos, el MCD es el máximo común divisor, es un número que es capaz de dividir exactamente a otros dos números. Hay un número que divide, les voy a mostrar la cuadrícula de 7×5 . Que está acá arriba, hay un número que divide exactamente a 7 y a 5. Déjenme escribir, entonces, cuéntenme, ¿qué números dividen a 7?

E4: ¿1 y 7?

P2: ¿quién dijo eso?

E4: yo

P2: E4, ¿te puedo aplaudir? Perfecto! El 7 tiene un nombre muy especial, no sé si se van a acordar, si no da lo mismo.

E4: ¿número primo?

P2: si señor, ¿qué números dividen a 7? E4 dice que el 1 y el 7. Pregunto: ¿qué números dividen a 5?

Figura 7: Diálogo entre profesor 2 y estudiantes.

Se puede observar que los estudiantes logran hacer conexiones con otros contenidos y conocimientos desarrollados, como por el ejemplo el concepto de número primo. Por lo que el profesor extrae esta conexión conceptual permitiendo que los estudiantes lo relacionen con la divisibilidad (M6).

Sin embargo, hay momentos que el docente en las devoluciones que le realiza a los estudiantes pone el énfasis desde los significados, conceptos, o comprensión hacia la exactitud de la respuesta (D2), dando respuestas como “perfecto” o “te puedo aplaudir”, lo que se visualiza como una evaluación sin generar mayor reflexión o permitir a que el resto de los estudiantes dialoguen con relación al conocimiento de este concepto, pues no se estipula si el resto lo conoce.

La clave para determinar esta relación se basó en disponer del tiempo necesario para determinar que los estudiantes pudieran hacer estas conexiones en el trabajo realizado (M7). Esto implicó que se tuvo que privilegiar en darle el tiempo suficiente para hacer ese análisis, y no institucionalizar el concepto de MCD, a través del diagrama de Hasse, dado la hora y el tiempo que ameritaba el desarrollo de la última actividad de la clase.

CONCLUSIONES

El análisis de la implementación de las tareas matemáticas por parte de los docentes, permiten determinar que se mantuvo la alta demanda cognitiva. Se destaca el hecho que los docentes permitieron desarrollar las tareas en un tiempo suficiente para la exploración, ya que se marcaron claramente las 4 tareas desarrolladas, las que se desarrollaron en espacio de construcción individual y grupal. También se puede destacar en la gestión de los profesores, el proporcionar andamiaje del razonamiento y pensamientos de los estudiantes (M1), dando, por ejemplo, espacios para construir matemáticamente y conceptualmente las relaciones entre los números de los lados de las cuadrículas para determinar el MCD, esto se evidencia, puntualmente, en la construcción del diagrama de Hasse, ya que en ese momento los profesores dan andamiaje, a través de preguntas para establecer la institucionalización del saber.

Hubo episodios en que las acciones de los profesores desarrollaron una disminución de la demanda cognitiva, estas claramente tenían la intención de aproximar mucho más a los estudiantes al contenido, y su por su escasa presencia no se consideraron significativas con relación a aquellas donde sí se propició la mantención de esta. De todas maneras, se consideran que son necesarias a la hora de gestionar una clase, por ejemplo, en respuestas que dan los profesores en situaciones tales como: “¿cuáles son las características de un cuadrado? [...] pero aparte de tener cuatro lados

¿qué es la característica que lo distingue?”, aquí se evidencia que el profesor dirige la atención a la comprensión hacia la exactitud o completitud de la respuesta, tal como se indica en la categoría D2.

Las categorías de análisis establecidas en función de los factores asociados a la mantención o disminución de la demanda cognitiva propuestos por Stein y Smith (1998), favorecieron la interpretación de las acciones de los docentes en la realización de la puesta en juego de las tareas.

Agradecimientos

Esta investigación está financiada por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo, ANID, del Gobierno de Chile, proyecto FONDECYT 11190553, la Vicerrectoría de Investigación y Estudios Avanzados de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, proyecto 124.775/20 y el Servicio Alemán de Intercambio Académico (DAAD) desde la Universidad de Bielefeld, proyecto 57335022.

REFERENCIAS

- Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2012). *Estándares orientadores para egresados de carreras de pedagogía en educación básica*. LOM, Ediciones Ltda: Santiago, Chile.
- Noblet, K. (2013). Preservice elementary teachers' understanding of greatest common factor story problems. *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 219-225). Denver: Sigmaa.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, 3(4), 268-275.

CARACTERIZACIÓN DE LA ARGUMENTACIÓN Y METACOGNICIÓN EN TAREAS DE MODELACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Horacio Solar, María Aravena, Andrés Ortiz, Manuel Goizueta,

El estudio tiene como propósito caracterizar las argumentación y metacognición en tareas de modelación matemática que realizan estudiantes en pequeño grupo de enseñanza básica. A partir de una experiencia de desarrollo profesional docente, se presentan el análisis de 5 casos por medio de categorías asociadas a las etapas de modelación, promoción de la argumentación y estrategias metacognitivas. A nivel de resultados preliminares, se observa cómo la gestión argumentativa promueve que los estudiantes puedan transitar por un ciclo de modelación aprendiendo de manera colaborativa, y que la actividad metacognitiva se activa en distintos niveles de intensidad según la etapa de modelación.

modelación, argumentación metacognición, competencias matemáticas

INTRODUCCIÓN

Varios países han incorporado en sus marcos curriculares una visión desde la alfabetización matemática, entendida como la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos (OECD, 2016). Si bien la perspectiva de competencia matemática considera varios procesos matemáticos, consideramos que en especial las competencias de argumentación y modelación se relacionan con aspectos esenciales de la actividad matemática de los estudiantes. Aunque existen líneas extensas y nutridas de investigaciones en modelación (Maaß, 2006) y en argumentación (Conner, Singletary, Smith, Wagner y Francisco, 2014; Krummheuer, 1995), el desarrollo de ambas líneas ha sido de manera independiente, existiendo escasos estudios que busquen relacionar las competencias de argumentación y modelación (Dede, 2018).

La modelación, para algunos autores, es la base de la actividad matemática, debido a que en las tareas de modelación de situaciones se da más importancia a los procesos cognitivos que a los modelos obtenidos (Blomhøj, 2004). Ello se puede ver en el marco teórico de PISA 2015 (OECD, 2016), donde se describen siete competencias matemáticas según el ciclo de modelación (Maaß, 2006). La argumentación, por otro lado, promueve una cultura en la que la construcción del conocimiento se considera una actividad situada, crítica y reflexiva que involucra la participación grupal (Conner et al, 2014; Krummheuer, 1995). En este sentido, la argumentación promueve la comunicación y las oportunidades de aprendizaje en las lecciones de matemáticas, generando un contexto donde los estudiantes juegan un papel principal y el maestro es receptivo a las ideas emergentes de los estudiantes y está dispuesto a adaptar la lección en respuesta a ellas, lo cual es esencial para el desarrollo de la argumentación (Autor 1).

Por otro lado, el modelado de situaciones auténticas, son complejas y requieren una secuencia de varias fases para su resolución (Blum & Niss, 1991), lo cual activa los procesos metacognitivos de los alumnos (Vorholter, 2019). En efecto, la metacognición es un factor importante para ayudar a los estudiantes a resolver problemas, debido a que los buenos solucionadores de problemas se les

asocia altos niveles de actividad metacognitiva, utilizando dichas estrategias en casi todas las fases de los procesos de resolución (Magiera & Zawojewski, 2011). La metacognición se define como la cognición de cognición que incluye conocimiento de la cognición y control sobre la cognición (Flavell, 1979; Efklides, 2011). Debido a la importancia de trabajar problemas de modelado, en grupos colaborativos, por los múltiples beneficios en el desarrollo de habilidades (Autor 2).

El propósito de este estudio es caracterizar los aprendizajes de los estudiantes al promover de manera articulada las competencias de argumentación, en particular la dimensión metacognitiva. En esta contribución, reportaremos los resultados preliminares de nuestro estudio en cuanto las relaciones entre modelación, argumentación y metacognición.

METODOLOGÍA

Contexto y participantes

En el contexto de un proyecto de investigación financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile, se realizó un programa de desarrollo profesional para promover las competencias de argumentación y modelación en el aula de matemáticas, que se implementó en dos ciudades de Chile. En el programa de formación participaron 22 profesoras que enseñan matemáticas desde 1º a 8 básico, 13 profesoras en el programa dictado en Santiago y 9 profesoras en el programa dictado en Concepción. Una vez terminado el programa de formación, se seleccionaron 10 docentes para participar en un estudio de casos múltiple, donde debieron diseñar una actividad de modelación para ser gestionada argumentativamente. En cada una de las clases, las tareas de modelación fueron trabajadas por las y los estudiantes en grupos pequeños de manera colaborativa. Se observaron y registraron en video entre 3 a 5 clase de los 10 docentes de clases de 45 minutos, en que se dio seguimiento con la cámara a la docente y a dos de los pequeños grupos en cada clase, registrando sus conversaciones (incluyendo gestualidad) y recopilando su producción escrita. Se han seleccionado 5 de las 10 profesoras para realizar un estudio de caso múltiple para caracterizar la argumentación y metacognición en tareas de modelación en el aula de matemáticas

Estrategia de análisis de datos

Para el análisis de estos datos se utilizó el software ATLAS.ti con códigos específicos *a priori* asociados a cada una de las etapas del ciclo de modelización, códigos *a priori* de argumentación colectiva y el apoyo docente en argumentación (Conner et al, 2014). y códigos *a priori* sobre metacognición a partir de la propuesta teórica de Vorholter (2019) sobre metacognición:

En la tabla 1 se muestra las categorías de análisis asociadas a los códigos.

Modelación (Maaß, 2006).	Argumentación (Conner et al., 2014; Krummheuer, 1995).	Estrategias metacognitivas Vorholter (2019)
Simplificación: Discute el problema, acciones y caminos hacia una solución, utiliza sistemas de representación	Docente promueve que los estudiantes: -aporten datos para iniciar una discusión	-para proceder: comprender la tarea, planificar el proceso de trabajo, monitorar

Matematización: representa, propone expresiones matemáticas, formulan el modelo Trabajando con las matemáticas: discutir con las matemáticas, realizar cálculos, usar modelos, Interpretación: interpretar y comunicar el modelo y resultados Validación: evalúa el modelo y resultados Proyección: identifica fortalezas y limitaciones, generaliza el modelo.	-se posicionen y concluyan -justifiquen lo que dice o lo que hace Que refuten, en que aparecen distintas respuestas y posiciones entre los estudiantes respalden sus justificaciones o sus refutaciones recurriendo a conocimiento básico (definiciones, propiedades, teoremas)	-para regular: regular trabajo a nivel local, regular trabajo a nivel global, -para evaluar: efectividad de cursos, procesos de modelación socioemocionales: monitoreo, control y evaluación de las emociones.
--	---	---

Tabla 1: Categorías de análisis de metacognición, argumentación y metacognición

A partir de la codificación de las clases, se han realizado los siguientes análisis: Caracterizar las fases de modelación en cada uno de los casos para luego cruzar los códigos modelación y argumentación, con el propósito de encontrar relaciones entre las fases de modelación con niveles altos de argumentación. Caracterizar la metacognición en cada uno de los casos para luego cruzar los códigos de modelación y metacognición, con el propósito de encontrar relaciones entre los procesos metacognitivos de los estudiantes y la modelación.

RESULTADOS

Argumentación en la modelación.

A continuación, se muestran hallazgos relacionados con niños y niñas de 1er y 3er año de primaria correspondientes a 3 de los casos analizados, los cuales transitaban por las distintas etapas del ciclo de modelación (Maaß, 2006). En el caso de 1er año podemos señalar que la etapa del ciclo que se da con mayor intensidad es la Simplificación pues entre pares discuten el problema, las acciones y los caminos hacia una posible solución. Las etapas Matematizando y Trabajando con Matemática son menos intensas en ellos notándose sólo la utilización del conteo como noción matemática, no obstante que también la suma de números de un dígito era factible. La gestión argumentativa utilizada en clases permitió que los estudiantes pudiesen realizar acciones que les permitieron acercarse a las etapas Validando y Analizando-Proyectando los modelos y generalizar hacia otras situaciones, aunque con argumentos contextuales. En el caso de 3er año, los estudiantes transitaban por casi todas las etapas del ciclo, en algunas con menos frecuencia como Trabajando con la

Matemática, y en otras tales como Simplificación y Validando se manifestaron intensamente en los estudiantes, es decir discuten entre ellos el problema y los distintos caminos de solución. Cabe destacar que mediante la discusión colectiva y la argumentación se potenció que entre pares se evaluarán los resultados y el modelo en función de su pertinencia siendo capaces además de comunicar dichos resultados. Al igual que en 1er año, la gestión argumentativa permitió que estos estudiantes encontraran limitaciones al modelo como también pudiesen generalizar proyectando la solución hacia otras situaciones que no venían en la actividad general.

Los hallazgos preliminares, nos permiten establecer que la gestión argumentativa de situaciones de modelación promueve que los estudiantes puedan transitar por un ciclo de modelación aprendiendo de manera colaborativa a comprender nuevas situaciones con un conocimiento matemático, pero no solo para encontrar una solución particular, sino para poder entender bajo qué condiciones las soluciones y modelos se pueden generalizar.

Metacognición y modelación.

Los resultados preliminares del análisis de los 5 casos, muestran que el despliegue de estrategias en proceder con la tarea, se dan con mayor intensidad en la fase de simplificación del problema y en la fase de trabajo con las matemáticas, donde vuelven a revisar las condiciones, para avanzar en la búsqueda de la solución, generando nuevos puntos de vista para volver a planificar el proceso y la búsqueda de otras estrategias para continuar en la tarea. El monitoreo es una de las actividades que se refleja desde el comienzo del proceso de modelado, hasta la fase de validación del modelo, pero la mayor intensidad se manifiesta en el trabajo con las matemáticas, supervisando el progreso, discutiendo procedimientos, estrategias utilizadas, volviendo, en muchos casos, a revisar las condiciones iniciales, cuestionando el modelo en evolución. En las estrategias para regular, tanto a nivel local como global, la actividad metacognitiva se activa también en las fases de simplificación y trabajando con las matemáticas, siendo débil en las fases de interpretación y validación del modelo. Sobre estrategias para evaluar, se da con intensidad en la interpretación y validación del modelo, donde la discusión se centra en resultados numéricos y la solución en el contexto. Referido a las estrategias socioemocionales, se manifiestan en la fase de simplificación y trabajando con las matemáticas. En el monitoreo emocional, lo que más se evidencia es la expresión de conciencia frente a la tarea, manifestando expresiones de su propio comportamiento; en el control emocional, regulan el comportamiento de los compañeros para enfocarse en la tarea. Por último, en la evaluación del logro de la tarea, solo se manifiestan emociones en la fase trabajando con las matemáticas, mediante reacciones de bienestar o malestar, referidas a la dificultad de la tarea, no así en la etapa de validación o proyección del modelo.

Como conclusiones preliminares, se puede mencionar que la actividad metacognitiva se activa, en los grupos, con mayor intensidad solo en algunas fases del proceso de modelación, lo cual muestra la necesidad de un trabajo más sistemático con problemas en contextos reales, para que los alumnos puedan activar la metacognición en la mayoría de las fases del proceso (Magiera & Zawojewski, 2011). De igual forma ocurre con las estrategias socioemocionales. Como proyección, la idea es detectar a ciertos grupos que hayan activado las estrategias metacognitivas en la mayoría de las fases de modelación, lo que sería de interés para analizar los tipos de estrategias que activan en todas las fases del modelado, ya que los trabajos en esta línea aún son incipientes.

Referencias

- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling—a theory for practice. En B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-160). Göteborg University: National center for mathematics education.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37–68.
- Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, 86(3), 401–429.
- Dede, A. (2018). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.
- Efklides, A. (2011) Interactions of Metacognition. With Motivation and Affect in Self-Regulated Learning: The MASRL Model, *Educational Psychologist*, 46(1), 6-25, <https://doi.org/10.1080/00461520.2011.538645>
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and Cognitive Monitoring. *American Psychologist*, 34, 906–911. <https://doi.org/10.1093/nq/CLVII.dec14.424-a>
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>
- Magiera, M. T., & Zawojewski, J. S. (2011). Characterizations of social-based and self-based contexts associated with students'awareness, evaluation, and regulation of their thinking during small-group mathematical modeling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(5), 486–520. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.42.5.0486>
- OECD. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. OECD Publishing: Paris.
- Vorhölter, K. (2019). Enhancing metacognitive group strategies for modelling. *ZDM - Mathematics Education*, 51, 703-716. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01055-7>

CONCEPTUALIZACIONES QUE PERMITEN ORGANIZAR LA CONSTRUCCIÓN DEL LÍMITE, EN ESTUDIANTES DE 16 A 17 AÑOS

Felipe Neira, Alberto Leyton

En consecuencia a las competencias que demanda el siglo XXI, se implemeta en Chile una secuencia de cambios curriculares que incluye la implementación del programa de profundización Límites, derivadas e integrales, con la finalidad de aproximar a los estudiantes al estudio del calculo universitario. En esta investigación se indaga sobre aquellas conceptualizaciones que permiten organizar conceptualmente el aprendizaje del límite, para finalmente analizar el estado de estas en los estudiantes de 16 a 17 años previo a su enseñanza. Para esto se toma como referencia de analisis a la teoria de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud (1990), donde se considera que la comprensión de los conceptos es progresiva y paulatina, y es necesario tener en cuenta los conceptos en acto y acción para en analisis de la conceptualización. Para esto, se contruye un cuestionario teniendo en cuenta la consturcción epistemologica del límite a traves del infinito para analizar las conceptualizaciones presentes en los estudiantes.

Límite, infinito, campos conceptuales.

INTRODUCCIÓN

Una de las metas que se propone la educación chilena es el desarrollo de competencias y la entrega de herramientas que permitan a los estudiantes desenvolverse en una sociedad compleja y cambiante. Para esto el área de electividad en matemática busca ofrecer una oportunidad de profundizar las materias ya aprendidas y ofrecer una primera aproximación a los currículos universitarios mediante el programa de “Límites, Derivadas e integrales” (Ministerio de Educación, 2019). Los estudios a nivel Universitario sobre el cálculo dan cuenta que la principal dificultad se encuentra la comprensión del límite. Vergnaud (1990), en su Teoría de los Campos Conceptuales, indica que la construcción de un concepto, o mejor dicho la conceptualización de este, se produce de manera progresiva, en la medida que las situaciones a las que nos enfrentamos permitan la filiación de los conocimientos. La epistemología, da cuenta que la conceptualización del infinito jugó un rol primordial en la construcción del Límite, en conjunto a distintos ejes de la matemática, como el numérico, geométrico y el algebraico. Por esto nos proponemos indagar en aquellas conceptualizaciones que están en vías de aportar a la comprensión del concepto de límite. Esto tiene como finalidad generar conocimientos para la escogencia de las tareas e identificar las principales filiaciones y rupturas que podrían aportar a la conceptualización del Límite.

ANTECEDENTES

Los antecedentes se abordan desde dos focos, primeramente se presentan investigaciones relacionadas a los fenomenos que se presentan en la enseñanza del calculo, luego se muestran los textos escolares utilizados por el ministerio de educación para identificar aquellos elementos que aportan a la comprensión del límite a traves de la conceptualización del límite (Cornu, 1981).

Estudios Relacionados

Los estudiantes de nivel medio utilizan la idea de límite asociadas a ideas cotidianas relacionada a conceptualizaciones geométricas. Esto tiene como consecuencia para el estudiante la dificultad para relacionarlo mediante la conceptualización de la variación.

En general, existe una desvinculación entre la conceptualización de los estudiantes y el concepto de límite, donde las definiciones formales no parecen estar al alcance de los estudiantes de enseñanza media y no les es posible crear un vínculo entre una definición y sus representaciones (Tall & Vinner, 1981).

Los estudiantes presenta dificultades cuando ingresan a la educación superior y se enfrentan al estudio del cálculo. Particularmente en Chile, los docentes universitarios declaran que sus estudiantes presentan complicaciones para el trabajo con funciones, algebra básica, subconjuntos reales y, en menor medida, sucesiones y series (Irazoqui Becerra & Medina Rivilla, 2013).

Esta dificultad se relacionan con que los estudiantes presentan desvinculaciones entre los significados y significantes tanto en el área de números como el de funciones. Especialmente en esta última donde aparte de existir una brecha entre el concepto y lo que manifiestan los estudiantes sobre este, se presenta una escasa articulación entre registros y el uso como un medio poderoso para el cambio de cuadros (Artigue, 1995).

Textos escolares chilenos

Para esta investigación se analizan los textos escolares de primer y segundo año de educación media del ministerio de educación, con la finalidad de identificar momentos que permitan generar filiaciones o rupturas para la contrucción de conceptualizaciones del infinito que permitan aproximar a la construcción conceptual del límite.

Si bien se identifican momentos donde aparecen conceptos relacionados o registros que podrian ser utilizados para generar estas filiaciones o rupturas en la conceptualizar el concepto de infinito, son relegadas al analisis operacional sobre el reflexivo, relegando la característica de variable en las funciones o la reflexión sobre el infinito en los decimales, por ejemplo.

METODOLOGÍA

El enfoque cualitativo desde su acepción más integral busca dar respuesta al *qualis* (cuál, qué) de la naturaleza y esencia de algo, dando respuesta a través del conjunto de cualidades de este. De esta manera, la investigación cualitativa busca evidenciar la naturaleza profunda de las realidades, en aquellas cualidades que dan razón a su manifestación (Martínez, 2006). Por lo que se selecciona una muestra intencionada que permita explorar de manera equilibrada las conceptualizaciones presentes sobre aquellos conceptos que permiten la organización del Límite, a través del análisis de los esquemas que se presentan al desarrollar una serie de tareas.

La muestra

Para la investigación participan 14 estudiantes de 16 y 17 años que cursan tercer y cuarto año de educación media.

Instrumento de recolección de datos

Para la recolección de datos se elabora un cuestionario que consta de seis actividades, estas se dividen en dos actividades que involucran conceptos de geometría, dos que involucran conceptos numéricos y 2 que consideran conceptos algebraicos funcionales. Estos tienen su justificación en el desarrollo epistemológico del límite, que tiene como base la comprensión del infinito.

ANÁLISIS

Para el análisis de las producciones de los estudiantes, se confexionan criterios de categorización según el registro, el tipo de justificación y el tipo de conceptualización utilizada para cada actividad.

De este análisis se obtiene la siguiente información:

- Las producciones de los estudiantes evidencian una tendenciatendencia importante al uso del registro verbal para representar y reflexionar sobre la situación presentada, presente en el 81% del total de respuestas obtenidas en el cuestionario.
- El 31% de las respuestas presentan un registro que permite un tratamiento a modo de justificación matemática a la respuesta dada.
- El 46% del total de respuestas son justificadas solo utilizando conceptos matemáticos o procesos de reflexión para interpretar la situación, sin un tratamiento matemático.
- Se identifica que el horror al infinito prevalece en las respuestas, es decir, se conceptualiza el infinito desde su concepción potencial imposibilitando la reflexión matemática en torno a este y al límite, con aproximadamente un 46% de aparición en el total de respuestas recepcionadas de las distintas actividades.

CONCLUSIONES

La teoría de los campos conceptuales ofrece un marco para el análisis de la conceptualización que tiene un sujeto sobre un concepto. Para esto pone a disposición el concepto de **esquema**, y es aquí donde podemos visualizar el alma de la conceptualización, modelando lo que se encuentra en el interior, la forma en que entendemos lo real, con las representaciones externas y sus bases internas. De esta manera, esta investigación se asienta con el objetivo de aproximarnos a la conceptualización presente en un grupo de estudiantes sobre el concepto de límite previo a su enseñanza.

Para esto, se diseñó un cuestionario compuesto de 6 situaciones que involucran conceptos estructuradores del límite, con principal foco en el concepto de infinito y sus conceptualizaciones epistemológicas. Esto nos permitió identificar las conceptualizaciones mediante el análisis de los esquemas evidenciados en el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, permitiendo establecer directrices recurrentes entre los estudiantes y poniendo en aquellas respuestas que difieren a lo que se esperaba a priori. De esta manera, y a través de los objetivos específicos, podemos dar respuesta a la pregunta móvil de este estudio, ¿Cuál es la conceptualización del límite que poseen los estudiantes previos a su enseñanza formal en educación media?

Con relación a las conceptualizaciones hitorico-epistemologicas que participan en la construcción del concepto del límite, identificamos a la conceptualización del infinito como piedra angular de su construcción y de cómo la historia y los conceptos matemáticos permiten a los matemáticos ampliar

la comprensión de este, desde la conceptualización potencial a la actual, acompañada del desarrollo de conceptos geométricos, algebraicos y numéricos.

En primer lugar, identificamos al horror al infinito como una conceptualización temprana de lo infinito, esta se caracteriza por contradicciones producidas al enfrentar lo real con reflexiones o paradojas que no pueden ser superadas por los matemáticos de la época, de esta manera no se puede enfrentar al infinito o bien se opta por un momento de este para poder trabajar.

En segundo lugar, identificamos conceptualizaciones infinitesimales, que se desarrollan gracias al avance en la geometría y el estudio de las curvas mediante la construcción de conceptos de función. Esta conceptualización esta ad portas de enfrentar el infinito para el trabajo matemático, pero se concentra en la diferencia numérica por alcanzar el límite. Este proceso vive dos etapas, la primera donde se interpreta el límite como una diferencia infinitesimal en un momento dado del infinito que permita trabajar o conjeturar en torno a este y una etapa posterior donde esta diferencia infinitesimal se torna dinámica y por ende la podemos considerar despreciable en los cálculos matemáticos.

En ultimo lugar, encontramos la conceptualización actualista, aquí mediante la formalización de la matemática y los avances en los campos de conjuntos permiten la construcción del límite, separando lo infinito y dinámico de este. Esto ultimo da paso a considerar al límite a través de una conceptualización estática del concepto.

Al analizar los esquemas que se presentan en el desarrollo de las actividades, damos cuenta en primera instancia que los estudiantes identifican como meta la reflexión en torno a lo infinito en la mayoría de las actividades, exceptuando las actividades que se desarrollan en el entorno algebraico-funcional, esto posiblemente a lo que menciona Artigue (1995), respecto a las dificultades que tienen los estudiantes con respecto de la comprensión de este concepto

Para terminar, se identifican que las actividades que se desarrollan en el entorno geométrico facilitan al estudiante identificar al infinito y límite como metas de las actividades, permitiendole reflexionar más fluidamente a cerca del comportamiento de estas.

Referencias

Las referencias se presentarán como se muestra al final del documento, utilizando el estilo 'Encabezado 3' para el encabezado. Las referencias utilizan el estilo 'JNEM Referencias', el que resulta en un tipo de 11 puntos y un sangrado de 0.51cm. Los autores deben seguir el estilo presentado, el cual es una versión simplificada del estilo para referencias de la APA, Séptima edición. Asegúrate de que todas las referencias utilizadas en el texto aparezcan en esta lista. **Las referencias son parte de las cinco páginas de la propuesta.**

Referencias

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA* (págs. 97-140). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A.
- Cornu, B. (1981). *Apprentissage de la notion de limite : modèles spontanés et modèles propes. Proceedings PME-V* (Vol. I). France: Grenoble.

- Irazoqui Becerra, E., & Medina Rivilla, A. (2013). Estudio Preliminar de Aproximación al Concepto de Límite de una Función. *Theoria*, 22(1), 21-31.
- Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (Síntesis Conceptual). *IIPSI, Facultad de Psicología UNMSM*, 123-146.
- Ministerio de Educación. (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° Medio* (1 ed.). Santiago: Ministerio de Educación. doi:978-956-292-807-6
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular. *Educational Studies in mathematics*(12), 151-169.



CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL A PARTIR DE LA LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Alejandro Cabrera Baquedano

El concepto de función exponencial es abordado en los últimos años de educación secundaria como en educación superior, lo que reviste una atención especial a ella. A continuación, se presenta el análisis de los resultados obtenidos de un experimento con alumnos de tercer año medio, cuyo objetivo era caracterizar el trabajo matemático desarrollado por los estudiantes al enfrentarse a una tarea de modelación matemática para construir el concepto de función exponencial mediante la Ley de Enfriamiento de Newton. Las categorías de análisis fueron elaboradas a partir de la articulación entre el ciclo de Modelación Matemática (Borromeo-Ferri, 2010) y el Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011). Dentro de los resultados obtenidos destacamos la activación del plano Semiótico – Discursivo [Sem-Dis] en aquellas preguntas que permitían transitar por las distintas fases del ciclo de modelación y cómo el concepto de proporcionalidad inversa fue un obstáculo didáctico a la hora de construir el concepto de función exponencial en situaciones de modelación.

Palabras Clave: Función exponencial, Crecimiento covariacional, Ley de enfriamiento de Newton, Espacio de Trabajo Matemático, Modelación Matemática.

ANTECEDENTES

El concepto de función exponencial se aborda tanto en los últimos años de la educación secundaria como en educación superior, lo que le otorga una atención especial. Entre las características de este concepto se encuentra la relación aditiva de la variable independiente con la relación multiplicativa de la variable dependiente. Ellis, Özgür, Kulow, Dogan & Amidon (2016) sugieren que ubicar una exploración de crecimiento exponencial en la que los estudiantes pueden manipular cantidades covalentes continuamente pueden fomentar su capacidad para coordinar el crecimiento multiplicativo de la variable dependiente con el crecimiento aditivo de la variable independiente, una clave elemento en la comprensión de la naturaleza del crecimiento exponencial.

Las Bases Curriculares (MINEDUC, 2019) para 3ro medio vigentes, proponen el siguiente objetivo para abordar el concepto de función exponencial

Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos o situaciones de crecimiento y decrecimiento, que involucran las funciones exponenciales y logarítmica, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales. (p. 72)

Dentro de las propiedades trabajadas, se explicita el dominio y recorrido de la función y las condiciones que deben cumplir sus parámetros. Se analizan propiedades que enriquecen el concepto de esta función como son la inyectividad y epiyectividad de esta, para posteriormente formalizar su función inversa, incorporando para ello, la función logarítmica. En este período, el trabajo es gráfico y algebraico. La propuesta presentada en el texto de estudio, no se han incorporado problemáticas que puedan ser modeladas mediante esta función, siendo este concepto abordado a partir de ejercicios de valorización para determinar el valor de la imagen o preimagen, según las condiciones dadas.

Una investigación realizada por los grupos de investigación LDAR-P7 de Francia y ECOS-Sud C13H03 de Chile diseñaron una secuencia didáctica con centro en la función exponencial, la cual fue implementada en Chile y Francia. Dentro de los resultados obtenidos destacan que el aspecto gráfico evidencia rápidamente la dialéctica local/global, en términos de la continuidad: la relación: discreto – denso – continua no se repara con el proceso de modelización debido a que, si bien la gráfica lleva a pensar en la continuidad, el modelo no tiene como justificarla (Kuzniak, Tanguay, Vivier, Mena-Lorca, Mena-Lorca & Montoya-Delgadillo, 2018).

El objetivo propuesto es caracterizar el trabajo matemático desarrollado por los estudiantes, al desarrollar una tarea de modelación matemática para construir el concepto de función exponencial mediante la Ley de Enfriamiento de Newton. Para esto utilizaremos de manera combinada los Espacios de Trabajo Matemáticos (Kuzniak, 2010) y el Ciclo de Modelación (Borromeo – Ferri, 2010).

MARCO TEÓRICO

En la presente investigación son utilizados los conceptos de modelación y modelo matemático, desde la perspectiva de Borromeo-Ferri (2010). Así, el modelo matemático (de un fenómeno o situación problema) es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera (gráfica, numérica o algebraica), el fenómeno en cuestión. La autora define modelación como un proceso cíclico donde las reflexiones sobre el modelo y la intención de uso de éste, conduce a una redefinición constante. Borromeo-Ferri (2010) ilustra el ciclo de la modelación a partir de seis procesos (*Figura 1*).

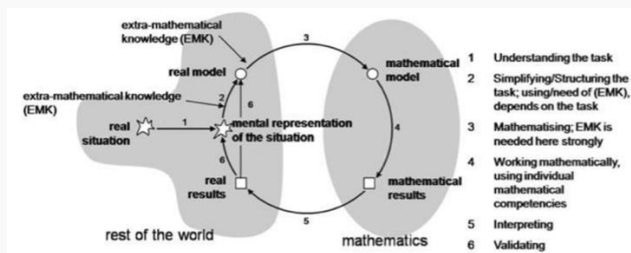


Figura 1. Ciclo de modelación (Borromeo – Ferri, 2010)

En adición a lo anterior, el Espacio de Trabajo Matemático [ETM] es una teoría propuesta por Kuzniak (2010), el cual permite describir y caracterizar el trabajo matemático de un individuo a partir de una tarea específica (Kuzniak y Richard, 2014). Con este enfoque es posible describir cómo en la solución de una tarea se articulan elementos de tipo epistemológico y cognitivo, mostrando las circulaciones entre las componentes del ETM activadas.

El ETM consiste en la articulación de dos planos: Epistemológico y Cognitivo, los cuales interactúan entre sí, a través de un proceso de génesis (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016). Cabe mencionar que también existe una articulación entre las distintas génesis, generándose los tres planos verticales, denominados [Sem-ins], [Ins-Dis], [Sem-Dis].

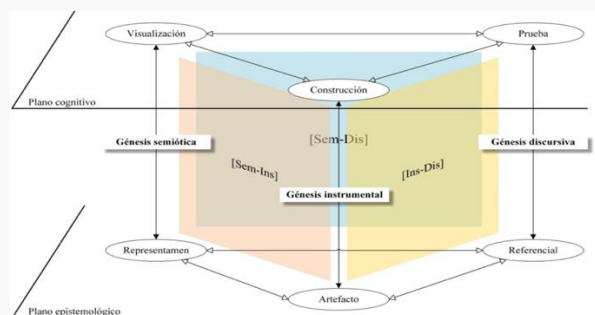


Figura 2: Espacio de Trabajo Matemático y sus génesis (Kuzniak, 2011)

METODOLOGÍA

La presente investigación es de carácter cualitativo, interpretativo y no correlacional. El experimento ha sido realizado por 6 estudiantes que cursan tercer año medio, los cuales se distribuyeron en tres parejas. Las fuentes de recolección de datos son las producciones escritas de los estudiantes y el registro audiovisual de la clase. La tarea propuesta a los estudiantes es hervir agua y posteriormente con la ayuda de un termómetro digital, registrar el valor de la temperatura del agua en intervalos de diez segundos, durante cinco minutos. Posteriormente, los estudiantes debieron contestar un cuestionario utilizando el software geogebra para responder a determinadas preguntas.

Para el levantamiento de categorías de análisis, se consideraron de manera articulada el ciclo de Modelación Matemática (MM) propuesto por Borromeo – Ferri (2010) con elementos del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011) a fin de identificar y analizar cómo el estudiante transita por las fases del proceso, desde un punto de vista cognitivo y epistemológico, cuando se enfrenta a una situación de modelación que involucra componentes de la función exponencial.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos son presentados por cada fase del ciclo de modelación analizando los procedimientos matemáticos realizados por los estudiantes, a partir de las componentes del ETM.

Resultados categoría 1: fase Comprensión de la situación.

Durante esta fase, se esperaba que los estudiantes conjeturaran situaciones que podían ser modeladas con agua, un vaso precipitado y un termómetro digital. En esta fase el estudiante comienza a diseñar representaciones mentales sobre la situación.

Resultados categoría 2: fase Simplificación.

Los tres grupos durante esta fase realizan reconstrucciones mentales basadas en la pregunta anterior y la formulación del experimento “medir la temperatura del agua durante un lapso”. En esta fase emergen conocimientos extramatemáticos de los estudiantes ligados al área de la física para construir de manera interna el modelo, descartando ciertas variables para realizar el experimento.

Resultados categoría 3: fase Matemización.

Luego de la realización del experimento, los grupos de estudiantes completan una tabla de valores, registrando el tiempo de cada medición y el valor de la temperatura que indicaba el termómetro. A partir de los datos registrados en la tabla de valores los estudiantes comienzan a construir su modelo para representar la situación.

En términos del ETM, el lector digital del termómetro permite activar la génesis semiótica a través del proceso de visualización de la temperatura en este, el cual le brinda al estudiante durante la toma de datos, la posibilidad de establecer relaciones lógicas y formar imágenes mentales sobre el fenómeno experimentado, identificando que la temperatura no varía en forma lineal, debido a que estos no logran predecir el siguiente valor al momento de registrar las mediciones. Al momento de registrar los resultados en la tabla de valores, considerada como un artefacto simbólico, los estudiantes realizan procedimientos matemáticos en busca de relaciones numéricas. En un inicio, establecen relaciones generales a partir de su comportamiento, como que la temperatura disminuye mientras el tiempo aumenta, cuya conducta la asocian a la de proporcionalidad inversa.

Resultados categoría 4: fase Trabajo Matemático.

La pregunta: *¿qué relaciones puede establecer?* tiene como fin ser articulador entre la fase de Matemización y la fase de Trabajo Matemático. Posteriormente, los estudiantes deben graficar los datos registrados en la tabla de valores en el software Geogebra, a partir de lo anterior deben establecer relaciones usando el registro gráfico. Durante esta fase los estudiantes ingresaron los valores en Geogebra y describieron relaciones a partir del gráfico obtenido, analizando el comportamiento de la curva y de los valores asociados. Posteriormente, debían predecir el valor de la temperatura en dos instantes que no habían sido registrados en la tabla de valores y, por lo tanto, no están presentes en el gráfico entregado por el software Geogebra.

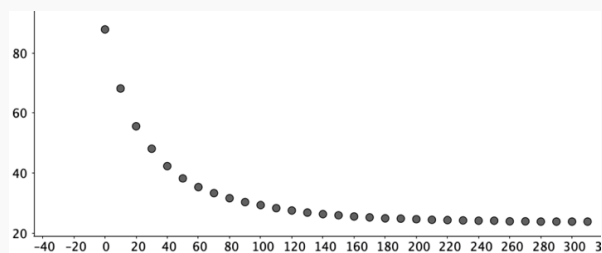


Figura 3. Gráfico obtenido por grupo 2

En el sentido del ETM, el software Geogebra es un artefacto, el cual es instrumentalizado por los estudiantes al momento de generar la representación gráfica del fenómeno, activando la génesis instrumental. La activación de la génesis instrumental permite la posterior activación de la génesis semiótica a través de la visualización de la curva, a partir de la cual los estudiantes interpretan la variación no aditiva de los valores de la variable dependiente y de la variable independiente, asociando el comportamiento gráfico a un fenómeno de proporcionalidad inversa.

Resultados categoría 5: fase Interpretación.

Las preguntas: *¿Qué temperatura hay a los 45 segundos? Argumente su respuesta y ¿Es válido este argumento para predecir la temperatura a los 217 segundos?*, tenían como objetivo articular la fase

de trabajo matemático con la fase de interpretación, puesto que los valores obtenidos en el modelo matemático deben estar en sintonía con los valores obtenidos en el modelo real. La fase de interpretación en los tres grupos se logra parcialmente, puesto que si bien calculan los valores y los valores obtenidos se encuentran en un rango posible, no articulan este procedimiento con la descripción de la curva dada en la fase de matematización.

Resultados categoría 6, fase Validación.

Durante esta fase los estudiantes comunican los resultados obtenidos durante el experimento al resto de sus compañeros, presentando sus conclusiones y relaciones establecidas. Durante esta fase, consideramos que existe una circulación completa del estudiante por las distintas génesis del ETM. Si bien el referencial epistemológico en el ETM está predeterminado, el ciclo de modelación permite flexibilizar las interpretaciones utilizando elementos propios del ETM. A raíz de lo anterior, aun cuando los estudiantes no llegan al modelo definido en el análisis a priori, existe un proceso de modelación por parte de los estudiantes, lo que nos permite considerar que existe una circulación entre las génesis a partir del plano cognitivo.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos en la presente investigación, consideramos que el concepto de función exponencial no surge de manera natural por parte de los estudiantes. Sumado a lo anterior, el concepto de proporcionalidad inversa se presenta como un obstáculo al momento de construir el concepto de función exponencial por parte de los estudiantes, esto se debe a que mientras los valores de una variable aumentan, los otros disminuyen, sin embargo, solo un grupo identifica que no hay una constante de proporcionalidad y, por lo tanto, no estamos frente a un fenómeno de este tipo. Lo anterior, podría deberse a ciertas formas de proceder en la asignatura para identificar relaciones entre las variables. Estas dirigen la atención al comportamiento de forma genérica sin enfatizar en el que el aumento o disminución debe tener un factor constante. Lo cual se traduce en que el estudiante, en situaciones donde no está explícita la relación de las variables, recurra a ciertas técnicas arraigadas en su proceso de escolaridad para describir el fenómeno.

La visualización juega un papel fundamental en el experimento, puesto que la curva obtenida es similar a la presentada por los textos escolares para representar fenómenos de proporcionalidad inversa, en donde existe una buena aproximación, para algunos experimentos, en el rango entre 80 s y 240 s mediante la función de variable real definida como: $f(x) = \frac{1250}{x} + 18$.

Por otro lado, es necesaria además de la activación de la génesis semiótica que subyace a este proceso, que los estudiantes movilicen elementos analíticos que están en el referencial teórico de su ETM personal, para que logren cuestionar el modelo elaborado y preguntarse si existirá otro modelo que aproxime mejor el fenómeno experimentado, en una búsqueda por resignificar su modelo, fortaleciendo la fase de validación, poco visibilizada en esta investigación.

Referencias

- Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45-58.

- Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Dogan, M. F. y Amidon, J. (2016). An Exponential Growth Learning Trajectory: Students' Emerging Understanding of Exponential Growth Through Covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(3), 151-181.
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (16), 9-24.



CONSTRUCCIÓN DEL ISOMORFISMO DE ESPACIOS VECTORIALES: CONCEPTO ARTICULADOR PARA UN MODELO MULTINTERPRETATIVO

Claudio Zamorano Sánchez, Marcela Parraguez Gonzalez

Basados en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), es de interés analizar aquellas problemáticas que subyacen al interior del álgebra lineal y, que se producen cuando se llevan a cabo procesos de enseñanza y aprendizaje, específicamente del concepto de Isomorfismo de Espacios Vectoriales (IEV), identificando dificultades y obstáculos que la propia teoría de la Didáctica de la Matemática (DM) se ha encargado de describir, siendo algunos propios del IEV y otros que se suceden solo por el hecho del contexto del álgebra lineal. Resultados preliminares de la investigación dan cuenta del resultado de la existencia de una articulación entre las interpretaciones funcional, matricial y geométrico-figural, para la generación de un esquema multinterpretativo del IEV. Esto último se fundamente a través de una categorización a las respuestas de una actividad, que pone de relieve estrategias, procedimientos y justificaciones.

Didáctica del Álgebra Lineal, Isomorfismo de Espacios Vectoriales, Modelo Multinterpretativo, Teoría APOE

INTRODUCCIÓN

Cuando un estudiante de educación superior se enfrenta a los conceptos del álgebra lineal, se pueden identificar dificultades y obstáculos asociados a su proceso de enseñanza y aprendizaje, que los investigadores de la didáctica del álgebra lineal vienen reportando y que en pocas palabras lo sintetizamos en la siguiente frase: cuando los estudiantes abordan la naturaleza abstracta del álgebra lineal, es como si estuvieran mirando una película en un lenguaje extraño, sin la posibilidad de colocar subtítulos, por su abrumadora cantidad de definiciones y símbolos que provienen de distintos lenguajes (Sierpiska, 2000; Dorier, 2000 y Dorier et al. 2000). Esto último, tiene como consecuencia que los estudiantes manifiesten un énfasis mayor por el razonamiento práctico por sobre el teórico.

En general, los conceptos básicos del álgebra lineal evolucionan en su complejidad, esto es, los sistemas de ecuaciones, matrices, espacios vectoriales, bases, junto con las transformaciones lineales, interactúan para unificarse y formar nuevos conceptos que son propios de este fragmento de la matemática. En particular, el concepto de isomorfismo de espacios vectoriales (IEV) se desarrolla con base en tres interpretaciones —funcional, matricial y geométrico-figural— a través de las cuales la presente investigación busca identificar la existencia de elementos que permitan unificar y articular los componentes de un esquema Multinterpretativo de IEV. Para alcanzar el objetivo anterior, nos preguntarnos cómo se construye el IEV y con ello, si existen elementos, que permitan articular y unificar las interpretaciones —funcional, matricial y geométrico-figural del IEV— en la construcción de un esquema Multinterpretativo cognitivo del concepto de IEV.

ANTECEDENTES

De acuerdo con Poole (2003, p. 511) una interpretación funcional de IEV se puede definir como: *Sean U, V dos espacios vectoriales sobre un Cuerpo K . Decimos que U es isomorfo a V , si y solo si, existe un isomorfismo de U en V .* Al igual que en el isomorfismo de grupos, Mena (2011) menciona que el isomorfismo de dos estructuras está condicionada a la existencia previa de un morfismo biyectivo. En nuestro contexto, el morfismo corresponde a la transformación lineal, y para probar que es biyectivo, es necesario considerar los conceptos de función y teoremas ligados a la dimensión del *Kernel* y la *Imagen* de la transformación lineal.

Desde el punto de vista matricial, un IEV según Aburto, et. al. (2003, p. 133), se define como: *Sean U, V dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo K , además B, C son bases de U, V respectivamente. Si T es lineal de U en V entonces: T es un isomorfismo, si y solo si, $[T]_B^C$*

es invertible.

En la indagación de textos de estudio de álgebra lineal (Aburto, et al. 2003; Weller, et al. 2002; Poole, 2003; Isaacs, Sabogal, 2009) sobre la presentación del IEV, se evidencia que lo geométrico o figural del IEV no es explícito, y coincidimos con Sierpinska (2000), Dorier, et al., (2000), Hillel (2000), Sierpinska, Dorier (2001) que el significado geométrico de los conceptos básicos del álgebra lineal genera dificultades para su aprendizaje. Particularmente para el IEV, consideramos que una articulación entre las interpretaciones —funcional, matricial y geométrico-figural del IEV— ayudaría a remontar las dificultades de su aprendizaje, que favorecen el trabajo mecánico por sobre el conceptual. Sumado a lo anterior, las definiciones indagadas en esos libros, permiten evidenciar de forma emergente que la articulación entre las tres interpretaciones se produce a través la matriz cambio de base y sus valores propios, cómo esencia de la articulación de la interpretación funcional y matricial del IEV.

MARCO TEORICO

La teoría APOE, acrónimo de *Acción-Proceso-Objeto-Eschema*, es un modelo que describe desde una perspectiva cognitiva como un individuo aprende un concepto matemático, describiendo cómo estos son contruidos mentalmente (Arnon et al. 2014), a través, de mecanismos mentales como la *interiorización*, la *encapsulación*, *desencapsulación*, *coordinación* y *reversión*, que permiten que las estructuras mentales evolucionen según el nivel de construcción del individuo (Oktac. 2019).

Es así como APOE nos proporciona elementos y fundamentos teóricos para describir el nivel de construcción que muestra un estudiante con base en un modelo Multinterpretativo del IEV, bajo una perspectiva *cognitiva*. De acuerdo con ello, para el presente reporte de investigación, se ha considerado unas preguntas de evaluación relacionada con la matriz asociada al cambio de base para su análisis, la cual presentamos como una *acción* que afecta al *esquema* Multinterpretativo de la Transformación lineal para *tematizarlo* en un nuevo esquema, esto es como un objeto cognitivo.

METODOLOGÍA

Para el diseño de este reporte de investigación se ha considerado un estudio de caso instrumental. Según Stake (2010) este permite estudiar las particularidades del caso, para comprender, a través del caso, un fenómeno en profundidad. El estudio de caso instrumental, es elegido debido a que el

foco del estudio no es el grupo de informantes, sino la viabilidad de mostrar un articulador para la construcción del Modelo multinterpretativo del IEV por parte del grupo. En este estudio de caso, el rol del estudiante es secundario (Álvarez, San Fabian, 2012).

LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Para este reporte de investigación se han seleccionado tres evaluaciones de un curso de álgebra lineal de una carrera de Pedagogía en Matemática y Estadística, y que se relacionan con el IEV. Se ponen de relieve en el análisis de las respuestas las justificaciones que utilizan los estudiantes para identificar, aplicar y resolver problemas, utilizando conceptos que propicien la articulación de las interpretaciones, para la generación las componentes de un esquema Multinterpretativo cognitivo de IEV.

A continuación, se muestran dos preguntas no intencionadas que, de forma diferente, pone como foco la matriz cambio de base como un concepto articulador hipotético de las interpretaciones funcional y matricial de la transformación lineal, las que permitirán sustentar el articulador hipotético de las componentes de un esquema Multinterpretativo para el IEV.

$T(a, b, c, d)$

2. Sea $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ donde $T(a, b, c, d) = (a+b) + bx + (c+d)x^2 + dx^3$

- Demuestre que T es una transformación lineal.
- Determine $\text{Ker}(T)$. ¿Es T inyectiva?
- Determine una base para la $\text{Im}(T)$.
- ¿Es T sobreyectiva?
- Considere las bases $\alpha = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ y $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$. Determine $[T]_{\beta}^{\alpha}$

4. Considere la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ y las bases canónicas $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$, tal que

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Encuentre la transformación lineal $T(x, y, z)$
- Determine $\text{Ker}(T)$. ¿Es T inyectiva?
- Determine la $\dim(\text{Im}(T))$. ¿Es T sobreyectiva?

Figura 1. Evaluación de proceso unidad Transformaciones lineales.

En la Figura 1 se puede observar que el foco de la pregunta no está en la determinación del IEV, pero en las respuestas de los estudiantes, se puede observar cómo se *desencapsulan* los objetos derivados de los *esquemas* de transformación lineal, en su forma funcional y matricial, para dar la oportunidad de articularse con nuevos procesos y generar así el esquema de un modelo Multinterpretativo para el IEV.

Una vez seleccionadas las preguntas (Figura 1) que fueron sujeto de análisis, se propusieron categorías de análisis que permitieron identificar acciones que abarcan el conocimiento en general sobre el objeto IEV en el ámbito de las estrategias, procedimientos y argumentos, para dar respuestas a cada una de las preguntas.

En el contexto anterior se proponen en la Tabla 1 las siguientes categorías de análisis: a_n : estrategias de resolución, b_n : procedimientos de cálculo, c_n : argumentación matemática.

Categoría	Descripción
a_1	Identifica los conceptos y la información del enunciado del problema.
a_2	Plantea el problema, utilizando teoremas o propiedades que contribuyen a resolver.
a_3	Elabora un registro geométrico sobre la información extraída de los enunciados.
b_1	Utiliza combinaciones lineales para resolver los problemas.

b_2	Utiliza teoremas de bases para resolver problemas.
b_3	Resuelve sistemas de ecuaciones para la determinación de características de las bases.
c_1	Utiliza teoremas y propiedades para fundamentar sus respuestas.
c_2	Justifica gráficamente sus respuestas para dar más especificidad en sus argumentos.
c_3	Argumenta la respuesta de sus soluciones con la suficiencia de los datos identificados.

Tabla 1: Categorías de análisis para las preguntas de la Figura 1.

RESULTADOS

En el siguiente apartado se muestran los resultados obtenidos al analizar las respuestas de tres estudiantes de formación inicial docente en el ámbito del álgebra lineal, que muestran respuestas representativas de su grupo. El análisis está en concordancia con las categorías propuestas para reconocer mecanismos mentales que indiquen la construcción conceptual de un modelo Multinterpretativo.

Análisis	
Respuesta	Reflexión de la respuesta
e- Considere las bases $\alpha = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ Def. $[T]_{\beta}^{\alpha}$ Sabemos que $[T]_{\beta}^{\alpha} = ([T(v_1)]_{\beta}, [T(v_2)]_{\beta}, [T(v_3)]_{\beta}, [T(v_4)]_{\beta})$ Buscamos entonces cada $[T(v_i)]_{\beta}$	Notamos que $[T(v_1)]_{\beta} = [T(1, 0, 0)]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(1, 0, 0) = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $T(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\bullet T(v_1) = T(1, 0, 0, 0) = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3$ $\Rightarrow [T(v_1)]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓	Buscamos $T(x, y, z)$. Como sabemos que α es base, se tiene que $\exists a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tales que $(x, y, z) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)$ ✓ En específico $a_1 = x, a_2 = y, a_3 = z$ ✓
$\Rightarrow [T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Luego: $T(x, y, z) = T(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1))$ $= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1)$ $= x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} x - z & 3x \\ y + z & xy + z \end{pmatrix}$

Tabla 2: Respuestas pregunta 2.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En general, las preguntas aplicadas sobre transformaciones lineales no se enfocó directamente al estudio del IEV, sin embargo las respuestas de los estudiantes nos proporcionó información sobre algunas estrategias, procedimientos y argumentaciones que se transforman en datos de una medición inicial sobre el IEV.

En particular, con respecto al proceso seguido por los estudiantes, en las preguntas 2, a partir del conocimiento de las bases α, β y la transformación lineal T , el esquema de transformación lineal se desencapsula en procesos asociados a la combinación lineal para coordinarse con las bases α, β para generar la matriz $[T]_{\beta}^{\alpha}$ asociada al cambio de base. Por otro lado, en la pregunta 4 se genera el camino opuesto, en ella la matriz cambio de base $[T]_{\beta}^{\alpha}$ como objeto, son afectados por la acción de las bases α, β , para transformar en un nuevo esquema de transformación lineal.

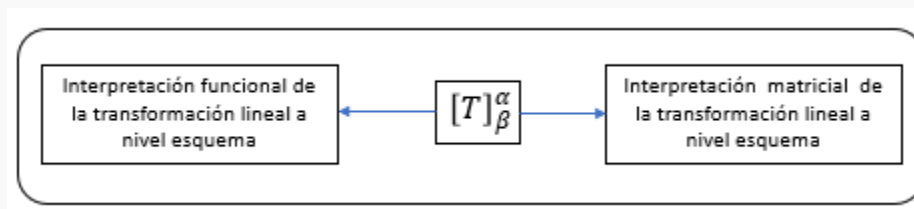


Figura 2. Matriz cambio de base como articulador de la Transformación Lineal.

En conclusión, tal como muestra la Figura 2 la existencia de un concepto articulador para los esquemas funcional y matricial de la transformación lineal, podrá coordinarse con otros procesos, como lo es, el concepto de base de espacios vectoriales, teorema de la dimensión de bases y propiedades que son propias del trabajo con funciones, para la generación de las componentes de un modelo Multinterpretativo del IEV.

Para finalizar, podemos evidenciar que la generación de un modelo Multinterpretativo del IEV es factible, mostrando evidencia que existe un articulador de las interpretaciones funcional y matricial para el IEV, mientras que la hipótesis sobre la interpretación geométrico-figural puede ser entendido como un subesquema de los otros dos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el programa de Formación de Capital Humano Avanzado de CONICYT, a través del proyecto FONDECYT N°1180468.

Referencias

- Aburto, L., Jiménez, D., Johnson, R. (2003). *Álgebra Lineal*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Instituto de Matemáticas. Tercera edición.
- Álvarez, C., San Fabián, J. L. (2012). *La elección del estudio de caso en investigación educativa*. *Gazeta de Antropología*, 28(1). Recuperado de http://www.ugr.es/~pwlac/G28_14Carmen_Alvarez-JoseLuis_SanFabian.html
- Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory*. New York: Springer.
- Dorier, J.L. (2000). Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. In: Dorier J.L. (eds) *On the Teaching of Linear Algebra. Mathematics Education Library*, vol 23. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_1

- Dorier, J.L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (2000). The Meta Lever. In: Dorier JL. (eds) *On the Teaching of Linear Algebra. Mathematics Education Library, vol 23*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_5
- Dorier, J.L., Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. In: Holton D., Artigue M., Kirchgräber U., Hillel J., Niss M., Schoenfeld A. (eds) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. New ICMI Study Series, vol 7*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_24
- Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In: Dorier JL. (eds) *On the Teaching of Linear Algebra. Mathematics Education Library, vol 23*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_7
- Mena, A. (2011). *Estudio Epistemológico del Teorema del Isomorfismo de Grupos*. [Tesis de Doctorado en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Ciudad de México].
- Oktaç, A. (2019). *Mental constructions in linear algebra*. *ZDM Mathematics Education* 51, 1043–1054 (2019). <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01037-9>
- Poole, D. (2003). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna*. México: Thomson Internacional.
- Sabogal, S., y Isaacs, R. (2005). *Aproximación al Álgebra Lineal: Un Enfoque Geométrico*. ISBN: 958-8187-41-9, vol1, pp 180 Ediciones Uis. Colombia.
- Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. In: Dorier JL. (eds) *On the Teaching of Linear Algebra. Mathematics Education Library, vol 23*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8
- Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Barcelona: Labor <https://imas2011.files.wordpress.com/2011/06/stake11-24.pdf>
- Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M. y Arnon, I. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*. Disponible en línea: <http://pc75666.math.cwu.edu/Montgomery/scholar/2002/0731-b-llawi.pdf>



CREENCIAS DE AUTOEFICACIA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: ADAPTACIÓN Y VALIDACIÓN DE UN CUESTIONARIO PARA PROFESORES EN SERVICIO

Helena Montenegro, Javiera Ortiz, Daniela Rojas, Sofía Bustos

Este estudio presenta los resultados de la adaptación y validación de la Escala de Creencias de Eficacia en la Enseñanza de la Matemática (ECEEM) para profesores en ejercicio. Para ello, la adaptación de las preguntas se sometió a juicio de expertos y se piloteó en una muestra de 834 profesores de matemática de Enseñanza Básica. Los resultados del análisis factorial confirmatorio mostraron que un modelo de 3 factores es el más robusto para la muestra levantada, identificándose tres subescalas: creencias negativas respecto de la habilidad para la enseñanza de las matemáticas; creencias positivas respecto de la habilidad para enseñar matemáticas; y creencias de autoeficacia vinculadas a las interacciones con los estudiantes. Estos resultados tienen implicaciones prácticas y para futuras investigaciones.

Creencias de autoeficacia, profesores, enseñanza de la matemática, cuestionario, validación

INTRODUCCIÓN

La autoeficacia docente se define como el conjunto de creencias que posee el profesor sobre su capacidad para influir de manera positiva en el aprendizaje de los estudiantes (Rodríguez et al., 2009). Estudios realizados en esta variable han identificado que los profesores con alta creencia de autoeficacia en su enseñanza poseen mayor apertura a explorar nuevas ideas; mayor disposición para adoptar nuevos métodos de enseñanza; y se muestran más motivados en los procesos de enseñanza que adoptan (Bamburg, 2004; Tschannen-Moran & Woolfolk, 2001). De igual forma, la autoeficacia docente se relaciona con el rendimiento y resultados de aprendizaje de los estudiantes, ya que las prácticas de enseñanza que adoptan los profesores se vinculan estrechamente con las expectativas que tienen sobre los estudiantes (Rodríguez et al., 2009).

En virtud de lo anteriormente expuesto, Enochs y colaboradores (2000) desarrollaron un cuestionario para medir esta variable en estudiantes de pedagogía y docentes del área de matemáticas (Mathematics Teaching Efficacy Belief Instrument, MTEBI), el cual ha sido ampliamente utilizado para investigar el aprendizaje de la enseñanza de las matemáticas en la formación docente inicial (Kieftenbeld et al., 2011; Swars et al., 2006). Este instrumento ya fue adaptado y validado al idioma español en Chile por Verdugo, Asún y Martínez (2017), quienes desarrollaron la Escala de Creencias de Eficacia en la Enseñanza de la Matemática (ECEEM).

Dada la ausencia de instrumentos que miden esta variable en docente de aula, se consideró relevante adaptarlo a este grupo de educadores, con la finalidad de poder contribuir con instrumentos de medición de estas creencias en los profesores en servicio. En virtud de ello, el objetivo del presente estudio es compartir las propiedades psicométricas de la adaptación y validación de la Escala de Creencias de Eficacia en la Enseñanza de la Matemática (ECEEM) para profesores en ejercicio. Se espera que los resultados de la adaptación de esta escala permitan consolidar una nueva línea de investigación enfocada en el desarrollo de la autoeficacia en los

profesores en ejercicio, la cual contribuya con mejores experiencias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula escolar.

METODOLOGÍA

La Escala de Creencias de Eficacia en la Enseñanza de la Matemática (ECEEM) es una adaptación al español de la escala Mathematics Teaching Efficacy Belief Instrument (MTEBI) desarrollada por Enochs y colaboradores (2000). Este cuestionario mide creencia de autoeficacia a estudiantes en formación, y es una escala tipo Likert de 13 preguntas en la cual la puntuación oscila desde 1 Totalmente en desacuerdo a 5 Totalmente de acuerdo.

Este instrumento ya fue adaptado y validado al idioma español en Chile por Verdugo, Asún y Martínez (2017). La muestra participante estuvo conformada por 945 estudiantes de Pedagogía en Educación Básica de 14 universidades en cinco regiones de las zonas norte, centro y sur de nuestro país. Los resultados indicaron que ECEEM presentó buen nivel de discriminación, un ajuste adecuado a la estructura teórica propuesta, alta fiabilidad y una correlación significativa con las variables esperadas.

Para la adaptación y validación de esta escala a profesores en servicio, se empleó la siguiente metodología:

1. Se adaptaron las 13 preguntas del cuestionario a un lenguaje más acorde empleado por el profesorado en ejercicio. Además, se agregaron dos preguntas asociadas al estudio desarrollado por Grant (2018) respecto de creencias de autoeficacia en profesores de básica. Estas preguntas son “Dudo si podré mejorar mi capacidad para enseñar matemáticas”; y “Considero que tengo menos capacidades para enseñar matemática que el común de los docentes”.
2. Esta versión preliminar fue sometida a validez de contenido a través de juicio de expertos (Galicia et al., 2017).
3. Una vez validada esta adaptación preliminar del cuestionario, se piloteó a una muestra de 834 profesores de enseñanza básica que participaron en el programa “Suma y Sigue: Matemática en línea” durante los años 2019 y 2020. La edad de los participantes varía entre 24 a 66 años, siendo el promedio 38 años. Con relación al género, 81% corresponde a mujeres y 19% a hombres.
4. Los resultados de la aplicación del cuestionario fueron sometidos a análisis descriptivos y análisis psicométricos para determinar la estructura del cuestionario. En particular, se estimó la confiabilidad mediante alfa de Cronbach; y análisis factoriales de tipo exploratorio (AFE) y confirmatorio (AFC) para determinar la validez de constructo del cuestionario (DeVellis, 2012; Hair et al., 1999).
5. El análisis factorial exploratorio se desarrolló mediante análisis de componente principales y rotación Varimax. Para la evaluación del ajuste global del modelo se consideraron los siguientes criterios estadísticos: χ^2 ; índice de ajuste comparativo (CFI); índice de bondad del ajuste (GFI); índice de bondad del ajuste corregido (AGFI); índice de bondad del ajuste

corregido por parsimonia (PGFI); error de aproximación cuadrático medio (RMSEA); y el criterio informativo de Akaike (AIC).

RESULTADOS

A continuación, se entregan los resultados de análisis factorial exploratorio para analizar la estructura de esta escala. Para identificar el modelo con mejor bondad de ajuste, se efectuaron diversos análisis factoriales exploratorios, siendo el de 3 factores el modelo más parsimonioso.

La prueba de la medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) reporta un índice muy bueno con un valor de KMO = .925. Además, la prueba de Barlett fue estadísticamente significativa ($\chi^2 = 3688.508$; $p = .000$). Los resultados de este análisis factorial se compartirán en la siguiente tabla en donde se consignarán los valores eigen y preguntas asociadas a cada uno de los factores: Apellidos de los autores

Factores	Preguntas asociadas	Valor Eigen	AFE
1	2 – 4 – 5 – 9 – 10 – 14 – 15	5.530	Explica el 52.339 % de la varianza común de los datos
2	1 – 3 – 6 – 8 – 12	1.406	
3	7 – 11 – 13	1.001	

Tabla 1: Resultados análisis factorial exploratorio

La tabla N° 1 reporta resultados interesantes de destacar. En primer lugar, las preguntas de la escala original se agrupan alrededor de tres variables latentes. El primer factor agrupa 7 preguntas (2, 4, 5, 9, 10, 14 y 15) relacionadas con reactivos que abordan creencias negativas respecto de la habilidad para la enseñanza de las matemáticas. En cambio, en el segundo factor se agrupan 5 preguntas relacionadas con creencias positivas respecto de su habilidad para enseñar matemáticas (1, 3, 6, 8 y 12). Por último, en el factor 3 se agrupan las preguntas 7, 11 y 13, las cuales se orienta a medir creencias de autoeficacia vinculadas con interacciones que desarrollan con los estudiantes.

Una vez obtenida esta estructura, se procedió a estimar la bondad del ajuste de este modelo por medio de un análisis factorial confirmatorio. Con relación a los criterios estadísticos obtenidos para este modelo son muy buenos (RMSEA = 0.047; CFI = 0.98; GFI = 0.96; AGFI = 0.95). Esta tendencia también se observa en los valores obtenidos en la medida de ajuste de parsimonia (PGFI = 0.70; AIC= 314.46). La síntesis de esos resultados se puede apreciar en la siguiente tabla:

Índices de Ajuste	Modelo 3 Factores
χ^2	248.46
gl	87
p	<0.000
RMSEA	0.047
CFI	0.98
GFI	0.96
AGFI	0.95
PGFI	0.70
AIC	314.46

Tabla 2: Estadísticos de bondad de ajuste para modelo 3 factores

Finalmente, como una forma de sistematizar la estructura de este cuestionario, la siguiente tabla reporta las preguntas asociadas a cada factor, su peso factorial y el coeficiente de confiabilidad estimado. En términos generales, los resultados obtenidos dan cuenta que en el Factor 1 se agruparon un total de diez preguntas en donde los coeficientes de los pesos factoriales oscilan entre .766 y .504, y el coeficiente de confiabilidad obtenido en esta escala es muy bueno ($\alpha = .859$). A su vez, en el Factor 2 se agruparon un total de cuatro preguntas con pesos factoriales que oscilan entre .704 y .518. Con relación al coeficiente de confiabilidad obtenido en esta nueva escala, el resultado es aceptable ($\alpha = .713$). Finalmente, en el Factor 3 los pesos factoriales de las preguntas oscilan entre .700 y .552. Respecto de la confiabilidad de esta escala, los resultados dan cuenta de un coeficiente de confiabilidad medianamente aceptable dado al bajo número de ítems asociado a este factor ($\alpha = .637$).

Factor	Nº ítem	Reactivo	P. Factorial	α de Cronbach
1	2	Incluso haciendo un gran esfuerzo, NO enseñé matemática tan bien como lo hago en otras asignaturas	.766	.859
	4	NO soy muy efectivo/a monitoreando actividades matemáticas	.556	
	5	Generalmente enseñé matemática de forma POCO efectiva	.622	
	9	Dudo si tengo las habilidades necesarias para enseñar matemática	.734	
	10	Si tuviera la opción, preferiría NO invitar a un directivo de mi establecimiento a evaluar mi desempeño enseñando matemática	.570	

	14	Dudo si podré mejorar mi capacidad para enseñar matemática	.504	
	15	Considero que tengo menos capacidades para enseñar matemática que el común de los docentes	.740	
	1	Constantemente encuentro mejores formas para enseñar matemática	.518	
	3	Sé cómo enseñar conceptos matemáticos de forma efectiva	.657	
2	6	Comprendo conceptos matemáticos lo suficientemente bien como para ser efectivo enseñando matemática	.681	.713
	8	Generalmente, soy capaz de responder las preguntas matemáticas de los estudiantes	.666	
	12	Al enseñar matemática, suelo acoger las preguntas de los estudiantes	.704	
	7	Encuentro difícil usar material concreto para explicar a los estudiantes los porqué de la matemática	.552	
3	11	Cuando un estudiante tiene dificultades entendiendo un concepto matemático, en general NO sé cómo ayudarlo	.645	.637
	13	Generalmente, NO sé qué hacer para motivar a los estudiantes con la matemática	.700	

Tabla 3: Estructura interna del modelo de 3 factores

DISCUSIÓN

El principal objetivo de este trabajo fue la adaptación y validación de la Escala de Creencias de Eficacia en la Enseñanza de la Matemática (ECEEM) para profesores en ejercicio. Para ello, a través de análisis factoriales exploratorios y confirmatorios se estimaron la validez de constructo y bondad de ajuste del cuestionario. Los análisis factoriales confirmatorios arrojaron un modelo de tres factores, demostrando resultados consistentes y conceptualmente válidos. Además, la fiabilidad obtenida en las escalas es aceptable.

Si bien este cuestionario no tiene como finalidad ser un instrumento de medición para el registro de todos los aspectos a la base de la enseñanza, su aplicación invita a reflexionar acerca del nivel y sentido de autoeficacia del docente respecto de sus prácticas pedagógicas, aspectos que en la mayoría de las veces son escasamente visibilizado por los profesores (Rodríguez et al., 2009). Además, contribuye en la medición de este aspecto de manera específica en la enseñanza de las matemáticas, contribuyendo con avanzar en la comprensión de la enseñanza vinculada a una disciplina en particular y no de manera genérica. En consecuencia, se propone que la adaptación de

este cuestionario para profesores en ejercicio puede ser utilizado tanto para fines investigativos como de desarrollo académico de los profesores de matemáticas en aula.

Con relación a las implicancias prácticas, se establece que su uso puede apoyar procesos de formación continua del profesorado, aportando evidencia respecto del impacto que pueden tener la participación en talleres y capacitaciones del área. Respecto de futuras investigaciones posibles de realizar en esta área, el uso de este cuestionario permitiría realizar estudios sobre las creencias de autoeficacia que poseen los profesores de matemática y su relación con el aprendizaje de los estudiantes en el sistema escolar, aportando en desarrollo de nuevos conocimientos en esta área.

Referencias

- Bamburg, J. (2004) *Raising expectations to improve student learning*. Urban Monograph Series. Oakbrook, Ill.: North Central Regional Educational Laboratory.
- DeVellis, R. F. (2012). *Scale development: Theory and applications*. Los Angeles: SAGE.
- Enochs, L., Smith, P., & Huinker, D. (2000). Establishing factorial validity of the Mathematics Teaching Efficacy Beliefs Instrument. *School Science and Mathematics*, 4(100), 194–202.
- Galicia, L., Balderrama, J., & Edel, R. (2017). Validez de contenido por juicio de expertos: Propuesta de una herramienta virtual. *Apertura: Revista de Innovación Educativa*, 9(2), 42–53.
- Grant, S. L. (2018). The impact of professional development in mathematics on elementary school teachers' mathematics anxiety and mathematics efficacy beliefs. Doctoral dissertation, Baker University.
- Hair, J., Anderson, R., Tatheam, R., & Black, W. (1999). *Análisis multivariante* (5a. ed.). Madrid: Prentice Hall.
- Kieftenbeld, V., Natesan, P., & Eddy, C. (2011). An item response theory analysis of the mathematics teaching efficacy beliefs instrument. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 29(5), 443-454.
- Rodríguez, S., Núñez, J. C., Valle, A., Blas, R., & Rosario, P. (2009). Autoeficacia docente, motivación del profesor y estrategias de enseñanza. *Escritos de Psicología*, 3(1), 1-7.
- Swars, S. L., Daane, C., & Giesen, J. (2006). Mathematics anxiety and mathematics teachers efficacy: What is the relationship in elementary pre-service teacher? *School Science and Mathematics*, 106, 306-315.
- Tschannen-Moran M. & Woolfolk, A. (2001). Teacher efficacy: capturing an elusive construct. *Teaching and Teacher Education*. 17, 783-805.
- Verdugo, M., Asún, R., & Martínez, S. (2017). Validación de la escala de creencias de eficacia en la enseñanza de la matemática (ECEEM) y caracterización de las creencias de estudiantes de Pedagogía Básica. *Calidad En La Educación*, 47(2), 145–17.

DE LA FUNCIÓN LINEAL A LA NO LINEAL: ANÁLISIS DE LA CONGRUENCIA ENTRE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LOS LIBROS DE TEXTO

Johanna Alfaro Muñoz, Roberto Vidal Cortez

El siguiente reporte, es referente a una investigación que busca indagar las razones de la persistencia del uso de modelos lineales cuando se transita a otro tipo de modelos expresados por funciones. Sabido es que estas últimas tienen una importante variedad de representaciones semióticas, las cuales aportan a la comprensión del concepto de función. Por esto, se analiza la congruencia entre los registros de representación semiótica que presentan los libros de texto al desarrollar la noción de función, comenzando por la función lineal, llegando hasta la función cuadrática de acuerdo al currículo nacional vigente. Con este estudio se pretende dilucidar si la forma en que se presentan estas funciones y sus registros semióticos, podrían llegar a tener alguna incidencia en el fenómeno didáctico de extender modelos lineales en contextos no lineales.

Función, linealidad, fenómeno didáctico, registros semióticos, unidades significantes.

INTRODUCCIÓN

Este reporte presenta conclusiones preliminares, de una investigación que pretende buscar en los registros de representación semiótica de los libros de texto otorgados por el ministerio de educación, algún obstáculo que genere que los estudiantes tiendan a utilizar modelos lineales en contextos que no lo son.

Se presenta algunos antecedentes relevantes, así como la justificación de la elección del marco de referencia, la metodología utilizada y algunas conclusiones preliminares de la investigación.

ANTECEDENTES

Los autores Villareal, Esteley y Alagia, entre los años 2001 y 2009, realizaron una serie de 132 investigaciones comprobando la ocurrencia del fenómeno que denominaron: 'Extensión de modelos lineales en contextos no lineales', refiriéndose como modelo lineal a representaciones particulares de proporcionalidad directa, la regla de tres simple o a la relación funcional $y=ax+b$, obteniendo que en todos los casos que analizaban, las respuestas de estudiantes secundarios y universitarios, en problemas tanto algebraicos como geométricos, tendían a resolver problemas utilizando la regla de tres, en casos donde la problemática no hacía referencia a una relación proporcional. Estos autores concluyeron que los errores cometidos por los estudiantes son síntomas de las concepciones que tienen de las actividades matemáticas aprendidas en toda su escolaridad.

Por otra parte Sureda y Otero (2013) caracterizaron las producciones de 115 estudiantes de cuarto año de educación secundaria argentina (15-16 años), identificando modificaciones en las respuestas de los estudiantes a medida que avanzaba el estudio, dividiéndolo en cinco etapas el proceso de conceptualización, desde el pensamiento lineal al pensamiento exponencial. Sus conclusiones dan cuenta del reconocimiento a la linealidad o no linealidad mediante algunas representaciones que lo hace más explícito para los estudiantes, pero mostrando que cuando estos no están seguros del tipo de modelo (lineal o no lineal), ya sea mediante el registro verbal o tabular, tienden a creer que

es un modelo lineal. Los autores concluyen que la formalización de los conceptos de cada sistema de representación resulta central en el tránsito de lo lineal a lo exponencial, y que este tránsito está muy vinculado a las tareas que se les proponen a los estudiantes en los sistemas de representación.

MARCO DE REFERENCIA Y METODOLOGIA

En Chile el concepto de función es tema obligado desde los 13 años aproximadamente en adelante, y relevante para el aprendizaje posterior del Cálculo infinitesimal, pero a pesar del gran tiempo dedicado a este concepto, en diversas investigaciones se demuestra las deficiencias en su aprendizaje, muchas de estas observadas mediante la Teoría de Registros de Representación Semiótica, dada la variedad de registros con los que se puede representar una función y además porque este concepto matemático no es accesible para el sujeto sino a través de sus representaciones.

Para los sujetos, una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, permitirle el acceso al objeto representado, solo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para reproducir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso... y que “espontáneamente” puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo. (Duval 2004, pág. 31)

Podríamos decir entonces que para aprender y comprender el concepto de función es indispensable el uso coordinado de representaciones, ya que, a diferencia de otras áreas, este objeto no es observable físicamente, por lo que la única forma que tenemos de trabajar con él es mediante de representaciones semióticas y signos.

Por otra parte, el sólo pasar de una representación al concepto, no garantiza la comprensión de este, sino se establecen relaciones que permitan un ideal y fluido tránsito entre sus diferentes representaciones, requiriendo la comprensión del objeto, una coordinación interna (Duval, 2000, pág. 158), sin la cual los estudiantes no podrán realizar conversiones de forma natural.

Esta investigación busca analizar las conversiones de las representaciones semióticas y los criterios de congruencia entre las diversas representaciones del concepto función a través de un enfoque cualitativo, con un diseño exploratorio, descriptivo – interpretativo, cuyo objeto de análisis son los libros de texto.

Se seleccionaron 6 libros de texto distribuidos por el Ministerio de Educación de Chile entre los 2000 al 2019, dividiéndolos en dos periodos, cuyo hito separador comprende un cambio curricular que afectó directamente al concepto de función. El primer período va entre los años 2009-2015, mientras que el segundo periodo corresponde a los años 2016 al 2019, específicamente en los niveles escolares desde octavo año de Educación Básica hasta el segundo año de Enseñanza Media.

Año	Nivel	Editorial
2010-2014	8° básico	Santillana
2014-2015	I° medio	SM
2014-2015	II° medio	SM

Tabla 1: libros de texto distribuidos por el MINEDUC, primer periodo.

Año	Nivel	Editorial
2016-2019	8° básico	SM
2016-2020	I° medio	Santillana
2016-2020	II° medio	SM

Tabla 2: libros de texto distribuidos por el MINEDUC, segundo periodo.

Para analizar la congruencia entre registros se utilizó y adapto una matriz extraída de Ospina (2012), “las representaciones semióticas en el aprendizaje de función lineal”

REGISTRO DE PARTIDA	REGISTRO DE LLEGADA
UNIDADES SIGNIFICANTES	

Tabla 3: matriz de análisis de congruencia entre registros.

Para poder definir si existe congruencia o no entre los registros, se debe determinar que se cumplan los tres criterios descritos por Duval (1999) de la siguiente manera:

Correspondencia (C): A cada unidad significativa de una representación se puede asociar a una unidad significativa del otro registro.

Univocidad (U): A cada unidad significativa de la representación de partida le corresponde una única unidad significantes en el registro de llegada.

Orden (O): La correspondencia en las organizaciones de las unidades significantes de dos representaciones comparadas, es en el mismo orden en ambos casos.

Si se cumplen los tres criterios anteriormente mencionados, significa que existe congruencia entre los registros examinados lo que será representado con las letras CR.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES PRELIMINARES

Al analizar de forma independiente los libros de texto y sus representaciones semióticas, se encontraron similitudes en las técnicas y procedimientos para introducir el concepto de función y el tránsito entre sus representaciones. Además, en todos los textos analizados se presenta una forma que a ojos de un lector no conocedor del concepto puede parecer la única manera de trasladarse entre los registros de representación semiótica, y mediante una organización secuencial (paso a paso) como se muestra en el siguiente ejemplo del libro de 1º medio correspondiente al primer periodo.

¿Cómo representar una función?

Antonia camina todos los días cierta distancia, a una rapidez de dos metros por segundo, manteniendo el ritmo constante. ¿Cómo se podría modelar esta situación como una función? ¿Cómo se representaría gráficamente esta función?

Para resolver esta situación puedes seguir los pasos:

Paso 1 Identificar la relación de dependencia (variable dependiente e independiente) y verificar que sea una función.

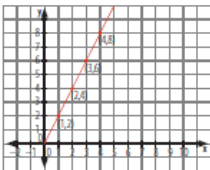
La distancia que recorre Antonia depende del tiempo empleado en caminarlo, por lo tanto, estas corresponden a las variables dependiente e independiente, respectivamente. Esta relación es una función, ya que a cierto tiempo empleado en caminar le corresponde una única distancia recorrida.

Paso 2 Completar la tabla para asociar los valores de la variable dependiente e independiente.

Valores de la variable independiente	Valores de la variable dependiente
Tiempo (seg)	Distancia recorrida (m)
1	2
2	4
3	6
4	8

Paso 3 Establecer los pares ordenados y graficarlos en el plano cartesiano a partir de los valores de la tabla anterior.

x	y	Par ordenado (x, y)
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)
3	6	(3, 6)
4	8	(4, 8)



Por lo tanto, en el plano se muestra la representación gráfica de la función de la distancia recorrida por Antonia en sus caminatas.

Paso 4 Modelar la situación con lenguaje algebraico y expresarla como función.

$y = f(x)$: metros de distancia recorridos.
 x : tiempo empleado

Los **metros de distancia** recorridos están en función del **tiempo empleado**, por lo que la función que modela esta situación es:

$y = 2x \rightarrow f(x) = 2x$

En resumen

Una **función** se puede representar a través de un **diagrama sagital**; una **tabla** de valores, por medio de un **gráfico** o con una **expresión algebraica**.
 En el **eje X** se grafican los valores de la variable independiente y en el **eje Y** los valores de la variable dependiente. En un par ordenado (x, y) la coordenada x se llama **abscisa** y la coordenada y **ordenada**.

UNIDAD 2 • ÁLGEBRA Y FUNCIONES | 127

Imagen 1: 1º medio 2014-1015 SM

En este texto, se presenta de forma literal un paso a paso para representar funciones, con un orden determinado que llevan aprendiendo los estudiantes de años anteriores como si fuera una ley cristalizada, y pareciera que llegar a la gráfica siempre es el objetivo final, pues no se observó en ninguno de los textos analizados otro orden de conversión, lo que podría ser una de las razones que expliquen porque los estudiantes al ver una tabla o solo una expresión algebraica o en lenguaje natural no sean capaces de reconocer un modelo no lineal.

En general, cuando se presentan conversiones del registro grafico al tabular, se puede determinar que se cumple con los criterios de congruencia, pero se puede notar como se evidencia en la siguiente imagen que las tablas al contener solo algunos números (para poder graficar), provoca que si se miraran los registros semióticos de forma separada, y se quisiera pasar desde el registro gráfico al tabular no se llegaría al mismo registro por pérdida de una infinidad de datos (valores), generando confusiones en el dominio y recorrido de la función que se muestra.

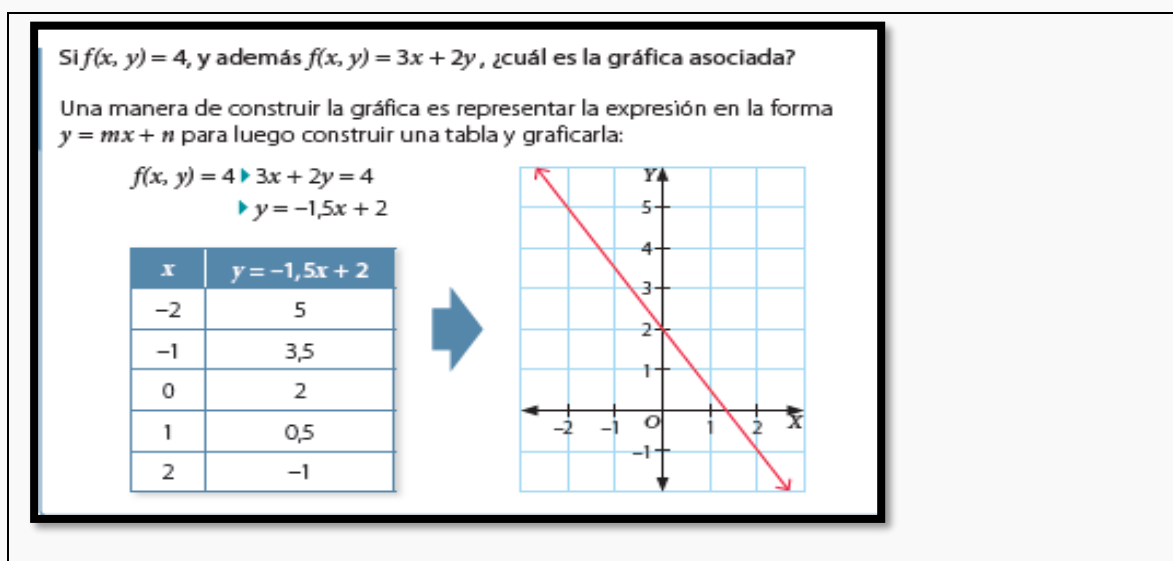


Imagen 2: 1° medio 2016-2020, Santillana

Según Duval, la comprensión requiere de una coordinación interna (Duval, 2000, pág. 158). Sin esta los estudiantes no podrán realizar conversiones de forma natural. Es decir, que para comprender este concepto es necesario que los estudiantes logren relacionar diferentes representaciones del objeto, más que comprenderlo conceptualmente o “elegir” una mejor representación.

Resulta entonces indispensable el uso coordinado de representaciones, ya que la única forma que tenemos conocerlos, es mediante de representaciones semióticas.

Esta investigación aún en proceso y deja muchas aristas sobre las cuales continuar investigando y proponiendo nuevas formas u organizaciones para enseñar el concepto de función en el paso de lo lineal a lo no lineal provisto en los textos escolares.

Referencias

- De Bock, D.; Von Doorem, W.; Verschaffel, L. & Janssens, D. Secondary school pupils' improper proportional reasoning: an in-dephstudy of the nature and persistence of

pupils'errors. En Proceedings of the 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 25), Vol. 2. p. 313-320, 2001

- Del Valle, J. Muñoz, G. Santis, M.(2014). *Texto del estudiante matemática 1° medio*. SM.
- Duval, R. (1988). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigación en Matemática Educativa II*. 173–201. Cd. de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica
- Duval. (1992). Graficas y ecuaciones. La articulación de dos registros. Antologia en Educacion Matematica Cinvestav, México.
- Duval, R (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, Santiago de Cali, Colombia
- Maldonado, L. Marambio, F. Galasso. B. (2016). *Texto del estudiante matemática 1° medio*. Santillana.
- Ospina. (2012).las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal. (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales.
- Sureda, P. Rita, M. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial, Educación Matemática, Vol. 25, Núm. 2, 89-118.
- Villarreal, M. Esteley, C. Alagia, H. (2007). Las producciones matemáticas de estudiantes universitarios al extender modelos lineales a contextos no lineales. En Abrate, R. & Pochulu, M.



DESARROLLO PROFESIONAL DE DIDÁCTAS DE LA MATEMÁTICA: LECCIONES APRENDIDAS A PARTIR DE UN SELF-STUDY COLABORATIVO INTERINSTITUCIONAL

Carlos Vanegas-Ortega, Carolina Henríquez Rivas, Carolina Martínez

En el marco de los desafíos profesionales que plantea hoy la docencia universitaria, nos hemos propuesto caracterizar los procesos reflexivos que vivenciamos didactas de la matemática cuando desarrollamos un self-study colaborativo interinstitucional. Para ello, hemos adaptado el ciclo deweyniano para vivir dos procesos reflexivos: el primero, de autoconfrontación con los que ocurre en nuestras clases universitarias y lo que plantean los estudiantes mediante ticket de salida, y el segundo, de resignificación de la docencia universitaria con los amigos críticos. Los resultados muestran que cada didacta experimentó distintos procesos de reflexión en cuanto a las dimensiones relacionadas con los estudiantes, el contexto, la didáctica específica y la profesionalidad.

Didáctica de la Matemática, Self-Study, Formación de Profesores, Reflexión, Docencia Universitaria.

INTRODUCCIÓN

En los últimos veinte años, la formación inicial y continua de profesores ha realizado esfuerzos por incorporar de manera intencionada el conocimiento didáctico como un eje fundamental del quehacer profesional docente (Guzmán, 2011; Porlán, 2018; Sanmartí & Marchán, 2015). Sin embargo, en Chile, ha sido lento el proceso de aceptación del conocimiento didáctico del contenido (también llamado CDC o PCK por sus siglas en inglés) (Vergara & Cofré, 2014). De hecho, sólo desde el año 2016 y en el marco de diversos planes de mejoramiento institucional (PMI) financiados por el Ministerio de Educación para la formación de profesores, se han podido incorporar al cuerpo académico, especialistas en didácticas específicas.

Sin embargo, entre la docencia y los esfuerzos constantes por validarnos en la comunidad académica, nos damos cuenta que no estamos apartando tiempo suficiente para usar los conocimientos didácticos en mirar y resignificar nuestras propias prácticas. En muchas ocasiones estamos tan preocupados de que el futuro profesor se apropie de los conocimientos didácticos, que olvidamos el uso de la didáctica en nuestros procesos de enseñanza.

Por ello, no resulta sorprendente que los futuros profesores manifiesten que algunos cursos de didáctica son el contraejemplo de lo que no se debe hacer en una clase (Moreno, 2011), en especial, porque se convierten en espacios de formación llenos de lecturas que no son discutidas ni contextualizadas a la realidad de las escuelas; o en otros casos, dichos cursos se dedican a la estructuración de secuencias didácticas idealizadas que siguen las propuestas de diversos autores, pero que son inservibles en los contextos escolares (Jiménez-Tenorio & Oliva Martínez, 2018).

Escuchar a los profesores en formación referirse a los cursos de didáctica y sus profesores como antítesis de la didáctica, es una preocupación que nos llevó a preguntarnos preliminarmente: ¿cuáles son los espacios reales que dedicamos a reflexionar sobre nuestra docencia universitaria?, ¿existe coherencia entre nuestro discurso sobre la didáctica y nuestras prácticas pedagógicas?, ¿cuáles son nuestros principales aciertos y dificultades en las aulas universitarias?, ¿cómo nutrir el

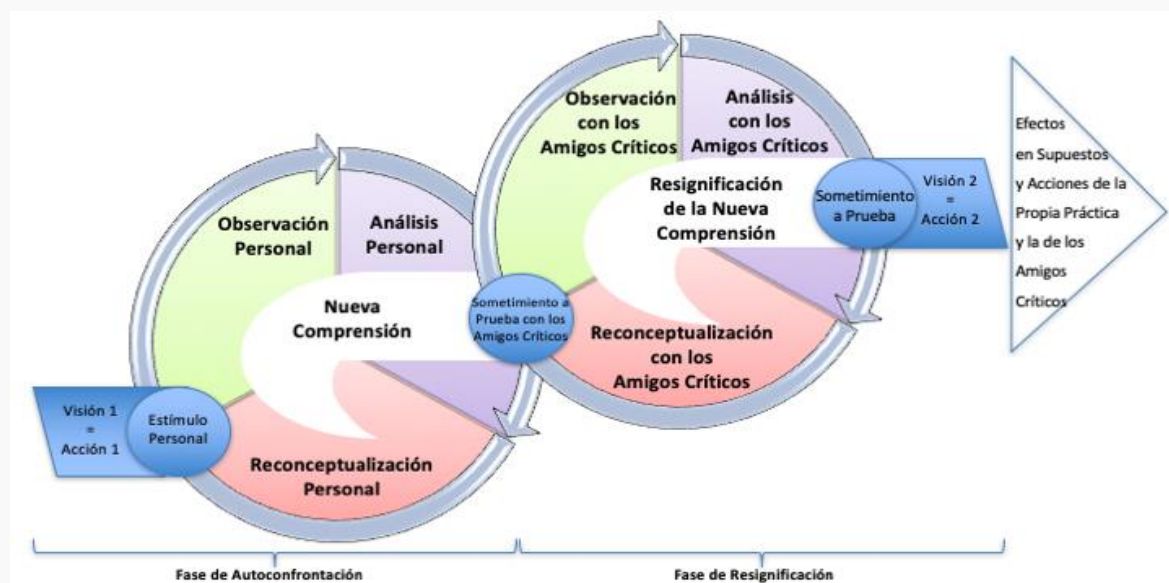
conjunto de estrategias y recursos de las clases de tal manera que respondan a las características del estudiantado?, ¿cómo lo hacen otros didactas de nuestra propia institución?, ¿qué podemos aprender de didactas de otras instituciones? Para atender estas preguntas, nos propusimos como objetivo caracterizar los procesos reflexivos que vivenciamos didactas de la matemática cuando desarrollamos un self-study colaborativo interinstitucional que considera las responsabilidades asociadas a la docencia universitaria.

METODOLOGÍA

La investigación se realizó desde un paradigma cualitativo con enfoque de self-study (Olarte, 2016; Russell & Mena, 2016; Russell, Fuentealba & Hirmas, 2016). Se trata de interpretar críticamente el papel de nosotros como formadores de formadores, analizando las consecuencias de la toma de decisiones personales, así como las características y matices de los contextos particulares en los que se desarrolla nuestra docencia universitaria (Clarke & Erickson, 2004). La investigación con enfoque Self-Study nos ubica como didactas en un lugar protagónico en el avance del conocimiento sobre la disciplina de la enseñanza, ya que, a través del análisis y construcción de un relato personal y colectivo, se precisan los parámetros de nuestras propias prácticas (Russell & Mena, 2016). El enfoque del Self-Study profesionaliza nuestra labor al reconocernos como actores determinantes en la definición y transformación de nuestro rol docente.

El diseño metodológico de la investigación se ha estructurado en dos fases, a partir del estudio intensivo de 4 casos. Como mostramos en la figura 1, hemos adaptado el ciclo deweyiano (Vanegas & Fuentealba, 2018) de tal manera que el proceso de reflexión pasara primero por la mirada personal, y posteriormente, las nuevas comprensiones emergidas del primer ciclo reflexivo, fueran sometidas a prueba mediante un ciclo de reflexión colaborativa con los amigos críticos, lo cual, permitió resignificar las nuevas comprensiones y determinar efectos en supuestos y acciones de la propia práctica y la de los amigos críticos.

Figura 1. Ciclo Reflexivo para un Self-Study Colaborativo.



Fuente: elaboración propia a partir del modelo deweyiano (Vanegas & Fuentealba, 2018, p. 17).

Hemos tomado como base el ciclo deweyniano porque en éste la reflexión se convierte en un proceso de investigación provocado por estímulos que pueden ser personales o colectivos (Vanegas & Fuentealba, 2018). La sistematización de este análisis fue presentada por cada didacta ante el equipo de amigos críticos en jornadas de reflexión colaborativa que sirvieron, desde el punto de vista metodológico para triangular la información (Vallejo & Finol de Franco, 2009), y desde el punto de vista reflexivo, para resignificar colaborativamente las nuevas comprensiones, a través de la observación, el análisis y la reconceptualización con los amigos críticos (Hirmas & Blanco, 2016; Russell, 2018; Selmo & Orsenigo, 2014; Vanegas & Fuentealba, 2018). Las jornadas de reflexión fueron videograbadas y analizadas través del análisis del contenido del discurso (Santander, 2011; Menéndez & Rodríguez, 2012), de tal manera que se pudiesen caracterizar las resignificaciones que vivió y reconoció cada didacta.

RESULTADOS

Los de resultados de cada didacta nos ha permitido rescatar ‘la voz en primera persona’ de las experiencias que hemos vivido durante la investigación, y al mismo tiempo, dar cuenta de las diferentes maneras como enfrentamos, tensionamos y resolvemos desafíos que supone la docencia universitaria. De manera complementaria, en cada relato se evidencia el valor dado al trabajo colaborativo, en el cual, ‘la voz de los amigos críticos’ se convierte en el mejor aliado para darle profundidad, nuevos sentidos y significados a los procesos reflexivos sobre nuestras prácticas pedagógicas.

En coherencia con nuestro marco teórico (Hirmas & Rosa, 2016; Russell, 2018; Vanegas & Fuentealba, 2018), la apuesta metodológica de adaptar el ciclo deweyniano en dos fases reflexivas, nos permitió reconocer que la reflexión de cada didacta fue vivenciada de manera diferente durante la autoconfrontación, y al mismo tiempo, la reflexión con los amigos críticos durante la resignificación, hizo que aparecieran nuevas dimensiones reflexivas y que se pudieran cuestionar los propios supuestos.

En el caso del didacta 1, la primera fase tensionó la reflexión con respecto a los estudiantes y la didáctica específica, dando alto valor a la información que entregaban los tickets de salida, considerando las dimensiones afectivas y explicitando cambios específicos en su docencia universitaria. Sin embargo, la segunda fase del estudio permitió resignificar los procesos reflexivos sobre la profesionalidad del investigador, a partir la consideración del MTSK desde una mirada más aplica y no reducida a la coherencia instrumental con los sucesos de la clase; además, las amigas críticas hicieron énfasis en tomar conciencia sobre la tensión que le genera el respeto por los dos conocimientos (matemática y didáctica de la matemática), lo que debería influir en la generación medida de desafíos y cambios paulatinos sobre los procesos de enseñanza.

Para la didacta 2, la fase de autoconfrontación deja ver un primer momento de mucha tensión entre las perspectivas de los estudiantes y la forma como ella comprende la didáctica específica, pero al avanzar en el estudio, los tickets de salida se convirtieron en instrumento de satisfacción sobre la mejora de la articulación entre la enseñanza y el aprendizaje. Para la fase de resignificación, con la ayuda de los amigos críticos, la investigadora logra darle relevancia a la dimensión del contexto como un elemento clave que tensiona la dimensión epistémica de su noción de didáctica de la matemática; además, la ayudan en la consideración de alternativas para involucrar a los estudiantes

en procesos de innovación e investigación y a no sentirse culpable por no dar recetas a los estudiantes.

En el caso de la didacta 3, sus procesos reflexivos giran en torno a la didáctica específica, en los cuales, el estudiantado aparece como agente principal que tensiona la coherencia de la didáctica respecto de una estrategia (el aprendizaje activo mediante el aula invertida). El trabajo con los amigos críticos le permite a ella incorporar una visión más amplia sobre su docencia universitaria abordando elementos de su profesionalidad mediante la consideración consciente de sus supuestos epistemológicos y los sentimientos que le producen los estudiantes como motor para la transformación.

Con la didacta 4 ocurre un fenómeno distinto a los tres casos anteriores: en el segundo ciclo de reflexión con los amigos críticos (Resignificación), en vez de aparecer una nueva dimensión, se reducen y se da nuevos significados a una dimensión particular. En este caso, la didacta parte con un alto énfasis en la consideración del contexto, en conjunto con las tensiones que le generan los estudiantes y la profesionalidad de ellos. La reflexión con los amigos críticos le permitió dejar de pensar en los elementos externos a ella (contexto y profesionalidad de los estudiantes), para concentrarse en elementos internos: el desarrollo de su propia profesionalidad a través de la resignificación de sus supuestos y expectativas sobre los estudiantes, así como el respeto por los tiempos que cada uno de ellos necesitan para dar sentido y significado a sus construcciones identitarias.

Destacamos el hecho de que nuestras áreas de conocimiento marcaron el centro de los procesos reflexivos: la didáctica de la disciplina (en los casos 1, 2 y 3) y el desarrollo de la identidad como profesor/a de la disciplina (caso 4). En ese sentido, valoramos y apoyamos lo que otros estudios han postulado: el conocimiento didáctico permite la configuración de procesos reflexivos e identitarios diferenciadores que resultan claves en la comprensión y resignificación de las prácticas pedagógicas (Arana, Macías & Martínez, 2018; Porlán, 2018; Vanegas, 2016).

CONCLUSIONES

La investigación de la propia práctica como formadores de formadores nos da herramientas para una mejor comprensión de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje sobre la enseñanza. En ese sentido, la perspectiva de abordar tensiones y contradicciones, con miras a producir nuevas resignificaciones, nos ofrece la posibilidad de compartir nuestras percepciones como formador de formadores, facilitando el desarrollo de los futuros docentes mediante la construcción de un lenguaje común que nos permite describir la propia práctica, estudiarla y compartirla.

Destacamos el hecho de que nuestras áreas de conocimiento marcaron el centro de los procesos reflexivos: la didáctica de la disciplina (en los casos 1, 2 y 3) y el desarrollo de la identidad como profesor/a de la disciplina (caso 4). En ese sentido, valoramos y apoyamos lo que otros estudios han postulado: el conocimiento didáctico permite la configuración de procesos reflexivos e identitarios diferenciadores que resultan claves en la comprensión y resignificación de las prácticas pedagógicas (Arana, Macías & Martínez, 2018; Porlán, 2018; Vanegas, 2016).

En coherencia con nuestro marco teórico (Hirmas & Rosa, 2016; Russell, 2018; Vanegas, 2016; Vanegas & Fuentealba, 2018), la apuesta metodológica de adaptar el ciclo deweyniano en dos fases reflexivas, nos permitió reconocer que la reflexión de cada didacta fue vivenciada de manera

diferente durante la autoconfrontación, y al mismo tiempo, la reflexión con los amigos críticos durante la resignificación, hizo que aparecieran nuevas dimensiones reflexivas y que se pudieran cuestionar los propios supuestos.

En nuestro caso, el self-study colaborativo ha puesto de nuevo en tensión los tiempos que dedicamos a reflexionar de manera individual y colectiva sobre nuestras propias prácticas. Articular los tiempos de los cuatro didactas ha sido uno de los desafíos más complejos de este estudio. Incluso, el proceso de escritura de esta comunicación ha significado cuatro experiencias de aprendizajes diferentes que pasaron por los siguientes hitos: la búsqueda personal del sentimiento de contigüidad con el marco teórico y metodológico, pensar y escribir en primera persona en un trabajo que es colectivo, saber recuperar la voz de los cuatro, mantener la preocupación por la coherencia y alineación del equipo, interpelar al otro en un marco de respeto y profesionalismo que le ofrezca la confianza, el deseo y los nuevos insumos para replantear o profundizar sus procesos de reflexión.

Nuestro estudio no está exento de limitaciones y dificultades, pero hemos sabido transformarlas en potencialidades. Los resultados presentados no buscan ningún tipo de generalización, por el contrario, son particulares a nuestros cuatro casos y a los dos contextos universitarios donde trabajamos. Sin embargo, estamos convencidos que el self-study colaborativo es una forma de desarrollo profesional que amplía perspectivas y nos compromete a los formadores con los propios valores y supuestos personales, así como con los del equipo de amigos críticos, lo que sustenta la construcción de nuevos roles y significados para nuestro trabajo académico como formadores de formadores.

Referencias

- Arana, R. M., Macías, J. M., & Martínez, K. M. (2018). Hacia una concepción didáctica reflexiva en la Educación Superior. Una experiencia desde el Ecuador. *Opuntia Brava*, 9(3), 147-154.
- Clarke, A., & Erickson, G. (2004). The nature of teaching and learning in self- study. In J. Loughran, L. M. V. LaBoskey, & T. Russell (Eds.), *International handbook of Self- study of teaching and teacher education practices* (Vol. 1, pp. 41- 67). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Guzmán, J. (2011). La calidad de la enseñanza en educación superior. *Perfiles educativos*, 33, 129-141.
- Hirmas, C., & Blanco, R. (2016). Introducción. In J. Cornejo, J. Loughran, T. Russell, A. Berry, S. Sandretto, S. Schuck, . . . J. J. Mena, *Formadores de Formadores, Descubriendo la Propia Voz a través del Self-Study* (pp. 7-11). Santiago: BUK Grafica & Editora.
- Jiménez-Tenorio, N. y Oliva Martínez, J. (2018). Análisis reflexivo de profesores de ciencias de secundaria en formación inicial en torno a diferentes secuencias didácticas. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 13 (2), 423-439.
- Menéndez, M. A., & Rodríguez, I. S. (2012). *Metodología de la investigación social: técnicas innovadoras y sus aplicaciones: Síntesis*.
- Moreno, T. (2011). Didáctica de la Educación Superior: nuevos desafíos en el siglo XXI. *Perspectiva educacional*, 50(2), 26-54.

- Olarte, A. C. (2016). El auto estudio como enfoque de investigación en la formación docente. *Colombian Applied Linguistics Journal*, 18(2), 9-10.
- Porlán, R. (2018). Didáctica de las ciencias con conciencia. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 36(3), 5-22.
- Russell, T. (2018). A teacher educator's lessons learned from reflective practice. *European Journal of Teacher Education*, 41(1), 4-14.
- Russell, T., Fuentealba, R., & Hirmas, C. (2016). *Formadores de formadores, descubriendo la propia voz a través del self-study*. Santiago: Organización de Estados Iberoamericanos. Retrieved from [http://oei.cl/uploads/files/news/publications/13/Formadores% 20de% 20formadores% 20Self% 20Study](http://oei.cl/uploads/files/news/publications/13/Formadores%20de%20formadores%20Self%20Study)
- Russell, T.; Mena, J. (2016). El self-study como forma de investigación en la formación del profesorado: Un análisis de contenido de los trabajos presentados en el X Congreso Internacional sobre Self-Study S-STEP de 2014. In J. Cornejo, J. Loughran, T. Russell, A. Berry, S. Sandretto, S. Schuck, . . . Mena, *Formadores de Formadores, Descubriendo la Propia Voz a través del Self-Study* (p. 236). Santiago: BUK Grafica & Editora.
- Sanmartí, N., & Marchán, I. (2015). La educación científica del siglo XXI: retos y propuestas. *Investigación y ciencia*, 469, 30-38.
- Santander, P. (2011). Por qué y cómo hacer Análisis de Discurso. *Cinta de moebio*, (41), 207-224.
- Selmo, L., & Orsenigo, J. (2014). Learning and sharing through reflective practice in teacher education in Italy. *5th World Conference on Educational Sciences*, 116, 1925-1929. doi: 10.1016/j.sbspro.2014.01.496
- Vallejo, R., & Finol de Franco, M. (2009). La triangulación como procedimiento de análisis para investigaciones educativas. *REDHECS*, 7, 117-133.
- Vanegas, C. (2016). *Procesos Reflexivos de profesores de ciencias durante las prácticas pedagógicas de formación inicial (Tesis Doctoral)*. Santiago, Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Vanegas, C., & Fuentalba, R. (2018). *Reflexión Docente: Perspectivas Teóricas, Críticas y Modelos para el Desarrollo Profesional de Profesores*. Curitiba, Brasil: Appris.
- Vergara, C., & Cofré, H. (2014). Conocimiento Pedagógico del Contenido: ¿el paradigma perdido en la formación inicial y continua de profesores en Chile? *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 40(ESPECIAL), 323-338.



DISEÑO Y VALIDACIÓN DE DOS CUESTIONARIOS PARA EVALUAR EL NIVEL DE COMPRENSIÓN LECTORA Y DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE ESTUDIANTES CHILENOS DE CUARTO MEDIO

Patricia A. Barrientos-Cayún, Rodrigo A. González-Sepúlveda, Jaime I. García-García

En este trabajo se presenta el proceso de diseño y validación de dos instrumentos de recolección de información: uno para evaluar el nivel de comprensión lectora, y otro para el nivel de resolución de problemas matemáticos de estudiantes chilenos de cuarto año de Educación Media, y con ello, establecer la posible relación entre estos dos aspectos, presentes en el currículum nacional chileno y esenciales en la formación del estudiante. Estos cuestionarios han sido validados por medio de una validación por expertos. Además, se presentan los resultados de un pilotaje con estudiantes de cuarto medio. Sin embargo, estamos conscientes que la cantidad de respuestas obtenidas no son suficientes para establecer la existencia de cierta relación entre las variables; por ello, se contempla, en un estudio futuro, aplicar estos instrumentos en una muestra significativa de estudiantes.

Comprensión lectora, Resolución de problemas matemáticos, Educación Media

INTRODUCCIÓN

Una de las habilidades indispensables para la vida en la sociedad actual es leer y comprender textos. Esta habilidad se va adquiriendo a lo largo de los años; sin embargo, a veces resulta difícil comprender lo que leemos y esto es esencial para todas las áreas del aprendizaje. Es importante desarrollar y reforzar esta competencia lectora desde que aprendemos a leer, ya que la lectura comprensiva nos ayuda a analizar la información contenida en un texto. Calero (2013) señala que saber leer es importante porque es la mejor forma de construir conocimientos. El estudiante que sabe leer bien y que comprende lo que lee, tiene menos dificultades de aprendizaje, ya que a través de la lectura se estimula tanto la imaginación como el razonamiento. Por otro lado, Callejos (2010) menciona que, en algunos casos, los libros y problemas matemáticos contienen enunciados verbales extensos, lo que produce dificultades en su resolución.

La resolución de problemas ha sido un gran aporte en el desarrollado del conocimiento matemático. En Educación Matemática, uno de los trabajos más citados es el propuesto por Polya (1945), donde señala lo fundamental de comprender el problema, ya que “Es de temer lo peor si el alumno se lanza a hacer cálculos o construcciones sin haber comprendido el problema...” (Polya, 1945, p. 28). Schoenfeld (1985) complementa el trabajo de Polya, incorporando y justificando la dimensión cognitiva en el proceso de resolución de problemas. De aquí la importancia de mencionar que la comprensión de un enunciado es la primera fase en la resolución de problemas, ya que esto implica identificar ideas, así como establecer posibles planes de solución. En reiteradas oportunidades, desde la práctica profesional, podemos observar que los estudiantes cuando leen el enunciado de un problema carecen de ideas y patrones lógicos para buscar su solución.

En Educación Media en Chile, la resolución de problemas matemáticos tiene un papel importante y forman parte del enfoque de la asignatura de Matemática, donde se establece que el profesor

incorpore en el aula tareas enfocadas a trabajar mediante la resolución de problemas y la metodología del aprendizaje basado en proyectos (MINEDUC, 2019). En concreto, en las Bases Curriculares de Séptimo Básico a Segundo Medio se señala que: “Comprender las matemáticas y ser capaz de aplicar sus conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales es fundamental para los ciudadanos y las ciudadanas en el mundo moderno” (MINEDUC, 2015, p. 94), y en las Bases Curriculares de Tercero a Cuarto Medio: “La resolución de problemas, el razonamiento matemático y estadístico, el modelamiento, la representación, la argumentación y la comunicación siguen siendo aspectos centrales para la formación...” (MINEDUC, 2019, p. 103). De esta manera, se hace evidente que la resolución de problemas es un aspecto central en la Educación Media, el cual es considerado no sólo como un medio de aprendizaje, sino también como una habilidad que debe ser adquirida a lo largo del proceso educativo, con la finalidad de que los estudiantes “descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real” (MINEDUC, 2015, p. 95). Por tanto, consideramos que analizar el desempeño de los estudiantes al aplicar esta habilidad es de gran importancia.

Los estudios internacionales son considerados una herramienta a nivel educativo, ya que permiten conocer resultados de aprendizajes e identificar problemas en los procesos educativos, y con esto, poder mirar de forma objetiva los logros de los sistemas educativos. En la última participación de Chile en el estudio TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), aplicado en Educación Básica, los resultados muestran que los estudiantes únicamente son capaces de resolver cálculos de un solo paso, es decir, reproducir procesos básicos de matemáticas, así como reconocer información explícita y directa, pero no pueden enfrentar problemas que requieren interpretación y formulación (Agencia de Calidad de la Educación, 2015). Por otro lado, en el estudio PISA (Programme for International Student Assessment), realizado en Educación Media, en relación con la competencia lectora, en promedio, los estudiantes chilenos han desarrollado más competencias relativas a los procesos de comprender un texto, así como evaluar y reflexionar sobre un texto con respecto a localizar información; mientras que, en la competencia matemática, los resultados indican que los estudiantes tienen dificultades en la resolución de problemas, ya sea de cálculo o de comprensión lectora del texto del problema (Agencia de Calidad de la Educación, 2019). Si analizamos de manera conjunta los resultados de ambos estudios, podemos considerar que, a manera de hipótesis, los estudiantes presentan dificultades de comprensión del texto al momento de la resolución de problemas matemáticos. No obstante, los resultados obtenidos en la prueba PISA indican que la competencia lectora ha ido mejorando a diferencia de la matemática. Esto nos lleva a cuestionar si las habilidades de comprensión lectora que los estudiantes han adquirido son las necesarias para comprender el texto de un problema matemático.

Dada la importancia de la comprensión lectora en la resolución de problemas matemáticos, así como la presencia de esta última en el currículum nacional chileno de Educación Media como un aspecto esencial en formación del estudiante, y los preocupantes resultados de las pruebas estandarizadas, es que el presente trabajo toma como centro de atención establecer una relación entre ambas variables; para ello, se diseñaron y validaron dos cuestionarios que permitan evaluar tanto el nivel de comprensión lectora como el de resolución de problemas matemáticos, de manera excluyente, de estudiantes chilenos de cuarto año medio.

MARCO DE REFERENCIA

El marco de referencia que hemos considerado para abordar la comprensión lectora es la Teoría Interaccionista. Esta teoría se centra en los mecanismos cognitivos y, fundamentalmente, en los procesos inferenciales, lo cual es importante para la resolución de problemas matemáticos (Makuc, 2008). Según el MINEDUC (2012a), esta teoría entiende la comprensión lectora como un proceso en el cual el lector debe elaborar un plan para resolver tareas específicas a las que se ve enfrentado.

Al hablar de la resolución de problemas, las metodologías y miradas que la abordan son múltiples. De acuerdo con el MINEDUC (2012b), resolver un problema es un proceso que implica diversas habilidades: indagación, búsqueda de posibles soluciones, planificación de alternativas de solución, decisiones para tomar la alternativa optima y dar respuesta, para luego, validar la solución y comunicarla en el lenguaje propio de la matemática. Además, en este trabajo consideramos lo propuesto por Pozo y Postigo (1994), quienes señalan que para la resolución de problemas (de ciencias sociales, naturales o matemáticos) no solo se requiere de un saber hacer mecánico y rutinario (técnicas, destrezas o algoritmos), sino que se deben contemplar las relaciones con otros procesos psicológicos importantes (como metacognición) que intervienen en la resolución.

CUESTIONARIOS SOBRE COMPRENSIÓN LECTORA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Diseño y validación

Para que el diseño de los cuestionarios que nos permitan evaluar el nivel de comprensión lectora y el nivel de resolución de problemas matemáticos, se han considerados los establecidos en las orientaciones e instrumentos de evaluación diagnóstica, intermedia y final de comprensión lectora (MINEDUC, 2012a) y de resolución de problemas (MINEDUC, 2012b).

Los cuestionarios diseñados, comprensión lectora y resolución de problemas, constan de nueve preguntas, cada una tiene 4 alternativas de respuesta y están basadas en las pruebas propuestas en MINEDUC (2012a, 2012b). Las preguntas seleccionadas de las evaluaciones diagnóstica, intermedia y final son de tipo abierta para evaluar el nivel alcanzado en comprensión lectora y en resolución de problemas. Con el objetivo de optimizar la aplicación de cada cuestionario, hemos cambiado cada pregunta de tipo abierta a pregunta de respuesta cerrada, diseñando alternativas en correspondencia con cada nivel establecido en MINEDUC (2012a, 2012b). En concreto, se diseñó para cada pregunta una respuesta que corresponda al nivel 0 (incorrecta), dos respuestas que corresponden al nivel 1 (parcialmente correcta) y una respuesta que corresponde al nivel 2 (correcta). Esto con el objetivo de operacionalizar el cuestionario, es decir, convertir las dimensiones en instrumentos medibles (Ruiz, 2014). Estos niveles son adecuados para nuestras necesidades, puesto que buscamos establecer una relación entre el nivel de comprensión lectora y el de resolución de problemas matemáticos, a partir del análisis cuantitativo de los datos.

Puesto que hemos modificado los instrumentos propuestos en los documentos del MINEDUC (2012a, 2012b) al incluir alternativas de respuestas en preguntas cerradas, se prosiguió con su validación por juicio de expertos; para ello, se elaboró una pauta de validación basada en las clasificaciones propuestas por Buendía (1998). Dicha pauta se constituyó de 15 ítems de opinión con respuestas categorizadas. Para expresar sus opiniones, los expertos contaban con cuatro categorías de respuestas: excelente, buena, regular y mala. De forma adicional, para cada sección, se estableció un espacio donde pudieran redactar comentarios, si así lo consideraban necesario.

Para esto, participaron cuatro expertos, dos en el área de comprensión lectora (Lengua y Literatura) y dos en área de resolución de problemas (Matemáticas), con diversos perfiles profesionales (profesores de Educación Media, profesores con grado de Magister o Doctorado en las áreas antes mencionadas).

Pilotaje

Una vez realizadas las modificaciones con base a las sugerencias realizadas por los expertos, se realizó el proceso del pilotaje. La finalidad de esta etapa es evaluar la funcionalidad de los cuestionarios, en el sentido de verificar si los estudiantes tenían algún tipo de problema al resolverlos, así como los saberes necesarios para realizarlo de manera online. Esta actividad fue solicitada a un grupo de cuarto año de Educación Media del Liceo Rahue Osorno, durante la última semana de noviembre de 2020. Los enlaces para poder realizar los formularios fueron compartidos a todos los estudiantes.

La realización de los cuestionarios por parte de los estudiantes fue completamente voluntaria; por ello, únicamente recibimos 12 respuestas correspondientes al formulario de comprensión lectora y 4 respuestas al formulario de resolución de problemas matemáticos.

RESULTADOS

En general, la valoración otorgada por los expertos a los ítems de los cuestionarios fue considerada como excelente, proporcionando sugerencias sobre las preguntas y respuestas de los cuestionarios de evaluación en cada pauta. Los cuestionarios no sufrieron grandes modificaciones, salvo el caso de las recomendaciones del segundo experto en la prueba de comprensión lectora, donde se corrigieron problemas de ortografía y gramática. Con respecto al formulario online, se consideraron los comentarios referentes con modificar y corregir la solicitud del correo electrónico, puesto que dicha solicitud se encontraba duplicada.

Por limitaciones de espacio, en este trabajo se presenta la valoración realizada por un experto al ítem IV del cuestionario de comprensión lectora (ver Figura 1)

IV. Valoración general de la prueba. (Marque con una X su valoración)				
	Excelente	Buena	Regular	Mala
Validez del contenido de la prueba	x			
Observaciones y recomendaciones: Evaluación bastante adecuada para el nivel o curso en que se aplicará, ya que permite al estudiante no sólo leer de forma objetiva los diferentes textos que en ella aparecen sino, los invita a desarrollar una lectura más activa y reflexiva para llega al nivel interpretativo, lo que faculta para medir si el alumno alcanzó aquel objetivo que todo alumno en Cuarto Medio debe lograr que es el valorar el lenguaje como un medio para la construcción de nuevas realidades, analizar críticamente los mensajes que <u>repcionan</u>, expresar y cumplir con la solución de necesidades, sueños, metas, etc. Tal vez, los errores que se deben enmendar para que esta Prueba de comprensión lectora quede 100% loable es el corregir una que otra falta ortográfica, en otro aspecto, el orden sintáctico de ciertas alternativas o el uso de los conceptos precisos en ciertas expresiones, así, el alumno, al momento de interpretar, se encuentre con los significados precisos que le permitan realizar su juego hermenéutico sin ningún traspie.				

Figura 1: Ítem IV del cuestionario de comprensión lectora

En relación con los resultados del pilotaje, el nivel promedio de comprensión lectora de los 12 estudiantes fue de 1,32 con una desviación estándar de 0,76. Esto indica que el nivel de comprensión de lectura de los alumnos fue medio, con una relativa dispersión de los datos; sin embargo, esto no lo consideramos definitorio debido al tamaño de la muestra. El nivel más alto alcanzado (1,56) fue obtenido por un estudiante, y el nivel más bajo (1,11) por 2 estudiantes.

Por otro lado, el nivel promedio de resolución de problemas matemáticos de los 4 estudiantes fue de 0,75 con una desviación estándar de 0,69. Esto indica que el nivel de resolución de problemas matemáticos de los alumnos fue bajo-medio con una dispersión importante en los datos, afectada por el tamaño de la muestra. El nivel más alto alcanzado (0,89) lo obtuvo un alumno y el menor (0,67) por dos alumnos.

A pesar de solo haber podido realizar el cruce de 4 estudiantes, es posible identificar cierta constancia entre los promedios de ambas evaluaciones, ya que, como pudimos observar, el promedio de comprensión lectora gira en torno al nivel medio y el de resolución de problemas en torno al nivel bajo-medio. Del mismo modo, se pudo observar que el promedio de resolución de problemas matemáticos es más bajo que el de comprensión lectora.

CONCLUSIÓN

Como producto de este trabajo, se tienen los cuestionarios de evaluación de niveles de comprensión lectora y de resolución de problemas matemáticos para cuarto año medio, cuya implementación con una muestra significativa de estudiantes, bajo el paradigma cuantitativo, se podrá establecer una relación entre ambos aspectos. Estos cuestionarios fueron validados por expertos, alcanzando como resultado una valoración como excelente. Sin embargo, se les realizaron algunas modificaciones con el objetivo de evitar dificultades para los alumnos al momento de ser aplicados de manera online.

Con respecto a la cantidad de respuestas obtenidas en el pilotaje, estas no favorecen un análisis de correlación; sin embargo, a pesar de la dispersión de los datos, es posible visualizar la existencia de una cierta relación entre las variables. Esto nos animan a realizar la aplicación de ellos con un tamaño de muestra significativo.

Referencias

- Agencia de Calidad de la Educación (2015). *Resultados TIMSS Chile. Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias*. ACE.
http://archivos.agenciaeducacion.cl/presentacion_nacional_de_resultados_TIMSS_2015.pdf
- Agencia de Calidad de la Educación (2019). *PISA 2018. Entrega de Resultados. Competencia lectora, matemática y científica en estudiantes de 15 años en Chile*. ACE.
http://archivos.agenciaeducacion.cl/PISA_2018-Entrega_de_Resultados_Chile.pdf
- Buendía, L. (1994). Técnicas e instrumentos de recogida de datos. En P. Colás y L. Buendía (Eds.).
- *Investigación Educativa* (pp. 201-244). Alfar.
- Calero, M. (2013). *Cómo hacer de tu hijo un gran lector*. Alfaomega. Callejos, M. (2010). *Educación Matemática y ciudadanía*. Graó.

- Makuc, M. (2008). Teorías implícitas de los profesores acerca de la comprensión lectora. *Revista Signos*, 41(68), 403-422.
- Ministerio de Educación (2012a). *Orientaciones e instrumentos de Evaluación Diagnóstica, Intermedia y Final en Comprensión Lectora. 3° año de Educación Media*. MINEDUC.
- Ministerio de Educación (2012b). *Orientaciones e instrumentos de Evaluación Diagnóstica, Intermedia y Final de Resolución de Problemas. 3° año de Educación Media*. MINEDUC.
- Ministerio de Educación (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. MINEDUC.
- Ministerio de Educación (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° medio*. MINEDUC.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Pozo, J. I., y Postigo, Y. (1994). La solución de problemas como contenido procedimental de la educación obligatoria. En J. I. Pozo, M. D. Pérez, J. Domínguez, M. A. Gómez, y Y. Postigo (Eds.). *La solución de problemas* (pp. 180-212). Santillana.
- Ruiz, A. (2014). *La operacionalización: De elementos teóricos al proceso de medida*. Universitat de Barcelona. <http://hdl.handle.net/2445/53152>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: UNA MIRADA HISTÓRICA EPISTEMOLÓGICA DESDE DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Isaac A. Imilpán, Elizabeth H. Arredondo, Nicolás A. Fernández, Jaime I. García-García

*Este trabajo reporta una revisión bibliográfica del concepto de distribución binomial, analizando y delimitando una construcción epistémica de ella a lo largo de la historia. Se realiza un análisis de momentos históricos usando los Modos de Pensamiento de Sierpinska (2000), donde coexisten tres modos de pensamiento que permiten comprender esta construcción: el modo Sintético-Geométrico (SG), que son descripciones y pensamientos de tipo práctico, como la combinatoria y los triángulos con coeficientes binomiales dentro de diversas culturas; el Analítico-Aritmético (AA), dado por relaciones numéricas que permiten calcular situaciones específicas como el triángulo de Pascal y situaciones de azar planteadas por Cardano y Arbuthnot; y el Analítico-Estructural (AE), donde el objeto matemático es un todo estructural, identificable por un conjunto de propiedades, lo que en la distribución Binomial está planteado por Jakob Bernoulli, en el *Ars Corjentandi*, durante la Ilustración Occidental.*

Distribución binomial, modos de pensamiento, análisis histórico epistemológico

ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

El concepto de distribución binomial está asociado a otras ideas y conceptos presentes en la Probabilidad y Estadística, lo que es observable en la literatura de investigación sobre didáctica en estas disciplinas. De acuerdo con algunos autores, la distribución binomial se asocia con temas como combinatoria, variabilidad, cálculo de probabilidades e inferencia estadística (e.g. Vásquez & Núñez, 2011; Begué, Batanero, Gea & Díaz-Levicoy, 2019). Este modelo probabilístico de situaciones discretas nos permite analizar fenómenos de juego y azar, como el lanzamiento de dados y de monedas, así como situaciones de carácter binomial en áreas científicas como la arqueología (Banning, 2000) y la programación (Papelyshev & Zhigljavsky, 2020). Esto la ubica como “una de las más importantes distribuciones en Probabilidad y Estadística que sirve como modelo para numerosos problemas de la vida real” (Philippou & Antzoulakos, 2011, p. 152) y cuyo aprendizaje es considerado como requisito en el currículo de varias partes del mundo (Landín & Sánchez, 2010). A nivel nacional, algunos objetivos correspondientes a los ejes de Datos y Probabilidades (Educación Básica) y Probabilidad y Estadística (Educación Media) del currículum chileno se pueden relacionar con el objeto matemático de la distribución binomial y los distintos elementos que le dan significado (MINEDUC, 2020).

También, cabe resaltar la importancia del desarrollo del razonamiento probabilístico, definido como uno que hace referencia a los juicios y la toma de decisiones en escenarios de incertidumbre que permitan explorar y evaluar diferentes resultados (Batanero, Chernoff, Engel, Lee & Sánchez, 2016). A pesar de esto, y la importancia de la distribución binomial, investigaciones evidencian deficiencias en aspectos que aseguran su aprendizaje significativo, en particular, la dificultad de aplicar la distribución binomial a situaciones específicas y resolución de problemas (Alvarado & Batanero, 2007); y la escasez de investigación sobre este objeto (García-García & Sánchez, 2015).

ESTUDIO HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Una de las premisas que consideramos, al momento de explorar el razonamiento probabilístico de la distribución binomial, es saber si está asociada a alguna construcción epistémica generada a lo largo de la historia. Esto implica delimitar el saber sabio (Chevallard, 1991) para conocer su naturaleza e interrelaciones de acuerdo con la forma en cómo el concepto ha surgido históricamente, incluyendo todos los elementos precursores que la constituyen hasta su definición actual. En este sentido, Romero, Rodríguez & Henao (2017) nos señalan la importancia de realizar Estudios Históricos Epistemológicos (EHE) sobre diversas ideas y/o conceptos matemáticos, ya que los aportes que tiene la historia de la matemática en los procesos de enseñanza-aprendizaje de los conceptos permiten comprender cómo se abordaron bajo una contextualización histórica adecuada. Dado lo anterior, identificamos 5 períodos históricos de construcción progresiva histórica de la distribución binomial.

Antigüedad en Grecia, India y Medio Oriente (siglo II al XIV)

Durante siglos se estudiaron fenómenos de naturaleza binomial en forma de patrones numéricos informales, obtenidos como descripción de fenómenos de la vida diaria (Hald, 2005). En este periodo se presentan los trabajos de la Antigüedad griega de Porfirio en la Isagoge (s. II) y la Synagoge de Papo de Alejandría (s. III) (Hald, 2005); el Período Clásico de la India con los poemas en sanscrito védico del Chandashāstra de Pingala(s.II) (Sridharan, 2005) y la obra del maestro matemático y astrónomo Bhāskarācārya, el Līlāvātī (s. XII) (Colebrook, 1817); y el Renacimiento Árabe, donde se destacan el trabajo del matemático e ingeniero persa Al-Karājī, el Al-Badī' fi'l-ḥisāb (La Maravilla del Cálculo) (s.X) (Rashed, 2013), el astrónomo Rabbi ben Ezra quien reutiliza el meru-prāstāra hindú (s.XII) (Flusser & Francia, 2000), y el matemático y astrónomo judío Levi Ben Gerson (Gersónides), quien formalizó los coeficientes binomiales y las combinatorias como se conocen en la actualidad (s.XIV) (Boyer & Merzbach, 2011).

Renacimiento Occidental (siglo XV al XVI)

En este período se considera la generalización de patrones numéricos tales como el triángulo de Stifel, o el triángulo de Tartaglia, asociado a fenómenos binomiales como el lanzamiento de una moneda (Hald, 2005). Además, destaca el trabajo póstumo de Gerolamo Cardano, “El Libro sobre Juegos de Azar”, que plantea el concepto de la posibilidad de ocurrencia como la proporción entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Ilustración Occidental (principio del siglo XVII)

Aquí destaca el trabajo de Blaise Pascal, con el conocido triángulo aritmético, el cual se caracteriza por presentar una generalización numérica, mostrando una clara y sistemática unificación de los saberes combinatorios, coeficientes binomiales y números figurados, como producto de la condensación de la aritmética griega, combinatoria hindú y el álgebra árabe (Hald, 2005).

Transición a la Era de la Razón (mitad del siglo XVII)

Se presentan las primeras generalizaciones que darían paso a la teoría de la probabilidad, comenzando los planteamientos de Gombaud en 1654 donde, al concepto de posibilidad, se le agregan los saberes de la teoría combinatoria, generando lo que sería conocido como azar

combinatorio. En paralelo, en 1662, Arnauld y Nicole plantean la probabilidad como un concepto numérico. En esta época, Pascal y Fermat discutieron sobre el valor del lanzamiento del dado, lo cual genera la expresión general del valor o expectativa de un experimento. Por último, John Arbuthnot plantea un acercamiento informal a un desarrollo matemático de un fenómeno binomial llamándolo “experimento probabilístico” y que, con el paso del tiempo, sería conocido como “ensayo de Bernoulli” (Hald, 2005).

Era de la Razón (finales del siglo XVII)

Finalmente, se puede identificar a Jakob Bernoulli respecto a la autoría de la máxima generalización y formulación de la distribución binomial, expresada en su principal obra, el *Ars Conjectandi*, el cual no sólo es un trabajo basal de la teoría de la probabilidad, sino que se plantea de manera formal la definición general de la distribución binomial, $b(k; n, p)$ (ampliamente conocida en la actualidad), definida como la probabilidad de que en n ensayos de Bernoulli, determinados por la probabilidad de éxito de un suceso p y su fracaso $q=1-p$ (con $0 < p < 1$), aparezca exactamente k éxitos y $n-k$ fracasos (con $0 \leq k \leq n$) (Hald, 2005).

MARCO TEÓRICO: LOS MODOS DE PENSAMIENTO DE SIERSPINSKA

Anna Sierpinska (2000) plantea que la distinción entre el pensamiento teórico y el práctico es aquella meramente metodológica, y no una que describa adecuadamente los procesos reales de pensamiento, que parecen tener siempre un componente práctico y uno teórico. Esto conlleva a que, la mayoría de las veces, los científicos piensan de manera “práctica” (basado en sus propios paradigmas), lo cual hace que pasar de ahí hacia el pensamiento teórico desafíe su sentido matemático común. A partir de aquello, Sierpinska plantea que el pensamiento práctico puede considerarse una necesidad desde el punto de vista epistemológico, si se supone que el pensamiento teórico trata de algo distinto de sí mismo. Es el pensamiento práctico el que lleva a la identificación de los problemas, para luego enmarcarse y formularse dentro de una teoría y resolverse o comprenderse sobre la base de sus instrumentos técnicos y analíticos. Con base en esta reflexión, y aplicado sobre un EHE de la derivada, Pinto & Parraguez (2018) indican que Sierpinska identificó tres modos de pensamiento para este tópico: a) el modo de pensamiento sintético-geométrico (SG), donde los objetos matemáticos son atendidos directamente por la mente mediante representaciones geométricas, figuras, entre otros; y en donde, además, la visualización del concepto matemático juega un rol fundamental en lo que es la resolución de problemas; b) el modo de pensamiento analítico-aritmético (AA), donde los objetos matemáticos son definidos a través de relaciones numéricas o simbólicas que permiten generalizaciones de situaciones particulares, como los puntos del plano entendidos como pares ordenados de números reales, las rectas como ecuaciones, las matrices como arreglos de números en filas y columnas, entre otros; y finalmente, c) el modo de pensamiento analítico-estructural (AE), en donde los objetos matemáticos son definidos como un constructo teórico abstracto que se constituye de un grupo de determinadas propiedades, o es caracterizado a través de axiomas.

ARTICULACIÓN DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO CON EL EHE DE LA BINOMIAL

Como un resultado importante de esta indagación, el cual esperamos pueda ser usado para ayudar a generar una propuesta de secuencia didáctica que aborde los conceptos claves y necesarios para la comprensión de la distribución binomial en su totalidad, es posible vislumbrar una articulación

entre el EHE de la distribución binomial y el marco que entrega la teoría de los modos de pensamiento de Sierpinski. En primer lugar, reconocer la clara asociación entre la forma práctica de descubrir y concebir las combinatorias y los coeficientes binomiales, de manera directa y con elementos asociados a su diario vivir (ya sea de forma tangible o incluso en expresiones religioso-culturales o científicas) por parte de civilizaciones que tuvieron sus apogeos antes del Renacimiento Occidental, con el modo de pensamiento SG de Sierpinski, entendiéndolos como elementos precursores de la distribución binomial, algunas de ellas incluso asociadas a fenómenos binomiales (como la construcción de poemas en sánscrito védico a través del combinar sílabas cortas y largas). Luego, Blaise Pascal es capaz de sintetizar todo este compendio de conocimientos previos (que permearon Europa en siglos anteriores) en el triángulo aritmético que recibe su nombre, encontrando una relación de generalidad entre números combinatorios y coeficientes binomiales, lo cual se puede asociar al modo de pensamiento AA. Por último, Jakob Bernoulli trabaja no sólo con esta relación sino con la asociación que durante todo un siglo se haría de las relaciones entre situaciones de azar combinatorio y de probabilidades, ya entendidas como números a los que se les puede aplicar operaciones aritméticas. Con ello, establece cómo calcular cualquier fenómeno que se asemeje a un *ensayo de Bernoulli*, generando con ello una definición matemática abstracta ligada con una serie de propiedades y/o axiomas (como que el fenómeno tenga sólo dos resultados: éxito o fracaso): esta descripción se enmarca, sin duda, con el modo de pensamiento AE.

Modos de pensamientos intermedios

Dentro de este análisis, se pueden identificar modos de pensamiento intermedios o híbridos (SG-AA y AA-AE) los cuales corresponden a ideas y conceptos de transición de un modo de pensamiento a otro más complejo, tal como ocurre históricamente en el desarrollo del objeto matemático, asociables a los articuladores, mencionados en el marco de los Modos de Pensamiento, y cuya consideración en procesos de aprendizaje facilitarían llegar a una comprensión más completa. En este caso particular podemos encontrar, en el Renacimiento Occidental, trabajos como los del triángulo de Tataglia que lo plantea sin establecer una relación matemática nutrida de otros conceptos (ya que se basa en lanzamiento de monedas), o el trabajo de Cardano que plantea la asociación de problemas combinatorios y situaciones de azar, pero no llega más allá de la definición proporcional de posibilidades. Es decir, se basan en fenómenos tangibles (modo SG) pero intentar establecer alguna relación matemática (modo AA) de manera informal. También en la etapa de transición de la era de la razón, encontramos el desarrollo de conceptos y elementos que generarían una serie de relaciones matemáticas específicas entre distintos elementos, pero basadas siempre en descripciones puntuales (como el lanzamiento de dados) o definiciones informales cercanas al planteamiento de Bernoulli (como lo planteado por Arbuthnot). Es decir, una serie de relaciones entre diversos objetos matemáticos (modo AA) que se intentan unificar como constitutivos de una concepción teórica informal (que vendría siendo el “experimento probabilístico” de Arbuthnot).

Lo planteado en este acápite se puede sintetizar en la Figura 1:

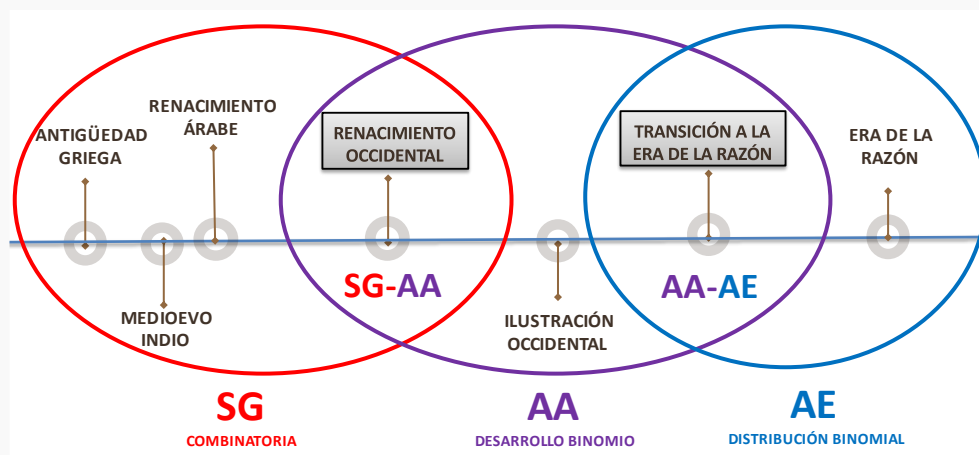


Figura 1: Modos de Pensamiento de Sierpinski asociados a diferentes momentos históricos de desarrollo de la distribución binomial. Fuente: elaboración propia.

Finalmente, podemos concluir que existe una relación entre el desarrollo histórico de la distribución binomial y los modos de pensamiento que, en estos contextos históricos diversos que se van construyendo consecutivamente con base en los anteriores, se manifiesta desde una concepción práctica de las matemáticas (tal como se experimentaba en la antigüedad) hasta una propuesta teórica como la que Bernoulli plantea al conceptualizar la distribución binomial como tal.

REFERENCIAS

- Alvarado, H., & Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 67, 1-7.
- Banning, E. B. (2000). *The archaeologist's laboratory. The Analysis of Archaeological Data*. Kluwer Academic Publishers.
- Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Research on Teaching and Learning Probability. ICME-13 Topical Surveys. Springer.
- Begué, N., Batanero, C., Gea, M. M., & Díaz-Levicoy, D. (2019). Distribuciones muestrales en poblaciones binomiales: Dificultades de comprensión por estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 56, 100-108.
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica (Trad. C. Gilman)*. Aique.
- Colebrooke, H. T. (Ed. & Trans.) (1817). *Algebra with arithmetic and mensuration from the sanscrit. Brahme Gupta and Bháscara*. John Murray.
- Flusser, P., & Francia, G. A. (2000). Derivation and visualization of the binomial theorem. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 3-24.
- García-García, J. I., & Sánchez, E. (2015). El desarrollo del razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre la noción de la distribución binomial. En E. Sánchez, C. Acuña, y M. Rigo (Eds.), *Memorias del III Coloquio de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa* (pp. 1-13). Cinvestav.

- Hald, A. (2005). *A history of probability and statistics and their applications before 1750* (Vol. 574). John Wiley & Sons.
- Landín, P. R., y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 12(3), 598-618.
- Ministerio de Educación (2020). *Currículo Nacional. Eje Matemática*. MINEDUC. Consultado el 10 de marzo de 2021. <https://www.curriculumnacional.cl/portal/Ejes/Matematica/>
- Pepelyshev, A., & Zhigljavsky, A. (2020). Discrete uniform and binomial distributions with infinite support. *Soft Computing*, 24, 17517-17524.
- Philippou, A. N., & Antzoulakos, D. L. (2011). Binomial Distribution. En M. Lovric (Ed.), *International Encyclopedia of Statistical Science 1* (pp. 152-154). Springer.
- Pinto, I., & Parraguez, M. (2018). Un modelo de acercamiento local y global de la derivada en pro de superar el obstáculo de su comprensión. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 31, 1070-1076.
- Rashed, R. (2013). *The development of Arabic mathematics: between arithmetic and algebra*. Springer-Science & Business Media.
- Romero, F., Rodríguez, F., & Henao, S. M. (2017). Análisis histórico–epistemológico en la educación matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 245-253.
- Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. En J.L. Dorier (Ed.) *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers.
- Sridharan, R. (2005). *Sanskrit Prosody, Piṅgala Sūtras and Binary Arithmetic*. En G. G. Emch, R. Sridharan, & M. D. Srinivas (Eds.) *Contributions to the History of Indian Mathematics* (pp. 33-62). Hindustan Book Agency.
- Vásquez, E. R. (2011). *Contribución al tratamiento estadístico de datos con distribución binomial en el modelo de análisis de varianza*. Editorial Universitaria.



EL DESAFÍO DE LA FORMACIÓN CONTINUA EN TIEMPOS DE PANDEMIA. EL CASO DEL PROGRAMA SUMA Y SIGUE BÁSICA DURANTE EL AÑO 2020

Javiera Ortiz, Daniela Rojas, Helena Montenegro, Sofía Bustos

Este estudio reporta los resultados de satisfacción y logro de aprendizaje de un programa de desarrollo profesional docente en modalidad b-learning para profesores de matemática de enseñanza básica, durante la pandemia del año 2020. Estos resultados se comparan con los obtenidos el año 2019, para conocer el efecto que tuvo la crisis sanitaria en esta experiencia de aprendizaje. En general, se aprecia que el programa aumentó los niveles de satisfacción en todos los aspectos evaluados, y no registró diferencias significativas en las notas de los controles que reflejan los logros de aprendizaje obtenidos durante el curso. Finalmente, se discuten los desafíos de adaptar programas de formación continua en formato b-learning ante situaciones que requieren de un formato e-learning.

Desarrollo profesional docente, educación *b learning*, educación matemática, pandemia

INTRODUCCIÓN

Suma y Sigue es un programa *b-learning* de desarrollo profesional docente que busca fortalecer el conocimiento matemático especializado para la enseñanza (Ball, et al., 2008) en docentes de educación básica y media, a través de una experiencia de aprendizaje activa con un enfoque basado en problemas. Se imparte en Chile desde el año 2016 en modalidad *b learning* y ha mostrado buenos resultados en términos de satisfacción de los docentes participantes, resalando su valoración hacia el trabajo asincrónico y el modelo pedagógico (Martínez, et al., 2020), lo que entre otras cosas, favoreció que sea distinguido con el premio UNESCO-Hamdan bin Rashid Al-Maktoum (2017 - 2018).

En educación básica *Suma y Sigue* consta de 13 cursos que abordan un eje curricular específico (números y operaciones, patrones y álgebra, geometría, medición, datos y probabilidades). Cada curso comienza con una sesión presencial que permite que los participantes se familiaricen con la plataforma virtual que los aloja, comprendan la metodología de instrucción, y revisen los contenidos. Se organizan en dos módulos, cada uno compuesto por dos o tres talleres virtuales, seguidos de una sesión presencial. Al finalizar cada módulo los participantes rinden una prueba que evalúa los aprendizajes logrados. La duración de los cursos es aproximadamente de 34 horas, que se distribuyen en 10 - 11 semanas, de las cuales 25 horas corresponden a trabajo en línea.

El modelo de instrucción de *Suma y Sigue* fomenta el aprendizaje en línea autodirigido, lo que ha hecho posible su masificación. Proporciona oportunidades para desempaquetar y analizar las matemáticas elementales desde una perspectiva de enseñanza (Yackel et al., 2007). En este modelo las sesiones presenciales brindan oportunidades a los docentes para reflexionar sobre el conocimiento adquirido durante el desarrollo de los talleres virtuales y conectarlos con sus prácticas de aula. También, tienen el propósito de ilustrar prácticas efectivas de aula para la enseñanza de un contenido nuclear abordado en el curso, utilizando el enfoque de Discusión Matemáticas (Chapin et al., 2003) como metodología de interacción.

El año 2020, a través de una asociación con el CPEIP (Centro de Experimentación, Perfeccionamiento e Investigaciones Pedagógicas) dependiente del Mineduc, el programa alcanzó cobertura nacional en las 16 regiones del país, en 216 comunas y 1.132 docentes, siendo un aumento significativo respecto de las cifras del 2019: 8 regiones, 90 comunas y 508 docentes. En promedio, desde el 2015 hasta el 2019 se ha tenido una alta retención en el programa equivalente al 90%. Sin embargo, la implementación del modelo pedagógico en el año 2020 se vio tensionada por la Pandemia de COVID-

19. En concreto, no se pudieron ejecutar los talleres presenciales, por lo que se debieron hacer adaptaciones al programa, reemplazando estos talleres por sesiones de trabajo sincrónicas *online* a través de la plataforma *Zoom*, e incorporando talleres de inducción para el uso de recursos *Suma y Sigue* en el aula escolar virtual. Por otra parte, el sistema educativo chileno enfrentó el desafío de implementar educación a distancia en todas sus escuelas, teniendo que adecuar estrategias y recursos de enseñanza para generar instancias de trabajo en línea, tanto de carácter asincrónico como sincrónico (Propuestas Educación Mesa Social Covid-19, 2020) Este desafío demandó un gran esfuerzo a los docentes, quienes debieron planificar, implementar y evaluar sus clases usando una nueva modalidad de enseñanza, lo que implicó un mayor tiempo de dedicación para la preparación, en desmedro del tiempo que disponen para su desarrollo profesional.

Dado los antecedentes anteriormente descritos, la implementación de este programa se vio enfrentada a responder estos nuevos desafíos manteniendo los buenos resultados y la calidad en las experiencias de aprendizaje de los docentes participantes. Este estudio describirá el efecto que tuvo la crisis sanitaria producto de la pandemia por COVID-19 en los resultados de satisfacción y rendimiento del Programa Suma y Sigue. Para poder responder a este objetivo, se compararon los resultados obtenidos en la implementación del programa en el año 2020 con el año 2019 a través de las distintas encuestas de satisfacción y evaluaciones del curso. Se espera que los resultados de este estudio contribuyan a incentivar la implementación de programas de formación continua con independencia de las dificultades del contexto en que se ejecutan. También, se espera explicar la valoración de los docentes respecto de las distintas acciones de adaptación implementada en los cursos, entregando sugerencias concretas para futuras implementaciones de este y otros programas de formación continua del profesorado.

METODOLOGÍA

Este estudio descriptivo adoptó una metodología de naturaleza cuantitativa. La muestra está compuesta por 732 docentes de Educación Básica (117 docentes del año 2019 y 615 del año 2020). Se emplearon cuatro criterios de selección en la selección de esta muestra: (1) que los participantes sean inscritos efectivos (es decir, tener más de un 5% de avance en la plataforma virtual y participan en al menos un taller sincrónico, presencial o virtual); (2) que registren horas en aula en el sistema SIGE (plataforma ministerial de registro de docentes y estudiantes); (3) que aceptaron el consentimiento informado entregado al inicio del curso, en el que autorizan que sus datos sean utilizados con fines investigativos, entre otros y (4) que hayan participado del programa en el primer semestre de cada año. No se consideraron los participantes de los segundos semestres principalmente por dos motivos: en primer lugar, durante el segundo semestre 2019 ocurrió el estallido social, lo cual fue un factor que incidió en el normal desarrollo de los cursos; en segundo

lugar, durante el segundo semestre de 2020 se implementó la adaptación del programa a modalidad *e-learning*.

Para levantar información sobre la satisfacción de los docentes se aplicó una encuesta al finalizar el curso, orientada a conocer su valoración respecto del contenido, uso de la plataforma, metodología empleada, y desempeño del relator, entre otros. Esta encuesta contiene tres preguntas de desarrollo con el propósito de recoger su apreciación respecto del curso.

Con relación al logro del aprendizaje de los participantes, se utilizó la información proporcionada por las pruebas aplicadas al finalizar cada módulo de un curso, para comparar los resultados de logro obtenido en ambos años. Estas pruebas tienen un total de 15 preguntas de las cuales 8 son con alternativas de respuesta; 5 con respuesta de verdadero o falso; y 2 con respuesta de desarrollo. Cabe consignar que esta prueba fue construida por el equipo y validada a través de juicio de expertos (Galicia et al., 2017).

Los datos obtenidos en la encuesta de satisfacción y pruebas aplicadas se sometieron a análisis descriptivos y de comparación de medias con una significancia al 95% (McMillan & Schumacher, 2005). Para ello, se utilizó el programa estadístico de software libre R Studio Version 1.2.1335. De igual forma, las respuestas de las preguntas abiertas de la escala de satisfacción fueron analizadas a través de análisis temático (Braun & Clarke, 2006).

RESULTADOS

En este apartado se compartirán principalmente dos resultados: la satisfacción y el logro de aprendizaje de los participantes de esta muestra.

Satisfacción

La satisfacción de la muestra aumentó de forma significativa entre ambos años en todos los indicadores de la escala: si en 2019 la satisfacción oscilaba entre 81 y 85.4 puntos, para el 2020 la escala fluctúa entre 89 y 91.5. En general, los docentes participantes se sintieron más satisfechos con la implementación del año 2020. Estos resultados son relevantes, ya que la estructura y modalidad de los cursos fue la misma entre ambos años, siendo el único cambio relevante la adaptación de talleres presenciales (83.3 puntos de satisfacción) a talleres sincrónicos en línea (89 puntos). A continuación, en la siguiente tabla se reporta una síntesis de estos resultados:

Ítem de la escala de satisfacción	Promedio 2019	Promedio 2020	Diferencia de Medias
Curso en general	81.8	90.5	8.5***
Metodología	81	89	7.9***
Plataforma U-cursos	83.3	90.3	7***
Talleres virtuales en plataforma	84.4	89	4.5*
Talleres sincrónicos (Presencial 2019, 83.3 Online 2020)		92	8.7***
Labor del Relator	85.4	91.5	6.1**

Labor del Tutor	83.5	90.6	7.1**
Material complementario	83.5	90.4	6.8***
Información antes del curso	82.2	90.8	8.6***
Planificación y coordinación	83.8	91.3	7.5***

* valor $p < 0.05$

** valor $p < 0.01$

*** valor $p < 0.001$

Tabla 1: Comparación Escala de Satisfacción, años 2019-2020

Este aumento en el grado de satisfacción de los participantes también se aprecia en el análisis de las respuestas abiertas de la encuesta. El análisis encontró que en ambos años el aspecto con mayor valoración son los talleres virtuales en la plataforma por ser interactivos, novedosos y desafiantes. Respecto de las diferencias entre los años de implementación, los profesores destacan con mayor frecuencia en el año 2020 la modalidad del curso (adaptado a *e-learning*), debido a que les permitía mayor flexibilidad de horarios y ritmos propios de aprendizaje.

Logros de aprendizaje

Con relación a esta variable, en términos generales se observa un leve descenso en el promedio de las notas de controles (de un 5.4 en 2019 a 5.3 en 2020). Sin embargo, estas diferencias no son estadísticamente significativas (valor $p > 0.05$), tal como se aprecia en la tabla N° 2.

Evaluación	2019	2020	Diferencia de Medias
Promedio Control 1	5.05	4.84	-0.21
Promedio Control 2	4.92	4.81	-0.11
Promedio Controles	5.4	5.3	-0.1
Promedio Nota Avance virtual	6.34	6.42	0.08
Promedio Nota final	4.99	4.82	-0.17

Tabla 2: Comparación Promedio de Notas años 2019-2020

Para profundizar en estos resultados, se compararon los resultados de dos cursos que se impartieron en ambos años: “Trabajando con el sistema de numeración decimal y las situaciones aditivas”, sugerido para los niveles NT2 a 2° básico; y el curso “Iniciando el pensamiento estadístico”, diseñado para los niveles 1° a 4° básico. En cada caso, el panorama es diferente: en el primer curso se observa una disminución significativa en las notas de -0.69 décimas, pasando de un 5.45 en promedio de controles a un 4.76 para el año 2020. En tanto, en el segundo curso presenta una disminución de -

0.46 que no es significativa, obteniendo un 5.03 en 2019 y un 4.56 en 2020 como promedio de los controles del curso. Por tanto, no se puede hablar de algún efecto general en las notas obtenidas por los docentes en el programa según las contingencias sanitarias

Evaluación	2019	2020	Diferencia de Medias
Promedio Control 1	5.51	4.93	-0.58*
Promedio Control 2	5.37	4.6	-0.77***
Promedio Controles	5.45	4.76	-0.69**
Promedio Nota Avance virtual	6.68	6.3	-0.38*
Promedio Nota final	5.82	5.23	-0.59**

Tabla 3: Comparación Promedio de Notas años 2019-2020 curso Trabajando con el sistema de numeración decimal y las situaciones

Evaluación	2019	2020	Diferencia de Medias
Promedio Control 1	5.25	4.89	-0.36
Promedio Control 2	4.81	4.24	-0.57
Promedio Controles	5.03	4.56	-0.46
Promedio Nota Avance virtual	6.66	6.58	-0.08
Promedio Nota final	5.52	5.17	-0.34

Tabla 4: Comparación Promedio de Notas años 2019-2020 curso Iniciando el pensamiento estadístico

DISCUSIÓN

Los resultados de este estudio permiten sostener que, con independencia del contexto, el programa Suma y Sigue mantuvo óptimos niveles en la retención, satisfacción y logros de aprendizaje. Esto cobra mayor relevancia si se contempla que durante el año 2020 se impartió en tiempos de pandemia, enfrentando la posibilidad de un aumento de deserción producto de esta condición. Este es un logro aún más meritorio considerando la ampliación en cobertura que tuvo el programa entre ambos años, pasando de 508 a 1.132 inscritos efectivos, lo que significó un despliegue logístico mayor para el equipo de coordinación, relatores y tutores a cargo del programa. Otro resultado importante de destacar es el aumento que hubo en la satisfacción con los principales componentes del curso, encontrándose diferencias estadísticamente significativas entre ambos años. Esta tendencia también se apreció en las respuestas abiertas de la encuesta, señalando como un aspecto positivo la posibilidad de cursar en formato *e-learning*. En otras palabras, si bien la adaptación de los cursos a un formato

e-learning se gatilló producto de la crisis sanitaria, los profesores señalan vivenciar experiencias de aprendizaje similares en sus formato sincrónico y asincrónico, valorando incluso más las adaptaciones desarrolladas durante el año 2020.

Una posible explicación a este fenómeno radica en que los profesores se tuvieron que alfabetizar digitalmente para poder enseñar a distancia en este contexto. En consecuencia, emplearon herramientas de teleconferencia similares a las utilizadas en el curso, teniendo mayor experiencia en el uso de herramientas digitales, así como también un modelo para desarrollar y aplicar lo aprendido en este curso para sus aulas virtuales. Respecto de los resultados de aprendizaje, el análisis muestra que no hubo un cambio significativo en las notas obtenidas por los docentes entre los dos años de implementación. Este resultado se considera positivo, considerando que el contexto de pandemia pudo afectar negativamente su desempeño y disposición al aprendizaje. Tomando en cuenta estos resultados, se plantean como desafíos al programa la implementación de futuras versiones en estas u otras condiciones, logrando mantener la calidad y experiencia de aprendizaje de los docentes. Para ello, se recomienda afianzar el aprendizaje en formato *e-learning* con distintas herramientas virtuales y metodologías de discusión en línea. El desarrollo de estas habilidades contribuiría a fortalecer en los docentes sus competencias de enseñanza en modalidad virtual, logrando incorporar estas herramientas e innovaciones pedagógicas en su quehacer profesional.

Referencias

- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
- Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77–101.
- Chapin, S., O'Connor, C., & Anderson, N. (2003). *Classroom discussions. Using math talk to help students learn*. Math Solutions Publications.
- Galicia, L., Balderrama, J., & Edel, R. (2017). Validez de contenido por juicio de expertos: Propuesta de una herramienta virtual. *Apertura: Revista de Innovación Educativa*, 9(2), 42–53.
- Martínez, S., Guiñez, F., Zamora, R., Bustos, S., & Rodríguez, B. (2020). On the instructional model of a blended learning program for developing mathematical knowledge for teaching. *ZDM Mathematics Education*, 52, 877–891.
- McMillan, J., & Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa* (5th ed.). Pearson Educación S.A.
- Propuestas Educación Mesa Social Covid-19 (2020). *Didácticas para la proximidad: aprendiendo en tiempos de crisis*. Santiago de Chile.
- Yackel, E., Underwood, D., & Elias, N. (2007). Mathematical tasks designed to foster a reconceptualized view of early arithmetic. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4–6), 351–367.

EMOCIONES DE UNA PROFESORA DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN EN EL DISEÑO DE UNA PLANIFICACIÓN DE CLASE EN ESTADÍSTICA. UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Nicolás Sánchez Acevedo, Elizabeth Toro Barbieri

Este trabajo de tipo exploratorio tiene como objetivo explorar en las emociones de una profesora de Matemática en formación al construir un diseño didáctico en un curso de Didáctica de la Estadística. Nos apoyamos en la teoría de la estructura cognitiva, la cual permite identificar tipos de emociones y las situaciones que las desencadenan. Se evidencia una preponderancia de emociones negativas sobre las positivas. Las principales situaciones que originan las emociones negativas están centradas en la construcción del propio diseño, la falta de trabajo en grupo y algunas proyecciones que hace la profesora sobre su desarrollo profesional.

Emociones, teoría OCC, Estadística, planificación de clase, cualitativo.

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre las emociones en educación matemática ha suscitado el interés en la última década, como factor incidente en la enseñanza (Zembylas, 2007). Si bien es cierto, existe investigación sobre las emociones de profesores (Di Martino y Sabena, 2011; García-González y Martínez-Sierra, 2016), estas se han enfocado en profesores del nivel primario, y los resultados evidencian una alta presencia de emociones negativas, puntualmente porque la formación de profesores del nivel primario es general y no específica en Matemáticas (Coppola, Martino, Pacelli y Sabena, 2012). Para estos mismos investigadores, las emociones negativas, pueden influenciar en las expectativas hacia la enseñanza de las Matemáticas, tanto en lo afectivo como en lo cognitivo.

La revisión de literatura, de cuenta que la investigación sobre las emociones de profesores de Matemáticas, se ha centrado mayormente en profesores en ejercicio de secundaria (e.g. González y Pascual, 2017; Silverio y García-González, 2018) y en otros casos, profesores de educación básica en formación (e.g. Bekdemir, 2010). En este último caso, se da cuenta mayormente de experiencias negativas, originadas, por una parte, por estrategias de enseñanza recibidas de sus profesores al pasar de educación básica a media, y por otra, la ausencia de ayuda cuando tuvieron dificultades o necesitaban ayuda

Nos planteamos como pregunta de investigación: ¿cuáles son las emociones y las situaciones desencadenantes que experimenta una profesora de Matemática en formación en el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de La Estadística?

REFERENTE TEÓRICO

La teoría OCC (Ortony, Clore y Collins, 1988) permite centrar la atención en los aspectos teóricos de la valoración, los que proponen que los individuos experimentan emociones considerando la forma en que evalúan fenómenos específicos que desencadenan dicha emoción. En esta teoría, compuesta por tres ramas, cada una hace referencia a tres tipos de estímulos: (i) las consecuencias de los acontecimientos, (ii) las acciones de los agentes y, (iii) los aspectos de los objetos. Cada uno de estos estímulos es valorado en relación a un criterio central valoración (Ortony *et al.*, 1988).

La Tabla 1, muestra la categorización de las emociones sobre la que se apoya la teoría OCC, la cuales está organizada por una tipología de 22 emociones.

Clase	Grupo	Tipos (ejemplos de nombre)
Reacciones ante los acontecimientos	Vicisitudes de los otros	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (<i>feliz-por</i>).
		Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (<i>alegre por el mal ajeno</i>).
		Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (<i>resentido-por</i>).
	Basadas en previsiones	Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (<i>quejoso-por</i>)
		Contento por la previsión de un acontecimiento deseable (<i>esperanza</i>).
		Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable (<i>satisfacción</i>).
		Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento indeseable (<i>alivio</i>).
		Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable (<i>decepción</i>).
		Descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable (<i>miedo</i>).
	Bienestar	Descontento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento indeseable (<i>temores confirmados</i>)
		Contento por un acontecimiento deseable (<i>júbilo</i>). Descontento por un acontecimiento indeseable (<i>congoja</i>).
Reacciones ante los agentes	Atribución	Aprobación de una acción plausible de uno mismo (<i>orgullo</i>).
		Aprobación de una acción plausible de otro (<i>aprecio, admiración</i>).
		Desaprobación de una acción censurable de uno mismo (<i>autorreproche</i>).
		Desaprobación de una acción censurable de otro (<i>reproche</i>)
Reacciones ante los objetos	Atracción	Agrado por un objeto atractivo (<i>agrado</i>)
		Desagrado por objeto repulsivo (<i>agrado desagrado</i>)

Tabla 1. Adaptación simplificada de las emociones concebidas por la OCC (Ortony et al., 1988)

Sin más, la OCC no se orienta sobre la base de las palabras emocionales que emergen de la experimentación, sino en el hecho que hace que emerja tal emoción, y es esta descripción a lo que se le da una palabra emocional neutra.

METODOLOGÍA, CONTEXTO Y PARTICIPANTE

Nos apoyamos en una metodología de tipo cualitativa de tipo exploratoria (Ritchie, Lewis, Nichols y Ormston, 2014) bajo un estudio de caso (Yin, 1993). El caso (de seudónimo Eli), es una profesora en formación de la Carrera de Pedagogía en Matemática de una Universidad privada sin fines de lucro de Chile que se encontraba realizando el curso de Didáctica de la Estadística y las Probabilidades en su 8° semestre de su formación profesional. Este curso tiene un enfoque didáctico-disciplinar que entrega una formación adecuada a las necesidades educativas actuales y a los requerimientos de los profesores en formación en relación a los temas de estadística y probabilidad que son necesarios para la enseñanza. La recolección de datos se llevó a cabo en la última parte del curso (noviembre-diciembre de 2020), la cual tuvo por objetivo que los profesores en formación diseñaran una clase para enseñar un tópico estadístico particular entre 8° básico y 2° medio. En el diseño de la clase debían hacer uso del modelo GAISE (Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry y Scheaffer, 2005), Pensamiento Estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999) o Comprensión Gráfica (Friel, Curcio y Bright, 2011) dependiendo de la intencionalidad de cada estudiante. En el caso de Eli, la opción para el diseño se posicionó desde la propuesta de Pensamiento Estadístico para 3° medio (16 a 17 años) en el tema de estadísticos elementales.

Recolección de información

Para llevar a cabo la recolección de información, nos apoyamos de las siguientes fuentes: Una entrevista biográfica inicial de la profesora en formación para conocer su proceso formativo y su aproximación a la Estadística, en cuanto a la enseñanza y aprendizaje. Esta entrevista la complementamos con autoinformes diarios (Tabla 2) relacionados con las experiencias emocionales de las clases, que nos sirvieron de base para identificar sus experiencias emocionales y las situaciones que desencadenan dichas emociones.

- | | |
|---|--|
| 1 | ¿Qué emociones y sentimientos experimentaste hoy en la clase de Didáctica de la Estadística? |
| 2 | Relata sobre las experiencias positivas que hayas vivido hoy en la clase de Didáctica de la Estadística. ¿Por qué para tu fueron experiencias positivas? |
| 3 | Relata sobre las experiencias negativas que hayas vivido hoy en la clase de Didáctica de la Estadística. ¿Por qué fueron experiencias negativas? |
| 4 | ¿Te sentiste motivada o desmotivada hoy en la clase de matemáticas? ¿Por qué te sentiste así? |

Tabla 2. Preguntas guía de autoinforme diario

Tanto la entrevista biográfica como los autoinformes fueron grabadas y transcritas para su posterior análisis.

Análisis de los datos

Para el análisis de los datos que nos aportó Eli, es decir, las emociones derivadas de su proceso de planificación y presentación de la clase de Estadística (por medio de cápsula educativa) hemos usado

las definiciones aportadas por la tipología de la OCC (Tabla 1). Con base en estos elementos, consideramos la siguiente codificación (García-Gonzales y Martínez, 2018): (i) Una frase concisa que expresa todas las situaciones desencadenantes de las experiencias emocionales (**en negritas**) y

(ii) las palabras emocionales que expresan la experiencia emocional (*en cursivas*). Por ejemplo

Eli: la exposición debía ser enviada mediante un video lo que *me generó bastante frustración* dado que **no sentí que defendí con todas las fuerzas mi planificación**

Este fragmento, nos hace interpretar que Eli manifiesta una emoción de frustración (Descontento por un acontecimiento indeseable (congoja), que puede emerger de la imposibilidad de no poder sustentar de mejor forma el diseño de su clase.

RESULTADOS

De acuerdo a la estructura del análisis de los resultados, se identificaron emociones positivas y las negativas de Eli, emergidas de las tres sesiones donde se trabajó en el diseño de la secuencia didáctica a la luz del marco de pensamiento estadístico. En total se reconocieron 17 emociones, de las cuales siete son positivas y diez son negativas (Tabla 3 y Tabla 4). Estas emociones se asocian, de acuerdo a Ortony, Clore y Collins (1988) con 11 grupos de emociones.

Emoción	F	Situaciones que desencadenan
Esperanza	3	La elección de un tema desafiante para el diseño didáctico en estadística
		La elección de un tema que en su formación fue débil puede ser beneficioso
		La elección del tema y el diseño se pueden completar con la teoría usada y alcanzar el objetivo planteado
Agrado	3	Siente que el trabajo es bueno, lo que le motiva a seguir aprendiendo para Implementar
		Realizar diseños didácticos para implementar, pero considerando el contexto
		Por el trabajo del diseño didáctico realizado
Jubilo	1	Por saber que en algún momento profesional podrá fundamentar de mejor manera las elecciones en los diseños didácticos

Tabla 3. Tipos de emociones positivas y situaciones que las desencadenan

La Tabla 3, muestra que las emociones positivas de Eli, giran en torno a tres grupos de emociones, basadas en previsiones, atracción y bienestar. Dichas emociones están relacionadas con las experiencias de Eli en relación con su rol como profesora en formación y el diseño de una secuencia de enseñanza para la Estadística. Dichas emociones experimentadas por Eli, se asocian con situaciones desencadenantes relacionadas principalmente con las acciones relacionadas con la consistencia y riqueza del trabajo realizado, es decir, el aporte que le genera poder pensar la enseñanza desde una propuesta para desarrollar el pensamiento estadística. En algunos casos, estas

situaciones están relacionadas con las estrategias de enseñanza y aprendizaje que podría implementar eventualmente en el aula de Matemáticas

La Tabla 4, muestra las emociones negativas de Eli, y las situaciones que las desencadenan.

Emoción	F	Situaciones que desencadenan
Miedo	2	Debido a la incerteza del diseño de la secuencia de enseñanza
		Incerteza de no saber si logró comprender los contenidos para aplicar en la secuencia
Repuche	3	El grupo de trabajo no acompaña el proceso de diseño de la secuencia Los mismos problemas con compañeros en la Universidad serán también en su espacio laboral
Congoja	4	Por la limitación que puede tener en una escuela en relación a la enseñanza
		Por las complicaciones de tener que grabar la explicación del diseño en cápsula educativa
		La limitación de no poder expresarse completamente al tener que grabar una cápsula
		Por sentir que lo plasmado en la planificación no se vio reflejado en su presentación
Remordimiento	1	La imposibilidad de poder fundamentar su trabajo debido al formato de defensa en cápsula educativa.

Tabla 4. Tipos de emociones negativas y situaciones que las desencadenan

En el caso de las emociones negativas, la Tabla 4 muestra cuatro tipos de emociones, divididas cuatro grupos, basadas en previsiones, atribución, bienestar y bienestar/atribución. Las situaciones desencadenantes, que causan las emociones de Eli, son más variadas que las evidencias de la situación de las emociones positivas. Algunas de estas emociones negativas se relacionan con la incertidumbre de poder hacer converger las actividades del diseño didáctico a la luz del marco de enseñanza utilizada (pensamiento estadístico). Por otro lado, algunas de estas emociones, dan cuenta de la limitación del trabajo grupal, pues no todos los integrantes del grupo trabajaron de la misma forma que Eli, lo que coartó el accionar de Eli, al tener que analizar la planificación en profundidad de forma casi solitaria. Otras de la situaciones desencadenantes para estas emociones negativas se relacionan con la proyección que hace Eli de su futuro profesional, que por una parte dan cuenta de saber que en la escuela tendrá complicaciones contextuales para poder realizar innovación educativa producto de la normalización y estandarización del sistema, y por otro lado, reconoce que las situaciones de trabajo que desempeña en la Universidad, pueden ser reflejo del trabajo colaborativo que también será complicado en la escuela.

CONCLUSIONES

Con base en los resultados obtenidos de las emociones de Eli, podemos mencionar cierta tendencia a experimentar emociones negativas, causadas principalmente por su trabajo de forma grupal y las

proyecciones que esto le implica su futuro trabajo profesional. Esta tendencia de emociones negativas y situaciones desencadenantes, pueden estar relacionadas dada su inseguridad en la formación estadística que cree poseer y su falta de experiencia en la práctica profesional.

Si bien es cierto, el estudio sobre las emociones se ha centrado en profesores de Matemática en ejercicio o en formación en educación primaria, no hay resultados que permitan contrastar con los hallazgos aquí presentados, menos aún, pues muy poco se ha hecho en el contexto de cursos de estadística o didáctica de la estadística. Sin embargo, trabajos (exploratorios) como éste, emergen como relevantes para establecer temáticas (Braun y Clarke, 2012) relacionadas con las emociones de los profesores en formación, y desarrollar, de forma complementaria, propuestas a los programas curriculares de las prácticas iniciales, intermedia y avanzada, donde se haga énfasis en los aspectos negativos de las emociones de los profesores en formación, especialmente en estadística, que ha demostrado ser un área compleja tanto en profesores en formación como aquellos en formación continua, lo cual podría develar perfiles emocionales de profesores en formación (Ramos-Silverio y García-González, 2018).

Referencias

- Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, 75(3), 311- 328. doi: 10.1007/s10649-010-9260-7
- Coppola, C., Martino, P. Di, Pacelli, T. y Sabena, C. (2012). Primary teachers affect: a crucial variable in the teaching of mathematics". *Nordic Studies in Mathematics Education*, xvii(3-4), 107-123.
- Di Martino, P., Coppola, C., Mollo, M., Pacelli, T., y Sabena, C. (2013). Pre-service primary teacher's emotions: The math-redemption phenomenon. En A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 225–232). Kiel: PME.
- Franklin C., Kader G., Mewborn D., Moreno J., Peck R. Perry M., Scheaffer, R. (2005) Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework. Alexandria, VA: American Statistical Association. Online: www.amstat.org/Education/gaise/
- Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing graph comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*.
- García-González, M. & Martínez-Sierra, G. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández,
- F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 247-252). Málaga: SEIEM.
- García-Gonzalez, M., y Martinez, G. (2018). Investigación sobre emociones en la clase de Matemáticas. C. Dolores Flores, G. Martínez Sierra, M. S. García González, J. A. Juárez López, J. C. Ramírez Cruz. (Eds.), *Investigaciones en dominio afectivo en matemática educativa*. Ediciones Eón y Universidad Autónoma de Guerrero, México.

- Ritchie, J., & Lewis, J. (2003). *Qualitative research practice: A guide for social students and researchers*.
- Yin, R. K. (1994) *Case Study Research: Design and Methods*, 2nd edn. London: Sage.
- Zembylas, M. (2007). Emotional ecology: The intersection of emotional knowledge and pedagogical content knowledge in teaching. *Teaching and Teacher Education*, 23, 355 367.

ENSEÑANZA DE ÁREAS DE CUBOS Y PARALELEPÍPEDOS PARA UN ESTUDIANTE DE 6TO BÁSICO, DIAGNOSTICADO EN EL ESPECTRO AUTISTA: UN ESTUDIO DE CASO

Andrea Acevedo Rojas

Esta investigación tiene como propósito caracterizar los aspectos del Diseño Universal para el Aprendizaje que contribuyen a mejorar los aprendizajes de área de cubos y paralelepípedos, cuando se implementa una propuesta de enseñanza a un estudiante de 6to básico, diagnosticado en el Espectro Autista. Para ello se implementa una secuencia de aprendizaje basada en el ciclo de aprendizaje de Jorba y Sanmartí (1994), cuyas actividades consideran una serie de puntos de verificación del DUA, los cuales se analizan utilizando distintos registros, determinando su contribución a un mejor aprendizaje de área de cubos y paralelepípedos.

Los resultados y análisis de la propuesta de enseñanza permitieron reconocer y comprender cuales y porqué un grupo de aspectos del Diseño Universal para el Aprendizaje contribuyen al aprendizaje de áreas y paralelepípedos cuando se implementa una propuesta de enseñanza a un estudiante de 6to básico, diagnosticado en el Espectro Autista

Diseño Universal para el aprendizaje, Trastorno del espectro Autista, Ciclo de Aprendizaje de Jorba y Sanmartí.

This research aims to characterize the aspects of the Universal Design for Learning that contribute to improve the learnings in the area of cubes and parallelepipeds, when a teaching proposal for a sixthgrader, diagnosed within the Austism Spectrum, is implemented. For this, a learning secuence, based in the Learning Cycle of Jorba and Sanmartí (1994), is implemented, whose activities consider a series of DUA verification points, which are analyzed using different registers, determinating their contribution to a better learning in the area of cubes and parallelepipeds.

The results and analysis of the teaching proposal allowed to recognize and understand which and why a group of aspects of Universal Design for Learning contribute to the learning of areas and parallelipeds when a teaching proposal for a sixthgrader, diagnosed within the Austims Spectrum, is implemented.

APRENDIZAJE DE LAS MARTEMÁTICAS A ESTUDIANTES DEL ESPECTRO AUTISTA UTILIZANDO EL DISEÑO UNIVERSAL PARA EL A PRENDIZAJE.

La educación chilena está guiada por la ley de inclusión escolar, la cual en su artículo n°3 indica que “el sistema propenderá a asegurar que todos los estudiantes tengan las mismas oportunidades de recibir una educación de calidad, con especial atención en aquellas personas o grupos que requieran apoyo especial” (Ley No. 20845, p.1). Entre los estudiantes que la ley considera con necesidades educativas especiales, se encuentran los estudiantes con la condición del espectro autista (En adelante TEA). “El autismo es un trastorno del neurodesarrollo que impacta en los siguientes aspectos: cognitivos, sociales, emocionales e intelectuales” (Servicio Nacional de la Discapacidad [SENADIS], 2021, p.44).

Diversos autores describen estrategias que faciliten el aprendizaje de los conceptos matemáticos y la resolución de problemas, en los cuales, los apoyos visuales, diagramas, materia concreto, y programas informáticos, han sido una ayuda para la resolución de problemas matemáticos considerando sus limitaciones de abstracción, las cuales influyen en como procesan la información, (Claramonte, 2018; FACYL, 2010; Heredero y Carralero, 2014; Llorca et al., 2009; Moguel et al., 2016),

En las guías para profesores y educadores de alumnos con Autismo, FACYL (2010, 2018) indican que es importante comprender el estilo de aprendizaje de un estudiante del TEA, adoptando medidas necesarias, para así llevar a cabo una intervención específica en base a sus necesidades educativas., entre ellas se encuentra la percepción, pensamiento, atención, memoria, resolución de problemas, motivación, cognición social.

Para lograr una educación de calidad, el estado chileno propone el Diseño Universal para el Aprendizaje (En adelante DUA) como una herramienta para un aprendizaje en igualdad, sin embargo, no existen documentos que indiquen cómo se le debe enseñar matemáticas a un estudiante con la condición del Espectro Autista, utilizando el DUA.

El DUA, es guiado por tres principios fundamentales, basados en la investigación neurocientífica de la estructura del cerebro y el funcionamiento del mismo (CAST, 2018).

Principio I: proporcionar múltiples formas de representación de los contenidos y de la información. Se relaciona con las redes de conocimiento o representación, se enfoca en el “qué” del aprendizaje, considerando las distintas formas en que los estudiantes perciben y comprenden la información. Principio II: proporcionar múltiples formas de expresar información. Se relaciona con las redes estratégicas enfatizando en el “cómo” del aprendizaje, pues para expresar lo que una persona sabe, se debe considerar sus propias habilidades estratégicas y organizativas. Principio III: proporcionar múltiples formas de implicación. Este principio, se enfoca en el porqué del aprendizaje, relacionándose con las redes afectivas, el cual apunta a que todos los estudiantes puedan sentirse comprometidos y motivados en el proceso de aprendizaje.

Estos tres principios están divididos en tres pautas de aplicación y cada una de ellas contienen tres o cuatro puntos de verificación.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

El diseño de la investigación es de tipo cualitativo de estudio de caso, cuyo alcance es longitudinal, considerando que este tipo de estudio “proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas. ” (Hernández-Sampieri et al., 2014, p.16), permitiendo caracterizar los aspectos del DUA que contribuyen a mejorar los aprendizajes del área de cubos y paralelepípedos, cuando se implementa una propuesta de enseñanza a un estudiante de 6to básico, diagnosticado en el Espectro Autista. Para tal efecto se elaboró una guía diagnóstico, cuyo objetivo es determinar las nociones previas de área de cubos y paralelepípedos, que posee un estudiante de 6to básico, diagnosticado en el TEA y una secuencia didáctica compuesta por 12 actividades distribuidas en las cuatro etapas presentes en el ciclo de aprendizaje de Jorba y Sanmartí. (1994). Para cada actividad se seleccionaron e implementaron un número determinado de puntos de verificación del DUA y se

observó cómo el estudiante interactuaba y respondía ante las actividades que contenían cada punto.

Instrumento

A continuación se muestra un ejemplo de cómo está presente un punto de verificación en cada etapa del ciclo de aprendizaje.

Etapa	Punto de verificación.	
Actividades de Exploración.	Pauta 5. Punto 1: Utilizar múltiples medios para comunicarse.	El estudiante puede utilizar una figura de Minecraft en papel y manipularla para entregar las respuestas de la situación planteada.
Actividades de Introducción al concepto.	Pauta 5. Punto 2: Utilizar múltiples herramientas para la construcción y composición.	El uso de PowerPoint como guía digital, permite la utilización del corrector de palabras, así cuando el estudiante escribe una palabra, el programa le da la opción de corregir inmediatamente si esta no está escrita correctamente. Justo con lo anterior, el programa proporciona la herramienta “Texto a voz”, función que permite reproducir texto a voz hablada.
Actividades de Estructuración.	Pauta 8. Punto 2: Variar las demandas y los recursos para optimizar el desafío.	En las actividades 2 y 5, se puede observar un aumento de complejidad, pues el estudiante relaciona en la actividad 2, dos elementos: Un dibujo de un cubo o un paralelepípedo con la medida de sus lados y su red de construcción. Posteriormente en la actividad 5, se agrega una pieza adicional que completa los rompecabezas, esta pieza contiene el área total de la figura.
Actividades de Aplicación	Pauta 7. Punto de verificación 2: optimizar la relevancia, el valor y la autenticidad.	En esta etapa se genera una actividad concreta, que se vuelve viable con la creación y anexión de una pregunta adicional. Esta pregunta considera determinar la cantidad de centímetros necesarios para construir un personaje de Minecraft, a través de la construcción real de este personaje.

Participante

Para esta investigación, se seleccionó a un estudiante diagnosticado dentro del Espectro Autista, de 12 años, el cual cursa sexto año básico, lo que permite caracterizar el logro de los aprendizajes áreas de cubos y paralelepípedos, con la utilización de los elementos que plantea el Diseño Universal para el Aprendizaje de un estudiante considerado en la ley de educación chilena.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos en la primera fase, tras el análisis de la ejecución de la guía diagnóstica; arrojaron que el participante poseía todos los conceptos previos necesarios y establecidos en el marco curricular chileno para trabajar el objetivo de aprendizaje del área de geometría en el nivel

de sexto básico. Estos conceptos previos corresponden al conocimiento de figuras 2D y 3D básicas, descripción de cuadriláteros, concepto de área, cálculo de áreas de rectángulos y cálculo de área en cuadriláteros (MINEDUC, 2018). Estos conocimientos previos, fueron adquiridos en la asignatura de matemática en los niveles precedentes.

En relación a la fase 2 de la investigación, se identificaron 18 puntos de verificación del DUA (CAST, 2011; CAST, 2018), que fueron implementados durante la secuencia de aprendizaje que son considerados como aspectos que contribuyen a mejorar los aprendizajes de áreas de cubos y paralelepípedos cuando se implementa una propuesta de enseñanza a un estudiante de 6to básico diagnosticado en el Espectro Autista.

En la siguiente figura se indican los puntos de verificación del DUA que fueron identificados en la fase 2.

Figura 1

Puntos de verificación seleccionados en la fase 2.

Principio I	Principio II	Principio III
• Pauta 1: • 2. Ofrecer alternativas para la información auditiva. • Pauta 2. • 1. Aclarar vocabulario y símbolos. • 2. Clasificar la sintaxis y la estructura. • 5. Ilustrar a través de múltiples medios. • Pauta 3. • 1. Activar o proporcionar conocimientos previos. • 2. Resaltar patrones, características críticas, grandes ideas y relaciones. • 3. Guiar el procesamiento y la visualización de la información. • 4. Maximizar la transferencia y la generalización	• Pauta 4. • 2. Optimice el acceso a herramientas y tecnologías de asistencia. • Pauta 5. • 1. Utilizar múltiples medios para comunicarse. • Pauta 6. • 1. Guiar el establecimiento de metas apropiadas. • 2. Apoyar la planificación y el desarrollo de estrategias. • 3. Facilitar la gestión de información y de recursos.	• Pauta 7. • 1. Optimizar la autonomía y la elección individual. • 2. Optimizar la autonomía y la elección individual. • Pauta 8. • 2. Variar las demandas y los recursos para optimizar el desafío. • Pauta 9. • 1. Promover expectativas y creencias que optimicen la motivación. • 3. Desarrollar la autoevaluación y la reflexión.

Como se puede observar en la figura 38 de los 18 puntos de verificación, 8 de ellos corresponden al principio 1: proporcionar múltiples formas de representación de los contenidos y de la información, el cual está relacionado con la forma en que perciben y comprenden los estudiantes la información que se les presenta (CAST, 2018); en relación al segundo principio (proporcionar múltiples formas de expresar información), fueron seleccionados 5 puntos de verificación que corresponden a cómo los estudiantes se desempeñan en el entorno de aprendizaje y expresan lo que saben (CAST, 2018). Finalmente, los 5 puntos restantes de los seleccionados, pertenecen al tercer principio (proporcionar múltiples formas de implicación), el cual se enfoca en la forma en que pueden participar o motivarse los estudiantes (CAST, 2018).

Es decir, de un total de 31 puntos de verificación existentes, aproximadamente el 25,8 % de los aspectos del DUA que están relacionados en qué aprenden los estudiantes, contribuyen a mejorar los aprendizajes de áreas de cubos y paralelepípedos.

Junto con la anterior existe igual cantidad de puntos de verificación que se relacionan al cómo aprenden y porqué aprenden los estudiantes, los cuales individualmente, corresponden aproximadamente al 16,1% de los aspectos del DUA.

Se considera que la implementación de los 13 puntos de verificación que no fueron identificados como aspectos que contribuyen a mejorar el aprendizaje de áreas de cubos y paralelepípedos, no son necesarios para este caso en concreto, debido a que no influyeron en la enseñanza y aprendizaje.

Para el análisis de la tercera fase se relacionaron los 18 puntos de verificación seleccionados con las características de una persona del TEA, y se dividieron de acuerdo al estilo cognitivo (FACYL, 2010), basándose en sus necesidades educativas.

Este análisis arrojó que los aspectos del DUA seleccionados corresponden a las características cognitivas de pensamiento, memoria, resolución de problemas, y de motivación, de las cuales existe un mayor número de puntos de verificación relacionados con la resolución de problemas y en menor grado con la memoria. Lo anterior se debe a que el estudiante posee mayores necesidades educativas relacionadas con la resolución de problemas, requiriendo un mayor apoyo del profesor de matemáticas en esta área y es labor de él centrarse y utilizar los puntos de verificación del DUA vinculados con esta característica al momento de planificar e implementar una secuencia de aprendizaje.

Referencias

- CAST. (2011). *Universal Design for Learning Guidelines, version 2.0*. Wakefield, MA: Center for Applied Special Technology. Traducción al español: Alba Pastor, C., Sánchez Hípola, P., Sánchez Serrano, J. M. y Zubillaga del Río, A. (2013). Pautas sobre el Diseño Universal para el Aprendizaje, versión 2.0.
- CAST, (2018). *Diseño Universal para el Aprendizaje. Principios y pautas*. EDUCADUA.
- Claramonte, M. (2018). Estrategias y herramientas para enseñar matemáticas a niños con TEA. En I. Cabero & B. Ortega, *Innovaciones educativas motivadoras del conocimiento de las matemáticas y las ciencias*. 1° ed. Sevilla. Ediciones Egregius.
- FACYL. (2010). *Guía para profesores y educadores de alumnos con autismo*. Burgos, Federación Autismo Castilla y León, Consejería de Educación y Ciencia.
- FACYL. (2018). *Guía para profesores y educadores de alumnos con autismo*. 4ta edición. Burgos, Federación Autismo Castilla y León, Consejería de Educación y Ciencia.
- García, M. (2018). "Resolución de problemas con niños con trastorno del espectro autista (TEA)". *6th International Congress of Educational Sciences and Development*. Granada de España, Jun. 21-23, Asociación Española de Psicología Conductual, 2018. 233.
- Heredero, E., & Carralero, A. (2014). Experiencias y recursos con los tics para la atención al alumnado con necesidades educativas especiales. *Education*, 36 (2), 279-286.
- Hernández-Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014) *Metodología de la Investigación* (6ª Edic). McGrall Hill

- Jorba J., & Sanmarti, N. (1994). La luz y las sombras. *Cuadernos de pedagogía*, (221), 20-23.
- Ley No. 20845 de 2015. Por la cual se regula la admisión de los y las estudiantes, elimina el financiamiento compartido y prohíbe el lucro en establecimientos educacionales que reciben aportes del Estado. 29 de mayo de 2015. D.O. No. 9366-04.
- Llorca, M., Plasencia, I., & Rodríguez, P. (2009). Diagramas para la comprensión matemática: Estudio de caso en personas con Trastorno del Espectro Autista. *Revista Educación Inclusiva*, 2(1), 79-90.
- Ministerio de Educación, (2018). Bases curriculares: Primero a sexto básico. MINEDUC.
- Moguel, G., López, P., Torres, M., (2016). Uso de la tecnología para fomentar la creatividad en el aprendizaje de la geometría. *Revista de Investigación Educativa del Tecnológico de Monterrey*, 6(12). 17-23.
- Servicio nacional de la discapacidad, (2021). *Guía para la Inclusión de la Persona con la Condición del Espectro autista*. SENADIS.



ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ALUMNOS DE PRIMERO DE PRIMARIA PARA ESTABLECER UNA FUNCION INVERSA

Sandra Fuentes Mardones, María Consuelo Cañadas Santiago

Este documento se desprende de una investigación más amplia sobre pensamiento funcional en alumnos de primero de educación primaria (6-7 años). Aquí nos centramos en las estrategias empleadas para resolver preguntas que forman parte de tareas de generalización que involucran funciones inversas en un contexto de entrevistas semiestructuradas a cuatro alumnos. Predominó la estrategia de formación de grupos de elementos para establecer el valor de la variable requerido.

Pensamiento funcional, estrategias de resolución, función inversa.

INTRODUCCION

La propuesta curricular conocida como *early algebra* ofrece directrices de cómo desarrollar tareas algebraicas con alumnos en las primeras edades, con la intención de mitigar las dificultades encontradas en los estudiantes de secundaria. Esta propuesta tiene distintos enfoques, tanto en su aplicación como en la investigación. En los últimos años ha cobrado fuerza el enfoque funcional del álgebra, donde la función cobra protagonismo como contenido matemático involucrado. El trabajo que presentamos en este documento es parte de una investigación más amplia realizada en el marco de un proyecto de investigación financiado por el gobierno español, en el cual se indaga en el pensamiento funcional de alumnos de educación primaria.

Diferentes investigaciones abordan el pensamiento funcional en educación primaria (2017; Moss y London McNab, 2011) y dan cuenta del trabajo que realizan estos alumnos, de las estrategias y los sistemas de representación que utilizan para resolver las tareas propuestas y las generalizaciones que establecen.

A nivel internacional, se están incluyendo cada vez en más países estos contenidos en propuestas curriculares y de actividades. Por ejemplo, en España, donde se desarrolla esta investigación, el eje de álgebra se establece desde 1° de educación secundaria (12 años) y no hay contenidos algebraicos explícitos en cursos inferiores (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014). Sin embargo, hay mención a nociones que bien se podrían relacionar con el pensamiento algebraico en general y el funcional en particular. En Chile, así como en otros países, se incorpora el eje de patrones y álgebra en el currículo escolar desde 1° básico (6 años).

El objetivo de este trabajo es “identificar y describir estrategias utilizadas por alumnos de 1º de educación primaria”. En particular, nos centramos en tareas que involucran una función inversa por ser de las que menos evidencias se tienen.

ANTECEDENTES Y MARCO CONCEPTUAL

En las últimas décadas, las investigaciones en torno a cómo introducir el álgebra a los alumnos han tenido mucha relevancia. Desde qué edad comenzar y cómo han sido dos ejes relevantes de los debates en la comunidad investigadora.

Uno de los enfoques del *early algebra* es el pensamiento funcional, describen el pensamiento funcional como un proceso cognitivo que forma parte del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (p. 211). Una función es una relación de dependencia entre dos elementos, uno del conjunto de partida (variable independiente) y el otro del conjunto de llegada (variable dependiente). La función inversa cambia la relación de dependencia de esas variables.

La literatura de investigación evidencia que la resolución de problemas es un contexto idóneo para abordar el pensamiento funcional de los alumnos de las primeras edades. En las resoluciones, los alumnos tienen la oportunidad de utilizar diferentes estrategias, entendiendo las estrategias como las diferentes formas o caminos para alcanzar la solución.

En los últimos años se han publicado diferentes trabajos sobre estrategias en el ámbito del pensamiento funcional con alumnos de los primeros cursos. Propone a alumnos de segundo curso (7-8 años) un problema que involucra la función $f(x)=3x$. Un tercio de los alumnos generalizó la función, utilizando diversas estrategias como contar de 3 en 3, hacer grupos de 3 elementos, u organizar filas de 3 elementos. Como continuación del trabajo anterior, implicaron la función $f(x)=5x$. Un cuarto de los alumnos estableció la relación funcional de forma correcta. Entre las estrategias, destacamos la formación de grupos o filas con 5 elementos.

Investigadores como, trabajaron con alumnos de 7 años, a quienes plantearon un problema que involucra la función $y=2x$. Algunas de las estrategias que llevaron a los alumnos a una respuesta correcta fueron ir contando de dos en dos, o bien, sumar dos veces la cantidad para encontrar el valor solicitado.

Trabajaron con alumnos de último curso de infantil (5 y 6 años) usando las funciones $y=x$, $y=2x$ e $y=x+1$. Las estrategias utilizadas por los alumnos fueron, específicamente en el caso de $y=2$, el sumar de 2 en 2 y el sumar dos veces la misma cantidad, lo que es concordante con la investigación anterior, pero con alumnos más pequeños.

Diseñaron un experimento de enseñanza en el que describen las relaciones funcionales que establecen un grupo de alumnos de 6 y 7 años, en la función $f(x)=x+5$, las estrategias que el autor describe son (a) respuesta directa, sin explicación alguna, (b) conteo total de los elementos, (c) operatoria, para encontrar el valor solicitado y (d) generaliza la expresión para un número indeterminado de elementos.

En las investigaciones citadas, se trabaja la función directa. En cambio, son escasas las que abordan la función inversa. López-Centella (2019) es una de las pocas identificadas. Trabajó con un grupo de 30 alumnos de primero de primaria (6-7 años) y la tarea involucraba la $f(x)=x+5$. Los alumnos evidenciaron más dificultades con la función inversa. Algunas de las estrategias observadas fueron: (a) respuesta directa, (b) variación constante, (c) operación, conteo, (d) particularización, (e) generalización, (f) repetición y (g) recursión.

En este trabajo abordamos algunas de las cuestiones abiertas por nuestros antecedentes para el caso de la función inversa. En particular, nuestro objetivo de investigación es describir las estrategias que emplean alumnos del primer curso (6-7 años) cuando abordan el trabajo de un problema que involucra una función inversa.

METODOLOGIA

Esta investigación es de carácter exploratorio, pues hay escasos estudios en torno a las estrategias que establecen los alumnos en una tarea de función inversa. Y también es descriptivo por la naturaleza misma del objetivo de investigación (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

Este apartado forma parte de un trabajo más amplio, donde 32 alumnos de primero de primaria con edades comprendidas entre los 6 y 7 años, trabajaron sobre un cuestionario escrito que incluía tareas de generalización, que involucraban una función directa. En un contexto de una fiesta de cumpleaños planteamos varias tareas que involucraron diferentes funciones. Diseñamos y aplicamos una entrevista semiestructurada a 4 de estos 32 alumnos, escogidos intencionalmente por las respuestas entregadas en la prueba escrita, ya fuera porque estaba todo correcto o porque sus estrategias los llevaron a establecer relaciones funcionales adecuadas a las tareas propuestas.

En cuanto a los conocimientos previos de estos alumnos, no habían trabajado tareas similares, ya que no corresponden a los contenidos de este curso. El día anterior a la entrevista trabajaron en la prueba escrita con tres tareas que involucraban la función directa ($f(x)=x$, $f(x)=3x$ y $f(x)=5x$), lo que nuevamente se retoma al inicio de la entrevista.

La entrevista tuvo dos partes: (a) análisis de las respuestas dadas en la prueba escrita y (b) desarrollo de tareas de funcionalidad inversa. En la primera parte de la entrevista planteamos preguntas sobre las respuestas dadas al cuestionario, del estilo “¿qué hiciste?” o “¿cómo lo hiciste?”. Los alumnos también contaron con fichas (material manipulativo) que podían utilizar si querían. En la segunda parte de la entrevista planteamos tareas que involucraban las funciones inversas a las propuestas en la prueba escrita ($f^{-1}(x)=x$, $f^{-1}(x)=x/3$, $f^{-1}(x)=x/5$). Las entrevistas tuvieron una duración de entre 25 a 35 minutos por cada alumno.

Tarea 1: relación inversa de número de niños y gorros que deben comprarse para una fiesta de cumpleaños, se les plantea la relación 1 niño-1 gorro y se les pregunta por la cantidad de niños sabiendo que hay 7 y 12 gorros.

Tarea 3: relación inversa de número de niños y piruletas necesarios que deben comprarse para una fiesta de cumpleaños, se les plantea la unidad, 1 niño-3 piruletas, y se les pregunta por los niños que pueden ser invitados si hay 6 y 15 piruletas (figura 1)

3.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3   
	6
	15

Figura 1. Tarea 3

Tarea 4: relación inversa de número de niños y globos que deben ser comprados para la fiesta de cumpleaños, se plantea la relación particular 1 niño-5 globos, y se les pregunta por la cantidad de niños si sabemos que hay 15 y 25 globos.

Usamos las categorías sobre estrategias consideradas por nuestros antecedentes para el análisis de datos.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Describiremos las estrategias que siguen los alumnos en las tareas indicadas. Organizamos los resultados según las tareas propuestas. Mostramos algunas a modo de ejemplos, cabe destacar que las estrategias no son excluyentes. Para individualizar a los alumnos entrevistados utilizaremos las etiquetas A7, A12, A15 y A27, que corresponde a la posición de archivo de su prueba escrita.

Tarea 1

Los alumnos evidenciaron en la tarea 1 solo la estrategia de respuesta directa, la cual puede ser un número escrito o de forma verbal.

Los cuatro alumnos resolvieron la tarea, dando una respuesta correcta a las diferentes preguntas. Sus respuestas fueron “a un niño un gorro”, “para cada uno hay un gorro”, “si tenemos un niño un gorro”, esto se puede explicar por la sencillez de la función identidad. En el desarrollo de esta tarea los alumnos no utilizaron el material concreto que se les puso a su disposición.

Tarea 3

En esta tarea observamos las estrategias que mostramos a continuación, junto con algunos ejemplos de las respuestas de los alumnos:

(a) respuesta directa: los 4 alumnos entregan una respuesta directa, por ejemplo: “son 6, tres para un niño y tres para otro, son 2 niños”

(b) asociación de elementos en grupos: los alumnos A7, A12 y A15 utilizaron esta estrategia para resolver la tarea. Algunas expresiones utilizadas fueron, “hemos puesto las 15 en montones de 3 piruletas y conté 5 montones, lo que me da 5 niños”, “pongo en un grupo tres piruletas y cuento los grupos y sé cuántos niños son”, en este caso, la conformación de grupos no sigue un orden, son solo montones de elementos, “un niño, 3 piruletas”, en este caso el alumno utilizó las series “ahora de revés” donde va ordenando por filas conjuntos de 3 piruletas y los asoció con una carita de niño

(c) otra estrategia: aquí el alumno A27 establece la relación 1 a 1, sin considerar el caso particular de 1 niño, 3 piruletas.

Tres de los cuatro entrevistados (A7, A12 y A15) establecieron la relación funcional inversa contando desde las piruletas a la cantidad de niños, fue de utilidad el material concreto, ya que con las fichas pudieron ir formando grupos o filas ordenadas y con ello responder a las preguntas planteadas.

Tarea 4

En la tarea 4 los alumnos utilizaron las mismas estrategias que en la tarea anterior, a continuación, se listan las estrategias utilizadas y evidencias del trabajo realizado por los alumnos

(a) respuesta directa: todos los alumnos entregan una respuesta directa en esta tarea, por ejemplo: “si uno es 5 globos, entonces para 2 serán 10”

(b) asociación de elementos en grupos: dos alumnos utilizan esta estrategia, el alumno A7 nos dijo “he puesto los 25 globos y hay 5 montones de globos...” formó grupos de 5 globos, relacionando los niños con cada grupo hasta completar los 25 globos pedidos y descubrir que son 5 niños los involucrados, en cambio el alumno A15 formó filas de 5 elementos y contó las filas que obtuvo lo que es igual al número de niños involucrados en el problema.

(d) otra estrategia: aquí el alumno A27 establece la relación 1 a 1, sin considerar el caso particular de 1 niño 5 globos.

Dos de los cuatro alumnos entrevistados (A7 y A15) establecen la relación funcional inversa de la tarea planteada, las estrategias que establecieron fueron las mismas que en la tarea anterior.

CONCLUSIONES

En este trabajo identificamos y describimos estrategias utilizadas por alumnos de 1º de educación primaria en tareas que involucran una función inversa. Se trata de un aporte en el contexto de una aproximación al pensamiento funcional en las primeras edades. Somos conscientes de que no podemos generalizar, por el tamaño y tipo de muestra empleada. Los alumnos siguen mayoritariamente la estrategias de formar grupos o hacer filas con los elementos descritos en los enunciados de las tareas para los valores mayores no consecutivos, se apoyan en el uso del material concreto entregado; sólo uno de los alumnos utiliza la función identidad en todas las tareas propuestas, lo que fue categorizado como otra estrategia. En cuanto a los valores consecutivos y cercanos, los alumnos siguen como estrategia entregar una respuesta directa duplicando los valores dados.

En la literatura consultada, los alumnos lograron resultados similares en cuanto a las estrategias utilizadas. En la investigación de función inversa (López-Centella, 2019), esta consistía en quitar un elemento fijo para obtener el número deseado, en cambio las funciones inversas planteadas en este trabajo fueron de fácil resolución para los alumnos.

Un aporte de esta investigación es que la función inversa que planteamos en las tareas, tenía implícita la repartición de los elementos y los conceptos de multiplicar y dividir aún no los manejan por currículo, lo que genera en ellos de forma intuitiva esta repartición equitativa, formado grupos o series de elementos.

Una posible limitación fue la fatiga de los alumnos, por lo que se sugiere en una próxima aplicación trabajar solo una de las tareas en cada entrevista.

Referencias

- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*, 5º edición. McGraw Hill.
- López-Centella (2019). Estrategias de resolución de problemas que involucran una función afín y su inversa de alumnos de primero de Educación Primaria desde una aproximación funcional del pensamiento algebraico. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada, España.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014), Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

- Moss, J. y London, McNab. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebrization, advances in mathematics education*. Berlin, Alemania: Heidelberg.

ESTUDIO PRELIMINAR DEL SIGNIFICADO ATRIBUIDO POR EL FUTURO PROFESORADO DE PRIMARIA A LOS NÚMEROS QUE APARECEN EN UNA TABLA ESTADÍSTICA

Francisca Manríquez Ubilla, Núria Gorgorió

Esta comunicación presenta los resultados preliminares de un estudio sobre el significado que atribuye el futuro profesorado de primaria a los “número” que aparecen en tablas estadísticas. Partiendo del marco referencial de la estadística cívica, diseñamos una actividad que involucra el uso de datos reales de un contexto social. Analizamos de manera inductiva los informes escritos de nueve grupos de estudiantes que abordan la temática “educación y trabajo”. Los resultados nos muestran que el futuro profesorado no tiene dificultades al identificar variables conocidas como género y población. Por otro lado, identificamos que a menudo interpretan los “números” en las tablas como valores absolutos, pese a que estos correspondan a porcentajes. Junto con esto, identifican como variables los encabezados de las tablas, pese a que estos corresponden a combinación de variables.

Palabras clave: Formación del profesorado de primaria, Estadística cívica, Tablas estadísticas, Variables y valores.

INTRODUCCIÓN

La situación mundial actual ha puesto de manifiesto la necesidad de comprender la información que nos entrega la ciencia y cómo esta interactúa en distintos ámbitos sociales. Nicholson, Gal y Ridway (2018) definen la estadística cívica (civic statistics) como el conjunto de “estadísticas y pruebas cuantitativas sobre los principales fenómenos sociales que impregnan la vida cívica, como la migración, el cambio demográfico, la delincuencia, el empleo y la pobreza” (p. 2). La estadística cívica requiere que la ciudadanía comprenda conceptos y procedimientos estadísticos, así como el contexto en que se sitúan los estudios estadísticos.

Engel (2019) propone que el alumnado experimente con datos y evidencias para comprender fenómenos sociales, y que el profesorado de matemática sea capaz de interpretar representaciones y análisis estadísticos de temas sociales, para poder llevarlos al aula. Por ello, es necesario llevar al aula la estadística cívica real, mediante informes o conjuntos de datos brutos relacionados y derivados de cuestiones socialmente significativas, en vez de datos reales con poco o sin contexto social (ProCivicStat Partners, 2018). Desde esta perspectiva, propusimos a un grupo de estudiantes del Grado de Educación Primaria de la Universidad X desarrollar una actividad que involucra la utilización de tablas de datos provenientes de la Eurostat y de un estudio del Instituto Nacional de Estadística. En esta comunicación presentamos un primer análisis del significado atribuido por futuros maestros de primaria a los números presentes en tablas estadísticas provenientes de bases de datos.

TABLAS ESTADÍSTICA Y LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

El reporte del ProCivicStat (2018) expone seis elementos que caracterizan los datos y materiales utilizados en la estadística cívica: fenómenos multivariados, datos agregados, datos dinámicos,

textos enriquecidos, diversidad de visualizaciones y el contexto social. Una característica particular de las tablas utilizadas en estadística cívica es que en ellas tanto variables como indicadores no aparecen de manera bruta, sino como combinaciones de datos expresados como porcentajes o coeficientes. Por otro lado, resulta necesario que el alumnado sea consciente de que los datos deben estar sujetos a una interpretación contextual, sujeta a un contexto mundial.

Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras (2011) establecen la necesidad del aprendizaje de las tablas estadísticas como objetos culturales puesto que son usados como sintetizador de información, tanto en el ámbito escolar como en los medios de comunicación. Sin embargo, el tipo de tablas utilizadas en la escuela difiere enormemente de las tablas que aparecen en medios de comunicación o bases de datos. Contreras, Álvarez-Arroyo, Cañadas y Aguayo (2020) afirman que la comprensión de tablas estadísticas requiere una lectura exhaustiva y una interpretación compleja, que considera su contexto y buscando el comportamiento del conjunto de datos. Si además trabajamos con datos que informan de fenómenos sociales, posiblemente presenten alguna de las características de los materiales utilizados en la estadística cívica. Desde la formación del profesorado, Gea, Gossa, Batanero y Pallauta (2020) observan que un grupo de futuros maestros al leer una tabla de doble entrada confunden frecuencia absoluta y porcentajes, y no distinguen entre frecuencias dobles, condicionales y marginales.

METODOLOGÍA

Instrumento de recogida de datos

La actividad que propusimos a los estudiantes está basada en las fases del ciclo de investigación de Wild y Pfannkuch (1999) y en las palabras asociadas a tareas que evalúan la alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico que proponen Garfield, del Mas y Zieffler (2010). La actividad queda recogida en la Figura 1 (para conocer su diseño, implementación y lineamientos para su evaluación, ver Autor 1 y 2).

Actividad: De una tabla de datos a una noticia
1. Comentad los datos de la tabla y los gráficos que se os han entregado. 2. Identificad las variables presentes en gráficos, tablas e infografías e indica los valores que toman. 3. Estableced una temática y una pregunta de investigación que puedan trabajarse con los datos entregados. Justifica su elección. 4. Haced una lista de los pasos que vais a seguir para responder a la pregunta planteada. 5. Señalad las variables que utilizaréis para responder vuestra pregunta. Si necesitáis una nueva variable, definidla y señalad qué valores toma. 6. Explicitad los cálculos y gráficos hechos y expliquen por qué han escogido cada representación. 7. Escribid los resultados obtenidos luego del análisis. 8. Interpretad los resultados obtenidos y redactad las conclusiones de vuestra investigación. 9. Identificad puntos fuertes y débiles de vuestro trabajo y sugerencias para mejorarlos. 10. Construid una noticia breve sobre el tema abordado en su investigación. Debe tener título, subtítulo, recuadro de ideas básicas, fotografías y gráficos que la acompañen.

Figura 1. Actividad: De una tabla de datos a una noticia

Para acompañar la actividad, se crearon cuatro paquetes de datos extraídos de la European Statistical Office (Eurostat) y del estudio del Instituto Nacional de estadística “La vida de las mujeres y los hombres en Europa: Un retrato estadístico”. Cada paquete de datos contenía tablas con información correspondiente a los países de la Unión Europea, gráficas estadísticas e infografía. En esta comunicación nos centraremos en una de las cuatro temáticas tratadas, educación y trabajo. La Figura 2 muestra parte de las tablas utilizadas.

TABLA 1		Población		PIB per cápita en EPA*	Región**
GEO/SEX		Hombres	Mujeres		
Unión Europea (UE)		248,232,994	260,307,109		
Bélgica (BE)		5,524,068	5,713,206	118	1
...		...	...	...	...
España (ES)		22,826,546	23,623,019	91	3

* Producto Interno Bruto (PIB) es una medida de la actividad económica. Se define como el valor de todos los bienes y servicios producidos menos el valor de los bienes y servicios utilizados en su creación. El volumen del PIB por habitante en Estándares de Poder Adquisitivo (EPA) se expresa en relación con la Unión Europea (UE28) con el promedio fijado en 100. Si el índice de un país es superior a 100, el nivel de PIB por habitante de ese país es superior a la media de la UE y viceversa. EPA (EU28) = 100

** 1 = Europa occidental; 2 = Europa septentrional (nórdicos); 3 = Europa meridional (sur); 4 = Europa oriental

TABLA 2		Población de 25 a 64 años por nivel de estudio más alto superado (%)						Población activa desempleada (%)			
GEO/SEX		Obligatoria ¹		Post-obligatoria ²		Educación Superior ³		15 a 24 años		25 a 74 años	
		Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Unión Europea (UE)		23.1	23.0	47.9	44.5	28.9	32.5	21.1	19.5	8.1	8.5
Bélgica (BE)		25.7	24.1	40.1	35.0	34.2	40.8	23.8	20.0	7.8	6.8
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
España (ES)		44.3	39.1	22.7	22.5	33.0	38.4	48.6	48.0	18.8	21.8

¹ Menos que primaria, primaria y secundaria baja. ² Secundaria alta y post secundaria no terciaria. ³ Ciclo corto de educación terciaria, grado, máster, doctorado.

TABLA 3		Población				Población activa* en miles			
GEO/SEX		15 a 24 años		25 a 64 años		15 a 24 años		25 a 64 años	
		Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Unión Europea (UE)		29,116,411	27,757,839	137,451,938	138,899,428	12,404	10,437	115,692	99,350
Bélgica (BE)		672,737	651,219	2,996,105	2,975,523	219	176	2,421	2,105
...		...	...	...	...	...	...	...	...
España (ES)		2,289,512	2,183,083	13,205,411	13,130,466	831	723	11,401	9,812

* La población activa se define como la suma de la población empleada y desempleada en búsqueda de trabajo (en paro)

Figura 2. Tablas de datos para la temática educación y trabajo

Es importante notar que, en la línea de lo que proponen los promotores de la estadística cívica, las tablas presentes en la Figura 2 incluyen variables cualitativas y cuantitativas. Como variables cualitativas están el *sexo* con valores *hombre/mujer*, *países de la UE* cuyos valores corresponden a los 28 países europeos, *situación laboral*, con valores *activo/activo en paro*, y la variable *región geográfica*, cuyos valores están codificados con números. La variable *PIB per cápita en EPA* es una variable cuantitativa continua, mientras que la variable *población* es una variable cuantitativa discreta. Tal como puede verse en la tabla 2 de la Figura 2, aparece también una variable cuantitativa continua con valores agrupados para ser manejada como variable cualitativa (Ograjenšek y Gal, 2016). Así, manejamos como cualitativa la variable *nivel educativo* al establecer sus valores como *obligatoria / post-obligatoria / educación superior*, ya que por su naturaleza es una variable cuantitativa continua, puesto que responde a la pregunta “años de escolarización”. Algo similar ocurre con la variable *edad*, cuyos valores se organizan en dos grupos etarios. La agrupación de estas variables surge de la necesidad de simplificar su representación y la interpretación de los datos (Ograjenšek y Gal, 2016).

Recogida de datos

Se llevó a cabo la actividad en el primer curso del Grado de Educación Primaria de la Universidad X 134 estudiantes, organizados en 38 grupos de 3 o 4 estudiantes desarrollaron la actividad de la Figura 1. En la primera sesión se revisaron conceptos y representaciones estadísticas, y la definición de algunos indicadores como el PIB per cápita en EPA, la esperanza de vida y la tasa de mortalidad y natalidad. En las siguientes cuatro sesiones los grupos desarrollaron la actividad. En la última sesión cada grupo presentó su noticia y se discutieron los conceptos y procedimientos estadísticos que utilizados. Las sesiones fueron todas de 90 minutos. Para el estudio preliminar que presentamos, nuestros datos son los 9 informes escritos, correspondientes al tema educación y trabajo.

Análisis de los datos

Para esta comunicación nos centramos únicamente en el análisis del texto escrito por los nueve grupos que trabajan en la temática educación y trabajo cuando responden las preguntas *¿qué variables identifican en la tabla de datos que les hemos entregado? ¿qué valores toman cada una de estas variables? ¿qué tipo de variable es y por qué?* Hemos hecho un análisis de carácter inductivo, interpretativo mediante la herramienta Atlas.ti, contrastando lo que escriben los estudiantes con las variables presentes en las tablas entregadas (Figura 3). En el análisis preliminar que presentamos solo nos fijamos si en los textos escritos han identificado y descrito de manera correcta o incorrecta las variables y cómo interpretan los valores que estas toman. A partir de este análisis preliminar obtenemos una primera caracterización de la forma en que leen las tablas estadísticas.

Quines variables identifiqueu a la taula de dades que us hem entregat per fer aquesta pràctica? Quins valors pren cadascuna de les variables? Quin tipus de variable és? Per què?		
variable	valors que pren	tipus de variable i justificació
gènere	dona - home	Qualitativa nominal perquè no s'atribueix a cap valor numèric.
educació	obligatòria, post-obligatòria superior	Qualitativa nominal perquè descriu el tipus d'educació que han superat.

1.1 B. Correcto
Sexo - valor

1.2 B. Correcto
Nivel educativo - valor

Figura 3. Ejemplo de codificación de los informes escritos mediante Atlas.ti

PRIMEROS RESULTADOS: IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES Y VALORES

En nuestro análisis observamos que siete de los nueve grupos identifican la variable *sexo* y sus valores de manera correcta. Solo dos identifican la variable *país*; uno de ellos indica que el valor que toma es “28” y el otro grupo “los 28 países de la Unión Europea”. Cuatro grupos identifican la variable *región*; solo uno de ellos le asigna valores de manera correcta, los tres restantes escriben que los valores son “1, 2, 3 o 4”. Seis grupos identifican la variable *PIB per cápita en EPA* como “PIB” y señalan que toma valores entre 47 y 266, sin atribuirles unidades. Observamos pues que, a pesar de haberla trabajado previamente, no han comprendido el significado de esta variable. Todos los grupos identifican la variable *nivel educativo*; 6 de ellos establecen que se concreta en tres valores, *obligatoria*, *post-obligatoria* y *educación superior*; y los tres restantes le asignan valores porcentuales. Solo dos grupos identifican la variable *situación laboral*, ambos de manera correcta. Tres grupos identifican la variable *edad*, asignándole dos de ellos el valor “de 15 a 64” y el tercero define la variable *grupos etarios* e indica que sus valores son “15 a 24/ de 15 a 64/ 15 a 74”, identificando como valores solo aquellos que se consideran en el estudio. Por otro lado, cinco grupos consideran como variable la combinación de 2 o más variables, como en el ejemplo de la Figura 4. Junto con esto, indican que el valor que toman estas variables corresponde a los porcentajes de población comprendidos entre el mínimo y el máximo, interpretando los porcentajes en las tablas como valores absolutos.

	Tipo de variable: Educación superior población 25 a 64 años.
	Valor que toma: de 50,2% a 18,2%
	Tipo de variable: Población activa en paro de 15 a 24 años

	Valor que toma: Hombres: de 48,6% a 7,9% / Mujeres: de 55,0% a 6,5%
--	---

Figura 4. Identificación de variables del grupo 7

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Constatamos que la presencia de algunas de las características propuestas por ProCivicStat (2018) en las tablas que forman parte de la actividad han generado algunos conflictos en la atribución de significado por parte de los futuros maestros. Algunos grupos entienden el encabezado superior de las columnas de las tablas como una única variable, cuando dichos encabezados son un cruce de variables y/o valores de las variables que refleja la presencia de datos agregados. Además, cuando identifican los valores que toman algunas variables, se limitan solo el rango que va desde el valor mínimo al máximo, lo que puede ser un reflejo de que no consideran un contexto más amplio que aquel en el que se presentan los datos. Por otro lado, obtenemos resultados similares a Gea, Gossa, Batanero, y Pallauta (2020) en tanto que tratan los porcentajes como frecuencias absolutas, a pesar de que se indique en los encabezados. Con esto, se confirma que la lectura de este tipo de tablas es compleja y se requiere una pauta que guíe su lectura como la que se expone en Contreras, Álvarez-Arroyo, Cañadas y Aguayo (2020). Además, resulta necesario discutir con los futuros maestros cómo descifrar el significado de las cantidades que aparecen en una tabla con características propias de la estadística cívica, para que puedan identificar las distintas variables involucradas. Es importante también trabajar para que comprendan que la información presente en las tablas corresponde a un contexto en particular, pero que las variables pueden estudiarse en un contexto más amplio. Las variables propias de los contextos de la estadística cívica son más complejas que variables como “sexo” y “edad” y por lo general no se encuentran de manera bruta y aisladas. Por ello, resulta necesario ampliar el tipo de variables estadísticas con las que se trabaja para poder profundizar en su significado. Todo ello debería contribuir a fomentar no solo el pensamiento cuantitativo, sino también el pensamiento cualitativo (Ograjenšek y Gal, 2016) en nuestros estudiantes.

Referencias

- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 76, 55-67.
- Contreras, J. M., Álvarez-Arroyo, R., Cañadas, G. R., & Gloria, C. Análisis de tablas estadísticas extraídas de medios de comunicación como parte de su proceso de enseñanza. *Investigación Educativa e Inclusión*, 816.
- Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html
- Garfield, J., del Mas, R., & Zieffler, A. (2010) Assessing important learning outcomes in introductory tertiary statistics courses, in *Assessment methods in statistical education: An international perspective*, P. Bidgood, N. Hunt, and F. Jolliffe, Eds., Chichester: John Wiley & Sons Ltd, pp. 75-86.
- Gea, M. M., Gossa, A., Batanero, C., & Díaz-Pallauta, J. (2020). Construcción y lectura de la tabla de doble entrada por profesores de Educación Primaria en formación. *Educação*

Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 22(1).

- Nicholson, J., Gal, I., & Ridgway, J. (2018). Understanding Civic Statistics: A Conceptual Framework and its Educational Applications. A product of the ProCivicStat Project. Retrieved (Date) from: <http://IASE-web.org/ISLP/PCS>
- ProCivicStat Partners (2018). Engaging Civic Statistics: A Call for Action and Recommendations. A product of the ProCivicStat Project. Retrieved (Date) from: <http://IASE-web.org/ISLP/PCS> (or www.procivicstat.org until Oct 2018)
- Ograjenšek, I., & Gal, I. (2016). Enhancing statistics education by including qualitative research. *International Statistical Review*, 84(2), 165-178.
- Autor 1 y 2
- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999) Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), pp. 223-265.



EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DESDE UN ENFOQUE BIDIMENSIONAL LECTO-MATEMÁTICO. UN ANALISIS INTERDISCIPLINARIO

Javier Bustos Yáñez, Ricardo García Hormazábal, Ciro González Mallo, María Clara Rivas Rivas, Patricia Schwerter Cárcamo

El presente trabajo de investigación analiza los desempeños obtenidos por los y las estudiantes de Ingeniería de la UC Temuco en el curso de álgebra en Contexto del primer año de su formación. Esto, debido a la vinculación entre el razonamiento verbal y la resolución de problemas para la formación de ingenieros en un modelo educativo basado en competencias. La metodología del estudio consistió en construir, aplicar y validar un instrumento diagnóstico bidimensional lecto-matemático. La muestra estuvo constituida por 162 estudiantes de primer año de las carreras de ingeniería. Como resultado de esa aplicación se obtiene que el nivel de comprensión lectora de los estudiantes es regular-bajo (menos que lo exigido en el nivel 1 de la Competencia Genérica asociada a la asignatura), que la capacidad de “traducir” de lenguaje verbal a matemático es disminuido y que el razonamiento matemático mostrado es deficiente. De otro modo, se puede concluir que cuando los estudiantes ingresan a la universidad presentan dificultades para comprender y resolver situaciones problemáticas en matemáticas, habilidades fundamentales en la formación profesional.

Resolución de problemas, comprensión lectora, relación lecto-matemática, interdisciplinariedad, diagnóstico.

INTRODUCCIÓN

Indicadores educativos, tanto nacionales como internacionales, han mostrado deficiencias en áreas claves tales como lenguaje (comunicación) y matemáticas. Como ejemplo de esto, tenemos los resultados obtenidos en el Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE), en la Prueba de Selección Universitaria (PSU) y en Programme for International Student Assessment (PISA). Este fenómeno a nivel nacional se intensifica en las zonas más pobres como la Región de la Araucanía, donde se realiza el presente estudio. Los indicadores evidencian que lo(a)s estudiantes de esta región, históricamente, obtienen puntajes inferiores a la media nacional. Este panorama ha tenido un impacto directo en las condiciones de entrada de esto(a)s estudiantes a la educación superior. Tal es el caso de la Universidad Católica de Temuco, cuyos diagnósticos institucionales presentan una variación negativa en los últimos 5 años previos a la pandemia, respecto de las habilidades matemáticas y comprensión lectora de lo(a)s estudiantes de primer año. La asignatura transversal de primer año de las carreras de Ingeniería de la UC Temuco, Álgebra en Contexto, constituye el espacio investigativo del presente estudio. En el marco del Modelo Educativo de Competencias de la institución, esta asignatura sustenta la Competencia Genérica de Comunicación Oral, Escrita y Multimodal, Nivel 1, es decir, comprensión, inferencia y construcción de información (Cuadernos de Docencia, UCT, 2016).

La lectura y resolución del problema matemático, de acuerdo a la tipología lectora planteada por Quintanal (2001), corresponde a una categoría resolutoria. Este tipo de lectura constituye un sumario

de habilidades y conocimientos aún más complejos. A pesar de su dificultad, los estudios han abordado estas competencias solo de modo aislado o paralelo.

A partir de lo descrito, el presente estudio indaga de manera integral el proceso lector aplicado en la resolución de problemas matemáticos en un nivel universitario, cuya condición de entrada evidencia deficiencias comprensivas profundas en los niveles lectores previos a una habilidad resolutive.

ANTECEDENTES

El planteamiento de un problema algebraico demanda formas de razonamiento asociativos y comprensión de conceptos específicos (Penalva, Posadas y Roig, 2010). Los estudios tanto en el ámbito pre-universitario y universitario, se han enfocado en esta relación de abstracción y lectura simbólica (Bernal y Lleras, 1995) como una de las principales causas de las dificultades resolutive.

A nivel secundario, los estudios plantean las relaciones semióticas que vinculan la resolución de ecuaciones lineales, por ejemplo, con espacios virtuales que involucran a(l) (la) estudiante en un proceso de lectura / transformación (Martínez y Rojano, 2013). El problema ha sido abordado en la premisa de proporcionalidad, es decir, a mayor comprensión lectora, mejores resultados en resolución de problemas (Romero y Murillo, 2012). Así mismo, Águila y Allende (2012) definen dos pasos lectores: la interpretación de modelos matemáticos y la argumentación de resultados como procesos articulados.

En educación superior, por otra parte, prima la visión de las matemáticas como conjunto estático de conocimientos, lo que desemboca en un aprendizaje algorítmico y mecánico (Bernal y Lleras, 1995), contrario al dinamismo del proceso lector. Por lo tanto, una sobrestimación de un resultado numérico sin contextualización. Del mismo modo, Distéfano, Pochulu y Font (2015) plantean las “configuraciones” matemáticas como una composición de elementos que cumplen un rol expresivo de funciones semióticas tanto epistémicas como cognitivas que complejiza lo que sería la “notación” o descifrado del lenguaje matemático al natural o viceversa. Por tanto, la comprensión lectora e interpretación opera a modo de una traducción del lenguaje natural y lenguaje matemático (Aguayo, Ramírez y Sarmiento, 2013). Si los enunciados descriptivos del problema incluyen símbolos y expresiones matemáticas (Osterhol, 2006), el fracaso aumenta.

A partir de esta revisión, se puede concluir que la comprensión lectora y razonamiento matemático se han abordado como habilidades paralelas, por tanto, se concluyen causalidades que, si bien nutren el vínculo cognitivo, no se aborda de manera recíproca.

Se detectan las complejidades estructurales de la lectura y, por otro lado, las dificultades de cálculos, pero no cómo los elementos verbales repercuten en su propia resolución.

En un Modelo Educativo Basada en Competencias, marco orientador de la Universidad Católica de Temuco, los saberes son realidades dinámicas e integradoras (Irigoyen, Jiménez y Acuña, 2010), de ahí la importancia del enfoque interdisciplinario, pues el lenguaje matemático resuelve problemas de naturaleza lingüística (Puga, Rodríguez y Toledo, 2016). Es por esto que la presente investigación presenta y analiza los resultados que arroja un instrumento evaluativo bidimensional (verbalidad del enunciado y resolución matemática) que permite establecer un vínculo disciplinar nuevo y necesario.

METODOLOGÍA

Esta investigación se desarrolló con un enfoque cuantitativo, de tipo descriptivo respecto del desempeño de los estudiantes conforme a las relaciones que ellos pudieron establecer entre la comprensión lectora, el razonamiento matemático y la conexión entre ambas (traducción). Este análisis, formó parte de un estudio mayor en donde se incorporaron los atributos psicométricos del instrumento. Si bien estos no serán tratados en este trabajo, articulan de manera precisa y a nivel de contexto explicativo, el desempeño de los y las estudiantes en comprensión lectora, razonamiento matemático y la respectiva traducción simbólica frente a desafíos de aprendizaje en la Universidad.

El instrumento utilizado, original y de naturaleza bidimensional, consideró siete (7) problemas en un contexto real, donde cada uno abarcó una temática algebraica distinta: porcentaje, proporcionalidad, ecuación, función polinomial, función exponencial, inecuaciones y sistemas de inecuaciones. Cada problema contempló cuatro (4) interrogantes, la primera evalúa comprensión textual e inferencial de datos del enunciado; la segunda alude al reconocimiento de la(s) interrogante(s) que se deducen del planteamiento y, por tanto, del dato a extraer; la tercera a la traducción o equivalencia matemática y la cuarta a la consecución del resultado. Por tanto, un total de 28 ítems.

Cabe destacar la particular estructura del instrumento, en la que a partir del mismo enunciado se debe aplicar razonamiento verbal y matemático, lo que permitió la medición bidimensional del desempeño de los estudiantes indicado en párrafos anteriores.

El grupo de estudio fue conformado por un total de 126 estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la UCTemuco (41 sexo femenino y 84 sexo masculino), con un promedio PSU de 537,7 puntos; 62 de ellos adscritos a la gratuidad y 62 sin este beneficio. A continuación, se confirmó la consistencia interna del instrumento con un α de Crombach de 0.832, lo que garantiza resultados confiables en las sucesivas aplicaciones. Posteriormente, se realizó el análisis estadístico de los datos obtenidos, comenzando con una metodología descriptiva para la caracterización de las preguntas y luego se aplicó un análisis multivariante de correspondencias múltiples, que permitiera determinar la relación de dependencia entre las cuatro respuestas de cada pregunta del instrumento. Estos procedimientos fueron realizados con el software Statistical Package for Social Sciences (SPSS) v. 23.

ANÁLISIS

Como se puede apreciar en la Figura 1, asociada a la primera pregunta de cada problema, la mayoría de los enunciados son comprendidos y, por tanto, la pregunta textual es respondida correctamente, a excepción del problema 7, cuya complejidad gramatical obstaculiza su comprensión.

La segunda pregunta de cada problema asociada a la interrogante interpretativa y resumido en la Figura 2, muestra una clara falta de esta habilidad por la tasa de respuestas incorrectas, a excepción de los problemas 3 y 6, cuyas respuestas se facilitan por encontrarse de manera literal del texto o evidente similitud semántica con la pregunta.

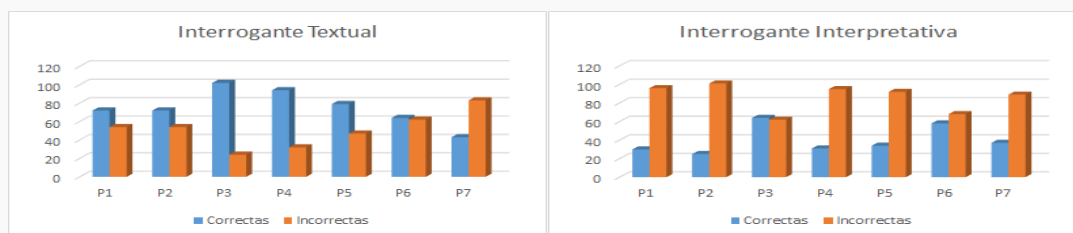


Figura 1. Frecuencias Primeras Preguntas. Figura 2. Frecuencias Segundas Preguntas.

En relación a la interrogante de simbología correspondiente a la tercera pregunta de cada problema y resumidas en la Figura 3, donde lo(a)s estudiantes deben identificar y/o interpretar datos del enunciado en lenguaje natural y traducirlos a simbología matemática para proponer una expresión algebraica que dé respuesta al ejercicio planteado; se observa, dada la alta tasa de respuestas incorrectas, que la información requerida no es procesada correctamente, por tanto, la equivalencia simbólica es errada y la respuesta también, evidenciando habilidades de equivalencias no desarrolladas entre los códigos.

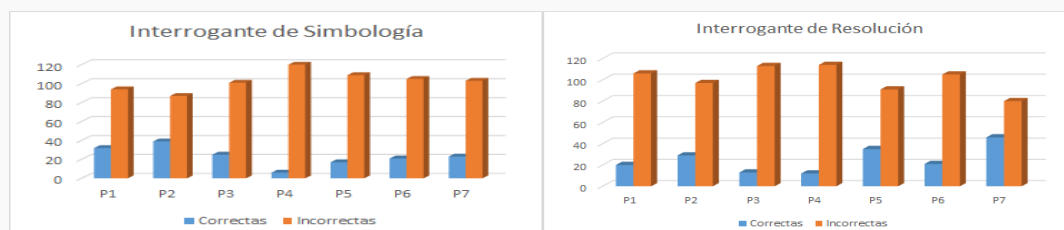


Figura 3. Frecuencias Terceras Preguntas. Figura 4. Frecuencias Cuartas Preguntas.

Respecto del cuarto tipo de pregunta, correspondiente a su resolución algebraica y resumida en la Figura 4, se aprecia también una alta tasa de respuestas incorrectas producto de las deficiencias observadas en las tres preguntas precedentes. La diferencia en algunos problemas como el 2, 5 y 7 se produce por la obtención de las respuestas sin necesidad de transitar por la resolución algebraica esperada. Es decir, se evidencia la mecanización matemática que se desentiende del planteamiento verbal. Esta es una plantilla para preparar propuestas de **reporte de investigación** para las XXIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Es una adaptación de la que se usa en el International Congress on Mathematical Education (ICME). Hace uso de “estilos” que han sido especificados para este documento. Este párrafo utiliza el estilo ‘JNEM Normal’ para asegurar que el texto está escrito en Times new Roman de 12pt dentro los márgenes establecidos. Este estilo automáticamente provee 6pt de espaciado entre párrafos, por lo que no es necesario dejar una línea en blanco entre estos. Otros estilos, como el ‘JNEM Encabezado 1’ o ‘JNEM Abstract’ utilizados arriba, producen automáticamente estilos adecuados a su uso. El uso de estilos asegura una apariencia homogénea para todas las contribuciones.

CONCLUSIONES

Se evidenció que lo(a)s estudiantes en estudio manifiestan deficiencias en la resolución matemática como consecuencia de su nivel comprensivo lector. Se observa también que la verbalización del problema, a medida que se complejiza, acarrea dificultades en ambas áreas. Las preguntas matemáticas que son expresadas de manera verbal y no en simbología matemática, tienen un mayor porcentaje de respuestas correctas que aquellas expresadas en símbolos matemáticos, debido a

que los datos pueden extraerse de forma textual o inferencial acercándose a las respuestas correctas a través de procedimientos aritméticos simples. Se complejiza el proceso lector al constituir estructuras lingüísticas apelativas (interrogantes) dentro del mismo problema matemático. Esta complejidad cognitiva verbal conlleva a menores logros, independiente de la temática planteada en los distintos problemas.

Siendo el foco teórico la presencia de la lectura resolutive en el problema algebraico, se ha podido constatar en las dos preguntas de naturaleza verbal, que lo(a)s estudiantes no son efectivos en el registro de los datos como tampoco en la interpretación de la interrogante que cierra el problema. La significativa dificultad en las terceras preguntas (simbología), que representan la visión interdisciplinaria de la resolución de problemas matemáticos, evidencia no solo un analfabetismo de equivalencias matemáticas, sino también una escasa abstracción.

El(la) estudiante que ingresa a la UC Temuco está bajo el nivel 1 de la competencia que la institución contempla, por tanto, las dificultades inferenciales e interpretativas manifestadas revelan que su condición lectora no ha superado la literalidad, cuyo manejo semántico denotativo, no le permite contextualizar los dilemas a los que se enfrenta.

Los resultados obtenidos y sus respectivos análisis, permiten deducir que el(la) estudiante ha sido expuesto(a) a un ejercicio lector de solo recolección de datos o bien una escasa lectura analítica. El deficiente desempeño simbólico podría atribuirse a la escasa lectura poética comprensiva, siendo esta la más cercana por su retórica semántica. Las llamadas configuraciones matemáticas incluidas en este estudio, evidenciaron que elementos como expresiones condicionales, hipérbaton y/o sustituciones elípticas presentes en los enunciados, fueron factores obstaculizadores en sus transcripciones matemáticas.

Siendo que la lectura resolutive no distingue códigos, debiera estar presente en la decodificación matemática. Las incongruencias evidenciadas entre las preguntas de simbología (terceras) y de resolución (cuartas) indican que dentro del mismo código matemático evidenciado existe discordancia entre la lectura y la comprensión.

Considerando que lo(a)s estudiantes evaluados no poseen experiencia académica universitaria, se evidenciaría que el sistema escolar ha hecho uso de una lectura prioritariamente de aprendizaje y espontánea lo que no contribuye al razonamiento matemático que un estudio ingenieril requiere. Así, la lectura en la enseñanza escolar ha estado confinada a propósitos informativos, de ocio, culturales, entre otras, y ha ido en desmedro de la lectura como un proceso cognitivo resolutive. Por otro lado, la enseñanza escolar de la matemática plantea el código matemático independiente del verbal por lo que lo(a)s estudiantes manejan el lenguaje matemático como un código descontextualizado.

La desaparición de la Gramática en los Programas Escolares ha obstaculizado los espacios metalingüísticos necesarios para que el(la) estudiante pueda desarrollar la competencia lectora necesaria para una lectura resolutive que reconoce, resuelve y proyecta.

La naturaleza interdisciplinaria de este estudio, generó una conversación bilingüe (código matemático – verbal) que enriquece la mirada de un proceso cognitivo que claramente los estudios precedentes abordaron y no evidenciaron, pudiendo comprobar que la mecanización del razonamiento matemático heredado del periodo formativo escolar se manifiesta en la inconexión entre las

decisiones verbales del (la) estudiante y su razonamiento matemático por las incongruencias entre las opciones simbólicas y el cálculo desarrollado.

Referencias

- Aguayo, M., Ramírez, R., Sarmiento, R. (2013). Comprensión lectora y la enseñanza de las matemáticas Estudio de caso. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*.
- Águila, M., Allende, J. (2012). La lectura como estrategia de aprendizaje de las matemáticas. *En IV Congreso Iberoamericano de las Lenguas en la Educación y en la Cultura, Salamanca, España*.
- Bernal, G. Lleras, G. (1995). Algunos factores relevantes en el desempeño académico en Matemáticas de estudiantes de primer semestre de la E.C.I. *Revista EMA, 1(1), p 28investigación*.
- Distéfano, M., Pochulu, M., Font, V. (2015). Análisis de la Complejidad Cognitiva en la Lectura y Escritura de Expresiones Simbólicas Matemáticas. *REDIMAT, 4(3)*.
- Irigoyen, J., Jiménez, M., Acuña, K. (2011). Competencias y educación superior. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 16(48)*.
- Martínez, M. y Rojano, T. (2013). De la modelación concreta-dinámica al sistema matemático de signos del álgebra: lectura/transformación de textos en la resolución de ecuaciones lineales. *I CEMACYC (pp. 1-11)*.
- Österholm, M. (2006). Characterizing Reading Comprehension of Mathematical Texts. *Educational Studies in Mathematics. Educational Studies in Mathematics*
- Penalva, M., Posadas, J., & Roig, A.I. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación Matemática*.
- Puga, L. A., Rodríguez Orozco, J. M., & Toledo Delgado, A. M. (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. *Sophía*.
- Quintanal, J. (2001). Tratamiento complementario de la lectura en el aula. Consideración que ha de recibir en otras áreas que no sean de la lengua. *En Comprensión Lectora (1era ed., pp. 45–58)*. Caracas, Venezuela: Editorial Laboratorio Educativo.
- Romero, E. (2012). *Comprensión lectora y resolución de problemas matemáticos en alumnos de segundo grado de primaria del distrito Ventanilla – Callao*, (Tesis de Maestría). Universidad San Ignacio de Loyola.
- UC Temuco (2016). *Competencias Genéricas para la formación de profesionales integrales*. Ediciones UC Temuco.

EXPLORANDO NOCIONES DE INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD EN LOS TEXTOS ESCOLARES DE MATEMÁTICAS

Melissa Andrade-Molina, Luz Valoyes-Chávez, Alex Montecino

Esta investigación tiene como propósito analizar la forma en la cual elementos relacionados con la inclusión y diversidad se expresan en las recomendaciones sugeridas a los profesores en los textos escolares de matemáticas publicados por el Ministerio de Educación de Chile durante los años 2019 y 2020. Resultan de particular interés los textos escolares referentes a la Guía Didáctica Docente (GDD), que incluyen el texto para el estudiante e instrucciones o recomendaciones para los profesores de matemáticas. Utilizamos análisis de discurso inspirado en Foucault en tanto éste permite centrarnos en los efectos del saber/poder y las formas de subjetividad, implicando una indagación histórica y una problematización de los mecanismos del poder y su funcionamiento.

Inclusión, diversidad, textos escolares de matemática, análisis de discurso.

INTRODUCCIÓN

Las nociones de diversidad e inclusión emergen con fuerza en los discursos educativos en Chile a partir de la formalización de la Ley de Inclusión (Ministerio de Educación de Chile, [MINEDUC], 2015). Dicha ley busca posibilitar la inclusión de todos los niños, niñas y jóvenes al sistema educativo al prohibir la selección de estudiantes en las escuelas y proponer lineamientos para su incorporación. Lamentablemente el sistema educativo chileno se caracteriza por una profunda inequidad (Valenzuela, Bellei & Allende, 2016) y los intentos por mejorar las condiciones de calidad y acceso a la educación parecen insuficientes.

Desde perspectivas sociológicas y sociopolíticas diversos estudios han mostrado que el problema de la inclusión y la atención a la diversidad no radica en el tipo de matemáticas que se enseña en las escuelas. Estos procesos han delineado las características de un sujeto que se reconoce como deseado y, por ende, han caracterizado a los sujetos que se reconocen como no deseados: patológicos. Justamente, los textos escolares de matemáticas pueden considerarse como construcciones discursivas en las cuales se expresan las características del sujeto deseado y de aquellos patológicos. Sin embargo, existe poca investigación al respecto.

Esta investigación tiene como propósito analizar la forma en la cual elementos relacionados con la inclusión y diversidad se expresan en las recomendaciones sugeridas a los profesores matemáticas en los textos escolares de matemáticas. Para ello nos enfocamos en los textos escolares publicados por el Ministerio de Educación de Chile durante los años 2019 y 2020. actividades sugeridas a los estudiantes los textos escolares de matemáticas. Para ello nos enfocamos en los textos escolares de matemáticas publicados por el Ministerio de Educación de Chile durante el año 2019 y editados en el 2020. Resultan de particular interés los textos escolares referentes a la Guía Didáctica Docente (GDD), que incluyen el texto para el estudiante e instrucciones o recomendaciones para los profesores de matemáticas.

MARCO CONCEPTUAL

De acuerdo con Popkewitz (2018), el sujeto patológico resulta de los impulsos de inclusión en las prácticas de la matemática escolar en los que se producen *gestos dobles*—double gestures. En ellas se enuncian las bondades de las matemáticas y habilidades necesarias para un ciudadano contemporáneo que se desarrollan con el tratamiento óptimo de las matemáticas. Por ejemplo, ya es habitual pensar que las matemáticas entregan herramientas vitales para interactuar con los fenómenos naturales que nos rodean día a día: “la matemática entrega herramientas únicas y poderosas para entender el mundo” (MINEDUC, 2016, p.37). De allí, que la modelación matemática sea una de las cuatro habilidades principales a desarrollar en la escuela. Parece impensable, dentro de estos parámetros de inclusión, enunciar a la matemática escolar como un programa de exclusión y segregación de ciertos tipos de estudiantes no deseados. Sin embargo, el currículum escolar, enmarañado en ideales neoliberales, pone al centro la competencia e individualización que etiqueta a los estudiantes como suficientes o deficientes. O, por ejemplo, vuelven insuficiente a la resolución de problemas colaborativos (OCDE, 2017) como la respuesta a la exclusión e inequidad

Popkewitz (2018) considera que los gestos dobles identifican al patológico en categorías de logro académico más bajas que aquellos que se consideran ‘civilizados’. De esta manera, “las poblaciones están discursivamente fuera de los espacios de normalidad, carentes de habilidades psicológicas y sociológicas para una participación exitosa” (Popkewitz, 2018, p. 232). Desde este escenario, las correlaciones que etiquetan a los estudiantes en niveles de logro de matemáticas—como las pruebas estandarizadas nacionales e internacionales—crean sentimientos de fatalismo, miedo y frustración de, por ejemplo, poblaciones en posiciones socioeconómicas desfavorables. Cavieres (2011) evidencia que este tipo de segregación excluye a los estudiantes de bajos ingresos al reconocer que nada de lo que hagan será suficiente para escapar de sus posiciones socioeconómicas.

METODOLOGÍA

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, en esta investigación nos basamos en un análisis de discurso inspirado en Foucault (1983). Dicho análisis permite centrarnos en los efectos del saber/poder y las formas de subjetividad, implicando, según Arribas-Ayllon y Walkerdine (2008), una indagación histórica y una problematización de los mecanismos del poder y su funcionamiento. Ello es posible dado que el análisis del discurso, desde la perspectiva propuesta, se focaliza en las prácticas en las que se fabrican los sujetos, con la intención de desnaturalizar sus formas de ser y de pensar desde enunciados que describen reglas, divisiones y sistemas de conocimiento. En palabras de Cheek (2008), “El análisis de discurso foucaultiano... Puede permitirnos explorar cómo las cosas han llegado a ser como son, cómo es que permanecen así y de qué otra manera podrían haber sido o podrían ser” (p. 356). Seleccionamos los textos escolares orientados al profesor de matemáticas—Guía Didáctica Docente (GDD)—de primer año de enseñanza básica a cuarto año de enseñanza media. Como primer acercamiento, buscamos en 3 textos palabras claves como inclusión y diversidad. Ello resultó en recomendaciones al profesor sobre promover “el monitoreo de estudiantes” o incluir “gran cantidad de actividades y de variadas formas, así como distintas instancias de evaluación” para posibilitar la atención a la diversidad de estudiantes en la clase de matemáticas. La primera GDD incluye una sección de *actividades complementarias de la lección* que sugiere “variadas actividades con sus respuestas, que complementan las presentadas en el Texto y

que respetan y responden a la diversidad de los estudiantes y a los distintos ritmos de aprendizaje”. La segunda GDD promueve el desarrollo de las habilidades matemáticas como propuesta para valorar la diversidad: “apertura al trabajo en equipo, capacidad de tener empatía con otros, valorar la diversidad y respetar las diferencias individuales y comprometerse con la tarea y el aprendizaje.”. En la tercera GDD se encuentra una mención a *diversidad cultural*: Una de las preocupaciones constantes que debe tener tanto el docente como el y la estudiante es procurar desarrollar las habilidades de pensamiento. Estas habilidades de pensamiento deben permitir al estudiante relacionarse con la diversidad cultural.

Este primer acercamiento, nos proporciona un panorama sobre lo que los autores del texto y el Ministerio de Educación comprenden por diversidad e inclusión (como estrategia para atender a la diversidad). Comprensión que es posible por el entramado que se articula a la luz de condiciones espacio temporales y un sistema de razón que lo circunscribe. Finalmente, consideramos como datos sobre diversidad e inclusión a las imágenes que acompañan actividades en las GDDs (imágenes en las que aparecen personas o situaciones) y los enunciados de algunas actividades de aprendizaje que involucran resolución de problemas.

RESULTADOS

De la exploración de las GDDs— $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}$ y T_{11} ⁴—es posible encontrar elementos que apuntan a atender a la diversidad de los estudiantes, pero sin sugerencias claras para los docentes, los cuales deben interpretar tales materiales para su óptima operalización. Los textos se basan ampliamente en el artículo 2 de la Ley General de Educación, en donde se presume que la matemática escolar pueda estar enmarcada “en el respeto y valoración de los derechos humanos y de las libertades fundamentales, de la diversidad multicultural y de la paz, y de nuestra identidad nacional, capacitando a las personas para conducir su vida en forma plena, para convivir y participar en forma responsable, tolerante, solidaria, democrática y activa en la comunidad, y para trabajar y contribuir al desarrollo del país”. Algunos textos expresan la necesidad de valorar la diversidad (por ejemplo T_5, T_6), en donde algunas unidades están delineadas según Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT)⁵ que se enfocan en atender a la diversidad en el aula, por ejemplo OAT 20 “reconocer y respetar la diversidad cultural, religiosa y étnica y las ideas y creencias distintas de las propias en los espacios escolares, familiares y comunitarios, reconociendo el diálogo como fuente de crecimiento, superación de diferencias y acercamiento a la verdad” (T_3 , p. 26). Sin embargo, al analizar las actividades sugeridas a los estudiantes y las indicaciones para los docentes, no se logran observar elementos explícitos que atiendan a la diversidad en el aula. Más bien, el foco está en el contenido, en el desarrollo de habilidades matemáticas y en el logro de los objetivos de aprendizaje matemáticas. Podemos intuir que el OAT 20 se establece mediante las sugerencias de trabajo colaborativo o aprendizaje colaborativo (como en T_{10}) en algunas actividades, pero no es claro (encontramos estos elementos en la mayoría de los textos). Aquí, la dimensión moral de los OAT se

⁴ Éste texto abarca la Guía Didáctica Docente de Tercer y Cuarto Año de Enseñanza Media.

⁵ Los Objetivos de Aprendizaje Transversales consideran dimensiones físicas, afectivas, cognitivas, socio-culturales, morales, espirituales y proactividad y trabajo.

vuelve fundamental en torno a la inclusión, pero no se integra en las actividades sugeridas de resolución de problemas (por ejemplo, T₈, T₅).

En la mayoría de los casos, “atender a la diversidad” se traduce en reconocer que hay diferentes maneras de resolver un problema. Por ejemplo, en T₉, la orientación didáctica para los distintos temas es “Esta actividad puede evidenciar los distintos estilos de trabajo de cada uno. Procure acoger esta diversidad y mostrar que no siempre existe un único camino para resolver un problema”. En T₂, en una actividad de conteo, se sugiere al profesor “permita que cada uno elija una estrategia para contar, no las apruebe ni las desapruebe, ya que después de la sistematización que se presenta en las siguientes páginas, volverán a esta página a verificar su respuesta” (p. 13). Sin embargo, en ambos casos no es específico cómo atender efectivamente a la diversidad en el aula. En algunos casos, la conexión entre la matemática escolar, la realidad y la atención a la diversidad se vuelve bastante difusa. En el ejemplo que se muestra a continuación, la experiencia de haber visitado la región no se relaciona con la diversidad de estudiantes en el sentido de la LGE ni del OAT 20. El tipo de información que ellos tienen sobre los datos requeridos tampoco se relaciona con inclusión ni diversidad, más aún si son datos que deberán obtener de internet:

La actividad se encuentra centrada en el contexto de las horas de luz diurna en la provincia de Arauco en Chile. Consulte a sus estudiantes si han visitado Arauco o si conocen otros lugares sobre los que tengan información acerca de las horas de luz diurna [...] El objetivo es que los estudiantes puedan hablar sobre ese tipo de información que manejen y analizar la información apoyándose en fuentes de Internet. De esta forma, puede abordar la diversidad en sus estudiantes y también medir la comprensión de los conceptos recién adquiridos. (T₁₁, p. 271).

En algunos casos, la diversidad implica reconocer que somos biológicamente diferentes. Ello es observable en las imágenes que acompañan a algunas actividades del texto del estudiante, además de las portadas de las GDDs. En las imágenes predominan las tez beige y trigueña, de pelo negro, castaño, pelirrojo o rubio y ojos cafés. Algunos textos, como en la portada de T₁, se presentan a individuos de diferentes razas. También en T₄ se puede ver que en la imagen de portada se presentan estudiantes con diferentes capacidades.

En algunos textos no se menciona relación alguna con diversidad: T₁, T₂, T₇. Sin embargo, en algunos casos, como en T₃, se menciona explícitamente inclusión y diversidad. Por ejemplo, en la sección *rigurosidad conceptual y atención a la diversidad* se le recuerda al docente que la inclusión va más allá de “estrategias que permitan atender a estudiantes con necesidades educativas especiales. La inclusión supone revisar las prácticas educativas y generar las condiciones para responder a la diversidad de estudiantes, atendiendo a sus características individuales, culturales y sociales y sus diferentes necesidades” (p.8). Y se recomienda considerar la diversidad de los estudiantes atendiendo a diferencias “culturales, sociales, étnicos, religiosos, y respecto de las diferencias entre hombres y mujeres, estilos y ritmos de aprendizaje y niveles de conocimiento” (p. 8), mediante la generación de un ambiente sin discriminación y respeto mutuo. Lo cual se pretende lograr mediante el trabajo colaborativo empático que valore la diversidad y respete las diferencias.

A MODO DE CIERRE

De los resultados de la exploración de las GDDs podemos observar que la atención a la diversidad e inclusión depende fundamentalmente de la interpretación de los profesores de matemáticas. La

mayoría de las actividades que se basan en el trabajo colaborativo para resolver problemas no abarca las prácticas de aula ni las relaciones humanas entre estudiantes, dejando como foco principal el logro de los objetivos de aprendizaje de contenidos matemáticos. Estas tensiones, que ponen el foco en las competencias y habilidades matemáticas de los estudiantes, producen que tales experiencias se alejen de la dimensión moral de empatía y respeto. No es claro cómo se podría atender a la diversidad en ambientes que siguen normados por prácticas de competencia e individualización como son las pruebas estandarizadas—y su preparación en las escuelas.

En el impulso de inclusión se producen dobles gestos al reconocer en la matemática escolar la llave para entender al mundo y acceder a la educación superior e invitar a todos los estudiantes a participar en prácticas de trabajo colaborativo. Al mismo tiempo, se segrega a quienes no tienen éxito en matemáticas ni pueden incorporarse en este tipo de prácticas dada su alfabetización matemática o condiciones personales que los reconozcan como elementos desfavorables respecto a la matemática escolar (ver los factores de riesgo propuestos por OECD, 2016). OECD (2016) establece que ciertas diferencias de los estudiantes llevan a bajo rendimiento en matemáticas, algo que no atienden los textos escolares. Aquí se presenta una paradoja en la que el patológico permanece segregado y excluido y en donde las políticas educativas apuntan solo a tratar la diversidad como diferentes formas de resolver un problema matemático.

Referencias

- Cavieres, E. (2011). The class and culture-based exclusion of the Chilean neoliberal educational reform. *Educational Studies*, 47(2), 111-132.
- Cheek, J. (2008). Foucauldian discourse analysis. In L. M. Given (Ed.), *The SAGE Encyclopedia of Qualitative Research Methods* (pp. 356-357). SAGE Publications.
- Foucault, M. (1983). On the genealogy of ethics. An overview of work in progress. In H. L. Dreyfus & P. Rabinow (Eds.), *Michel Foucault. Beyond structuralism and hermeneutics* (pp. 229–252). University of Chicago Press.
- MINEDUC. (2015). *Ley núm. 20.845. De inclusión escolar que regula la admisión de los y las estudiantes, elimina el financiamiento compartido y prohíbe el lucro en establecimientos educacionales que reciben aportes del estado*. Ministerio de Educación de Chile.
- MINEDUC. (2016). *Matemática. Programa de estudio 2° medio*. Santiago: MINEDUC
- OECD. (2017). *PISA 2015 Results (Volume V): Collaborative Problem Solving*. Paris: OECD.
- OECD. (2016). *Low-Performing Students: Why They Fall Behind and How to Help Them Succeed*. Paris: OECD.
- Popkewitz, T. (2018). Anticipating the future society: the cultural inscription of numbers and international large-scale assessment. In S. Lindblad, D. Pettersson & T. Popkewitz (Eds.) *Education by the numbers and the making of society. The expertise of international assessments* (pp. 222-238). New York, NY: Routledge.
- Valenzuela, J.P., Bellei, C., & Allende, C. (2016). Measuring systematic long-term trajectories of school effectiveness improvement. *School Effectiveness and School Improvement*, 27(4), 473–491.

HACIA UNA EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS: UNA MIRADA DESDE LOS FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Alonso Quiroz Meza

Se presentan los resultados de una investigación cuyo propósito fue detectar, a partir de la praxis de formadores de profesores de matemáticas, elementos que nos permitieran transitar desde una evaluación clásica hacia una evaluación de competencias en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Se administró una encuesta a 56 formadores de profesores que ejercían docencia en asignaturas de matemáticas de primer año de carreras de pedagogía en matemáticas, para luego seleccionar los informantes claves del estudio a quienes se les realizaron dos entrevistas en profundidad, semiestructuradas. Además, se recopiló información de sus estudiantes así como de sus jefes de carrera. Los resultados muestran que existe un desconocimiento por parte de los formadores, de métodos e instrumentos idóneos para evaluar competencias. Sin embargo, es posible evaluarlas mediante combinaciones virtuosas de actividades como la auto y la coevaluación, la comunicación oral de ideas y la argumentación.

Evaluación, Competencias matemáticas, Formación de profesores.

PROBLEMA Y OBJETIVO DEL ESTUDIO

El desarrollo de competencias es en estos días un propósito en la mayor parte de los sistemas educativos en el mundo. En Chile, existe escasa investigación respecto de cómo los formadores de profesores de matemáticas implementan actividades didácticas tendientes al desarrollo de competencias. De hecho, hasta el 2015 no existían estudios en esta área en revistas de alto impacto dedicadas a la Formación Inicial Docente (Torres-Alfonso et al., 2015). En el ámbito evaluativo un estudio reciente mostró que el 87.5 por ciento de los formadores de profesores de matemáticas que realizan docencia en los primeros cursos de la carrera mostraron una valoración positiva hacia la evaluación de competencias, aunque sólo 26.9 por ciento declaró implementar estrategias evaluativas coherentes con el enfoque (Quiroz y Mayor, 2019). Esto contrasta con lo declarado en la mayor parte de los programas de formación inicial docente, luego, cabe preguntarse por las razones de tal divorcio. Así mismo, quisimos indagar entre los formadores que más se acercaban al enfoque de formación por competencias, qué estrategias eran utilizadas por ellos, particularmente en el ámbito evaluativo.

El objetivo del estudio fué por tanto, detectar las estrategias de evaluación, es decir, los criterios, métodos e instrumentos evaluativos que, a juicio de los formadores, jefes de carreras y sus estudiantes, contribuyen a evaluar competencias matemáticas en asignaturas iniciales del plan de estudio de la formación inicial docente de educación media en Chile.

Marco Teórico

En Chile, el desarrollo de competencias esta plasmado en el documento oficial del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2009), titulado “Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios”. En general, la evolución del concepto de competencia se ha producido conforme a

tres orientaciones principales: un primer camino encauzado hacia las empresas, cuyo centro son las tareas por desarrollar; en segundo término, uno orientado a la excelencia profesional, focalizado en el perfil que debe lograrse; y una tercera perspectiva orientada hacia la preparación del ser humano para la vida, con una visión holística y compleja (Chamaco, 2008).

Lo anterior implica el diseño de actividades de aprendizaje que consideren los intereses y las necesidades de los estudiantes en su diversidad, en un proceso en ciclos recurrentes no lineales, con tareas que puedan ejecutarse en grados crecientes de dificultad, y de orden cada vez más complejo y profundo. En ellas se incluyen elementos tales como el planteamiento de hipótesis, la resolución de problemas, la búsqueda de nueva información, la estructuración de información y el cambio de registros de representación (Sánchez y Gairín, 2008). A nivel micro, los formadores deben estar alertas respecto de las dificultades derivadas de la exigencia de producir cambios automáticos y en el corto plazo, considerando su tendencia hacia el conservadurismo (García y Gairín, 2011). El desafío de la formación inicial docente será, entonces, moldear profesores competentes, es decir, con una profunda comprensión del saber disciplinar y pedagógico (Juárez y Arredondo, 2017).

Una de las dificultades para evaluar competencias radica en que se requiere determinar estándares de contenido y de desempeño; los primeros son descripciones de conocimientos y habilidades específicas sobre las que se espera que los examinados demuestren su dominio; en tanto que los estándares de desempeño corresponden a descripciones del grado de desempeño de los examinados respecto de categorías preestablecidas (Rodríguez, 2017). Además, es necesario vincular las competencias con indicadores, y éstos, a su vez, con sus respectivas evidencias. Las rúbricas o descriptores de desempeño permiten dejar claro, tanto al docente como al estudiante, los matices del comportamiento esperado (Villa et al., 2013).

Por otra parte, si una de las capacidades relevantes que se quiere desarrollar en los estudiantes es que autorregulen sus conductas intelectuales, la evaluación de competencias deberá incluir esta perspectiva (Fernández et al., 2013). Por último, como señalan Villa y Poblete (2011), muchos autores consideran que la evaluación debería reflejar la experiencia personal y la reflexión que el estudiante hace respecto de ella. En este sentido, la preocupación por la evaluación formativa tiene relación, sobre todo, con las dificultades que se presentan para su implementación (Martínez, 2013).

En la evaluación de competencias, debe tenerse presente que las competencias no son variables de una tarea, sino de un sujeto, por lo cual no se puede plantear a priori a qué proceso le corresponde cuál tarea (debido a que la persona puede realizar la tarea de diferentes maneras). En este sentido, para evaluar competencias el profesor debe proponer tareas de distinto nivel de complejidad: reproducción y procedimientos rutinarios, conexión para resolver problemas estándares y reflexión para resolver problemas originales (Rico, 2007).

Otra propuesta metodológica para evaluar competencias en estudiantes universitarios de primer año es la formulada por Cubero-Ibáñez et al. (2018), quienes ponen énfasis en los entornos virtuales de aprendizaje. Los tres componentes de su propuesta son: disponer de un entorno virtual de evaluación adecuado, diseño y uso de tareas complejas y elaboración y uso de e-rúbricas analíticas.

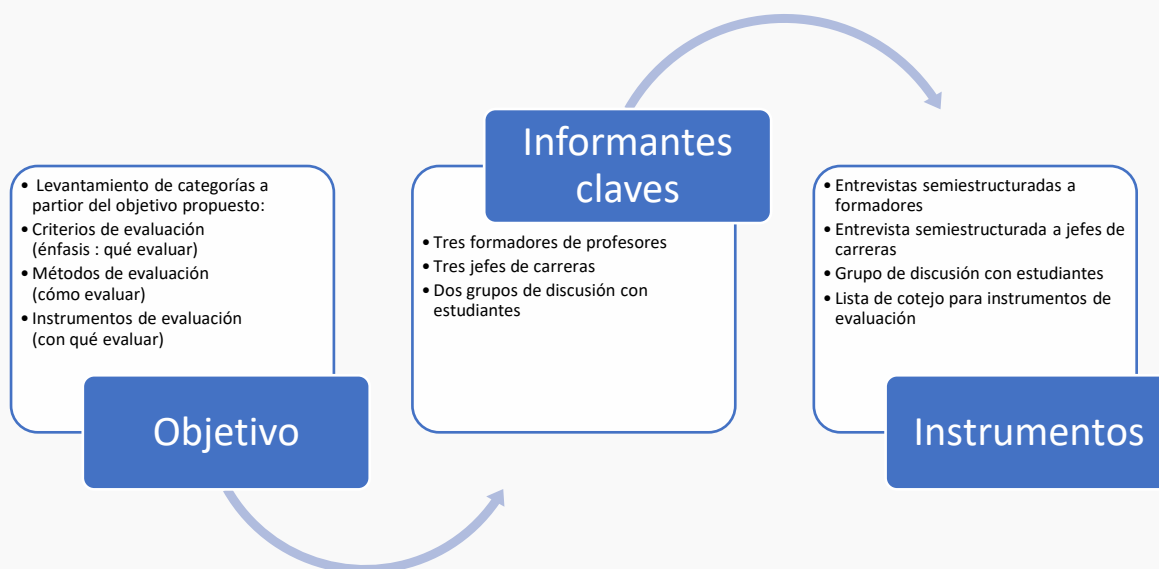
Lo anterior evidencia la necesidad de cambiar las prácticas de evaluación, asumiendo que esta transformación no estará dada por un simple aumento de los conocimientos de los docentes gracias a talleres de actualización, sino que constituye un proceso mucho más amplio y complejo (Pérez et

al., 2015). Se distinguen aquí diversos ámbitos de acuerdo con la cercanía o lejanía del profesor en formación: personal (por ejemplo, resolver un problema de teselación para el embaldosamiento de su casa); educacional/profesional (diseñar escalas de notas usando el modelo lineal); público y científico (calcular el ritmo de crecimiento de una población de bacterias).

Metodología

Este estudio corresponde a la segunda fase de la investigación “Análisis de las concepciones y estrategias para evaluar las competencias matemáticas específicas que ponen en juego los formadores de profesores de educación media en Chile”. En la primera fase, de carácter cuantitativo, se aplicó un cuestionario a una muestra censal de 56 formadores de profesores de matemáticas de educación media a lo largo del país, con el propósito de determinar sus disposiciones respecto del enfoque de formación por competencias y sus criterios de evaluación asociados. A partir de los resultados de esta fase, se logró identificar a aquellos formadores con un mayor conocimiento y valoración del enfoque, mismos que fueron seleccionados para la muestra intencionada de la segunda fase, cuyos resultados son los que se presentan en este artículo. En esta fase se asumió un diseño cualitativo (Fig. 1) con la finalidad de conocer en detalle las concepciones de los participantes respecto del enfoque de formación por competencias.

Figura 1. Diseño de la investigación



Fuente: Elaboración propia.

Cabe señalar que, con el fin de complementar y triangular la información en cada institución a la que pertenecían los formadores seleccionados se consideró también a los jefes de carrera y a los estudiantes de dichos formadores, así como los instrumentos de evaluación utilizados por ellos. Participó en esta fase del estudio un total de 24 personas: tres formadores, tres jefes de carrera y

18 estudiantes. Los instrumentos utilizados en esta fase cualitativa fueron: entrevistas que se aplicaron a formadores y a jefes de carreras; grupos de discusión; y una lista de cotejo para verificar la existencia de componentes de evaluación por competencias en instrumentos aplicados por los formadores participantes. Las entrevistas aplicadas a los formadores de profesores fueron la base de los demás instrumentos aplicados. Cada una de dichas entrevistas fué sometida a una validación de contenido y de constructo, mediante criterios de concordancia de jueces.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En la formación inicial docente en matemáticas, la evaluación de competencias es un tema escasamente estudiado en Chile. De hecho, estudios recientes informan carencias relevantes en la elaboración de rúbricas para su evaluación (Velasco-Martínez y Tójar, 2018). El presente estudio corroboró lo anterior, toda vez que ninguno de los formadores entrevistados utilizó rúbricas para evaluar el desempeño de sus estudiantes.

Los procedimientos para evaluar las competencias matemáticas específicas deberían incluir variadas técnicas como talleres, foros y uso de plataformas virtuales, lo cual fue mencionado por los participantes a lo largo de la investigación.

El estudio permitió reforzar lo señalado por Villa y Poblete (2011) en cuanto a valorar la coevaluación y la autoevaluación como formas eficientes para lograr la autorregulación y la autonomía de aprendizaje por parte de los estudiantes.

Un hallazgo interesante fue la constatación de la realización de un tipo especial de prueba en donde se comunican los criterios e indicadores a evaluar y que contempla, además, una segunda instancia de aplicación. En este tipo de pruebas se evalúan, por lo general, tres criterios: el manejo conceptual, las aplicaciones y las demostraciones.

Una forma surgida de este estudio, que permite transitar hacia una evaluación de competencias es ampliar las dimensiones que se evalúan. Por ejemplo, ello puede lograrse al agregar a los parámetros de evaluación de una prueba escrita la exposición de los resultados obtenidos ante los compañeros (donde se evalúa también la comunicación de ideas con contenido matemático), o bien, la defensa de dichos resultados ante su formador (donde se potencia la competencia de argumentación).

Gracias a la contribución de los informantes clave del estudio también fue posible caracterizar estrategias que, de acuerdo con sus opiniones, resultan ser relevantes para evaluar competencias matemáticas específicas (Tabla 1).

Tabla 1. Estrategias para evaluar competencias matemáticas específicas

CRITERIOS	MÉTODOS	INSTRUMENTOS
Integración de saberes	- Mediante el planteamiento y resolución de problemas en contextos matemáticos y no matemáticos. - Mediante la realización de Talleres	Pruebas con segunda instancia, para evaluar la integración de los contenidos.
Comunicación de ideas con contenido matemático	- Mediante situaciones didácticas en que se evalúen distintas dimensiones de las competencias (cognitiva, procedimental y actitudinal) y que favorezcan la comunicación de ideas con contenido matemático. - Mediante la realización de Talleres - Foros.	- Pruebas con segunda instancia. - Controles breves. - Lista de cotejo: exposición de resultados de pruebas escritas a los pares. - Lista de cotejo: exposición de resultados de indagaciones a los pares. - Controles breves. - Rúbricas.
Argumentación	Mediante la justificación de los resultados obtenidos.	- Lista de cotejo: Defensa oral de resultados ante pares. - Lista de cotejo: Defensa oral de resultados ante el profesor.
Aseguramiento de la calidad	Mediante la comprobación de los resultados obtenidos.	Pruebas escritas.
metacognición	- Mediante la reflexión acerca de los resultados. - Autoevaluación.	Diario reflexivo.

Dichas propuestas se agruparon considerando los criterios de los formadores, esto es, dónde centrar la mirada a la hora de elaborar un plan de evaluación; los métodos (cómo se puede lograr el cumplimiento de los criterios); y los instrumentos (qué herramientas son las más apropiadas para lograr una adecuada evaluación de competencias). Cabe señalar que esta tabla puede utilizarse de manera flexible, es decir, un formador podría optar, por ejemplo, por evaluar la competencia argumentativa, para lo cual tendría que poner el énfasis en que sus estudiantes justifiquen

exhaustivamente los resultados obtenidos en la resolución de problemas y luego elaborar una lista de cotejo para evaluar su desempeño en la defensa de los resultados ante sus pares y ante el propio formador; con ello se complementarían los criterios, los métodos y los instrumentos.

Referencias

- Chamaco, R. (2008). *Mucho que ganar, nada que perder. Competencias: formación integral de individuos*. México, Editorial ST.
- Cubero-Ibáñez, J., Ibarra-Sáiz, M. & Gómez, G. (2018). Propuesta metodológica de evaluación para evaluar competencias a través de tareas complejas en entornos virtuales de aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa*, vol. 36, núm. 1, 159-184.
- Fernández, E., Bernardo, A., Suárez, N., Cerezo, R., Núñez, J. & Rosario, P. (2013). Predicción del uso de estrategias de autorregulación en educación superior. *Anales de Psicología*, vol. 29, núm. 3, 865-875.
- García, M. & Gairín, J. (2011). Diseño y validación de un modelo de evaluación por competencias en la universidad. *Tesis de Doctorado, Barcelona*, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Gobierno de Chile-Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2009), Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media. Actualización 2009, Santiago, Ministerio de Educación.
- Juárez E., Del Rocío, M. & Arredondo, M. (2017). Las competencias matemáticas de los docentes de Francia y de México. *Voces de la Educación*, vol. 2, núm. 3, 70-79.
- Martínez, F. (2013). Dificultades para implementar la evaluación formativa. *Perfiles Educativos*, vol. 35, núm. 139, 128-150.
- Pérez, O., Martínez, A., Triana, B. & Garza, E. (2015). Reflexiones conceptuales sobre la evaluación del aprendizaje. *Revista Didasc@lia: Didáctica y Educación*, vol. 6, núm. 4, pp. 171-168.
- Quiroz, M. Mayor, R. (2019). Evaluación de competencias en la formación inicial de docentes de matemáticas. *Perfiles Educativos*, 41(163), 21-38. <https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2019.163.58919>
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA.en: <http://cimm.ucr.ac.cr/articulos/universitario/conocimiento/La%20Competencia%20Matem%C3%A1tica%20en%20Pisa>*Rico, %20Luis*competencia%20en%20Pisa.pdf (consulta: 16 de febrero de 2018).
- Rodríguez, P. (2017). Creación, desarrollo y resultados de la aplicación de pruebas de evaluación basadas en estándares para diagnosticar competencias en matemática y lectura al ingreso a la universidad. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, vol. 10, núm. 1, 89-107.
- Torres-Alfonso, A., Peralta, M. & Toscano-Menocal, A. (2015). Impacto y productividad de las publicaciones latinoamericanas sobre matemática educativa. *Biblios: Revista de Bibliotecología y Ciencias de la Información*, vol. 1, núm. 55, 13-26.
- Velasco-Martínez, L. & Tójar, J. (2018). Uso de rúbricas en educación superior y evaluación de competencias. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, vol. 22, núm. 3, 183-208.

- Villa, A., Campo, L., Arranz, S., Villa, O. & García, A. (2013). Valoración del profesorado de magisterio sobre el aprendizaje basado en competencias implantado. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, vol. 17, núm. 3, 35-55.
- Villa, A. & Poblete, M. (2011). Evaluación de competencias genéricas: principios, oportunidades y limitaciones. *Bordón. Revista de Pedagogía*, vol. 63, núm. 1, 147-170.



HACIA UNA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE QUE DESARROLLA EL RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL EN ESTUDIANTES DE K A 3

Soledad Estrella, Maritza Méndez-Reina, Andrea Vergara, Pedro Vidal-Szabó

Este reporte de investigación da cuenta de los avances en la perfilación de la trayectoria de aprendizaje que busca desarrollar el pensamiento estadístico en los primeros años de escolaridad, y caracterizar la progresión del razonamiento inferencial informal desde Kinder hasta el 3° año de educación básica. Consideramos que la estadística permite aprender desde los datos, caracterizar la incertidumbre, tomar decisiones bajo incertidumbre y hacer inferencias sobre nuevas situaciones cuya incertidumbre podemos cuantificar. Se da cuenta de una situación relativa a datos y azar, diseñada, implementada y mejorada en un grupo de Estudio de Clases, y se entregan evidencias de argumentos de estudiantes que exhiben características del razonamiento inferencial informal.

Pensamiento estadístico, razonamiento inferencial informal, trayectoria de aprendizaje, educación estadística, Estudio de Clases

Introducción

El razonamiento inferencial informal (RII) se ha introducido explícitamente en la escuela en algunos países (e.g., New Zealand Ministry of Education, 2016) e implícitamente en educación básica usando palabras como "predicción". [Nota: en adelante se señalan trabajos anglosajones en RII, por su relevancia e impacto, lo que es concordante con la revisión de RII realizada por Lugo, García y Ruiz, 2018]. Así, en pruebas internacionales como TIMMS, ítems de 4° E.B referidos a representación de datos, también evalúan "Utilizar información de representaciones de datos para contestar a preguntas que vayan más allá de leer directamente los datos representados (p. e., efectuar inferencias)"; y en 8° E.B. los ítems evalúan en Datos y Azar "[] realizar inferencias, extraer conclusiones y estimar valores entre puntos de datos dados y más allá"; asimismo en el dominio cognitivo más alto, de razonamiento, se señala "[] usar relaciones entre variables u objetos en situaciones matemáticas y hacer inferencias válidas a partir de información dada" (Agencia de Calidad de la Educación, 2015).

Los Mapas de Progreso (MINEDUC, 2009) ya consideraban que la dimensión de razonamiento matemático "[]permite realizar predicciones y levantar conjeturas respecto a ciertos atributos de los fenómenos estudiados. Por otro lado, el conjeturar [inferir] es una habilidad de razonamiento que aplicada al análisis estadístico y al manejo de situaciones aleatorias, permite avanzar en el conocimiento de los fenómenos en estudio, desarrollar las habilidades de pensamiento estadístico y probabilístico, y el uso de estrategias en la resolución de problemas en condiciones de incertidumbre", cuestiones estudiadas en Vergara, Estrella y Vidal-Szabó (2020)

Razonamiento Inferencial Informal

Pfannkuch y Ben-Zvi (2011) señalaban que la enseñanza de la estadística ha evolucionado a partir de los avances tecnológicos, de la identificación de las características del pensamiento estadístico y de las ideas claves que sustentan la estadística. Estos investigadores señalan que la explicación y

exploración de estas ideas han contribuido a proponer una enseñanza con el uso del Análisis Exploratorio de Datos, EDA, (Tukey, 1977), y a poner atención a la construcción de la comprensión conceptual, y al currículo cuyo objetivo debiese ser desarrollar el razonamiento de los estudiantes desde la alfabetización estadística (Ben-Zvi y Garfield, 2004; del Pino y Estrella, 2012; Estrella, 2017, 2018). Sin embargo, algunos autores han apuntado que EDA desconecta el análisis de los datos del concepto fundacional de incertidumbre, desvinculando el azar de los datos.

Es necesario progresar en esta alfabetización, pasar desde la muestra de datos a la población y llegar a que las conclusiones se conviertan en hipótesis sobre la población. Este progreso requiere la iniciación a la inferencia a través de una propuesta pedagógica distinta al EDA, como la inferencia estadística informal, ISI (Ben-Zvi y Aridor, 2016; Makar y Rubin, 2009; Makar et al., 2011). Este enfoque surge para la enseñanza de contenidos previos a la enseñanza de técnicas de inferencia formal. Es necesario notar que la inferencia estadística se diferencia de la estadística descriptiva pues esta última da un conocimiento específico (p.e., la estatura media de los niños de este curso es 134 cm), en cambio la inferencia da un conocimiento general (p.e., sobre la base de esta muestra de estudiantes, se estima una estatura promedio de los niños de nueve años en Chile, de 134 cm).

Investigaciones recientes sostienen que el RII tiene el potencial de crear más coherencia en el currículo de estadística como una línea constante que se vuelve más compleja a medida que los estudiantes progresan (Bakker y Derry, 2011). Algunas de las investigaciones sobre la inferencia informal han sido; Makar y Rubin (2009); Rossman (2008); y Zieffler et al. (2008). Específicamente se ha señalado que el RII se compone de: afirmaciones más allá de los datos (e.g., Zieffler et al, 2008), expresadas con niveles de incertidumbre (e.g., Ben-Zvi et al., 2016), el uso de datos como evidencia (e.g., Makar y Rubin, 2009; Pfannkuch et al., 2011), la consideración del agregado (e.g., Konold et al, 2015), y la integración del contexto (e.g., Langrall et al., 2011).

La tendencia en educación estadística es ubicar la inferencia informal en el centro del currículo escolar, lo que requiere un replanteamiento sobre cómo construir este razonamiento sobre los conceptos de inferencia y cómo enseñarla (Garfield et al., 2015). Wild et al. (2017) sostienen que las dificultades en el aprendizaje de temas estadísticos derivan de la variedad de conceptos involucrados y que debe ponerse en práctica casi en simultáneo, y por ello sugieren reducir la complejidad.

Trayectorias de aprendizaje

El constructo teórico trayectoria de aprendizaje entendido como camino hipotético por el que los estudiantes de educación escolar pueden progresar en su aprendizaje de un tópico matemático concreto (Clements y Sarama, 2004, 2009; Maloney et al., 2014), se usa en nuestro estudio como base para sistemáticamente caracterizar las progresiones en el RII. A saber, una trayectoria de aprendizaje consta de (1) un objetivo de aprendizaje, (2) un conjunto de actividades o secuencias instruccionales, y (3) una progresión de desarrollo que especifica niveles de razonamiento más sofisticados a la cual los estudiantes podrían llegar (Clements y Sarama, 2009; Lobato y Walters, 2017). Además, consideramos como principio que el desarrollo de una trayectoria en el razonamiento de los niños involucra el uso de hallazgos empíricos para construir objetivos de aprendizaje de contenidos específicos a la secuencia de instrucción asociada (e.g., Baroody et al., 2004; Gravemeijer, 2004). En el sentido de Clements y Sarama, consideramos que los niveles de razonamiento que constituyen la progresión del desarrollo de una trayectoria no pretenden

interpretarse como etapas a través de las cuales se debe progresar en forma lineal, sino como estados de la mente con límites fluidos a través de los cuales los estudiantes se mueven bidireccionalmente mientras progresan en sus estrategias de aprendizaje (véase Figura 1). Las trayectorias se han convertido en un constructo cada vez más importante en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Maloney et al., 2014; Simon, 1995), y permitirán estudiar los niveles progresivos del RII de los niños y las niñas, en que cada nivel es más sofisticado que el anterior.

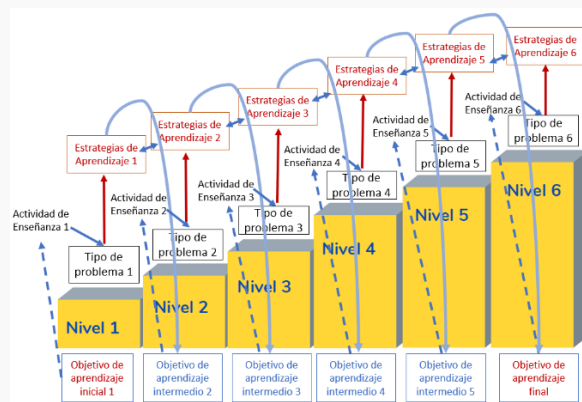


Figura 1: Progresión del desarrollo de una trayectoria de aprendizaje hipotética. Fuente: adaptado de Clements, Sarama, Baroody y Joswick (2020)

La hipótesis del estudio considera que la trayectoria de aprendizaje hipotética -sustentada en una red ordenada de experiencias que el estudiante experimenta a través de situaciones que promueven la generalización de relaciones entre datos y azar, refinada y testeada sucesivamente-, conduce al estudiante hacia el razonamiento inferencial informal. En este escrito, reportamos algunos casos de estudiantes del grado tercero, quienes razonan frente a una situación diseñada para promover el RII.

Metodología

El estudio involucró la participación de 9 profesores en un grupo de Estudio de Clases, y un total de 70 estudiantes distribuidos en los grados k a 4, de una escuela ubicada en la Región Metropolitana y contó con el consentimiento del director, profesores, y apoderados. La situación fue diseñada, observada y discutida por profesores e investigadores con experiencia en Didáctica de la Estadística y en Estudio de Clases, proporcionando validez de contenido y validez ecológica.

Los estudiantes participantes experimentaron una actividad previa en la cual emplearon lenguaje probabilístico en la realización de juegos aleatorios sin enseñanza previa. La situación denominada “El juego de la carrera de ranitas” se basa en el experimento aleatorio “lanzar dos monedas”, privilegia la experimentación al manipular material concreto y requiere el registro de los resultados de los lanzamientos en una tabla. Antes de iniciar el juego, cada jugador elige una rana que presupone que podría llegar a la meta antes que las otras dos. El juego termina cuando en el tablero una de las ranas haya conseguido llegar a la meta. Esta experiencia puede reiterarse tantas veces como se desee, aunque para esta experiencia se tomaron cinco juegos por estudiante. Culminadas varias carreras y teniendo en cuenta los datos registrados, la pregunta orientadora fue “Si jugaras más veces ¿Cuál ranita escogerías? ¿Por qué?”. Esta pregunta tenía como propósito generar una

inferencia estadística informal argumentando con evidencia basada en los datos de las muestras obtenidas. En las clases y reuniones se realizaron el año 2020 en modalidad online, debido a la pandemia de la COVID-19, la modalidad de trabajo fue la enseñanza remota de emergencia (ERE), la implementación de las situaciones se llevó a cabo través de las plataformas Google Meet y Zoom, las que posibilitaron almacenar cada sesión en video. A su vez, fueron solicitadas fotografías a los estudiantes y/o sus apoderados para obtener datos de sus producciones, estas fueron recibidas, vía WhatsApp, por el profesor a cargo de la sesión.

Resultados y Discusión

La Tabla 1, muestra las respuestas de cuatro estudiantes. Estas han sido analizadas, y coloreadas, respecto a componentes clave del razonamiento inferencial informal.

Si jugaras más veces ¿Cuál ranita escogerías? ¿Por qué?"	Uso de datos como evidencia	Afirmaciones más allá de los datos	Expresadas con niveles de incertidumbre
• E1: El celeste porque que gana muchas veces y con práctica podría ganar otra vez	x	x	x
• E2: Elegí la azul porque tiene más posibilidades de ganar			
• P: ¿y por qué tiene más posibilidades?	x	x	x
• E2: porque he visto que en azul ganan muchos			
• E3: yo le decía la azul porque cuando estuve jugando, tocaba más la azul	x	x	
• E4: yo... yo... yo puse azul porque me gusta el azul y tiene más posibilidades de ganar porque muchas veces sale el sello y cara	x	x	x

Tabla 1: Clasificación según RII de cuatro estudiantes del grado 3°.

Todos los estudiantes logran hacer afirmaciones más allá de los datos de los que disponen en las muestras (producto de los juegos propios o de otros compañeros). Sin embargo, E3 no utiliza expresiones con incertidumbre asociada a los datos, pues realiza una predicción considerando el resultado con mayor frecuencia "tocaba más". E1, E2 y E4 plantean inferencias estadísticas informales, empleando expresiones con niveles de incertidumbre tales como "tiene más posibilidades" y "podría ganar".

Los análisis preliminares muestran una progresión de los razonamientos inferenciales informales de las niñas y niños, aunque algunos expresan certidumbre en sus argumentos, varios expresan la incertidumbre de los resultados del experimento aleatorio de características lúdicas.

Nuestro estudio no pretende enseñar métodos formales de inferencia a una edad temprana, sino desarrollar en los niños la percepción positiva del poder de la estadística, el acceso a usar estas ideas y conectarlas con experiencias cercanas, y construir una comprensión unificadora de la estadística.

Agradecimientos: Al financiamiento de Fondecyt N°1200346 y parcial de Fondef ID20i10070.

Referencias

- Agencia de la Calidad de la Educación (2015). Resultados TIMSS Chile 2015. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/TIMMS_presentacion_BAJA.pdf
- Bakker, A., & Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 5-26.
- Baroody, A. J., Cibulskis, M., Lai, M.-L., & Li, X. (2004). Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 227-260.
- Ben-Zvi, D., & Aridor, K. (2016). Children's wonder how to wander between data and context. In *The Teaching and Learning of Statistics* (pp. 25-36). Springer International Publishing.
- Ben-Zvi, D., & Garfield, J. B. (Eds.). (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89. doi:10.1207/s15327833mtl0602_1
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.
- Clements, D. H., Sarama, J., Baroody, A. J., & Joswick, C. (2020). Efficacy of a learning trajectory approach compared to a teach-to-target approach for addition and subtraction. *ZDM*, 1-12.
- del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: Relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 49(1), 53-64.
- Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En Salcedo, A. (Ed.), *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (173-194). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Universidad Central de Venezuela.
- Estrella, S. (2018). Data representations in early statistics: Data sense, meta-representational competence and transnumeration. In *Statistics in early childhood and primary education* (pp. 239-256). Springer, Singapore.
- Garfield, J., Le, L., Zieffler, A., & Ben-Zvi, D. (2015). Developing students' reasoning about samples and sampling variability. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 327-342.
- Konold, C., Higgins, T., Russell, S. J., & Khalil, K. (2015). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 305-325.
- New Zealand Ministry of Education. (2016). *Elaborations on level 5: Statistics*. NZMaths. NZ: Author. Retrieved from <http://nzmaths.co.nz/elaborations-level-five-statistics>
- Langrall, C., Nisbet, S., Mooney, E., & Jansem, S. (2011). The role of context expertise when comparing data. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 47-67.

- Lobato, J., & Walters, D. (2017). *A Taxonomy of Approaches to Learning Trajectories and Progressions*. NCTM: Author.
- Lugo, J., García, N., y Ruiz, B. (2018). *Desarrollo de la Investigación en Razonamiento Inferencial Informal*. En VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos. Costa Rica: Autor.
- Maloney, A. P., Confrey, J., & Nguyen, K. H. (Eds.). (2014). *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105.
- Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 152-173.
- Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2009) *Marco de Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de Educación Básica y Media*. Actualización 2009. Santiago.
- Pfannkuch, M., & Ben-Zvi, D. (2011). Developing teachers' statistical thinking. In *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp.323-333). Springer Netherlands.
- Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 5-19.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Vergara, A., Estrella, S., & Vidal-Szabó, P. (2020). Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de decisiones. *RELIME*, 23(1), 7-36.
- Wild, C. J., Pfannkuch, M., Regan, M., & Parsonage, R. (2017). Accessible conceptions of statistical inference: Pulling ourselves up by the bootstraps. *International Statistical Review*, 85(1), 84-107.
- Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58.

LA ETNOMATEMÁTICA EN EL PROCESO DE COMUNICACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE SABERES: UNA APROXIMACIÓN ENTRE LA MATEMÁTICA Y LA LINGÜÍSTICA DE LAS COMUNIDADES

Renán Concha Zelada, Nelly San Martín Sepúlveda, Miguel Friz Carrillo

El presente artículo fue elaborado bajo la dirección de Fondecyt 1180993 y Grupo de investigación en Educación e Interculturalidad 195023 GI/VC de la Universidad del Bío-Bío, Chile, el cual propone valorar los saberes matemáticos que cada cultura construye y valida en sus contextos, además de rescatar el proceso lingüístico en la comunicación de este conocimiento, el cual dificulta la enseñanza y aprendizaje de la matemática, debido a que los docentes carecen de una formación inicial que les permita integrar el capital cultural de sus estudiantes, con los actuales programas de estudio. Se aborda el rol de la matemática en el desarrollo cultural de las personas y la necesidad de integrarlo en las aulas, exponiéndose el trabajo realizado en Colombia y México para formar profesores desde una perspectiva etnomatemática, con el fin de vincular la matemática de los pueblos y los saberes formales del currículum escolar, y enfatizar en la necesidad de crear políticas públicas que proporcionen a los futuros docentes herramientas para abordar esta problemática. El estudio se posiciona desde un enfoque interpretativo y la metodología seleccionada corresponde a un análisis de contenido de carácter inductivo, debido a que nos permite obtener información relevante y pertinente de los temas tratados.

Palabras clave: conocimiento, matemática, lingüística, interculturalidad, etnomatemática

Abstract

This article aims to assess the mathematical knowledge that each culture builds and validates in its contexts, in addition to rescuing the linguistic process in the communication of this knowledge, which generally hinders the teaching and learning of mathematics, due to the fact that teachers lack of an initial training that allows them to integrate the cultural capital of their students, with the current study programs of this subject. The role of mathematics in the cultural development of people and the need to integrate it into the classroom is addressed, exposing the work carried out in Colombia and Mexico to train teachers from an ethnomathematical perspective, in order to link the mathematics of peoples and the formal knowledge of the school curriculum; emphasizing the need to create public policies that provide future teachers with the tools to address this problem effectively and interculturality.

Keywords: knowledge, mathematics, linguistics, interculturality, ethnomathematics

1. Introducción

En el transcurso de la historia, el hombre ha evolucionado y enfrentado diversos desafíos que lo han obligado a conformar comunidades con el fin de sobrevivir. Frente a este proceso de coexistencia y progreso, sin duda, fue necesario crear un lenguaje y expresiones que facilitaran la comunicación entre sus integrantes, para realizar cada una de sus actividades. En el caso de las matemáticas, este

lenguaje fue expresado por medio de símbolos, ocupados para resolver y solucionar los problemas que surgían en el diario vivir.

Del mismo modo, este proceso de construcción de saberes matemáticos que validó y transmitió cada cultura sin poseer conocimientos formales sobre esta área, nos permite entender “que existe una amplia diversidad de pensamientos matemáticos en el mundo” (Blanco-Álvarez, Higuera Ramírez y Oliveras, 2014, p.255), los cuales pueden ser estudiados por medio de la etnomatemática (D’Ambrosio, 1991), pues esta área de investigación admite comprender cómo cada cultura o pueblo desarrolla y transmite sus saberes matemáticos y de qué manera esta diversidad cultural se presenta en el aula durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, respaldado por elementos lingüísticos que lo sustentan, con el fin de preservar la sabiduría de estas comunidades.

2. El lenguaje como un pilar para el conocimiento matemático

El ser humano durante su constante evolución, debió resolver diversas interrogantes, algunas de ellas tan básicas como contar los alimentos que poseía para el invierno o los integrantes de su familia, es por ello que frente a estas exigencias el hombre prehistórico se vio obligado a realizar muescas o marcas a palos, árboles o huesos, tal como atestiguan los descubrimientos arqueológicos (Méndez, 2003). Por ende, son dichas situaciones, en las que se requiere de la matemática, las que conllevan al hombre a crear los números, los cuales como expresa Delgado (2015), le permitieron “encontrar soluciones a los problemas cotidianos” (p.40), a través de su propia reflexión y por medio del diálogo con los integrantes de cada comunidad (Bishop, 1999). Lo que en palabras de Bastero (1999), refleja cómo el conocimiento matemático surge de la realidad y “de la necesidad de resolver problemas” (p.455).

El suceso anterior es analizado por Tomasini (2014), quien expresa que a pesar de los diferentes símbolos que posee cada cultura, estos señalan el mismo número, por lo tanto, es relevante comprender cómo las palabras y símbolos adquieren significados de acuerdo con un contexto, es decir, “el sentido de las palabras se elabora en el uso social y dentro de una cultura” (Ávila-Storer, 2017, p.186). En esta misma línea enunciativa, Goñi y Planas (2011), también expresan la importancia de comprender el sentido de las palabras en el lugar o localidad en el cual se emiten, pues de acuerdo con estos autores, en el proceso de comunicación no se puede poseer un significado completo del mensaje que emite, si no se considera el contexto (social, cultural o geográfico) en el cual se desarrolla y plasma el acto comunicativo.

Las situaciones anteriormente expuestas reflejan la intención y propósito del uso del lenguaje en un espacio y tiempo determinado, por lo que, Wittgenstein (1987), señala que es relevante comprender el sentido y contexto en que el hablante emite un mensaje, porque ello permite dimensionar la intención de sus palabras, debido a que, si no se conoce esta situación, son solo palabras sin ninguna intención. Para Knijnik (2006), Wittgenstein (1987) dimensiona el lenguaje como una forma de expresión en que se generan las relaciones sociales que pertenecen a un momento de la historia, por ende, son parte de nuestra naturaleza, las cuales a pesar de haber sido construidas en contextos diferentes, su lenguaje y expresiones se parecen. Este hecho fue denominado por Wittgenstein (1987) como semejanzas de familias.

Wittgenstein (1987) continuó desarrollando sus ideas a tal punto que establece y reconoce una relación entre lingüística y matemática, por lo cual finalmente decide plantear “una concepción del lenguaje en la que éste es considerado desde la perspectiva de su aplicación o empleo por parte de los hablantes y por consiguiente la utilidad que efectivamente presta” (Tomasini, 2014, p.14). Asimismo, Delgado (2015) expresa que esta relación entre lenguaje y matemática es necesaria para responder una pregunta o resolver problemas en esta área y así proporcionar una respuesta o solución pertinente, porque si no es posible comprender el lenguaje empleado en las matemáticas “no podrá existir una apropiación del conocimiento matemático” (p.34).

Por su parte Valero (2017), también manifiesta la importancia de comprender la relación entre las matemáticas y la lengua de cada cultura, pues de acuerdo con este autor “las matemáticas son vistas hoy en día como una de las áreas centrales del currículo escolar porque junto con la lengua materna ofrecen conocimientos y habilidades clave para la participación en las actividades productivas del mundo laboral y en procesos políticos y democráticos” (p.101). Por su parte, D’Ambrosio (1991), valora los planteamientos de Wittgenstein (1987) respecto al uso del lenguaje en actividades matemáticas de cada cultura.

2) El rol de la matemática y el lenguaje para construir y preservar el conocimiento

Un importante ejemplo sobre conservación de los saberes propios de cada comunidad, es el caso que expone Knijnik (2006), donde los campesinos del movimiento Sin Tierra de Brasil realizan “una estrategia de redondeo opuesta a las presentes en el currículo escolar” (p.156). Durante nuestra formación escolar nos han enseñado que para redondear un número debemos seguir la siguiente regla: “para redondear un número natural de dos dígitos, si la unidad tiene un valor más grande que cinco, el redondeamiento se hace para la decena inmediatamente superior, mientras que, si el valor de la unidad es inferior a cinco, se debe hacer el redondeamiento para la decena inferior” (Knijnik, 2013, p.183); sin embargo, a pesar de que la regla de redondeo es un proceso validado y formalizado por la sociedad, los campesinos del movimiento Sin Tierra de Brasil aplican el siguiente procedimiento, “al estimar el valor total de lo que gastará en la compra de insumos para el cultivo de hortalizas, hace redondeamientos para arriba en los valores enteros (olvidando los centavos), puesto que no le gusta pasar vergüenza y que le falte dinero a la hora de pagar” (Knijnik, 2013, p.183).

De acuerdo con Ávila-Storer (2017), la situación expuesta por Knijnik (2006, 2013), permite reconocer “características de una comunidad, en la cual se incluye un conjunto de prácticas relativamente estables y poco cambiantes que se heredan de padres a hijos” (p.179). Lo que para Jiménez y Riaño (2019), demuestra cómo “la enseñanza de las matemáticas puede verse como una práctica social en la que (...) a través de un contexto comunicativo apropiado pueden asignar significado y construir representaciones sobre conceptos y procedimientos de la matemática” (p.249). Por su parte, Albanese, Perales y Oliveras (2016) expresan que durante este proceso de validación y transmisión de saberes matemáticos propios del Movimiento Sin Tierra de Brasil, es posible evidenciar “la visión de las matemáticas como construcción consensuada de un conjunto de reglas y normas dentro de un grupo de personas que decide compartirlas” (p.38).

Frente a las estrategias matemáticas desarrolladas por diversos actores de distintas comunidades, los autores Blanco-Álvarez, Higueta y Oliveras (2014), señalan que es importante reconocer y valorar los pensamientos matemáticos de todas las culturas y actores presentes en ellas, pues a pesar de

que no posean una estructura formal, permiten contemplar la existencia de diferentes pensamientos matemáticos en el mundo, tales como “matemáticas ancestrales, matemáticas indígenas, matemáticas de la calle” (Blanco-Álvarez, Higueta y Oliveras, 2014, p.248).

Por lo tanto, reflexionamos sobre cómo la matemática se presenta en diversas formas y culturas, a través de distintas expresiones lingüísticas, las cuales son valoradas y validadas por cada comunidad debido a sus diferentes usos; es por ello que en palabras de Albanese, Perales, Oliveras (2016), debemos reconocer que “existen tantas matemáticas como culturas y, en consecuencia, la toma de conciencia de la existencia de diversas matemáticas” (p.38). Asimismo, De Guardia (2013) señala que es necesario tomar conciencia sobre el desarrollo de las distintas formas de construir, desarrollar y aplicar las matemáticas propias de cada cultura durante la formación de estudiantes, porque para resguardar el patrimonio cultural es necesario que sus usos sociales se reflejen en la educación y de esta manera promover y preservar la cultura de cada pueblo o civilización.

Con la finalidad de incorporar los saberes matemáticos proporcionados por el currículum escolar y aquellos propios de cada comunidad, es que Herrera y Ochoa (2015), establecen que “es casi indispensable adoptar y brindarle al estudiante una herramienta didáctica que le permita recibir un modelo educativo matemático que le ayude a entender e interpretar las matemáticas como una ciencia desde su pensamiento cultural” (p.54).

4) Metodología

El presente ensayo se posiciona desde un enfoque interpretativo, pues por medio de él buscamos comprender los relatos y conclusiones que nos proporciona cada uno de los textos analizados (Hernández, Fernández y Baptista, 2015). La metodología seleccionada corresponde al análisis de contenido, específicamente uno de carácter inductivo, debido a que nos permite obtener información relevante y pertinente a los temas abordados (Bisquerra, 2004). La mayor parte de la muestra fue obtenida a partir de revistas indexadas Scopus y Scielo, desde el año 1990 hasta el 2019. La primera búsqueda privilegió criterios de selección sobre temáticas que versaran en torno a la lingüística y la matemática y que cada revista tuviese al menos tres artículos disponibles de manera completa en la web y que expresaran el rol que tiene la matemática en el desarrollo cultural de las personas y la necesidad de integrar dichos conocimientos en las aulas.

Con respecto al análisis de los datos, este se realizó en tres etapas interrelacionadas, puesto que se integró la información acerca de todos los datos recogidos (Sanhueza, Penalva y Friz, 2013). Para ello, se analizaron los resúmenes de todos los artículos de las revistas seleccionadas, mientras que los elementos que se buscaron fueron las categorías establecidas a priori: i) objetivo de estudio, ii) temas, iii) método, y iv) contexto o muestra.

3. Conclusiones

Por medio de este artículo teórico-reflexivo, hemos logrado evidenciar y comprender el rol del lenguaje en el proceso de comunicación de saberes matemáticos que cada cultura construye y desarrolla sobre la base de sus necesidades y contextos, los cuales principalmente se transmiten de manera oral a las próximas generaciones. Es frente a esta situación y con el fin de perpetuar dichos conocimientos propios de cada pueblo, es que se plantea la incorporación de la etnomatemática en el proceso de formación docente, pues ello permite valorar el capital cultural de los estudiantes y complementar el aprendizaje de las matemáticas con el currículum establecido por cada gobierno;

sin embargo, por el momento no existe una propuesta universal respecto a este tema, solo referentes como Colombia, en donde se ha instaurado una política pública para preservar y fomentar los saberes construidos por su propia cultura y antepasados.

4. Referencias

- Albanese, V., Perales, F. J., y Oliveras, M. L. (2016). Matemáticas y lenguaje: concepciones de los profesores desde una perspectiva etnomatemática. *Perfiles Educativos*, 31-50.
- Ávila, A. (2014). La etnomatemática en la educación indígena: así se concibe, así se pone en práctica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 19-49.
- Ávila-Storer, A. (2017). Lenguas indígenas y enseñanza de las matemáticas: la importancia de armonizar los términos. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 177-195.
- Bastero, J. (1999). La investigación matemática en las matemáticas del siglo XXI. *Revista Matemática Iberoamericana*, 15(2), 455-458.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.
- Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: Editorial La Muralla, S.A.
- Blanco-Álvarez, H., Higuera Ramírez, C., y Oliveras, M. L. (2014). Una mirada a la Etnomatemática y la Educación Matemática en Colombia. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 245-269.
- D'Ambrosio, U. (1991). Ethnomathematics and its Place In the History and Pedagogy of Mathematics. en Mary Harris (ed.), *Schools, Mathematics and Work*, Hampshire The Falmer Press, 15-25.
- D'Ambrosio, U. (2005). "Society; Culture, Mathematics and its Teaching". *Educação y Pesquisa*, 99.120.
- De Guardia, J. A. (2013). *Cuestiones del folklore. Patrimonio cultural folklórico: perspectivas para su entendimiento*. Salta (Argentina): Editorial Portal de Salta.
- Delgado, S. (2015). El papel del lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas. *Panorama*, 9(16), 32-42.
- Durán, F., y Oliveras, M. L. (s.f.). <http://www.fundacionfide.org>. http://www.fundacionfide.org/upload/19/59/matematicas_e_interculturalidad.pdf
- Fuentes, C., Acero, A., Casallas, L., y Díaz, C. A. (2016). ¿Cómo abordar la diversidad en el aula de matemáticas?: algunas necesidades de formación de un grupo de docentes del distrito capital, en Colombia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN*, 46, 125-138.
- Goñi, J., y Planas, N. (2011). Interacción comunicativa y lenguaje en clase de matemáticas. En J. Goñi, y N. Planas, *Didácticas de las matemáticas* (págs. 167-197). Barcelona: Editorial GRAÓ.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. d. (2015). *Metodología de la Investigación*. México: McGrawHill.
- Herrera, Y. L., y Ochoa, D. A. (2015). La enseñanza de las matemáticas en un contexto multicultural hacia un currículum intercultural. *Revista de Investigaciones UCM*, 15(26), 44-55.

- Jiménez, A., y Riaño, I. (2019). Lengua materna y comunicación en la construcción del pensamiento matemático. *Bolema, Río Claro (SP)*. v. 33, n. 63, 248-268.
- Knijnik, G. (2006). La oralidad y la escritura en la educación matemática: reflexiones sobre el tema. *Educación Matemática*, 149-165.
- Knijnik, G. (2013). Juegos de lenguaje matemáticos en formas de vida campesinas del Movimiento Sin Tierra de Brasil. En S. Rivera, *Alternativas Epistemológicas* (págs. 175-193). Prometeo.
- Méndez, J. M. (2003). *Las matemáticas: su historia, evolución y aplicaciones*. España: Universidad de La Laguna.
- Oliveras, M. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Ed. Mathema.
- Sanhueza, S., Penalva, M., y Friz, M. (2013). Identidades y competencias profesionales de estudiantes para maestro de educación infantil relativas a la enseñanza de la geometría. . *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 99-125.
- Tamayo, C. (2018). Lincenciatura en Pedagogía de la Madre Tierra, etnomatemática y formación de profesores. *Ciência e Educação. Bauru*, 759-777.
- Tomasini, A. (2014). La filosofía de las matemáticas del segundo Wittgenstein. *Praxis Filosófica*, 11-40.
- Valero, P. (2017). El deseo de acceso y equidad en la educación matemática. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 99-128.
- Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.



LA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA: UNA MIRADA DESDE EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

Jordan Micael Oteíza Morales

En los últimos años la didáctica de la probabilidad y la estadística ha tenido un fuerte realce e impulso. Los docentes que imparten esta disciplina se han preocupado por fundamentar su trabajo y tener mejores resultados en la enseñanza de estos. El objetivo de la investigación es generar una actividad de clase para Segundo Año de Enseñanza Media y así comprender el concepto de variable aleatoria discreta. Para ello, se realizó un análisis desde el Espacio de Trabajo Matemático Referencial e Idóneo de la actividad planteada, buscando propiciar un tránsito entre el plano epistemológico hacia el plano cognitivo. La actividad se enmarca en la movilización de los planos [Sem - Ins] y [Ins - Dis].

Probabilidad, variable aleatoria discreta, Espacio de Trabajo Matemático.

Introducción

La formación de profesores adquiere en la actualidad un interés creciente, entre otras razones, por ser el motor de las reformas educativas. Como se señala en diversas investigaciones (Goth, 2007; Ball, Thames y Phelps, 2008; Casey, 2010), la formación de docentes no se centra en lo que verdaderamente importa que es la enseñanza de su disciplina en el aula. Se sugiere, que la formación no se centre tanto en profundizar el conocimiento de la propia disciplina sino en dotarles de conocimientos didácticos en pro de la mejora en el razonamiento de los estudiantes.

En Chile, el debate de carácter social sobre la calidad de la educación va en aumento. Los egresados de Pedagogía tienen bajos puntajes en Matemática, lo que ha provocado cambios en la formación profesional y la reflexión escolar. Sin embargo, las diversas soluciones propuestas e implementadas por las universidades que se dedican a formar al profesorado indican bajos resultados, lo que demuestra un bajo rendimiento en los exámenes nacionales e internacionales.

Es por ello, que el objetivo de la investigación es generar una actividad de clase para un Segundo Año de Enseñanza Media con la cual los estudiantes puedan comprender el concepto de variable aleatoria discreta, a través del Espacio de Trabajo Matemático movilizadora en los planos [Sem - Ins] y [Ins - Dis], privilegiando así la génesis instrumental.

Antecedentes

Dentro de algunos estudios ya realizados, que tienen que ver con la idea de variable aleatoria, más que centrados explícitamente en ellas. Oseguera (1994) realiza un análisis del material de apoyo con el que los estudiantes universitarios cuentan para abordar la asignatura de probabilidad y estadística en la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería, Ciencias Sociales y Administrativas (UPIICSA) específicamente en el tema de variable aleatoria. En dicho estudio, él observa que existe una fuerte tendencia a interpretar los reactivos como modelos matemáticos, dejando de lado el contexto y la forma en cómo los números son asignados a los valores de la variable aleatoria. Además, concluye que sólo se presenta el manejo metodológico de reglas y símbolos dejando de lado la idea esencial de una variable aleatoria.

Miller (1998), en su artículo concluye que los libros de introducción a la estadística no desarrollan la idea de variable aleatoria, y los que lo hacen generan obstáculos para abordar temas posteriores. Por otro lado, Vallecillos (1999) enfatiza en la confusión por parte de los estudiantes con los conceptos de parámetro y estadístico, dado que no perciben la idea muestral como una variable aleatoria, además, asegura que esta confusión influye en la interpretación incorrecta del nivel de significancia en las pruebas de hipótesis.

Ortiz (2002), por su parte, realiza un estudio sobre la transposición didáctica externa que se realiza en libros de textos del primer curso de bachillerato, estudiando la caracterización del significado de los conceptos probabilísticos que en ellos aparece. En su estudio, analiza definiciones, tipos de problemas y las representaciones asociadas al concepto de aleatoriedad, frecuencia, probabilidad y variable aleatoria, entre otros.

Como se menciona en Ruiz (2006):

Ortiz reporta que en la mayoría de los textos que analizó no se trata el concepto de variable aleatoria de manera explícita, pero aquellos que lo hacen, sólo contemplan una mínima parte de sus elementos de significado. Él encontró que el concepto también es tratado de manera implícita, sobre todo cuando se describe la variable estadística en el tema de probabilidad porque los valores de la variable estadística se obtienen a partir de los valores observados en una muestra (p. 20).

En el mismo estudio, Ortiz concluye que las actividades propuestas en los diferentes libros de textos analizados, se determina la distribución de probabilidad de una variable aleatoria y su representación gráfica a partir de dicha distribución.

Nardecchia y Hevia (2003) en su investigación intentan encontrar los posibles obstáculos didácticos en el aprendizaje de la variable aleatoria, ellos concluyeron que muy ligado al concepto de variable aleatoria, se encuentra el concepto de aleatoriedad, que según la historia es muy poco abordado, por lo que una de las principales dificultades es la construcción de la noción de variable aleatoria corresponde a la no visualización de la presencia del azar en el fenómeno aleatorio que se trata de modelar a través la variable aleatoria. Adicionalmente, concluyen que tras la dificultad de relacionar la variable aleatoria con el contexto real (como modelo matemático) puede construir otro obstáculo que impida al estudiante adquirir el conocimiento en este tema.

Ruiz (2006) en su tesis de Maestría se propone conocer cómo se apropian los estudiantes de la noción de variable aleatoria en un contexto escolar, abordado desde las dimensiones cognitivas y epistemológicas, con la intención de identificar obstáculos, trayectorias y los conceptos matemáticos cercanos involucrados, que aporten al estudio de la variable aleatoria en el aula. En su estudio, concluye que por parte de los estudiantes existe una falta de percepción de aleatoriedad en el proceso, además de una tendencia por algebrizar y descontextualizar los procedimientos con la noción de variable aleatoria, en donde se pudo notar que el contexto de contextualización del objeto es más simple que el descontextualizar el objeto matemático. También concluye que los estudiantes, no tuvieron problemas al trabajar la variable aleatoria como función y representación tabular. Sin embargo, tuvieron problemas para construir la regla de correspondencia de la variable aleatoria, ya que la forma en la que estaba expresado el problema no lo permitió.

Marco teórico

Un Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011) es un ambiente organizado con el fin de favorecer la construcción de conocimiento matemático, en un contexto escolar y en un dominio específico, este ETM está basado en dos niveles, a saber, el nivel epistemológico y el nivel cognitivo. Al articular ambos niveles, se generan diferentes génesis que componen el ETM, dando lugar a: la génesis semiótica, génesis instrumental y génesis discursiva. Además, los vínculos que se definen a partir de las génesis definen los planos verticales del ETM, el plano semiótico-instrumental [Sem – Ins], el plano instrumental-discursivo [Ins – Dis], y finalmente el plano semiótico-discursivo [Sem – Dis] (López, 2019).

El ETM de referencia para la probabilidad, contempla tres paradigmas que se aplican a la enseñanza francesa, que siguen el paralelismo realizado por Henry (1999) para proponer los paradigmas que se trabajan en la actualidad (ETM_p).

- **Paradigma 1 (P1)** resultante de una modelización inicial en la que el experimento concreto se asocia a una lista de resultados y a un protocolo experimental preciso, que garantiza que el experimento pueda repetirse en las mismas condiciones; y cuya repetición da lugar a observaciones que permiten atribuir una probabilidad de aparición a cada uno de los diferentes resultados (Parzysz, 2014).
- **Paradigma 2 (P2)** obtenido mediante la adopción de una “visión probabilística” (Henry, 1999) del experimento, en la que se define el experimento aleatorio genérico, así como la noción de probabilidad, estudiando las propiedades de ésta. Las herramientas asociadas son: la demostración del tipo matemático, las técnicas de cálculo habituales, diversos registros de representación (Parzysz, 2014).
- **Paradigma 3 (P3)** es caracterizado por un trabajo más estructurado, ligado a la Axiomática del tipo Kolmogorov.

Análisis a priori

A continuación, se propone una actividad de aprendizaje, que tiene por finalidad formalizar el concepto de variable aleatoria en estudiantes de Segundo Año de Enseñanza Media.

PARTE 1: Actividad de Tipo Experimental

Materiales:

- 3 fichas de igual tamaño de color Rojo, Negro y Blanco.
- Bolsa negra o urna.

Considere la siguiente situación: “En la bolsa negra o urna, se incorporan las 3 fichas de colores. Extrae al azar una ficha sin reponerla y se observa su color. Si es de color Rojo el experimento finaliza, en caso contrario, sigue sacando fichas hasta obtener el color Rojo”. Responde las siguientes preguntas:

1. Si una persona obtuvo la ficha roja en la primera extracción, ¿qué casos posibles tiene?
2. Si una persona obtuvo la ficha roja en la segunda extracción, ¿qué casos posibles tiene?

3. Si una persona obtuvo la ficha roja en la tercera extracción, ¿qué casos posibles tiene?
4. ¿Cuál es el conjunto de las posibles extracciones?

PARTE 2: Trabajo Teórico

1. Determine la probabilidad de cada uno de los eventos del conjunto de las posibles extracciones, ¿es este conjunto equiprobable? Justifique.
2. Represente gráficamente la situación relacionando el conjunto de todas las posibles extracciones con el número de extracciones.

PARTE 3: Institucionalización

1. ¿Qué conceptos probabilísticos y matemáticos están involucrados en la gráfica de la pregunta 2, de la Parte 2?
2. Defina la variable aleatoria para la situación inicialmente planteada.
3. Consideremos la misma situación inicial, pero la extracción es con reposición, ¿qué puedes decir sobre el recorrido de la variable aleatoria?

En la Parte 1, en términos del ETMP, el plano vertical movilizado es el [Sem – Ins], ya que a partir de la visión del experimento por medio de los artefacto fichas y bolsa, los estudiantes pueden con mayor facilidad encontrar los casos posibles para luego nombrar el espacio muestral del experimento, es decir, se lleva a cabo el proceso de instrumentación del artefacto, en donde este es utilizado como un proceso de adaptación de los esquemas de manipulación de la herramienta proporcionadas con el artefacto para poder llegar al resultado pedido. Además, nos encontramos en el Paradigma 1, dado que los estudiantes se están enfrentando a una actividad del tipo experimental, en donde las repeticiones realizadas en condiciones similares del experimento, se logra observar los posibles resultados para llegar a la respuesta de la tarea.

En la Parte 2, el plano vertical movilizado es el [Ins – Dis], debido que a través de la instrumentalización de los artefactos simbólicos, como lo son los eventos dependientes y el teorema de la probabilidad condicionada o árbol ponderado según sea el caso, el estudiante debe tomar una elección del proceso que va a llevar a cabo al momento de dar respuesta a la tarea propuesta, aprovechando el artefacto utilizado. La respuesta entregada por el estudiante requiere de una argumentación de por qué los sucesos no son equiprobables, bastaría indicar que los sucesos expuestos no tienen la misma probabilidad de ser obtenidos, brindando una justificación del tipo intelectual. Luego, en la pregunta 2 se activa el plano [Sem – Ins], a través de la representación del experimento en un registro figural, tabular o gráfico, en donde el estudiante, a través de la utilización de diferentes herramientas puede representar la situación inicial. Según lo mencionado anteriormente, nos encontramos dentro de un Paradigma 2, ya que se utiliza una visión probabilística para llegar a la respuesta de la tarea con las propiedades del objeto matemático puesto en juego, utilizando herramientas como, el cálculo de probabilidades, diagramas de árbol y sagitales, involucrando también un registro tabular.

En la Parte 3, se activa un plano [Ins – Dis], en donde a partir de la instrumentalización del artefacto obtenido en la representación gráfica, el estudiante pueda deducir los conceptos de Espacio

Muestral, Función, Dominio y Recorrido, para poder armar una definición de Variable Aleatoria, a través de la movilización de proposiciones y la formulación de pruebas intelectuales.

Luego en la pregunta 3 de la Parte 3, se cambia la situación inicial, convirtiendo la actividad en una situación con reposición de las fichas. Se espera que el estudiante pueda concluir que el Espacio Muestral y el recorrido de la variable aleatoria son los que se ven afectados, pasando a ser ambos de carácter infinito pero numerables. Aquí nos encontramos movilizados en el plano [Ins – Dis], en donde el estudiante, nuevamente a partir de la realización del experimento utilizando los artefactos fichas y bolsa, los estudiantes pueden con mayor facilidad encontrar los casos posibles para luego nombrar el espacio muestral del experimento, es decir, se lleva a cabo el proceso de instrumentación del artefacto, en donde este es utilizado como un proceso de adaptación de los esquemas de manipulación de la herramienta proporcionadas con el artefacto para poder llegar al resultado pedido, también se le pide argumentar que sucede con el recorrido de la variable aleatoria.

Conclusiones

Este Marco teórico usado puede ser muy útil para la planificación de actividades que se les presentarán a los estudiantes, en donde, como docentes tenemos la labor de desarrollar el pensamiento matemático y computacional en ellos, lo cual se puede lograr a través de la activación de las 3 génesis que propone Kuzniak, la gran cantidad de información que nos puede entregar el Marco con respecto al trabajo que están realizando los estudiantes en una determinada tarea, y poder así tomar las decisiones pedagógicas necesarias para cubrir las competencias que no están presentes en él. Es un marco íntegro, que involucra el trabajo del docente, el del estudiante y el de las diferentes instituciones que existen, sin dejar de lado la parte epistemológica y cognitiva, involucrando en gran parte de su teoría diversos Marcos Teóricos propuestos por otros investigadores de la Didáctica de la Matemática.

Referencias

- Henry, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Reperes – IREM*, 36, 15-34.
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématiques et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- López, S. (2019). La Algebrización en un curso de curvas y superficies parametrizadas: una sesión de clases. *ETM6: Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático*. PUCV, Chile. ISBN: 978-956-401-498-2
- Miller, T.K. (1998). The random variable concept in introductory statistics. In L. Pereira-Mendoza (Ed.). *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 1221-1222). Singapore: IASE.
- Nardecchia, G. y Hevia, H. (2003). Dificultades en la enseñanza del concepto de variable aleatoria. Trabajo presentado en el *V Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy, Argentina.
- Ortiz J. J. (2002). La probabilidad en los libros de texto. Granada: Grupo de investigación en Educación Estadística.
- Oseguera, F. (1994). *El concepto de variable aleatoria en el contexto del currículo. Análisis y Alternativas*. Tesis de Maestría no publicada. México: Cinvestav, México.

- Parzysz, B. (2014). Espaces de travail en simulation d'expérience au lycée: une étude de cas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática*, 17(4), 65-82.
- Ruiz, B. (2006). Un acercamiento Cognitivo y Epistemológico a la Didáctica del Concepto de Variable Aleatoria. (Tesis de Magister). CICATA – IPN, México.
- Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-Second Session of the International Statistical Institute* (Tome LVIII, Book 2, pp. 201-204). Helsinki: International Statistical Institute.



LOS MODOS DE PENSAR EL CONCEPTO DE GRUPO DESDE LOS MODOS DE PENSAMIENTO – EL CASO DEL GRUPO DE ORDEN 2

Samuel Campos, Marcela Parraguez

La investigación presenta un estudio inicial sobre las distintas maneras de comprender el concepto de grupo desde una variación de la Teoría Modos de Pensamiento, perspectiva que caracteriza las formas de ver y entender los conceptos del álgebra lineal, y que ahora se instala en el Álgebra Abstracta. En este trabajo se presenta un análisis de las respuestas de un profesor de matemática en su formación inicial frente a situaciones que involucraban la estructura de grupo de orden 2. Las respuestas entregadas por el participante permiten identificar las distintas maneras en que se comprenden y desarrollan las diversas situaciones estudiadas, cada una diseñada desde un modo de pensamiento particular para los grupos: modo Sintético-Geométrico (SG), modo Analítico-Aritmético (AA), modo Analítico-Combinatorio (AC). Cada uno de estos modos fue desarrollado a partir de un estudio histórico-epistemológico del concepto de grupo y dan sustento a la variedad teórica de los modos de pensar. Las respuestas del participante permiten relacionar las distintas estrategias con determinados modos de pensar el concepto de grupo.

Concepto de Grupo, Modos de Pensamiento, Comprensión, Grupo de orden 2

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo reporta el análisis de los primeros datos de una investigación de corte cognitivo sobre la comprensión que tienen los estudiantes de Pedagogía en Matemática durante su formación inicial, sobre el objeto matemático Grupo. Para analizar la comprensión de este objeto matemático se consideró como marco de referencia una variación de los Modos de Pensamiento propuesto por Sierpinska (2000), tal variación responde al cambio de objeto matemático estudiado –del Álgebra Lineal al Álgebra Abstracta–. Bajo esta perspectiva teórica, los estudiantes evidencian una adecuada comprensión de un concepto cuando son capaces de posicionarse y articular diferentes modos de pensarlo en función de las características propias de ver y entender dicho concepto en una actividad. La caracterización de tales modos de pensar los Grupos se elaboró a partir del estudio de la historia de este concepto y su epistemología. Tal caracterización será la base de esta variación teórica de los Modos de Pensamiento. Las respuestas del profesor en formación frente al instrumento de toma de datos permiten evaluar la pertinencia del modelo teórico y a su vez, caracterizar las estrategias puestas en juego por el participante identificando los elementos que le permiten reconocer una estructura común en las distintas situaciones matemáticas presentadas (la estructura de grupo de orden 2).

ANTECEDENTES, PROBLEMÁTICA Y OBJETIVO

En Chile, aproximadamente el 90% de las universidades reconocidas por el estado que imparten la carrera de Pedagogía en Matemática tiene en su malla curricular una asignatura relacionada con el estudio de las estructuras algebraicas. En todos estos casos, el programa de estudio aborda las estructuras de grupo y de anillo, incluso algunos programas llegan a cuerpos y extensiones de cuerpos. Por otro lado, los Estándares orientadores para carreras de Pedagogía en Educación Media

(Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012) declaran explícitamente “los conocimientos mínimos e imprescindibles que cada profesor o profesora debe saber en el ámbito de su disciplina y de la enseñanza de la misma” (p. 3). En particular, en cuanto a los estándares sobre matemática, el documento define cinco grandes áreas: Sistemas Numéricos y Álgebra, Cálculo, Estructuras Algebraicas, Geometría y Datos y Azar.

El indicador concerniente al área de Estructuras Algebraicas sostiene que “el profesor es capaz de conducir el aprendizaje de la divisibilidad de números enteros y de polinomios y demuestra competencia disciplinaria en su generalización a la estructura de anillo” (MINEDUC, 2012, p. 20)

A partir de estos hechos se puede evidenciar un claro interés (al menos a nivel nacional) en que los profesores de matemática manejen estos conceptos básicos de Estructuras Algebraicas.

En el contexto de enseñar y aprender las estructuras algebraicas, varias investigaciones dan cuenta de la dificultad que tienen los estudiantes en adquirir estos conceptos del Álgebra Abstracta (Dubinsky, Dautermann, Leron y Zazkis, 1994; Edwards y Brenton, 1999; Hazzan, 1999; Sepúlveda, 2016). Nuestra hipótesis es que la manera en que se presenta el estudio de los grupos en la formación inicial docente, desde un enfoque formalista, privado del proceso de abstracción que lo constituyó, suscita dificultades en la adquisición del concepto de Grupo en los estudiantes. Para esto, nos planteamos como objetivo general de la investigación generar una secuencia de actividades que promuevan la conexión entre las distintas maneras de comprender el concepto de Grupo. En particular, este trabajo, como un reporte inicial de esta investigación, tiene por objetivo analizar las respuestas de un profesor de matemáticas en formación inicial respecto a diversas situaciones matemáticas que abordaban la estructura de grupo de orden 2 de manera implícita. Tales respuestas las contrastaremos con el modelo teórico de los modos de pensar el concepto de grupo: modo Sintético-Geométrico (SG), modo Analítico -Aritmético (AA) y modo Analítico-Combinatorio (AC). Este contraste entre las respuestas a las situaciones diseñadas y el modelo teórico nos permitirá evaluar la pertinencia de la variedad del modelo y la operacionalización al analizar y clasificar las estrategias de los participantes de la investigación en uno u otro modo de pensar. Es preciso mencionar que la caracterización de los tres modos de pensar el concepto de grupo se fundamenta en un estudio previo sobre la historia y epistemología del concepto de grupo.

MARCO TEÓRICO

La investigación se sustenta bajo una variedad de la perspectiva teórica de los Modos de Pensamiento de Sierpiska (2000). Estos Modos de Pensamiento son un marco de referencia de la Didáctica de la Matemática que nos provee de elementos para investigar aspectos relacionados con los procesos de aprendizaje del Álgebra Lineal. El marco sostiene que los tópicos del Álgebra Lineal se desarrollaron bajo la coexistencia de tres modos de pensar: el modo Sintético-Geométrico (SG), el Analítico-Aritmético (AA) y el Analítico-Estructural (AE). En nuestro caso, la investigación propone una variación de este marco teórico, cambiando el objeto matemático de estudio del Álgebra Lineal, a la Estructura Algebraica de Grupo (Figura 1).

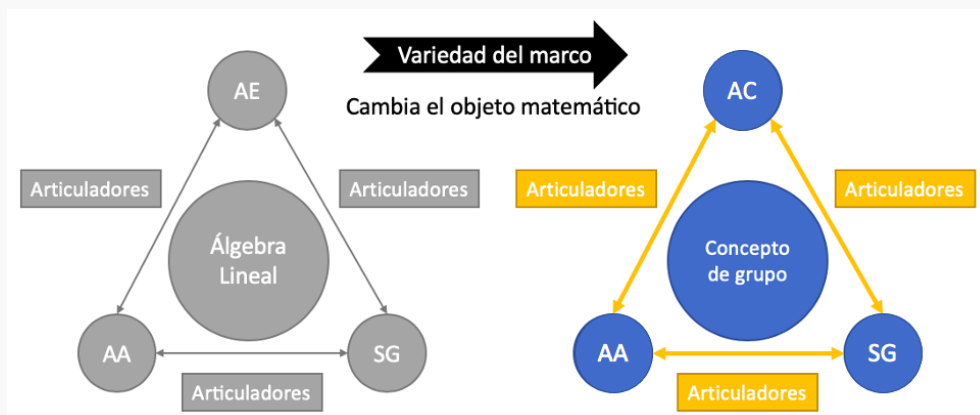


Figura 1: Variedad de los Modos de Pensamiento al concepto de Grupo.

Sostenemos que, para construir esta variedad teórica, se debe tener en consideración no solo la *homologación* de los posibles modos de pensar los Grupos, sino también ser fiel al *método* (como camino a seguir) que desarrolló Sierpinska para caracterizar cada uno de los modos de pensamiento del Álgebra Lineal. Esto último, es el motivo por el cual la investigación se basa en un análisis histórico y epistemológico previo, el cual es el fundamento sobre el cual se sustentaron los tres modos de pensar los grupos. Esta caracterización teórica de los tres modos de pensar los grupos guio la elaboración de las distintas actividades matemáticas que conforman el instrumento de toma de datos. De este modo, el instrumento pretende analizar empíricamente la coexistencia de estos modos de pensar en estudiantes y aprendices de estos temas. Tal postura metodológica permite comprender esta variación del marco no solo como una *homologación* de sus elementos principales (similitud de forma), sino como una *homologación* del proceso de investigación que dio origen a los modos de pensamiento de Sierpinska (similitud de fondo). La figura 1, ilustra un primer momento de esta variedad del marco.

METODOLOGÍA

A partir de la caracterización de los modos de pensar los grupos, se elaboraron distintas situaciones que abordaban la misma estructura algebraica, pero desde diferentes modos de pensar. Este conjunto de situaciones matemáticas conformó un instrumento de toma de datos, el cual fue aplicado a un grupo de estudiantes de Pedagogía en Matemática. Cabe destacar que ninguno de los participantes del estudio había tenido previamente un curso sobre estructuras algebraicas.

En particular, en este trabajo nos centraremos en las situaciones que tenían relación con la estructura de grupo de orden 2 y en las respuestas de un participante de esta investigación. Las situaciones que analizaremos son las siguientes:

Situación 1: Identificar todos los movimientos que dejan *invariante* la figura de una letra T.

Situación 2: Analizar los restos de la división por 2 de la suma de dos enteros. En otras palabras, si $x, y \in \mathbb{Z}$, analizar los restos de la división $(x + y) \div 2$ para los distintos valores de x e y .

Situación 3: Analizar las permutaciones y las composiciones de estas, en un conjunto con 2 elementos.

Luego que los participantes abordaban y respondían cada una de las situaciones se proponía la siguiente situación de síntesis:

Situación 4: Establecer similitudes o diferencias entre las situaciones previamente estudiadas.

Esta última situación 4 tenía como propósito identificar elementos clave en las respuestas de los participantes que nos permitan identificar el reconocimiento de una estructura común. Por otro lado, en cada una de las situaciones 1, 2 y 3 se le solicitaba al participante sintetizar sus hallazgos en una tabla de doble entrada donde resumiera la forma en que estaban operando los elementos de cada situación presentada. Finalmente, es preciso notar que cada una de las situaciones se elaboró desde un determinado modo de pensar los grupos. La situación 1 se construye a partir del modo SG, la situación 2 a partir del modo AA y la situación 3 a partir del modo AC. Sin embargo, es en la situación 4 donde el participante pone en juego los elementos de estas tres situaciones para justificar las similitudes y diferencias entre estas tres situaciones del instrumento.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Uno de los participantes de la investigación, que llamaremos René, desarrolló las tres situaciones iniciales del instrumento según lo esperado en el análisis a priori. Luego, al abordar la situación 4 presenta una respuesta donde expone la similitud de las situaciones basándose en una característica común. Esta similitud la explica del siguiente modo: “En cada tabla se repite y alterna cada característica trabajada”. La Figura 2 presenta la respuesta entregada por René.

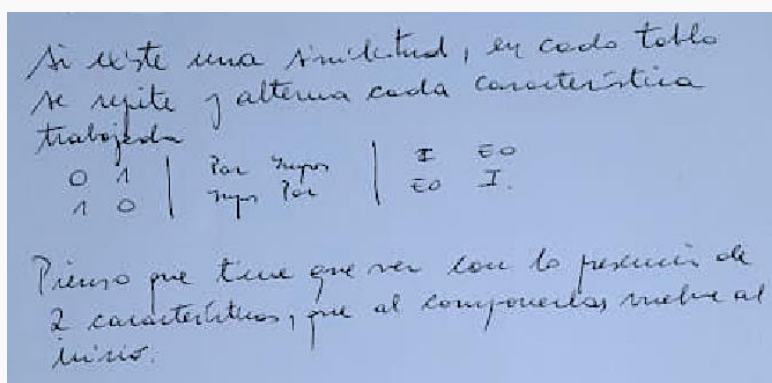


Figura 2: Respuesta de René en la situación 4.

Un aspecto interesante es que en las tablas de doble entrada que expone René a modo de resumen de las situaciones anteriores, no está la de la situación 1. La Figura 3 muestra la tabla de resumen entregada por René en la situación 1.

2-	1	2
Ident.	Ident.	Rotación
Rotación	Rotación	Ident.

Figura 3: Tabla de resumen de René en la situación 1.

Esto nos lleva a pensar que René desarrolló correctamente la situación 1 desde un modo SG. Sin embargo, al presentar la situación 4 sobre las similitudes y diferencias entre estas situaciones, René generaliza esta tabla y la resume con ceros y unos. Todo esto se complementa al entrevistar posteriormente a René, quien al ser consultado nuevamente por esta similitud que observó presenta la siguiente respuesta:

1 R: Es como la ley de los signos. Si yo hago más por más, me va a dar más. Si hago menos con menos, me va a dar más, ¿se entiende? Y si hago más con menos, si alguno de ellos es distinto, me va a dar menos. Tiene como esa onda, de la ley de multiplicación de signos.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Las situaciones estudiadas que conforman el instrumento de toma de datos permitieron poner de relieve elementos que caracterizaban cada uno de los modos de pensar los grupos. Además, las estrategias empleadas en cada situación permitieron a los participantes ir conectando y asociando determinados elementos de una situación con los de otra. Esto tiene directa relación con lo que plantea Ortega (2011), que

el proceso de la *Formación de la noción abstracta de estructura de grupo*, tuvo como raíces históricas: la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría, a partir de las cuales surgió la noción de estructura matemática como resultado de la toma de conciencia de profundos *fenómenos de isomorfismos* (p. 268)

El diseño de cada situación asociada a un determinado modo de pensar facilitó en los participantes la identificación de una estructura común que trascendía a las situaciones, logrando verlas como *la misma situación*.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el programa de Formación de Capital Humano Avanzado de CONICYT, a través del proyecto FONDECYT N°1180468.

Referencias

- Ministerio de Educación de Chile. (2012). Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media. Recuperado el 13 de agosto de 2019 de https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2018/09/Estándares_Media.pdf
- Ortega, V. E. (2011). *Formación de la noción abstracta de estructura algebraica: a partir del estudio histórico-epistemológico de los aportes de Cantor y Dedekind*. (Tesis doctoral). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Santiago de Cali, Colombia.
- Sierpinska, A. (2000). *On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra*. En Dorier, J. L. (Eds.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

PERCEPCIÓN DOCENTE SOBRE LA ARTICULACIÓN DE LA MATEMÁTICA EN LA TRANSICIÓN KÍNDER-PRIMERO BÁSICO. UN ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE EL CURRÍCULUM Y LA PERCEPCIÓN DOCENTE

Itzel Betzabeth Salinas Echeverría

La presente investigación tiene como objetivo descubrir si existe una articulación en el área de matemáticas entre los niveles escolares de kínder y primer año de enseñanza básica en los colegios chilenos. Al momento de realizar esta investigación, se trabajó en base a un marco teórico, donde se exponen las distintas metodologías que se utilizan actualmente en Chile, se explora el currículum de ambos niveles ya mencionados y las percepciones de este. Por tanto, esta investigación es de tipo exploratoria y cualitativa, el instrumento que se ocupa es una entrevista semiestructurada y se aplicó a docente de primeros básico como también a educadoras de párvulo que trabajan en el nivel ya expuesto, esta entrevista tiene como fin tener las percepciones de estos en cuanto, lo que es el currículum y la articulación, junto a esto, tendremos un estudio comparativo donde se realizó un estudio más a fondo de los objetivos de aprendizaje de cada nivel, se tomó en cuenta sus propuestas didácticas y los indicadores de logro. Luego de recopilar toda esta información se realizó el análisis correspondiente, donde se determina si existe esta articulación planteada dentro de los colegios

Abstrac

The objective of this research is to discover if there really is an articulation in the area of mathematics between the school levels of pre-basic kindergarten and first basic education in Chilean schools. At the time of carrying out this research, we worked based on a theoretical framework, where the different methodologies currently used in Chile are exposed, the curriculum of both levels already mentioned and the perceptions of this are explored. Therefore, this research is exploratory and qualitative, the instrument that deals with is a semi-structured interview and was applied to first grade teachers as well as kindergarten educators who work at the level already exposed, this interview aims to have the perceptions of these in terms of, what is the curriculum and the articulation, together with this, we will have a comparative study where a more in-depth study of the learning objectives of each level was carried out, their didactic proposals and indicators were taken into account of achievement. After collecting all this information, the corresponding analysis was carried out, where it is determined if this articulation exists within the schools.

Palabras clave: Metodologías, Articulación, Matemáticas, kínder-Primero básico, Currículum

Introducción

La siguiente investigación aborda la problemática de la articulación entre los niveles de kínder y primero básico en la asignatura de matemáticas. Esto debido que en el año 2013, el nivel preescolar se vuelve obligatorio para el sistema educativo. Esto pues cumple un rol fundamental en la formación de niños y niñas.

Es por esto, que la articulación entre ambos cursos se torna muy importante, ya que la educación debe ser un proceso continuo y los primeros años de educación, son los principales para el

desarrollo de los estudiantes. Para esto es que el currículum en sí juega un rol fundamental en el proceso de articulación, debido a que, en educación preescolar o kínder, se trabaja en base a rincones y juegos, mientras que en primero básico se entra de lleno al sistema escolar establecido como formal, el cual consta de una jerarquía y estructura completamente cuadrada y nueva para el estudiante, que viene de un sistema completamente diferente.

Al no cumplir una articulación correcta en cuanto a la enseñanza de los contenidos, es que nos encontramos con un panorama bastante complejo a la hora de enseñar a los estudiantes, debido a que estos van generando ciertos rechazos por algunas asignaturas como las matemáticas. Para ellos, la matemática es como algo completamente distinto a lo realizado en el curso anterior, puesto que su estructura es muy distinta y se vuelve compleja a la hora de aprenderlas, por lo que se van cerrando cada vez más a aprender algo relacionado con esta asignatura.

En este sentido, es que se espera estudiar la articulación de contenidos, tanto desde la visión de los docentes y educadoras, como así también desde el currículum mismo. El ideal es evidenciar si es que existe un quiebre entre contenidos o cual es la visión de los docentes respecto al tema. En cuanto a las percepciones de las educadoras y docentes, es importante indagar en los estilos de metodologías que estos utilizan a la hora de enseñar, como sienten que son los contenidos enseñados, cuáles son las debilidades que ellos encuentran en el sistema entre otras cosas.

Dentro de esta investigación que como bien describe Coll, (1995) “La importancia crucial de las cuestiones curriculares no sólo en la fase de planificación, sino también en la fase de ejecución las convierte en uno de los pilares fundamentales de cualquier reforma educativa”. Lo que nos da a entender que la ejecución de lo que uno desea enseñar es el principal foco donde nos tenemos que enfocar.

Por otra parte, la articulación curricular según Jadue, (2016) nos señala que “La articulación pedagógica entre la Educación Parvularia y la Pedagogía General Básica ha sido una constante preocupación de los procesos de reforma educacional que ha vivido nuestro país desde el retorno de la democracia”. Luego de esto, podemos entrar a cuestionarnos si realmente existe esta articulación o no entre ambos niveles, lo que se vuelve sumamente importante para el aprendizaje progresivo de los estudiantes.

Con todo lo antes mencionado, se profundizará en la problemática de averiguar si existe o no una articulación entre los niveles de kínder y primero básico en la asignatura de matemática dentro del sistema educativo chileno.

Elementos teóricos

Como elementos teóricos, Villaroel, (2015), Baro (2011) quienes describen la metodología como el conjunto de procedimientos y acciones que existen entre el docente y el estudiante a la hora de enseñar.

También encontramos el discurso matemático escolar, de la mano de Cantoral (Cantoral & et all, 2001) quien nos dice que, para hablar del discurso matemático escolar, debemos comenzar explicando o analizando que es el pensamiento matemático, el cual refiere a la forma de pensar de las personas que se dedican a las matemáticas de forma profesional.

Otro referente teórico es el currículum nacional, desde el cual se trabajan los objetivos de aprendizaje tanto de kínder como primero básico. Tomando en cuenta la cantidad de asignaturas, objetivos de aprendizaje, ejes de aprendizaje entre otros.

Se encuentra también el contexto histórico que hay en cuanto al rol docente, de la mano del portal Memoria Chilena, el cual nos señala que, en cuanto a la historia de la pedagogía en Chile, los líderes y pioneros de profesionalizar la labor de los profesores, fueron Manuel Montt y Domingo Faustino Sarmiento. Los cuales en 1842 crearon la primera Escuela Normal de Perceptores con el objetivo de formar profesores de primaria. Doce años más tarde en 1854, se crea la Escuela Normal de Perceptoras, para que las mujeres también pudieran ejercer la pedagogía.

En cuanto a las percepciones, nos encontramos que Husserl (1907), la percepción es el tipo de vivencia intencional que nos pone directamente en contacto con el mundo. En la percepción tenemos la captación de un objeto sensible que se da “en persona”, es decir, no como un signo, ni como una imagen duplicada del objeto real. La experiencia perceptiva nos da además el objeto mismo, no sus componentes o partes integrantes.

Metodología

En cuanto a las metodologías que se utilizan en este proceso investigativo, tenemos en primera instancia, el análisis curricular desde el cual se investiga si existe o no una coherencia y articulación entre los objetivos de aprendizaje (OA) de ambos niveles, estudiando sus progresiones para luego pasar a comparar por medio de tablas los objetivos que tengan relación entre ambos niveles, tomando en cuenta los OA, las actividades propuestas por el currículum, los materiales propuestos e indicadores de logro de cada objetivo, todo esto desde una mirada enfocada en la matemática.

En segunda instancia, se trabaja con entrevistas semiestructuradas a docentes de kínder y primero básico, tomando en cuenta diversas dimensiones, por medio de la cual se enfoca en su formación, lo que entienden por articulación, metodologías, currículum y sus percepciones sobre los intereses de los estudiantes.

Esto último, será bastante útil ya que por medio de estas entrevistas se podrán evidenciar algunas prácticas de los docentes a la hora de realizar sus clases las cuales serán analizadas desde una mirada basada en la categorización teórica de dME, establecida por la doctora Reyes-Gasperini (2011)⁶.

Resultados

En primer lugar, se realizó el análisis de las entrevistas a docentes, en las cuales se evidencio las diferencia entre las docentes que trabajan con kínder (educadoras) y los docentes que trabajan en primero básico, tanto en la forma de enseñar como así también en el foco que le dan al enseñar matemática dentro de las salas de clases

Es aquí donde entramos a ver un como más a fondo que es la articulación curricular y si es que se ve reflejada dentro de la sala de clases, este contenido se trabajó en base a que si los docentes

⁶ Tabla de caracterización Dialnet-AnalisisDelDiscursoMatematicoEscolarEnLosLibrosDeT-5672145%20(1).pdf

percibían que existía una articulación entre los niveles kínder y primero básico en la escuela donde ellos se desempeñan como docentes. En base a lo anterior, las respuestas entregadas fueron;

E1: Claro que existe, la diferencia es que no en todos los establecimientos se logra, porque termina quedando párvulo aislado en una parte del colegio y básica en la otra.

E2: No se si antes existía, pero al menos este año si la trabajamos, hicimos entrevistas con la profesora de primero básico para contarle la situación del curso y de cada estudiante en particular.

D1: Sí existe, es como el apoyo en conjunto, uno no trabaja individual, trabaja entre, como tomadito de la mano o al menos a mí me pasa con E1, que trabajamos a la par ya que ella tenía en kínder a mi primero.

D2: No creo que en todos los colegios exista, en nuestro colegio si existe y ha tenido un buen resultado, va mucho en la dedicación que le pongan los profes igual porque no es algo tan antiguo.

Por otra parte, se espera que los entrevistados puedan responder a una pregunta general la cual tiene como objetivo ver si ellos están de acuerdo con lo que establece el ministerio para trabajar a lo largo del año en matemáticas. Las respuestas ante esto son las que se adjuntan a continuación.

E1: Antes eran muchos ahora creo que, si bien son bastantes, se pueden trabajar.

E2: si, o sea es pega de nosotros ver como los trabajamos a lo largo del año.

D1: Si bien encuentro que es muy extenso y tiene muchos OA creo que se pueden mezclar.

D2: Creo que esta bien, pero es muy largo.

En esta ocasión todos los entrevistados están de acuerdo con que si bien el currículum tiene bastantes objetivos de aprendizaje, es el deber de los docentes ver como los logran realizar a lo largo del año. El docente es quien debe organizar el año para lograr enseñar la mayor cantidad de OA a sus estudiantes.

Esto juntamente se debe al contexto en el que se realice o se desarrollen las clases, ya que no es lo mismo enseñar en un colegio particular lleno de recursos a trabajar en un colegio municipal lleno de niños vulnerables.

Luego de esto, se pasa a realizar una comparación curricular de los objetivos de aprendizaje, para lo cual la Rae nos señala que comparar es definida como la relación de una idea relacionada con otra⁷. En este punto la comparación que se llevará a cabo es la de los objetivos de aprendizajes establecidos por el ministerio de educación (MINEDUC) tanto de kínder como primero básico en el área de las matemáticas.

Si bien es cierto que todos los objetivos que están en primero básico se relacionan con un objetivo de kínder, podemos observar que hay ciertos objetivos de kínder, que se relacionan con más de uno de primero básico. Esto se puede tomar desde la perspectiva que en kínder el aprendizaje del niño

⁷ Real academia de lengua española <https://dle.rae.es/comparación>

es más general en cambio en primero básico el proceso de enseñanza es más específico lo que produce que el objetivo de aprendizaje sea más preciso a un término en específico.

En cuanto a la comparación de objetivos específicos según la progresión ya estudiada, tenemos a grandes rasgos que en kínder el enfoque que se les da a las actividades es netamente con el uso del material concreto para que el estudiante vaya familiarizándose con las matemáticas. Por otra parte, se trabaja bastante con el movimiento o la expresión del cuerpo de estos, reproduciendo patrones o realizando juegos para darle significado al aprendizaje de los estudiantes.

En cuanto a primero básico, se prioriza más trabajar con guías de trabajo en las cuales se les enseñan los algoritmos por medio de imágenes, pictogramas y representaciones de los ejercicios o problemas matemáticos.

Los indicadores de logro son los que se ven más entrelazados entre ellos ya que, por ejemplo, en kínder uno de los indicadores de logro sugiere que describe las características de las figuras 2D y en primero básico el indicador que prosigue es identificar figuras 2D. Esto nos da a conocer que si se espera que la progresión de contenidos va de forma creciente a medida pasan los cursos.

Conclusiones

En cuanto a las conclusiones, puedo señalar que; el objetivo específico de esta investigación, el cual trataba de descubrir si existía una coherencia entre kínder y primero básico en el área de matemáticas, se cumplió en su totalidad, debido a que los docentes y educadoras explicaron que los últimos años en el colegio donde ellos se desempeñan como docentes esta articulación si se está creando, si bien no está realizada en un 100%, la mayor parte del aprendizaje de sus estudiantes el 2020, trataron de que fuera articulado entre kínder y primero básico para que a los estudiantes no se les formará una confusión muy grande ya que con pandemia y sin articulación hubiera sido imposible que los estudiantes aprendieran.

Bibliografía

- Baro, A. (2011). Metodologías Activas y aprendizaje por descubrimiento. *Innovacion y experiencias educativas*, 40.
- Cantoral, R., & et all. (2001). *Desarrollo del pensamiento matematico* . Monterrey: Trillas.
- Coll, C. (1995). Psicología y Curriculum. Argentina. En C. Coll, *Psicología y Curriculum. Argentina* (pág. 1). Editorial Paidós.
- Husserl. (1907). *Ding und Raum*. Obtenido de Ding und Raum: <https://www.springer.com/de/book/9789024750498>
- Jadue, D. (abril de 2016). *Mineduc*. Obtenido de mineduc: <https://centroestudios.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/100/2017/07/INFORME-FINAL-F911436.pdf>
- Villaroel, P. (2015). Recorrido metodológico en educación inicial. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, núm. 19, 153-160.

PERSPECTIVA DE CORRESPONDENCIA VERSUS PERSPECTIVA DE COVARIACIÓN PARA ENTENDER RELACIONES

Darío A. González

Este reporte contrasta y discute el razonamiento utilizado por dos docentes en formación al conceptualizar relaciones entre cantidades (correspondencia versus covariación). Los docentes trabajaron en una tarea matemática durante una entrevista clínica. Los resultados muestran que ambas perspectivas presentan ventajas y limitaciones, pero covariación parece promover una visión continua del cambio mientras correspondencia promueve una visión discreta del mismo.

Docentes en formación, Funciones, Pensamiento covariacional, Modelamiento

Introducción

El estudio de relaciones entre cantidades es parte íntegra del currículo escolar en diferentes países, incluyendo Chile. Por lo tanto, es fundamental que los profesores puedan entender y representar relaciones entre cantidades antes de que puedan desarrollar dicha capacidad en sus estudiantes. Sin embargo, existen diferentes formas de conceptualizar relaciones, siendo dos de ellas: la perspectiva de *correspondencia* —correspondencia entre los valores de una cantidad y los valores de la otra— y la perspectiva de *covariación* —concebir cómo una cantidad covaría con respecto a otra cantidad. Por ejemplo, la distancia d recorrida por un automóvil que viaja a velocidad constante v por t horas se puede modelar con la relación $d = v \cdot t$. La correspondencia ve $d = v \cdot t$ como una regla que asocia un valor t con un único valor d . Por otro lado, covariación ve $d = v \cdot t$ como una descripción de que d crece a razón constante a medida que t crece (i.e., el cambio en d es siempre v veces el cambio en t).

Ambas perspectivas son importantes para desarrollar el pensamiento algebraico de los estudiantes: correspondencia es fundamental para formalizar el concepto de función y covariación es clave para comprender la razón de cambio (Jacobson, 2014). En este reporte contrastaré las perspectivas de correspondencia y de covariación demostrada por dos docentes en formación (DEFs) mientras trabajan con relaciones entre cantidades en una tarea matemática en el contexto del cambio climático.

Marco Teórico

La perspectiva de correspondencia se basa en la definición formal de función —los elementos de un conjunto están asociados con los elementos de otro conjunto de tal forma que cada elemento del primero se *corresponde* con exactamente un elemento en el segundo. Esta definición privilegia la correspondencia por sobre la variación conjunta de cantidades (Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008; Thompson, 1994) y se transformó en la forma dominante de conceptualizar relaciones en matemáticas al resolver varias limitaciones asociadas al desarrollo histórico del concepto de función (Kleiner, 1989), extendiendo la noción de función para incluir funciones definidas por “ramas”, por curvas dibujadas “libremente”, por reglas arbitrarias (e.g., la cuerda vibrante y la función de Dirichlet), o por correspondencias generales (e.g., el funcional de Volterra).

La perspectiva de correspondencia tiene significado solo para quienes entienden los problemas históricos que ha resuelto, y podría ser una forma menos efectiva para introducir la idea de relaciones entre cantidades que una perspectiva de covariación (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002; Thompson & Carlson, 2017). Esta perspectiva está basada en el constructo teórico de *pensamiento covariacional*, el cual se ha definido como el conjunto de “las actividades cognitivas envueltas en la coordinación dos cantidades variables mientras se pone atención a la forma en la que una cambia en relación a la otra” (Carlson et al., 2002, p. 354). Carlson y sus colegas identificaron cinco actividades cognitivas o acciones mentales y las describieron en orden ascendente de sofisticación (Tabla 1). Luego se analiza la colección completa de acciones mentales mostradas por un estudiante para definir su nivel general de pensamiento covariacional relativo a una tarea matemática específica.

<i>Acción mental</i>	<i>Descripción</i>
AM1	La coordinación del cambio de una cantidad con el cambio en la otra cantidad (e.g., y cambia cuando x cambia).
AM2	La coordinación de la dirección de cambio de una cantidad en relación a la otra cantidad (e.g., y crece cuando x crece).
AM3	La coordinación de cúmulos de cambio en una cantidad con incrementos en la otra cantidad (e.g., y crece en cúmulos decrecientes mientras x crece en incrementos no necesariamente uniformes).
AM4	La coordinación de la razón promedio de cambio de una cantidad con incrementos uniformes en la otra cantidad (e.g., y crece con menor rapidez mientras x crece a incrementos uniformes).
AM5	La coordinación de la razón instantánea de cambio de una cantidad con cambio continuo en la otra cantidad (e.g. y crece con menor rapidez a medida que x crece)

Tabla 1. Acciones mentales del pensamiento covariacional de Carlson et al. (2002)

Metodología

Dos DEFs, Kris y Pam (seudónimos), matriculadas en un programa de pedagogía en matemáticas en una universidad pública del sureste de los Estados Unidos completaron la tarea matemática *Forzamiento por CO₂* (Figura 1b) durante una entrevista clínica que duró aproximadamente 60 minutos. Las entrevistas fueron semiestructuradas y videograbadas para luego ser transcritas y analizadas. Los videos y transcripciones fueron analizados utilizando el método cualitativo conocido como *Framework Analysis* (Ward, Furber, Tierney, & Swallow, 2013).

La tarea *Forzamiento por CO₂* utiliza el concepto conocido como el *presupuesto energético* del planeta, el cual está formado por todos los flujos energéticos entre el sol, la superficie y la atmósfera (Figura 1a), y regula la temperatura promedio de la superficie de la Tierra al funcionar de la siguiente manera. La superficie absorbe el flujo energético solar S , lo que aumenta su temperatura. Al calentarse, la superficie comienza a irradiar energía (infrarroja) hacia la atmósfera (R). Una pequeña

fracción de esta energía escapa al espacio (L), pero la mayoría es absorbida por gases de efecto invernadero en la atmósfera (B) tales como vapor de agua (H_2O), dióxido de carbono (CO_2) o metano (CH_4), los que se miden en partes por millón (ppm) o billón (ppb). Al calentarse, la atmósfera comienza a irradiar parte de la energía (infrarroja) absorbida hacia el espacio (A) y hacia la superficie (A). Todos estos flujos energéticos están medidos en Julios por segundo por metro cuadrado ($J s^{-1} m^{-2}$). Cuando el flujo total de entrada a la superficie es igual al flujo total de salida (i.e., $S + A = R$), se dice que existe *equilibrio radiativo* y la temperatura de la superficie permanece constante. En la tarea (Figura 1b), se describe un escenario en el cual la concentración de CO_2 , C , aumenta, creando una atmósfera con mayor capacidad para absorber energía (B y A crecen). Esto crea un desequilibrio energético o *forzamiento radiativo* ya que el flujo total de entrada a la superficie se vuelve mayor al flujo total de salida (i.e., $S + A > R$), resultando en un aumento de la temperatura. Kris y Pam debían describir y graficar la forma en la que el forzamiento por CO_2 , $F = (S + A) - R$, varía con respecto al aumento en C .

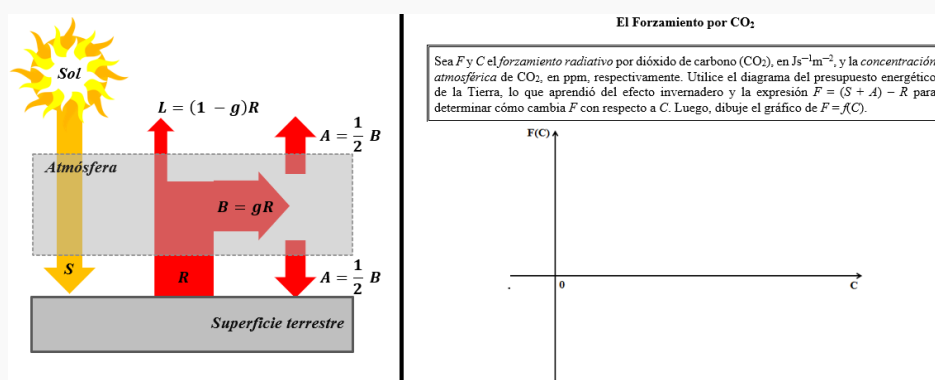


Figura 1. (a) Diagrama del presupuesto energético de la Tierra y (b) la tarea Forzamiento por CO_2

Kris y Pam recibieron un diagrama del presupuesto energético en equilibrio radiativo con los valores iniciales: $S = 240$, $R = 390$, $L = 90$, $B = 300$ y $A = 150$. Con este diagrama, Kris y Pam debían inferir la relación entre F y C , denotada por $F = f(C)$, al examinar la forma en la que el presupuesto energético funciona (se esperaba que ellas notaran que F crece cuando C crece, $F = f(C)$ tiene un valor mínimo y uno máximo o que $F = f(C)$ “desacelera” a medida que crece). Luego, Kris y Pam recibieron el *Simulador Excel*, una hoja de cálculo que retorna el valor de F cuando se le ingresa un valor de C (se esperaba que ellas lo utilizaran para evaluar la precisión sus gráficos de $F = f(C)$). Finalmente, Kris y Pam tuvieron que dibujar el gráfico de la *Sensibilidad de $F = f(C)$* (razón de cambio de $F = f(C)$).

Resultados

Inicialmente, tanto Kris como Pam abordaron la tarea desde una perspectiva de covariación al coordinar el cambio en los flujos energéticos con el cambio en C . Ellas reflexionaron acerca de cómo el aumento en C acentúa la capacidad de la atmósfera para absorber energía, lo que causa que ciertos flujos, como B y A , cambian mientras que otros flujos, como S y R , no cambian, mostrando evidencia de Acción mental 1 (AM1). Luego, ellas utilizaron la expresión $F = (S + A) - R$ para reflexionar acerca de la dirección de cambio de F con respecto a C , notando que cuando C crece también lo hace F (AM2). Por ejemplo, Kris dijo “si B crece, entonces A va a crecer, y S y R van a quedarse igual [pausa]. Entonces [F] va a ser positivo”. He interpretado el uso de “positivo” por parte de Kris para referirse a que F creció desde su valor inicial de cero (equilibrio radiativo).

Como ninguna de ellas quiso aventurar un gráfico de $F = f(C)$, decidí pasar a determinar los valores mínimo y máximo de esta relación, por lo que se les pidió pensar acerca de dos escenarios. Escenario 1 representa una atmósfera que no absorbe energía de la superficie (i.e., $L = R$ y $B = A = 0$), situación que ellas consideraron como el caso $C = 0$ ppm y que corresponde a un valor mínimo de $F = (S + A) - R = (240 + 0) - 390 = -150$. Escenario 2 representa una atmósfera que absorbe toda la energía de la superficie (i.e., $L = 0$, $B = R$ y $A = \frac{1}{2} R$), situación que ellas consideraron como el caso $C = C_M$ ppm (valor arbitrario) y que corresponde a un valor máximo de $F = (S + A) - R = (240 + 195) - 390 = 45$. Kris and Pam crearon los pares $(0, -150)$ y $(C_M, 45)$ y los graficaron como puntos en el plano cartesiano. Kris vaciló al momento de dibujar un gráfico para conectar esos puntos ya que no tenía información suficiente acerca de cómo F estaba creciendo con respecto a C (e.g., “quisiera decir que $[F = f(C)]$ es constante, pero también no creo que sea constante” o “[una línea] implicaría que es una razón de cambio constante entre $[F]$ y C ”). Pam, por otro lado, dibujó una línea recta conectando los puntos, a pesar de que ella misma admitió no saber la forma en la que F estaba creciendo con respecto a C (“No sé qué tan inclinado es el crecimiento ... Sé que $[F = f(C)]$ es positiva. No sé si es lineal, yo solo sé que es positiva”). Tanto Kris como Pam demostraron tener dificultades para pensar covariacionalmente más allá de AM2. Sin embargo, considero que Kris mostró un razonamiento más sofisticado que el de Pam ya que ella demostró entender que la forma del gráfico está estrechamente relacionada con el cómo F está creciendo con respecto a C .

Kris y Pam utilizaron el Simulador Excel para determinar valores adicionales de F para valores de C a intervalos uniformes. Al comparar los incrementos $\Delta_i F$, ellas notaron que no eran iguales y descartaron el modelo lineal, lo cual representa evidencia de AM3 (coordinación de cúmulos de cambio). Kris fue más allá e interpretó la dirección decreciente de los incrementos $\Delta_i F$ como una indicación de que gráfico de $F = f(C)$ debía ser cóncavo y lo dibujó acertadamente a “mano alzada” (Figura 2a) (“así tenemos un salto grande aquí [apunta a $(0, -150)$], y luego los saltos se achican, y achican, y achican [mueve su dedo índice sobre el gráfico]”). También interpretó la variación de $\Delta_i F$ en términos de la razón de cambio (“a medida que C crece en la misma cantidad, F crece a razón decreciente”), demostrando una versión avanzada de AM3. Por su parte, Pam demostró gran dificultad para avanzar después de descartar el modelo lineal, por lo cual decidí ayudarla a utilizar el Simulador para inferir una regla conocida como el doblamiento de CO_2 : F crece 4 unidades cada vez que doblamos C . Pam la utilizó como una regla de correspondencia para crear una colección de cinco pares (C, F) y utilizarlos para dibujar un gráfico acertado de $F = f(C)$ (Figura 2b). Al terminar dijo “¡Oh! Esto se parece a una de esas cosas logarítmicas que odio” sugiriendo que Pam no sabía que forma tendría su gráfico hasta que conectó los puntos. Ella tampoco hizo referencias a la razón de cambio de F con respecto a C .

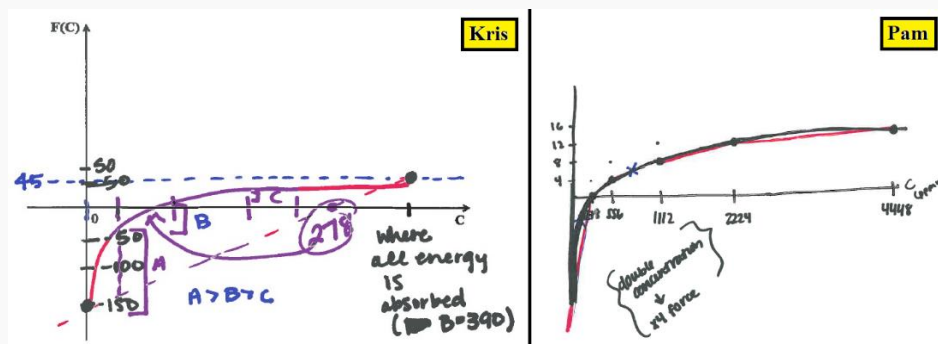


Figura 2. (a) Gráfico de $F = f(C)$ de Kris y (b) gráfico de $F = f(C)$ de Pam

Por último, se le pidió a Kris y Pam que dibujaran un gráfico que represente el nivel de sensibilidad de F a cambios en C a medida que C crece (esta es la razón de cambio de $F = f(C)$ y la denotaré como $s = f'(C)$). Kris interpretó la concavidad de su gráfico de $F = f(C)$ en términos de grados de sensibilidad de F y luego los coordinó con cambio continuo en C (“altamente sensible [es] como que no necesita harto C para hacer que F cambie, entonces no es muy sensible ... la sensibilidad decrece porque [F] es más resistente al cambio en C ”) para dibujar a “mano alzada” un gráfico acertado de $s = f'(C)$ (Figura 3a). Todo lo anterior representa evidencia de AM5. Pam también interpretó la concavidad de su gráfico de $F = f(C)$ en términos de grados de sensibilidad de F pero los coordinó con cúmulos (no uniformes) de cambio en C (“Aquí [apunta al intervalo $[0, 278]$] creció un poquito y la fuerza [sic.] se volvió loca ... Aquí [apunta al intervalo $[278, 556]$] creció otro poquito y la sensibilidad no creció tanto”). Todo esto es evidencia de una versión de AM4 que utiliza intervalos no uniformes. Para dibujar el gráfico de $s = f'(C)$, Pam desarrolló una regla de correspondencia. Primero, determinó la razón promedio de cambio de F para cuatro intervalos en C , obteniendo $4/278$, $4/556$, $4/1112$ y $4/2228$, y luego concluyó que “mi concentración crece al doble y mi sensibilidad baja a la mitad”. Con esta regla, y asumiendo un valor inicial arbitrario s_0 , Pam creó y graficó cuatro pares (C, s) los que utilizó para dibujar un gráfico acertado de $s = f'(C)$ (Figura 3b).

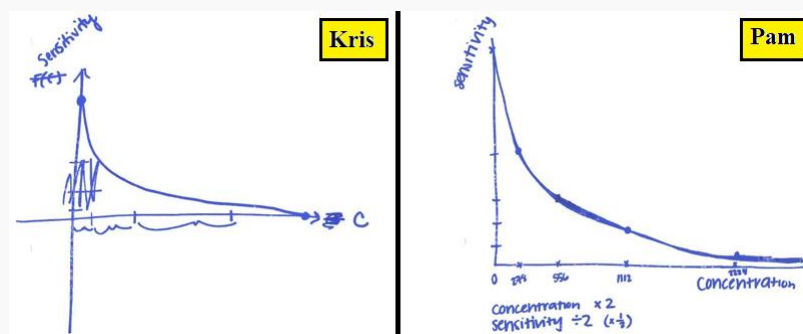


Figura 3. (a) Gráfico de $s = f'(C)$ de Kris y (b) gráfico de $s = f'(C)$ de Pam

Conclusiones

Ambas perspectivas permitieron la conceptualización y representación acertada de la relación $F = f(C)$, incluyendo la descripción de su razón de cambio. Sin embargo, hubo algunas diferencias. Primero, Kris y Pam utilizaron covariación como la forma inicial de abordar y entender la situación, sugiriendo que covariación puede promover el entendimiento de relaciones en contexto. Segundo,

covariación parece promover una conceptualización de $F = f(C)$ como relación continua (Kris), mientras que correspondencia parece promover una conceptualización discreta de la misma (Pam).

Referencias

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378.
- Jacobson, E. (2014). Using covariation reasoning to support mathematical modeling. *The Mathematics Teacher*, 107(7), 515-519.
- Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20(4), 282-300.
- Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 27-42). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education I: Issues in Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ward, D. J., Furber, C., Tierney, S., & Swallow, V. (2013). Using Framework Analysis in nursing research: a worked example. *Journal of Advanced Nursing*, 69(11), 2423-2431.



PRINCIPIOS PARA PROGRAMAS EFECTIVOS DE DESARROLLO PROFESIONAL PARA PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Elisabeth Ramos Rodríguez

Una preocupación constante en la Educación Matemática es el desarrollo profesional del profesor. El propósito de este estudio es proponer principios para programas efectivos de desarrollo profesional para profesores de matemática. Mediante un enfoque cualitativo, se realiza un estudio de tipo documental, explorando fuentes primarias y secundarias que abordan los conceptos principios, características y programas efectivos. Se seleccionaron estudios por su relevancia en el tema la cantidad de citas obtenidas y el tipo de publicación. Se definen ocho principios: el programa se centra en la enseñanza para el aprendizaje y también en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, requiere indagación y reflexión, proporciona vínculos externos, involucra tiempo suficiente, se focaliza en comunidades de práctica, cuenta con recogida de datos del aula y con facilitación de expertos. Estos pueden ser de manifiesto provecho para investigadores, instituciones formadoras y entidades ministeriales en la toma de decisiones en torno al desarrollo profesional del docente de matemáticas.

Desarrollo profesional docente, programa efectivo, profesor de matemática, perfeccionamiento docente, principios

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Los programas de desarrollo profesional docente deben propiciar en este la posibilidad de aumentar sus conocimientos en cuanto a contenidos, al desarrollo de habilidades y a la mejora de prácticas para enseñar matemáticas (Swoder, 2007). Esto incita a contar con programas efectivos de DPD, definidos según la mejora de la práctica del docente participante y del aprendizaje de sus estudiantes (Desimone, & Pak, 2017), elementos claves del DPD. El DPD efectivo involucra a los docentes tanto en su rol de estudiantes como de maestros, y les permite lidiar con las incertidumbres que acompañan a cada función (Darling-Hammong, & McLaughlin, 1995).

Existe una vasta gama de investigaciones que se centran en identificar principios de programas efectivos de DPD (Loucks-Horsley, Stiles y Hewson, 1996; Korthagen, 2006 y Reitzug, 2002). Se observa, sin embargo, dos limitantes en esos estudios para nuestro propósito. Por un lado, no se tiene consenso sobre qué elementos distinguen a los programas efectivos de DPD (Sims, & Fletcher-Wood, 2020); y, por otro, su enfoque es prioritariamente general, es decir, no consideran la especificidad de la matemática. Nos proponemos abordar la problemática descrita formulando principios, para programas de DPD, que emergen desde la perspectiva de su efectividad, identificando elementos que favorecen la mejora en la práctica de sus participantes y el aprendizaje de sus alumnos. Podría pensarse que sugerir que los criterios para determinar la efectividad del DPD varían según el público objetivo o el contexto, implique que la efectividad, como la belleza, esté en el ojo del espectador. Por cierto, la aplicación de los criterios que se encuentren deberá variar de acuerdo al público objetivo y al contexto del sistema educacional en el que se los ponga en práctica. Ello no obsta para buscar elementos basales (principios) que emerjan de estudios internacionales

sobre programas efectivos que se pueden poner en juego en un programa específico, de manera que sirvan de directrices para la toma de decisiones del investigador, el formador, y entidades comunales o ministeriales.

MARCO DE REFERENCIA

El término “desarrollo profesional”, como otros del entorno educativo, no tiene un significado uniforme debido a los diversos agentes que conforman la comunidad científica y educativa; de hecho, a lo largo del tiempo, esta expresión se ha ido asociando a distintos significados. Sin embargo, su presencia se ha hecho más patente en los últimos años (Bautista y Ortega-Ruiz, 2015). Para este estudio, el DPD se concibe como un proceso de aprendizaje y crecimiento continuo y personal, en el cual el docente participa por propia voluntad, adquiriendo gradualmente confianza, autonomía, profundización en el saber a enseñar, con el fin de mejorar sus prácticas de enseñanza y, en consecuencia, el aprendizaje de sus estudiantes (Bautista y Ortega-Ruiz, 2015; Mizwell, 2010). En esta concepción destacan la práctica del profesor y el aprendizaje de sus alumnos, elementos claves, como se verá más adelante, en la caracterización de programas efectivos de DPD.

Muchos estarían de acuerdo en que hay un movimiento hacia un consenso sobre la importancia de experiencias efectivas de DPD, persisten inconsistencias en la forma en que los investigadores y las organizaciones gubernamentales definen la efectividad (InPraxis Group, 2006). En cualquier caso, el estudio de las propuestas formativas de DPD se puede realizar examinando los resultados de los alumnos de estos profesores y/o la docencia que el profesor imparte (Desimone y Pak, 2017). Para observar si esas propuestas apuntan a la efectividad es necesario examinar ambos aspectos, es decir, un programa de DPD efectivo es aquel que cuenta con una relación explícita entre este tanto con la mejora de la práctica del docente como con el aprendizaje de sus alumnos (Desimone y Pak, 2017).

Ahora bien, diversos autores se han dedicado a delimitar cuáles son las características claves de programas efectivos de DPD (Desimone y Pak, 2017; Park, Kim, Moore, & Wyberg 2018). Organizaciones, profesionales individuales e investigadores (por ejemplo, Loucks-Horsley, Stiles y Hewson, 1996) extienden estas características al crear una base de práctica que describe principios de diseño para un desarrollo profesional efectivo. Por tanto, antes de referirnos a los principios es conveniente estudiar características o bien examinar aquellos calificados como tales, pues, la literatura apunta a que, teniendo esas características, se hace más fácil el camino hacia los principios.

METODOLOGÍA

El paradigma de la investigación es cualitativo, de naturaleza holística integradora, ya que se pretende mantener dentro de una visión amplia, pero a la vez precisa sobre principios de programas efectivos de DPD, que le da a este apertura hacia la transdisciplinariedad, la cual, en este caso, se concreta a partir de elementos teóricos de distintos ámbitos.

El trabajo se enmarca en una metodología basada en un estudio documental, apoyado en categorías de análisis que emergen de las características de programas que se consideran efectivos. Se realizó una revisión de fuentes mixtas (primarias y secundarias), en torno a los conceptos: principios, características, programas efectivos, DPD, docentes de matemática. Para ello, considera una revisión comprensiva, a partir de literatura actualizada sobre programas efectivos de DPD, de

manera de concretar un marco conceptual que permitiera establecer principios teóricos en el ámbito de la matemática. Para que un documento fuera seleccionado, debía cumplir con los siguientes criterios: a) incluir al menos cuatro de las cinco palabras claves, b) centrarse en el DPD, c) poseer autor, año y responsable de edición y d) haber sido publicado dentro de los últimos 20 años, o bien ser un referente en el área (un único caso, el de Loucks-Horsley, Stiles y Hewson, 1996).

Luego de un amplio examen, no encontramos ningún documento que haya realizado una revisión de la literatura con el mismo objetivo propuesto en este trabajo, lo que resultó útil para indicar la necesidad de la revisión propuesta. Posteriormente, se seleccionaron alrededor de 110 documentos, de los cuales, al realizar un protocolo de revisión, se consideró finalmente un total de 15, compuesto por libros, revistas y textos de proyectos. Los criterios de selección de estos documentos finales fueron la relevancia en el tema, la cantidad de veces citado y al tipo de publicación. El estudio se realiza siguiendo tres fases principales: fase 1, búsqueda de fuentes primarias y secundarias que abordarán los conceptos principios, características, programas efectivos, DPD, docentes de matemática; fase 2, análisis de la información encontrada y establecimiento de relaciones respecto a características de programas efectivos de DPD en matemática en una primera instancia, luego en torno a los principios, y posteriormente indagar en las relaciones cercanas entre ambos constructos; y, fase 3, detección y desarrollo de principios de programas efectivos de DPD en matemáticas.

ANÁLISIS

Resultado 1, sobre las características de programas efectivos de DPD

Desde la década de los 80 se puede evidenciar esfuerzos por dilucidar características que acompañan a los programas efectivos de DPD. Desimone (2009) y Desimone y Garet (2015) proporcionan una concepción de efectividad que sustenta una lista de cinco características para programas efectivos de DPD. Otras listas de características de programas efectivos de DPD se basan en compilaciones de experiencia y opiniones profesionales, estudios de investigación y consultas de campo. Organizaciones tales como asociaciones profesionales, consorcios, ministerios de educación y distritos escolares, a menudo desarrollan sus propias listas. La lista de cinco características antes mencionada ha sido utilizada por una vasta cantidad de investigaciones en torno a programas efectivos de DPD (Desimone y Pak, 2017). Otros autores la han ampliado (Park, Kim, Moore y Wyberg, 2018). En esta última se puede observar que no hay consenso en lo que respecta a las características que supone un programa efectivo de DPD, como lo han mencionado Sims y Fletcher-Wood (2020). Tampoco hemos encontrado un consenso en el ámbito del DPD en matemática.

Como ya se ha señalado, otras organizaciones, profesionales individuales e investigadores, extienden el concepto de características de efectividad al crear una base de práctica que describe principios de diseño para un programa efectivo (InPraxis Group, 2006), lo que se aborda a continuación.

Resultado 2, sobre principios para programas efectivos de DPD

Como ya se mencionó, existe una variedad de estudios enfocados en identificar principios de programas efectivos de DPD. Algunas listas de principios para programas efectivos de DPD se han desarrollado a través de investigaciones sobre iniciativas de desarrollo profesional y programas basados en escuelas y municipios. La lista de Reitzug (2002) es un ejemplo. Este autor, en un ámbito

general, realiza un estado del arte de la cuestión en los Estados Unidos, para identificar los procesos y actividades que inciden en la mejora de la práctica educativa, y en consecuencia en el logro de los estudiantes. Años más tarde, destaca el estudio de Korthagen, Loughran, y Russell (2006), que, en un ámbito general, a partir del examen de programas de DPD en Holanda, Australia y Canadá, define siete principios para programas efectivos de DPD. Como se observa, no se cuenta con un consenso sobre cuáles son los principios para programas efectivos de DPD. Más aún, no se ha podido evidenciar investigaciones para programas en el ámbito de la matemática, esta cuestión se aborda a continuación.

Resultado 3, sobre principios de desarrollo profesional en matemáticas

Al cruzar las características para programas efectivos de DPD detectadas en el resultado 1 con los principios de programas efectivos de DPD, se obtiene una serie de indicadores de efectividad. Para definir esos principios para el caso matemática se debe intentar responder a la pregunta ¿Qué debemos tener en cuenta en ellos? Ya se ha dicho que no contamos con consenso; aun así, hay elementos que distinguen un programa efectivo en matemática. Para ello, miramos estudios que centraron su atención en programas efectivos en matemática (Akiba y Liang, 2016; Bulger-Tamez, 2017; McCrary, 2011). Finalmente, tras ese estudio identificamos ocho principios de programas efectivos:

Principio 1. Enseñanza para el aprendizaje: se centra en la mejora de las prácticas educativas en pro del aprendizaje de la matemática de los estudiantes.

Principio 2. Foco en el conocimiento: se centra en el conocimiento especializado del profesor de matemática y una visión de para qué enseñar matemática y cuál es la enseñanza efectiva de ella.

Principio 3. Indagación y reflexión: requiere la indagación continua de la propia práctica, promoviendo la reflexión sobre ella, de lo que aprenden los profesores y de cómo llevarlo a su aula.

Principio 4. Vínculos externos: proporciona un equilibrio y coherencia entre la matemática y el currículo, proveyendo de vínculos con otros estamentos del sistema educativo, escuela, universidades y estudiantes/docentes. Los líderes directivos ofrecen apoyo proactivo para el DPD.

Principio 5. Tiempo: involucra un tiempo suficiente para lograr apropiación y cambio (en las creencias, por ejemplo) de los docentes.

Principio 6. Comunidades de práctica: se centra en las comunidades de práctica a través del intercambio de opiniones y trabajo colaborativo, en lugar de maestros individuales.

Principio 7. Recogida de datos del aula: cuenta con instancia de recogida de datos del aula, incluye experimentación en el aula –investigación acción, por ejemplo–.

Principio 8. Facilitación de expertos: considera la participación de expertos (en lo posible que sean parte de los formadores) que ayuden a modelar la enseñanza efectiva de la matemática, valorando la autoridad de la experiencia como fuente de aprendizaje profesional.

CONCLUSIONES

Se ha abordado la problemática relativa a la detección de principios para programas efectivos de DPD en matemáticas. Determinar un consenso sobre dichos principios puede aportar un enfoque

esencial a los objetivos de un programa de DPD y proporciona cimientos para los tipos de investigación sistemática necesarios para construir una base de conocimiento profesional. Por lo demás, concordamos con Guskey (2003), quien afirma que, sin un sentido claro de los objetivos de DPD y la evidencia que mejor refleje el logro de estos, es improbable que mejore la calidad de las experiencias de desarrollo profesional de los educadores. Los principios y las características que influyen en la efectividad del DPD son múltiples y altamente complejos. Puede ser irrazonable, por lo tanto, asumir una sola lista de estos. Aun así, el acordar los criterios para "efectividad" y proporcionar descripciones claras de elementos contextuales importantes, puede garantizar un progreso seguro y constante en nuestros esfuerzos para mejorar la calidad del DPD (Guskey, 2003).

Si bien las descripciones propuestas se basan principalmente en opiniones de expertos y estudios de investigación empíricos, aumentar el reconocimiento de la necesidad de explorar el vínculo entre lo que dice la investigación y cómo se definen los principios y las características de un programa efectivo de DPD, favorecer correlacionar y conectar la literatura con la investigación sobre el aprendizaje y el rendimiento de los estudiantes (InPraxis Group, 2006).

Concebir un programa de DPD efectivo es un ejercicio de creatividad que necesita tener en cuenta el máximo de informaciones sobre el contexto y los participantes (el grado de interés, la cultura del país, las necesidades locales, lo pertinente a la disciplina, en este caso, la matemática, etc.). Tal como nos propusimos, hemos identificado principios que emergen de estudios internacionales sobre programas efectivos, los cuales se pueden implementar en programas específicos, de manera que orienten la toma de decisiones del investigador, del formador, y de entidades comunales o ministeriales.

Esperamos así contribuir en la Educación Matemática con principios de programas efectivos de DPD en la disciplina que permitan a investigadores, formadores e instituciones educativas comprender mejor el tema y proponer programas que repercutan en la mejora de la práctica del docente y en el aprendizaje de sus alumnos, y en relación con sus pares.

Referencias

- Akiba, M., & Liang, G. (2016). Effects of teacher professional learning activities on student achievement growth. *The Journal of Educational Research*, 109(1), 99–110.
- Bulger-Tamez, W. (2017). *A descriptive case study of the mathematically connected communities professional learning model*. México: New Mexico State University.
- Bautista, A., & Ortega-Ruiz, R. (2015). Teacher professional development: International perspectives and approaches. *Psychology, Society and Education*, 7(3), 240-251.
- Darling-Hammond, L., & McLaughlin, M.W. (1995). Policies that support professional development in an era of reform. *Phi Delta Kappan*, 76(8), 597–604.
- Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher*, 38(3), 181–199.
- Desimone, L. M., & Garet, M. S. (2015). Best practices in teachers' professional development in the United States. *Psychology, Society and Education*, 7(3), 252-263.
- Desimone, L. M., & Pak, K. (2017). Instructional coaching as high-quality professional development. *Theory into Practice*, 56(1), 3-12.

- Guskey, T.R. (2003). Analyzing lists of the characteristics of effective professional development to promote visionary leadership. *NASSP Bulletin*, 87(637) 4–19.
- InPraxis Group (2006). *Effective professional development: what the research says*. Alberta, Canada: Alberta Education.
- Korthagen, F., Loughran, J., & Russell, T. (2006). Developing fundamental principles for teacher education programs and practices. *Teaching and Teacher Education*, 22(8), 1020-1041.
- Loucks-Horsley, S., Styles, K., & Hewson, P. (1996). Principles of effective professional development for mathematics and science education: a synthesis of standards. *NISE brief*, 1(1), 1-6.
- McCrary, M. (2011). *Mapping the road to instructional coach effectiveness: exploring the relationship between instructional coaching efficacy, practices, and outcomes* (Doctoral Dissertation). Atlanta, GA: Georgia State University.
- Mizwell, H. (2010). *Why professional development matters. Learning forward*. Oxford, OH: Learning Forward.
- Park, M. S., Kim, Y. R., Moore, T. J., & Wyberg, T. (2018). Professional Development Framework for Secondary Mathematics Teachers. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, 17(10), 127-151.
- Reitzug, U.C. (2002). Professional development. In A. Molnar (Ed.), *School reform proposals: The research evidence* (pp. 325–258). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Sims, S., & Fletcher-Wood, H. (2020). Identifying the characteristics of effective teacher professional development: a critical review. *School Effectiveness and School Improvement*, 32(1), 47-63
- Swoder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.157-223). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.



PROBLEMATIZANDO LAS NIVELACIONES MATEMATICAS EN LA EDUCACION SUPERIOR Y SUS DISCURSOS DEL DEFICIT ESTUDIANTIL

Rafael Gabriel Miranda Molina

Se presentan los resultados de una investigación sobre equidad en la educación superior, que indaga sobre cómo se problematizan procesos formativos que se movilizan en nombre de la “nivelación”, espacio donde ciertos aprendizajes matemáticos son parte de su objeto y estudiantes de perfiles no tradicionales sus principales sujetos. Fundamentando desde los estudios de deserción estadounidenses y sus discursos del déficit, la Universidad enmarca las nivelaciones como parte de un compromiso institucional por compensar las consecuencias de una educación escolar de baja calidad, representando a estudiantes de perfiles no tradicionales como académicamente vulnerables e interviniendo sus trayectorias iniciales en un espacio curricular diferenciado que se debate entre la propedéutica y la remediación. Desde ahí se sugiere la posibilidad de discutir este fenómeno desde estudios críticos de educación matemática, para problematizar este espacio de manera diferente.

Nivelación, problematización, educación superior, discursos del déficit, educación matemática crítica

Introducción

Se presentan los resultados de una investigación sobre políticas de equidad en educación superior (E.S.), donde la matemática es un elemento central de aquello que se busca “nivelar”. Desde de una revisión de políticas y experiencias latinoamericanas, el propósito es mostrar una problematización que, sin una clara influencia teórica de la educación matemática, produce un espacio suplementario el currículum formal, con la matemática como un factor de producción del objeto de nivelación. Siguiendo la metáfora de una ecuación, la problemática que aquí se expone, involucra la representación del estudiantado como variable y el currículum como una de las constantes.

Desde la masificación de la E.S., la equidad surge como una preocupación por la participación de todos los grupos sociales en igualdad de condiciones, implicando la equidad en la permanencia desde la equidad en el acceso (Espinoza, 2015). “Nivelar” suele referir a compensaciones académicas para estudiantes de grupos históricamente marginados de la E.S., y “nivelaciones” refiere a acciones encaminadas a tal propósito (Vargas & Heringer, 2017). Como se mostrará, la posible relación tautológica entre “nivelar” y “nivelaciones” encierra cierta ambigüedad que invisibiliza tensiones relevantes sobre el espacio curricular y el momento de la trayectoria en los que ésta se desarrolla.

Este trabajo es parte de una investigación más amplia, que busca comprender cómo se problematiza la nivelación en la E.S., identificando la matemática como ámbito temático de gran preponderancia y el *déficit* como un concepto estructurante. Así, el objeto de análisis corresponde a un conjunto de experiencias que abordan explícitamente nivelaciones matemáticas en la E.S..

Antecedentes de la política y producción académica

La idea de nivelación es promovida en las políticas de E.S. latinoamericana como vinculada a una diversidad de mecanismos de admisión. Así es posible encontrar prescripciones (más o menos autoritarias) de tres tipos de nivelaciones: procesos propedéuticos o preuniversitarios, para la preparación de exámenes de admisión o ingresos especiales (Guzmán-Valenzuela, 2017); ciclos o cursos iniciales que forman parte del currículum formal (García de Fanelli, 2011) y cursos o apoyos que lo suplementan para ciertos estudiantes como parte de becas o acciones afirmativas (Claro, 2005).

La producción académica sobre E.S. moviliza el término, haciendo eco de estas políticas, aunque también, traduciendo un campo de investigación particular, como son los estudios de deserción estadounidenses (Cabrera et al, 2014). Así, las iniciativas previas o posteriores al ingreso, se traducen de los conceptos *preparatory* y *remedial* (Santelices et al, 2015), mientras que la posición de éstas en el currículum se traduce desde *developmental* y *supplementary* (Donoso-Díaz et al, 2018).

Esta forma de traducir es problemática, en la medida que con el término en español “nivelación” se homogeneizan estos conceptos desde la literatura anglosajona, invisibilizando una tensión (temporal y espacial) sobre su posición relativa en el currículum y, en el fondo, sobre sus posibles destinatarios.

Referentes teóricos: Problematicación de los discursos del déficit

Este trabajo se guía teóricamente por la crítica a los discursos del déficit, que como racionalidad imperante en los estudios de deserción (Cabrera et al, 2014) se caracteriza por representar a estudiantes pertenecientes a grupos históricamente marginados como portadores de menor *capital cultural*. De esta forma, se representa la desventaja social como un factor de riesgo, por medio de perfiles de ingreso, como predictores del potencial fracaso de estudiantes contruidos como vulnerables (O’Shea et al, 2016). Desde esta lógica, (in)equidad en el acceso y la permanencia, se asocian por medio de una misma atribución causal: la menor preparación previa.

La privación cultural es un argumento estructurante de la retórica del déficit (Castro, 2014), que dificulta reconocer el rol del *habitus* institucional en la reproducción de la desigualdad (McKay y Devlin, 2016) y constituye una barrera para la mejora educativa (Cabrera et al, 2014). La crítica a estos discursos discute conceptualizaciones reduccionistas de la formación académica (Smit, 2012) y de la diversidad, que sirven para responsabilizar a estudiantes no tradicionales de condiciones estructurales de desigualdad (O’Shea et al, 2016). De esta forma se les transmite un mensaje institucional, de no estar suficientemente preparados para el espacio al que recién ingresan (Smit, 2012), representándolos como un problema a resolver (Castro, 2014) y traduciendo la desventaja social, por medio de actividades frecuentemente suplementarias, como un riesgo institucional incorporado en los sujetos (O’Shea et al, 2016). Se les construye así como “otros” externos, para tratarlos en un espacio diferente al pensado para los “unos” normales (Graham & Slee, 2008).

Metodología: Estrategias de producción y análisis de información

Esta es una investigación documental, en tanto, proceso sistemático de revisión, análisis e interpretación de documentos, que como artefactos textuales, permiten aproximar prácticas sociales (Coffey, 2014). Indagar sobre cómo se problematiza la nivelación, involucra analizar

evidencias textuales sobre los problemas que con ella se abordan y las relaciones que producen sus objetos, sujetos y lugares particulares (Bacchi y Goodwin, 2016). Al reconocer las políticas como *soluciones*, indagar sobre su problematización parte por identificar los problemas que en ellas se representan.

Como estrategia de producción de información, se consideró la Conferencia Latinoamericana sobre el Abandono en la Educación Superior [CLABES], espacio en el que se han presentado 952 ponencias para compartir buenas prácticas de reducción del abandono. Se seleccionaron aquellas que utilizan el término “nivela...” en título, resumen o palabras clave, y refieren explícitamente a la matemática. Así se construye un corpus de 114 documentos, publicados entre 2011 y 2019 desde 60 instituciones de E.S. en 12 países. 52 de estas ponencias provienen de universidades chilenas.

Como estrategia de análisis de información, se realizó un Análisis Temático Reflexivo, técnica de análisis textual que sirve para interpretar patrones temáticos a partir de conceptos teóricos (Braun & Clarke, 2006). 533 citas y 14 referencias bibliográficas se seleccionaron y codificaron inductivamente, produciendo 28 códigos y 5 categorías que representan patrones temáticos, en tanto, ideas o conceptos recurrentes para interpretar temáticamente desde los referentes teóricos.

En suma, la siguiente descripción temática da cuenta de la forma como la nivelación se problematiza, relación particular entre ciertos objetos, sujetos y lugares que producen este problema/solución.

Resultados: problematizando las nivelaciones matemáticas

CLABES es un espacio para difundir buenas prácticas donde, desde una voz institucional, diversos profesionales comparten su trabajo en representación de su institución. Desde esta posición, un tema relevante es el *compromiso institucional* con la equidad y con diversas obligaciones asociadas a un complejo entramado de políticas e indicadores.

“La Universidad (...) favorece el acceso de estudiantes talentosos que no han tenido la posibilidad de acceder a una educación escolar de calidad y que, por tanto no cumplen los requisitos de la PSU necesarios para ingresar a la educación superior. Dichos puntajes están altamente correlacionados con el nivel socioeconómico de los postulantes, generando una sobre representación de estudiantes de mayores ingresos” (P1318, Chile)

Desde una retórica de justicia social, la Universidad difunde experiencias de calidad con equidad, que representan la educación escolar como una de baja calidad y como causa de la baja preparación del estudiantado no tradicional, que a pesar de no contar con los requisitos necesarios, logra ingresar.

El problema representado en estas experiencias de nivelación, en tanto asunto a corregir o abordar, refiere a una trayectoria educativa de estudiantes no tradicionales, marcada por un pasado de menores oportunidades educacionales que explican una actual preparación insuficiente y, como predictor, permite estimar un probable fracaso y abandono futuro. Se trata de una trayectoria por intervenir.

"La estrategia de los nivelatorios como herramienta para mitigar la deserción precoz en la Universidad, es eficaz frente a la importancia del acompañamiento temprano a los estudiantes quienes ingresan con bajos puntajes académicos" (P1992, Colombia)

En esta problematización el tiempo impone una tensión entre lo *temprano*, como atributo deseable, y lo tardío de lo remedial. Esto implica también una tensión posicional de la nivelación en el currículum formal, que se evidencia en la frecuente etiqueta de "nivel 0" para denotar los aprendizajes que en ella se abordan, a pesar de tratarse de estudiantes ya del nivel 1.

"Una típica modalidad es un curso remedial o de nivelación, en el que generalmente los contenidos están por abajo del curso regular y, de manera más paulatina e introductoria (...) buscan complementar las deficiencias entre los aprendizajes del bachillerato y las demandas de la universidad" (P960, México)

La tensión temporal, entre la propedéutica y la remediación, no solo se representa en el número del nivel, sino también, en la legitimidad de los contenidos preuniversitarios en el currículum universitario. Luego, la posibilidad de diferenciar el nivel inicial para ciertos estudiantes, permitiría conducir al sujeto de nivelación a un espacio distinto (a un *nivel cero*) del currículum prescrito:

"Al ingresar a la nivelación institucional en el 2016, si bien tiene un límite de cupos, permite asignar de manera más eficiente el tipo de nivelación a recibir por parte de los estudiantes, liberando también a quienes muestran tener menores brechas en conocimientos." (P1372, Chile)

A la diferenciación curricular subyace delimitar al sujeto de nivelación, en la medida que ésta se desarrolla en un espacio suplementario, y por tanto, permite *liberar* a ciertos estudiantes no necesariamente vulnerables. La posición curricular corresponde a un efecto de problematizar estos elementos formativos como una necesidad de todo el estudiantado o sólo de ciertos individuos.

"Reconociendo sus vulnerabilidades tanto académicas como sociales, inician una etapa remedial orientada a la nivelación temprana en conceptos asociados a Matemática, que son necesarios para enfrentar con éxito las asignaturas en las que se debe tener dominio de ciertos conocimientos previos de Matemática" (P1369, Chile)

Vulnerabilidad es un atributo constitutivo del sujeto de nivelación, estimando como potenciales destinatarios a estudiantes pertenecientes a grupos históricamente marginados, como pueblos indígenas, en condiciones de pobreza, con discapacidad, etc. La desventaja social, agrupada en la etiqueta de vulnerabilidad social, se enuncia como causa de la menor participación en el espacio universitario, y se traduce luego del ingreso como vulnerabilidad académica.

Como una metáfora sobre "niveles", el objeto de nivelación es descrito con imágenes como brechas (respecto a un estándar requerido) y desniveles (respecto a sus pares), diferenciales vertical y horizontal en los que el estudiante no tradicional se ubica en posición de inferioridad:

"Esta instancia tiene por principal objetivo nivelar contenidos de matemáticas que los alumnos debieran haber estudiado durante la enseñanza media (...) En suma, se refuerzan contenidos para acortar la brecha con sus futuros compañeros..." (P1372, Chile)

Entre brechas y desniveles, los problemas que la nivelación, en tanto, solución, representa, son cualitativamente diferentes, en la medida que la preparación previa es, ya sea, insuficiente con respecto a un nivel requerido; o bien, inferior al nivel esperado de sus pares menos vulnerables.

Desde la descripción en déficit del sujeto, las prácticas de nivelación se organizan en tres funciones interrelacionadas: suplir y reforzar, como acciones referidas a aprendizajes que están ya sea, ausentes o son débiles, y acompañar en un proceso que presupone también déficit personales y psicosociales:

“...se ha evidenciado la incidencia positiva del curso sobre el logro académico puesto que se desarrolla con el fin de suplir las falencias en la disciplina promoviendo, simultáneamente, la asistencia a clase y el acompañamiento a través de tutorías” (P931, Colombia)

Con vacíos a suplir y debilidades a reforzar, las nivelaciones se presentan como soluciones a trayectorias iniciales de estudiantes no tradicionales encaminadas al fracaso. Y desde conceptualizaciones como *primera generación*, son imaginados como *extraños* al espacio universitario, en necesidad de una red de apoyo que les acompañe, fundamentando la necesidad de una intervención integral de un déficit académico y social.

conclusiones y propuestas para la comunidad matemática

Esta síntesis de resultados es una aproximación a problematizar un espacio particular, dominado por discursos del déficit, pero que no puede necesariamente reducirse a la palabra clave. Así, las prácticas que se movilizan en nombre de la “nivelación”, es posible que se movilicen en otros espacios con otros nombres, como inclusión, integración o simplemente aprendizaje. Distinguir entre un concepto y un término de “nivelación” parece necesario, para no generalizar una relación biunívoca.

La ausencia de referentes de la educación matemática no debiera interpretarse como un vacío en el campo, sino como una posible falta de influencia en las políticas revisadas. Aun así es posible estimar su existencia en la construcción de evaluaciones que producen brechas y desniveles. Luego, sería relevante indagar sobre los dispositivos de evaluación que diagnostican, clasifican y conducen a hacia estos espacios diferenciados, la relación entre currículum escolar y superior en la transición, y los fundamentos disciplinares que sirven para construir a ciertos individuos como sujetos de nivelación.

(Re)problematizar las nivelaciones es una posibilidad de desnaturalizar la racionalidad del déficit, por ejemplo, desde estudios sociopolíticos de educación matemática (Valero, 2017), o análisis críticos sobre la fabricación sujetos de bajo rendimiento (Andrade-Molina, 2018). Posibilidad necesaria para indagar sobre el rol de la matemática en la reproducción de la desigualdad en la transición a la E.S.

Referencias

- Andrade Molina, M. (2018). OECD's dominant discourses of the low-performer and the production of subjects. *Reflexão e Ação*, 26(2), 09–26. <https://doi.org/10.17058/rea.v26i2.11731>

- Bacchi, C., y Goodwin, S. (2016). *Poststructural policy analysis: A guide to practice*. Sidney: Springer
- Cabrera, A. F., Pérez, P., & López, L. (2014). Evolución de perspectivas en el estudio de la retención universitaria en los EEUU: Bases conceptuales y puntos de inflexión. En P. Figuera (Ed.), *Persistir con éxito en la universidad: de la investigación a la acción*. Barcelona: Laerte.
- Claro, M. (2005). *Acción afirmativa - Hacia democracias inclusivas*. Santiago: Fundación Equitas.
- Coffey, A. (2014). Analysing documents. En: Flick, U. (Ed.), *The Sage Handbook of Qualitative Data Analysis*. Sage, London.
- Donoso-Díaz, S., Iturrieta, T. N., & Traverso, G. D. (2018). Sistemas de Alerta Temprana para estudiantes en riesgo de abandono de la Educación Superior. Ensaio: *Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, 26(100), 944–967. <https://doi.org/10.1590/s0104-40362018002601494>
- Espinoza, O. (2015). Equidad en el sistema de educación superior en Chile desde la perspectiva de los resultados. *Revista Propuesta Educativa*, 43(24), 46-64.
- Graham, L. J., & Slee, R. (2008). An illusory interiority: Interrogating the discourse/s of inclusion. *Educational Philosophy and Theory*, 40(2), 277–293. <https://doi.org/10.1111/j.1469-5812.2007.00331.x>
- Guzmán-Valenzuela, C. (2017). Tendencias globales en educación superior y su impacto en América Latina: Desafíos pendientes. *Lenguas Modernas*, 50(50), 15-32.
- O'Shea, S., Lysaght, P., Roberts, J., & Harwood, V. (2016). Shifting the blame in higher education – social inclusion and deficit discourses. *Higher Education Research & Development*, 35(2), 322–336. <https://doi.org/10.1080/07294360.2015.1087388>
- Santelices, M.V., Galleguillos, P., y Catalán, X. (2015). El acceso y la transición a la universidad en Chile. En A. Bernasconi (Ed.), *La educación superior de Chile: transformación, desarrollo y crisis*. Santiago, Chile: Ediciones UC.
- Smit, R. (2012). Towards a clearer understanding of student disadvantage in higher education: Problematising deficit thinking. *Higher Education Research and Development*, 31(3), 369–380. <https://doi.org/10.1080/07294360.2011.634383>
- Valero, P. (2017). El deseo de acceso y equidad en la educación matemática. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 97. <https://doi.org/10.17227/01203916.73rce97.126>
- Vargas, H., & Heringer, R. (2017). Políticas de permanência no ensino superior público em perspectiva comparada: Argentina, Brasil e Chile. *Archivos Analíticos de Políticas Educativas*, 25(72). <http://dx.doi.org/10.14507/epaa.25.2799>

PROPUESTA Y PERCEPCIÓN ESTUDIANTIL DE UN MODELO DE EVALUACIÓN INTEGRADO DE DESEMPEÑO PARA UN CURSO DE ÁLGEBRA EN CARRERAS DE LA INGENIERÍA

Carmen Soledad Yáñez Arriagada

La adaptación a nuevos modelos educativos ha impulsado la adopción de Modelos de Evaluación Integrada de Desempeño (EID) por parte de las universidades. Sin embargo, aún son escasas las guías con directrices, pautas y rúbricas específicas para los docentes de distintas disciplinas. En este trabajo se presentan los resultados de un modelo de EID implementado en un curso de álgebra para carreras de ingenierías durante el primer semestre del 2020. Para la evaluación de este modelo se elaboró una encuesta en la que participaron 96 estudiantes. El instrumento constó con 14 enunciados que consideraron cuatro dimensiones: Aprendizaje integral, Evaluación, Proceso, y Preferencia (entre el modelo de contenidos o el integral). Las tres primeras dimensiones obtuvieron más de un 56% de valoración positiva de acuerdo con una escala de Likert (“De Acuerdo” y “Muy de Acuerdo”), mientras que la Preferencia fue la que obtuvo menor valoración, con un 47% entre ambos puntajes. Esto último puede deberse a que el curso se impartió de modo online, debido a las restricciones por la pandemia de COVID-19, y plantea interrogantes sobre la idoneidad del modelo en este contexto. Futuros estudios deberían replicar el modelo en la modalidad presencial. Se concluye que el modelo es una alternativa factible de implementar y que es bien valorada por los estudiantes. Los resultados de este estudio son un aporte para contribuir al diseño de orientaciones para la implementación de evaluaciones integradas de desempeño basados en los principios de la evaluación auténtica y en resultados de investigación empírica.

Palabras clave: Evaluación integrada de desempeño; evaluación auténtica; modelo educativo

INTRODUCCIÓN

En Chile, la diversificación de la matrícula y los nuevos marcos regulatorios para facilitar el acceso de estudiantes de condición socioeconómica vulnerable a la educación superior han impulsado cambios en los modelos educativos. Uno de estos cambios es la formación basada en el desarrollo de competencias. De este modo, las universidades buscan alinear su curriculum a los estándares internacionales, en los que se privilegia el desarrollo integral del alumno.

En su Proyecto de Desarrollo Institucional (PDI), 2005-2010, la Universidad Católica de Temuco (UC Temuco) optó por incorporar el modelo educativo basado en competencias ⁽¹⁾, lo cual trajo consigo diversos desafíos curriculares y pedagógicos, uno de ellos fue la implementación de procesos de evaluación de competencias. Aunque se ha avanzado en lo macro-curricular donde los itinerarios formativos están alineados, y en lo micro-curricular, con la incorporación de nuevas metodologías activas, aún se está en la búsqueda de diseños de evaluación pertinentes. Así, se han definido dos tipos de evaluaciones: evaluaciones focalizadas de contenido y evaluaciones integradas de desempeño (EID), compleja o auténtica ⁽²⁾. Estas últimas son las que han traído mayor controversia para su planificación e implementación. Por eso es necesario determinar cuál es la valoración que los estudiantes tienen de las EID. El objetivo de este trabajo fue analizar los resultados de la

implementación de una EID en un curso de matemáticas de primer año de ingenierías civiles, en base a la valoración de los propios estudiantes, y discutir sus implicancias.

DESARROLLO

Para aproximarse al concepto de EID primero es necesario referirse a la evaluación auténtica, ya que ambas comparten características que en ciertos escenarios las hacen indistinguibles.

La evaluación auténtica es aquella centrada en las habilidades para un modelo real, para enfrentar de forma activa la construcción de respuestas creativas e integrar una variedad de habilidades ⁽³⁾.

En las últimas dos décadas, los modelos educativos de las universidades chilenas han transitado paulatinamente hacia modelos basados en el desarrollo de competencias, los que declaran explícitamente el trabajo con competencias disciplinares o específicas de los diferentes programas de estudio y competencias genéricas o transversales. Esto ha permitido instaurar un enfoque de aprendizaje centrado en el estudiante como un aspecto central del quehacer formativo, permitiendo la implementación de estrategias pedagógicas que respondan a este principio.

La competencia puede ser concebida como el conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes que orientan la actuación de un individuo y que les permite desenvolverse apropiadamente en un determinado contexto ⁽⁴⁾, con un repertorio de recursos como conocimientos, procedimientos y actitudes ⁽⁵⁾. La definición de la UC Temuco establece que son un repertorio de comportamientos socioafectivos y habilidades cognoscitivas, psicológicas, sensoriales y motoras que permiten desempeñarse en un determinado rol dentro de una acción o una tarea ⁽¹⁾.

La complejidad y cambios que implica el transitar desde la evaluación tradicional hacia la evaluación de competencias revisten uno de los grandes desafíos que enfrentan hoy las universidades chilenas. Considerando la visión socioconstructivista del concepto, hay algunos acuerdos que permitan enmarcar el presente trabajo. De acuerdo con Carrera ⁽⁶⁾, un modelo educativo basado en el desarrollo de competencias en el contexto de la educación superior implica que el quehacer formativo se oriente a que el estudiante desarrolle (el saber) actuar/hacer en diversos contextos profesionalizantes y cotidianos movilizando una serie de recursos como conocimientos y actitudes. Biggs y Tang ⁽⁷⁾ mencionan la importancia de un diseño de evaluación alineado constructivamente para asegurar que lo que se evalúa corresponda a los resultados de aprendizaje (RA) declarados.

Este trabajo propone un modelo de EID para un curso de matemática de Ingeniería junto con la percepción que tuvieron los estudiantes sobre el mismo. El modelo propuesto se basa en los principios de la evaluación auténtica, que a su vez da cuenta de los modelos educativos que se basan en el desarrollo de competencias. Es decir, se procuró cumplir con los principios de la evaluación auténtica tales como su relación a contextos, en donde el docente asume un rol facilitador y el estudiante un rol activo, basada en criterios y con énfasis en los procesos y en la retroalimentación. Además se consideraron los diferentes tipos de competencias declarados en los currículos de los programas de educación terciaria. (Figura 1).

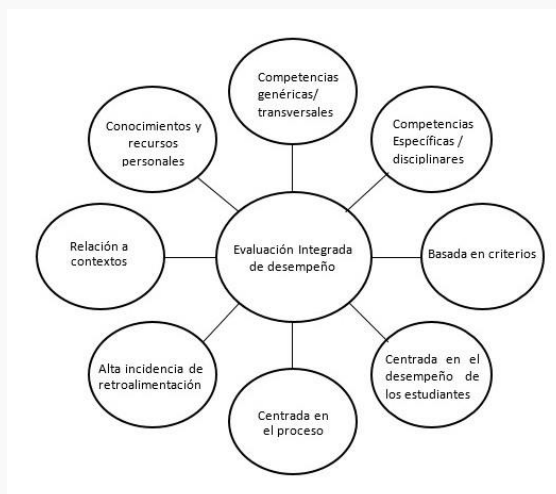


Figura 1 Modelo propuesto para la evaluación integrada de desempeños.

METODOLOGÍA

Este trabajo se enmarcó en los parámetros de la investigación basada en el diseño ⁽⁸⁾. De acuerdo al Modelo Educativo por competencias, se implementó un modelo de evaluación integrada para el curso MAT 1115 Álgebra en Contexto, para las carreras de Ingenierías Civiles (Industrial, Ambiental, Geológica, Obras civiles y plan común de la Facultad de Ingeniería) de la UCT durante el primer semestre del año 2020. Debido a la situación suscitada por el Covid-19, el curso se impartió en la modalidad de docencia a distancia a través de la plataforma Educa (Moodle) y las evaluaciones fueron ajustadas en este formato. Al finalizar el curso, se evaluó la percepción de los estudiantes a través de una encuesta.

Participantes y procedimiento

El curso fue dictado en cuatro secciones, cada una con un docente responsable y dos ayudantes de apoyo para las cuatro secciones. Un ayudante apoyó los aspectos tecnológicos, para poblar la plataforma EDUCA y activar las actividades en línea, y el otro colaboró en la construcción de material (desarrollo de guías, búsqueda de link ejercicios resueltos y sugerencias de problemas para las evaluaciones focalizadas). Al finalizar el curso, se envió una encuesta de evaluación a 167 estudiantes matriculados entre el 2018 y el 2020. Todos los estudiantes contaron con soporte tecnológico de la plataforma EDUCA (Moodle).

Instrumento para evaluación de la percepción de los estudiantes

Se desarrolló un instrumento original de 14 enunciados para valorar la satisfacción de los estudiantes respecto de las evaluaciones integradas de desempeño del curso de Álgebra en Contexto. Para ello se usó una escala tipo Likert, desde 1, “Muy en desacuerdo” a 5, “Muy de acuerdo”. Para los enunciados se consideraron cuatro dimensiones: Aprendizaje integral, Evaluación, Proceso, y Preferencia (en relación con las evaluaciones integradas de desempeño y evaluaciones de contenidos). El instrumento presentó una consistencia interna de los ítems cuantitativos de 0.926 (Alpha de Cronbach).

Recolección de datos y procedimientos de análisis

Al término del curso se aplicó la encuesta a través de un formulario electrónico. Los ítems cuantitativos de la encuesta fueron analizados mediante estadística descriptiva con el software SPSS v.25.

Las respuestas a la pregunta abierta fueron analizadas mediante análisis de contenidos. Se codificaron los temas similares entre las diferentes respuestas de los estudiantes y se crearon dimensiones globales.

RESULTADOS

Descripción de la muestra

Del universo de 167 estudiantes que tomaron el curso, un 57% (96) de ellos respondió a la encuesta enviada, el 91% de ellos son estudiantes ingresados el 2020 y que cursaron el curso por primera vez. En cuanto a la distribución por sexo, la muestra se compuso de 64 hombres y 32 mujeres. Lo que se corresponde a su vez con la menor cantidad de matrícula de estudiantes mujeres. La edad promedio de los estudiantes fue de $19 \pm 2,5$ (DE) años.

Evaluación del modelo de evaluación integrada de aprendizaje

Los resultados de la encuesta se analizaron descriptivamente según dimensiones y preguntas. Los datos muestran que los estudiantes tienen un alto grado de satisfacción con el modelo, que se refleja en el porcentaje mayoritario que manifestó estar “De acuerdo” (sobre un 44%) con las afirmaciones positivas para casi cada dimensión evaluada (Tabla 3), las que sumadas a los porcentajes “Muy de acuerdo” varían entre un 56% a un 63% de aprobación. La única dimensión que se sale de estos parámetros es la de Preferencia, que tiene casi igual número de respuestas “ni en desacuerdo ni en acuerdo” (30%) y “de acuerdo” (32%), y cuya aprobación llega a un 47%.

DISCUSIÓN

En términos globales, el modelo presentado en este trabajo es bien valorado por los estudiantes y cumple con las características derivadas de la evaluación auténtica ^(9,10,11–13) y de los requerimientos de los modelos basados en el desarrollo por competencias ^(4,14).

La propuesta de evaluación integrada de desempeño que se presenta en esta experiencia tiene ejes centrales que permiten su operacionalización. Al momento de implementarla en un curso inicial de matemática podemos comprobar que efectivamente estas características, en general, son bien valoradas por los estudiantes, lo que contribuye a su validación en el contexto del estudio.

Por una parte, los estudiantes reconocen y valoran positivamente la evaluación integrada de desempeño en cuanto a que involucra una serie de aspectos (competencias) disciplinares, genéricos y contextuales que hacen que este sea un proceso holístico y relacionado a situaciones de la vida cotidiana y profesional, tal como lo definen Vallejo y Molina ⁽¹⁰⁾. Esto no sólo contribuye al éxito de los estudiantes en sus respectivos cursos, sino que los orienta en cuanto a su futuro quehacer profesional ^(11–13) y desarrolla capacidades y competencias que les permitirán desenvolverse exitosamente en otras instancias formativas.

Los estudiantes valoran positivamente la consideración de sus avances para la calificación final, la claridad de las instrucciones y la retroalimentación entregada. En este sentido, se observa que la EID contribuye a que el curso tenga una coherencia interna (alineamiento constructivo) y que fortalece el vínculo entre el proceso de aprendizaje y la evaluación y, por lo tanto, con los resultados de aprendizaje del curso, en línea con lo señalado por Biggs y Tang ⁽⁷⁾.

Además el contexto especial (educación a distancia) brinda una oportunidad para luego comparar resultados entre evaluaciones en línea y presenciales, y dilucidar si las preferencias de los estudiantes se deben al modelo (evaluación de contenidos/ evaluación integrada) o a la modalidad (presencial/a distancia).

CONCLUSIONES

El modelo EID presentado en este trabajo fue bien valorado por los estudiantes. Casi todas las dimensiones evaluadas contaron una amplia aceptación por la mayoría de ellos. Sin embargo, el especial contexto en que fue implementado, podría influir en algunos resultados, tanto positivos (valoración de la comodidad de la plataforma) como negativos (menor disponibilidad para la interacción directa con profesores y compañeros). Por ello, es necesario replicar esta investigación cuando se retorne a clases presenciales. Los resultados serán un aporte para generar un manual orientador para docentes de educación superior que necesiten transitar hacia la evaluación integrada de competencias genéricas y específicas

REFERENCIAS

- Dirección General de Docencia. “Modelo Educativo UC Temuco. Principios y Lineamientos”. 2008. Fecha de consulta 11 de diciembre del 2020. URL: [http://www.cedid.uct.cl/img/info8/ModeloEducativoUCT\(1\)_3_20140829222942.pdf](http://www.cedid.uct.cl/img/info8/ModeloEducativoUCT(1)_3_20140829222942.pdf).
- Dirección General de Docencia. “Orientaciones para la renovación curricular. Etapa 5. Elaboración de Guías de Aprendizaje”. 2014. Fecha de consulta 11 de diciembre del 2020. URL: [http://www.cedid.uct.cl/img/info8/renov_curric_5\(1\)_3_20140830164216.pdf](http://www.cedid.uct.cl/img/info8/renov_curric_5(1)_3_20140830164216.pdf).
- L. Norton. “Assessing Student Learning”. En: Marshall S, Fry H, Steve K, editors. A Handbook for Teaching and Learning in Higher Education Enhancing Academic Practice. 4th ed. London: Routledge. 2009.
- P. Perrenoud. “Construir competencias desde la escuela”. JC Sáez. Santiago, Chile. 2008.
- G. Le Boterf. “Ingeniería de las competencias”. Gestión 2000. Barcelona, España. 2001
- C. Carrera. “Modelo pedagógico para el desarrollo de competencias en educación superior”. IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH. Vol.1. N°1, pp. 57–66. 2010
- J. Biggs and C. Tang. “Teaching for quality learning at university: What the student does.” McGraw-hill Education. New York, USA. 2011.
- “Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry”. Educational Resercher. Vol. 32. N°1, pp. 5–8. Jan 2003. DOI: 10.3102/0013189X032001005
- P. Ahumada. “La evaluación auténtica”. Perspectiva Educacional. N° 45, pp. 11–24. 2005
- M. Vallejo and J. Molina. “La evaluación auténtica de los procesos educativos”. Revista Iberoamericana de Educación. N° 64, pp. 11–25. 2014

- S. Kearney. "Improving engagement: the use of 'Authentic self-and peer-assessment for learning' to enhance the student learning experience". *Assessment and Evaluation in Higher Education*. Vol. 38. N° 7, pp. 875–91. Nov 2013. DOI: 10.1080/02602938.2012.751963
- J. Escudero. "Las competencias profesionales y la formación universitaria: posibilidades y riesgos". *REDU Revista de Docencia Universitaria*. Vol 6. N° 2, pp.1. 2008.
- J. Saye. "Authentic Pedagogy: Its Presence in Social Studies Classrooms and Relationship to Student Performance on State-Mandated Tests". *Theory and Research in Social Education*. Vol. 41. N°1, pp.89–132. 2013 Jan DOI: 10.1080/00933104.2013.756785
- S. Tobón. "Formación basada en competencias: Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica". Ecoe ediciones. Bogotá, Colombia. 2005

RELACIÓN FAMILIA-ESCUELA: ACOMPAÑANDO EL APRENDIZAJE INTEGRAL

Leslie Artigas, Constanza Barros, Daniela Cerda, Constanza González, Yessenia Guajardo y Camila Mardones

Mucho se ha investigado acerca de la interacción que se establece al interior de la escuela y de la importancia que se le atribuye al acompañamiento efectivo que ofrecen las familias con sus estudiantes, para poder hablar así de eficacia escolar e integral. Pero, a raíz de la necesidad educativa de acompañamiento familiar y cómo esta puede afectar en el proceso de aprendizaje de los/as estudiantes, que surge al interior de los establecimientos, es que el proyecto “Mapadres” se hace cargo de entregar herramientas educativas a las familias. En una primera etapa, orientado en el área de: lenguaje y comunicación y matemáticas.

Palabras claves: Relación familia-escuela, aprendizaje efectivo, acompañamiento familiar.

Contextualización

Durante el desarrollo del año 2020 se ha presentado un sin fin de desafíos en distintos niveles, pero principalmente a nivel educativo y de salud. El cambio de escenario del aula a la escuela ha puesto en jaque a todas las esferas que rodean el proceso de aprendizaje de los/as estudiantes. En este marco la relación familia-escuela toma aún mayor importancia, ya que la opción de trabajo que se ha tomado para continuar con el año escolar han sido las clases online y guías de trabajo, por lo tanto, los/as tutores han tenido que tomar un rol protagónico en el apoyo del aprendizaje de de sus hijos/as.

Es en este escenario, donde el proyecto “Mapadres” pretende intervenir apoyando a los/as adultos responsables en su rol irremplazable en el proceso de aprendizaje de los/as estudiantes. El acompañamiento se realiza en base al contexto de cada familia, las propias necesidades educativas de estas, además de las expectativas de los actores que participan en torno al proceso de aprendizaje

Problemáticas y antecedentes

Según los datos entregados por la UNICEF (Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia), en Chile un 24.2% de niños/as entre 0 y 17 años se encuentran en situación de pobreza y vulnerabilidad, del cual un 4.4% se hace cargo el SENAME (Servicio Nacional de Menores). Estos porcentajes representan el alto índice de disparidad en los que se encuentran niños y niñas, siendo las variables tanto económicas, políticas, sociales y culturales las que responden a esta irregularidad

Es en este sentido que Lee y Burkham (2000) señalan que, los y las alumnas que viven en situación vulnerable son más propensas a manifestar riesgo académico. Es sabido que la escuela no tiene poder sobre los aspectos que desencadenan ese riesgo social (clase social, grupo étnico, nivel cultural de la familia), pero sí puede tener control sobre los desencadenantes del riesgo académico (En Prieto, 2015, p. 112). Es por lo mismo, que se quiere desarrollar el proyecto, proponiendo fortalecer el desarrollo escolar de niños y niñas en situación de vulnerabilidad a través de otorgar apoyo a padres, madres, apoderados y adultos acompañantes en dicho proceso.

Dentro del estudio realizado por Cornejo (2007) de Eficacia Escolar, son tres las variables que afectan el aprendizaje de un estudiante: En primer lugar, el hogar y entorno familiar; en segundo lugar, la variable de comunidad de origen de los estudiantes; y en tercer lugar, la escuela. En cuanto al punto anterior El MINEDUC (2017) divide en dos núcleos el desarrollo de los estudiantes, siendo así la familia la encargada de entregar valores y actitudes y por otro lado, la escuela como institución encargada de educar. En base a esto se sostiene que el siguiente proyecto ayudará a fortalecer el enlace de familia-escuela.

Para lograr el enlace familia escuela se trabajará con el siguiente objetivo general diseñar, implementar y evaluar estrategias para el acompañamiento íntegro de las familias en el proceso de aprendizaje de sus hijos en bases a las dinámicas propias que requieren las diferentes vías del aprendizaje. Este objetivo general se subdivide en tres objetivos específicos enfocados en el diagnóstico, diseño, implementación y evaluación de las estrategias.

Metodología

El proyecto fue implementado en un total de siete familias, en donde la comunicación fue principalmente a través de mensajes de Whatsapp, videollamadas y cápsulas. En este grupo de familias, el acompañamiento estuvo orientado en las área de lenguaje y comunicación y matemáticas.

Debido a las problemáticas que se presentaron a nivel nacional a raíz de la crisis sanitaria por covid-19, se dió la necesidad de apoyar a las familias en el proceso de aprendizaje de sus hijos y es bajo este contexto en el cual se creó el proyecto mapadres, mediante una investigación exploratoria (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), la cual hizo presente el vínculo necesario que debe existir entre la familia y la escuela para fortalecer el aprendizaje y bienestar de los estudiantes.

Con fines prácticos, haremos un análisis sobre la metodología que se aplicó en una de las familias que presentó problemáticas en el área de matemáticas. Esta se centró en el conjunto de los números decimales relacionándose con el valor posicional de estos y con la aplicación de la operatorias (suma, resta, multiplicación y división), ante este escenario se reunieron los antecedentes necesarios con la familia, se analizó el curriculum correspondiente al curso en el que se encontraba el estudiante (5° Básico) y se definió el carácter de la cápsula siendo esta informativa y explicativa juntos con algunos ejercicios para reforzar el aprendizaje.

Con la cápsula entregada a la familia se lograron desarrollar los aprendizajes esperados por el curriculum nacional definido en el objetivo de aprendizaje 12 "Resolver adiciones y sustracciones de decimales, empleando el valor posicional hasta la milésima" (agregar cita del curriculum).y las expectativas del padre enfocadas en el manejo de la frustración que le causaban las matemáticas a su hijo.

Análisis

Los resultados obtenidos con la ayuda que brindó Mapadres mediante las cápsulas al apoderado y su familia fueron beneficiosos, ya que se logró cumplir con todos los objetivos propuestos inicialmente. En primer lugar, con el apoderado se pudo traspasar herramientas didácticas y pedagógicas para que él pudiese trabajarlas con su hijo a diario en su hogar, logrando así por una parte fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje tan complicado que estaban viviendo en ese

momento y por otra nutrirse el mismo de conocimientos que estaban olvidados o débiles en su propia formación. En segundo lugar, enfocando este análisis a las matemáticas, como proyecto se logró reforzar el área de los decimales y sus diferentes operaciones, ya que la cápsula enviada fue realizada pensando en el apoderado y sus habilidades, al ser informativa se logró, que él pudiese entender con mayor simplicidad el saber en el cual se estaba trabajando, en este caso primeramente formas de aprender el valor posicional por ejemplo el ábaco o el cubo multibase, para que luego pudiesen trabajar las adiciones, sustracciones y divisiones propias de dicha asignatura.

Por otra parte, se pudo observar que, los resultados fueron apropiados a las tareas realizadas, alcanzando una superación en el estudiante al momento de realizar sus actividades dadas por el colegio. Todo esto llevó a alivianar el peso que tenía el apoderado, supliendo su frustración por no poder explicarle a su hijo de forma que él entendiera por satisfacción al ver que él podía lograr que su niño aprendiera con su ayuda. También, los efectos que causaron la metodología de trabajo, permitió que el proyecto pudiese agarrar los pro y los contra, debido a que fue un trabajo completo con este padre de familia, donde hubo conversación tanto académica como personal, aprendizaje de contenidos propios de la enseñanza básica y lo más importante formar la relación apoderado, estudiante y educación, lo cual evidenció que el camino que está agarrando el proyecto Mapadres va bien encaminado, si bien hay cosas que mejorar, logra cumplir con todo lo que propone.

Conclusión

El proyecto mapadres tenía como objetivo principal diseñar, implementar y evaluar estrategias para el acompañamiento íntegro de las familias en el proceso de aprendizaje de sus hijos en bases a las dinámicas propias que requieren las diferentes vías del aprendizaje. Este objetivo fue logrado a partir del diseño e implementación de diversas cápsulas explicativas hacia la familia, las que después contaban con una retroalimentación de parte del equipo de mapadres. Finalizando el semestre escolar se evaluó junto a la familia el aprendizaje obtenido por el estudiante, en el cual el padre comentó que su hijo subió considerablemente sus calificaciones y que de parte de ellos, como padres hubo un mejor acercamiento a la escuela y mayor involucramiento en el aprendizaje de su hijo.

Al comienzo del proyecto no todos los participantes entendían la metodología de trabajo, el proyecto era nuevo, estaba partiendo y por ende se sabía que iba costar, iban haber inconvenientes o situaciones que no iban a favorecer. A medida que se pudo conocer y formar una conexión con los padres o apoderados el proyecto fue tomando su rumbo, logrando el objetivo principal mencionado anteriormente.

Para finalizar, creemos como equipo mapadres que existieron dificultades pero tanto lo bueno como lo malo sirve constantemente para autoevaluarse, ir realizando críticas constructivas y lograr así perfeccionar el proyecto. El proyecto logró cosas buenas, tanto para los beneficiados como para las profesoras en formación. Los análisis, los comentarios, las cápsulas, las evaluaciones, las conversaciones, la interacción, las reuniones entre otras cosas sirvieron para crecer y tener la oportunidad de contribuir socialmente en la labor de ser docente, de ayudar tanto a los estudiantes y sus padres, apoderados y tutores y por sobretodo de seguir formando mentes más abiertas con ganas de que la educación en Chile vaya mejorando a medida que más personas vayan aportando sus ideas en el ámbito escolar.

Bibliografía

- Baptista, P., Fernández, C., Hernández, R. (2014) Metodología de la investigación. *McGraw-Hill Education*. 6° edición.
- Cornejo, C., R., Redondo, R., J.M. (2007) Variables y factores asociados al aprendizaje escolar. Una discusión desde la investigación actual. *Estudios Pedagógicos vol. XXIII, nº 2*. Pp. 155-175. Disponible en <http://www.scielo.cl/pdf/estped/v33n2/art09.pdf>
- Chaverini, V., Gallardo, P., Murua, V., Pedraza, M., Rozas, M., Torres, P., Zorrilla, A. (2017) Políticas de participación de la familia y la comunidad en instituciones educativas. *División de Educación General. Ministerio de Educación*. Disponible en: <https://basica.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/25/2017/04/Pol%C3%ADtica-de-Participaci%C3%B3n-de-la-Familia-y-la-Comunidad-en-instituciones-educativas.pdf>
- Prieto, B. (2015) El camino desde la vulnerabilidad escolar hacia el desenganche educativo. El papel de la escuela de segunda oportunidad en la estrategia contra el abandono. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*. vol. 19. (3)
- Unicef (2020). Niños, niñas y adolescentes en Chile 2020. Disponible en: <https://www.unicef.org/chile/sites/unicef.org.chile/files/2020-05/Cifras-infancia-UNICEF-2020.pdf>



UN ACERCAMIENTO AL SIGNIFICADO HOLÍSTICO DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DESDE UN ESTUDIO HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

Nicolás Fernández, Jaime I. García-García, Luis Pino-Fan, Isaac Imilpán, Elizabeth H. Arredondo

En este informe se presenta un primer acercamiento a la construcción del significado holístico de la distribución binomial, con el objetivo de identificar los conocimientos necesarios para su aprendizaje significativo e instaurar bases para generar secuencias de aprendizaje enfocadas en ello. Para esto, se realizó un estudio histórico epistemológico (EHE) del objeto probabilístico de la distribución binomial, identificando los distintos momentos históricos de la construcción de su significado, sobre los cuales se reflexiona con base en las herramientas y principios del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), en particular, los de objeto matemático y sistema de prácticas, con tal de proponer una articulación entre estos, con un enfoque formativo.

Distribución binomial, estudio histórico epistemológico, enfoque ontosemiótico, configuración epistémica

INTRODUCCIÓN

La Probabilidad permite al ser humano comprender, de mejor manera, los fenómenos que lo rodean; en particular, mediante la modelación de fenómenos aleatorios que le permiten la realización de predicciones y la toma de decisiones. Por esto, es importante formar estudiantes con los conocimientos y las disposiciones necesarias para la argumentación, interpretación, crítica de información y control de actitudes problemáticas al momento de enfrentarse a información probabilística, es decir, estudiantes probabilísticamente cultos (Gal, 2005).

La distribución binomial “es una de las más importantes en la Probabilidad y Estadística” (Philippou & Antzoulakos, 2011, p. 152), al permitir el análisis de situaciones aleatorias de juegos de azar y fenómenos con comportamiento binomial en otras áreas, como la arqueología y la programación. Sin embargo, se identifican importantes debilidades en lograr que los estudiantes la apliquen en situaciones específicas y la resolución de problemas (Alvarado & Batanero 2007), que corresponde a uno de los elementos clave en una persona probabilísticamente culta. Además, se identifica escases de investigación respecto a este objeto matemático-probabilístico, lo que dificulta la búsqueda de solución a conflictos para su aprendizaje (García-García & Sánchez, 2015).

Para asegurar un aprendizaje significativo de un objeto matemático, es necesario conocer sus componentes fundamentales y aquellos que le dan significado (Batanero, 2005). El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) corresponde a un marco teórico que incluye un modelo epistemológico, abordando los aspectos antropológicos, socioculturales, cognitivos y semióticos de las matemáticas (Gordillo & Pino-Fan, 2016). Este, mediante su articulación con la metodología del análisis histórico, facilita la reconstrucción del significado holístico de la distribución binomial y, con ello, la generación de trayectorias idóneas de aprendizaje o de resolución de problemas, así como de otros recursos con fines formativos.

A continuación se presenta una primera aproximación a la reconstrucción del significado holístico de la distribución binomial, mediante la realización de un estudio histórico-epistemológico (organizado en periodos históricos según la complejidad en la que se presenta) y la identificación de elementos asociables a los principios del EOS, sobre los cuales se realiza un proceso reflexivo para establecer relaciones que faciliten la construcción del significado holístico de la binomial desde este enfoque.

ANTECEDENTES

El estudio histórico-epistemológico (EHE) de las matemáticas consiste en el estudio de la naturaleza de la génesis y consolidación de conceptos a lo largo de la historia (Anacona, 2003). Es decir, permite acercarse al conocimiento del saber sabio, significado holístico o completo; que se entrega parcialmente y de distintas formas a los estudiantes (saber enseñado), sufriendo también una serie de transformaciones adaptativas que se conocen como trasposiciones didácticas (Chevallard, 1991). Con su carácter documental, el EHE ha sido utilizado para el estudio de conceptos probabilísticos como la variable aleatoria y la probabilidad (Carrera, 2021; Batanero, 2005); evidenciando, además, que permite la interpretación teórica del razonamiento matemático detrás del objeto, identificar errores frecuentes en los estudiantes (conocidos como conflictos semióticos) y situarlo en el mundo que nos rodea (Batanero, 2005).

Con base en lo anterior, el EHE, al permitir la identificación de las distintas concepciones referentes a la distribución binomial y los elementos involucrados, aborda una necesidad clave para su enseñanza y aprendizaje: la disposición del sistema de conocimientos sobre cada uno de sus aspectos, considerando su naturaleza como un constructo social, resultado de una necesidad humana y del intenso trabajo teórico de personas en el pasado, y facilitando la identificación de errores de los estudiantes y la generación de estrategias para su corrección.

MARCO TEÓRICO: EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO (EOS)

El EOS tiene como base la articulación, hibridación y construcción modular de teorías con el objetivo para avanzar en la construcción de un sistema teórico que permita abordar problemas de tipo epistemológico, ontológico, semiótico-cognitivo y educativo, implicados en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Pino-Fan, 2013). En este enfoque, se define a la matemática como una actividad humana centrada a la resolución de situaciones problemas y concretada en un sistema de prácticas, consistente con todas las actuaciones o expresiones realizadas para la búsqueda, comunicación, validación o generalización de su solución (Godino *et al.*, 2019).

El objeto matemático es considerado en el EOS como “cualquier entidad que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización, que cumple un rol instrumental/representacional, regulativo, explicativo o justificativo” (Godino *et al.*, 2019, p. 5). Este se presenta en distintas dualidades, por ejemplo, personal-institucional y no ostensivo-ostensivo, y con elementos esenciales como: campo de problemas, lenguaje, procedimientos, algoritmos, definiciones, propiedades, argumentos, demostraciones, proposiciones, estructuras matemáticas, teorías y situaciones (Font *et al.* 2007; Batanero, 2005). Las definiciones anteriores nos permiten situar la distribución binomial como un objeto probabilístico, debido a que interviene de manera esencial en distintas prácticas relacionadas con fenómenos de carácter binomial, siendo una de las más simple el lanzamiento de dos monedas, respecto al cual no es difícil verlo cumpliendo los roles

mencionados anteriormente. Esto implica la existencia de distintos significados de la distribución binomial, específicos de una práctica o familia de prácticas, cuya identificación y análisis nos permitiría acercarnos al conocimiento global (significado holístico), importante para entender la manera en que los estudiantes o instituciones entienden este objeto, establecer criterios de idoneidad de procesos didácticos para su aprendizaje, analizar respuestas dadas por expertos o estudiantes, construir instrumentos evaluativos, analizar documentos curriculares, y la generación de estrategias de formación. (Pino-Fan, 2013; Gordillo & Pino-Fan, 2015; Carrera, 2020; Font & Godino, 2006).

METODOLOGÍA

Nuestro trabajo tiene un carácter cualitativo y documental, al tratar la reconstrucción de la distribución binomial a lo largo de la historia y su articulación con las ideas del EOS, siguiendo las primeras etapas del estudio de la antiderivada realizado por Gordillo y Pino-Fan (2015). En primera instancia, se recopiló la información histórica del concepto y aquellas ideas que se le relacionan (por ejemplo, la combinatoria), desde literatura específica del campo de la estadística y probabilidad, y se organizó en periodos limitados por sucesos en los que la problemática abordada y el grado de complejidad de las ideas, en este caso probabilísticas, sufren un cambio. Posterior a esto, se identificaron elementos asociables a los mencionados por el EOS, y se propone una aproximación a la construcción del significado global de la distribución binomial desde este enfoque.

ANÁLISIS

Estudio histórico-epistemológico del concepto de la distribución binomial

Debido a que los fenómenos de carácter binomial pueden ser analizados de distintas maneras, con distintos grados de complejidad, se decidió abordar en el estudio histórico-epistemológico la identificación de problemas asociables al fenómeno binomial y su solución; identificando los siguientes cinco periodos:

600 a.C. – Siglo XIV. Desde la Antigua Grecia hasta La Divina Comedia de Dante

Este periodo se caracteriza por los primeros vestigios del conteo de casos, los patrones numéricos y la consideración de la probabilidad como proporciones. Se identifican preguntas de conteo de casos, como en la Isagoga de Porfirio (268-270), específicamente ¿de cuántas maneras pueden seleccionarse dos cosas de n cosas diferentes?, que fueron resueltos mediante métodos recursivos y directos. Este tipo de desarrollos llevó a la identificación directa de patrones numéricos, asociables a los números figurados, y la aparición de razonamientos asociables a la combinatoria. A fines de este periodo, el azar se conoce en forma de proporciones y para juegos de azar, como se presenta en los primeros vestigios en 1307.

Siglo XV – Siglo XVII. Desde Stifel y Pascal hasta Arnauld y Nicole

Durante este periodo se formalizan patrones matemáticos asociables al fenómeno binomial, dando paso a constructos como el Triángulo de Pascal y la relación entre estos; además se estudiaban fenómenos de juegos de azar mediante la probabilidad (como proporciones), dando vestigios de fenómenos binomiales y de la binomial negativa. Michael Stifel (1486-1567) construiría una versión menos refinada de lo que sería el triángulo de Pascal (1654), en la que se relacionan de manera

simple los números figurados, los coeficientes binomiales y la combinatoria. En esencia, con respecto a su construcción desde una fila y una columna de r unos, sea r los números en la base, entonces la suma de los números en la n -ésima fila horizontal es igual a la cantidad de combinaciones de n elementos tomando r de ellos a la vez. Arnauld y Nicole, en 1662, establecen la probabilidad como un valor numérico aplicable a otras situaciones (además de los juegos de azar) mediante principios matemáticos, generando el paso del cálculo del azar a la teoría del cálculo de la probabilidad.

Siglo XVII. El problema de puntos y la teoría de la probabilidad

Este periodo se caracteriza por el problema de puntos (distribución de dinero), la búsqueda de su solución general mediante el uso de patrones numéricos y principios matemáticos, y formulas generales que modelan fenómenos probabilísticos. Estos serían esenciales para el desarrollo de la teoría de la probabilidad, que enlazaría la probabilidad de fenómenos binomiales a los principios matemáticos. También, de cartas entre Pepys y Newton y de Mere y Fermat, se puede rescatar el uso de principios probabilísticos y combinatorios para el cálculo de probabilidades de casos específicos y la generación de expresiones matemáticas que pueden utilizarse para un número infinito de casos.

Siglo XVII – Siglo. XVIII Desde Pascal a Arbuthnot

En este periodo Pascal desarrolla la binomial para $p=1/2$, con base en la combinatoria, el triángulo de Pascal y los principios asociados, para el estudio de la expectativa (conocido actualmente como esperanza). Arbuthnot (1683-1775), presenta un enfoque en el fenómeno binomial del lanzamiento de monedas desde la forma $(S+F)^n$, con n igual al número de lanzamientos; esta expresión es homóloga a la expresión generada por Bashkara en el siglo XII $(pz+q)^n$, equivalente a la sumatoria (de $k=0$ hasta n) de $C_{n,k}S^{n-k}F^k$, y corresponde a un primer acercamiento al fenómeno binomial en el que p y q no están necesariamente definidos.

Siglo XVIII El aporte de Jakob Bernoulli

Finalmente, es Bernoulli quien establece la expresión general de la distribución binomial para el análisis de la expectativa en problemas, plasmados en su obra *Ars Conjectandi* (1613). En esta presenta los principios aditivos y multiplicativos de la probabilidad y la construcción de la expresión ${}_nC_m p^m q^{n-m}$, considerando la probabilidad de m éxitos en n ensayos, $n-m$ fracasos y la manera en la que se pueden ordenar. Desde el desarrollo de la expresión general de la binomial, su uso se extendió al estudio de otros objetos matemáticos, como la distribución normal, la multinomial, la probabilidad inversa y la misma profundización sobre la distribución binomial, como en la aproximación al valor teórico al aumentar la cantidad de ensayos y el estudio de los intervalos de confianza.

Un acercamiento al significado holístico de la distribución binomial

En nuestro estudio histórico-epistemológico podemos identificar familias de problemas que van aumentando en generalidad: (1) problemáticas relacionadas con el conteo de casos, abordadas desde el método directo, el método gráfico y la generación de patrones numéricos y su

generalización; (2) problemáticas relacionadas con el cálculo de la probabilidad de fenómenos binomiales con valores específicos, abordada desde los principios probabilísticos y combinatorios (permitiendo el apoyo en representaciones gráficas) y que tienen como resultado valores que pueden ser extendidos a una infinidad de ensayos; y (3) problemáticas relacionadas con un fenómeno binomial variable, en las que el enfoque está en el estudio del comportamiento de la distribución con distintos valores y cuya solución efectiva se logra mediante el uso directo de la fórmula o el estudio sobre la gráfica de la distribución. Gracias a la identificación de estas familias, y de algunos métodos resolutivos y procesos y argumentos asociados, resulta factible el abordar el significado global del objeto de la distribución binomial como un conjunto de prácticas originadas, desarrolladas y transformadas a lo largo del tiempo, lo que sugiere una configuración casi lineal entre sus elementos.

CONCLUSIONES

Respecto a lo metodológico, el uso del EHE para la reconstrucción del significado de un objeto matemático es importante, ya que rescata la esencia misma de la matemática, la de un producto del ser humano en búsqueda de la solución de sus necesidades y entender lo que lo rodea. Este nos permitiría, refinando la propuesta de articulación con el EOS, la identificación clara de sus significados parciales y la estructuración de su significado holístico.

Este estudio resultó en la propuesta de tres familias de problemas que denominamos: (1) problemáticas relacionadas con el conteo de casos; (2) problemáticas relacionadas con el cálculo de la probabilidad de fenómenos binomiales con valores específicos; (3) problemáticas relacionadas con un fenómeno binomial variable. Cada una de estas implica un sistema de prácticas que, a su vez, lleva asociado un significado parcial distinto de la distribución binomial. Lo observado también en el EHE sugiere que la diferencia principal entre estos es el grado de complejidad y la cantidad de situaciones a las que, sus métodos resolutivos, pueden ser efectivamente aplicados; lo cual implicaría una representación lineal de la configuración que generan estas. Por otro lado, se identificaron aplicaciones a la binomial que las enlazan con el significado de otros conceptos matemáticos, lo que sugeriría la presencia de significados extendidos, es decir, significados que enlazaran dos objetos matemáticos y no son exclusivamente de alguno de ellos.

Finalmente, nuestros resultados también sugieren que para la realización de un proceso didáctico para el aprendizaje de la binomial es importante comenzar por la reconstrucción de los principios combinatorios y probabilísticos (desde el razonamiento lógico y gráfico y los patrones numéricos) aplicado al conteo de casos; seguido del análisis de situaciones binomiales específicas, la obtención de probabilidades asociadas a estas y la construcción de expresiones que representen su comportamiento; y, finalmente, con la construcción (desde los principios mencionados por Bernoulli) de la binomial y su aplicación para el cálculo directo de probabilidades o estudios sobre el mismo objeto. Asegurado esto, la distribución binomial podría ser efectivamente extendida a otras áreas de la matemática, como el estudio de los límites y la distribución normal.

Referencias

- Alvarado, H., & Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 67, 1-7.

- Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista Ema*, 8(1), 30-46.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 8(3), 247-263.
- Carrera, P. B. (2021). *Prácticas sobre la variable aleatoria propuestas en el currículo chileno de educación media* [tesis de maestría, Universidad de Los Lagos]. Repositorio Institucional.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique
- Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 8(1), 67-98.
- Font, V., Godino, J., & D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the learning of mathematics*, 27(2), 3-9.
- Gal, I. (2005). Towards "Probability Literacy" for all Citizens: Building Blocks and Instructional Dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Springer.
- García-García, J. I., & Sánchez, E. (2015). El desarrollo del razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre la noción de la distribución binomial. En E. Sánchez, C. Acuña, y M. Rigo (Eds.), *Memorias del III Coloquio de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa* (pp. 1-13). Cinvestav.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *For the Learning of Mathematics*, 39 (1), 37- 42
- Gordillo, W. & Pino-Fan, L. R. (2015, 6 de Mayo). *Reconstrucción del significado holístico de la antiderivada* [sesión de conferencia]. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Tuxtla Gutiérrez, México.
- Gordillo, W., & Pino-Fan, L. R. (2016). Una Propuesta de Reconstrucción del Significado Holístico de la Antiderivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 535-558.
- Pino-Fan, L.R. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* [tesis de doctorado, Universidad de Granada]. Repositorio Institucional
- Philippou, A. N., & Antzoulakos, D. L. (2011). Binomial Distribution. En M. Lovric (Ed.), *International Encyclopedia of Statistical Science 1* (pp. 152-154). Springer.

COMUNICACIONES BREVES

¿CÓMO CONSTRUYEN GRÁFICOS ESTADÍSTICOS ESTUDIANTES DE 8 A 9 AÑOS DE EDAD?: ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA EN TIEMPOS DE CONFINAMIENTO

Daniela Paz Latorres Rebolledo, Claudia Alejandra Vásquez Ortiz

Producto de la crisis sanitaria que atravesamos, nos vemos a diario enfrentados a información representada a través de gráficos estadísticos, bajo el supuesto de que todos los ciudadanos cuentan con las habilidades necesarias para llevar a cabo una correcta interpretación de estos. Las competencias de interpretación parten desde una etapa temprana cuando el estudiante grafica datos en contexto. Para examinar esas competencias, se realizó un estudio de casos, con estudiantes de un 3° año básico. Los resultados muestran que el 21% de los estudiantes logran construir correctamente un gráfico.

Palabras claves: Educación Básica, alfabetización estadística, construcción de gráficos.

INTRODUCCIÓN

La actual situación mundial causada por la pandemia de la Covid-19, ha familiarizado a la sociedad con la estadística. Esto debido a la gran cantidad de información que a diario se da a conocer en los medios de comunicación, presentada, por lo general, en tablas y gráficos estadísticos. Por tanto, es necesario cuestionarse respecto de: ¿qué conocimientos son necesarios para una correcta comprensión gráfica? ¿cómo interpretar la información presente en tablas y gráficos? De acuerdo con Friel, Curcio y Brighth (2001) la comprensión gráfica refiere a “las capacidades de los lectores de gráficos para derivar significado de gráficos creados por otros o por sí mismos” (p. 132), lo que indica que no solo se debe tener un rol de interpretador, sino también de creador o constructor gráficos.

Desde el punto de vista curricular, en Chile los estudiantes de Educación Básica deben aprender a construir e interpretar gráficos de manera progresiva desde temprana edad. Esto sin duda contribuirá a desarrollar la alfabetización estadística y probabilística en los estudiantes, entendida como la capacidad para interpretar, evaluar críticamente, y cuando sea pertinente, expresar opiniones respecto a la información estadística, los argumentos relacionados con los datos, o fenómenos estocásticos (Gal, 2002). No obstante, las investigaciones en el contexto nacional sobre la construcción de gráficos en los escolares chilenos aun son escasas (Díaz-Levicoy, Batanero y Arteaga, 2018), siendo un punto de partida esencial para la formación estadística.

Es en este contexto que se desarrolla el presente estudio que tiene como propósito indagar en las dificultades que presentan 14 estudiantes de 3º año básico cuando se ven enfrentados a la tarea de construir gráficos de barras en una clase remota. De esta manera, se aportan antecedentes que los

profesores pueden considerar al momento de planear las actividades relacionadas con los contenidos de estadística en los primeros años escolares.

MARCO TEÓRICO

Para el desarrollo y adquisición de la habilidad de interpretar información entregada en gráficos, es fundamental que los estudiantes obtengan la destreza de construir gráficos claros, es decir gráficos que cumplan convenios de construcción, lo que permitirá que cualquier sujeto pueda comprender y obtener información de los datos graficados. Desde esta perspectiva, Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras (2011), mencionan que los elementos estructurales son necesarios para leer e interpretar un gráfico, siendo estos: (i) Un título y etiquetas, las cuales deben contextualizar los datos y las variables representadas; (ii) Marco del gráfico, se refiere a los ejes, escalas y marcas de referencia de cada eje; (iii) Elementos visuales para representar datos, como los rectángulos en los histogramas.

En esta investigación nos situamos desde los niveles de interpretación de gráficos propuestos por Curcio y colaboradores (Curcio, 1987; Friel et al. 2001; y Shaughnessy et al., 1996): *"leer los datos"* (lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en el mismo); *"leer dentro de los datos"* (interpretación e integración de los datos en el gráfico); *"leer más allá de los datos"* (predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico); y *"leer detrás de los datos"* (valorar críticamente el método de recogida de datos, su validez y fiabilidad, así como las posibilidades de extensión de las conclusiones). Además, el estudio se apoya en la investigación de Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras (2016), quienes diferencian categorías de los errores en la construcción de gráficos: *"gráfico correcto o básicamente correcto"* (considera los convenios de construcción, incluyendo rótulos y etiquetas comprensibles y adecuados); *"gráfico parcialmente correcto"* (se observan algún error u omisión); *"gráfico incorrecto"* (representación inadecuada de los datos, lo que produce un gráfico sin sentido, sin respetar los convenios de construcción). Los autores concluyen, que los futuros profesores de primaria no cuentan con las competencias necesarias para la producción de gráficos estadísticos, es por eso que los formadores de estos futuros docentes, deben ser conscientes de esta falencia para que estas necesidades no sean replicadas, en los que serán sus estudiantes escolares. De manera complementaria, se consideran los resultados de Díaz-Levicoy, Batanero y Arteaga (2018), que muestran las dificultades de estudiantes chilenos al construir diagramas de barras, siendo la más frecuente la asignación de rótulos, seguida por la construcción de las barras, las cuales se relaciona con aspectos geométricos por la ubicación de paralelismo, la congruencia del ancho y distancia entre barras. Los autores afirman que, estas dificultades se explican por la cantidad de elementos estructurales y conceptos que hay que considerar al momento de construir un gráfico.

MÉTODO

Este estudio corresponde a una investigación cualitativa y descriptiva (Bisquerra, 2009) que busca indagar en las dificultades que presentan un grupo de 14 estudiantes de 3º año de Educación Básica (8-9 años de edad) cuando se les solicita la tarea de construir gráficos de barras en una clase remota en contexto de confinamiento en casa. En concreto, se diseñó un estudio de casos múltiples (Stake, 2005). Los gráficos fueron contruidos durante una secuencia de clases virtuales, que consideró la observación y explicación de los elementos a considerar en la construcción de gráficos de barras.

Una vez terminado el gráfico e interpretación de los datos, los estudiantes debían enviar vía WhatsApp fotografías de sus producciones.

Clase: Matemática	Fecha:
Tarea 1: Durante 5 días, registre la cantidad de veces se lava las manos.	
Actividad 1 Registra los datos de la investigación:	
Actividad 2: construye una tabla de frecuencia , a partir de la información recopilada, de la cantidad de veces que te lavas las manos, durante cinco días.	

Figura 1. Tareas propuestas a los estudiantes.

Los datos graficados, fueron recogidos por cada alumno respondiendo a la pregunta: ¿Cuántas veces te lavas las manos durante cinco días? En algunos casos, los datos fueron ordenados en tablas de conteo, para luego traducirla a una tabla de frecuencia, es a partir de esta última que los estudiantes obtienen la información necesaria para construir su gráfico de barras (Figura 1).

Las producciones de los estudiantes fueron categorizadas de acuerdo con los tres tipos de corrección de gráficos, propuestos por Arteaga et al. (2016), para luego clasificar los errores de los gráficos parcialmente correctos.

RESULTADOS

A continuación, se categorizan los gráficos de barras de los estudiantes, con las descripciones de los errores cometidos en los gráficos parcialmente correctos. Se finaliza con un cuadro resumen que muestra los porcentajes según cada clasificación y tipo de error.

En la Tabla 1 se muestra un resumen de la corrección de los gráficos alcanzada por los estudiantes. La categoría más frecuente fue la construcción de gráficos parcialmente correcto; al considerar los gráficos básicamente correctos y particularmente correctos éstos alcanzan 64%, siendo un porcentaje no bajo por el nivel escolar en que se encuentran, donde su experiencia en la tarea es acotada, además de las circunstancias de virtualidad en que se dio el desarrollo.

Tabla 1. Porcentaje de estudiantes según corrección de gráfico de barras.

Categoría	Porcentaje
Gráfico básicamente correcto	21%
Gráfico parcialmente correcto	43%
Gráfico incorrecto	36%

Respecto de los errores encontrados en la corrección de los gráficos de barras de los estudiantes (Figura 2). En la primera parte se muestran los errores considerados para un gráfico parcialmente correcto, finalizando con los errores de los gráficos incorrectos.

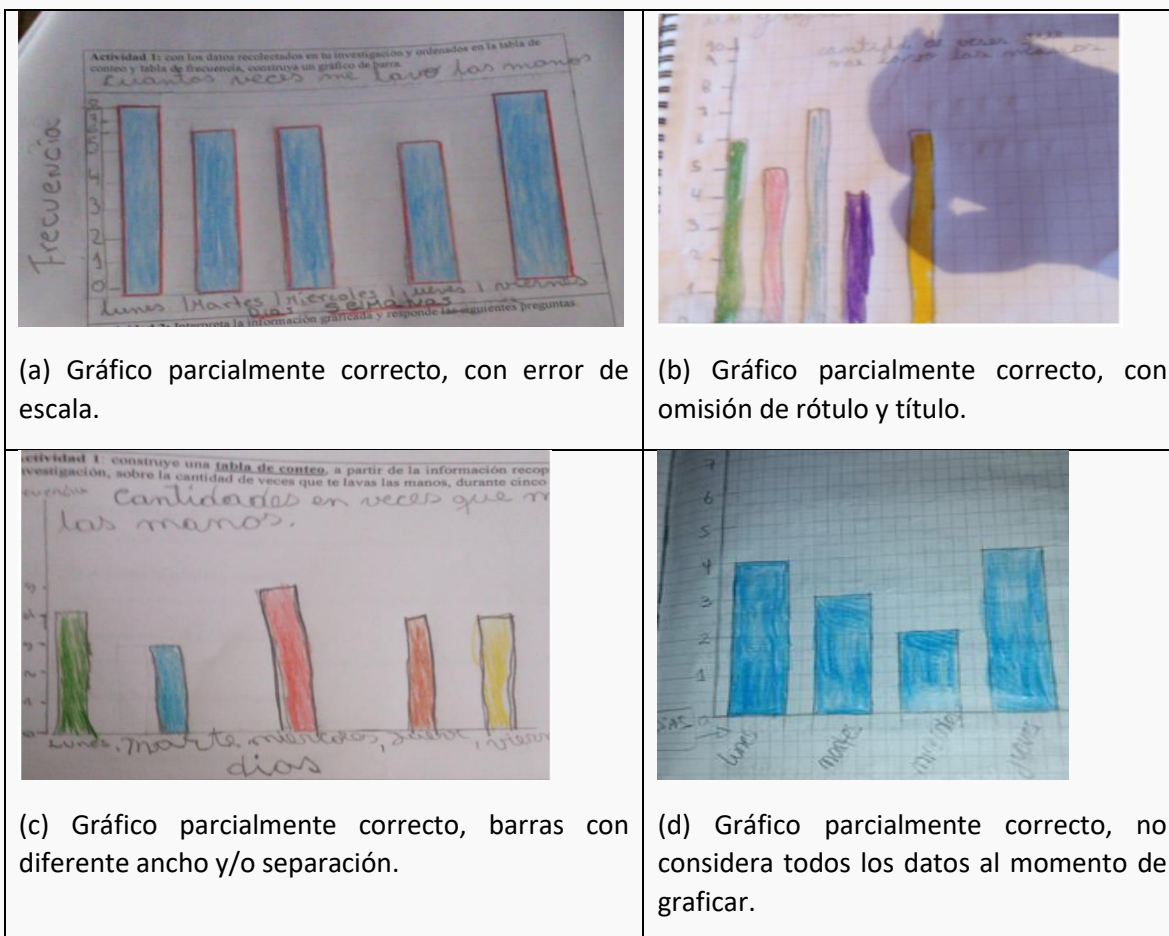


Figura 2. Algunas producciones de los estudiantes.

1) *Escala no proporcional.* La escala del gráfico no tiene igual magnitud entre números. De acuerdo con Díaz-Levicoy et al., (2018), en esta categoría se incluyen aquellos gráficos en los que el cero no está ubicado en la intersección de los dos ejes. En la Figura 2(a), se muestra que el estudiante construye una escala en el eje Y, la cual no es de igual magnitud, sobre todo al finalizar la escala, además se aprecia que el cero no se ubica en el punto de origen, estando más arriba que el inicio de las barras.

2) *Omisión o errores de los rótulos.* Las palabras que acompañan a los gráficos son los que dan el contexto o información necesaria para su interpretación, por lo que son elementos esenciales (Curcio, 1987) en la construcción de gráficos. Por ejemplo, en la Figura 2(b) el estudiante representa de manera correcta el título central, pero omite los rótulos de los ejes. Dejando de aportar información necesaria para comprender los datos graficados.

3) *Barras con diferente ancho y/o separación.* Las barras construidas en el gráfico, al no ser construidas en cuadrículas o la no utilización de instrumentos de medida, como la regla, produce diferentes anchos de las barras, perdiendo nociones geométricas, con respecto a la forma rectangular y paralelismo entre ellas (Ruiz, 2015). Una muestra de lo anterior es la Figura 2(c), donde el estudiante dibuja las barras sin considerar simetría entre ellas. Además, al no ser rectangular las barras, no se procura que el término superior coincida exactamente con la frecuencia correcta.

4) *Valor numérico faltante en la recta real.* Arteaga et al., (2016) reconocen la omisión en la construcción de valores en la recta de los datos o frecuencia. En la Figura 2(d), se muestra que el estudiante no considera los cinco días que debía representar y que estaban representadas en su tabla de frecuencia.

Finalmente, en la Tabla 2 se presenta el porcentaje de errores cometidos en los gráficos parcialmente correctos. Es importante señalar que un estudiante puede tener más de un tipo de error. Los tipos de errores más frecuentes fueron omisión o error de rótulos, con un 64,2% que coincide con el estudio previo de Díaz-Levicoy et al., (2018), donde el 59,2% de los estudiantes de 6° y 7° año básico comete este tipo de error. El segundo error más cometido por los estudiantes se relaciona con las representaciones de las barras, con un 57,1%, reflejándose en que sus anchos no son homogéneo, no conserva paralelismo o sus separaciones, entre barras, son diferentes.

Tabla 2. *Porcentaje de estudiantes que comete algún tipo de error en la construcción de gráficos parcialmente correcto*

Categoría	Tipo de error	Porcentaje
Gráfico parcialmente correcto	Escala no proporcional.	28,5%
	Omisión o errores de los rótulos	64,2%
	Barras con diferente ancho y/o separación	57,1%
	Valor numérico faltante en la recta real	28,5%

REFLEXIONES FINALES

En los resultados expuestos se evidencian dificultades en la elaboración de gráfico de barras, en especial, aquellas vinculadas a: la incomprensión del concepto horizontal y vertical, al momento de ubicar los ejes o el correcto uso de la regla, al momento de trazar los ejes y dibujar las barras. Lo anterior, se evidencia y se considera como incidencia, del porcentaje de estudiantes que logra parcialmente producir un gráfico de barras.

Por lo que es importante, como docentes ser conscientes que es una habilidad que se va desarrollando durante la Educación Básica y que hay que estar atentos y preparados a los obstáculos que pueden presentar los estudiantes, de esta forma estar preparados para remediar las dificultades, que implica la producción de gráficos en la etapa escolar temprana. Sin olvidar que, una buena construcción, facilitará la interpretación de datos, no solo graficada por los alumnos, sino también la presentada en otros contextos, pues de acuerdo con Vásquez (2021), es necesario *“reorientar la enseñanza de la estadística hacia una enseñanza en contexto que permita a los ciudadanos de hoy y mañana comprender adecuadamente la información estadística para afrontar los desafíos actuales y futuros de un mundo complejo y cambiante”* (p.186).

Finalmente, queremos enfatizar en que dado que el trabajo virtual implica la incorporación en el proceso de enseñanza y aprendizaje a las familias de los estudiantes, ya que en general estos se encuentran acompañados por alguno de ellos, lo que sin duda intervienen en el desarrollo de las tareas. Por lo que se propone, crear oportunidades de aprendizaje estadístico para padres y

apoderados, lo que sin duda repercutirá de manera positiva en la alfabetización estadística tanto de ellos, como de sus hijos.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT Nº 1200356 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile.

Referencias

- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. & Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números*, 76, 55-67.
- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. & Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(1), 15-40.
- Bisquerra, R. (2009). Metodología de la investigación educativa (2a edición). Madrid: La Muralla.
- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.18.5.0382>
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, (2018). Dificultades de los estudiantes chilenos de Educación Básica en la construcción de diagramas de barras. *Revista Paradigma*, 39(2), 107 – 129.
- Friel, S., Curcio, F., Bright, G. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*. 32(2) 124- 158.
- Ruiz, A. (2015). Un estudio de caso sobre errores y dificultades observadas en la elaboración de algunas gráficas estadísticas. *Revista Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*. 10(1), 26-39.
- Shaughnessy, J. M., Garfield, J. & Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 205-237). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_8
- Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. En N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *The SAGE Handbook of Qualitative Research* (pp. 443-466). Thousand Oaks: SAGE Publications. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-044894-7.01532-3>
- Vásquez, C. (2021). Comprensión y Uso Docente de Gráficos Estadísticos por Futuros Profesores para Promover Competencias para la Sostenibilidad. *PARADIGMA*, 41(e1), 165-190. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p165-190.id1022>

ACTIVIDADES SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA EN EDUCACIÓN INFANTIL: ¿QUÉ PROPONE EL CURRÍCULO Y QUÉ ABORDA EL LIBRO DE TEXTO?

Nataly Goreti Pincheira Hauck, Ángel Álsina

En este estudio se analiza la presencia de las tareas vinculadas al álgebra temprana en cuatro libros de texto chilenos de Educación Infantil y se comparan con los objetivos propuestos por las orientaciones curriculares. Se ha adoptado una metodología cualitativa de carácter descriptivo utilizando la técnica de análisis de contenido. Los resultados muestran una presencia media baja de las actividades sobre álgebra temprana, sin embargo, se encuentran en concordancia con los objetivos de aprendizaje propuestos en el núcleo del pensamiento matemático por las orientaciones curriculares para la Educación Parvularia para abordar la enseñanza del álgebra temprana.

Álgebra temprana, libros de texto, actividades de enseñanza, Educación Infantil.

INTRODUCCIÓN

Durante las últimas dos décadas el desarrollo de numerosas investigaciones dedicadas al estudio del álgebra y su didáctica, a nivel internacional, han impulsado una propuesta de cambio e integración curricular conocida como Early Algebra, desde ahora álgebra temprana.

El álgebra temprana propone promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros niveles de escolaridad y facilitar una mejor comprensión de las matemáticas (Bastable y Schifter, 2007; Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2000).

Esta nueva corriente plantea introducir el desarrollo del pensamiento algebraico principalmente desde la Educación Primaria, no obstante, algunos autores y organismos proponen su incorporación desde niveles inferiores (2019; Blanton y Kaput, 2005; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Kaput y Blanton, 2001; NCTM, 2000). Además, diversas investigaciones han informado que los estudiantes de Educación Infantil pueden desarrollar conocimientos vinculados con el álgebra temprana desde las primeras edades, adquiriendo nociones algebraicas elementales (2020; Papic, Mulligan y Mitchelmore, 2011; Rittle-Johnson, Zippert y Boice, 2019), tales como, el reconocimiento de patrones repetitivos, clasificaciones de objetos, uso de representaciones de relaciones numéricas, entre otras.

La enseñanza del álgebra temprana desde la Educación Infantil permite que “los profesores puedan ayudar a los alumnos a construir una sólida base de comprensión y experiencia, como preparación para un trabajo más complejo en álgebra en los niveles medios y en la escuela secundaria” (NCTM, 2000, p.39). Así pues, la transformación curricular del álgebra temprana hasta su estado actual, requiere contar con profesores capaces de atender a los objetivos que ésta persigue y conducir su enseñanza de manera efectiva promoviendo los contenidos que expone el currículo escolar.

En este contexto, el libro de texto influye considerablemente en el proceso de instrucción en el aula, puesto que conforma un elemento de apoyo para el profesorado en la preparación de la clase (Even y Olsher, 2014). Sin embargo, no se han encontrado estudios que analicen las actividades relacionadas con el álgebra temprana en los libros de texto de Educación Infantil.

Dado el impacto que tiene el libro de texto como herramienta para suscitar la enseñanza, el objetivo de este estudio es analizar la presencia de actividades sobre álgebra temprana que proponen los libros de texto chilenos para el nivel de transición de Educación Infantil (4 a 6 años).

EL ÁLGEBRA TEMPRANA EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN INFANTIL

El álgebra temprana intenta introducir modos del pensamiento algebraico desde las primeras edades de escolarización (Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2000, 2008; Molina, 2009) como una manera de pensar y actuar con objetos, relaciones y situaciones matemáticas (Carpenter, Franke y Levi 2003; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Kaput, 2000).

De acuerdo con Blanton y Kaput (2005) el álgebra temprana busca promover en las aulas de clase hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas, por medio de actividades dirigidas a la observación de patrones, relaciones y estructuras matemáticas.

La introducción de conocimientos de naturaleza algebraica se ha visto reflejada de manera progresiva en los currículos de Educación Infantil.

A nivel internacional, el NCTM (2000) propone los siguientes estándares de contenido y expectativas de aprendizaje sobre álgebra temprana para la Educación Infantil (Tabla 1).

Estándares de contenido	Expectativas de aprendizaje
	Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades.
Comprender patrones, relaciones y funciones	Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar de una representación a otra. Analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento.
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos	Ilustrar los principios generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números. Usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.
Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender las relaciones cuantitativas	Modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos.
Analizar el cambio en diversos contextos	Describir cambios cualitativos, como “ser más alto”. Describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año.

Tabla 1: Estándares de contenido y expectativas de aprendizaje de álgebra temprana para las primeras edades Pre-K-2 (3 a 8 años) (NCTM, 2000)

El Estándar de álgebra para las primeras edades se centra en las relaciones entre cantidades, las formas de representación de relaciones matemáticas, el reconocimiento de patrones y el análisis del cambio.

Por otra parte, Chile no se encuentra ajeno a este cambio curricular y ha incorporando en las Bases Curriculares para la Educación Parvularia (MINEDUC, 2018), mediante el ámbito de experiencia comprensión del entorno en el núcleo del pensamiento matemático, objetivos de aprendizaje vinculados al álgebra temprana para el nivel de transición (4 a 6 años):

Crear patrones sonoros, visuales, gestuales, corporales u otros, de dos o tres elementos; Experimentar con diversos objetos estableciendo relaciones al clasificar por dos o tres atributos a la vez (forma, color, tamaño, función, masa, materialidad, entre otros) y seriar por altura, ancho, longitud o capacidad para contener; Emplear cuantificadores, tales como: “más que”, “menos que”, “igual que”, al comparar cantidades de objetos en situaciones cotidianas; Orientarse temporalmente en situaciones cotidianas, empleando nociones y relaciones de secuencia (antes/ahora/después/al mismo tiempo, día/noche), frecuencia (siempre/ a veces/ nunca) y duración (larga/corta) (p.99).

El tratamiento que recibe el álgebra temprana en el currículo escolar chileno para la Educación Infantil se ve influenciado fuertemente por las directrices que proponen los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000).

METODOLOGÍA

De acuerdo con el propósito del estudio que, como se ha indicado, es analizar la presencia de experiencias de aprendizaje sobre álgebra temprana que proponen los libros de texto chilenos para el nivel de transición de Educación Infantil (4 a 6 años), se ha adoptado un enfoque cualitativo de carácter descriptivo (Creswell, 2009), utilizando como metodología el análisis de contenido (López-Noguero, 2002).

La muestra fue intencionada y está constituida por cuatro libros de texto chilenos (Tabla 2) dirigidos al nivel de transición de Educación Infantil que considera el primer nivel de transición (4-5 años de edad) y segundo nivel de transición (5-6 años de edad). Cabe destacar que los libros de texto analizados son entregados de manera gratuita por el Ministerios de Educación chileno (MINEDUC) a establecimientos educativos públicos y subvencionados, teniendo una amplia difusión en Chile.

Por cada nivel educativo se analizaron dos libros de texto que apoyan el proceso de enseñanza-aprendizaje en la comunidad educativa, como lo es, el libro de texto del estudiante o cuaderno de actividades y la guía didáctica del docente. Esta última, orienta la gestión del profesor en el aula.

Código	Título	Autores	Editorial	Año
T1	Cuaderno de Actividades del Nivel	Departamento de estudios pedagógicos	SM Chile S.A. Edición especial para MINEDUC	2019

	de Transición 1 de Educación Parvularia						
T2	NT1 Educación Parvularia. Guía Didáctica del Docente	Departamento de estudios pedagógicos	SM Chile S.A. Edición especial para MINEDUC	2019			
T3	Cuaderno de Actividades del Nivel de Transición 2 de Educación Parvularia	María Luisa Salazar Preece y María Inés Cifuentes Cornejos	Ediciones Rau y Bodenburg. Edición especial para MINEDUC	2020			
T4	NT2 Educación Parvularia. Guía Didáctica del Docente	María Luisa Salazar Preece y María Inés Cifuentes Cornejos	Ediciones Rau y Bodenburg. Edición especial para MINEDUC	2020			

Tabla 2: Colección de libros de texto considerados para el análisis

Las unidades de análisis corresponden a las secciones de los libros de texto que presentan actividades para abordar contenidos vinculados con el álgebra temprana.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos consideran la presencia de las actividades de álgebra temprana en los libros de texto de acuerdo a cada nivel y los objetivos de aprendizaje asociados a dichas actividades.

En total se analizaron 82 actividades propias del núcleo pensamiento matemático, de las cuales 27 (32,9%) corresponden al estudio del álgebra temprana. Cabe destacar que existen experiencias de aprendizaje propuestas en la Guía didáctica del docente que entregan herramientas que le permiten al equipo pedagógico modelar habilidades, actitudes y conocimientos. Dichas experiencias contemplan, como parte de su desarrollo, el apoyo del cuaderno de actividades. Este último, invita a los párvulos a construir su propio aprendizaje.

Nivel de transición	de Texto	Frecuencia	Porcentaje
Primer nivel (4-5 años)	T1	5	18,5
	T2	5	18,5
Segundo nivel (5-6 años)	T3	9	33,4
	T4	8	29,6

Tabla 3: Distribución de las actividades analizadas

Se observa una presencia mayor de actividades vinculadas al álgebra temprana para los niños de 5 a 6 años que para los niños de 4 a 5 años.

En cuanto a los objetivos de aprendizaje que son abordados en los libros de texto para orientar la enseñanza del álgebra temprana, se observan principalmente en las actividades que requieran orientarse temporalmente en situaciones cotidianas, empleando nociones y relaciones de secuencia (33,3%) y experimentar con diversos objetos estableciendo relaciones al clasificar por atributos y seriación (29,7%), seguidas de actividades que involucran el empleo de cuantificadores al comparar cantidades de objetos en situaciones cotidianas (22,2%). Finalmente, se observa una presencia menor de actividades cuyo objetivo involucra la creación de patrones de dos o tres elementos (14,8%).

En general, las actividades analizadas responden a los objetivos que plantean las orientaciones curriculares para la Educación Parvularia (MINEDUC, 2018), puesto que abordar de manera explícita nociones y contenidos vinculados con el álgebra temprana.

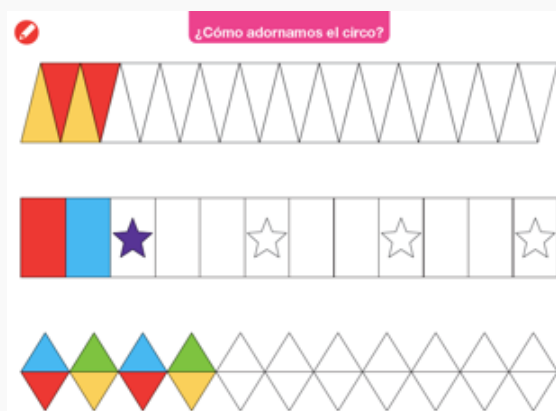


Figura 1: Actividad de seriación a partir de un patrón de repetición (4-5 años). Fuente: T3 (2019, p.30)

CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio se ha analizado la presencia de actividades sobre álgebra temprana que proponen cuatro libros de texto chilenos para el nivel de transición de Educación Infantil (4 a 6 años). Los resultados obtenidos muestran una incorporación progresiva de las actividades vinculadas con el álgebra temprana en los niveles que conforman en nivel de transición. No obstante, las actividades orientadas a los niños de 4 a 5 años tienen una presencia media del 18,5%, mientras que las experiencias vinculadas al estudio del álgebra temprana en los niños de 5 a 6 tienen una presencia media del 31,5%, lo que consideramos bajo.

Referencias

- Bastable, V., & Schifter, D. (2007). Classroom stories: examples of elementary students engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. 165-184. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer.

- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (Eds.). (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth, England: Heinemann.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. 669-705. Reston, VA: NCTM e IAP.
- Creswell, J. W. (Eds.). (2009). *Research Design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches (3ª ed.)*. London: Sage
- Even, R., & Olsher, S. (2014). Teachers as participants in textbook development: The Integrated Mathematics Wiki-book Project. In: Y. Li, G. Lappan, (Eds.). *Mathematics Curriculum in School Education. Advances in Mathematics Education*. 333-350. Springer, Dordrecht.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. 5-17. Nueva York, NY: Routledge.
- Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Student achievement in algebraic thinking: A comparison of third-graders' performance on a state fourth-grade assessment. En R. Speiser, C. Maher, y C. Walter (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education*, 1, 99-108.
- López-Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. XXI, *Revista de Educación*, 4, 167-179.
- MINEDUC (2018). Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-269.
- Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L., & Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly*, 46, 166–178.

ASPECTOS QUE CONSIDERAN DUPLAS DE DOCENTES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y DIFERENCIAL PARA EL DISEÑO DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE ÁREA Y PERÍMETRO DEL CÍRCULO, EN UN CURSO DE 7° BÁSICO CON ESTUDIANTES DIAGNOSTICADOS CON TRASTORNO POR DÉFICIT DE ATENCIÓN E HIPERACTIVIDAD.

Jamilet Antonia Castro Carrasco, Claudia Amelia Matus Zúñiga

El presente trabajo de investigación consistió determinar aspectos que consideran duplas de docentes de educación matemática y diferencial para el diseño de una propuesta de enseñanza que favorezca el aprendizaje e inclusión, de estudiantes de séptimo básico diagnosticados con Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH), en la enseñanza de los conceptos de área y perímetro del círculo.

Este diseño se llevó a cabo mediante tres fases, de recolección de datos, producción y evaluación de la propuesta. En la primera fase se realizaron y analizaron entrevistas a duplas de educación matemática y diferencial, utilizando análisis cualitativos con el fin de determinar criterios que consideran apropiados para una propuesta. En la segunda fase se realizó un diseño de la propuesta de enseñanza para los conceptos antes aludidos, mientras que, en la tercera fase, se realizó un proceso de validación y evaluación de la propuesta con profesores de matemática.

Los resultados mostraron que aspectos a considerar en la propuesta son: relacionar contenidos a la vida real, materiales concretos y estrategias lúdicas como una herramienta principal, pues con ello se reducen los síntomas de inatención, hiperactividad e impulsividad y beneficia la motivación, autoestima e inclusión de estos estudiantes.

Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH), Inclusión, Geometría, Colaboración.

INTRODUCCIÓN

En Chile, la educación se rige por la ley 20370 que es la encargada de regular los derechos y obligaciones de los participantes de las instituciones educativas, a través de la denominada universalidad y equidad de la educación. Estos conceptos apuntan a que, todas las personas deben tener derecho a la educación y que, el sistema asegurará que todas ellas tengan las mismas oportunidades, con especial atención en aquellas personas que requieren de apoyo especial (Congreso Nacional de Chile, 2009). Frente a esto, la comunidad educativa debe atender las necesidades de cada estudiante, incluyendo a aquellos con Necesidades Educativas Especiales (NEE), ya sean éstas de tipo permanentes o transitorias. Este trabajo se enfoca en los estudiantes con Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH), quienes poseen dificultades particulares en su proceso de aprendizaje (Noronha, 2016). Una de las estrategias institucionales de apoyo a los estudiantes con TDAH y con NEE en general en las escuelas chilenas a través de la ley 20.422 es con la contratación de un profesional de educación diferencial a través del Programa de Integración Escolar (PIE). Este profesional, está encargado de adaptar las actividades de enseñanza

a las necesidades y particularidades de los estudiantes con NEE y brindar el apoyo necesario en el aula. Sin embargo, estudios señalan que existe poco y nada de trabajo colaborativo entre los docentes de aula y educadores diferenciales (Molina, 2015). Entonces, en las clases de matemática, ¿cómo se diseñan las actividades de matemática para incluir a estudiantes con TDAH? ¿Qué aportes puede hacer el educador diferencial para apoyar el diseño de las actividades de aprendizajes en temáticas de área y perímetro?

ANTECEDENTES

El Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad cuyas siglas en español son TDAH, es un trastorno de tipo neurobiológico originado en la niñez y que afecta principalmente al mantenimiento de la atención, movimientos, memoria y procesos cognitivos asociados al aprendizaje (García-Allen, J, 2020).

Hasta el 2014 pocos autores/as se interesan en abordar el aprendizaje de los estudiantes con TDAH en matemática (Creu, 2014). El trabajo de Noronha (2016) en España, destaca ciertas acciones educativas que favorecen el aprendizaje de los estudiantes con TDAH, pero de manera muy general. Por ejemplo, recomienda utilizar recursos cercanos a la realidad de los estudiantes, lenguaje claro y trabajar la integración socio/cultural para mejorar el conocimiento escolar. Específicamente para el aprendizaje matemático propone lo lúdico como una fuerza motivadora para el aprendizaje y la inclusión. Además, materiales manipulables y juegos.

Más adelante, se encuentran algunos aportes con foco en el uso de la tecnología. En México, por ejemplo, González, Guerrero-García, y Navarro (2019) presentan un modelo tecno-pedagógico para la resolución de problemas matemáticos en niños entre 8 y 12 años con TDAH, a través de un denominado Juego Serio. Aunque, los autores advierten que sus resultados no fueron muy concluyentes, el principal beneficio observado para los estudiantes con TDAH, tras la implementación de este juego, es que su uso mejora la atención y la autoestima; promueve el desarrollo personal y mejora la inclusión en el aula. Esto viene a ratificar la estrategia implementada por Moreno y Valderrama (2015), quienes consideraron que los juegos digitales podrían ser utilizados como un buen escenario para mejorar el rendimiento en estadística de los niños/as con TDAH, fortaleciendo sus habilidades sociales y regulando sus emociones. Los autores concluyen que las actividades más significativas en el desarrollo de los niños surgen de la experiencia de jugar, siendo el juego algo natural y terapéutico para ellos.

De la revisión de literatura anterior se concluye que si bien existen propuestas inclusivas y con buenos resultados para estudiantes con TDAH, éstas corresponden a propuestas realizadas en otros países, y en general, carecen de la participación de profesionales de educación diferencial para su planificación y/o aplicación. En cuanto a Chile, existen investigaciones (Urbina et al, 2017; Rodríguez y Ossa, 2014) que dejan entrever cómo es vital mejorar el trabajo colaborativo entre los docentes de aula regular y diferencial para apoyar a estudiantes en el aula, sin embargo en estos trabajos no se realizan propuestas específicas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes con NEE y se enfocan principalmente en las deficiencias que existen en la participación institucional de ambos profesionales y la formación docente en cuanto las NEE.

En resumen, si bien existen recomendaciones y propuestas de trabajo en la literatura para apoyar a estudiantes con TDAH, éstas no se enfocan en el área de la enseñanza de la matemática, ni menos

en geometría. Además, hay carencia de participación de docentes de educación diferencial en la construcción de propuestas. Respecto a esto, ratificamos lo que Molina (2015) nos señala: “la educación general y la educación especial no deberían ser consideradas como realidades separadas, sino que, por el contrario, deben unificarse y generar un trabajo colaborativo” (p.152). Este trabajo exploró las recomendaciones que emergen de duplas de educadores de matemática y diferencial para el diseño de actividades de aprendizaje.

METODOLOGÍA

La metodología de esta investigación corresponde a la de tipo cualitativa con un alcance de tipo exploratorio, dado que hasta la fecha en Chile el tema de la enseñanza de la matemática a estudiantes con TDAH no ha sido de interés. Es por ello que los participantes de la investigación fueron dos duplas de docentes de educación matemática y diferencial que tuvieran experiencia en los niveles de primero a octavo básico, pues es ahí donde el Programa de Integración Escolar (PIE) tiene más experiencia en el trabajo con NEE.

Este trabajo se dividió en tres fases, la primera fase consistió en la realización de entrevistas a ambas duplas de docentes de educación matemática y diferencial, posteriormente, la segunda fase constó de dos diseños, el primero es la propuesta de enseñanza de los conceptos de perímetro y área del círculo, la cual busca favorecer el aprendizaje e inclusión de los estudiantes con TDAH y el segundo diseño es el de las orientaciones metodológicas dirigido a los docentes que deseen aplicar la propuesta de enseñanza. Esta segunda fase se desarrolló una vez analizadas las entrevistas. Finalmente, la tercera fase consistió en la validación de la propuesta de enseñanza por parte de expertos, donde se determinan las posibles mejoras en cuanto a objetivos, recursos y estrategias.

El proceso de la información se hizo según lo establecido por Hernández Sampieri et al., (2014), donde en primer lugar se transcribieron los datos de forma literal para no perder significado de la información, luego se revisaron y organizaron los datos para determinar criterios de organización y codificación. En cuanto a categorías de análisis estas fueron cuatro; actividades, estrategias, características de los estudiantes con TDAH e inclusión, a partir de esto se procede a la triangulación de investigadores para tener mejor confiabilidad y validez de interpretación de los datos.

ANÁLISIS

Las duplas entrevistadas entienden por inclusión, cuando las personas aceptan las condiciones de los estudiantes con NEE, y son los docentes, directivos y la comunidad educativa en general, quienes se adecuan a los estudiantes con algún tipo necesidad ya sea transitoria o permanente, en el sentido de buscar estrategias, recursos y apoyo social y emocional, es decir, ven en los estudiantes con NEE lo que ellos son capaces de lograr a partir de sus propias capacidades (Leiva, 2013).

En cuanto a las características de los estudiantes diagnosticados con TDAH, las duplas concuerdan en los síntomas de hiperactividad, impulsividad y falta de concentración, donde con frecuencia tienen la necesidad de moverse por la sala y manipular objetos. Además, de estos, las duplas destacan baja autoestima y falta de motivación durante las clases lo cual se relaciona con lo expuesto por Orjales, I., (1999) quien considera que esto provoca un impacto en el aprendizaje de los estudiantes con TDAH. Para remediar esto, como estrategia se puede practicar delegación de pequeñas responsabilidades en el aula como repartir material, borrar la pizarra u ordenar los

grupos. Esto le da la posibilidad al estudiante con TDAH de moverse por la sala por cortos instantes, reduciendo su hiperactividad (Orjales, I., 1999).

En cuanto a la categoría definida como actividades las duplas se refieren a planificar clases que, a los estudiantes les genere interés de acuerdo con sus edades, hobbies y tecnologías actuales, además, sugieren agregar lo lúdico con juegos y muchos materiales concretos cercanos a su realidad, con los cuales pueden deducir los conceptos que se desean introducir con la experimentación, mejorando los síntomas que les causa el trastorno (Noronha, 2016).

Dado lo anterior, entonces es fundamental dejar de lado la forma tradicional de enseñanza donde el profesor/a desempeña el rol de expositor y transmisor de conocimientos durante gran parte de la clase y luego los estudiantes replican una gran cantidad de ejercicios dados (Fabres, 2016). Es distinto a realizar menos ejercicios en un juego entretenido con ciertos puntajes, donde todos los estudiantes participen y se ayuden entre ellos para aprender y lograr los objetivos de la clase, pues desde la perspectiva de Orjales, I., (1999) los estudiantes con TDAH poseen escasez de habilidades sociales, y a través del juego pueden mejorar estos lazos sociales con sus compañeros/as. En la misma línea de lo lúdico una profesora de matemática en la entrevista menciona lo siguiente:

PM2: “Jugar al bingo, por ejemplo, típico bingo matemático, que tú juegas con operaciones matemáticas, entonces ahí trabajas operatoria o cálculo mental, pero también aprenden a escuchar instrucciones.”

De esto se tiene que, realizar actividades con juegos y competencias logra más predisposición por parte de todos los estudiantes, pues la edad que tienen los niños/as al cursar séptimo básico, aún aprenden jugando, en especial aquellos diagnosticados con TDAH, pues el juego les sirve para aprender a seguir instrucciones y respetar reglas, y se comprometen porque desean ganar o tener algún tipo de premio, luego con estas instancias se ejercita el seguimiento de instrucciones y reglas de forma concreta (Creu, 2014).

Finalmente, con respecto a la categoría de estrategias, principalmente las duplas consideran acciones entretenidas para los estudiantes, donde puedan tocar y palpar objetos, pero lo más importante, es practicar el refuerzo positivo con pequeños estímulos como por ejemplo, con stickers, premios, décimas, pequeños descansos o juegos, que los pueden motivar a realizar las actividades de forma correcta, además, de alentarlos con que, ellos sí pueden lograr los aprendizajes y que, si son capaces, solo que tienen diferentes tiempos de realización y comprensión de tareas. Estas acciones desde la mirada de Guzmán y Hernández (2005) y Palma (2018) corresponden a condiciones que mejoran la motivación, conducta e impulsividad de los estudiantes diagnosticados con TDAH. Este tipo de estrategias benefician y mejoran los aprendizajes de estos estudiantes, y parte por reconocer sus comportamientos y respuestas, alentándolos con palabras de agradecimiento y motivacionales e incluso premiando con cosas básicas que, para los estudiantes son importantes, como por ejemplo, una profesora en una entrevista menciona que, los estudiantes llegan a una edad que tal vez un stickers o una carita feliz no es un buen premio, pero sí lo es que, el profesor le delegue responsabilidades como repartir material o considerar su opinión para hacer grupos entre otras cosas.

CONCLUSIONES

En general, frente al tema de inclusión falta conciencia en las personas, es decir, actualmente los participantes tienen la visión de inclusión como una expectativa, donde los actores educativos hacen sus mejores esfuerzos para llevarla a cabo, y por otra parte los estudiantes también se esfuerzan por sentirse parte del sistema.

Ahora bien, respecto a las actividades y los materiales concretos que se requieren para una inclusión y aprendizajes por parte de los estudiantes con TDAH, existe un factor muy importante, la familia. En caso de necesitar por parte de ellos y de los estudiantes, ciertos materiales de la vida cotidiana para llevar a cabo las actividades planificadas que en teoría lo mejor es conectarlas con la vida real, existen familias que, se rehúsan o que, no apoyan lo suficiente los procesos de aprendizajes de sus hijos/as y suelen estigmatizarlos con que, no importan los materiales que utilicen, igual no aprenderán, o si ellos como padres no son buenos en alguna asignatura entonces sus hijos/as tampoco lo son. Por esto, se concuerda con las duplas en que, hace falta que, los padres orienten y apoyen a los niños/as a tener un verdadero interés por el aprendizaje, inculcándoles responsabilidad y compromiso.

En cuanto a la propuesta de enseñanza también se utilizan materiales concretos y se parte desde una situación que se considera de interés como lo es una pizza que se divide por la mitad con diferentes ingredientes, esta situación los estudiantes la pueden recrear con material concreto, para ello se les plantean ciertas instrucciones que les permitirán estimar el área del círculo a partir del área del rectángulo, con la particularidad de que a lo que, ellos llaman base del rectángulo en esta experimentación corresponde a la mitad del perímetro del círculo y que la altura corresponde al radio. En cada paso de estas actividades fue importante considerar y mencionar en las orientaciones metodológicas que, las instrucciones deben ser trabajadas en conjunto y con acciones concretas, además de practicar el refuerzo positivo con los estudiantes diagnosticados con TDAH especialmente, dándoles instancias donde puedan ser premiados. Como la idea no es agobiar a los estudiantes y que, sean tareas breves y graduadas en dificultad, en la propuesta de enseñanza se presentan al final del desarrollo de las clases de perímetro y área del círculo, juegos y competencias ya que, los niños a esa edad son competitivos y les gusta que los premien.

REFERENCIAS

- Congreso Nacional de Chile (2009, 17 de septiembre). Ley 20370. Ministerio de educación: Establece la Ley General de Educación. Biblioteca del Congreso Nacional de Chile. <https://www.bcn.cl/leychile/navegar?idNorma=1006043>
- Creu, M. (2014). TDAH y Matemáticas: Propuestas para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje de los alumnos de la ESO. [trabajo fin de master, Universidad Internacional de La Rioja. Valencia]. https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2988/Creu_Obrer_Marco.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- García-Allen, J. (2020). Tipos de neurotransmisores: funciones y clasificación. Psicología y Mente. <https://psicologiymente.com/neurociencias/tipos-neurotransmisores-funciones>
- González, C., Guerrero-García, J., & Navarro, Y. (2019). Un juego serio para la solución de problemas matemáticos para niños con TDAH. Campus Virtuales, 8(2), 121-140. <http://uajournals.com/ojs/index.php/campusvirtuales/article/view/506/353>

- Guzmán, R. & Hernández, I. (2005). Estrategias para evaluar e intervenir en las Dificultades de Aprendizaje Académicas en el Trastorno de Déficit de Atención con/sin Hiperactividad. *Qurrriculum. Revista de Teoría, Investigación y Práctica Educativa*, 1-30.
- Hernández Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6.ºed.). McGraw-Hill Education.
- Leiva, J. (2013). De la integración a la inclusión: evolución y cambio en la mentalidad del alumnado universitario de educación especial en un contexto universitario español. *Actualidades Investigativas En Educación*, 13(3), 1–27. <https://doi.org/10.15517/aie.v13i3.12027>
- Molina, Y. (2015). Necesidades educativas especiales, elementos para una propuesta de inclusión educativa a través de la investigación acción participativa. El caso de la Escuela México. *Estudios pedagógicos*, XLI, 147-167. <https://scielo.conicyt.cl/pdf/estped/v41nespecial/art10.pdf>
- Moreno, J., & Valderrama, V. (2015). Aprendizaje Basado en Juegos Digitales en Niños con TDAH: un Estudio de Caso en la Enseñanza de Estadística para Estudiantes de Cuarto Grado en Colombia.
- Noronha, N. d. (2016). Metodologías adecuadas para facilitar el aprendizaje de matemática de los alumnos con trastorno de déficit de atención e hiperactividad TDAH, de la enseñanza fundamental II, del Instituto Santa Maria Mazzarello. [tesis de Máster en Educación, Mención Currículum y Evaluación. Universidad de Santiago de Chile]. Repositorio USACH.
- Orjales, I. (1999). Déficit de Atención con Hiperactividad. Manual para padres y educadores: Manual para padres y educadores (Educación especial y dificultades de aprendizaje) (19a ed. y trad.). Ciencias de la Educación Preescolar y Especial.
- Palma, C. (2018). Recursos para profesionales: ."Estrategias de intervención en el aula para alumnos con TDAH".Ampachico. <https://www.ampachico.es/wp-content/uploads/2018/06/estrategias-de-intervencion-en-el-aula.pdf>
- Rodríguez y Ossa (2014). Valoración del trabajo colaborativo entre profesores de escuelas básicas de Tomé, Chile. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, 40(2), 303–319. <https://doi.org/10.4067/s0718-07052014000300018>
- Urbina, C., Basualto, P., Durán, C., & Miranda, P. (2017). Prácticas de co-docencia: el caso de una dupla en el marco del Programa de Integración Escolar en Chile. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, 43(2), 355–374. <https://doi.org/10.4067/s0718->

CARACTERIZACIÓN DE LAS ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN LIBROS DE TEXTO EN FUNCIÓN DE SU CONSTRUCCIÓN HISTÓRICA

Patricio Delgado Donoso, Roberto Vidal Cortés

Esta investigación es de tipo cualitativa y tiene por objetivo, caracterizar las tareas, técnicas y tecnologías de los números complejos en los libros de texto, en relación al desarrollo histórico-epistemológico de los números complejos. Para lograr este objetivo, se seleccionaron cuatro libros de texto chilenos que responden a diferentes modificaciones del currículo nacional, para ser analizados desde la perspectiva de constructos propios de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En relación a los resultados, cabe destacar que existe diferencias en las organizaciones matemáticas de cada libro de texto escolar, en la manera de abordar las distintas representaciones de los números complejos y en la forma de abordar los contenidos mínimos obligatorio de cada ajuste curricular.

Números complejos, TAD, Epistemología, Textos escolares.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje de los números complejos, presenta diversas dificultades, algunas se trasladan desde el tratamiento de los números reales hacia la comprensión de los números complejos (Pardo y Gómez, 2007; Abadía, 2019) y otras se generan dentro del mismo ámbito del cuerpo $\mathbb{C}$ (Bagni, 2001; Gotoman, 2014). Es por esto, que el estudio que presenta este escrito se centra en el análisis de las actividades que plantean los libros de texto para comprender, de qué manera se organizan en el currículo escolar.

ANTECEDENTES

Los libros de texto como objeto de investigación Didáctica

Como señala Gómez (2009), los libros de texto responden al paradigma de un saber institucionalizado en un sistema educativo, en el cual organizan y planifican la enseñanza dominante en el tiempo de su vigencia. Lo anterior, implica la relevancia de enfocar el análisis de estos dispositivos como una línea más de la investigación en Didáctica de la Matemática. A su vez, Vidal (2009), afirma que el libro de texto escolar es un agente participante de la Transposición Didáctica, el cual tiene el deber de procurar la vigilancia epistemológica de los contenidos.

Dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los números complejos

Existen investigaciones que evidencian dificultades en el desarrollo histórico-epistemológico de los números complejos que repercuten en el aprendizaje de los estudiantes. Al respecto, Pardo y Gómez (2007) señalan que los problemas que enfrentaron los matemáticos a lo largo de la historia para comprender los números complejos son similares a los que enfrentan los estudiantes en la actualidad. En este contexto, Abadía (2019), expone que los estudiantes utilizan propiedades válidas

en el Conjunto de los Números Reales ($\mathbb{R}$) para trabajar con el Conjunto de los Números Complejos, ($\mathbb{C}$) mostrando una clara dependencia de $\mathbb{C}$ con respecto a $\mathbb{R}$.

METODOLOGÍA

Según lo tratado en los antecedentes, las dificultades de los números complejos se relacionan con el desarrollo histórico-epistemológico de este saber, además, los libros de texto son un agente participante de la Transposición Didáctica, lo que implica que las organizaciones matemáticas expuestas en cada una de sus páginas tienen relación con la epistemología de los conceptos. Particularmente, esta investigación trata de responder la siguiente pregunta de investigación.

¿Cómo se relaciona el saber a enseñar de los números complejo con su historia y epistemología?

Para abordar esta interrogante, se establecieron lineamientos teóricos que permitieron sustentar esta investigación, a partir del análisis y posterior caracterización de las organizaciones matemáticas (desde la teoría antropológica de lo didáctico) provistas en los libros de texto, tomando como referencia el desarrollo histórico – epistemológico de los números complejos, desde la resolución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas, hasta comprender a los números complejos como un cuerpo no ordenado, para evidenciar la realización de una vigilancia epistemológica.

El estudio, de carácter cualitativo, consideró cada libro de texto como un estudio de casos. Para seleccionarlos se analizó previamente dos ajustes curriculares, el del año 2009 y el 2016, destacando los cambios entre ellos. En un primer momento, se recolectaron libros de textos chilenos y extranjeros, sin embargo, la selección se refinó, quedando libros de textos escolares chilenos, licitados por el ministerio de educación y libros de textos comerciales. Es por esto, que la selección de casos fue seleccionada en base a cuatro criterios: el primero, son libros de textos de mayor presencia en el mercado; el segundo, son libros de textos licitados por el ministerio; el tercero, libros de textos que desarrollan los números complejos y el cuarto criterio, libros de texto que hayan sido editados entre los años 2009 y 2020.

Cada uno de los libros de textos, tuvo una codificación de dos elementos, el primero, corresponde a un 1, si el libro de texto se rige por el ajuste curricular del 2009 y un 2, si el libro se rige por el currículum del 2016. El segundo, corresponde a una A, si el libro de texto es licitado por el Ministerio y una B, si es de carácter comercial.

Basándose en el desarrollo histórico-epistemológico y lo encontrado en cada currículum, se establecieron nueve contenidos descritos a continuación:

C1: contenido referente a la presentación de la unidad imaginaria.

C2: contenido referente a las potencias de i .

C3: contenido referente al concepto del número complejo.

C4: contenido referente al módulo y conjugado de un número complejo.

C5: contenido referente a la adición y sustracción de números complejos.

C6: contenido referente a la ponderación de un número complejo.

C7: contenido referente a la multiplicación entre números complejos.

C8: contenido referente a la división de números complejos.

C9: contenido referente a las potencias de números complejos.

Acto seguido, se observó la presencia de estos contenidos en cada uno de los libros de textos seleccionados, mostrados en la siguiente tabla, entendiendo que “X”, indica la presencia de dicho contenido en el libro de texto escolar.

Contenidos	1A (2012)	1B (2009)	2A (2020)	2B (2019)
C1	X	X	X	X
C2	X	X	X	X
C3	X	X	X	X
C4	X	X	X	X
C5	X	X	X	X
C6	X		X	X
C7	X	X	X	X
C8	X	X	X	X
C9	X	X		X

Tabla 1: Presencia de los contenidos en los libros de textos escolares.

Luego, se procedió a establecer las tareas, técnicas y posibles discursos tecnológicos presentes en el desarrollo de estos contenidos. A partir de lo anterior, se elaboró una matriz de análisis que fue validada progresivamente por criterio de saturación, refinando así el listado inicial de los contenidos y dando paso a la caracterización de la organización matemática de cada texto escolar.

Para realizar el análisis se definió en cada contenido los posibles tipos de tareas, técnicas y discursos tecnológicos que se podían encontrar en cada libro de texto escolar. Una vez encontrada dicha organización matemática, se procedió a realizar una contrastación con el desarrollo histórico-epistemológico de los números complejos y su diferenciación del estatus actual planteado en el marco de referencia. A modo de ejemplo, se tiene lo siguiente:

Para el contenido C8, se establecieron dos tipos de tarea ($T_{8.1}$ y $T_{8.2}$) la primera corresponde a encontrar el inverso multiplicativo de un número complejo dado, y la segunda se relaciona con dividir dos números complejos dados. Se expondrá un análisis del primer tipo de tarea mencionado en este párrafo.

Con respecto al libro de texto 1A. el inverso multiplicativo se expone en las propiedades de los números complejos, mencionando la existencia del inverso multiplicativo en el cuerpo de los números complejos (Figura 1)

Elemento inverso multiplicativo: existe un complejo que, multiplicado con otro complejo z dé el elemento neutro (1). Si $z = a + bi$, entonces su elemento inverso será:

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Es decir, $\forall z \neq 0 \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C} : (z \cdot z') = (z' \cdot z) = e$

Figura 1: Definición del inverso multiplicativo de un número complejo en 1A.

En este caso, se presenta el inverso multiplicativo de un número complejo, desde su definición, por consiguiente, se vuelve autotecnológico. Esto se muestra, a los números complejos como un cuerpo no ordenado, en consecuencia, este saber se ubica cercano al estatus actual de los números complejos, expuesto por Muñoz (2001).

En el libro de texto 1B, se expone la necesidad de buscar el inverso multiplicativo de un número complejo, a través de la división de dos de estos (Figura 2).

Resuelve $z = (13 - 13i) : (2 + 3i)$.

Sea $x + yi$ el inverso multiplicativo de $2 + 3i$. Entonces:

$$(2 + 3i) \cdot (x + yi) = 1 + 0i \Rightarrow (2 + 3i) \cdot (x + yi) = (2x - 3y) + (2y + 3x)i$$

$$\text{Luego, } (2x - 3y) + (2y + 3x)i = 1 + 0i.$$

Figura 2: Técnica para abordar el tipo de tarea $T_{8.1}$ en 1B.

Se utiliza un planteamiento de una ecuación, que se basa en la definición formal del inverso multiplicativo en los números complejos (Figura 3).

En general, dado un complejo $z = a + bi$, y su inverso multiplicativo $z^{-1} = x + yi$, se tiene que:

$$z \cdot z^{-1} = (a + bi) \cdot (x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i = 1 + 0i \Rightarrow z \cdot z^{-1} = 1 + 0i$$

Luego,

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Figura 3: Técnica para abordar el tipo de tarea $T_{8.1}$ en 1B.

Luego, se utiliza el método de Cramer para abordar el sistema de ecuaciones resultante de la igualdad mostrada, para así generalizar con la fórmula que permite el cálculo de cualquier inverso multiplicativo de un número complejo. La generalización de esta técnica es de carácter tecnológico, pues explica el desarrollo de la definición del inverso multiplicativo. Por otra parte, este saber se puede ubicar en una etapa algebraica del desarrollo histórico-epistemológico de los números complejos, debido al tratamiento que recibe para establecer la fórmula general.

En el caso de 2A, este tipo de tarea no se encuentra presente como enseñanza, lo que impide el acercamiento a la formalidad de la división de dos números complejos en esta organización matemática.

Finalmente, en 2B se define en la Figura 4, utilizando el concepto de conjugado y módulo de un número complejo


$$\text{Además, definiremos el inverso multiplicativo de } z \neq 0 \text{ como } z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Figura 4: Definición de inverso multiplicativo en 2B.

Esto es una transposición de la definición mostrada en Muñoz (2001), mostrándose como técnica de carácter autotecnológico, puesto que se le pide implícitamente al estudiante calcular el conjugado del número complejo dado, y dividirlo por su módulo al cuadrado, justificándose en la definición que plantea esta técnica planteada.

A partir de lo anterior se realizó una comparación entre las organizaciones matemáticas mostradas por cada libro de texto escolar.

CONCLUSIONES

Al finalizar este estudio, se encontró que los diferentes libros de textos, plantean distintos tránsitos entre representaciones en sus tipos de tareas. Estas se plantean dependiendo del contexto histórico de referencia y del contenido mínimo obligatorio propuesto por los ajustes curriculares que rigen a cada uno. En la comparación de libros de textos correspondiente al ajuste del año 2009, se encontró diferencias en el tratamiento gráfico de la multiplicación, división y potencias de números complejos, evidenciando que 1B, usa la trigonometría como técnica de abordaje y 1A usa transportador como técnica. Por otra parte, en la comparación de los libros de textos que se rigen por el ajuste curricular del 2016, 2B presentó una mayor profundización en el tratamiento de contenidos, ya que mostró la forma trigonométrica de los números complejos, lo que implicó un desarrollo geométrico de la multiplicación, división y potencias. Tanto en 2A como en 2B, se presentó la forma par ordenado, en consecuencia, se ubicó este saber en el siglo XIX, sin embargo, 2B tuvo una mayor incidencia al saber matemático que considera a los números complejos como cuerpo no ordenado.

Comparando ambos ajustes curriculares, se evidenciaron diversos cambios respecto a la profundidad y tratamiento de los contenidos que se presentaron en 1A y 2A. Principalmente, 2A profundizó en los contenidos, mostrando la forma par ordenado en los números complejos, mostrándolos como elementos del cuerpo de los números complejos, por consiguiente, la organización matemática en 2A fue ubicada a fines del siglo XIX y 1A a principios del siglo XIX. Sin embargo, se evidenció un retroceso curricular, al no abarcar las potencias de un número complejo como parte de los contenidos mínimos obligatorios en el ajuste curricular del 2016. En consecuencia, 1A, sin usar la trigonometría, logró profundizar la forma geométrica asociada a un número complejo en la operatoria.

Por otra parte, en 1B y 2B, se evidenció que el cambio curricular no afecta en la presentación de los contenidos, pues, ambos abarcaron la misma cantidad. Por otro lado, 2B profundizó en el módulo

de un número complejo, relacionándolo con la geometría analítica. Sin embargo, no demostraron diferencias sustanciales en el tratamiento de los conceptos, tareas, técnicas ni tecnologías.

A partir de lo investigado, se sugiere a los profesores diseñar actividades que tengan relación con el desarrollo histórico epistemológico, que mantengan una menor distancia con el saber matemático formal, para afrontar las posibles dificultades que surgen desde la historia de los números complejos. Además, se recomienda a los autores de los libros de textos, establecer organizaciones matemáticas relacionadas con la epistemología de los números complejos que sugiera un cambio en su construcción.

Referencias

- Abadía, A. (2019). *Análisis de las conceptualizaciones presentes en los errores en el trabajo con números complejos: Un estudio con estudiantes entre 16 y 18 años desde la teoría de campos conceptuales*. Trabajo de grado no publicado. Universidad Alberto Hurtado. Santiago, Chile.
- Bagni, G. (2001). *La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media superior*, Relime Vol. 4, Núm. 1, pp 45-61.
- Chevallard, Y. (1999). *L'Analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Du Didactique*. Recherches en Didactique des mathématiques. Vol 19 n°2, pp. 221-266.
- Gómez, B., & Pardo, T. (2007). *La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario*. PNA, 2(1), 3-15.
- Gómez, B. (2009). *El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas*. Seminario: Manuales Escolares. XIII SEIEM. Cantabria.
- Gotoman, E. (2014). *Teaching Complex Numbers in High School*. Louisiana State University and Agricultural And Mathematical College.
- Muñoz, J. (2001). *Introducción a la Teoría de Conjuntos*. Cuarta edición. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.
- Vidal, R. (2009). *Las raíces y radicales en libros de texto de Chile. Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las Matemáticas*. Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias de la Educación. Pontificia Universidad Católica, Santiago, Chile.



CONCEPCIONES DE PROFESORES SOBRE LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA TEMPRANA

Sara Tarisfeño Vasquez

Esta comunicación breve reporta el análisis cualitativo de las producciones de 39 profesores asistentes a un taller virtual, cuyo foco fue la enseñanza del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años. El objetivo fue determinar las concepciones de los profesores respecto algunos conceptos fundamentales presentes en el desarrollo y enseñanza del álgebra temprana. Metodológicamente, se aplicó un cuestionario con actividades que abordaron los conceptos mencionados, base para la enseñanza del álgebra en los primeros años. Como resultado de la experiencia, se exponen reflexiones sobre incorporaciones necesarias para enriquecer las concepciones de los profesores.

INTRODUCCIÓN

La investigación en torno al álgebra temprana ha generado una cantidad importante de evidencias que dan cuenta de cómo los niños reaccionan positivamente a actividades orientadas al desarrollo del pensamiento algebraico. Blanton y Kaput (2004) registran en estudiantes de tercer grado este razonamiento y declaran que dicho proceso cognitivo en los estudiantes se logra por la instrucción planificada. Esto lleva a cambios positivos con la necesaria capacidad del profesor para transformar de manera flexible una amplia gama de conceptos aritméticos, de manera que diversos ámbitos del pensamiento algebraico como, la aritmética generalizada o el pensamiento funcional, se entrelacen en la instrucción durante períodos prolongados de tiempo.

Para Kieran (2006) el pensamiento algebraico es aquel que permite analizar relaciones entre cantidades, reconocer estructuras, estudiar cambios, hacer generalizaciones, resolver problemas, modelizar, justificar, probar y predecir. Blanton y Kaput (2004) lo describen como el proceso mediante el cual se llegan a generalizar relaciones matemáticas, a partir de un conjunto de instancias particulares, y a expresarlas en formas cada vez más formales. Con respecto a lo anterior, se ha generado evidencia que da cuenta de lo mucho que los estudiantes son capaces en relación al pensamiento algebraico en los primeros años (Kieran, 2004; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2001; Blanton, 2005; Molina y Castro, 2006).

Como consecuencia de lo anterior Cañadas y Molina (2016), sugieren que estos resultados inician el interés hacia la formación de profesores para así, contribuir en ideas sobre cómo impulsar el desarrollo del pensamiento algebraico en el aula. La reafirmación de esta necesidad sobre la enseñanza del álgebra temprana y el desarrollo pensamiento algebraico (Hohensen, 2015; Castro, et al., 2011), afirman que se requiere de una conexión entre los procesos cognitivos asociados, los conceptos matemáticos que los generan, y el diseño y análisis de actividades de enseñanza que promuevan este pensamiento. De esta manera los profesores podrán desarrollar su propio conocimiento, y lograr el cambio que requiere la enseñanza del álgebra en los primeros años. Para corroborar lo anterior, el objetivo de este trabajo es indagar sobre las concepciones de profesores en ejercicio tienen sobre algunos temas asociados al álgebra temprana. Como lo es el pensamiento relacional, entendido como la actividad cognitiva que se realiza, por ejemplo, cuando se establecen relaciones entre los números o expresiones presentes en ambos lados de una igualdad.

Respecto a lo anterior en este trabajo se utilizarán como referencia teórica los significados del signo igual entregados en Castro y Molina (2007).

METODOLOGÍA

El estudio se enmarca en el paradigma cualitativo, con enfoque interpretativo (Stake, 2007), ya que su propósito es describir, interpretar y comprender las relaciones y el significado que dan los profesores a cierto conceptos clave asociados al Álgebra Temprana. La experiencia se llevó a cabo, dada la contingencia sanitaria, en un taller virtual.

Los participantes fueron 39 profesores de distintas regiones del país y diversos niveles educativos, generando un espacio para la discusión y reflexión sobre los procesos involucrados en el desarrollo de actividades que promueven el pensamiento algebraico temprano.

Para cumplir el objetivo propuesto se aplicó un cuestionario, compuesto de tres actividades que promueven el pensamiento algebraico y asociadas a temas matemáticos que deben abarcar en el Álgebra Temprana (Hohensen, 2015). Posteriormente se analizaron las respuestas junto a los profesores generando el espacio de discusión y reflexión. Las actividades propuestas fueron modificadas o adaptadas de otras investigaciones como parte de un estudio exploratorio de un trabajo doctoral, (Molina, Martínez y Ambrose, 2006).

RESULTADOS

La actividad que será analizada en este escrito es la asociada a la interpretación del signo igual. En la pregunta respectiva se propusieron dos igualdades de las formas, $a \pm b = c \pm d$, en las que uno de los valores no estaba presente. Los profesores debían establecer y declarar el número faltante y explicar la estrategia utilizada.

Al analizar los datos, las respuestas de los profesores y profesoras, respecto a los valores numéricos que satisfacían las igualdades $180 + 25 = [_] + 15$ y $175 - 25 = [_] - 16$, se pudieron clasificar en tres categorías.

A continuación, se muestran en la tabla 1, las determinadas y en la tabla 2 el resumen de la clasificación de las respuestas y posteriormente se analizan las justificaciones de las estrategias utilizadas por los profesores en la determinación de dichos valores.

Categoría	Descriptor
Correcto (C)	Ambos valores numéricos asignados son correctos
Parcialmente correcto (PC)	Solo uno de los valores numéricos asignados es correcto
Incorrecto (I)	No entrega los valores numéricos correctos o sin respuesta.

Tabla 1: Descripción de las Categorías

Categoría	C	PC	I
Frecuencia	14	14	11

Tabla 2: Respuestas de los profesores

Para la categoría C: solo dos de los catorce profesores justificaron estableciendo relaciones entre los valores numéricos presentes en cada lado de la igualdad, las justificaciones fueron “Como le agregamos 10 al 25 le quite 10 al 180. le quité 10 al 175” o “Descompuse los números, sumando o restando 10 en cada caso”; cinco justifican que se debe cumplir la igualdad, se interpreta esto como una concepción operativa del signo igual “porque se busca el número que satisface la igualdad”; tres de ellos resuelven el problema como ecuación, lo que hace pensar que interpretaron el valor faltante como una incógnita; y cuatro justifican desde “la similitud de los números”, “trasladar la decena” o “En ambos casos resté 10 al primer sumando y al minuendo”.

Para la categoría C, de los 14 profesores en ella, todos determinaron correctamente el primer valor numérico (170), el cual estaba asociado a la adición, pero erraron en el correspondiente a la sustracción. Cinco de ellos dieron como segundo valor numérico 185, y en las justificaciones de sus estrategias argumentaron que “lo que quité de un número y se lo agregué al otro” o “concepto de igualdad y operatoria inversa”, en este último se puede interpretar como: si en la adición quitó en la sustracción debe agregar pues al ser la operación inversa también debe aplicar el proceso inverso, es decir, sumar.

Para la categoría I, podemos identificar tres casos: el primero es siete de los profesores entrega dos valores numéricos incorrectos, en las justificaciones no se puede establecer de manera clara cuál fue el error, ya que sus argumentaban que “lo resolví con operaciones” o “sumé y resté”; el segundo tres profesores entregan solo un valor numérico, lo que se puede atribuir a la no comprensión del enunciado; tercer caso un profesor no entregó valores numéricos, su respuesta fue “no, no se satisfacen” y su justificación fue que realizó los cálculos y comprobó que no coincidían, en este caso particular puede suceder la no comprensión del enunciado o la comprensión solo operativa del signo igual.

REFLEXIONES

Las producciones de los profesores dan cuenta de una fuerte tendencia a una interpretación operacional del signo igual, y aunque se observa que, si bien los profesores evidencian pensamiento relacional al responder a la pregunta, en sus argumentos se manifiesta la falta de lenguaje técnico al referirse a la propiedad o relación matemática utilizada en su estrategia resolutoria, sus respuestas son más bien intuitivas, como “observé que son números similares, por lo que reste 10 y sume 10”, y algunos simplemente resuelven utilizando el concepto de ecuación para encontrar el valor desconocido.

Se pudo constatar las concepciones que los profesores participantes tienen sobre el signo igual, por lo que es necesario ampliar estas, desde el sentido operacional al relacional, como también promover actividades aritméticas que inviten a la observación y generalización de relaciones y propiedades matemáticas, elementos imprescindibles para la enseñanza del álgebra temprana.

Referencias

- Blanton, M., y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. J. Hoynes & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 135–142). Oslo.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares
- Castro, W., Godino, J. y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 25, 73-88. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/castro_godino_rivas_Union_025_011.pdf
- Hohensee, C. (2015). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(3), 231–257. DOI:10.1007/s10857-015-9324-9
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151. <https://gpcmaths.org/data/documents/kieran2004.pdf>
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 11-49). Brill Sense.
- Stake, R. (2007). *Investigación con Estudio de Casos*. Madrid, España: Morata.
- Molina, M., Martínez, E. C., & Ambrose, R. C. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA*, 1(1), 3.
- Molina, M., y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en early algebra.

CONCEPTUALIZACIÓN DEL OBJETO DE TRANSFORMACIÓN LINEAL A PARTIR DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN EL MODELO DE VAN HIELE

Christian Martínez, Carlos Vanegas-Ortega

El objetivo de la investigación es caracterizar el proceso de conceptualización que alcanzan estudiantes universitarios cuando abordan la unidad temática de transformaciones lineales a partir de una propuesta didáctica basada en el modelo teórico de Van Hiele. Para cumplir este propósito se utilizó una metodología cualitativa, con un diseño no experimental, longitudinal de panel. Lo que significa que se observó el fenómeno en su entorno natural y los sujetos de estudio fueron evaluados a medida que avanzaba la secuencia. Los resultados muestran que al secuenciar los contenidos abstractos del álgebra lineal a partir de un modelo de enseñanza geométrico, los estudiantes desarrollan la capacidad de razonar de manera visual el objeto de transformación lineal, lo que les permite establecer vínculos concretos con otros conceptos matemáticos más simples, como por ejemplo el de isometría o el de matriz asociada. Todo esto conlleva a que el objeto de aprendizaje no sea razonado de una manera mecánica, sino que tenga un significado concreto para el estudiante.

Modelo de Van Hiele, Secuencia didáctica, Álgebra lineal, Transformación lineal, Conceptualización

INTRODUCCIÓN

Distintas son las perspectivas para argumentar la necesidad de generar una planificación prolija a la hora de intentar que los estudiantes logren alcanzar el aprendizaje matemático, más aún si se habla de álgebra lineal, ya que la gran cantidad de aplicaciones que puede llegar a tener esta rama de la matemática hace que se enseñe en gran parte de los programas de educación superior (Trigueros & Oktaç, 2010). Desde una perspectiva científica se señalan diversos factores que pudiesen influir en el aprendizaje del álgebra lineal, entre ellos se puede mencionar la naturaleza epistemológica de esta rama de la matemática, los problemas con los diseños didácticos y el uso de diferentes tipos de representaciones semióticas (Trigueros & Oktaç, 2010).

Para poder clarificar las ideas enunciadas en el párrafo anterior, se hace necesario profundizar y ejemplificar estas situaciones, ya que muchas veces son pasadas por alto, y no se logra comprender en plenitud su relevancia. Los errores de comprensión de los conceptos asociados al álgebra lineal pueden clasificarse en 2 grandes conjuntos, los errores asociados al origen del obstáculo -errores epistemológicos- y los errores asociados a la ausencia de sentido del concepto (Caserio, Guzmán, & Vozzi, 2007). En el mismo contexto, Rosso y Barros (Rosso & Barros, 2013) hacen la misma clasificación, aunque la enuncian de forma distinta, los autores clasifican las dificultades en 2 tipos; conceptuales y cognoscitivos. Los errores conceptuales poseen relación con la naturaleza misma de la rama de las matemáticas -epistemológicos-, mientras que los cognoscitivos emergen a partir del pensamiento que construye el estudiante para comprender el concepto⁸.

⁸ Para los efectos de este documento, se utilizará esta última clasificación a la hora de enunciar las dificultades que se presentan a la hora de abordar el curso de álgebra lineal

Una de las estrategias planteadas por algunos docentes (Dorier, Robert, Robinet, & Rogalsiu, 2000) para solucionar en parte estas dificultades, consiste en aproximar los conceptos abstractos del álgebra lineal a partir de sus aplicaciones geométricas. Es decir, visualizar los fenómenos abstractos en función a espacios vectoriales que se puedan graficar. Si bien estas conclusiones no son absolutas, pues la geometría puede incidir de manera negativa en la capacidad de generalización que desarrolla un alumno (Dorier, Robert, Robinet, & Rogalsiu, 2000), esta estrategia sí puede presentar buenos resultados si se aborda de manera correcta (Dorier & Sierpiska, 2001)

El sustento teórico que valida esta conexión entre la geometría y el álgebra lineal es la relación existente entre el pensamiento algebraico y el pensamiento geométrico, y cómo este último facilita el desarrollo del primero (Martínez, 2021). Es debido a estos motivos que el modelo geométrico de Van Hiele parece ser una buena alternativa a la hora de planificar los contenidos de un curso de álgebra lineal, pues en sus primeras etapas aproxima el objeto matemático de manera visual, mientras que en sus niveles superiores va transitando hacia un pensamiento generalizable o algebraico (nivel deducción formal y rigor).

METODOLOGÍA

El enfoque utilizado para plantear la metodología del proyecto es un enfoque cualitativo, pues las herramientas que proporciona este paradigma con relación a la introspección, descripción y análisis de situaciones son más apropiadas para poder abordar el objetivo de caracterizar el proceso de conceptualización que generan los estudiantes cuando abordan la noción de transformación lineal. Específicamente, el diseño metodológico utilizado es lo que Hernández, Fernández y Baptista (2014) denominan diseño no experimental, longitudinal de panel, pues se busca observar un fenómeno en su contexto natural -no experimental-, además de analizar a los sujetos en más de un momento -longitudinal de panel-

La fuente principal de datos que se analizaron fueron las definiciones y respuestas escritas entregadas por los estudiantes durante el desarrollo de una secuencia didáctica. Esta situación se valida a partir de las características que enuncia el modelo de Van Hiele, pues señala que el desarrollo del nivel de razonamiento de un estudiante no sólo se ve reflejado en su capacidad de resolver problemas, sino que también en su capacidad de comunicar o expresar ideas – especificidad de lenguaje-.

Muestra

Para el desarrollo de esta investigación se trabajó con un curso de álgebra lineal de 24 estudiantes, pertenecientes a la carrera de Ingeniería en Estadística de una universidad de Santiago de Chile que es pinera en programas de ingeniería. Cabe destacar que si bien el curso es de 24 estudiantes sólo se logró hacer el seguimiento completo de 4 de ellos, pues debido a las dificultades que presentan los estudiantes en el contexto de clases durante la pandemia (online), la mayoría de ellos prefería trabajar de forma individual o su asistencia a las sesiones era intermitente, lo que dificultó el seguimiento del proceso de conceptualización y desarrollo de los distintos niveles de Van Hiele.

Intentando contextualizar, es posible mencionar que la muestra se caracteriza por estar compuesta por estudiantes de primer año universitario, es decir, sujetos entre 18 a 20 años. Otro elemento importante para destacar es el perfil del curso, pues al trabajar con alumnos del área de ingeniería,

el curso de álgebra lineal suele ser el primer acercamiento que estos tienen a la matemática abstracta. Situación que debe ser tomada en cuenta a la hora de construir las conclusiones.

En síntesis, la muestra puede ser clasificada como una muestra de 4 casos tipos (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014) y fue elegida debido a que las características que esta poseía eran idóneas para responder la pregunta de investigación.

La Secuencia didáctica

La secuencia de aprendizaje está estructurada a partir del modelo de Van Hiele, es decir se profundizará en la noción de transformación lineal usando como pilar dicho modelo geométrico. La planificación se compone de 4 clases, en formato virtual, de una hora cada una. Durante el ciclo los estudiantes desarrollarán una serie de 10 actividades, las cuales estuvieron secuenciadas en función a los distintos niveles propuestos por el modelo – visualización, análisis, clasificación-. En resumen, los estudiantes lograron observar de forma esquemática el comportamiento de distintas aplicaciones lineales, para posteriormente, analizar, clasificar y deducir sus características y propiedades.

La idea general de la secuencia es poder “aterrizar” la naturaleza abstracta del álgebra lineal a través de la visualización geométrica de los conceptos trabajados. Para esto se construyeron distintos recursos pedagógicos, los cuales se fueron entrelazando junto con el trabajo realizado en clases para facilitar la comprensión de los objetos de estudio. Específicamente la secuencia consta de 5 guías, un ciclo de videos y 2 actividades grupales de discusión. Para estas últimas se planificaron un conjunto de preguntas las cuales ayudaron a guiar el proceso de discusión que ejecutaron los estudiantes.

A modo de resumen, se señala que el objeto matemático utilizado para visualizar la noción de transformación lineal fue el de isometría, mientras que para analizar las propiedades de una transformación lineal se usó el objeto de matriz asociada.

RESULTADOS

A modo de síntesis, se desea presentar los resultados generalizados de la secuencia (omitiendo los resultados de cada caso, debido a la extensión requerida para ello), esto con el propósito de facilitar a comprensión de las posteriores conclusiones, las cuales se desarrollarán con base en estos resultados.

El primer resultado común a los 4 casos analizados es la consolidación temprana del nivel de visualización del objeto de transformación lineal. Los 4 estudiantes logran establecer diferencias entre el concepto de isometría y transformación lineal, lo que conlleva a que puedan generar un razonamiento visual de este último concepto. Si bien los razonamientos cada estudiante tiene sus particularidades, pues, por ejemplo, el estudiante 2 es capaz de señalar las condiciones visuales que debe cumplir una isometría y una transformación, y desde este punto comenzar a discriminar - situación que no se observa en los otros 3 casos-, es claro que el primer nivel de Van Hiele es alcanzados por los 4 alumnos al finalizar la clase 1. Es debido a la influencia de las actividades 1, 2 y 3, en donde los estudiantes visualizaron el comportamiento de ambos objetos matemático, tanto en el plano como en el espacio, que se logra construir el pilar visual del concepto de transformación lineal.

Otro resultado destacable es la capacidad que desarrollan los estudiantes para transitar entre la representación de vector y matriz. Esta situación es relevante, pues como se mencionó en la introducción, una de las principales dificultades asociada al aprendizaje del álgebra lineal son los problemas relacionados con los distintos tipos de representaciones semióticas que se utilizan en esta área de la matemática (Trigueros & Oktaç, 2010). Esta situación se explica a partir del desarrollo de las actividades 4 y 5, en donde los estudiantes efectuaron transformaciones isométricas multiplicando matrices, dichas transformaciones eran las mismas que realizaron en la actividad 1 de manera vectorial, por lo cual lograron observar de forma práctica la equivalencia existente entre matriz y vector. Las consecuencias de este fenómeno no se circunscriben sólo a la capacidad de transitar entre distintas representaciones semióticas, sino que también establecen las bases para generar otro tipo de relaciones, pues son la base para vincular las nociones de isometría, matriz asociada y transformación lineal. Realidad que lleva a que los estudiantes sean capaces de transitar -a distintos niveles- entre los objetos matemáticos evaluados en la secuencia didáctica.

En lo que respecta a las dificultades, en la mayoría de los casos se observan dificultades para transitar desde un nivel de análisis hacia un nivel de clasificación (niveles del modelo de Van Hiele), pues los estudiantes 2, 3 y 4 permanecen en el nivel de análisis hasta la sesión 3. Situación contraria a la planificada, ya que se esperaba que a partir de las actividades desarrolladas en la clase 3 estos alcanzaran a lo menos un nivel de transición entre análisis y clasificación, como lo desarrolla el estudiante 1. Este hecho se ratifica a partir de los resultados finales de la secuencia, pues 3 de los 4 estudiantes no logran alcanzar un nivel completo de clasificación (nivel 3).

Esta dificultad se atribuye a la poca profundidad que se logró alcanzar en el desarrollo del proceso de conceptualización del objeto de matriz asociada, además de que no existía la capacidad de razonar visualmente dicho objeto. Situación que termina perjudicando el proceso de conceptualización de los estudiantes, ya que los éstos era capaces de comprender propiedades de una matriz asociada (nivel 2), pero a la hora de querer profundizar hacia un nivel de clasificación, esta transición se veía dificultada por no poseer un razonamiento visual del concepto.

En síntesis, se observan resultados con un nivel aceptable y medido pues, si bien no se logró alcanzar el nivel de clasificación del objeto de transformación lineal en todos los casos, sí se logró, al menos, un nivel de transición entre análisis y clasificación. Lo que quiere decir, que todos los estudiantes son capaces de: razonar de manera visual el objeto de transformación lineal; reconocer componentes y propiedades de una transformación lineal; señalar las condiciones necesarias y suficientes que cumple una transformación lineal cuando se les consulta directamente por ellas.

CONCLUSIONES

Durante el desarrollo de la investigación se logró identificar los niveles de razonamiento geométrico que alcanzaron cada uno de los estudiantes que participaron en la intervención, tanto para el objeto de transformación lineal, como para el de matriz asociada e isometría. Como se mencionó anteriormente, se observaron buenos resultados. Pues, al finalizar la secuencia, los estudiantes son capaces de reconocer y explicitar de manera formal las condiciones de suficiencia que debe cumplir una transformación para ser considerada lineal. La importancia de este resultado radica en el hecho que los estudiantes no sólo repiten de forma mecánica las condiciones de suficiencia, sino que, para ellos estas tienen un significado concreto, ya que para los estudiantes las condiciones de linealidad poseen un significado visual: “transformar líneas en líneas”.

Dicho de otra manera, no sólo se consiguió clasificar a los estudiantes dentro de un nivel de razonamiento geométrico, sino que también se logró describir el proceso de conceptualización que estos generan cuando abordan la noción de transformación lineal.

Una posible proyección, es que a la luz de los resultados observados, es posible afirmar que implementar una secuencia didáctica de índole geométrica dentro del curso de álgebra lineal, ayuda a los estudiantes a sobrellevar de mejor manera la dificultad asociada a las transformaciones semióticas de los conceptos algebraicos. Específicamente se observa que al trabajar de manera visual el concepto de transformación lineal, se genera una mejor comprensión de la relación existente entre la transformación semiótica de matriz y vector, pues todos los estudiantes lograron establecer relaciones entre las nociones de vector y matriz, las cuales fueron utilizadas como puente para establecer relaciones más complejas.

Referencias

- Caserio, M., Guzmán, M., & Vozzi, A. M. (2007). Dificultades en el aprendizaje de matemática. Obstáculos y Errores en el aprendizaje del concepto de dependencia e independencia lineal. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 91-95). Camagüey: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Dorier, J. L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En D. Holton, *Teaching and learning of mathematics at university level* (págs. 255-273). Dordrecht: Springer.
- Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalsiu, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. En J.-L. Dorier, In *On the teaching of linear algebra* (págs. 85-124). Dordrecht: Springer.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. d. (2014). *Metodología de la investigación*. Ciudad de México: McGRAW-HILL.
- Martínez, C. (2021). *Conceptualización del objeto de transformación lineal a partir de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele*. Tesina de Magíster. Santiago.
- Rosso, A., & Barros, J. C. (2013). Entramado de lenguajes en álgebra lineal. En S. d. Uruguay (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (págs. 1156-1163). Montevideo: SEMUR.
- Trigueros, M., & Oktaç, A. (2010) ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista iberoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(4), 373-385.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE MCD DE PROFESORES EN EL CONTEXTO DE UN ESTUDIO DE CLASES

Francisco Bozo Cancino, Elisabeth Ramos Rodríguez

El presente trabajo muestra los resultados de un estudio cuyo objetivo fue analizar el Conocimiento Didáctico sobre el concepto de Máximo Común Divisor de docentes participantes de un programa de desarrollo profesional donde llevan a cabo un Estudio de Clases. Los resultados muestran que los docentes estudiados manifiestan conocimiento y comprensión de los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido, entre ellos, en relación a la selección y explicitación de los materiales virtuales de la clase.

MTSK, programa de desarrollo profesional docente, Estudio de clases, MCD.

Introducción

Uno de los medios para mejorar las prácticas en el aula es a través del perfeccionamiento constante a través de programas de desarrollo profesional, en donde la comprensión del rol docente en la formulación de actividades que logren una comprensión del objeto matemático que se pone en juego, junto con los conocimientos matemáticos, cobra relevancia al aspecto didáctico del contenido.

El modelo del conocimiento especializado del profesor de matemática o MTSK (Flores et al., 2016), nos da una apreciación acerca de las dimensiones que un profesor debe conocer tanto desde un punto de vista matemático como didáctico. A través del siguiente estudio se pretende analizar cómo estas dimensiones son evidenciadas en un Estudio de Clases por profesores participantes de un programa de desarrollo profesional para docentes de Matemática.

Antecedentes

El perfeccionamiento docente es algo fundamental en una sociedad cambiante, donde su conocimiento tanto pedagógico como especializado se vuelve fundamental para desarrollar una mejor enseñanza en las aulas del siglo XXI. Cardona (2013) indica que parece aceptada la necesidad de una formación, tanto inicial como continua, donde los profesores en ejercicio o en formación, adquieran competencias necesarias para asumir los cambios y hacerlos operativos en centros y aulas.

Bajo este contexto, Shulman (2001) señala que las principales fuentes para el desarrollo del conocimiento para la enseñanza son al menos cuatro: formación académica en la disciplina a enseñar, los materiales y el entorno del proceso educativo institucionalizado, la investigación sobre la escolarización, y la sabiduría que otorga la práctica.

El profesor debe tener un conocimiento tanto especializado como pedagógico, Flores-Medrano et al. (2016) se refieren al Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor (MTSK), el cual nos permite tener una mirada sobre cómo el docente debe poseer tanto un dominio del Conocimiento especializado de la Matemática como un dominio en el Conocimiento de la Didáctica de la

Matemática en su enseñanza. Flores-Medrano et al. (2016) indican que el conocimiento del profesor no se inscribe únicamente en el dominio matemático, sino que permea también el conocimiento didáctico del contenido. En relación con este Conocimiento Didáctico de la matemática, Flores-Medrano et al. (2016) proponen tres subdominios sobre este conocimiento. Dado que en este estudio nos centramos en el conocimiento didáctico, desglosaremos sus subdominios. En primer lugar, el KMT, el cual corresponde al Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática, en segundo lugar, el subdominio KFLM, correspondiente a las características del aprendizaje de las matemáticas y por último el subdominio KMLS, conocimiento de los estándares de Aprendizaje de las Matemáticas.

Metodología

Esta investigación presenta un enfoque cualitativo a través del análisis de una planificación realizada para un Estudio de Clases creada, analizada y puesta en ejercicio por un grupo de profesores dentro de un programa de desarrollo profesional realizado en una Universidad chilena.

El instrumento de recogida de datos es el plan final de Estudio de Clases (Isoda et al., 2007), realizado por los docentes a través del ciclo en que este se desarrolla. Las actividades fueron creadas por los profesores, a partir de retroalimentaciones, discusiones y análisis de expertos y pares.

El análisis e interpretación de los datos se llevará a cabo a partir de los elementos que entrega el modelo MTSK con el fin de evidenciar el impacto que tuvo el programa de desarrollo profesional en el conocimiento didáctico de sus docentes participantes.

Análisis

El análisis se realiza considerando las distintas actividades de la planificación de la clase.

En la primera actividad (Figura 1) se evidencia que el profesor manifiesta dos subdominios del conocimiento didáctico. Por un lado, se reconoce el conocimiento de la enseñanza de la matemática (MKT) y el Conocimiento de las características de los aprendizajes de las Matemáticas (KFLM), esto ya que se repara en primer lugar la dinámica individual de la actividad, lo que emerge desde teorías propias del docente, en las que se quiere generar un espacio de análisis y creación en particular por cada alumno para luego llevarlo al plano grupal, por otro lado, el subdominio de KFLM se observa en la actividad, desarrollando formas de aprendizajes a través del desarrollo del objeto matemático.

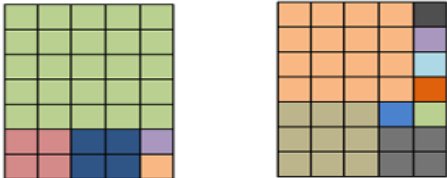
Tiempo	Actividades	Gestión del aprendizaje
6 min	De manera individual los alumnos: - Pintan cuadrados de diferente tamaño sobre la cuadrícula de 7x 5. - Utilizan colores diferente para identificar los distintos cuadrados. - Pintan las dos cuadrículas de 7x5 con distintas configuraciones	El docente copia el enlace de la hoja de cálculo de <i>Google Sheets</i> en el chat de la plataforma <i>Zoom</i> y les entrega las indicaciones para abrir la hoja de cálculo. Cada estudiante trabaja en su propia hoja de cálculo. El docente monitorea el trabajo de los estudiantes, revisando cada hoja de la plataforma, comprobando que indaguen en la cantidad de cuadrados de medida 1x1, 2x2, 3x3, etc., que cubren totalmente la cuadrícula. El docente de prever el uso de la herramienta de pintado.
Instrucciones: - Pinta cuadrados de diferente tamaño sobre toda la cuadrícula de 7 x 5. - Cada cuadrado que pintes debe ser de un color diferente. - Pinta las dos cuadrículas con distintas configuraciones de cuadrados. - Luego responde las preguntas que aparecen más abajo. 		

Figura 1: Actividad 1 individual del Plan de Clases.

La clase continúa con el desarrollo individual de la actividad 2 (**Figura 2**) enmarcándose en el subdominio del conocimiento de los estándares de aprendizajes de las matemáticas (KMLS). Esto se observa a través del desarrollo del contenido matemático, conocimientos conceptuales y procedimentales en el conteo e identificaciones de medidas laterales de los cuadrados y la secuenciación desde una representación gráfica del contenido a una representación numérica. Así también, desde la gestión del aprendizaje, se observa presencia del subdominio del MKT en donde el docente realiza devoluciones correspondientes al correcto conteo por parte de los alumnos, manteniendo el foco en los cuadrados de distintas dimensiones.

Tiempo	Actividades	Gestión del aprendizaje												
3 min	De manera individual los alumnos: - Contar y escribir la cantidad de cuadrados que encontraron por cada cuadrícula. - Identificar los cuadrados pintados según sus medidas laterales.	El docente intenciona el correcto conteo de cuadrados sobre la cuadrícula.												
<table><tr><td>¿Cuántos cuadrados en total encontraste en cada cuadrícula?</td><td></td></tr><tr><td>¿Cuántos cuadrados de 1 x 1?</td><td></td></tr><tr><td>¿Cuántos cuadrados de 2 x 2?</td><td></td></tr><tr><td>¿Cuántos cuadrados de 3 x 3?</td><td></td></tr><tr><td>¿Cuántos cuadrados de 4 x 4?</td><td></td></tr><tr><td>¿Cuántos cuadrados de 5 x 5?</td><td></td></tr></table>			¿Cuántos cuadrados en total encontraste en cada cuadrícula?		¿Cuántos cuadrados de 1 x 1?		¿Cuántos cuadrados de 2 x 2?		¿Cuántos cuadrados de 3 x 3?		¿Cuántos cuadrados de 4 x 4?		¿Cuántos cuadrados de 5 x 5?	
¿Cuántos cuadrados en total encontraste en cada cuadrícula?														
¿Cuántos cuadrados de 1 x 1?														
¿Cuántos cuadrados de 2 x 2?														
¿Cuántos cuadrados de 3 x 3?														
¿Cuántos cuadrados de 4 x 4?														
¿Cuántos cuadrados de 5 x 5?														

Figura 2: Actividad 2 individual del Plan de Clases.

Posterior a ello, los docentes determinan el desarrollo de las actividades de la clase en un momento grupal (**Figura 3**), dividiendo al curso general en equipos de trabajo. Se identifica en esta parte de la clase el subdominio de MKT, donde las teorías institucionales y propias determinan al profesor

realizar el trabajo de forma colaborativa, incentivando el debate y reflexión grupal respecto a la división correcta de la cuadrícula y su posterior pintado. Por otro lado, se aprecia el dominio de KFLM, donde se intenciona por parte de los docentes la interacción del contenido matemático, en donde los alumnos deben analizar e identificar criterios de selección en cuanto a aquel que realizó una mínima cantidad de cuadrados pintados, determinando cómo y cuántos fueron.

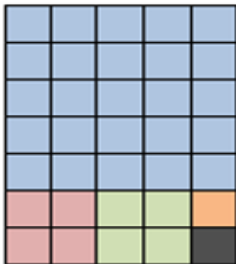
Momento de trabajo grupal		
Tiempo	Actividades	Gestión del aprendizaje
5 min	De manera grupal los alumnos: -Identifican cual de ellos encontró la menor cantidad de cuadrados sobre la cuadrícula 7 x 5. -Cuál fue la cantidad menor de cuadrados en la cuadrícula seleccionada.	El docente intenciona la comparación entre la cantidad de cuadrados que pintaron los estudiantes sobre las cuadrículas. Si no hay estudiantes que generen el mínimo de cuadrados (5), gestiona la búsqueda de esta cantidad. El docente prevé el uso de la herramienta de pintado.
¿Cuál es la cantidad mínima de cuadrados en la cuadrícula de 7 x 5? 		

Figura 3: Actividad 1 grupal del Plan de Clases

En la actividad grupal 2 (**Figura 4**), se identifica el subdominio de KFLM, donde docentes intencionan la interacción con el contenido matemático, para que los alumnos analicen y debatan respecto a la mínima cantidad de cuadrados que se pueden generar.

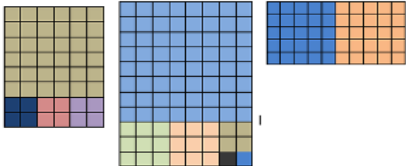
Tiempo	Actividades	Gestión del profesor
10 min	Los alumnos en conjunto deben: -Determinar la cantidad mínima de cuadrados que cubre cada cuadrícula. -Pintar los cuadrados de diferente color en cada cuadrícula.	El docente gestiona los diálogos de los alumnos, para que encuentren una estrategia sobre el pintado de las cuadrículas, de modo de encontrar la mínima cantidad de cuadrados. El docente prevé el uso de la herramienta de pintado.
Instrucciones: - Pinten la mínima cantidad de cuadrados de diferente tamaño sobre las siguientes cuadrículas. - Acuerden la respuesta y pinten la configuración. Cuadrícula 8 x 6 Cuadrícula 11 x 8 Cuadrícula 5 x 10 		

Figura 4: Actividad 2 grupal del Plan de Clases.

El KMT está presente en cómo el docente favorece el aprendizaje al utilizar las herramientas de la plataforma *Google Sheets*, permitiendo a los alumnos ordenar gráficamente los resultados para

luego ordenarlos en tablas de respuestas, logrando así un mejor análisis de estos. En el mismo plano se observa el subdominio del KFLM, donde el profesor logra analizar y visualizar dificultades que puedan desarrollar a partir de obstáculos en la determinación de las cuadrículas.

En la actividad 3 (**Figura 5**), se aprecia el conocimiento didáctico de los docente en cuanto a la propuesta de las actividades sostenidas por los subdominio de KFML, donde se insta a que los alumnos, a través de sus conocimientos e interacciones reconozcan la cantidad de cuadrículas, y a partir de esto, reconozcan la concordancia entre el lado más pequeño de la cuadrícula pintada y el MCD de los lados de la cuadrícula, con esto el docente busca analizar las concepciones de los estudiantes sobre la matemática. A su vez, el conocimiento didáctico a través del subdominio del KMLS se observa en como se secuencia las actividades para llegar a la comprensión final del objeto matemático, MCD, a través de la cuadrícula y el lado del cuadrado más pequeño pintado.

Tiempo	Actividades	Gestión del profesor
5 min	-Determinar la medida del lado del cuadrado más pequeño de cada cuadrícula.	El docente dirige a los estudiantes para que observen la medida del cuadrado más pequeño de cada cuadrícula, y luego registrarla en la tabla correspondiente. El docente guía a los estudiantes a observar y comparar las tablas del cálculo del MCD y la medida del lado del cuadrado más pequeños, intencionado la búsqueda de un patrón entre ambas.

¿Cuánto mide el lado del cuadrado más pequeño encontrado en cada cuadrícula

Cuadrículas de 7 x 5	
Cuadrículas de 8 x 6	
Cuadrículas de 11 x 8	
Cuadrículas de 5 x 10	

¿Qué ven?

¿Por qué?

Figura 5: Actividad 3 grupal Plan de Clases

Conclusiones

En el marco del Modelo del MTSK se observa que los docentes logran desarrollar una secuencia de actividades a través del Estudio de Clases enmarcado por los distintos subdominios del Conocimiento Didáctico. Los docentes continuamente analizan y permiten a los alumnos dar a conocer sus concepciones matemáticas, el desarrollo de las actividades

En primer lugar, desde el análisis del subdominio del conocimiento de la enseñanza de la matemática (MKT), los docentes logran formular una propuesta en la cual se evidencia un conocimiento de las herramientas, en este caso virtuales, para generar la comprensión del objeto matemático, permeando toda la actividad a desarrollar en cada una de las etapas de esta, tanto individuales, como grupales. Tal como el subdominio señala, el conocimiento de la herramienta logra identificar su utilidad tanto específica, como general para el desarrollo del contenido, debiendo conocer a profundidad qué elemento generar aprendizaje, en el caso particular del Estudio de Clases, el desarrollo desde la plataforma Google Sheet para generar cantidad de cuadrados que corresponderán al cálculo del MCD.

Así también se logra observar a través de la planificación cómo los docentes, en relación con el MKT, destacan las interacciones que proceden a cada actividad, generando las devoluciones y qué es lo que se espera que conozca el mismo para el desarrollo de las actividades; juega un rol importante y se logra observar como las teorías institucionales e individuales cobran relevancia en el proceder de la planificación en la actividad, generando espacios de trabajo colaborativo, identificando esta propuesta como un aporte al desarrollo de la matemática y el pensamiento matemático en los alumnos.

Por último, el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemática (KSML), en una mirada más global, se puede observar como los docentes, a través del Estudio de Clases, generan actividades que permiten a los alumnos situarse en un contenido matemático, analizando en secuencialidad la obtención, en este caso, del MCD. Por otro lado, en conocimiento del curriculum nacional, cabe destacar que el cálculo del MCD no está presente, y más bien es un contenido el cual se enseña en sexto básico por los profesores, pero no visualizado en el programa de estudio, ni curriculum. La importancia de esto es destacar el conocimiento de las bases curriculares por parte de los docentes y como generar, a propósito de la ausencia de estas, una secuencia de actividades a través del Estudio de Clases que pueda ayudar y ser útil a docentes del país.

Como conclusión, si apreciamos en detalle el desarrollo de la clase diseñada en el Estudio de Clases, propuesta dentro del programa de desarrollo profesional, se observa que los docentes manifiestan Conocimiento didáctico sobre el MCD.

Agradecimientos: Esta investigación está parcialmente financiada por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo, ANID, del Gobierno de Chile, proyecto FONDECYT 11190553.

Bibliografía

- Cardona, J. (2013). *Epistemología del saber docente*. UNED. Universidad Nacional de Educación a Distancia. España
- Flores-Medrano, Carrillo, J., Contreras, J.L., Muñoz-Catalán, C. y Liñán M. (2016). *El papel del MTSK como Modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático*. *Bolema*, 30, 204-221.
- Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Shulman, L. (1987). Conocimiento y Enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.

DEL INFINITO POTENCIAL AL ACTUAL: UN RECORRIDO HISTÓRICO

Tamara Díaz Chang, Elizabeth Hernández Arredondo

En este trabajo abordamos el análisis histórico y epistemológico del infinito como concepto matemático, mirado bajo el lente de la metáfora conceptual, precisando obstáculos que impidieron, por largos períodos de nuestra historia, la aceptación del infinito actual. Argumentamos que este análisis es un tema de especial relevancia en las agendas de investigación de la didáctica de las matemáticas. La metodología implementada se apoya en una investigación bibliográfica de carácter cualitativo y argumentativo fundamentada en una meta-etnografía. Se identifican distintas metáforas conceptuales que profesores y estudiantes deben considerar y desarrollar para lograr una comprensión adecuada del infinito matemático.

Infinito actual, metáfora conceptual, meta-etnografía.

INTRODUCCIÓN

El infinito matemático es uno de los conceptos más complejos a los que se enfrentan estudiantes y profesores en el aprendizaje de las matemáticas, y por ello ha sido ampliamente estudiado desde diferentes perspectivas teóricas en didáctica de la matemática. A pesar de esto, no es posible afirmar que comprendemos los complicados procesos cognitivos que se desarrollan en relación con su aprendizaje. Existen numerosos trabajos (e.g. Arrigo y D'Amore, 2004; Fischbein, 2001; Tall, 1991) que muestran la dificultad y complejidad que presenta, en este caso, el obstáculo epistemológico.

El objetivo de esta investigación es identificar las dificultades que, en relación con las metáforas conceptuales, el estudiante debe enfrentar durante el aprendizaje de este concepto matemático. Para lograr esto nos proponemos obtener información sobre las estructuras cognitivas a través de las cuales se desarrolló el proceso de axiomatización del infinito matemático en su tránsito del infinito potencial al infinito actual, tratando de precisar los obstáculos que impidieron su aceptación durante distintas etapas de la historia, y que a su vez, el estudiante debe desarrollar para lograr una comprensión adecuada de dicho concepto matemático.

Argumentamos que este análisis es un tema de especial relevancia a considerar en las agendas de investigación dentro de la didáctica de las matemáticas.

ANTECEDENTES

Para fundamentar nuestro análisis nos apoyaremos en los estudios de lingüística cognitiva realizados por Lakoff y Núñez (2000), que se basa en la teoría de la *Embodiment Cognition* (EC) (Rosch, Thompson, y Varela, 1991), y que propone que ciertos procesos constituyentes de la cognición están basados y se derivan de la interacción del medio con el individuo. La lingüística cognitiva nos ofrece un conjunto de técnicas para estudiar estructuras conceptuales implícitas en nuestras experiencias y que son, en gran parte, inconscientes, jugando un rol fundamental en la construcción de ideas matemáticas (Gallese y Lakoff, 2005; Lakoff y Núñez, 2000).

Desde esta perspectiva, ciertas imágenes esquemas pueden derivar en metáforas conceptuales, que constituyen asociaciones inconscientes entre dominios conceptuales diferentes, en el que la

estructura del dominio de partida infiere una estructura en el dominio de llegada. El origen de una metáfora conceptual puede ser una experiencia del mundo físico, o una conceptualización ya existente, creando un vínculo que conecta conceptos o subdominios, fuera o dentro de las matemáticas.

Por otra parte, una integración conceptual constituye una asociación o enlace entre dominios de partida conceptualmente diferentes. Específicamente en este caso se parte de dos dominios que se conectan para “proyectarse” selectivamente en un dominio de llegada donde se desarrolla una estructura nueva.

MÉTODO

La metodología implementada se apoya en la investigación bibliográfica de carácter cualitativo y argumentativo. La selección de la literatura, y el análisis e interpretación de la información extraída de dicha revisión bibliográfica, se basa en la meta-etnografía (Noblit y Hare, 1988) que nos permite sintetizar de manera sistemática los resultados de nuestra investigación y dar respuesta focalizada a las preguntas establecidas, y nos proporciona una forma específica de realizar meta-síntesis cuya meta va más allá del resumen y el análisis de datos, donde hallazgos de estudios originales se convierten en datos que se analizan mediante un proceso riguroso de interpretación y comparación de ideas, conceptos y perspectivas relevantes, conduciendo así a la síntesis esperada.

La lingüística cognitiva, que se basa en la teoría de la EC y se apoya en el estudio científico de las estructuras conceptuales humanas, del lenguaje y de las peculiaridades de nuestro cerebro, proporciona un análisis plausible de la naturaleza y del devenir histórico del infinito matemático en sus dos categorías principales: el infinito potencial y el infinito actual.

ANÁLISIS

Se realizó un análisis de la evolución del infinito como concepto matemático a lo largo de la historia, centrándonos en cuatro períodos históricos principales de su desarrollo, y analizamos dichos períodos históricos reconociendo ideas y paradojas contra intuitivas que surgieron en relación con éste, identificando así las metáforas conceptuales que se originaron en su proceso de axiomatización.

Nuestro análisis muestra que los cardinales y ordinales transfinitos fueron el resultado de una ingeniosa combinación de la metáfora conceptual “misma cantidad como emparejamiento”, con la integración conceptual que se conoce como la “metáfora básica del infinito” (Lakoff y Núñez, 2000). La extensión metafórica realizada por Dedekind y Cantor del concepto de “emparejamiento” y su aplicación a conjuntos infinitos constituyó un extraordinario logro conceptual en las matemáticas. En el proceso, no solo crearon un nuevo concepto matemático, sino también, nuevas matemáticas, que no podrían haber sido creadas sólo con nuestras nociones ordinarias cotidianas de “misma cantidad que” y “más que”.

Sin embargo estas ideas resultaron en su tiempo, y aún hoy nos resultan, contra-intuitivas. En nuestro sistema conceptual ordinario, estas teorías no pueden ser ciertas. Pero si consideramos que nuestros mecanismos cognitivos se ven limitados por nuestras sensaciones motosensoriales, que en el caso de los números transfinitos se basan en esquemas de contenedor para colecciones finitas y sus jerarquías, en mecanismos básicos de discriminación cuantitativa determinados genéticamente,

y en experiencias cinestésicas relacionadas con la comparación de tamaños y correspondencia de elementos (Lakoff y Núñez, 2000), entonces podemos comprender el origen de nuestras intuiciones y hacernos conscientes de estas limitaciones.

CONCLUSIONES

Nuestro análisis muestra que todas las instancias del infinito actual, tanto los cardinales y los ordinales transfinitos, así como los infinitesimales, “se completaron metafóricamente” a lo largo de la historia a través de metáforas conceptuales. Mientras que en las matemáticas que se desarrollaron a lo largo de los diferentes períodos de la historia, los infinitos actuales que aparecieron en contextos distintos, se caracterizaron por diferentes conjuntos de axiomas en diferentes campos aparentemente no relacionados, cognitivamente, su construcción se pueden caracterizar, esencialmente, por el mismo mecanismo cognitivo: la “metáfora básica del infinito” (Lakoff y Núñez, 2000).

De todo lo anterior concluimos que la reconstrucción histórico-epistemológica del infinito matemático bajo la mirada de la metáfora conceptual pudiera ser de gran utilidad para la comprensión de dificultades a las que se enfrentan estudiantes y profesores en los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con el infinito matemático, y debería ser un elemento a considerar en las agendas de investigación dentro de la didáctica de las matemáticas.

Desde nuestra perspectiva este tipo de estudios es especialmente importante, no solo porque incide notablemente en la formación matemática de profesores y estudiantes, contribuyendo a ampliar y enriquecer el horizonte cultural desde donde se aborda el estudio de los conceptos matemáticos, sino también porque nos permite identificar metáforas y mecanismos cognitivos que el profesor debe considerar y el estudiante debe desarrollar para superar dificultades y obstáculos, y así lograr una comprensión adecuada de un determinado concepto matemático, y en este caso en particular, del infinito matemático.

Referencias

- Arrigo, G. & D’Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, 16, 2, 5-20.
- Duval, R. (1988). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigación en Matemática Educativa II*. 173–201. Cd. de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational studies in Mathematics*, 48, 309-329.
- Gallese, V. & Lakoff, G. (2005). The brain’s concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, 22, 3, 455-479.
- Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from*. Basic Books, New York
- Noblit G.W. & Hare R.D. (1988). *Meta-ethnography: synthesizing qualitative studies*. Sage Publications, California.
- Rosch, E., Thompson, E. & Varela, F. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. MIT Press, Cambridge, MA
- Tall, D. (1981). Intuitions of infinity. *Mathematics in School*, 10, 3, 30-33.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: ANÁLISIS DE SUS SIGNIFICADOS EN EL CURRÍCULO CHILENO DE CUARTO MEDIO

Ismael Araya-Naveas, Jaime I. García-García

Este trabajo presenta un avance de un proyecto de investigación cuyo objetivo es caracterizar los significados de la distribución binomial promovidos por el currículo chileno de cuarto medio. Para ello se utilizarán algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), con las cuales se analizará el Texto del Estudiante y el Programa de Estudio de Cuarto Medio para Formación General. Específicamente, se considerará la tipología de objetos matemáticos primarios denominados 'elementos del significado', que servirán para determinar los significados de la distribución binomial que promueve el currículo chileno en cuarto año medio. Posteriormente, se evaluará la representatividad de los significados encontrados con respecto al significado holístico de referencia, el cual está siendo desarrollado en una investigación paralela. Con este trabajo, consideramos apoyar a profesores de matemática, entregando orientaciones sobre los significados parciales de la binomial para planificar, reorganizar o diseñar propuestas didácticas que desarrollen la comprensión del estudiante.

Distribución binomial, Enfoque Ontosemiótico, Significado, Análisis de libros de texto

INTRODUCCIÓN

Diversos autores reconocen la importancia del libro de texto como recurso didáctico y lo consideran como una herramienta primordial para estudiantes y maestros. Gea et al. (2013) destacan su aporte al profesor y al estudiante, ya que, al ser un recurso muy utilizado, influye en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Escolano (2009) menciona que los libros de texto son soportes del currículo, además de ser una representación del mundo y del entorno cultural. Esto quiere decir que el texto podría permitir a los estudiantes relacionar los contenidos escolares con su propia realidad. Por otra parte, Cordero y Flores (2007) indican que el libro de texto regula prácticamente todas las acciones de enseñanza y aprendizaje, y que, por tanto, juega un rol importante en el discurso matemático escolar; a pesar de que no compartimos totalmente lo señalado por ellos, ya que consideramos que no necesariamente el libro de texto normará todas las acciones del proceso de enseñanza y aprendizaje, sí destacamos sus palabras, puesto que es una muestra de la gran relevancia que algunos autores atribuyen a este recurso didáctico. Ortiz et al. (2001) manifiestan que una de las preocupaciones del profesor es proporcionar un aprendizaje adecuado a los estudiantes, y para ello se destaca el uso del libro de texto como recurso didáctico. Alvarado y Segura (2012) valoran el análisis de libros de texto, ya que estos proveen información valiosa a los profesores (por ejemplo, para confeccionar instrumentos de evaluación). Además de lo anterior, proporcionan ideas para mejorar su labor docente y ayudan a detectar dificultades que podrían presentar los estudiantes al trabajar con un determinado texto de estudio (Alvarado & Batanero, 2008). Finalmente, de acuerdo con Gea et al. (2013), los estudios acerca de libros de texto de matemática se han abordado extensamente, sin embargo, esto excluye al eje de estadística y probabilidad, donde la cantidad de estudios es notoriamente menor.

En Chile, la distribución binomial se presenta formalmente, de acuerdo con las Bases Curriculares (MINEDUC, 2019), en el Plan de Formación General de 4° medio, dentro del Objetivo de Aprendizaje 2, el cual se plasma en el Texto del Estudiante como Unidad 3: La toma de decisiones en situaciones de incerteza, Lección 5: Toma de decisiones analizando la distribución binomial. Idéntica estructura se presenta en el Cuaderno de Actividades, el cual consideramos como una extensión del Texto del Estudiante

García-García et al. (2014) indican que hay escasos trabajos referidos a la distribución binomial en el campo de la investigación en didáctica. Además, destacan su relevancia, al señalarla como una de las distribuciones discretas más importantes de las probabilidades, esto fundamentado por su amplio campo de aplicación y su relación con la distribución normal. Por otra parte, algunos autores señalan directamente a la binomial como la distribución de variable discreta más importante, y destacan su presencia en cualquier curso introductorio de probabilidad y estadística (Landín & Sánchez, 2010; Mayén & Salazar, 2014). Cid et al. (2017) argumentan que se justifica su presencia en el currículo chileno por la gran variedad de conceptos involucrados en su estudio y su extenso campo de aplicación, ya sea en la vida cotidiana, en ciencias básicas o en ciencias de la ingeniería, donde se utiliza como herramienta de modelación.

ÁREA PROBLEMÁTICA

Pino-Fan et al. (2019) consideran que un criterio que permitiría valorar documentos curriculares, tales como libros de texto o programas de estudio, deben ser las investigaciones en donde se evalúe la representatividad de los significados pretendidos para un determinado objeto matemático con respecto al significado holístico de referencia. Adicionalmente, indican que la representatividad de los significados permite determinar la pertinencia epistemológica de los ajustes curriculares que se realizan periódicamente. A nuestro entendimiento, aquí se plantea la necesidad de realizar este tipo de estudios con diferentes objetos matemáticos y de esta manera, poder efectuar una valoración más completa de un determinado libro de texto o programa de estudio, y los significados que pretende promover. Asimismo, Pino-Fan et al. (2013) sostienen que esta representatividad es uno de los criterios que favorece la valoración de la instrucción matemática y se debe tomar en cuenta al planificar actividades matemáticas.

Por otro lado, como indicamos anteriormente, la distribución binomial tiene una gran importancia dentro de la probabilidad; no obstante, es considerada como un tema complicado por estudiantes y profesores; esto lo evidencian los diferentes estudios que evalúan el nivel de razonamiento que se alcanza sobre este objeto matemático. Con base en ello, de acuerdo con lo que mencionan Cid et al. (2017), para avanzar en una propuesta de enseñanza para la distribución binomial, es necesario determinar las dificultades en su comprensión y realizar un análisis sobre su presencia en los libros de texto. A su vez, Parra (2015) menciona que, para evaluar y diseñar ciclos de formación de profesores, es necesario reconstruir el significado pretendido por el currículo de matemática de un determinado objeto matemático, así como evaluar su representatividad respecto del significado holístico de referencia.

El primer acercamiento desarrollado al estado de la cuestión nos permite dilucidar que hay poca investigación acerca de la distribución binomial en didáctica de la matemática, así como su análisis en los currículos escolares, a pesar de la importancia que se le atribuye dentro del área de la probabilidad y las dificultades que se han expuesto en algunos estudios previos. Por todo lo anterior,

consideramos relevante realizar el análisis de los significados parciales promovidos por el currículo chileno acerca de la distribución binomial, con miras a dar pautas sobre un acercamiento de estos significados en ciclos de formación de profesores de matemática de Educación Media, o bien, para entregar orientaciones al profesor en servicio sobre estos significados para planificar, reorganizar o diseñar propuestas didácticas que desarrollen la comprensión del estudiante acerca de la binomial.

MARCO TEÓRICO: EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO (EOS)

El estudio se fundamenta considerando las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), desarrollado por Godino y sus colaboradores en diferentes trabajos (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002). Para este sistema teórico, la Didáctica de la Matemática debe centrarse en comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, así como guiar la mejora de dichos procesos. Se considerará la tipología de objetos matemáticos primarios, denominada “elementos del significado”, que incluye situaciones-problemas, lenguaje, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, los cuales describiremos brevemente a continuación:

- Lenguaje: términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.
- Situaciones-problemas: actividades, tareas o ejercicios, ya sean extra-matemáticas o intra-matemáticas.
- Conceptos-definición: construcciones o elementos que son introducidos mediante definiciones o descripciones de un objeto.
- Propositiones: enunciados o afirmaciones sobre los conceptos.
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, métodos de ejecutar determinadas acciones.
- Argumentos: enunciados y razonamientos usados para validar, justificar o explicar las proposiciones y los procedimientos, o la validez de la solución a un problema.

Significado holístico de referencia de la distribución binomial

El significado holístico de referencia de un objeto matemático se construye a partir de su significado global y de su significado de referencia. El primero abarca los significados parciales del objeto, mientras que el segundo corresponde a los sistemas de prácticas utilizados como referencia para determinar los significados que se tomarán en cuenta en un determinado proceso de estudio (Pino-Fan et al., 2011). Adicionalmente, se entiende por ‘significados parciales’ como cada uno de los sistemas de prácticas que están asociados a una configuración epistémica de objetos y procesos.

De manera paralela a este trabajo, se está realizando un estudio de tipo histórico-epistemológico para establecer el significado holístico de referencia de la distribución binomial (Proyecto de Investigación Universidad de Los Lagos Regular R22/19), desarrollado por un equipo de trabajo dirigido por el Dr. García-García. El resultado de ese estudio será nuestro marco referencial de la distribución binomial, el cual se tomará como base para el análisis de contenido del libro de texto y programa de estudio de 4° medio, analizando cada práctica matemática promovida en estos documentos y se determinará cómo se presentan los elementos del significado en cada uno de ellos.

PREGUNTA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Con base en lo anterior, la pregunta de investigación que nos planteamos y que guiará el desarrollo del presente trabajo es:

PI: ¿Cuáles son los significados parciales de la distribución binomial pretendidos por el currículo chileno de matemática (programa de estudio y texto del estudiante) de cuarto año medio?

Para dar respuesta a esta interrogante, formulamos el siguiente objetivo general:

OG: Caracterizar los significados parciales de la distribución binomial pretendidos por el currículo de matemática (considerando el programa de estudio y el texto del estudiante) de cuarto año medio de Chile.

Para lograr nuestro objetivo general, delimitamos los siguientes objetivos específicos:

- OE1: Determinar el significado de la distribución binomial pretendido por el Programa de Estudio.
- OE2: Determinar el significado de la distribución binomial pretendido por el Texto del Estudiante.
- OE3: Evaluar la representatividad del significado de la distribución binomial respecto del significado holístico de referencia.

METODOLOGÍA

Se utilizará una metodología cualitativa de tipo descriptiva e interpretativa, en la cual, los documentos a analizar son: Programa de Estudio Cuarto Medio para Formación General, Texto del Estudiante Matemática 3°-4° medio y Cuaderno de Actividades Matemática 3°-4° medio; dentro de las secciones descritas anteriormente.

La metodología utilizada para realizar nuestro análisis es una adaptación de la propuesta por Parra (2015) y consta de cuatro fases (ver Figura 1):

- Fase 1: Estudiar y analizar el Programa de Estudio Matemática 4° medio para Formación General, propuesto por el Ministerio de Educación de Chile, con el propósito de identificar y caracterizar las prácticas matemáticas sugeridas para la introducción y estudio de la distribución binomial. A partir de esto, estableceremos los significados pretendidos por el programa de estudio.
- Fase 2: Estudiar y analizar el Texto del Estudiante Matemática 3°-4° medio (Unidad 3 de 4° Medio), propuesto por el Ministerio de Educación de Chile, con el propósito de identificar y caracterizar las prácticas matemáticas sugeridas para la introducción y estudio de la distribución binomial. A partir de esto, estableceremos los significados pretendidos por el texto del estudiante.
- Fase 3: Contrastar los significados pretendidos por el programa de estudio (resultado de la fase 1) con los significados pretendidos por el texto del estudiante (resultados de la fase 2), esto con el propósito de determinar los significados sobre la distribución binomial, pretendidos por el currículo chileno.

- Fase 4: Comparar los significados pretendidos por el currículo chileno (resultado de la fase 3) respecto del significado holístico de referencia (determinado por un estudio paralelo) sobre la distribución binomial, con el objetivo de valorar la representatividad de los significados pretendidos por el currículo chileno.

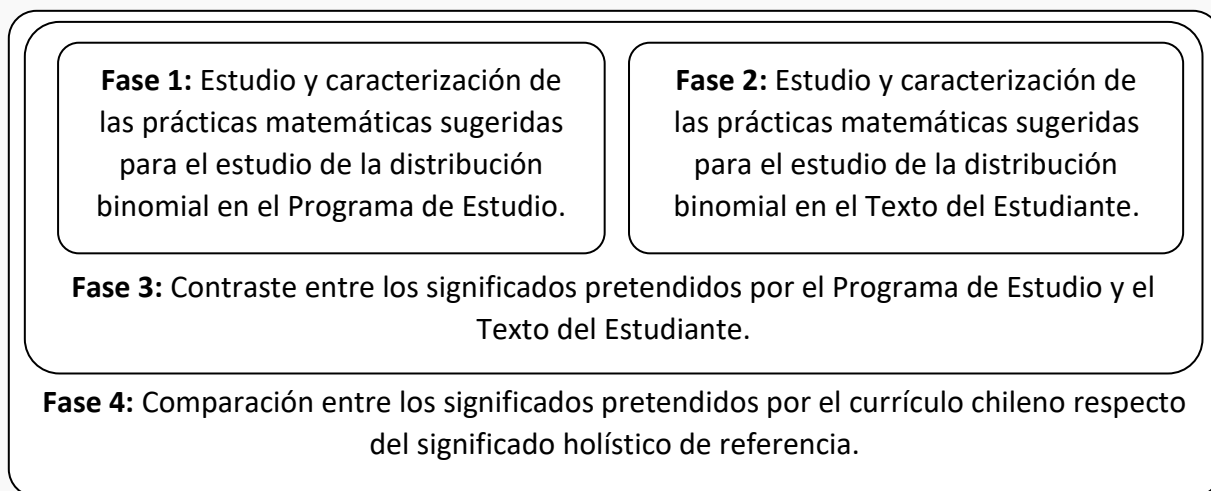


Figura 1: Fases del análisis

CONCLUSIÓN

Al realizar este trabajo, esperamos encontrar variadas formas de presentación de los elementos del significado de la distribución binomial, tanto en el programa de estudio como en el texto del estudiante; además de verificar que exista coherencia entre ambos documentos y representatividad respecto de su significado holístico de referencia.

También, esperamos entregar directrices u orientaciones a los profesores de matemática, con la finalidad de que estas le apoyen en su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje y puedan desarrollar un significado global de la binomial. Por otra parte, pretendemos dar pie a futuras investigaciones, ya sea, sobre la enseñanza de la distribución binomial como objeto matemático, o bien, acerca del análisis de libros de texto y programas de estudio en diferentes países o niveles educativos, en los cuales se pueda replicar o adecuar la metodología utilizada.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto de Investigación Universidad de Los Lagos Regular R22/19, financiado por la Dirección de Investigación de la Universidad de Los Lagos.

REFERENCIAS

- Alvarado, H., & Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios Pedagógicos*, 34(2), 7-28.
- Alvarado, H., & Segura, N. (2012). Significado de las distribuciones muestrales en textos universitarios de estadística. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 7(2), 54-71.
- Cid, N., Retamal, L., & Alvarado, H. (2017). Un estudio inicial sobre conocimientos de probabilidad binomial en profesores de matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R.

Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

- Cordero, F., & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.
- Escolano, A. (2009). El manual escolar y la cultura profesional de los docentes. *Tendencias Pedagógicas*, 14, 169-180.
- García-García, J. I., Medina, M., & Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, 5-23.
- Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P., & Cañadas, G. R. (2013). Justificaciones en el Tema de Correlación y Regresión en Textos Españoles de Bachillerato. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 4(2), 1-20.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Didactique des Mathematiques*, 22(2-3), 237-284.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Landín, P., & Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3), 598-618.
- Mayén, S., & Salazar, A. (2014). Niveles de razonamiento en la resolución de tareas de tipo binomial. En L. Andrade (Ed.), *Memorias I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 88-97). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.
- MINEDUC (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° medio*. Santiago: Ministerio de Educación.
- Ortiz, J., Batanero, C., & Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *SUMA*, 38, 5-13.
- Parra, Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función* (Tesis de Magíster). Universidad de Los Lagos, Chile.
- Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, 34(2), 129-150.
- Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y., & Castro-Gordillo, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 11(23), 201-220.

EL PENSAMIENTO METAFÓRICO PRESENTE EN LA MODELIZACIÓN

Elizabeth Hernández

Este proyecto de investigación tiene por objetivo caracterizar las metáforas presentes en la resolución de problemas matemáticos que se apoyan en fenómenos físicos de movimiento, los que requieren ser modelados e interpretados; los sujetos de interés para este estudio son profesores en formación de la carrera de pedagogía en Matemáticas de Chile. La motivación surge debido a que muchos problemas contextualizados en matemáticas se apoyan en fenómenos de cinemática y con los cuales son introducidos un sin fin de objetos matemáticos. Sin embargo, el estudiar objetos matemáticos implica asumir que estos han sido planificados desde una perspectiva matemática que en ocasiones contradice la situación histórica (Sierpinski, Nnadozie & Oktaç, 2002), además de que algunos modelos con los que mostramos un fenómeno no han sido generados por los expertos para darles interpretación, esto provoca ambigüedades o contradicciones. Como supuesto asumimos que la idónea interpretación del fenómeno se encuentra secundada al uso de metáforas robustas que les permitan interpretar el fenómeno en una situación extra-matemática.

Metáfora, Modelización, Movimiento, Profesores en formación.

REFLEXIONES DE LA MODELIZACIÓN DE FENOMENOS DE MOVIMIENTO

Una actividad cotidiana en la clase de matemáticas es la contextualización de problemas, su modelación e interpretación en otras disciplinas científicas, tales como la física. El tipo de problemas que frecuentemente se emplean en la clase de matemáticas se vincula a situaciones de movimiento de cuerpos o partículas (Blum & Leiss, 2007). La idea de movimiento físico se asocia a la emergencia de diversos objetos matemáticos (Blum & Niss, 1991) como son: la razón, la proporción, las funciones, las representaciones gráficas, el vector, las derivadas, las integrales, entre otros.

El tipo de dificultades que presentan los estudiantes cuando modelan problemas de movimiento son reportadas ampliamente en trabajos referentes al análisis de cursos como la física basada en el cálculo o la física basada en el álgebra (Nguyen & Meltzer, 2003; McDermott, Shaffer, & Constantinou, 2005) y estos se refieren 1. Incorrecto razonamiento acerca de la modelación del movimiento al considerar puntos arbitrarios a lo largo de la trayectoria, 2. Punto de giro incorrecto, 3. Compresión equivocada del sistema de referencia de un objeto que parte del reposo, 4. Incompleta aplicación de la dinámica de la cinemática, 5. No integra información que indique que la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria, entre otros.

Pero en qué consiste un modelo matemático, es una descripción aproximada de las matemáticas de un objeto o fenómeno fuera de ella (Romo & Oktaç, 2007) de dicha aproximación depende la fidelidad de la replicación que den evidencia del comportamiento de situaciones. En la concepción de un modelo matemático, generalmente identificamos tres momentos: La construcción de este, es decir, la orquestación entre signos y propiedades que pueden ser sensibles a modelarse desde la matemática.

Así que este trabajo se apoya en el uso del lápiz y papel, y las entrevistas para modelar los fenómenos físicos de movimiento con signos matemáticos. También consideramos que esta

mediación no es arbitraria y depende directamente del tipo de experiencias que cada uno de los individuos posea. En otras palabras, el significado que los estudiantes le den a los objetos matemáticos en los que se apoyan para modelar y se encontrará apoyado en el lenguaje visto desde el uso del pensamiento metafórico, donde este pensamiento generado por las metáforas se transformará a partir del uso significativo que el estudiante haga del signo de la representación usada.

El propósito de este trabajo consiste en investigar el proceso en el que se da la relación entre los signos matemáticos y la metáfora. En otras palabras, identificar como el estudiante se apropia de los objetos matemáticos con los cuales se apoya a modelar el fenómeno de movimiento y la mediación de los signos matemáticos y su experiencia sensoriomotora.

FUNDAMENTOS TEORICOS QUE ORGANIZAN ESTA PROPUESTA

Este trabajo se desarrollará bajo tres líneas de pensamiento que, si bien se refieren a aspectos distintos del conocimiento, forman un abanico que nos permite observar al mismo tiempo el uso de los signos matemáticos, la modelación y la metáfora del proceso de conocimiento. Estos son la vertiente apoyada en la semiótica y los elementos de las ciencias cognitivas relacionadas estrechamente con la idea de metáfora.

Signos en Matemáticas

Según Pierce (1903) “algo que está en lugar de otro algo para alguien”, esto significa que los signos siempre están en relación con otros objetos de los cuales se establece algo en su ausencia. La matemática es esencialmente trabajada a partir de signos que se refieren a otros objetos de una cierta manera. En el contexto de la educación matemática se considerará, por ejemplo, la postura de Radford (2006), quien señala: “Que la actividad matemática es esencialmente simbólica” (p. 7), lo que significa que toda actividad matemática será tratada a través de los signos.

Por otro lado, se considera que los signos matemáticos, además de esenciales, pasan a ser parte del conocimiento como sucede en la codificación, construcción y comunicación del conocimiento matemático. También es a través de ellos que podemos considerar procesos como la generalidad de este conocimiento, en el sentido de reconocer en un evento una forma específica para proceder frente a otros del mismo tipo Steinbring (2006).

La Cognición Encarnada

Las teorías cognitivas tradicionales de la primera mitad del siglo XX consideraban a la cognición como una propiedad lógica, es decir, entendían lo cognitivo a través de un procesamiento de símbolos y completamente alejadas de la naturaleza corpórea. Sin embargo, en investigaciones recientes como las de Lakoff y Núñez (2000), han sugerido que para entender cómo el ser humano aprende en el mundo se debe tener en cuenta que el cuerpo funciona como una unidad orgánica la cual apoya la apropiación de un objeto abstracto, aun cuando no siempre se tiene conciencia de ello. La postura que da cuenta de la actividad corpórea se ha dado en llamar cognición encarnada (embodiment cognition). Siendo así que la noción fundamental de la cognición encarnada alude a que el desarrollo del conocimiento es un proceso que se construye a partir de nuestra experiencia corporal y sensomotriz, Soto (2007).

Lakoff y Núñez (2000) mencionan que las matemáticas son un dominio altamente técnico caracterizado por el hecho de que las entidades que la constituyen son idealizadas, entonces la ciencia cognitiva en la matemática tiene por objetivo estudiar de manera empírica y multidisciplinar las ideas matemáticas como una materia científica. Desde este punto de vista, la cognición encarnada hace referencia a una función cognitiva que se desea destacar en el proceso de construcción de conocimiento relativo a los objetos matemáticos presentes en los problemas de modelación de fenómenos físicos y ese es el proceso del llamado pensamiento metafórico. Según Gallese y Lakoff (2005) “El conocimiento conceptual se da cuando hacemos uso de nuestro cuerpo para expresar una idea, un concepto o un objeto, entre otros, que se materializa, es decir, se incorpora dentro de nuestro sistema perceptual” (pp.455-456). Finalmente, en este trabajo, si bien adoptamos la idea de la cognición encarnada, en la que destaca la participación de la experiencia del cuerpo sobre la mente y en particular en la construcción de las ideas matemáticas, también se pretende enfocar la aparición de la metáfora en el sentido de Font y Acevedo (2004) y Lakoff y Núñez (2000). Las metáforas a su vez se diferencian en tipos en las que se consideran distintos dominios de tratamiento, de manera que tenemos aquellas que se pueden considerar como “Extramatemáticas”, las cuales explican situaciones matemáticas en términos de situaciones fuera de ella.

Otro tipo lo constituyen las metáforas llamadas “Intramatemáticas” en las que se estructura el conocimiento matemático con base en otras estructuras matemáticas (Font & Acevedo; 2004). Algunos elementos que desde el enfoque ontosemiótico apoyarán como unidades de análisis son la configuración epistémica (Font & Godino, 2007) para el análisis de los textos sugeridos por el Ministerio de Educación en Chile en donde se contempla examinar los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones, problemas, 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas, entre otros, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc. y 6) argumentaciones. Y la configuración didáctica se considera como las trayectorias didácticas por parte del profesor. La demanda es el desarrollo de competencias de análisis de los objetos matemáticos y procesos que se ponen en juego en la solución de los problemas matemáticos, a fin de prever conflictos de significados y distintas posibilidades de institucionalización de los conocimientos matemáticos implicados (Godino, Batanero & Font, 2007).

La modelación

La modelación matemática se enfoca a las características estructurales de un sistema (Doerr & English, 2003) que se refiere y se expresa en el uso representacional que integra la escritura de símbolos, diagramas o gráficos, en otras palabras; es la construcción que consiste en elementos relacionados con operaciones que pueden ser utilizadas para describir y explicar el comportamiento de algunos fenómenos físicos como el de movimiento. En el caso de la modelación se aprecia que la metáfora aparece como un vehículo de interpretación en donde la construcción o empleo de modelos se asemeja al uso de las metáforas, ya que se requiere la transferencia analógica de contenidos en términos de otros, donde resulta necesario que lo tengan siendo capaces de darle una representación y solución en un entorno matemático, que posteriormente debe de ser descrito dentro del contexto del fenómeno analizado.

Respecto a la modelación científica, Touma (2010) asocia a esta modelación dos fases principales en el pensamiento científico:

1. La fase inductiva es cuando el estudiante interactúa con un fenómeno real, e identifica variables, forma hipótesis que a su vez van formalizando un modelo, en donde el estudiante generará una serie de leyes (propias, no necesariamente validas), que le darán cuerpo a un modelo y/o teoría.
2. La fase deductiva, el estudiante intenta con este modelo satisfacer una cuestión relacionada con el fenómeno de salida, es decir, el estudiante no solo se interesa en la aplicación de una fórmula o dar Respuesta a una pregunta, sino en deducir y predecir los resultados de algún experimento.

En la presente investigación el estudiante presentará el modelado representándolo con apoyo de lápiz y papel, así como con el uso de una computadora; esta última proveerá de apoyo en la fase deductiva al poseer un dinamismo que le apoya en la generación de deducciones o validaciones. Y donde, además, es de interés identificar el tipo de tareas que los estudiantes se proponen para modelar un fenómeno en dos entornos, tanto el matemático como el físico.

Quedando como pregunta que oriente este trabajo es ¿Cuáles son las metáforas conceptuales que se presentan en el discurso del profesor en formación cuando modela problemas de movimiento?

METODOLOGÍA

La presente propuesta de investigación se enmarca en un enfoque cualitativo descriptivo e interpretativo dado que ha tenido en cuenta el sentido de las acciones de los sujetos como lo conciben Cohen y Manion (1990). El tipo de resultados que se tendrán serán interpretaciones de las interpretaciones que hacen los sujetos mientras resuelven y modelan problemas de movimiento; y en sus sentidos descriptivos se generarán reportes narrativos que puedan servir a futuras investigaciones. Sobre los instrumentos que se diseñarán pasarán por una triangulación de expertos apoyada por profesores e investigadores reconocidos por su desempeño en problemas de modelación de problemas Físicos en Matemáticas.

Sobre los instrumentos: Un examen diagnóstico sobre problemas que requieran modelación de fenómenos de movimiento que involucren el uso de derivadas e integrales.

Un instrumento que abarque las configuraciones epistémicas referentes a los problemas que usan fenómenos de movimiento en los libros de texto sugeridos por las universidades y asignaturas. Un protocolo de entrevista en donde se recuperen los problemas cuyas configuraciones epistémicas fueron resueltas de manera más idónea.

Los sujetos de estudio y las fases del estudio: estudiantes de pedagogía en matemáticas, es decir, profesores en formación de diferentes universidades de Chile y México; los cuales de manera voluntaria han decidido participar en este proyecto, y quienes serán agrupados en tres grupos de nivel de académico (en nivel inicial, intermedio y avanzado) con el fin de hacer una comparación entre los resultados de estos. Para la selección de estos usaremos:

- La aplicación de un instrumento diagnóstico para observar que los sujetos realmente aporten información relevante al estudio.
- Selección de los sujetos: se seleccionará a aquellos sujetos más representativos, es decir, sujetos que tengan idea de cómo modelar y resolver los problemas, aun cuando sus soluciones no sean del todo correctas.

- Focalización: se realizarán una serie de vídeos de grabaciones de cuando los estudiantes modelan e interpretan problemas en solitario y frente a una comunidad educativa; estas grabaciones serán escritas y analizadas junto con los libros de texto de donde se extrajo la información.
- Entrevistas semi estructuradas: se entrevistará a los profesores en formación con el fin de depurar dudas o inconsistencias en sus grabaciones previas.
- Los vídeos: se realizarán tres tipos de vídeo grabaciones, que serán transcritos. El primero, de la solución de los problemas y su explicación junto con la interpretación de forma individual; el segundo, la solución de un problema frente al público al cual debe dar su interpretación; y el tercero, la entrevista semi-estructurada de los problemas a solucionar.
- Sobre las unidades de análisis: las distintas configuraciones epistémicas presentes en los libros de texto, en particular en las soluciones propuestas de problemas de modelación y su interpretación.

Las configuraciones didácticas en el discurso del profesor en formación cuando resuelve problemas e interpreta problemas, solo y frente a un grupo de personas; en esta se potenciarán los referentes epistémicos de los conceptos que emerjan, las conexiones fuera del contexto con el que se interprete y todas las acciones corporales (en específico, los gestos) en las que se apoye para dar cuerpo a su explicación.

REFERENCIAS

- Acevedo, I., & Font, V. (2004). Análisis de las metáforas utilizadas en un proceso de instrucción sobre representación de gráficas funcionales. *Actas del VIII Simposio de la SEIEM* (pp. 1-9). Malaga: SEIEM.
- Berger, M. (2010). A Semiotic View Of Mathematical Activity With A Computer Algebra System. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 13(2), 159-186.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22, 37-68.
- Cohen, L., & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla.
- Doerr, H., & English, L. (2003). A Modeling Perspective on Students' Mathematical Reasoning about Data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110-136.
- Duval, R. (2006). *Transformations de représentations sémiotiques et démarche de pensée en mathématiques*.
- Colloque COPIRELEM.
- Font, V., & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 8(1), 67-98.

- Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive neuropsychology*, 22(3-4), 455-479.
- Lakoff, G., & Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Cátedra.
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic books.
- Lakoff, J. (1990). The Invariance Hypothesis. *Cognitive Linguistics*, 1(1), 39-74.
- McDermott, L., Shaffer, P., & Constantinou, C. (2005). Preparing teachers to teach physics and physical science by inquiry. *Physics Education*, 35(6), 411-416.
- Nguyen, N., & Meltzer, D. (2003). Initial understanding of vector concepts among students in introductory physics courses. *American Journal of Physics*, 71(6), 630-638.
- Pierce, C. (1903). *Collected papers of Charles Sanders Pierce*. Exact Logic.
- Radford, L. (2006). Introducción: Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, (No. Especial), 7-21.
- Romo, A., & Oktaç, O. (2007). Herramienta metodológica para el análisis de los conceptos matemáticos en el ejercicio de la ingeniería. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(1), 117- 143.
- Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign?—An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational studies in mathematics*, 61, 133-162.
- Touma, G. (2010). Étude didactique sur la modélisation algébrique des phénomènes physiques. *McGill Journal of Education*, 45(1), 151-172



EL PERÍMETRO DESDE LA TEORÍA DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO; EL TANGRAM COMO RECURSO EDUCATIVO.

Sebastián Francisco Herrera de la Piedra

El presente reporte tiene como objetivo exhibir la implementación de una tarea matemática que se focaliza en la obtención del perímetro de figuras planas, a estudiantes de Diseño Gráfico que cursan primer año de Educación Técnica Superior, específicamente INACAP. Se enfocará en entregar una aproximación epistemológica del objeto matemático, además de describir el modelo teórico didáctico utilizado en la actividad, el Espacio de Trabajo Matemático (ETM). La tarea pretende, que mientras los estudiantes manipulan el juego del Tangram, vean la necesidad de determinar el perímetro de cada una de las figuras planas que lo componen. Se presentarán algunos de los resultados y evidencias de la aplicación, además de conclusiones y reflexiones de la propuesta.

Palabras Claves: Espacio de Trabajo Matemático, Perímetro, Tangram, . Educación Técnica Superior.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad se ha visto una lenta retirada de las asignaturas de Matemática inicial en las Instituciones de Educación Técnica Superior (ETS), en específico las que pertenecen al Instituto de Educación Superior (IP) y no así en las del Centro de Formación Técnica (CFT), entendiendo a ETS como la unión entre IP y CFT. Entendemos que esta decisión viene como consecuencia de que la matemática que se trabaja en estos programas no se articula con el resto de las asignaturas de la malla profesional; es más, sus descriptores, en donde encontramos los Aprendizajes Esperados, criterios de evaluación, contenidos, por nombrar algunos, no entregan un aporte o se focalizan en desarrollar el perfil de egreso de los estudiantes, transformándose en una asignatura “isla” dentro de esta malla y con esto, una fragmentación de saber.

Por lo anterior, surge la necesidad de generar un cambio en el aula, generar tareas que impacten en el estudiante, pero que sobre todo se articulen con las asignaturas técnicas de la malla y que aporten al perfil de egreso de los estudiantes. La tarea que se presenta en este informe lleva por nombre “TANGRAM” y se implementa a estudiantes de primer año pertenecientes a la carrera de Diseño Gráfico Profesional de ETS impartida por la Universidad Tecnológica de Chile INACAP. La asignatura donde es aplicada se llama **Matemática aplicada**, enmarcada en el segundo semestre de la malla curricular, que pretende impactar directamente en asignaturas que pertenecen a ésta y en el perfil de egreso. Algunas de las asignaturas **“Administración y productividad”** y **Taller “de Diseño publicitario”** de tercer semestre, **“Marketing operativo”** y **“Taller de Diseño Integrado”** de cuarto semestre, **“Retail & Trade Marketing”** de quinto semestre, **“Taller Packaging & Exhibición”** de sexto semestre, **“Plan de negocios”** de séptimo semestre, son algunas.

Respecto al perfil de egreso, la asignatura está diseñada para aportar en el desarrollo de propuestas de soluciones creativas que responden a los requerimientos del cliente, las necesidades del usuario y las condiciones del mercado, con el fin de crear valor en productos y servicios, en la producción de piezas de diseño de acuerdo a condiciones técnicas, tecnológicas y presupuestarias, según los requerimientos de éste, las necesidades del usuario y las condiciones del mercado, resolviendo

problemas de carácter multidisciplinario e innovando en el uso de nuevas tecnologías y medios digitales y en la implementación de soluciones creativas en productos y servicios. Finalmente, el estudiante que apruebe la asignatura de Matemática Aplicada estará en condiciones de resolver problemas que involucren conocimientos de razones, proporcionalidad, porcentajes, figuras y cuerpos geométricos. Su propósito es contribuir al desarrollo de destrezas matemáticas a través de una metodología que propicia la comunicación, la argumentación, la modelación, la representación, la resolución de problemas y el razonamiento matemático, para favorecer el aprendizaje permanente y contribuir al mejoramiento del desempeño profesional, (INACAP, 2020).

Objeto Matemático

Objeto Matemático en el currículum

La tarea Matemática denominada “TANGRAM”, se focaliza en el objeto matemático perímetro, enmarcado en la tercera unidad del descriptor de la asignatura Matemática aplicada, llamado **Figuras geométricas**,

3.- Figuras geométricas.			
Aprendizajes Esperados	Criterios de Evaluación		Contenidos Mínimos Obligatorios
3.1.- Resuelve problemas de la disciplina y/o especialidad, que involucren tópicos de figuras geométricas. (Integrada Competencia Genérica Resolución de Problemas)	3.1.1.-	Clasificando figuras geométricas según sus propiedades.	Estrategias, argumentación y comunicación de resultados en la resolución de problemas matemáticos.
	3.1.2.-	Calculando áreas y perímetros de figuras geométricas simples y compuestas.	Círculo: Perímetro de una circunferencia y área de un círculo.
	3.1.3.-	Aplicando teoremas relacionados a las figuras geométricas.	Triángulos: Definición y clasificación. Propiedades y teoremas. Perímetro y área de un triángulo.
	3.1.4.-	Aplicando métodos establecidos.	Cuadriláteros: Definición y clasificación. Propiedades y teoremas. Perímetros y áreas de cuadriláteros.
	3.1.5.-	Estableciendo propuestas de solución pertinentes.	Introducción al uso de calculadora y/o Geogebra como herramienta para la resolución de problemas que involucren tópicos de figuras geométricas.

Tabla 1: Descriptor matemática inicial (MTMA01). (INACAP,2020)

La tabla 1, presenta la Unidad II, llamada Figuras geométricas, entrega el Aprendizaje Esperado, los Criterios de Evaluación y los Contenidos Mínimos Obligatorios que los estudiantes deberían adquirir; el primero, manifiesta explícitamente que se debe integrar la competencia genérica de Resolución de Problemas. Así, los estudiantes al término de la unidad deben ser capaces de resolver problemas asociados a la disciplina y/o especialidad, que involucren tópicos de figuras geométricas (Integrada Competencia Genérica Resolución de Problemas); además, entrega los Criterios con los que se evidencia el nivel de logro del Aprendizaje Esperado, lo que apunta a que los estudiantes demuestren la habilidad de clasificar, calcular, aplicar teoremas y estableciendo propuestas de solución pertinentes. Los Contenidos Mínimos Obligatorios son elementos trascendentales, ya que no sólo se focaliza en la construcción del objeto matemático, sino que explicita la valoración de la diversidad de estrategias, la argumentación y la comunicación de resultados en la resolución de problemas matemáticos, además de introducción al uso de calculadora y/o GeoGebra como herramienta para la resolución de problemas que involucren tópicos de figuras geométrica, (INACAP, 2020).

Metodología

La tarea es implementada a ocho estudiantes de primer año de Diseño Gráfico Profesional de la Universidad Tecnológica de Chile. La participación de estos es voluntaria, ya que, en esa fecha, los alumnos se encontraban en período de receso; la aplicación se realiza el día Jueves 19 de Noviembre a las 19:00.

Debido a la situación sanitaria mundial, la implementación se realiza de manera remota, utilizando la plataforma Microsoft Teams, disponible para todos los académicos, estudiantes y administrativos de la institución; la plataforma da la posibilidad de generar equipos de trabajo, en donde se debe invitar a los participantes. En esta se pueden subir documentos, enviar tareas y permite la comunicación mediante reuniones y chat con los integrantes.

El problema

La tarea matemática utiliza el “Tangram” como inspiración, que es un juego de origen chino que probablemente apareció hace tan sólo 200 ó 300 años. Los chinos lo llamaron “tabla de sabiduría” y “tabla de sagacidad” haciendo referencia a las cualidades que el juego requiere. El juego está formado por siete piezas poligonales, con las que deben formarse figuras sin superponerlas. La tarea busca que, a través de la manipulación de sus piezas, los estudiantes formen diversas figuras, y luego determinen cuál de ellas tienen mayor perímetro, demostrando sus conclusiones y resultados matemáticamente, para luego modelar y lograr una expresión que permita representar una generalización de cualquier perímetro; la tarea se muestra a continuación:





Tangram

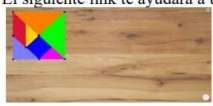
El Tangram es un rompecabezas de origen chino que probablemente apareció hace tan sólo 200 ó 300 años. Los chinos lo llamaron "tabla de sabiduría" y "tabla de sagacidad" haciendo referencia a las cualidades que el juego requiere. El juego está formado por siete piezas poligonales, generalmente de madera, con las que deben formarse figuras sin superponerlas.



¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) figura(s) se podrá(n) generar a partir del Tangram?



El siguiente link te ayudará a trabajar con Tangram: <https://www.geogebra.org/m/NwjbrNMj>



¿Cuál tiene mayor perímetro?

Análisis a priori, plan de clase

Con la finalidad de implementar la tarea ("Tangram"), se utiliza un formato de "plan de clase" (reducido), utilizado para el Estudio de Clase Japonés. La clase fue dividida en cuatro partes: la primera, denominada la entrega, donde se separa el curso en grupos de 3 a 4 estudiantes, los que se distribuirán en distintas salas de la plataforma Teams; se crea una atmósfera positiva hacia la actividad y se entrega el problema para que los estudiantes lo lean y tengan una primera discusión de acercamiento a la comprensión del problema, (Perdomo & Felmer, 2017); luego, la activación, que se caracteriza en que cada grupo trabaja de manera autónoma. Una vez que los estudiantes inician la tarea, si el profesor llegase a interactuar con los grupos debe hacerlo sólo a través de preguntas al grupo o a un integrante específico de éste; las preguntas pueden enfocarse en un elemento específico del problema o en la simplificación de éste para ayudar a la comprensión y a generar estrategias que permitan dar solución al problema. En esta etapa, se debe lograr la comunicación entre los integrantes del grupo (Perdomo & Felmer, 2017); la consolidación es el momento en que los estudiantes creen haber encontrado la solución al problema; es la instancia en que se debe evaluar la pertinencia de las respuestas entregadas por el grupo, se evalúa si cada integrante del grupo comprendió y si es capaz de explicar la estrategia utilizada para dar solución al problema (Perdomo & Felmer, 2017) y, finalizamos con la discusión o plenaria; acá, el profesor promueve la participación de todo el curso y su objetivo es la presentación de las distintas estrategias, errores, hipótesis y soluciones que emergieron producto del trabajo realizado por cada grupo (Perdomo & Felmer, 2017).

Espacio de Trabajo Matemático personal de la tarea y sus resultados preliminares.

La tarea tiene una Génesis Semiótica, activando el representamen y con ello, la visualización de las figuras involucradas en el problema (Triángulos Rectángulos isósceles, cuadrados y romboides); las

figuras permiten trabajar lo simbólico mediante un registro Figural-Icónico (RFI) que engloba dibujos y esquemas, que permite representar el objeto matemático sin dar cuenta de la cualidad de las figuras involucradas, realizando una conversión al Registro de la Lengua Natural (RLN) que permitió introducir breves definiciones, así como hacer descripciones de las figuras y otra conversión al Registro Algebraico (RA), que les permitió realizar generalizaciones y señalar características particulares de cada una de las figuras, tal como la longitud de los lados del triángulo y el Teorema de Pitágoras. El Tangram durante la tarea se transforma en un artefacto, volviéndose fundamental, debido a que los estudiantes pudieron visualizar de manera más concreta cada una de las figuras, asociándolas a sus propiedades. Finalmente, el artefacto permite la interpretación visual del problema y promueve la Génesis Instrumental y con ello, la construcción del perímetro de cada figura. La Génesis Discursiva se activó en algunos momentos, específicamente cuando los estudiantes manipulan y visualizan las figuras para descubrir y/o reconocer sus propiedades y definirlas según éstas, activando el componente referencial y a través de la prueba, demostrar sus propiedades y determinar los perímetros. El plano que se activa y que pareciera estar en constante trabajo es el plano de descubrimiento (sem-inst); los estudiantes realizaron conversiones entre registros, además de una constante manipulación del Tangram. La tarea presentada en este reporte tiene su base en el paradigma geométrico y en los espacios de trabajo geométricos, donde la podemos clasificar en el de Geometría Natural (o Geometría I). Los estudiantes trabajan con objetos materiales virtuales y alcanzan el conocimiento con la intuición, reconocen las figuras mediante su experiencia y según lo observado; para comprobar, usan el razonamiento y recurren a conocimientos no pertinentes al trabajo para deducir nuevos.

Resultados

Los estudiantes manipulan las figuras dentro del GeoGebra; esto sirvió de apoyo para comprender el problema y determinar qué tipo de figuras estaban implícitas, y con ello, asociarlas a sus características particulares y propiedades. Además, entregó dinamismo a la actividad, favoreciendo el trabajo colaborativo en los estudiantes.

El problema no menciona las dimensiones del Tangram, lo que permitió que cada grupo de estudiantes diera un valor al lado del cuadrado del Tangram ordenado; en uno de los grupos, se trabajó con lado 6 cm y en el otro, con 10 cm, lo que debería permitir modelar el perímetro de cada figura.

Los alumnos discuten cómo poder encontrar una generalización. Se preguntan: “Si tenemos un Tangram de lado “x”, ¿cuánto sería el perímetro de cada figura que lo compone?”; dicha pregunta no tuvo solución durante la implementación. La tarea propuesta activa la Génesis Semiótica del Espacio de Trabajo Matemático, lo que podemos concluir observando que la primera aproximación al problema es mediante un Registro Figural-Icónico (RFI) logrando la visualización del problema y con ello, realizar una conversión al Registro de la Lengua Natural (RLN) y al Registro Algebraico (RA) y así, dar respuesta a las preguntas planteadas, además incorpora el Tangram como Artefacto, movilizándolo el plano de descubrimiento (Semiótico-Instrumental) y la construcción del perímetro de cada una de las figuras

La coordinación entre las Génesis se pudo observar en algunos momentos de la Tarea; los estudiantes necesitaron el componente referencial, para comprender qué tipo de figuras estaban involucradas. Esto lo podemos identificar cuando los estudiantes tuvieron que describir las figuras,

clasificarlas y utilizar sus propiedades para determinar la longitud de sus lados; Finalmente, el paradigma de referencia es el geométrico, geometría I (GI): la geometría axiomática natural. Los estudiantes logran obtener el perímetro de cada una de las figuras; sin embargo, no logran modelar dichos cálculos, lo que se atribuye a que el tiempo para la implementación es acotado (hora y veinte minutos).

Proyecciones

El perímetro desde la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático; el Tangram como recurso didáctico, será presentada en la RELME 34, que se efectuará en Guatemala, en la categoría de comunicaciones breves. La tarea debe ser modificada, comenzando por reemplazar la primera actividad de familiarización del Tangram, por una actividad de creación de figuras por medio de la actividad. Lo que pretende que los estudiantes cumplan con la asimilación del juego, sin embargo, con una menor cantidad de tiempo. La tarea tendrá una proyección en la unidad, no sólo se utilizará para el cálculo de perímetro, sino que también se utilizará en el inicio del concepto de área. Una vez que la actividad esté validada, se buscará implementar en cursos de enseñanza Básica y Media, además de realizar un plan de clases considerando que en un futuro próximo se volverá a la presencialidad, finalmente se buscará generar una secuencia didáctica que permita sacar mayor provecho a la tarea. Se seguirá analizando y profundizando en la Teoría del Espacio Matemático, con el fin de aportar en el desarrollo de la Educación Técnica Profesional, se espera generar un conjunto de tareas que permitan presentar una secuencia didáctica sustentada por ETM.

Referencias

- INACAP (2020). Descriptor Matemática Aplicada, (MTMA01). Recuperado 10 de diciembre del 2020 de <http://sig3.inacap.cl/AAPEDescriptor/ShowAsig.aspx?idasig=MTMA01>
- Perdomo, J., & Felmer, P. (2017). El taller RPAula: Activando la Resolución de Problemas en las Aulas. Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 21, 425-444.

EPISTEMOLOGÍA CONTEMPORÁNEA DE LAS NOCIONES DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA Y RECURSIVIDAD, EN LA INTERFAZ ENTRE MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA

Nicolás León Mc Vey

La inclusión de contenidos de informática en el plan de estudios de matemáticas de la enseñanza secundaria francesa plantea varias cuestiones epistemológicas y didácticas sobre la relación entre estas dos disciplinas y los conceptos que comparten. En nuestro trabajo de tesis, estamos interesados en las nociones de inducción matemática y recursividad, ya que su uso está muy extendido en las matemáticas y la informática, y una abundante literatura muestra que son problemáticas desde el punto de vista didáctico (Rinderknecht, 2014; Michaelson, 2008).

En esta charla, mostraremos cómo un estudio previo de la epistemología contemporánea de las nociones puede fundamentar nuestra investigación didáctica.

Ingeniería didáctica, epistemología, inducción matemática, recursividad.

Introducción

Este trabajo de tesis se enmarca en el proyecto DEMaIn (Didáctica y Epistemología de las interacciones entre Matemáticas e Informática) de la Universidad de Montpellier, que estudia los distintos conceptos situados en la intersección de las matemáticas y la informática. El proyecto se funda en la relevancia de los desafíos y oportunidades que emergen a raíz de la reciente decisión del Ministerio de Educación Nacional francés de incluir contenidos de informática en la asignatura de matemáticas de la enseñanza secundaria. Es interesante notar cómo una situación similar se está produciendo hoy en día en la formación diferenciada de matemática que propone el Mineduc.

Nuestra tesis corresponde a una ingeniería didáctica (Artigue, 2014) centrada en la inducción matemática y la recursividad, dos nociones cuyo uso está muy extendido tanto en las matemáticas como en la informática.

Entendemos la inducción matemática como el tipo de demostración basada en la aplicación del principio homónimo, el que se puede enunciar en los siguientes términos:

Sea P es un predicado que depende de $n \in \mathbb{N}$. Si

i) $P(0)$ y

ii) para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$,

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$.

Por otra parte, la recursividad es un concepto más difícil de definir, dado que se aplica en contextos muy diversos: definiciones, algoritmos y programas, tipos, funciones, entre otros. De manera general, se puede observar que lo que caracteriza a la recursividad es la presencia de autorreferencia, acompañada de uno o más “casos de base” que evitan que la autorreferencia se reproduzca de manera indefinida. Por ejemplo, es posible entregar una definición recursiva del conjunto $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N}$ es un conjunto tal que

- i) $0 \in \mathbb{N}$ (caso de base)
- ii) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $Sn \in \mathbb{N}$ (autorreferencia)

iii) los únicos elementos de $\mathbb{N}$ se obtienen por aplicación de las reglas anteriores.

Resulta de interés para nuestro estudio notar que a los conjuntos susceptibles de ser definidos recursivamente –como las listas, los árboles binarios y las fórmulas bien formadas–, se les puede asociar un esquema inductivo de demostración, tal como al conjunto $\mathbb{N}$ se le puede asociar el principio de inducción matemática.

Metodológicamente, las ingenierías didácticas suelen apoyarse en un estudio epistemológico preliminar de las nociones en juego (Artigue, 2014). En nuestra investigación, hemos llevado a cabo un estudio de epistemología histórica que examina la evolución en el tiempo del concepto de inducción matemática; seguido de un estudio que llamaremos de “epistemología contemporánea”, en el que nos hemos centrado en la forma en que investigadores en matemáticas e informática se sirven, hoy en día, de la inducción matemática y de la recursividad, así como en sus respuestas expertas a problemas que atañen a ambas nociones y a su relación. Este último estudio será el foco de nuestra presentación.

Antecedentes

Muchos autores han descrito los errores y dificultades que presentan los estudiantes cuando aprenden a realizar demostraciones por inducción matemática, o cuando intentan apropiarse del concepto de recursividad, como lo avalan, respectivamente, las reseñas bibliográficas de Michaelson (2008) y Rinderknecht (2014).

Por otra parte, ciertos trabajos se han centrado en la relación entre la inducción matemática y la recursividad, y han discutido sus posibles consecuencias en la enseñanza. Por ejemplo, Leron y Zazkis (1986) detallan la naturaleza de la relación entre la recursividad en informática y la inducción matemática, y describen varios ejemplos que permiten ilustrar los diferentes puntos de vista (definición de un objeto matemático, definición de un algoritmo, demostración) que se pueden tener sobre las aplicaciones de las dos nociones. También especulan sobre las consecuencias didácticas de estas relaciones, hipotetizando que el dominio previo de la recursividad podría facilitar el aprendizaje de la demostración por inducción.

Por su parte, Polycarpou (2006) explora la correlación entre la comprensión de las definiciones recursivas y las demostraciones por inducción matemática en los estudiantes universitarios de informática. Sus resultados muestran, por un lado, que los estudiantes que tenían una mejor comprensión de las definiciones recursivas de estructuras, se desempeñaban mejor en la aplicación de una demostración por inducción, y por otro lado, que los que tenían una menor comprensión de las definiciones recursivas tendían a aplicar la inducción matemática de manera mecánica, sin preocuparse por la proposición que estaban tratando de establecer.

Por último, Drysdale (2011) sostiene que la demostración clásica por inducción matemática sobre $\mathbb{N}$, en la que el paso inductivo consiste en establecer que $P(k)$ implica $P(k+1)$, es menos relevante para los informáticos que la aplicación de otros esquemas inductivos, incluida la inducción

estructural, que, según argumenta, corresponde en cambio a la inducción fuerte sobre $\mathbb{N}$. Así, presenta un enfoque diferente de la enseñanza del razonamiento inductivo, que consiste en fundamentarlo no en el último axioma de Peano, sino en el hecho de que “la recursividad funciona” (es decir, los programas definidos recursivamente consiguen el resultado deseado), un principio con el que los estudiantes de informática deberían sentirse más cómodos.

Lo que se desprende de estos artículos es la insistencia en que no sólo existe una conexión entre la inducción matemática y la recursividad desde el punto de vista matemático e informático, sino que también sería posible aprovechar dicha conexión en la enseñanza de ambas nociones.

Metodología

Para comprender de qué manera los investigadores en matemáticas e informática se sirven hoy en día de las nociones de inducción matemática y recursividad, desarrollamos una serie de entrevistas semiestructuradas, basadas en un cuestionario flexible. Este formato nos permitió mantener diálogos pertinentes a nuestra problemática, al tiempo que nos dio la libertad de profundizar en ciertas ideas que surgieron espontáneamente en las respuestas de los investigadores entrevistados. La elección de los expertos para las entrevistas se hizo dentro de los equipos docentes de las dos universidades que albergan el proyecto DEMaln, y buscando abarcar una amplia gama de áreas de investigación en matemáticas, informática y lógica. En total, se realizaron 9 entrevistas, las que fueron registradas con una grabadora y luego transcritas literalmente para su análisis. El análisis se realizó mediante una grilla de lectura construida con base en distintos textos de referencia en matemática e informática universitaria.

Al final de la entrevista, pedimos a los investigadores que escribieran una demostración de la equivalencia entre dos definiciones del concepto de “árbol”, tal como se entiende en la teoría de grafos. Este problema fue propuesto porque su análisis matemático a priori nos permitió prever que su resolución podría poner de relieve el uso de la recursividad y los esquemas de razonamiento inductivo por parte de los investigadores. No se impuso ninguna restricción de tiempo, es decir, los investigadores podían enviarnos su demostración en cualquier momento conveniente después de la entrevista. Tres de ellos respondieron a nuestra petición y sus demostraciones fueron analizadas.

El análisis de las producciones de los expertos se realizó a la luz del análisis matemático a priori del problema –que no abordaremos en esta presentación–, permitiendo identificar y explicitar las estrategias de demostración. Consideramos estas estrategias como posibles operadores, en el sentido de Balacheff (2017), que pueden dar cuenta de las concepciones de los investigadores sobre la inducción matemática, la recursividad y su relación.

Resultados

En lo que refiere a las entrevistas realizadas, en primer lugar, constatamos que, a pesar de su omnipresencia en los planes de estudio de la enseñanza secundaria y de los primeros años de la universidad, y de su importancia para la demostración de teoremas en la aritmética elemental, la inducción matemática (entendida como la que se aplica sobre el conjunto $\mathbb{N}$) no es utilizada con frecuencia por los investigadores entrevistados. En cambio, lo que utilizan con más frecuencia es la llamada inducción “estructural” sobre estructuras definidas recursivamente, como grafos, árboles y listas, entre otros. Nuestras observaciones coinciden con las de Drysdale (2011) y, de paso, permiten cuestionar la pertinencia de los programas de estudio.

En segundo lugar, nos encontramos con que el vínculo entre la inducción matemática y la recursividad es sutil y dinámico, lo que se evidencia, por ejemplo, en el hecho de que varios investigadores utilizan las palabras “inducción” y “recursión”, o “inductivo” y “recursivo”, como sinónimos en algunas situaciones, mientras que otros establecen límites entre ambos, al tiempo que afirman que se encuentran estrechamente relacionados. Así, la inducción matemática aparece más habitualmente en el contexto de la demostración, mientras que la recursividad se asocia más con la construcción de estructuras o el desarrollo de algoritmos. En este contexto, el concepto de inducción estructural parece aclarar la relación entre las estructuras que pueden definirse de forma recursiva, y los esquemas de demostración inductivos asociados a dichas estructuras.

Por último, observamos que los investigadores que enseñan en las universidades suelen afirmar que sus alumnos tienen dificultades para tratar la inducción matemática y la recursividad, y que estas dificultades parecen intrínsecas a ambas nociones. Sin embargo, varían mucho sus puntos de vista sobre la causa de estas dificultades, así como sobre la forma más adecuada de abordarlas.

Por otra parte, el análisis de las demostraciones de los investigadores nos permitió identificar una serie de candidatos a operadores, útiles para la construcción de un modelo de concepciones sobre la inducción matemática, la recursividad y su relación:

- Buscar una función con dominio en el conjunto estudiado y recorrido en $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}^m$ (que permita proceder por inducción matemática)
- Utilizar una definición equivalente
 - Pasar de una definición recursiva a una definición no recursiva equivalente
- Deconstruir y reconstruir el caso genérico
- Describir un algoritmo que construye un objeto (para probar su existencia)
- Describir o testear casos simples de una construcción recursiva o del carácter hereditario de una propiedad

Ejemplos de la aplicación de estos operadores potenciales serán expuestos en nuestra presentación.

Conclusiones y perspectivas

El análisis de las entrevistas permite cuestionar la decisión curricular de centrar la enseñanza de los esquemas inductivos de demostración en el caso específico donde la estructura recursiva subyacente es el conjunto $\mathbb{N}$. En este sentido, nuestra investigación lleva a conclusiones similares a las que presenta Polycarpou (2008), quien en su tesis doctoral preconiza la enseñanza del método de inducción estructural como una manera de facilitar la comprensión de los esquemas inductivos que va de lo general (estructuras recursivas) a lo particular (inducción matemática en $\mathbb{N}$).

Asimismo, los objetos matemáticos y problemas evocados por los investigadores en las entrevistas nos han permitido postular que el conjunto de los árboles binarios tiene un buen potencial didáctico, es decir, los problemas que lo conciernen permitirían traer a la luz y transformar las concepciones de los estudiantes en torno a la inducción matemática y la recursividad. Por ello, hemos seleccionado un problema de enunciado abierto sobre los árboles binarios para realizar la parte experimental de nuestra ingeniería didáctica, que se encuentra en curso.

Por otra parte, el análisis de las demostraciones de los investigadores ha contribuido –en conjunto con los antecedentes didácticos que hemos podido recabar y los resultados de nuestro estudio de epistemología histórica– a la construcción de un modelo cKç (Balacheff, 2017) de las concepciones de los estudiantes sobre la inducción matemática, la recursividad, y su relación. La pertinencia de este modelo será prontamente evaluada con base en los resultados de los experimentos que estamos efectuando.

Referencias

- Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 159–162). Dordrecht, Netherlands: Springer.
- Balacheff, N. (2017). cKç, a model to understand learners’ understanding – Discussing the case of functions. *El cálculo y su enseñanza*, 9(Jul-Dic), 1–23.
- Drysdale, R. L. S. (2011). Mathematical induction is a recursive technique. En T. J. Cortina, E. L. Walker, L. S. King, D. R. Musicant, y L. I. McCann (Eds.), *Proceedings of the 42nd ACM technical symposium on Computer science education* (pp. 269–274). ACM.
- Leron, U. y Zazkis, R. (1986). Computational recursion and mathematical induction. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 25–28.
- Michaelson, M. T. (2008). A literature review of pedagogical research on mathematical induction. *Australian Senior Mathematics Journal*, 22(2), 57–63.
- Polycarpou, I. (2006). Computer science students’ difficulties with proofs by induction: an exploratory study. En *Proceedings of the 44th annual Southeast regional conference* (pp. 601-606). ACM.
- Polycarpou, I. (2008). *An innovative approach to teaching structural induction for computer science* [Tesis doctoral no publicada]. Florida International University. <https://digitalcommons.fiu.edu/etd/18/>
- Rinderknecht, C. (2014). A Survey on Teaching and Learning Recursive Programming. *Informatics in Education*, 13(1), 87–119.

ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS: UN ESTUDIO EXPLORATORIO CON ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE INGENIERÍA

Teresa Castro, Andrea Cárcamo y Claudio Fuentealba

Este trabajo de carácter exploratorio tiene por objetivo identificar y clasificar los errores que cometen estudiantes de primer año de ingeniería cuando resuelven ecuaciones trigonométricas. Para ello, se aplicó un cuestionario escrito a un curso de 34 estudiantes que estaba conformado por tres tareas vinculadas a la resolución de ecuaciones trigonométricas. Los protocolos de resolución de los estudiantes se analizaron en función de las categorías propuestas por Mosvshovitz-Hadar et al. (1987). Los resultados muestran que los errores más frecuentes están asociados a: el uso de falsas identidades trigonométricas, la utilización de valores incorrectos de las funciones trigonométricas para ángulos conocidos, la búsqueda de soluciones en un único cuadrante, no reconocer la presencia de una ecuación trigonométrica y no escribir de manera correcta el conjunto solución.

Ecuaciones trigonométricas, errores, estudiantes de ingeniería.

INTRODUCCIÓN

El análisis de errores ha sido motivo de estudio en el ámbito de la Didáctica de la Matemática. Riccomini (2005) señala que los profesores, al no tener información sobre los patrones de errores que cometen los estudiantes, centran la instrucción en la aplicación de reglas, habilidades y estrategias irrelevantes que no se relacionan con ellos. Lo anterior da cuenta de la necesidad de conocer qué tipos de errores cometen los estudiantes y, en particular, en la unidad de trigonometría que, tradicionalmente, presentan bajos niveles de rendimiento, a pesar de corresponder a unos de los primeros tópicos que vincula el álgebra, la geometría y el razonamiento gráfico (Weber, 2005). Desde este contexto, nos hemos propuesto como objetivo identificar los errores más frecuentes que cometen estudiantes de primer año de ingeniería cuando resuelven ecuaciones trigonométricas. En concreto, con este estudio pretendemos proporcionar información sobre los errores vinculados a la resolución de ecuaciones trigonométricas que permitan adoptar decisiones instruccionales informadas para intentar subsanarlos.

ANTECEDENTES

Con relación a las líneas de investigación vinculadas al estudio de los errores, Rico (1995) distingue cuatro tipos de estudios no excluyentes: relativos al análisis de los errores y causas que los producen o elementos que los explican, relacionados al tratamiento curricular de los errores en matemática, referente a qué es conveniente que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los estudiantes y de carácter técnico que incluya algún programa estadístico para contrastar las hipótesis en los análisis de los errores. Nuestro estudio corresponde al primer tipo ya que está enfocado en identificar y analizar las posibles causas que provocan los errores de los estudiantes cuando resuelven ecuaciones trigonométricas.

En cuanto a las tipologías de errores que cometen los estudiantes cuando se enfrentan a tareas matemáticas, existen distintas propuestas para clasificarlos, sin embargo, para el desarrollo de este

estudio utilizamos la clasificación empírica propuesta por Mosvshovitz-Hadar et al. (1987). Hemos seleccionado dicha clasificación porque, a nuestro juicio, esta sigue el orden lógico de pasos que los estudiantes deberían sortear para resolver con éxito una tarea matemática.

En la “Tabla 1” se plantea el tipo de error que comete el estudiante y sus posibles causas según las categorías de Mosvshovitz-Hadar et al. (1987).

Tipo de error	Causas del error
1. Datos mal utilizados.	Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el estudiante.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje.	Errores debidos a una interpretación incorrecta de lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
3. Inferencias no válidas lógicamente.	Errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico.
4. Teoremas o definiciones deformados.	Errores que se producen por distorsión de una regla, teorema o definición identificable.
5. Falta de verificación en la solución.	Errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la tarea planteada.
6. Errores técnicos.	Errores de cálculo, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

Tabla 1: Categorías de Mosvshovitz-Hadar et al. (1987)

METODOLOGÍA

Este estudio exploratorio tiene por objetivo identificar y clasificar los errores frecuentes que cometen los estudiantes de primer año de ingeniería cuando se ven enfrentados a resolución de ecuaciones trigonométricas

Los participantes fueron un grupo de 34 estudiantes de primer año que cursan la asignatura geometría para ingeniería. Estos estudiantes ya han estudiado previamente los tópicos asociados a trigonometría y ecuaciones trigonométricas.

El instrumento de recogida de datos correspondió a un cuestionario escrito. Este cuestionario estaba conformado por tres tareas (Figura 1) que involucraban la resolución de ecuaciones trigonométricas y se aplicó a los 34 estudiantes durante un periodo de clases de 60 minutos.

- 1.- Determine si el ángulo $x = \frac{\pi}{3}$ es solución de la ecuación $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
- 2.- Determine todos los elementos de conjunto restricción que están en $[0, 2\pi[$ de la siguiente ecuación
$$\frac{1 + \sin(x)}{2 \cos(2x) - 1} = 2.$$
- 3.- Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica en $[0, 2\pi[$.
$$\cos(2x) - 3 \cos(x) + 2 = 0.$$

Figura 1: Tareas que conformaron el cuestionario sobre ecuaciones trigonométricas

Análisis y desarrollo

Para la recogida de datos hemos seguido los siguientes pasos: revisión inicial de las respuestas identificando los errores cometidos por los estudiantes y luego, la utilización de las categorías Mosvshovitz-Hadar et al. (1987) para clasificarlos.

De los 34 estudiantes participantes de este estudio, cuatro de ellos no respondieron ninguna de las tareas del cuestionario y solo tres contestaron de correctamente a las tres tareas.

Nº de la tarea	Respondió a la tarea	Presentó algún tipo de error en su respuesta
1	27	16
2	22	19
3	22	14

Tabla 2: Número de estudiantes que respondieron a las tareas y presentaron errores

En la “Tabla 2”, podemos observar que 16 estudiantes comenten errores en la tarea 1, 19 en la tarea 2 y 14 en la tarea 3. En adelante, nuestro universo serán los estudiantes que presentan algún tipo de error en cada una de las tareas, que son el objeto de este estudio.

Producción del estudiante E ₁ , Tarea 1			Producción del estudiante E ₂ Tarea 1	
Categoría según Mosvshovitz-Hadar et al. (1987)	Teoremas o definiciones deformadas		Interpretación incorrecta del lenguaje	
	$\sin\left(\frac{\rho}{2} - x\right) - \sin(x) + \cos\left(x - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{1}{2}$ $\sin\left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{3}\right) - \sin\left(\frac{\rho}{3}\right) + \cos\left(\frac{\rho}{3} - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{1}{2}$ $\sin\left(\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(\frac{\rho}{3}\right) + \cos\left(\frac{\rho}{3}\right) - \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) = \frac{1}{2}$ $\left(\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 0\right) = \frac{1}{2}$ $\left((1 \cdot \sqrt{3}) + \frac{1}{2}\right) \neq \frac{1}{2}$		$\sin\left(\frac{\rho}{2} - x\right) - \sin(x) + \cos\left(x - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{1}{2}$ $\cos(x) - \sin(x) + \cos\left(\frac{\rho}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$ $\cos(x) - \sin(x) - \cos\left(\frac{\rho}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$ $\cos(x) - \sin(x) - \cos(x) = \frac{1}{2}$ $-\sin(x) = \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$	
Producción del estudiante E ₃ Tarea 1			Producción del estudiante E ₄ Tarea 1	
Categoría según Mosvshovitz-Hadar et al. (1987)	Teoremas o definiciones deformadas		Falta verificación de la solución, Error técnico	

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\rho}{2} - x\right) - \sin(x) + \cos\left(x - \frac{\rho}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ \cos(x) - \sin(x) + \cos\left(\frac{\rho}{2} - x\right) &= \frac{1}{2} \\ \cos(x) - \sin(x) - \cos\left(\frac{\rho}{2} - x\right) &= \frac{1}{2} \\ \cos(x) - \sin(x) + \sin(x) &= \frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{\rho}{3}\right) &= \frac{1}{2} \\ -\sqrt{3} &\neq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\rho}{2} - x\right) - \sin(x) + \cos\left(x - \frac{\rho}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{3}\right) - \sin\left(\frac{\rho}{3}\right) + \cos\left(\frac{\rho}{3} - \frac{\rho}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\rho}{6}\right) - \sin\left(\frac{\rho}{3}\right) + \cos\left(\frac{\rho}{6}\right) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Tabla 3: Ejemplos de respuestas a la tarea 1 del cuestionario y su categoría según Mosvshovitz-Hadar et al. (1987)

En la “Tabla 3” podemos apreciar los errores que más se repitieron en la Tarea 1. Por ejemplo, el estudiante E1 asume que usando $\sin\left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{3}\right) = \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(\frac{\rho}{3}\right)$ una definición deformada. El estudiante E2 si bien reconoce la presencia de una co-función y la interpreta adecuadamente, luego se equivoca en el signo de la función coseno cometiendo un error en el lenguaje simbólico. El estudiante E3, también reconoce la presencia de una co-función, pero no cambia la función seno por coseno, es decir, sabe la propiedad que se debe usar, pero la utiliza deformada. El estudiante E4 interpreta correctamente lo que hay que hacer en la tarea, sin embargo, abandona su desarrollo cuando solo queda evaluar las funciones trigonométricas en los ángulos más usuales, por lo que se presume desconocimiento de estos valores y finalmente, no responde a la tarea planteada.

Categoría según Mosvshovitz-Hadar et al. (1987)		Producción del estudiante E ₅ Tarea 2	Producción del estudiante E ₆ Tarea 2
Teoremas o definiciones deformadas		$\begin{aligned}\frac{1 + \sin(x)}{2 \cos(2x) - 1} &= 2 \\ \frac{1 + \sin(x)}{2 - 2 \sin(x) - 1} &= 2 \\ \frac{1 + \sin(x)}{1 - 2 \sin(x)} &= 2 \\ \frac{1}{\sin(x)} &= 2 \\ \sec(x) &= 2\end{aligned}$	$\begin{aligned}\frac{1 + \sin(x)}{2 \cos(2x) - 1} &= 2 \\ 2 \cos(2x) - 1 &\neq 0 \\ \cos(2x) &\neq \frac{1}{2} \\ 2x &\neq \frac{\rho}{3} + 2kp \vee 2x \neq \frac{2\rho}{3} + 2kp \\ x &\neq \frac{\rho}{6} + kp \vee x \neq \frac{\rho}{3} + kp \\ C_r &= \left\{ \frac{\rho}{3}, \frac{5\rho}{6}, \frac{4\rho}{3}, \frac{7\rho}{6} \right\}\end{aligned}$
Teoremas o definiciones deformados		$\begin{aligned}\frac{1 + \sin(x)}{2 \cos(2x) - 1} &= 2 \\ 2 \cos(2x) - 1 &= 0 \\ \cos(2x) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$	$\begin{aligned}\frac{1 + \sin(x)}{2 \cos(2x) - 1} &= 2 \\ 2 \cos(2x) - 1 &\neq 0 \\ \cos(2x) &\neq \frac{1}{2} \\ 2 \cos^2(x) &= \frac{1}{2} \\ \cos^2(x) &= \frac{1}{4} \\ \cos(x) &\neq \frac{1}{2} \vee \cos(x) \neq -\frac{1}{2} \\ C_r &= \mathfrak{N} - \left\{ \frac{\rho}{3}, \frac{5\rho}{3}, \frac{2\rho}{3}, \frac{4\rho}{6} \right\}\end{aligned}$

Tabla 4: Ejemplos de respuestas a la tarea 2 del cuestionario y su categoría según Mosvshovitz-Hadar et al. (1987)

En la “Tabla 4” se encuentran los errores más comunes de los estudiantes en la tarea 2. El error más usual en esta tarea fue el de no identificar la presencia en la tarea de una ecuación trigonométrica, es decir, cuando se preguntó por el conjunto restricción, los estudiantes no supieron interpretar que se estaba en presencia de una ecuación trigonométrica y que se debía buscar dónde se hace cero el denominador para encontrar la respuesta correcta. Por ejemplo, el estudiante E₅ interpretó la tarea como una identidad trigonométrica, manifestando una mala utilización de los datos entregados por la tarea. En el caso del estudiante E₆ interpreta la tarea como una ecuación trigonométrica y comete un error al momento de buscar los ángulos que hacen a $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ en un ciclo completo o periodo de la función coseno. E₆ encuentra de manera correcta el ángulo del primer cuadrante, pero no el del cuarto cuadrante. El estudiante E₇ comete el error de considerar que $\cos(2x) = \cos(x)$ mientras que el estudiante E₈ asume que $\cos(2x) = 2 \cos^2(x)$, mostrando desconocimiento de la definición de ángulo doble.

Categoría según Mosvshovitz-Hadar et al. (1987)		Producción del estudiante E ₉ Tarea 3	Producción del estudiante E ₁₀ Tarea 3
		Error técnico	Falta de verificación de la solución
		$\begin{aligned} \cos(2x) - 3\cos(x) + 2 &= 0 \\ 2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 &= 0 \\ 2u^2 - 3u + 1 &= 0 \\ \frac{9 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} \\ \cos(x) &= 1 \vee \cos(x) = -\frac{1}{2} \\ S &= \left\{0, \frac{\rho}{3}, \frac{5\rho}{3}\right\} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \cos(2x) - 3\cos(x) + 2 &= 0 \\ 2\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 &= 0 \\ 2\cos^2(x) - 1 - 3\cos(x) + 2 &= 0 \\ S &= \left\{0, \frac{\rho}{3}\right\} \end{aligned}$

Tabla 5: Ejemplos de respuestas a la tarea 3 del cuestionario y su categoría según Mosvshovitz-Hadar et al. (1987)

Los errores que se pudieron observar en la tarea 3 son de la misma naturaleza que los encontrados en las tareas anteriores. En la “Tabla 5” podemos ver que algunos estudiantes repiten los errores técnicos de no conocer los valores de las funciones trigonométricas en ángulos conocidos y la falta de verificación de los resultados. Por ejemplo, el estudiante E₉ que asegura en su desarrollo que $\cos(\pi) = 1$ y el estudiante E₁₀ que olvida incluir la respuesta encontrada de manera correcta en el conjunto solución cuando da la respuesta final a la tarea.

	1. Datos mal utilizados.	2. Interpretación incorrecta del lenguaje.	3. Inferencias no válidas lógicamente.	4. Teoremas o definiciones deformados.	5. Falta de verificación la solución.	6. Errores técnicos.
Tarea 1	1	4	2	6	0	3
Tarea 2	8	1	2	5	0	3
Tarea 3	0	1	0	4	3	6

Total	9	6	4	15	3	12
-------	---	---	---	----	---	----

En la “Tabla 6” presentamos la frecuencia con que se manifestó cada tipo de error por tarea de nuestro cuestionario.

Conclusiones

En este estudio podemos concluir que las causas más comunes de los errores que comenten los estudiantes que participaron de nuestro estudio son: (1) el uso de falsas identidades trigonométricas, (2) desconocimiento de los valores trigonométricos de los ángulos conocidos, desarrollan casi toda la ecuación de manera correcta y al momento de evaluar desconocen el valor de la función trigonométrica en estos ángulos, (3) no buscan las soluciones de las ecuaciones trigonométricas en todos los cuadrantes, muchos estudiantes solo buscan la solución en el primer cuadrante (4) También se pudo observar que los estudiantes no supieron interpretar la tarea 2 como una ecuación cuando se les preguntó por el conjunto restricción y no directamente por resolver una ecuación trigonométrica, (5) se observó además que los estudiantes no escriben de manera correcta el conjunto solución de una ecuación trigonométrica. Por último, coincidimos con Fahrudin y Pramudya (2019) en que los estudiantes no son rigurosos ni cuidadosos en resolver las ecuaciones trigonométricas, ya que cometen errores totalmente evitables.

Referencias

- Fahrudin, D., y Pramudya, I. (2019). Profile of students' errors in trigonometry equations. *An Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1188, No. 1, pp. 012-044). IOP Publishing.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3-14.
- Riccomini, P. J. (2005). Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction. *Learning Disability Quarterly*, 28(3), 233-242.
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. *Educación Matemática* (pp. 69-108). Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- Weber, K. (2005). Student's understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 102(2), 144–147.

ESTRATEGIA PEDAGÓGICA APLICADA EN EL AULA EXTENDIDA DE ESTADÍSTICA PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN COLOMBIA

Andrea Suárez Suárez

En esta ponencia se evidencia el avance del diseño de una estrategia pedagógica aplicada en el Aula Extendida ATENA del curso de Estadística, que funciona bajo la Plataforma virtual Moodle, con el fin de fomentar el aprendizaje significativo de los estudiantes de segundo semestre de Tecnología en Producción Industrial de las Unidades Tecnológicas de Santander (UTS), de Bucaramanga, Colombia. La estrategia se aplica a un grupo de 40 estudiantes que cursan la asignatura Estadística, ésta contribuye con la formación de competencias específicas y genéricas, relacionadas con el tema Medidas Estadística, el cual hace parte del programa de formación del curso, así como a la resolución de problemas y al conocimiento científico, que como profesional necesitará en su desempeño laboral. El estudio se desarrolla con un tipo de investigación mixta, bajo un enfoque de investigación acción participativa, en la que se aplican instrumentos de pre test, cuestionarios, talleres, considerando el Aprendizaje Basado en Problemas, con utilización de Rúbricas y Diarios Pedagógicos.

Aprendizaje significativo, Aprendizaje basado en problemas, Aula extendida, Educación, Estadística.

INTRODUCCIÓN

Las recientes tendencias de la educación y el aprendizaje universitario están relacionadas con el uso de tecnologías y herramientas pedagógicas que aportan a la comprensión y entendimiento de temas del curso de Estadística como son el cálculo de datos y resultados estadísticos, y la interpretación de esos resultados que van apoyar al estudiante en su desempeño profesional.

En la formación universitaria se hace necesaria la aplicación de técnicas que logren la enseñanza de las asignaturas básicas relacionadas con el desempeño profesional, además de reforzar las competencias de análisis crítico y de resolución de problemas, buscando fomentar el pensamiento científico en sus futuros profesionales. Según López, Rodríguez, y Remesal (2007), el estudiante universitario de éxito es un estudiante que utiliza estrategias motivacionales de tipo intrínseco, que autorregula su estudio planificando y revisando el proceso, y que utiliza estrategias de elaboración de anclaje que facilitan el aprendizaje significativo.

Este trabajo de investigación tiene por objetivo general “Diseñar una estrategia pedagógica aplicada en el Aula Extendida del curso de Estadística para los estudiantes de la Tecnología en Producción Industrial de las Unidades Tecnológicas de Santander, para el fomento del aprendizaje significativo del alumno con respecto a su perfil profesional”, para dar cumplimiento al objetivo general se contemplaron los siguientes objetivos específicos: Identificar las deficiencias estadísticas de los estudiantes, para la definición de los temas en los que se debe profundizar, construir una estrategia pedagógica pertinente, en busca del aprendizaje significativo en los estudiantes del curso de Estadística de la Tecnología en Producción Industrial, aplicar la estrategia diseñada a los estudiantes y por último, evaluar la estrategia aplicando los ajustes pertinentes.

Este proyecto beneficia a los estudiantes de la Tecnología en producción industrial de las Unidades Tecnológicas de Santander que cursan la asignatura Estadística, en el desarrollo de actividades de tipo asincrónico para trabajar extra clase en el Aula Extendida ATENA, así mismo orienta a los docentes de Estadística para que apliquen la estrategia pedagógica por medio del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) orientados a la formación profesional en el desarrollo de los cursos asignados, adicional a esto, es un punto de inicio para aplicar esta estrategia en cualquiera de los temas de la asignatura e incluso crear transversalidad con otras materias de la carrera.

ANTECEDENTES

Algunas investigaciones relacionadas con el aprendizaje de la Estadística concluyen que es indispensable el aprendizaje significativo para que el estudiante pueda apropiarse los conceptos con la aplicación práctica, según Azcárate y Cardeño (2011) “El conocimiento estadístico no puede ser comprendido separado de su contexto de aplicación, ni aplicado únicamente a problemas abstractos que no se encuentran en la vida real” (p. 792).

Según Gómez, 2005, el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es un método didáctico que hace parte de las pedagogías activas y en la estrategia denominada aprendizaje por descubrimiento y construcción, en la cual el docente es un orientador, expositor de problemas o situaciones problemáticas y está dispuesto a colaborar con las necesidades de estudiante y el rol del alumno se convierte en eje de su propio conocimiento, activando procesos cognitivos y la transferencia de metodologías de acción intelectual.

El Plan de curso de Estadística cita el ABP como una estrategia didáctica centrada en el aprendizaje, la investigación y la reflexión, que se caracteriza por la solución de un problema “real” previsto por un profesor. En este sentido, los estudiantes deben hacer uso de pensamiento crítico y argumentativo, así como, de las habilidades para resolver problemas trabajando colaborativamente en pequeños grupos, adicional a lo anterior según Chavez, Retamal & León (2020), la puesta en práctica de estrategias didácticas de enseñanza por parte de los profesores del área de pedagogía es la posibilidad de favorecer el desarrollo del pensamiento crítico de sus estudiantes. Normalmente la carrera se ofrece por la universidad de forma presencial y a causa de la Pandemia COVID-19 se hizo indispensable el uso de recursos tecnológicos y de plataformas virtuales para las clases remotas y actividades asincrónicas, según Vialart, (2020), en su artículo Estrategias didácticas para virtualización en tiempos de COVID 19, enfatiza la importancia de aplicar estrategias que aumenten el interés del estudiante y estimulen la investigación así como la participación y las actividades grupales, y lo ve como una oportunidad para acortar distancias, enriquecer el proceso de enseñanza aprendizaje y permitir el desarrollo de programas de estudio donde el estudiante gestiona su conocimiento y la colaboración con todos los actores involucrados.

METODOLOGÍA

Para el diseño de la estrategia pedagógica inicialmente se realiza búsqueda bibliográfica, se analiza el plan de curso y las competencias de formación, buscando que su implementación impactar en las competencias que el estudiante fortalece durante el desarrollo de su vida estudiantil. De esta manera, se considera una forma lograr que los estudiantes adquieran un aprendizaje significativo y la apropiación del conocimiento teórico llevado a la práctica de acuerdo con su perfil profesional.

Se espera el logro de los objetivos con la aplicación una investigación mixta con un propósito interactivo y un grado de profundidad de investigación descriptiva. El enfoque de la investigación es la Investigación acción participativa en la cual los actores se convierten en protagonistas del proceso de construcción del conocimiento e intervención sobre la realidad. Según Colmenares, 2012, la investigación-acción participativa propicia la integración del conocimiento y la acción, toda vez que ella admite que los usuarios se involucren, conozcan, interpreten y transformen la realidad objeto del estudio, por medio de las acciones que ellos mismos proponen como alternativas de solución a las problemáticas identificadas por los propios actores sociales, y cuyo interés principal es generar cambios y transformaciones definitivas y profundas.

Los instrumentos usados para el diseño de la estrategia es un cuestionario pre test en el cual se evidencia el conocimiento de los estudiantes en el tema de Medidas estadísticas y su habilidad en la resolución de problemas, formando parte con esto, de una evaluación diagnóstica que oriente las debilidades existentes en los estudiantes, para fortalecer los aspectos necesarios al momento de implementar la estrategia. Se diseñan y aplican talleres junto con las rúbricas de evaluación, durante todo el proceso se lleva registro en el diario pedagógico, así mismo se aplica cuestionario pos test para realizar el contraste y generar resultados observables de la estrategia aplicada.

Para el desarrollo de la estrategia se usa el Aula Extendida de Estadística proporcionada por las UTS, que fue construida por la autora de la investigación ajustada al Plan de Curso de dicha asignatura. Al Aula virtual tienen acceso libre los estudiantes activos del grupo, y en ella responden los instrumentos a aplicar, haciendo uso de herramientas Web, en donde disponen de los cuestionarios test, actividades y rúbricas para la solución de talleres, foros donde queda evidencia del trabajo colaborativo, e-portafolio en el cual los estudiantes organizan las evidencias de investigación y de la propuesta de solución del problema principal.

La población de estudio la conforman todos los grupos de estudiantes matriculados en el curso de Estadística, correspondiente a la Tecnología de Producción Industrial para el segundo semestre del presente año, de esta población se realiza la selección de la muestra, para esto se tienen en cuenta criterios de inclusión, los cuales, según Arias, Villasís, & Novales (2016), expone que los criterios de inclusión son todas las características particulares que debe tener un sujeto u objeto de estudio para que sea parte de la investigación. Por lo anterior se selecciona como muestra a estudiantes que cumplen las características de la población seleccionada. La selección de la muestra se realiza por Muestreo intencional o de conveniencia, este tipo de selección consiste en escoger la muestra de estudio para la investigación por métodos no aleatorios. Por lo tanto, los elementos de la muestra que se seleccionan son 40 estudiantes de la Tecnología de Producción Industrial matriculados en el curso de Estadística, grupo que fue asignado a la autora para orientar en el semestre.

ANÁLISIS

La muestra se organizó en 10 grupos de trabajo colaborativo conformado por 4 participantes cada uno, se realizaron sesiones de asesoría para el grupo general y para cada uno de los subgrupos, en la cual el docente en su rol orientador y motivador, impulsa al estudiante a ser el protagonista, quien investiga y propone posibles objetivos y soluciones al problema planteado, usando el Método de 7 pasos propuesto por Exley y Dennick (2007), el cual fue aplicado en la Universidad Lind-Burg en Maastricht, Holanda.

Para el desarrollo de la estrategia se realizaron sesiones de tipo sincrónico en las cuales se usaron los instrumentos diseñados y avalados por expertos, así como en las actividades de trabajo colaborativo y de recolección de información por parte del investigador y el trabajo asincrónico por parte de los participantes fue de búsqueda de información, crítica y selección relevante para el autoaprendizaje del tema propuesto, así mismo se identificaron los grupos que por su compromiso y dedicación finalizaron con un trabajo acorde a los esperado.

El trabajo de investigación se encuentra en la fase análisis de resultados, y se espera concluir con la investigación en los próximos meses para poder interpretar realidades y así contribuir con la construcción de conocimientos haciendo uso de un aprendizaje significativo, en los estudiantes de Tecnología en Producción Industrial

CONCLUSIONES

Se diseñó y se aplicó la estrategia pedagógica basada en el ABP aplicada en actividades propuestas en el Aula extendida ATENA para el aprendizaje significativo de los estudiantes de UTS de la carrera Tecnología en Producción Industrial. Con los avances realizados hasta el momento se logra cumplir con el objetivo de la investigación y además de realizar un aporte significativo a la didáctica de la Estadística y al enfoque que propone darse desde las herramientas pedagógicas y tecnológicas para el aprendizaje significativo y la relación de los problemas resueltos que se acerca a su formación profesional.

Sumado a esto la pandemia ha obligado a incorporar el uso de las TIC en las actividades educativas, lo cual acompaña el proceso de formación con la incorporación de herramientas que involucran estrategias de tipo colaborativo en las cuales los actores involucrados son los protagonistas de su propio aprendizaje.

Así mismo, el uso del Aula Extendida ATENA UTS para el desarrollo del tema Medidas Estadísticas es una propuesta para el estudio de la Estadística, curso que es indispensable en todas las áreas de formación, lo cual da una base importante para poder combinar cursos de carrera en el cual se puedan interrelacionar y a partir de la transversalidad, enriquecer la presente estrategia para otras áreas del conocimiento.

Referencias

- Arias G, J., Villasís K, M. Á., & Novales, M. G. M. (2016). El protocolo de investigación III: la población de estudio. *Revista Alergia México*, 63(2), 201-206
- Azcárate, P., & Cardeñoso, J. M. (2011). La Enseñanza de la Estadística a través de Escenarios: implicación en el desarrollo profesional. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, 24(40), 789-810.
- Chavez A, M. A, Retamal V, J. L., & León U, A. P. (2020). Estrategias didácticas de enseñanza para el desarrollo del pensamiento crítico. *Revolución en la formación y la capacitación para el siglo XXI*, 24-32.
- Colmenares E, A. M. (2012). Investigación-acción participativa: una metodología integradora del conocimiento y la acción. *Voces y Silencios. Revista Latinoamericana de Educación*, 3(1), 102-115. .

- Exley, K. & Dennick, R. (2007). Enseñanza en pequeños grupos en educación superior: tutorías, seminarios y otros agrupamientos (Vol. 14). Narcea Ediciones
- Gómez, B. R. (2005). Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y educadores*, (8), 9-20.
- López, B. G., Rodríguez, J. S., & Remesal, A. F. (2007). Estrategias de aprendizaje y rendimiento académico en estudiantes universitarios. *Revista de investigación educativa*, 25(2), 421-441.
- Vialart V, M. N. (2020). Estrategias didácticas para la virtualización del proceso enseñanza aprendizaje en tiempos de COVID-19. *Educación Médica Superior*, 34(3).



ESTRUCTURAS Y MECANISMOS MENTALES DE LOS ESTUDIANTES EN LOS CONCEPTOS DE PERMUTACIÓN Y COMBINACIÓN ANALIZADAS DESDE LA TEORÍA APOE

Joaquín Ignacio Cartes Véliz, Juan Patricio Soto Díaz, José Manuel Valencia Bravo

Este trabajo presenta una investigación en el área de la didáctica de la matemática fundamentada mediante la teoría APOE (Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) formalizada en Asiala et al. (1996), la que permite analizar la forma en que los estudiantes construyen mentalmente cualquier concepto matemático, clasificando dichas construcciones en estructuras y mecanismos mentales. Se trabajó específicamente con los conceptos de permutación y combinación que se encuentran presentes en el nivel de segundo medio del plan de estudio de matemática y son fundamentales para el cálculo de probabilidades. Para efectos de este análisis se presenta una hipótesis sobre cómo los estudiantes aprenden los conceptos, denominada "Descomposición Genética" (DG), la cual se refina mediante la aplicación de cuestionarios y entrevistas a estudiantes de diferentes niveles de enseñanza media y profesores de matemática en formación para determinar cómo construyen los conceptos de interés y sugerir a los profesores una secuencia de construcción de los conceptos de permutación y combinación por medio de la resolución de problemas.

PALABRAS CLAVES: Teoría APOE, Estructuras y mecanismos mentales, Descomposición Genética, Permutación, Combinación.

ABSTRACT

This paper presents an investigation in the area of mathematics didactics based on the APOS Theory (Acronym for Action, Process, Object and Scheme) formalized in Asiala et al. (1996), which allows analyzing the way in which students mentally construct any mathematical concept, classifying these constructions in mental structures and mechanisms. We worked specifically with the concepts of permutation and combination, which are present in the second level of the mathematics curriculum and are fundamental for the calculation of probabilities. For the purposes of this analysis, a hypothesis is presented on how students learn the concepts, called "Genetic Decomposition" (GD), which is refined through the application of questionnaires and interviews with students from different levels of secondary education and mathematics teachers in training to determine how they construct the concepts of interest and to suggest to teachers a sequence of construction of the concepts of permutation and combination by means of problem solving.

APOS Theory, Mental Structures and Mechanisms, Genetic Decomposition, Permutation, Combination.

INTRODUCCIÓN

El área que se trabajó en esta investigación es la combinatoria, específicamente los conceptos de permutación y combinación, insertos en el programa de estudios de segundo medio en el eje temático Probabilidad y estadística como herramienta para el cálculo de probabilidades. Dichos conceptos son fundamentales para los estudiantes de dicho nivel en su escolaridad, los cuales presentan dificultades en su enseñanza y aprendizaje, tal como se manifiesta en Salgado (2008):

“Los problemas de conteo se introducen en la escuela desde la enseñanza primaria y tanto profesores como alumnos muestran dificultades con los conceptos involucrados. Estos problemas se siguen manifestando en el nivel universitario”.

Para analizar la forma en que los estudiantes construyen los conceptos de interés se utilizó el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE y utilizada por el grupo RUMEC, el cual contempla tres fases. En primer lugar, se presenta el análisis previo que se realizó (concepto-epistemología-curriculum), seguido de la construcción de la descomposición genética (DG) e instrumento, para finalizar con el análisis de las respuestas y la aplicación de entrevistas. Las fases anteriores permiten realizar un refinamiento a la DG.

La investigación busca aportar al proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes al encontrar una forma de abordar de manera conceptual las combinaciones y permutaciones, a partir de esquemas mentales que construyen los mismos estudiantes al momento de resolver problemas en esta área, basados en la teoría APOE, por lo que nuestra pregunta de investigación es: ¿Qué estructuras y mecanismos mentales utilizan los estudiantes de diferentes establecimientos de la región del Biobío cuando resuelven problemas donde están involucrados los conceptos de permutación y combinación de acuerdo a su nivel de estudios?

ANTECEDENTES

Para la realización del trabajo se recabaron antecedentes de tipo epistemológico (desarrollo histórico de los conceptos), conceptual (conceptualización matemática formal), curricular (presencia de los conceptos en el currículum de matemática escolar) e investigaciones ya existentes que abordan la temática de interés.

El análisis epistemológico basado en Biggs (1979) y Domínguez (2016) de los conceptos de permutación y combinación, permite evidenciar que estos fueron abordados a lo largo de la historia en primer lugar de manera intuitiva, como simples problemas o acertijos que podían ser resueltos sin un mayor bagaje matemático desde aproximadamente 2000 años a.C. en China y posteriormente en varias civilizaciones del mundo como India o Grecia. Dichos conceptos pasaron desapercibidos por los matemáticos a lo largo de la historia, generando interés cerca de 1650 en Francia con la implementación de los juegos de azar y recién se llegaron a formalizar alrededor del año 1666 con la publicación del libro “De arte Combinatoria” de Leibniz y el envío de una carta de este a Bernoulli en 1699 que permite que nazca la teoría de las particiones. De estos avances que se presentan como ejemplo surge la combinatoria como disciplina matemática.

En cuanto al análisis conceptual matemático, podemos notar que en Grimaldi (1998) se precisa una definición de los conceptos de permutación y combinación utilizando como base la regla del producto (principio multiplicativo).

Para efectos del análisis curricular, se realizó una revisión del plan de estudios de matemática en todos los niveles escolares para identificar en dónde estaban presentes los conceptos de interés, los niveles previos y los niveles posteriores. Los conceptos de interés se encuentran presentes en el nivel de segundo medio y tienen por objetivo utilizar permutaciones y combinaciones para el cálculo de probabilidades. En los niveles previos destacan los niveles de séptimo básico, octavo básico y primero medio en donde se emplea el principio multiplicativo para obtener el total de posibilidades en un determinado evento y en los niveles posteriores se encuentran en tercero y cuarto medio

(plan común y electivos) el uso de permutaciones para la construcción de la distribución binomial de probabilidad.

Algunas investigaciones fundamentadas mediante la teoría APOE que abordan la temática de interés y que apoyan este trabajo son Salgado y Trigueros (2009) y Domínguez (2016) en dónde se presenta una DG de los conceptos de interés para nivel universitario y secundaria respectivamente, con el objetivo de construir una propuesta didáctica en el área.

METODOLOGÍA

La investigación es cualitativa y usa la metodología del ciclo de investigación de APOE trabajada por el grupo RUMEC, y que establece tres fases:

- i. Análisis teórico del concepto
- ii. Diseño e implementación de enseñanza
- iii. Observación, análisis y verificación de datos.

Así, como primera acción se realiza un análisis epistemológico, curricular y matemático de los conceptos de permutación y combinación, constituyendo hipótesis sobre cómo los estudiantes aprenden los conceptos ya mencionados, estableciendo la “Descomposición Genética preliminar” la cual se encuentra categorizada en tablas de estructuras y mecanismos mentales y que en resumen, considera que los estudiantes construyen los conceptos siguiendo una secuencia, primeramente de manera intuitiva y posteriormente generalizando, o bien, aplican los conceptos ya conocidos. La secuencia a nivel de contenido es principio multiplicativo-permutación-combinación.

En la segunda fase, se diseña un instrumento con tres problemas considerando la descomposición genética desarrollada, que abordan los conceptos de principio multiplicativo, permutación y combinación respectivamente, aplicados a estudiantes en dos oportunidades (primer y segundo testeo), categorizando las respuestas en base a la DG en la tercera fase. En esta última también se realizan entrevistas para observar mecanismos mentales y así poder refinar la DG preliminar, obteniendo conclusiones sobre cómo los estudiantes aprenden los conceptos de permutación y combinación.

ANÁLISIS

Se realizó un primer y segundo testeo del instrumento a estudiantes de enseñanza media y profesores de matemática en formación, incluyendo entrevistas para obtener más información de los mecanismos mentales. El primer testeo arrojó información de estudiantes que respondían correctamente validando la DG, y otros que no respondían a lo solicitado debido a la poca comprensión de los enunciados. Es por esto último que se decide mejorar el instrumento en cuanto a su redacción, considerando las respuestas de los estudiantes, para ser implementado en un segundo testeo (sin modificar la DG preliminar) con el fin de obtener datos más recabados.

El análisis (en el primer y segundo testeo) fue realizado en base a la imagen de la respuesta entregada por el estudiante, considerando tanto errores como aciertos, y cada una de las producciones que realiza se clasifican en base a las etapas de la teoría APOE justificando el por qué

manifiesta estar en esa etapa, además, se buscan indicios que indiquen el uso de mecanismos mentales, los cuales son abordados con mayor precisión por medio de entrevistas.

A modo de ejemplo, se presenta la respuesta de un estudiante a la situación 1: “Camila a la Moda”, la cual contempla cuatro incisos y consiste en encontrar el total de combinaciones posibles de vestimenta con una determinada cantidad de prendas distintas (poleras, pantalones, etc.). Cada inciso va añadiendo una determinada cantidad de prendas hasta llegar al último, que demanda determinar el total de combinaciones de vestimenta con una cantidad general de prendas de cada tipo (a cantidad de prenda 1, b cantidad de prenda 2, ..., g cantidad de prenda 7).

Figura 1. Respuesta estudiante 2, Situación 1.d. - Segundo testeo

Handwritten student work on grid paper showing calculations for combinations of clothing items. The work is organized into three rows for items a, b, and c, and a final row for a general formula.

Item	Calculation	Result
a) Si en la a habían	$3p \cdot 2c \cdot 1pa = 6c$	6c
Si en la b habían	$2l \cdot 3p \cdot 2c \cdot 2pa = 24c$	24c
Si en la c habían	$2s \cdot 2l \cdot 3p \cdot 2c \cdot 2pa = 48c$	48c
Si ahora hay	$aP1 \cdot bP2 \cdot cP3 \cdot dP4 \cdot eP5 \cdot fP6 \cdot gP7 = abcdefg$	abcdefg

Camila tiene abcdefg formas distintas para vestirse

Fuente: Elaboración estudiante 2, segundo medio

De la respuesta anterior, se puede observar que el estudiante utiliza los resultados obtenidos en los incisos anteriores y los relaciona con la cantidad de prendas a modo de multiplicación, por ejemplo, en el inciso a indica que había 3 pantalones (p), 2 cinturones (c) y 1 polera (po) que al multiplicar resulta 6 combinaciones (c). Lo anterior se encuentra en etapa de proceso según la DG. Al repetir este proceso en cada uno de los incisos el estudiante logra encontrar una forma de escribir todas las combinaciones posibles en el inciso d obteniendo la respuesta correcta y logrando un acercamiento a la construcción de la fórmula del principio multiplicativo, lo cual se encuentra en etapa de objeto según nuestra DG. Por otro lado, se realiza una entrevista al estudiante sobre esta misma respuesta para indagar en el uso de mecanismo, el estudiante nos afirma:

“(...) con la pequeña teoría que se me ocurrió de multiplicarlo todo a ver si me daba. En la b) lo mismo: 2 lentes, 3 poleras, 2 cinturones, 2 pantalones: 24. Y así lo mismo en la c). En la d), se decía que se multiplicaba ap1, bp2, cp3, dp4, ep5, fp6, gp7. Es lo que dije. Si le saco todas las letras y solo multiplico los números, en las otras, me iba a dar el total de combinaciones. Entonces, hice lo mismo, pero, sólo saqué los p1, p2, p3 y multipliqué solo las letras. Que me dió de que Camila tenía abcdefg formas distintas para vestirse”. (Estudiante 2, comunicación personal, 11 de noviembre de 2020).

Consideramos que el estudiante está utilizando el mecanismo de “coordinación” pues extrae elementos importantes de cada uno de los procesos que realizó en los incisos anteriores dando una conclusión (le dice pequeña teoría) y que es el multiplicar cada una de las prendas. Por medio de esto, creemos que el estudiante es capaz de llegar a una “encapsulación” construyendo el objeto de principio multiplicativo, siendo capaz de escribir todas las combinaciones de prendas distintas de manera general como abcdefg formas distintas.

CONCLUSIONES

Las conclusiones se clasifican en tres categorías:

a) Estructuras y mecanismos nuevos (o modificados) que permiten refinar la DG preliminar.

La DG preliminar fue validada en su mayoría a partir de las respuestas de los estudiantes, surgiendo nuevas estructuras y mecanismos que permiten refinarla. Por ejemplo, que los estudiantes realicen listas completas de combinaciones o reordenamientos posibles para obtener el total (acción), ya habiendo pasado por el principio multiplicativo, lo que se creía que no ocurriría producto de la generalización previa (encapsulación del objeto).

b) Sugerencias de mejora a los tres problemas implementados

Los problemas iniciales requieren ser modificados de manera que permitan que los estudiantes los resuelvan mediante diversos procedimientos domine o no los conceptos involucrados. Cada situación debe contener una serie de preguntas (incisos) secuenciadas desde lo particular a lo general.

c) Conclusiones respecto a la enseñanza y aprendizaje de los conceptos.

Se sugiere implementar la secuencia de trabajo principio multiplicativo- permutación-combinación en el aula considerando las sugerencias expuestas, utilizando problemas que permitan el uso de diversos procedimientos para maximizar los mecanismos que permiten un tránsito entre diversas estructuras mentales, con el objetivo de lograr la encapsulación de los conceptos, fundamentales en el área de la combinatoria y el cálculo de probabilidades.

Referencias

- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp.1–32). U.S.A.: American Mathematical Society
- Biggs, N. L. (1979, mayo). The roots of combinatorics. *Historia Matemática*, 6(2), 109-136. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086079900740#aep-bibliography-id7>
- Domínguez, D. L. (2016). Secuencia didáctica que le permite a los estudiantes de octavo y noveno interpretar y usar las nociones de conteo en la solución de problemas de combinación y permutación. Maestría thesis, Universidad Nacional de Colombia-SedeBogotá. <http://bdigital.unal.edu.co/54569/7/DianaLuc%C3%ADDaDominguezP.2016.pdf>
- Grimaldi, R. (1998). Matemáticas Discreta y Combinatoria: Una introducción con aplicaciones, Naucalpan de Juárez, México. Addison Wesley Iberoamericana S.A.
- Ministerio de educación (s.f.) Matemática 2º medio Unidad 4: Probabilidades. <https://www.curriculumnacional.cl/portal/Educacion-General/Matematica/Matematica-2-medio/79943:Unidad-4-Probabilidades>
- Salgado, H. & Trigueros, M. (2009). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación matemática*, 21(1), 91-117. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000100005&lng=es&tlng=es.

HACIA UNA DESCOMPOSICIÓN GÉNÉTICA DE LA REGLA DE DERIVACIÓN DEL PRODUCTO

Patricio Felipe Orrego Contreras, Marcela Parraguez González

El presente trabajo busca indagar y describir, en términos de la teoría APOE, la ruta cognitiva que un estudiante recorre en la construcción de la comprensión de la regla de derivación del producto para funciones reales de una variable real. El objetivo es caracterizar el conocimiento —así construido— situándolo en un estado de Acción, Proceso, Objeto o Esquema. Junto con proponer la descomposición genética (ruta cognitiva) de dicha regla, se aborda la validación de la misma analizando las producciones de un grupo de estudiantes de ingeniería civil de primer año. Además, se informan algunos hallazgos provenientes del estudio histórico-epistemológico respecto de la construcción y enseñanza de dicha regla, que podrían ser de utilidad a la comunidad en su práctica de aula.

APOE, regla del producto, didáctica del cálculo, reglas de derivación, descomposición genética.

INTRODUCCIÓN

A nivel nacional, en los criterios definidos por la Comisión Nacional de Acreditación (CNA Chile) y usados por las agencias acreditadoras, se define que las carreras de ingeniería (ingenierías con base científica) deben considerar cinco áreas de formación, una de ellas denominada ciencias básicas, la misma se describe como sigue: *Ciencias Básicas*, corresponden al tratamiento de las matemáticas, la física, la química y otras disciplinas, según las características del programa. Su aprendizaje debe incluir, entre otras materias, el cálculo en varias variables y ecuaciones diferenciales. Los objetivos de esta área son: (1) contribuir a la formación del pensamiento lógico-deductivo, (2) proporcionar a los estudiantes los fundamentos que les permitan enfrentar con éxito problemas que requieren de capacidad analítica e innovación y (3) proporcionar la preparación suficiente para actualizar y profundizar sus conocimientos, (Tomicic, 2011).

Uno de los objetos matemáticos básicos, que un estudiante de primer año de ingeniería deberá interiorizar profundamente y, que presenta gran dificultad en su comprensión es el concepto de derivada (Pinto y Parraguez, 2015). Este concepto es una de las puertas de entrada a las *matemáticas superiores* y se articula con otras asignaturas de las ciencias básicas tales como Física o ecuaciones diferenciales. Además, la derivada es el soporte teórico de áreas más específicas de la ingeniería. En el escenario anterior, el presente trabajo gira en torno a la comprensión de la regla de derivación del producto para funciones reales de una variable, en un contexto universitario de primer año de Ingeniería.

ANTECEDENTES, PROBLEMÁTICA Y OBJETIVO

Ya se advierte en Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995) que los estudiantes son capaces de *calcular* derivadas de forma mecánica, pero que no son capaces de avanzar en una comprensión que aborde otras facetas de este conocimiento. En Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) se describen los diversos enfoques que han abordado las investigaciones en torno a la derivada como objeto de estudio:

- Esquema conceptual (Azcárate, 1990), derivada de la idea de imagen del concepto (Tall, 1989).
- Ideas procedentes de una aproximación piagetiana del conocimiento y su desarrollo, visto a través de la teoría APOE (Asiala, Cottrill, Dubinsky, & Schwingendorf, 1997) y la del desarrollo de los esquemas (Clark et al., 1997; Baker et al., 2000; Badillo, 2003; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros, García, García Blanco y Llinares 2006).
- Ideas procedentes del papel de las representaciones y actividades con ellas en el desarrollo de los significados (Font, 2000a; 2000b; Habre & Abboud, 2006)
- Las teorías de la reificación (Sfard, 1992), que se centran en los vínculos proceso-objeto (Zandieh, 2000)

De las investigaciones descritas en Sánchez-Matamoros et al. (2008) nos resulta de vital interés la realizada por Clark et al. (1997), quienes construyeron un modelo cognitivo, en el marco de la teoría APOE, para la regla de la cadena. Por otra parte, investigaciones más recientes (Horvath, 2008; Jojo, Brijlall & Maharaj, 2010; Kabaal, 2010; Maharaj, 2013) continúan poniendo de manifiesto diversas dificultades acerca de aprendizaje, aplicación y comprensión de la Regla de la Cadena. A pesar, de que las investigaciones mencionadas comparten, en algunos casos el marco teórico, o el objeto matemático, ninguna de ellas ha analizado, específicamente, que sucede con las estructuras mentales cuando un estudiante aprende la regla del producto para derivadas.

El interés investigativo por la regla del producto para derivadas, no radica sólo en una mera inquietud académica por parte de los didactas de la matemática o de matemáticos profesionales interesados en didáctica, sino que en uno muy práctico: los estudiantes presentan serias dificultades para comprender las *reglas de derivación*. En particular, en Pinto y Parraguez (2015, p. 338) se expone que:

[...] sin embargo, se presentan serias dificultades para lograr que desarrollen una comprensión de su significado, este hecho fue presentado también en (Sierpinska, 2000). Una consecuencia de lo expuesto, se muestra en la alta tasa de reprobación y deserción por parte de estudiantes de primeros años de nivel universitario en los cursos de cálculo.

Esta inquietante realidad es de carácter multidimensional y aún constituye un rico e importante objeto de estudio en didáctica de la matemática. Los deficientes resultados en cursos de cálculo (y otros) se presentan a menudo a nivel global, y Chile no es una excepción. En la figura 1, presentamos los porcentajes de aprobación –en un periodo de 5 años– de una universidad chilena que implementa una modalidad modular, en un intento de cambiar sus resultados.

Asignatura	% de reprobación promedio 2005-2009
Álgebra y Trigonometría	40,4
Álgebra Lineal	52,9
Cálculo I	37,2
Cálculo II	

Figura 1: Porcentaje de reprobación en cálculo diferencial (cálculo 1) (Irazoqui y Medina, 2014)

Evidentemente los problemas de rendimiento académico (reprobación) resultan relevantes a la hora de considerar la deserción universitaria en general, y más aún, durante el primer año de formación.

El objetivo de esta investigación es indagar y describir las estructuras y mecanismos mentales que muestra un estudiante que se encuentra en vías de aprendizaje de la regla del producto para derivadas de funciones de una variable real. Para lograrlo usaremos la teoría APOE como marco teórico, la cual nos permitirá explicar y sustentar los hallazgos. Específicamente, se propone: (a) Construir un modelo para la regla de derivación del producto y (2) Validar o refinar el modelo hipotético propuesto.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico al que adscribe esta investigación es el de la teoría APOE, acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, propuesto por Ed Dubinsky (1991). En APOE el conocimiento se sustenta en estructuras mentales que un individuo construye a medida que avanza en su comprensión de un cierto fragmento de la matemática. Estas estructuras llamadas *Acción*, *Proceso*, *Objeto*, y *Esquema* son formadas por mecanismos mentales llamados *interiorización*, *encapsulación*, *reversión*, *generalización*, y otros. La estructura mental por la cual un aprendiz (de un determinado contenido matemático) inicia la comprensión del mismo es la *Acción*, esta estructura se caracteriza por que su puesta en marcha se inicia sólo cuando el individuo percibe un estímulo externo que gatilla la actividad de esta *Acción*. Si un aprendiz reflexiona sobre esta *Acción*, y la internaliza –la hace propia– mediante el mecanismo mental de *interiorización* dará origen a una nueva estructura mental llamada *proceso*. Un proceso se caracteriza porque su puesta en marcha no requiere de estímulo percibido como externo, sino que depende del individuo intrínsecamente.

Es así como los diversos mecanismos mentales generan nuevas estructuras mentales a partir de las ya existentes, no es que estas se transformen y desaparezcan, sino que todas las estructuras mentales (Acciones, Procesos) conviven e interactúan dentro de un *objeto* mental o eventualmente dentro de un *Esquema* mental formado durante el recorrido cognitivo que realiza el estudiante para alcanzar la comprensión del objeto matemático.

El modelo que describe las estructuras y mecanismos mentales que se precisan para la construcción de un fragmento de la matemática se llama Descomposición Genética (DG).

METODOLOGÍA

El presente trabajo se aborda desde un enfoque cualitativo que se dividirá en dos fases, ambas de carácter cualitativo, pero que seguirán distintos métodos.

Fase 1: Estudio teórico, en esta etapa realizaremos el levantamiento teórico de la DG, que describirá en términos de la APOE, cuál es la *ruta* cognitiva hipotética que recorre un estudiante en vías de construcción del conocimiento matemático en estudio.

Fase 2: Estudio de casos cualitativos, para implementar la segunda fase diseñaremos y aplicaremos un cuestionario de respuesta abierta y entrevistas en profundidad para enriquecer los datos obtenidos por medio del cuestionario antes mencionado. Las herramientas de recolección de

información serán aplicadas sobre un grupo de estudiantes (voluntarios) de una universidad privada del país ubicada en la ciudad de Santiago, de una carrera impartida en la facultad de ingeniería que en su primer año de formación incluye una asignatura de cálculo diferencial (que contempla la enseñanza del concepto de la derivada). Al grupo se accedió por disponibilidad del investigador y los voluntarios serán invitados a participar de forma libre.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

El objetivo final de la aplicación de cuestionarios y entrevistas es detectar en las producciones (respuestas) de los estudiantes si la DG hipotética propuesta en la fase 1 describe la ruta cognitiva recorrida por los estudiantes en su proceso de aprendizaje de la regla del producto para derivadas. La información como la que se muestra en la figura 1, contribuyó a validar la DG propuesta o refinarla, así como también a conjeturar explicaciones a posibles diferencias entre la DG hipotética y lo observado en las respuestas de los estudiantes. En la figura 1, a modo de ejemplo, se presentan algunos de estos análisis y resultados.

De igual manera queda en evidencia la estructura mental proceso P1 del sujeto E1 en la producción que reproducimos en la Figura 1 debido a que ya no es necesario indicarle el uso de la regla, sin embargo, por si sólo decide usarla, ver (2) y (4) en la figura 1. En este caso no requiere escribir derivadas elementales y sin mayor preámbulo aplica la regla de forma exitosa, ver (3) en la figura 1, por último hacemos notar que incluso es capaz de describir la regla en forma oral/escrita, ver (5) en la figura 1.

Considera la siguiente función:

$$f(x) = xe^x, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(2) , obten $f'(x)$ de ser posible. (3)

producto $\rightarrow 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + xe^x$

¿Qué método o técnica usaste? (5)

producto, derivé x lo multipliqué por e^x sin derivar y luego sumé x sin derivar por e^x derivado. se quedó $e^x + e^x$.

¿por qué? ¿podrías detallar qué te llevo a proceder así?

porque son un producto. Pensé en las derivadas por separado. (4)

Figura 1: Respuesta proporcionada por un estudiante de Ingeniería de primer año.

A MODO DE CONCLUSIÓN PRELIMINAR

Podemos destacar que en los datos analizados nos permitieron respaldar, inicialmente, que las estructuras mentales propuestas en nuestra DG se han observado en los estudiantes, por lo que creemos que nuestra DG, en el peor de los escenarios deberá refinarse, debido a que ya se han validado elementos.

Por otra parte, desde el estudio histórico epistemológico realizado previo a la DG han emergido elementos interesantes para la comunidad, como por ejemplo una demostración geométrica de la regla del producto para derivadas. Sumado a lo anterior, uno de los mecanismos mentales propuestos en la DG fue descrito por Agnesi en 1801, lo cual respalda nuestra propuesta.

AGRADECIMIENTOS

A mis maestros en el pregrado y en el magíster quienes supieron mostrarme la luz en el camino, que confiaron en mí, cuando aún yo no lo hacía. En especial a la **Dra. Alicia Labra** por su confianza, al profesor **Jorge Soto** por enseñarme a *entrevistar matrices* y tantas otras sabias cosas. Al profesor **Óscar Guerrero** por mostrarme con infinita sabiduría y humildad los intrincados caminos del pensamiento humano. A la **Dra. María Aravena** por compartirme su expertiz y pasión por la didáctica. A la **Dra. Marcela Parraguez** por aceptarme como su *aprendiz*; por compartir conmigo su sabiduría y sus profundas reflexiones en torno a la investigación en didáctica de la matemática. Gracias miles a tod@s ell@s.

Gracias a mi familia, en particular a mi esposo que ha compartido todo su conocimiento generosamente, que me ha apoyado, soportado y creído en mí. Sin su compañía y apoyo esta investigación jamás habría llegado a término, quizá nunca hubiese comenzado.

Referencias

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2013). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science & Business Media.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 33, 60.
- Irazoqui Becerra, E. & Medina Rivilla, A. (2014). Aplicación de un diseño curricular modular para la enseñanza del cálculo diferencial. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 22(4), 576-586.
- Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría de los modos de pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 337-344.
- Tomicic, J. M. (2011). *Estudio sobre la realidad de las carreras de Ingeniería en Chile*.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267-296.

IMPORTANCIA DE LA MODELIZACIÓN EN LAS PROPUESTAS DIDÁCTICAS DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA

Carlos Ledezma, Vicenç Font, Ana Llanes

Se presentan los avances de una investigación centrada en estudiar la importancia que le atribuyen los futuros profesores de educación secundaria a la modelización matemática en sus propuestas didácticas. En sus Trabajos Finales de Máster, los futuros profesores reflexionan sobre el diseño e implementación de una unidad didáctica, y proponen cambios para su mejora. A partir de ello, se realizó un análisis de contenido de 122 Trabajos, guiado por la pregunta: ¿Qué aspectos del proceso de instrucción relacionan los futuros profesores con la modelización? Para ello, los documentos se clasificaron de acuerdo a la importancia que sus autores le atribuyeron a este proceso, considerando como categorías de análisis a los criterios de idoneidad didáctica, pues fue la herramienta que utilizaron para reflexionar sobre su propuesta didáctica. De los resultados preliminares se destaca que los futuros profesores, por una parte, asumen diferentes concepciones sobre la modelización y, por otra, la importancia que le atribuyen a este proceso varía desde considerarlo como el elemento central de sus propuestas hasta no incluirlo como parte de éstas.

Análisis de contenido, Criterios de idoneidad didáctica, Futuros profesores, Modelización matemática, Trabajo final de máster.

Introducción

A nivel mundial, existe un consenso sobre el desarrollo de competencias que impliquen el uso de la matemática para la resolución de problemas del mundo real, entre las que destaca la competencia en modelización matemática (Kaiser, 2020), indispensable para la formación de individuos capaces de vincular sus conocimientos matemáticos a las necesidades y exigencias contemporáneas (Doerr y Lesh, 2011). Atendiendo a esta situación es que, a fin de formar estudiantes competentes en modelización, se debe primero formar a los profesores en esta competencia (Blum, 2011).

Sobre esto último, en la literatura se han reportado diversos estudios sobre el rol de la modelización matemática en la formación de profesores, destacando la reflexión docente sobre su implementación en el aula (Autor et al., 2021b); la influencia de una formación paralela en modelización (pregrado) o una específica (postgrado) (Stillman y Brown, 2011); su aprendizaje durante la formación de profesores (Tekin-Dede, 2019), entre otros.

En esta comunicación se presentan los avances de un estudio que pretende responder a la pregunta: ¿Qué aspectos del proceso de instrucción relacionan los futuros profesores de educación secundaria con la modelización matemática? Para ello, se analiza la reflexión realizada por futuros profesores en sus Trabajos Finales de Máster (TFM) sobre el papel de la modelización en sus propuestas didácticas, para lo cual utilizaron los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) (Autor et al., 2007) como herramienta de reflexión.

Marco teórico

En esta sección se describen los dos referentes teóricos considerados para este estudio.

Modelización matemática

En términos generales, el proceso de modelización es entendido como una transición entre el mundo real y el matemático para la resolución de una situación-problema tomada desde la realidad. En el plano teórico, coexisten diferentes ciclos que se han diseñado para explicar este proceso (Borromeo Ferri, 2006), al mismo tiempo que han emergido distintas perspectivas sobre su implementación (Abassian et al., 2020). No obstante, existe un claro consenso en que su inclusión curricular es necesaria para mejorar el aprendizaje de la matemática (Blum, 2011; Kaiser, 2020).

En este estudio no se adopta un ciclo o perspectiva de modelización en particular, sino más bien, se consideran algunos atributos consensuados que caracterizan el trabajo con este proceso a través de proyectos. En esta metodología, se plantea a los estudiantes un problema (pregunta o tarea) del mundo real que deben resolver en grupos durante un periodo más extenso de tiempo (Blomhøj y Kjeldsen, 2006). Este problema debe ser *abierto* (no estar limitado a una respuesta o procedimientos específicos), *complejo* (se debe discriminar la información útil del enunciado), *realista* (incorporar elementos del mundo real) y *auténtico* (una situación coherente con un hecho de la realidad) (Borromeo Ferri, 2018). Este tipo de proyectos presupone mayores grados de autonomía y responsabilidad por parte de los estudiantes, quienes asumen la discusión y resolución del problema a través de una constante reflexión sobre la situación (Blomhøj y Kjeldsen, 2006).

Criterios de idoneidad didáctica

En el EOS se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los *significados personales* logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los *significados institucionales* pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

Este constructo multidimensional se descompone en seis idoneidades parciales: *epistémica*, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas ‘buenas matemáticas; *cognitiva*, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos; *interaccional*, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos; *mediacional*, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; *afectiva* (o *emocional*), para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción; *ecológica*, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc. (Autor et al., 2019). Cada uno de estos criterios cuenta con sus respectivos componentes e indicadores.

En el EOS, la modelización es entendida como un *híper* o *mega proceso* (Autor et al., 2007), puesto que implica otros *procesos* más elementales (representación, argumentación, idealización, etc.). Además, en este marco, se considera que potenciar la modelización es un aspecto que mejora la idoneidad del proceso de instrucción (Autor et al., 2017a).

Metodología

Para este trabajo se sigue una metodología de investigación cualitativa (Cohen et al., 2018), que consiste en realizar un análisis de contenido de la reflexión realizada por futuros profesores en sus TFM.

Contexto de la investigación

Esta investigación se enmarcó en el contexto del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (especialidad de matemática), impartido por las universidades públicas de Cataluña (España), durante el curso 2019-2020. Para la obtención del Grado, los futuros profesores deben diseñar e implementar una secuencia de enseñanza-aprendizaje, la cual está determinada por la institución educativa, el nivel de los estudiantes, y el momento del curso en que intervengan. De este modo, el margen que tiene el futuro profesor para trabajar exclusivamente la modelización en su unidad didáctica se encuentra sometido a muchas restricciones, aunque no es así en el rediseño que puede proponer en su TFM.

El programa de estudios del máster contempla, dentro de un módulo de formación específica, un submódulo sobre modelización matemática, en el que se presenta a los futuros profesores el ciclo propuesto por Blum y Leiß (2007), junto con distintos ejemplos en que se utiliza, y se les solicita que planteen un problema de modelización (enunciado, resolución, ubicación curricular de los contenidos) como trabajo final del submódulo. Después de su práctica preprofesional en el centro educativo, se presentan a los futuros profesores los criterios de idoneidad didáctica, junto con una pauta de componentes e indicadores para su aplicación (véase Autor et al., 2017b). Con estas herramientas, se les sugiere que valoren en sus TFM la secuencia de enseñanza-aprendizaje que implementaron para que, de este modo, propongan cambios para mejorar la idoneidad del proceso de instrucción.

Análisis de contenido

El análisis cualitativo de los datos se desarrolló siguiendo unos pasos similares a los utilizados por Autor et al. (2021a): primero, se clasificaron los 122 TFM de acuerdo al nivel educativo y el contenido matemático de las propuestas didácticas; segundo, se realizó una búsqueda de palabras clave afines a la modelización (context*, model*, problema*, real*, etc.); tercero, se volvieron a clasificar los TFM de acuerdo a cuatro niveles de alusión a la modelización en sus propuestas:

C₁: Propone problemas de modelización; reflexiona sobre su implementación; plantea mejoras para potenciar la modelización en su rediseño.

C₂: Propone problemas de modelización; reflexiona sobre su implementación; no plantea mejoras para potenciar la modelización en su rediseño.

C₃: No propone problemas de modelización; plantea incluir la modelización en su rediseño.

C₄: No propone problemas de modelización; no plantea incluir la modelización en su rediseño.

Finalmente, se analizaron los comentarios de tipo valorativo que realizaron los futuros profesores, para lo cual, se partió de categorías apriorísticas, a saber, los criterios, componentes e indicadores

de idoneidad didáctica, ello para identificar qué criterios se relacionan a la modelización en las reflexiones de los futuros profesores.

Resultados preliminares

Con respecto a la clasificación de los TFM (descrita en el tercer paso del análisis de contenido), se tienen los siguientes resultados: en C₁, 20 TFM; en C₂, 29 TFM; en C₃, 31 TFM; en C₄, 42 TFM. Esta clasificación permite, por una parte, tener una visión general sobre la connotación atribuida a la modelización en las propuestas didácticas de los futuros profesores y, por otra, tener claridad sobre los TFM en los cuales centrar los análisis.

Para ejemplificar sucintamente este tipo de análisis, se describe el realizado con el trabajo de Justícia (2020), clasificado en C₁. Su unidad didáctica es una propuesta para enseñar funciones en el primer curso de bachillerato (estudiantes de 15-16 años), en la cual incluyó un proyecto de modelización sobre el estudio de la rentabilidad de una pequeña empresa, y que desarrolló en dos de las 15 sesiones de su unidad (la quinta y la sexta). El objetivo de la actividad es “saber, mediante herramientas multidisciplinares, si un pequeño negocio es rentable estableciendo valores económicos de referencia” (p. 39, traducción de los autores). Para su reformulación, el autor considera que el planteamiento de más proyectos de modelización contribuiría a la mejora de las idoneidades *epistémica*, *cognitiva*, *interaccional* y *ecológica*, dado que las reflexiones sobre este proceso en su propuesta implementada, se centraron principalmente en las idoneidades *epistémica* (componente ‘riqueza de procesos’) y *ecológica* (componente ‘conexiones intra e interdisciplinares’). Sin embargo, el autor del TFM no especifica si adoptó algún ciclo de modelización para analizar y/o reflexionar sobre el problema implementado; y aunque su problema cumple con las características de uno de modelización (es *abierto*, *complejo*, *realista* y *auténtico*), la descripción de su implementación evidencia que no se llevó a cabo según la metodología de un proyecto. Esto último se puede deber a la estructura del sistema educativo, donde los tiempos curriculares son acotados y la modelización se encuentra supeditada a un tratamiento, principalmente, como un medio para lograr aprendizajes y no como un contenido para desarrollar esta competencia.

Este tipo de análisis se está realizando, en particular, con los TFM clasificados en C₁, C₂ y C₃, como parte de una investigación mayor que busca establecer criterios de idoneidad didáctica para los procesos de instrucción en los que se desarrolle la modelización matemática.

Referencias

- Autor et al. (2007). *ZDM Mathematics Education*.
- Autor et al. (2017a). *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*.
- Autor et al. (2017b). *EURASIA: Journal of Mathematics Science and Technology Education*.
- Autor et al. (2019). *Educação e Pesquisa*.
- Autor et al. (2021a). *Mathematics Education Research Journal*.
- Autor et al. (2021b). *PARADIGMA*.
- Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, 12(1), 53-65. <https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360>

- Blomhøj, M. y Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work – Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 163-177. <https://doi.org/10.1007/bf02655887>
- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 15-30). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3
- Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester, Inglaterra: Horwood. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/bf02655883>
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Cham, Suiza: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8va ed.). Nueva York, NY: Routledge.
- Doerr, H. M. y Lesh, R. (2011). Models and modelling perspectives on teaching and learning mathematics in the twenty-first century. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 247-268). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_26
- Justícia, S. (2020). *Funcions matemàtiques a Primer de Batxillerat: Proposta de millora de la unitat didàctica* (Trabajo final de máster no publicado). Universitat de Barcelona, España.
- Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2da ed.) (pp. 553-561). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101
- Stillman, G. y Brown, J. P. (2011). Pre-service secondary mathematics teachers' affinity with using modelling tasks in teaching years 8-10. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 289-298). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_29
- Tekin-Dede, A. (2019). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(2), 292-314. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825>

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LAS BASES CURRICULARES DE EDUCACIÓN INFANTIL CHILENAS

Juan Luis Piñeiro

En este trabajo se analiza el significado sobre la resolución de problemas de matemáticas que presentan las Bases Curriculares en la educación infantil chilena. A través de un análisis de contenido, se ha detectado que el documento enfatiza en la resolución de problemas como un medio y como un fin en sí mismo. Se concluye la importancia de contar con profesionales con conocimientos profundos sobre la resolución de problemas que puedan proveer experiencias de aprendizaje significativas en la primera infancia.

Resolución de problemas, educación infantil, currículo, análisis de contenido.

La Educación Infantil es una preocupación en las sociedades actuales debido al impacto que tiene para el desarrollo de sus ciudadanos (OECD, 2016). Dentro de este desarrollo, la educación matemática en las primeras edades es un tema que interesa a la comunidad científica. Las investigaciones sobre lo que son capaces de realizar los preescolares (e.g. Clements y Sarama, 2007), ha provocado que diversas organizaciones o agrupaciones de profesores de matemática manifiesten diferentes perspectivas frente a la Educación Matemática en la infancia (NAEYC y NCTM, 2013). En ellas, un elemento común es la importancia que se le otorga a los procesos matemáticos debido a que “una enseñanza de las matemáticas centrada solo en los contenidos puede ser útil para tener un buen rendimiento matemático en la escuela, pero esto no presupone la capacidad necesaria para aplicar los contenidos aprendidos a la vida cotidiana” (Alsina, 2012, p. 2).

En la última década, Chile ha llevado adelante procesos de actualización de su currículo. Una de esas actualizaciones es la realizada a las Bases Curriculares para la Educación infantil. En este contexto, este trabajo tiene como objetivo identificar la presencia y características que ha tomado la resolución de problemas en el nuevo documento curricular.

PERSPECTIVA TEÓRICA

En este trabajo, la resolución de problemas matemáticos es entendida como un proceso y una forma de pensar (Schoenfeld, 1992). Así, la resolución de problemas suele relacionarse con lo que se puede hacer con los conceptos que se conocen. Por tanto, diferenciamos proceso y conceptos en el sentido del NCTM (2000). Concretamente, aquí se entenderá la resolución de problemas como una acción realizada por un individuo o un grupo, que identifica una tarea sin un procedimiento directo para resolverla, procede a su resolución mediante el despliegue de una estrategia y conocimientos matemáticos que implica una serie de pasos no necesariamente lineales y enfrenta el desafío con una disposición favorable

Al igual que en todas las etapas de la escolaridad, la resolución de problemas en la Educación Infantil es un medio importante para desarrollar el conocimiento matemático en los niños (Castro y Castro, 2016). La resolución de problemas significativos contribuye a desarrollar habilidades de pensamiento de orden superior y descubrir un repertorio de estrategias que prepararán al niño para resolver nuevos problemas (Bristz y Richard, 1992). En este sentido, los preescolares adquieren

sentido de las ideas matemáticas mediante la participación activa en la resolución de una variedad de problemas matemáticos.

Problemas en Educación infantil

Basándose en una revisión de la literatura, Otros y Autor (2018) identifican seis rasgos que caracterizarían a una tarea matemática como un buen problema en educación infantil: (a) *Desarrollo de ideas matemáticas*: el problema debe explorar y desarrollar ideas matemáticas, a través del razonamiento, uso de estrategias, así como diversos ciclos de prueba y revisión y no a través de algún proceso algorítmico; (b) *Contexto*: el problema debe estar contextualizado en situaciones cercanas al mundo del estudiante. No siempre han de ser situaciones reales entendidas desde la perspectiva adulta, sino que se aceptan cuentos, películas, series animadas e incluso ideas abstractas; (c) *Desafío*: debe provocar el interés del estudiante para buscar la solución, es decir, no tener un procedimiento directo y a la mano para solucionarlo, fomentando el uso de diferentes representaciones (verbales, físicas, gráficas...), requiriendo que el estudiante manipule, transforme o modifique materiales; (d) *Soluciones*: el problema debe ofrecer distintos niveles de solución y esta no ha de ser una respuesta corta; (e) *Expansibilidad*: la estructura matemática ha de poder generalizarse a distintas situaciones para que el estudiante pueda realizar generalizaciones; (6) *Comprensibilidad*: el problema debe ser comprensible estar al alcance de todos los estudiantes, de manera que estén convencidos de que pueden resolverlo y saber cuándo han alcanzado una solución.

Enseñanza de la resolución de problemas

Stanic y Kilpatrick (1989) muestran tres enfoques que han caracterizado el papel de la resolución de problemas en el currículo escolar de matemáticas. El primero de ellos se refiere a que los problemas son el contexto para aprender matemáticas, pues los problemas: a) justifican de la inclusión de la matemática en el currículo escolar, b) motivan y generan nuevos escenarios para aprender matemáticas, c) dan espacio para divertirse con las matemáticas, d) son un vehículo para aprender y descubrir nuevos conceptos y habilidades matemáticas, y e) son una aplicación de conceptos e ideas matemáticas. El segundo enfoque corresponde a un entendimiento de la resolución de problemas como habilidad, transformándola en un fin y no solo un contexto. Finalmente, el tercer enfoque es relativo al proceso de hacer matemáticas resolviendo problemas, dando significados a las ideas matemáticas de forma similar a la que la realizan los matemáticos.

En estos enfoques se perciben las vías de acceso que puede tomar la enseñanza de la resolución de problemas en las aulas (Castro y Ruíz-Hidalgo, 2015; Stanic y Kilpatrick, 1989). Comúnmente se conocen con el nombre de enseñanza *sobre, para y a través* de la resolución de problemas. Castro y Ruiz-Hidalgo (2015) plantean que “los dos primeros enfoques [para y sobre] consideran la resolución de problemas como un objetivo de aprendizaje y, en el tercer caso [a través], como vehículo para enseñar o desarrollar otros contenidos” (p. 95).

MÉTODO

Para la realización de este estudio se ha desarrollado un enfoque cualitativo no interactivo. Particularmente, se ha utilizado la técnica del análisis de contenido, debido a que permite estudiar la naturaleza del discurso con detalle y profundidad, pudiendo descubrir la estructura interna que subyace en la muestra de documentos (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Muestra y unidades de análisis

El documento analizado corresponde a las nuevas Bases Curriculares de Educación Infantil chilenas (Ministerio de Educación, 2018). Concretamente, se ha analizado el Núcleo relativo a Pensamiento Matemático del Ámbito Interacción y Comprensión del Entorno en todos los niveles curriculares (Sala Cuna, Medio y Transición). El procedimiento de selección utilizado para establecer las unidades de análisis surge desde el propósito de este estudio: describir la presencia de la resolución de problemas en el documento curricular. Para cumplir con este objetivo, se utilizaron dos tipos de unidades que conjuntamente colaboran a dar una mayor fiabilidad al estudio: sintácticas y temáticas (Krippendorff, 2004). Por tanto, las unidades de análisis las definimos como las frases u oraciones que hagan referencia explícita a la resolución de problemas o sus características señaladas en la perspectiva teórica.

Procedimientos y categorías de análisis

Para la realización del análisis se ha seguido el procedimiento que Rico y Fernández-Cano (2013) exponen como adecuado para llevar a cabo un análisis de contenido. El primer paso fue establecer mediante un proceso deductivo categorías de análisis generales. Dichas categorías surgen de la descripción realizada por el NCTM (2000) respecto al proceso de resolución de problemas. Una vez realizado dicho análisis, en un primer vuelco de las unidades de análisis, se realizó un proceso inverso, es decir, inductivo. De este proceso surgen las subcategorías.

RESULTADOS

Los datos revelan la presencia de alusiones a la resolución de problemas en 19 ocasiones. Estas menciones pueden ser encontrados sin alusiones a los niveles curriculares en 11 veces y con alusiones en 8 veces. La tabla 1 muestra las frecuencias de las menciones y las edades a las que aluden.

Nivel Curricular	Frecuencia
Primer Nivel (Sala Cuna)	1
Segundo Nivel (Medio)	4
Tercer Nivel (Transición)	3
Generales	11
Total	19

Tabla 1: Presencia de la resolución de problemas

Estas menciones pueden ser organizadas en un grupo que trata a la resolución de problemas como un medio para lograr otros fines y un segundo grupo que trata a la resolución de problemas como un fin en sí mismo.

La resolución de problemas como medio

Un primer grupo de menciones se corresponden con expresiones que tratan a la resolución de problemas como un medio para lograr otro cometido. Por ejemplo, en frases como

Experimentar con los objetos, resolviendo situaciones concretas, tales como: alcanzar objetos, apretar botones en aparatos sonoros, sacar juguetes de contenedores, juntar objetos, entre otros (Ministerio de Educación, 2018, p. 97).

Es posible encontrar alusiones a situaciones y a experimentación, ambas relacionadas con la resolución de problemas. Al mismo tiempo es posible inferir que esas situaciones y exploraciones deben realizarse con objetos del entorno. No obstante, estas menciones al aprendizaje se realizan de manera general, sin especificar un conocimiento matemático específico del nivel.

Dentro de esta categoría es posible encontrar dos subcategorías claramente diferenciadas. Una primera que tiene relación con usar la resolución de problemas como un medio para entender lo que rodea a los estudiantes. Un ejemplo de estas menciones señala que la resolución de problemas es relevante pues ayuda a

comprender la realidad y a desenvolverse en la vida cotidiana (Ministerio de Educación, 2018, p. 94)

En este ejemplo se reafirma que el aprendizaje a través de la resolución de problemas se realiza de manera general.

Una segunda subcategoría trata a la resolución de problemas como un medio para aplicar conocimientos específicos relativos a las matemáticas preescolares. Por ejemplo, la adición o sustracción, al señalar que

Resolver progresivamente problemas simples, de manera concreta y pictórica, agregando o quitando hasta 5 elementos (Ministerio de Educación, 2018, p. 98).

Resolver problemas simples de manera concreta y pictórica agregando o quitando hasta 10 elementos, comunicando las acciones llevadas a cabo (Ministerio de Educación, 2018, p. 99).

La resolución de problemas como fin

Un segundo grupo de menciones tiene relación con expresiones que tratan la resolución de problemas como una meta en sí misma. Un ejemplo de esto aparece cuando se señala que los preescolares deben

Identificar algunas acciones que se llevaron a cabo para resolver problemas (Ministerio de Educación, 2018, p. 98).

En esta categoría, es posible encontrar dos patrones de menciones. Una primera que tiene relación con características de las tareas que serán planteadas como problemas. En ellas se hace hincapié a tres elementos: que sean significativos, que sean desafiantes y que se realicen de manera colaborativa. Un ejemplo de estas expresiones es

favorece la resolución de situaciones significativas de manera flexible (Ministerio de Educación, 2018, p. 94).

Una segunda subcategoría tiene relación con acciones a desarrollar cuando se resuelve problemas. Por ejemplo, se encuentran menciones como

Aquellos juegos grupales que implican resolver desafíos en forma conjunta, son una estrategia que genera gran interés en los niños y las niñas, especialmente cuando conjugan procedimientos como:

observación, búsqueda de información, uso de diferentes materiales, ensayos, registros y exposiciones grupales (Ministerio de Educación, 2018, p. 95).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El estudio presentado y la descripción hecha del posicionamiento que toma la resolución de problemas en la Bases Curriculares de Educación Infantil, permite encontrar puntos coincidentes con el trabajo de Stacey (2005). Esta autora señala que la resolución de problemas toma dos posiciones: como una meta por sí misma y como un camino para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes.

Asimismo, el análisis permite dar cuenta que el documento considera la resolución de problemas como proceso que requiere un cúmulo de acciones. Otro aspecto destacable tiene relación con el posicionamiento que toma respecto a papel de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. El documento señala que el conocimiento matemático se construye a través de la resolución de problema, enfoque que la investigación ha señalado como el más propicio.

No obstante, existen algunos énfasis que podrían ser causales que este proceso se instrumentalice. Por ejemplo, si bien se promueve un enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas, este solo aparece cuando se señalan aprendizajes generales y cuándo se trata de algún contenido matemático específico para estas edades, se aboga por una aplicación en la resolución de problemas. De este hallazgo se desprende que aún cuando exista una declaración de un enfoque prioritario, en los objetivos se infiere un enfoque para la resolución. Enfoque en el que el objetivo es aplicar conocimientos y no construirlos.

Los resultados de este trabajo son un llamado de atención para los profesores encargados de diseñar experiencias de aprendizaje con preescolares. Concretamente, es importante que los profesionales sostengan conocimientos sólidos respecto a todos los elementos que intervienen en la enseñanza de la resolución y cómo se desarrolla el aprendizaje de la resolución de problemas. Por ejemplo, un elemento central tiene relación con las tareas presentadas como problemas. Si bien los documentos señalan que estas tareas deben ser significativas y en contextos cotidianos, la literatura señala que además deben constituir un desafío, tener diferentes niveles de solución, permitir que el resolutor pueda saber cuando ha llegado a una solución, entre otras.

Por otro lado, es importante continuar esta línea de investigación indagando en cómo se representan otros procesos matemáticos en las Bases Curriculares. Por ejemplo, en los resultados muestran claramente indicios de la relevancia que le otorgan a las conexiones matemáticas y a las representaciones. Sin embargo, el razonamiento y la prueba no parecen tener un lugar preponderante.

Referencias

- Alsina, A. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1–14.
- Britz, J. y Richard, N. (1992). *Problem solving in the early childhood classroom*. NEA
- Castro, E. y Castro, E. (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil*. Pirámide.

- Castro, E. y Ruíz-Hidalgo, J. F. (2015). Matemáticas y resolución de problemas. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 89–108). Pirámide.
- Clements, D. H. y Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 461–556). NCTM.
- Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* (2nd ed.). SAGE.
- Ministerio de Educación. (2018). *Bases Curriculares Educación Parvularia*. Autor.
- NAEYC y NCTM. (2013). Matemáticas en la educación infantil: facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *EDMA 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 1–23.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.
- OECD. (2016). What are the benefits from early childhood education? *Education Indicators in Focus*, 42, 1–4.
- Otros y Autor. (2018). *European Early Childhood Education Research Journal*.
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1–22). Comares.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grows (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan.
- Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3-4), 341-350.
- Stanic, G. M. y Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. En R. I. Charles y E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1–23). LEA & NCTM.

LOS ENTORNOS DE APRENDIZAJE VIRTUAL Y LA FORMACIÓN INICIAL DE LOS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA.

Oscar Guerrero Contreras

En esta comunicación se examina una investigación en curso relacionada con la formación inicial del profesor (a) de matemática mediante los entornos de aprendizaje virtual como espacio de interacción social. Estos espacios pueden ayudar a comprensión de la competencia aprender a mirar profesionalmente la enseñanza de la matemática. La naturaleza de la investigación es cualitativa; los datos son las participaciones que realizaron 30 estudiantes para profesor de la carrera de Educación Básica (28 mujeres y 2 hombres) de la Universidad Arturo Prat en un entorno de aprendizaje virtual, específicamente un debate virtual. Estos estudiantes debían responder un problema profesional planteado en el debate virtual. Se han examinado parcialmente las respuestas de la(o)s estudiantes mediante el análisis de contenido y se aprecia como focalizan su atención en el docente, los alumnos y el contenido matemático que está en juego en la tarea propuesta en el debate virtual. Se concluye que los entornos de aprendizaje virtual pueden ayudar a desarrollar la competencia aprender a mirar profesionalmente la enseñanza de la matemática

Formación inicial del profesor, entornos de aprendizaje virtual, aprender a mirar profesionalmente la enseñanza de la matemática.

INTRODUCCIÓN

El efecto que ha tenido la pandemia y la emergencia de salud en el mundo ha sido preocupante y ha tenido múltiples efectos en toda la sociedad como problemas sociales, psicológicos, económicos, educación, entre otros (Hernández, 2020; UNESCO, 2020). En la educación esta situación ha impactado al punto de cerrarse establecimientos educativos con el fin de proteger a la comunidad educativa (Van Lancker y Parolin, 2020) a la vez que ha impactado en los grupos más vulnerables entre otras razones por no tener acceso a internet, sin equipamiento tecnológico adecuado o nulo, además de las competencias digitales para la utilización de hardware y software en la educación virtual. Ante todo esto la investigación en el campo de la Educación Matemática también ha sido afectada en su propio proceso de hacer investigación al punto que algunos autores están planteando la necesidad de comenzar a pensar en otros objetos y agendas de investigación (Bakker, Cai y Zenger, 2021; Castro, Pino-Fan, Lugo-Armenta, Toro, Retamal, 2020) como consecuencia de esta situación de incertidumbre que vive el mundo. Toda esta situación de emergencia sanitaria y educación virtual ha hecho (re)surgir a la formación de profesores como un campo de indagación e interés y búsqueda de estrategias pedagógicas y didácticas que contribuyan a la formación de profesores. En este sentido se ha planteado diseñar un entorno de aprendizaje virtual con el propósito de estudiar el desarrollo de la competencia docente aprender a mirar profesionalmente la enseñanza de la matemática.

APRENDIZAJE DEL ESTUDIANTE PARA PROFESOR DE EDUCACIÓN BÁSICA Y ENTORNOS DE APRENDIZAJE VIRTUALES

Las investigaciones relacionadas con la formación de profesores (tanto inicial como permanente) ha revelado desde diferentes perspectivas lo complejo del proceso de aprender a enseñar (Brown y Borko, 1992) debido a las múltiples situaciones de aula impredecibles y a veces no manejables. Esto amerita que en los programas de formación docente se diseñen ambientes de aprendizaje en los que los estudiantes para profesor resuelvan problemas profesionales parecidos a los que suceden o van a vivir una vez egresados. En este sentido Malara (2008) habla del rol multifacético y complejo del profesor, y alude a tres aspectos relacionados con el papel del profesor: 1) la planificación de secuencias de enseñanza capaces de promover la construcción conceptual de los estudiantes, 2) la creación de un ambiente favorable para la exploración matemática de los estudiantes y la formulación de conjeturas, y 3) finalmente la selección de estrategias comunicativas que apoyan el compartir las ideas e interacción de los estudiantes. Por otro lado algunos autores (Carrillo, Climent, Contreras y Montes, 2020) plantean como las concepciones que tienen los estudiantes para profesor de matemática y los docentes en servicio influyen en su práctica docente y profesional. De allí que sea necesario problematizar las ideas y concepciones que tienen los docentes sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje producto de su experiencia como estudiante de educación primaria, media o universitaria. Por ello, los programas de formación deben promover la reflexión, el conocimiento, la movilización y explicitación de ideas que se pueden convertir en obstáculos con el propósito de cuestionar y modificar su “modelo de profesor” que ha venido experimentando como alumno y lograr un aprendizaje más crítico y reflexivo, potenciador y generador de nuevos significados relacionados con el aprender a enseñar matemática. En este sentido el diseño de entornos de aprendizaje puede contribuir a la movilización de esas concepciones que tiene los estudiantes para profesor al diseñar tareas que ayuden con ese propósito, y tener una mirada profesional de la enseñanza de la matemática. En estos entornos de aprendizaje virtual, los cuales son espacios de interacción y negociación de significados, deben estar presentes algunas características como la solución de tareas profesionales en las que tengan que aprender a mirar situaciones o eventos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, con la posibilidad de movilizar mediante la reflexión conjunta e individual, las concepciones que tienen sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje y poder estructurar su mirada de dichos eventos de una manera profesional.

APRENDER A MIRAR LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Dentro de las competencias a desarrollar por los estudiantes en su formación como profesor, está la de “una visión profesional del profesor” (Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García y Llinares, 2013; Fernández y Choy, 2020; Sherin, 2007) o “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los alumnos y alumnas, y los procesos de enseñanza de la matemática (Fernández, Linares y Valls, 2011; Franke y Kazemi, 2001). En este sentido, esa capacidad de notar e interpretar lo que está ocurriendo en la propia aula de clase, lo definen Van Es y Sherin (2010), como un conocimiento dependiente de la atención (dependent knowledge), la sensibilidad hacia aspectos de su práctica, un conjunto de habilidades de atención que los profesores expertos utilizan para atender aspectos cognitivos y afectivos de lo que ocurre en el aula. Estos autores plantean que la habilidad para notar eventos de enseñanza pasa por: 1) identificar lo que es importante en una situación de enseñanza; 2) hacer las conexiones entre las interacciones específicas de clase y los conceptos y principios más

amplios de la enseñanza y aprendizaje que ellos representan; 3) con lo que los profesores conocen acerca del contexto específico de la enseñanza para razonar sobre una situación dada.

En una situación de enseñanza y aprendizaje de la matemática ocurren muchas cosas al mismo tiempo, situaciones complejas. Se trata de que los estudiantes para profesor de matemática, se den cuenta o aprendan a mirar lo que sucede en el aula de matemática, y tomen decisiones hacia dónde focalizar su atención y a qué eventos dirigir la curiosidad en un momento dado. Pero al mismo tiempo, usar esos conocimientos que emergen de su contexto del aula para razonar sobre los acontecimientos que merecen ser atendidos y relacionarlos con las herramientas conceptuales que proporcionan la investigación en didáctica de la matemática. Por otra parte, Jacobs, Lamb y Philipp (2010) conceptualizan el noticing o el aprender a mirar la enseñanza como la interrelación entre tres destrezas llamadas: describir, interpretar y tomar decisiones con base en el pensamiento matemático de los alumnos. La primera, esta relacionada con identificar elementos importantes en las respuestas de los alumnos; la segunda, se relaciona con la interpretación que hace el docente del pensamiento matemático de los estudiantes teniendo en cuenta los elementos matemáticos identificados (reconociendo las relaciones entre los elementos identificados y las características del pensamiento matemático de los estudiantes); y la tercera, está vinculada con la toma de decisiones basadas en el pensamiento de los estudiantes (usando información inferida de los pensamientos de los estudiantes para tomar decisiones de instrucción). En una situación de enseñanza y aprendizaje de la matemática ocurren muchas cosas al mismo tiempo, convirtiéndose en situaciones complejas. Se trata de que los estudiantes para profesor de matemática, se den cuenta o aprendan a mirar lo que sucede en el aula de matemática, y tomen decisiones hacia dónde focalizar su atención y a qué eventos dirigir la curiosidad en un momento dado. Pero al mismo tiempo, usar esos conocimientos que emergen de su contexto del aula para razonar sobre los acontecimientos que merecen ser atendidos y relacionarlos con las herramientas conceptuales que proporcionan la investigación en didáctica de la matemática.

MÉTODO

Esta investigación está enmarcada dentro de la investigación cualitativa, en particular el modelo Design-Based Research (Bernabeu, Moreno, Llinares, 2017). Se utilizó el análisis de contenido y la inducción analítica propia de la Teoría Fundamentada (Strauss y Corbin, 2002). Se diseñó un entorno virtual de aprendizaje denominado El entorno virtual de aprendizaje llamado *Las fracciones, su enseñanza y aprendizaje* el cual está estructurado en cuatro partes. La primera corresponde a analizar la tarea propuesta en el foro; la segunda leer algunos documentos de apoyo que van a servir como instrumentos conceptuales para el desarrollo de la tarea; pueden ser descargados a un ordenador. La tercera esta relacionada con participar en debate y responder las preguntas que están en el foro o debate virtual. Y finalmente producir un informe el cual deben hacerlo grupalmente.

En el estudio participaron 30 estudiantes para profesor de la carrera de Educación Básica (28 mujeres y 2 hombres) de la Universidad Arturo Prat. Los datos de la investigación son las participaciones hechas por los estudiantes al responder las preguntas que estaban en el debate virtual. Estos estudiantes estaban matriculados en una unidad curricular llamada Disciplinar de matemática. En ella se estudia números y operaciones, contenidos básicos de álgebra, desde el punto de vista de su aprendizaje y enseñanza en la Educación Básica. La actividad curricular

comienza con una exploración empírica basada en la percepción y la manipulación de objetos; y posteriormente, un estudio orientado al conocimiento de las relaciones entre los sistemas numéricos.

Para el análisis de las participaciones se procedió a clasificar a los 88 mensajes alojados en la plataforma del Aula Virtual, considerando aspectos cuantitativos (número de aportaciones y distribución temporal de las mismas) y cualitativos como describir, interpretar y toma de decisiones. En esta primer avance consideramos dentro de las mismas aquellos aspectos en los cuales se focalizo la atención como el profesor y su actividad, el alumno y su actividad y el contenido matemático implicado en la respuesta del alumno.

RESULTADOS

En esta primera fase del análisis de la investigación vamos a presentar aspectos cuantitativos y cualitativos.

Aspectos cuantitativos

El número de aportaciones que realizaron los estudiantes para profesor en el Debate *Las fracciones, su enseñanza y aprendizaje*, fue de 88. En los primeros siete días no hubo aportaciones al debate, estas comenzaron a partir del octavo día. El 91 % (80) de las contribuciones se realizaron en los tres últimos días el período establecido en el debate en línea 1, mientras que el resto (9 %) se repartió entre los días 8 y 13 (Tabla II)

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	Total
Nº de aportaciones	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	3	13	33	34	88

Tabla I: Número de aportaciones por cada día en el Debate *Las fracciones, su enseñanza y aprendizaje*. Fuente: autor.

Aspectos cualitativos

La tabla II muestra las formas de participación entre los treinta estudiantes para profesor de en el Debate *Las fracciones, su enseñanza y aprendizaje*. En el debate se observa 19 participaciones (21 % del total) no hicieron referencia a otra contribución realizada por sus compañeros. Lo que indica que más de las tres cuartas partes (79%) de todas las contribuciones a la discusión hicieron referencia explícita a alguna aportación hecha por otro estudiante. El hecho de que el 59 % de las participaciones se correspondan a las categorías “Concuerda”, “Concuerda y Amplia”, “Discrepa” y “Discrepa y Amplia”, indican el grado de implicación cognitiva con cada una de las contribuciones que realizaron los demás estudiantes en el debate. Esto parece indicar que los estudiantes además de expresar sus propias ideas y opiniones intentaban contraponerlas o complementarlas con las de sus compañeros animando algunas veces a la yuxtaposición de diferentes puntos de vista. De las 54 aportaciones que reflejan interacción con otros estudiantes, el 63 % fueron “Concuerda” (34) y 37 % del tipo “Discrepa” (20). Es decir, más de la mitad de las aportaciones en este debate (54 de 91), muestran que los estudiantes contrastaron sus propias ideas con las de los demás y fueron capaces de ilustrar las diferencias o coincidencias ampliando sus argumentos.

Categorías	D1			D2	
	f	% ^a		f	% ^a
Al: Aporta información	19	21		15	16
Cl: Clarifica	18	20		23	25
C: Concuerda	2	2		3	3
C+A: Concuerda y Amplia	32	35		16	17
D: Discrepa	0	0		1	1
D+A: Discrepa y amplia	20	22		35	38
Otros	0	0		0	0
Total de unidades de significado	91	100		93	100

TABLA III: Forma de participar en los Debates en línea D1 y D2. *Nota:* D1: Debate de discusión en línea 1; D2: Debate de discusión en línea 2. ^a Los porcentajes se han redondeado a un número entero. Fuente: autor.

CONCLUSIONES

En conclusión se puede decir que los resultados sugieren que en la medida que es mayor el número de participaciones correspondiente a las categorías relativas al reconocimiento de tener en cuenta lo que ha dicho el otro, mayor es la indicación de que los estudiantes para profesor estaban intentado comprender a los demás puntos de vista y de concordar o discrepar conclusiones diferentes. Los aportes en esta dimensión pueden ser interpretados en el sentido de que indican intentos de negociación de significados, y de conseguir comprender mediante las lo que sus compañeros de curso están hablando en el debate considerando aspectos como describa la situación indicando los contenidos específicos, los materiales, qué hacen los alumnos y el maestro. Respecto a la habilidad Interpretar la situación algunos estudiantes indicaron qué objetivos del área de matemáticas se trabajan explicitando los aspectos de la situación que le hacen pensar que se están desarrollando los objetivos identificados. Respecto a la habilidad de toma de decisiones solo algunos estudiantes intentaron proponer otra situación para complementaria a la situación dada en el debate.

Referencias

- Bakker, A., Cai, J. y Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*. Recuperado de: <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w>
- Bernabeu, M., Moreno, M., Llinares, S., 2017, "Design-Based research" en el diseño de entornos de aprendizaje en la formación inicial de maestros. En R. Roig-Vila (Ed.), *Redes colaborativas en torno a la docencia universitaria* (pp. 23–36). Alicante: Universitat d'Alacant.

- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2): 33-115. [Traducción de Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo].
- Brown, C. y Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 209-239). New York: Macmillan Publishing Company.
- Carrillo, J., Nuria Climent N., Contreras, L. Y Montes, M. (2020). Using Professional Development Contexts To Structure Prospective Teacher Education. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 393-419). Leiden: Brill Sense.
- Castro, W. Pino-Fan, L. Lugo-Armenta, J., Toro, J. y Retamal, S. (2020). Mathematics Education research agenda in Latin America motivated by coronavirus pandemic. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(12), 1-14.
- Fernández, C. y Choy, B. (2020). Theoretical lenses to develop Mathematics teacher noticing. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 337-360). Leiden: Brill Sense.
- Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (Junio, 2011). Aprendiendo a “mirar con sentido” el aprendizaje de la matemática. Trabajo presentado en XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil.
- Franke, M. y Kazemi, E. (2001). Learning to teach mathematics: focus on student thinking. *Theory into Practice*, 40 (2), 102-109.
- Hernández, J. (2020). Impacto de la COVID-19 sobre la salud mental de las personas. *Medicentro Electrónica, Norteamérica*, 24, jul. 2020. Disponible en: <http://medicentro.sld.cu/index.php/medicentro/article/view/3203/2588>.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R., 2010, Professional noticing of children’s mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202.
- Malara, N. (2008). Methods and tools to promote a socioconstructive approach to mathematics teaching in teachers. En B. Czarnocha (Ed.). *Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment - A Tool for Teacher-ResearcherS* (pp. 89-106). Poland: KSERKOP.
- Sánchez Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M. y Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497 - 508). Jaén: SEIEM.
- Sherin, M. G. (2007). The development of teacher’s professional vision in video clubs. En R., Goldman; R., Pea; B., Barron y S. Derry (Eds.), *Video research in the learning sciences* (pp. 383-395). Londres: Routledge
- Strauss, A. y Corbin, J. (2002). Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.
- UNESCO (2020). COVID-19: Problemas sociales y psicológicos en la pandemia. Recuperado de: <https://es.unesco.org/news/covid-19-problemas-sociales-y-psicologicos-pandemia>

- Van Lancker, W., Parolin, Z. (2020). Covid-19, school closures, and child poverty: a social crisis in the making. *Lancet Public Health*, 5 (5), e243-e244.
- Van Es, E. y Sherin, M. (2010). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13 (2), 155–176.

OPORTUNIDADES QUE OFRECEN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN INFANTIL PARA INICIAR LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA Y PROBABILÍSTICA

Claudia Vásquez

En este estudio se analizan las oportunidades de aprendizaje para estadística y probabilidad en seis libros de textos chilenos de Educación Infantil (4-6 años de edad). Para ello, se utiliza como referente teórico a los procesos matemáticos, pues estos son la clave para desarrollar el pensamiento crítico y formar ciudadanos alfabetizados en estadística y probabilidad, especialmente, en las primeras edades. Los resultados muestran, en primer lugar, ausencia de tareas matemáticas vinculadas a probabilidad. Mientras que en el caso de las tareas matemáticas vinculadas a estadística, se observa un predominio de los procesos matemáticos de resolución de problemas, conexiones y representación. Se concluye con la necesidad de enriquecer la enseñanza de la estadística y la probabilidad en estos niveles educativos, a través de tareas matemáticas que permitan a los niños y niñas adquirir progresivamente herramientas para comprender y dar respuesta a problemas provenientes de contextos diversos en los que se requiere de comprensión y análisis de datos y probabilidad.

Educación infantil, alfabetización estadística y probabilística, procesos matemáticos.

INTRODUCCIÓN

Hoy más que nunca es necesario promover la Educación Estocástica desde temprana edad, sobretodo si consideramos que los niños desde pequeños desarrollan su comprensión del mundo por medio de un razonamiento causal y estadístico -distinguiendo entre aquello que es probable y aquello que no lo es- como parte del desarrollo de sus conocimientos científicos, matemáticos y sociales (Yurovsky, Boyer, Smith y Yu, 2013). Utilizamos el término de Educación Estocástica “para enfatizar la dependencia mutua del conocimiento y razonamiento sobre probabilidad y estadística, que están interconectadas y deben enseñarse conjuntamente” (Batanero, 2019, p. 2). El abordar la Educación Estocástica desde temprana edad permitirá allanar el camino para un desarrollo gradual de la alfabetización estadística y probabilística, entendida esta como la capacidad para interpretar, evaluar críticamente, y cuando sea pertinente, expresar opiniones respecto a la información estadística, los argumentos relacionados con los datos, o fenómenos estocásticos (Gal, 2002, 2005). Lo anterior, cobra más relevancia si consideramos que la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) reconoce la necesidad de avanzar en el desarrollo de habilidades y conocimientos que permitan formar ciudadanos capaces de “extraer información significativa de los datos, comprender qué significan los datos, incluyendo cómo leerlos de manera apropiada, extraer conclusiones, así como reconocer cuándo se utilizan de manera engañosa o inapropiada” (OCDE, 2019, p. 5).

Esto sin duda constituye un desafío para el profesorado, básicamente para aquellos que se desempeñan en la etapa de infantil y los primeros años de primaria. Esto se debe por un lado, a la poca tradición que existe del estudio de estos temas a temprana edad, y por otro, en muchos casos no se ha entregado a los profesores de estos niveles las herramientas disciplinares y didácticas para

llevar a cabo la enseñanza de estadística y probabilidad (Autor, 2019). Esto podría provocar que los profesores se sientan inseguros al abordar dichos temas pese a que otorgan gran valor, utilidad e importancia a su estudio desde temprana edad (Autor, 2019).

Es en este escenario, que los libros de texto se configuran como un recurso importante para el profesorado; pues en muchos casos, corresponden al currículo potencialmente enseñado o implementado en las aulas (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt y Houang, 2002). Por tanto, es necesario contar con estudios que se centren en la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad en la primera infancia. Es en este sentido que, a través del presente estudio, se pretende ampliar resultados de estudios anteriores (e.g. Autor, 2020; Autor, 2019; Autor 2017; Autor, 2015) indagando en los procesos matemáticos presentes en las tareas matemáticas propuestas en libros de texto para promover el aprendizaje de la estadística y la probabilidad entre los 4 a los 6 años de edad. ¿Por qué mirar los procesos matemáticos? Porque estos son clave a la hora de querer desarrollar un pensamiento crítico, es decir, ciudadanos alfabetizados en estadística y probabilidad. A continuación se describen los fundamentos teóricos presentes en esta investigación, método, principales resultados, finalizando con algunas reflexiones finales.

LOS PROCESOS MATEMÁTICOS

De acuerdo con Alsina (2014), los procesos matemáticos deben situarse en el centro de la Educación Matemática, con el fin de capacitar a los estudiantes en “usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos, además del escolar” (p. 6). Para ello, es primordial abordar la enseñanza de las matemáticas desde lo cotidiano, desde una articulación entre contenidos y procesos matemáticos, para así garantizar el aprendizaje de los conocimientos necesarios que permitan a los estudiantes constituirse como ciudadanos matemáticamente competentes.

La resolución de problemas. A temprana edad se presenta de manera natural producto de la curiosidad innata, inteligencia y flexibilidad al enfrentar situaciones nuevas. Es por ello, que entre los 4-6 años de edad se debería animar a los estudiantes a resolver situaciones que provengan de contextos diversos, que vayan desde rutinas diarias a situaciones matemáticas que surgen de juegos y cuentos, que les brinde oportunidades -según sus diferentes grados de conocimientos y destrezas- de usar, ampliar y construir nuevos conocimientos matemáticos (NCTM, 2000).

El razonamiento y demostración. Los niños y niñas desde muy pequeños comienzan a desarrollar su razonamiento lógico, siendo este modificado constantemente producto de las experiencias. En esta línea el NCTM (2000), propone una enseñanza que estimule a los estudiantes desde la Educación Infantil y a diferentes grados según la edad en: reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas; formular e investigar conjeturas matemáticas; desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticas; y elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración.

La comunicación. Es un elemento clave a considerar de manera sistemática en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, pues permite articular, organizar y consolidar el pensamiento matemático. Esta comunicación matemática comienza a manifestarse desde muy temprano (primeros meses de vida). Bajo este enfoque, el NCTM (2000), propone una enseñanza centrada en: la organización y consolidación del pensamiento matemático a través de la comunicación;

comunicación del pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas; análisis y evaluación de las estrategias y pensamiento matemático de los demás; y uso de lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión.

Las conexiones. El aprendizaje de las matemáticas, surge a partir de las conexiones entre las ideas matemáticas intuitivas e informales que los estudiantes poseen desde pequeños. Por consiguiente, el proceso de enseñanza y aprendizaje en infantil debe conectar lo que los niños y niñas aprenden en la escuela con tales ideas intuitivas e informales. En esta dirección, y de acuerdo con el NCTM (2000), es importante un enfoque de enseñanza que favorezca un trabajo progresivo en torno a: reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas; comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente; y por último, reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.

Las representaciones. Son “un proceso indispensable para poder aprender. Si no hay representación del conocimiento no hay aprendizaje” (Alsina, 2014, p. 16). Desde este prisma, el NCTM (2000) plantea que desde temprana edad se debe promover de manera progresiva una enseñanza centrada en: crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas; seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas; y usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

MÉTODO

Este estudio es de tipo cualitativo (Hernández, Fernández, Baptista, 2010) y utiliza como técnica el análisis de datos (Krippendorff, 2013). Se analizaron 3 series de libros de texto que abordan los niveles de Pre-Kínder y Kínder (Cuadro 1).

Serie	Código	Curso	Título	Autores	Editorial	Año
Serie 1	T1	Pre-kínder	Matemática	Ediciones SM	SM Chile S.A	2013
	T2	Kínder	Matemática	Ediciones SM	SM Chile S.A	2013
Serie 2	T3	Pre-kínder	Matemática	Editorial Santillana	Santillana	2015
	T4	Kínder	Matemática	Editorial Santillana	Santillana	2015
Serie 3	T5	Pre-kínder	Cuaderno de Actividades del NT1	Departamento de Estudios Pedagógicos	SM Chile S.A. Edición especial para MINEDUC	2019
	T6	Kínder	Cuaderno de Actividades NT2	Equipo editorial Rau y Bodenburg.	Ediciones Rau y Bodenburg. Edición	2020

Cuadro 1: serie de libros de texto utilizados en el análisis.

Para el análisis se consideraron tres etapas: a) selección de unidades de análisis (lecciones de cada texto en las que se abordan contenidos de estadística y probabilidad); b) codificación de las tareas (o experiencias de aprendizaje) de acuerdo con un conjunto de indicadores para analizar presencia de procesos matemáticos en libros de texto (Autor, en prensa); c) análisis de los datos obtenidos a partir de la codificación.

RESULTADOS

En total se analizaron 13 tareas matemáticas (Tabla 1), las cuales corresponden en su totalidad a tareas que abordan temas vinculadas a estadística. Para establecer esta clasificación, se tomó por criterio el tema de la lección declarado en las páginas de desarrollo de contenidos en las cuales se enmarcan las tareas matemáticas analizadas.

Serie	Nivel Educativo	N° tareas estadística	N° tareas probabilidad
Serie 1	T1: Pre-Kínder	4 (100%)	0 (0%)
	T2: Kínder	3 (100%)	0 (0%)
Serie 2	T3: Pre-Kínder	2 (100%)	0 (0%)
	T4: Kínder	4 (100%)	0 (0%)
Serie 3	T5: Pre-Kínder	0 (0%)	0 (0%)
	T6: Kínder	0 (0%)	0 (0%)

Tabla 1: distribución por nivel educativo.

Procesos matemáticos

En la Figura 1 se observa la presencia de los procesos matemáticos en las tareas analizadas. Cabe señalar, que una misma tarea puede atender a uno o más de los procesos matemáticos.

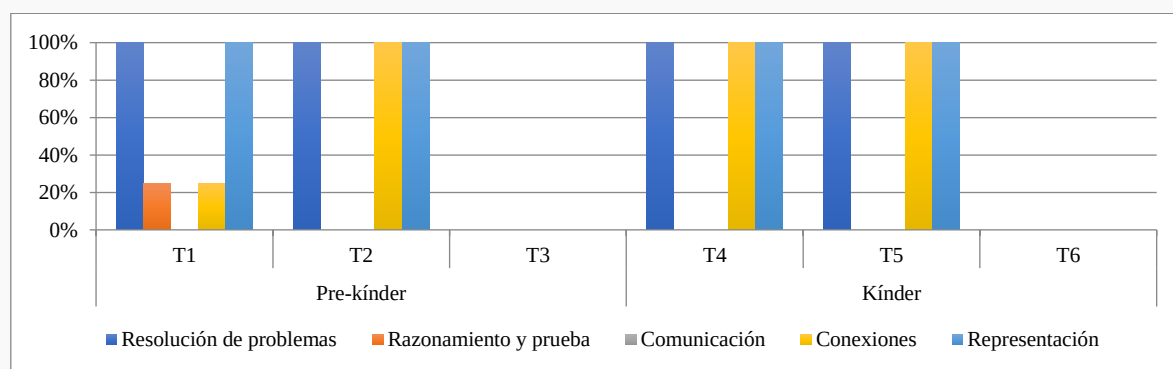


Figura 1: porcentaje de presencia de los procesos matemáticos.

A nivel general, se observa en todos los niveles un fuerte predominio de la resolución de problemas, representación y conexiones. En el caso de las tareas matemáticas de Pre-kínder (4-5 años de edad), hay un claro predominio de la resolución de problemas, representaciones y conexiones. Asimismo se observa ausencia de tareas matemáticas que promuevan la comunicación. Para las tareas matemáticas del nivel de Kínder (5-6 años de edad), se observa un predominio de la resolución de problemas, conexiones y representaciones. Además, se observa ausencia de los procesos matemáticos de razonamiento y prueba y comunicación.

REFLEXIONES FINALES

A partir del análisis realizado en este estudio, se evidencia al igual que en otros estudios (Autor, 2020; Autor, en prensa; Autor, en prensa) una ausencia de tareas matemáticas vinculadas al estudio de la probabilidad en los niveles de Pre-kínder y Kínder. Lo que disminuye sin duda las oportunidades de aprendizaje en pos de un adecuado desarrollo de la alfabetización estadística y probabilística desde temprana edad a través de experiencias de aprendizaje enriquecedoras, que permitan iniciar y educar a los niños y niñas en estos temas desde la Educación Infantil (NCTM, 2000; GAISE, 2017). Asimismo, a partir del análisis de las tareas matemáticas vinculadas a estadística y probabilidad, se observa un predominio de la resolución de problemas, conexiones y representación. Esto puede deberse al tipo de soporte que se ha analizado, pues no debemos olvidar que los libros de texto, corresponden a un soporte pictórico, que tradicionalmente se proponen como una herramienta para el desempeño individual de los niños y niñas e invitan a responder en forma directa. Por otro lado, se evidencian tareas matemáticas que centran preferentemente en situaciones gráficas con muy pocas oportunidades de respuesta oral y menos aún con desafíos que impliquen el contexto real de los niños. Por consiguiente, es necesario ofrecer oportunidades de aprendizaje en torno a la estadística y la probabilidad, que se sostengan en los procesos matemáticos, especialmente, en este nivel educativo, si las bases no son lo suficientemente sólidas, el aprendizaje de la estadística y la probabilidad no se podrá sostener en el tiempo, no podremos aplicarlo, por lo que finalmente se perderá.

Referencias

- Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números*, 86, 5-28.
- Astrid, M., Espina, E., Alsina, Á y Novo, M^a. L. (en prensa). La educación estadística y probabilística en proyectos editoriales de Educación Infantil. *BOLEMA*.
- Batanero, C. (2019). Treinta años de investigación en educación estocástica: Reflexiones y desafíos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K–12 Curriculum Framework*. Alexandria, Va.: American Statistical Association.
- Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, Nederlandn, 70, p. 1-25.

- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2001). Metodología de la investigación. 5.ed. México: McGraw Hill.
- Krippendorff, K. (2013). Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica. Barcelona: Paidós.
- NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.
- OECD. (2019). OECD Future of Education and Skills 2030: OECD Learning Compass 2030. Paris: OECD.
- Valverde, G., Bianchi, L.J., Wolfe, R., Schmidt, W.H. y Houang, R.T. (2002). According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Netherlands: Springer.
- Yurovsky, D., Boyer, T., Smith, L. B., y Yu, C. (2013). Probabilistic cue combination: Less is more. Developmental Science, 16(2), 149-158.



REPRESENTACIONES DE GÉNERO EN TEXTOS ESCOLARES PÚBLICOS DE MATEMÁTICA DE 1° A 4° BÁSICO

Maricruz Pichun, Loreto Saldaña

La siguiente investigación indaga en las representaciones de género que se exponen en los textos de educación matemática de 1° a 4° básico entregados por el MINEDUC. Mediante un análisis de contenido de los problemas contextuales e imágenes presentes se indaga cómo es representado el género. Esto nos ha permitido encontrar algunos ejemplos dados a estudiantes de lo que podría ser adecuado a lo femenino y masculino. Concluimos cuestionando las representaciones presentes desde una perspectiva igualitaria y exponiendo las carencias de los textos escolares.

Representaciones, género, matemáticas, otredad, textos escolares.

INTRODUCCION

La búsqueda de la igualdad de género ha vuelto a tomar fuerza y visualización en los últimos años. En concordancia lograr una sociedad en la que “la igualdad de género no solo es un derecho humano fundamental, sino que es uno de los fundamentos esenciales para construir un mundo pacífico, próspero y sostenible” (ONU, 2015) es una tarea que la Organización de las Naciones Unidas resalta en sus Objetivos de Desarrollo Sostenible. Sin embargo, no toda la sociedad lo valora de igual manera y por tanto tampoco la totalidad de las comunidades educativas. Por tanto, el MINEDUC como representante y guía, debiera ser un referente, y a la vez consecuente con sus propuestas para la no discriminación. Los textos escolares al ser uno de los materiales que se entrega a los colegios, debiese fomentar el objetivo previamente señalado. En este sentido, este trabajo pretende reflexionar sobre las representaciones sociales de género presentes en los textos escolares y por tanto cómo se fomenta el logro del Objetivo de Desarrollo Sostenible N°5.

REPRESENTACIONES SOCIALES Y TEXTOS ESCOLARES EN CHILE

Las representaciones sociales son una construcción humana, pues muestran los referentes de las prácticas sociales, del conocimiento y de los sistemas de acciones. En este sentido, las representaciones sociales constituyen una de las materias primas esenciales de la cultura y pasan a ser naturalizadas en los múltiples códigos, normas, valores, monumentos, organizaciones urbanas, entre otros, en que la cultura se expresa y se constituye en el mundo (Gonzales, 2008). En las escuelas los textos operan como mediadores entre docentes y estudiantes en la transmisión de conocimientos, valores, actitudes, estereotipos y modelos que refuerzan creencias culturales (Darraz, Vargas y Mardones, 2018).

Las representaciones a las que los escolares se ven expuestos importan. La identidad propia se construye en relación a un otro y las diferencias y similitudes que se tienen con aquel. Es así como surge la *otredad*, cuya descripción más sencilla hace referencia a lo otro, lo diferente, alguien o algo externo al yo (Infante, 2019). En este sentido, Gamboa (en Infante, 2019) señala que la otredad puede desarrollarse desde dos perspectivas. Una vía es realizarse desde un sentido propositivo, donde el contacto desemboca en aproximaciones del descubrimiento, amistad y enriquecimiento por la diversidad. La segunda, desde una perspectiva que reduce al otro, sometiéndolo, expulsándolo, o simplemente convirtiéndolo para que en apariencia se parezca al yo superior.

Según Beauvoir (en Fandiño, 2014) en las relaciones entre hombres y mujeres, estas últimas se sitúan en la posición del otro. En este caso se ve la construcción de la mujer como lo-otro, postulando que lo-uno es el varón. En este sentido, el concepto de género ayuda a comprender que muchas de las cuestiones que pensamos que son atributos naturales de los hombres o de las mujeres, en realidad son características construidas socialmente, que no están determinadas por la Biología (Fandiño, 2014). Así, por un lado se encuentra la diferencia sexual y por el otro las atribuciones, ideas, representaciones y prescripciones sociales que se construyen tomando como referencia esa diferencia sexual.

Lo anterior también se plasma en la educación matemática. Concretamente, existen diversos prejuicios, concepciones y creencias respecto a quiénes son el uno y quiénes el otro. Particularmente desde la creencia de que las matemáticas son una disciplina extremadamente difícil de aprender para los estudiantes y de enseñar para el docente (Ernest, 2000) emergen grupos excluidos. Si bien la otredad en educación matemática es variada, uno de los grupos históricamente excluidos es el género femenino. Es así como este grupo de la población, tienen un acceso diferenciado a los beneficios que brinda el conocimiento matemático o el alto rendimiento en educación Matemáticas. Este hecho “tiene efectos serios tanto para aquellos que logran tener éxito como para aquellos que sólo logran fracasar en ella” (Valero, 2015, p. 18).

Estudios realizados en Chile señalan que en los textos escolares se han reproducido estereotipos de género. Por ejemplo, Eyzaguirre y Fontaine (1997) analizan lo que se muestra como femenino y masculino en los textos de matemáticas desde 2° a 8° básico. En ellos, a los hombre se les asocia la producción, la ciencia, la historia, la valentía y la sabiduría. Por su parte a las mujeres se las asocia a la danza, las brujerías, la naturaleza, la virginidades, la envidia y el perdón o la culpa. Así mismo Mosquera y González (2015) analizan el lenguaje utilizado en torno al género en textos escolares de matemáticas evidenciando una tendencia elevada del uso del referente masculino sobre el femenino. Estos estudios, evidencian que se continúa segregando socialmente a grupos específicos, ya que su presencia escrita o iconográfica se encuentra en muchos casos reducida o inexistente.

METODOLOGÍA

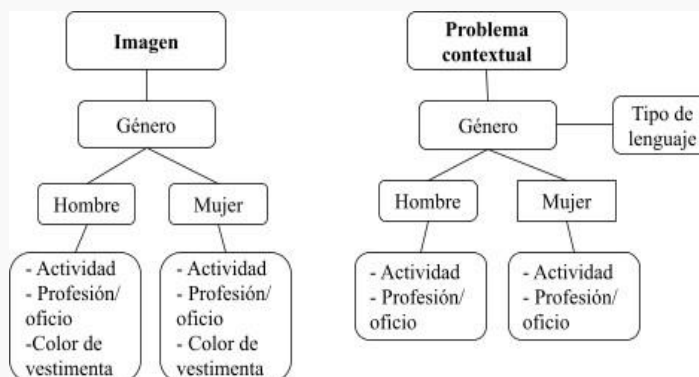
Esta investigación se realizó bajo un enfoque cualitativo y fenomenológico, conduciendo la investigación a través de la descripción y el análisis de los conceptos, imágenes y razonamientos empleados en los textos. Además de ello, nos apoyamos de la teoría fundamentada y concretamente de la técnica del análisis de contenido, pues nos permite estudiar la naturaleza del discurso con detalle y profundidad pudiendo descubrir la estructura interna que subyace en la muestra de documentos (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Esta investigación documental tomará como muestra los textos escolares de matemáticas que entrega el MINEDUC y que se encuentran en formato digital en su página web “Currículum Nacional”. Los textos seleccionados fueron los de 1°, 2°, 3° y 4° básico de la asignatura de matemática del año 2020, correspondientes a las editoriales Gakko Tosho Co, Santillana y SM.

Procedimiento

Utilizando el programa MAXQDA, se comenzó usando los códigos *imagen* y *problema contextual* a toda ilustración o mención de una persona respectivamente, agregando a cada uno el código *género*. Esto en primera instancia se realizó solo con la primera lección de la primera unidad del

texto de primero básico, con el fin de realizar el acuerdo inter-jueces del cual se obtuvo un 78% de acuerdo, el que nos permite velar por la fiabilidad de este trabajo. Tras el resultado y la calibración se consensuaron algunos puntos y se continuó la codificación de los otros textos de 1º a 4º básico. Una vez finalizado ese proceso se comienza la codificación inductiva, descrita a continuación.



RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los resultados se han organizado de acuerdo a dos ejes: el tipo de unidad de análisis y las categorías encontradas.

Problema contextual

Se codificaron un total de 356 problemas contextuales con el código *género*. En estos aparecen 241 referencias a lo femenino y 247 a lo masculino. Es decir, aunque la presencia de hombres es mayor, los textos escolares muestran mayor paridad de género. Una primera categoría que surge es la de *profesiones*. En ella, se representa a mujeres principalmente en profesiones/oficios relacionados con la naturaleza, animales y niños, por ejemplo, florista, veterinaria y profesora entre otros, siendo esta última la más repetida (6), proyectando una imagen de que las mujeres son cuidadoras. Por otro lado, lo masculino está asociado a profesiones u oficios en los que está a cargo de algo o liderando, por ejemplo guía scout y vendedor, presentándose éste como el oficio más recurrente (5).

En segundo lugar, surge la categoría que hemos denominado *acciones*, en las que se encontraron tareas asociadas al arte, deporte, juegos, academia y otros. En las primeras cuatro subcategorías las actividades más realizadas tanto por hombres como mujeres fueron pintar, nadar, juegos matemáticos y contar, respectivamente. La subcategoría *cotidianidad* agrupa acciones variadas que se realizan en la vida diaria, teniendo en primer y segundo lugar tanto para hombres como mujeres *comprar* con 21 casos y *comer* con 9 y 8 respectivamente. Posteriormente se muestra *cocinar* como tercera actividad más recurrente para mujeres con 5 casos, y para hombres *viajar* también con 5. De esto último, se desprende una representación de lo masculino como seres libres de conocer, explorar y divertirse mientras que con las mujeres se sigue perpetuando la idea de que su lugar es en el hogar realizando tareas domésticas.

Una tercera subcategoría dentro de problemas contextuales fue etiquetada como *tipo de lenguaje*. El tipo de lenguaje más utilizado, con 63 casos fue "*lenguaje genérico masculino*" y aparecía cuando

en grupos conformados tanto por hombres y mujeres solo se hacía referencia al género masculino. Otro tipo de lenguaje presente, con 8 casos fue *lenguaje mixto* el cual hacía referencia explícita de hombres y mujeres. Finalmente también con 8 casos el tercer tipo de lenguaje utilizado fue *lenguaje neutro* el cual se refería a los sujetos de los problemas como personas sin identificar género.

Imagen

Se clasificaron 546 imágenes relacionadas al *género* en las cuales podrían haber más de una persona, siendo todas codificadas, resultando varios códigos de una sola imagen. En total se encontraron 1034 como *hombre* y 1021 casos de *mujer*. Dada la muestra se puede notar que aún cuando la presencia de hombres es superior a la de las mujeres nuevamente es un resultado paritario. Concretamente, no solo la cantidad de hombres y mujeres era la misma en presencia, sino que más de la mitad de los casos se muestra a ambos realizando la misma actividad.

Posteriormente al igual que en problema contextual se clasificó por *profesión/oficio* o *actividades (arte, deporte, juego, academia, cotidianidad)*. Esto mostró que en profesiones los *hombres* fueron mencionados en 41 oportunidades en 13 oficios diferentes, siendo los más frecuentes profesor (12), vendedor (10) y chofer (6). Mientras que para *mujeres* se encontraron 33 casos con 11 oficios diferentes, con mayor frecuencia profesora (11) y temporera (9). No es casual que tanto hombres como mujeres tengan mayor espacio en trabajos de pedagogía ya que al ser textos escolares muchas imágenes están situadas en el aula de clases, sin embargo, que los hombres tengan más opciones laborales muestra sus privilegios como trabajador, donde además se les ve a cargo, cómo por ejemplo, ser dueño de una tienda mientras que las mujeres están al servicio como temporeras.

En el patrón etiquetado como *actividades*, el primer grupo es *arte* donde las mujeres tienen 28 apariciones mientras que los hombres 21. Para ambos casos la actividad artística más frecuente fueron las manualidades. El segundo patrón encontrado fue *deportes* donde los hombres participan en 67 oportunidades mientras que las mujeres en 60. En este, andar en bicicleta es la acción más repetida para ambos. En estas dos clasificaciones podemos ver la reproducción de un patrón social donde a la mujer se le relaciona más a lo artístico mientras que a hombres a lo deportivo. En la clasificación de *juego* los hombres están presentes 177 veces y las mujeres 164, siendo la actividad más frecuentada todas las relacionadas a juegos en el parque para ambos y de manera paritaria. Otra clasificación que surgió fue la *académica* donde las mujeres tienen la mayoría con 171 códigos mientras que los hombres 162. Finalmente se agrupó en categoría *cotidianidad* todas las acciones restantes de realización diaria, participando los hombres en 575 de estas actividades mientras que las mujeres 563. Las más frecuentes para ambos son mirar/observar y caminar, dentro de las cuales no se observan estereotipos de género.

Una tercera categoría denominada *vestuario*, se clasificó de acuerdo a los colores que utilizaba cada persona. En esta se incluyeron 12 subcategorías de colores (*blanco, amarillo, anaranjado, rojo, rosado, morado, azul, celeste, verde, marrón, gris, negro*) y una subcategoría denominada *uniforme escolar*. En los que se pudo observar la asociación de colores tanto a lo femenino como masculino. Por una parte el 16,7% de las *mujeres* utiliza una prenda *rosada* y 15,73% *celeste* siendo ambos los más frecuentes, mientras que los *hombres* llevan un 15,66% una prenda *azul* y un 14,40% *rojo*. Estos colores han sido asignados representantes de cada género siendo el rosa lo femenino y el azul lo masculino, sin embargo estas son construcciones sociales que es importante dejar de reproducir.

CONCLUSIONES

Se puede observar que en los textos se intenta presentar tanto a hombres como mujeres de forma igualitaria, sin embargo creemos que esto se debe principalmente a que los requerimientos en las bases para la licitación de textos escolares (ChileCompra, 2019) así lo exigen y no a que los autores y/o editores tengan un verdadero enfoque feminista. Esto ya que a simple vista parece existir una paridad, pero al analizar en profundidad se siguen observando acciones que perpetúan la desigualdad de género, aunque esta sea en menor medida. Esto ocurre en parte porque las mujeres presentadas en los textos han tenido más acceso a espacios que años atrás eran netamente masculinos, sin embargo, no es el caso de los hombres quienes por lo general se mantienen en espacios donde históricamente no se ha visto cuestionada su masculinidad.

Por otro lado es importante evidenciar los resultados en relación a los tipos de lenguaje utilizados en los problemas contextuales el cual visualizó como más utilizado el lenguaje genérico masculino. Por tanto, consideramos imprescindible que el MINEDUC promueva el uso del lenguaje incluyente, ya que el uso de generativos masculinos invisibiliza a la mujer. Esto desde nuestra perspectiva es fundamental, pues como señala Lledó (2010) “Lo que no se nombra no existe” (p.1). Siendo importante destacar que no basta con usar os/as sino preferentemente un lenguaje neutral con el que cualquiera pueda identificarse.

Referencias

- Cano J. E. (2016). La «otredad» femenina: construcción cultural patriarcal y resistencias feministas.
- *Asparkia*, 29, 49-62.
- ChileCompra. (2019) *Licitación pública ID n°596-26-LS19*. Santiago Chile.
- Darraz, M. C. F., Vargas, E. M., y Mardones, O. C. (2018). Representación androcéntrica del trabajo en el discurso de textos escolares chilenos. *Cadernos de Pesquisa*, 48(169), 974-1000.
- Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica. UNO, 1-16. Fardiño Barros Y. (2014). La otredad y la discriminación de géneros. *Advocatus*, 11, 49-57. Gonzalez, F. (2008). Subjetividad social, sujeto y representaciones sociales. *Diversitas*, 4(2), 225-243.
- Infante, L. M. (2019). *El concepto de otredad, una propuesta pedagógica de intervención con la percusión corporal* (Trabajo de grado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Lledó, E. (2010). *Lo que no se nombra no existe*. Guía para el uso incluyente del lenguaje, 1-21.
- Mosquera y González (2015). *Representaciones sociales de género en los textos escolares de las áreas matemáticas y lenguaje, grado tercero de básica primaria*. Tesis de maestría, Universidad Libre de Colombia.
- ONU. (2015). Resolución aprobada por la Asamblea General el 25 de septiembre de 2015. <https://www.un.org/es/ga/70/resolutions.shtml>
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Comares.

- Valero, P. (2015). *Lo político en la educación matemática: De la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática*. RELIME, 18(3), 1-20.

REPRESENTACIONES UTILIZADAS EN LA DISCUSIÓN PLENARIA DE SIMULACIONES DE CLASE EN EL MARCO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: APORTES DESDE LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Anahi Huencho, Teresa Sanhueza, Pamela Alarcón

Las múltiples representaciones juegan un importante papel en el aprendizaje de las matemáticas. Su uso potencia la comprensión y relación entre conceptos matemáticos, por lo que su manejo es fundamental para el desarrollo del futuro profesor de matemáticas. El objetivo de este estudio es describir el tipo de representaciones y el uso dado por estudiantes de pedagogía en matemática en la discusión plenaria de simulaciones de clases basadas en la resolución de problemas. La metodología utilizada es cualitativa descriptiva y busca a través de los análisis de segmentos de videos de clases levantar información asociada al tipo de representación, su uso y objetivo de uso que lo caracteriza en torno a la demanda generada. Los resultados obtenidos dan cuenta del uso de representaciones visuales y simbólicas para apoyar la explicación que se sustenta de una representación verbal, creación de representaciones visuales y simbólicas para dar respuesta a problemas y modificación de representaciones antes establecidas con el foco en el establecer conexiones entre ideas, estrategias y representaciones.

Representaciones, formación de profesores de matemática, resolución de problemas, simulación de clases, discusión plenaria.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años en Chile se han implementado diversas políticas orientadas a mejorar la formación inicial docente (FID) (Ávalos, 2014; Gaete, Gómez, & Bascopé, 2016). Las acciones giran en torno tres ejes: el ingreso a las pedagogías, el proceso formativo y la habilitación profesional; siendo el segundo un aspecto crucial en el que, dentro de sus acciones, se debieran considerar instancias que permitan hacer frente a las problemáticas con las que futuros docentes se encontrarán en su quehacer pedagógico (Gaete et al., 2016).

Surgen así diversas innovaciones en los programas formativos, la mayoría respondiendo a modelos institucionales basados en competencias, enfoque desde el cual las unidades formadoras deben asegurar que sus estudiantes demuestren las capacidades aprendidas integrando una combinación de conocimientos, habilidades y destrezas (González, Herrera, & Zurita, 2008). En este sentido, la evaluación de competencias requiere de una organización y de medios evaluativos diferentes de los que se utilizan tradicionalmente (Quiroz & Mayor, 2019). Es así como diversas técnicas de enseñanza-aprendizaje pueden ser también utilizadas como estrategias de evaluación, una de ellas es el juego de roles o ejercicio de simulación, en la cual una persona (estudiante) simula ser otra en una situación imaginada, actividad que se lleva a cabo ante el resto del grupo (Pereda & Berrocal, 2001).

En el área de la enseñanza de las matemáticas, la representación se plantea en el currículo chileno como una de las cuatro habilidades a desarrollar por los estudiantes. Es decir, se propone que los

escolares sean capaces de transitar entre los distintos niveles de representación, además se declara que esta habilidad potencia la comprensión y relación entre conceptos matemáticos, lo que favorece el aprendizaje de los estudiantes (MINEDUC, 2016). En este sentido, Nurrahmawati (2018) plantea que es importante que cuando los profesores enseñen un tema presten especial atención al uso de múltiples representaciones ya que éstas juegan un importante papel en el aprendizaje de las matemáticas. De esta manera, el objetivo de este estudio es describir el tipo de representaciones y el uso dado por estudiantes de pedagogía en matemática en la discusión plenaria de simulaciones de clase basadas en la resolución de problemas.

ANTECEDENTES

Un desafío que presenta la formación de docentes en matemática es el desarrollo de habilidades para el siglo 21, dentro de ellas especial atención tiene la Resolución de Problemas de forma Colaborativa (RPC) (Reimers & Chung, 2016). Tal habilidad ha sido fuertemente promovida para su incorporación en los procesos de enseñanza y aprendizaje (UNESCO, 2017). Sin embargo, la RPC aún no es un dominio que se enseñe y promueva en los currículum escolares, aun cuando está definida como una habilidad matemática a desarrollar en toda la trayectoria escolar en Chile (MINEDUC, 2016).

En este marco surge la iniciativa ARPA (acrónimo de Activando la Resolución de Problemas en el Aula), propuesta de desarrollo profesional desarrollado entre el Centro de Modelamiento Matemático y el Centro de Investigación Avanzada en Educación, ambos de la Universidad de Chile. La iniciativa tiene como objetivo ofrecer oportunidades y herramientas para que los profesores desarrollen actividades de resolución de problemas en sus aulas, el que es desarrollado a partir de tres tipos de talleres: RPAcción, RPAula y RPContenido (Felmer, Perdomo-Díaz, & Reyes, 2015). En el segundo tipo de taller se espera que los docentes realicen una Actividad de Resolución de Problemas en Aula (ARPA), para ello es necesario que el docente planifique actividades de resolución de problemas para luego implementarlas según el modelo trabajado. La planificación implica resolver problemas, analizarlos en profundidad, identificar diversas formas de resolución y anticipar posibles dificultades que pudieran presentar los estudiantes al resolverlos. En la implementación se distinguen cuatro etapas: entrega, activación, consolidación y discusión; siendo esta última un espacio de discusión matemática, en la que se presentan y discuten algunas de las estrategias que los estudiantes usaron para resolver el problema, previa selección estratégica por parte del docente. Durante esta etapa, la interacción entre docente y estudiantes se da por medio de preguntas que estimulan la discusión y se realizan conexiones entre los conceptos e ideas emergentes (Felmer & Perdomo, 2017).

El NCTM desarrolló una propuesta para garantizar el éxito matemático de todos los estudiantes, a través de prácticas de enseñanza efectivas de las matemáticas. Una de ellas es el uso y vinculación de las representaciones matemáticas, la que implica utilizar diversas representaciones y hacer conexiones entre ellas para favorecer la comprensión de conceptos y procedimientos, apoyar la discusión matemática y servir como herramientas en la resolución de problemas (NCTM, 2015).

“Las representaciones involucran características fundamentales de los constructos y las acciones matemáticas, como dibujar diagramas y utilizar palabras para mostrar y explicar el significado de diversos objetos matemáticos” (NCTM, 2015, p. 25). En este sentido Lesh, Post, & Behr (1987) identifican cinco tipos de representaciones: los guiones basados en la experiencia, donde el

conocimiento se organiza en torno a eventos del mundo real; modelos manipulables, en el cual los elementos del sistema tienen poco significado por sí, pero las relaciones y operaciones "integradas" se ajustan a muchas situaciones cotidianas; dibujos o diagramas- modelos figurativos estáticos, los cuales pueden internalizarse como imágenes; lenguajes hablados y sublenguajes como la lógica; y finalmente símbolos escritos, que incluye oraciones y frases especializadas.

METODOLOGÍA

La metodología empleada es de carácter cualitativa descriptiva, la cual busca a través del análisis de segmentos de clases levantar información asociada al tipo de representaciones en la resolución de problemas. Así, la experiencia se enmarca en la discusión plenaria de clases simuladas en contexto universitario, por profesores de matemática en formación, en el marco de la resolución de problemas. El contexto se centra en la Evaluación Integrada de Desempeño del curso de Didáctica del Álgebra, ubicado en el sexto semestre de la carrera de Pedagogía Media en Matemática de la Universidad Católica de Temuco. Los participantes de la experiencia fueron 18 estudiantes, 11 mujeres y 7 hombres, quienes conforman 5 grupos para el diseño e implementación de la unidad didáctica.

La Evaluación Integrada de Desempeño se diseña durante todo el semestre y se implementa al término del curso. En total fueron 5 simulaciones de clases de matemáticas centradas en los Objetivos de Aprendizajes del eje de Álgebra de Enseñanza Media abordados desde la resolución de problemas no rutinarios y de respuesta abierta. Cada simulación se realizó en una jornada diferente, en un aula universitaria, dentro de 50 minutos de clases grabadas. En cada simulación, los estudiantes del curso desarrollaron el rol de estudiante de enseñanza media o de profesor.

El análisis de los datos se centra en la actuación de los participantes que cumplen el rol de estudiantes de Enseñanza Media, en donde se codifica cada representación emergente en la discusión de la clase. Esta codificación se desarrolla con apoyo del programa Atlas.ti desde donde se clasifica el tipo de representación, la acción y el objetivo por el cual se hace presente, así como la demanda del docente que promueve el surgimiento de las mismas. Luego, se desarrolla un análisis descriptivo en función de la presencia y ausencia de los datos, para avanzar a un análisis de co-ocurrencia que vincule la representación, la acción y su objetivo y al conjunto de indicadores que se generan de forma anidada.

Los códigos utilizados dentro de la habilidad de representar son los siguientes. **Contextual:** situaciones experimentadas por los estudiantes, el conocimiento se organiza alrededor de eventos del mundo real. **Concreta:** modelos manipulables con significado dentro del conocimiento matemático. **Visual:** diagramas o modelos figurativos los cuales pueden ser internalizados como imágenes de los conocimientos matemáticos. **Verbales:** comunicación entorno a la actividad de manera no simbólica. **Simbólicas:** comunicación entorno a la actividad con lenguaje matemático específico.

Cada uno de los indicadores asociados a la habilidad de Representar fue vinculado con la acción y el objetivo de la acción que lo moviliza del siguiente modo: **Usa** las representaciones dadas, **Crea nuevas** representaciones o **Modifica** representaciones existentes, con el objetivo de Explicar, Argumentar, Conectar, Interpretar o Construir ideas, conceptos, procedimientos o soluciones.

RESULTADOS

Las clases evidencian un conjunto de representaciones que se caracterizan en torno a la demanda que el encargado de la simulación (profesor de matemática en formación) propone al resto de los estudiantes de la clase para la formalización matemática del problema planteado. En total, los datos muestran de entre 15 a 22 representaciones diferentes por sesión, que se generan en un ambiente planificado para el diálogo y la discusión en torno a la matemática central del problema. De esta manera, se presentan dos etapas diferentes, una en que las representaciones se utilizan para dar respuesta al problema planteado (8 aprox.) y otras para conectar las estrategias y conceptos que emergen desde estas múltiples representaciones (12 aprox).

La primera etapa se caracteriza en un 91,4% de representaciones de carácter visual, como diagramas o modelos figurativos y/o de representaciones simbólicas creadas para construir ideas, procedimientos y soluciones. La segunda etapa evidencia un 55,7% de representaciones verbales que se usan para explicar o conectar procedimientos, conceptos o ideas que por lo general se anclan de representaciones visuales o simbólicas expuestas con anterioridad.

Por ejemplo, uno de los problemas trabajados en clases se asocia al Objetivo de Aprendizaje 09 de Tercer año Medio del eje de Álgebra y se focaliza en modelar situaciones reales por medio de la función cuadrática para resolver problemas. El Recuadro 1, muestra el problema no rutinario de respuesta abierta formulado por los estudiantes de pedagogía y una de las representaciones visuales y simbólicas plasmadas en la pizarra. Del mismo modo, el Recuadro 1 muestra evidencia de las preguntas de ampliación del problema de base que fomenta el análisis y la discusión desde la activación de variables dentro del problema.

<i>Diseño de aula</i>	<i>Resultado de implementación</i>
<i>El problema</i> <i>“Juan quiere dar a su hija Margarita 880 metros de alambre de púas para que cerque un terreno rectangular de la manera más conveniente, utilizando dos corridas de alambre con la finalidad de mantener a sus cerdos en el corral. ¿De qué manera Margarita puede optimizar la distribución del alambre para cercar la mayor cantidad de área?”</i>	<i>Representación visual y simbólica</i>

Preguntas para el análisis y la discusión

¿De qué manera se puede disponer mejor el alambre para optimizar la mayor cantidad de área?

¿Cuánta es la cantidad de alambre que necesito para cercar con 5 vueltas y obtener la misma área máxima?

Handwritten mathematical work for a problem about maximizing area with a fixed perimeter. The work is written in red ink on a white background. At the top, the word "CERCEO" is written in red. Below it, a rectangle is drawn with sides labeled x and y . To the right of the rectangle, the perimeter is given as $P = 880 \text{ m}$, and the equation $4x + 4y = 880$ is written. This is simplified to $4(x + y) = 880$, then $x + y = \frac{880}{4}$, and finally $x + y = 220$. A box is drawn around the equation $x = 220 - y$. Below the rectangle, the area is given as $A = x \cdot y$, and the equation $A = (220 - y) \cdot y$ is written. This is simplified to $-y^2 + 220y = A$, then $-y^2 + 220y - A = 0$. The quadratic formula is used to solve for y : $y = \left(\frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{-b}{2a} \right)^2 - 4ac} \right)$. This is simplified to $y = \left(\frac{110}{1} \pm \sqrt{\left(\frac{110}{1} \right)^2 - 4(1)(-A)} \right)$. The final result is $y = 110$ and $x = 110$.

Recuadro 1: Ejemplos de representaciones en contexto de un problema de álgebra.

Desde un análisis entre indicadores que se centra en la acción y el objetivo por el que emergen los diferentes tipos de representación, los estudiantes de pedagogía usan una representación preexistente con el objetivo de explicar un procedimiento o idea (71,8% del total de representaciones bajo el contexto de uso), de las cuales un 80% son de carácter verbal. Por otro lado, de las representaciones creadas por el estudiante, un 50% de ellas tienen como objetivo dar solución a los problemas planteados en la clase, para los que se utilizan representaciones visuales (50%) o simbólicas (50%) tal como queda expresado en el Recuadro 1. Por último, el estudiante de pedagogía modifica representaciones existentes en un menor número de casos (12% del total de representaciones), siendo utilizadas para explicar o conectar ideas matemáticas.

Las representaciones concretas son escasas (2,3% del total) y emergen únicamente cuando el problema a desarrollar es planteado desde lo concreto. Del mismo modo, las representaciones contextuales presentan una baja presencia (8% del total) y se usa en un 100% para explicar y argumentar limitantes lógicas del problema expuesto.

CONCLUSIONES

Este tipo de propuestas, en cuanto al diseño e implementación de tareas matemáticas asociadas a la resolución de problemas colaborativos, fortalece al futuro profesor de matemáticas en cuanto al desarrollo de habilidades para el siglo 21 (Reimers & Chung, 2016). Además, el trabajo con problemas no rutinarios y de respuesta abierta dentro de una metodología de interacción en aula que propone ARPA (Felmer & Perdomo, 2017), permite que los futuros docentes adquieran las habilidades necesarias para promover la resolución de problemas y la representación (UNESCO, 2017) como habilidades matemáticas esenciales a desarrollar dentro del currículo nacional chileno (MINEDUC, 2016). De esta manera, la forma en que se ha planificado la discusión plenaria permite

que la simulación de la clase se concentre en las estrategias de solución del problema inicial desde donde se desprenden diversos tipos de representaciones que vienen a apoyar tal proceso.

En cuanto a las representaciones que emergen de este tipo de actividades de formación, éstas se concentran mayoritariamente en el ámbito visual y simbólico, lo cual puede deberse a la forma habitual en que la formación escolar nos ha inculcado proceder y a las deficientes herramientas en el marco de la habilidad de argumentar y comunicar que nos genera complicaciones para usar un tipo de representación verbal en la resolución de nuestros problemas matemáticos. En este sentido, este tipo de investigaciones, nos ayuda a ser conscientes de las representaciones que emergen más naturalmente según un tipo de problema y nos proyecta a los requisitos que deben tener nuestras demandas matemáticas que potencien el uso cotidiano de otro tipo de representaciones en el aula escolar. Esto podría suplir en parte, los requerimientos curriculares asociados a la habilidad de argumentar y comunicar que deben desarrollar los estudiantes en la asignatura de matemática.

Esta experiencia de aula contribuye a mejorar la formación inicial de profesores, desde el proceso formativo, ya que las simulaciones de clases se constituyen en una instancia que permite posicionar a los futuros profesores frente a posibles situaciones de enseñanza-aprendizaje que enfrentarán en su futuro laboral (Gaete et al., 2016).

Referencias

- Ávalos, B. (2014). La formación inicial docente en Chile: Tensiones entre políticas de apoyo y control. *Estudios Pedagógicos*, 40(Especial), 11–28. doi:10.4067/s0718-07052014000200002
- Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., & Reyes, C. (26 -27 de noviembre de 2015). *Activar la Resolución de Problemas en el Aula* [Resumen de presentación de la conferencia]. Villarrica, Chile: XIX JEM, SOCHIEM.
- Gaete, A., Gómez, V., & Bascopé, M. (2016). *¿Qué le piden los profesores a la formación inicial docente en Chile?*. Centro de Políticas Públicas UC.
- González, E., Herrera, R. & Zurita, R. (2008). Formación Basada en Competencias: Desafíos y Oportunidades. *Diseño Curricular basado en competencias y aseguramiento de la calidad en la educación Superior* (pp. 16-28). CINDA.
- Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janiver (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum Associates.
- MINEDUC (2016). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. MINEDUC.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. NCTM.
- Nurrahmawati, Sa'dijah, C., Sudirman, Muksar, M., As'ari, A. R., & Nusantara, T. (2018). Pre-service mathematics teachers' preferences in Using multiple representation of word problem solving. *International Journal of Insight for Mathematics Teaching*, 01(2), 141–150.
- Perdomo-Díaz, J., & Felmer, P. (2017). El Taller RPaula: Activando La Resolución De problemas En Las Aulas. *Profesorado, Revista curriculum y formación de Profesorado*, 21(2), 425–444.

- Pereda, S. & Berrocal, F. (2001). *Técnicas de Gestión de Recursos Humanos por competencias*. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces S.A.
- Quiroz, A., & Mayor, C. (2019). Evaluación de competencias en la formación inicial de docentes de matemáticas: Propuestas para su implementación. *Perfiles Educativos*, 41(163), 21–38. doi:10.22201/iisue.24486167e.2019.163
- Reimers, F., & Chung, C. K. (2016). *Teaching and Learning for the Twenty First Century*. Educational Goals, Policies, and Curricula from Six Nations, 1-24.
- UNESCO-OREALC (2017). *E2030: Educación y habilidades del siglo XXI; reporte. Reunión Regional de Ministros de Educación de América Latina y el Caribe*. OREALC/UNESCO.



TRABAJO MATEMÁTICO EN TORNO A LA INTERSECCIÓN DE LA GRÁFICA DE FUNCIONES, EL CASO DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS

Fabiola Arévalo-Meneses

La presente investigación de enfoque cualitativo tiene como objetivo, indagar en el trabajo matemático del estudiante ante una tarea referente a la intersección de la gráfica de dos funciones cuadráticas en contexto geométrico, que consideró la utilización de un artefacto digital en modalidad de clases remotas dada la contingencia. A través del método de estudio de casos se recogieron datos que fueron analizados mediante el marco teórico Espacio de Trabajo Matemático (ETM), observando la activación de los planos semiótico-instrumental e instrumental-discursivo, lo que da cuenta de una tarea rica en términos didáctico para trabajar este tema.

Espacio de trabajo matemático, tecnología, evaluación automática, educación matemática.

PROBLEMÁTICA

Desde mi experiencia como profesora, una de las dificultades que presentan los estudiantes es la falta de comprensión del objeto matemático de función, en consecuencia la dificultad se acentúa en la comprensión de la intersección de la gráfica de funciones. Entre las posibles causas se encuentra el trabajo matemático centrado en el registro algebraico, sin considerar la articulación con otros registros de representación semiótica. La gran mayoría de las actividades propuestas al estudiante promueven el trabajo algebraico y en aquellos casos en que se considera otros registros de representación, generalmente se presentan de manera tal, que la articulación es desde el trabajo en el registro algebraico hacia los otros registros, lo que de alguna manera promueve un estatus de validez mayor al trabajo algebraico.

Ahora bien, pensando en el contexto actual en que nos encontramos, se presentan una serie de factores que limitan nuestras decisiones pedagógicas, lo que de alguna manera nos pone ante una situación compleja. En la modalidad de clases remotas que se ha debido implementar producto de la contingencia por Covid-19, el uso de tecnología en nuestra prácticas pedagógicas, se ha transformado en una necesidad y también en un gran desafío para el profesor quién ha debido poner a prueba sus capacidades con el fin de utilizar los recursos tecnológicos de manera tal que promuevan y faciliten la construcción del aprendizaje.

En consecuencia, considerando por un lado las dificultad de los estudiantes ante un objetivo de aprendizaje particular y por otro, las limitaciones en el proceso de enseñanza aprendizaje producto de la contingencia, nace la siguiente pregunta de investigación; ¿Cuál es el trabajo matemático realizado por los estudiantes ante la tarea de determinar la intersección de dos funciones cuadráticas en una tarea mediada por un artefacto digital?

MARCO TEÓRICO

Los resultados de la presente investigación fueron analizados utilizando como marco teórico Espacio de Trabajo Matemático (ETM).

El ETM es una teoría cognitiva, que permite estudiar el trabajo matemático realizado por un individuo ante una tarea determinada considerando elementos cognitivos y epistemológicos. El propósito es poder comprender, desde un punto de vista didáctico, lo que se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un contexto educativo (Kuzniak et al., 2016). Se basa en la articulación de dos planos horizontales, por una parte el plano epistemológico que considera tres componentes, un conjunto de signos llamado Representamen, un conjunto de artefactos o herramientas y un sistema teórico de referencia basado en definiciones, teoremas y propiedades. Por otra parte, se encuentra el plano cognitivo en que se encuentran tres procesos, un proceso de visualización de la información aportada por los signos, un proceso de construcción de acuerdo a los instrumentos utilizados y un proceso discursivo que permite argumentar y producir pruebas. Estos dos planos se articulan a través de la activación de tres génesis, semiótica, instrumental y discursiva. La génesis semiótica se basa en los registros de representación semiótica y da un sentido de objeto matemático a los objetos tangibles o signos, la génesis instrumental permite hacer operarios los artefactos en el proceso constructivo y la génesis discursiva otorga sentido a las propiedades para evocarlas en el razonamiento matemático. Del mismo modo, la articulación de las distintas génesis permite la activación de los planos verticales, plano semiótico-instrumental, plano instrumental-discursivo y plano semiótico-discursivo (Kuzniak & Richard, 2014).

METODOLOGÍA

La presente investigación fue desarrollada con un enfoque cualitativo, dadas las características del objeto de estudio. La investigación cualitativa es un proceso interpretativo de indagación que examina un problema humano o social. Del mismo modo, se recurre al estudio de casos múltiples como método de indagación ya que el propósito es observar el trabajo matemático de varios sujetos antes el estudio de la intersección de la gráfica de funciones cuadráticas (Stake, 1998).

Para levantar los datos se trabajará con estudiantes de un curso de Álgebra 1 de educación superior, quienes anteriormente han estudiado funciones reales. Se realizará en modalidad virtual, en clases sincrónicas dada la contingencia por Covid-19.

Para poder desarrollar la indagación que nos permita obtener la matriz de datos, existen dos componentes fundamentales que describiré a continuación, el artefacto digital y la participación del profesor durante la clase.

Descripción del artefacto tecnológico

Se utilizará una plataforma de evaluación en línea vinculada al software llamado Wiris, la que corresponde a un artefacto tecnológico, en la que se diseñó una secuencia de tareas que posee otro artefacto tecnológico, figura dinámica (applet de GeoGebra). Ambos artefactos tienen características muy interesantes. El software Wiris funciona como un complemento de un sistema de gestión del aprendizaje como Moodle y Blackboard. Este software permite definir parámetros aleatorios, y en consecuencia diseñar preguntas de manera tal que cada pregunta es diferente para cada estudiante y cada vez que un mismo estudiante realiza un nuevo intento. Tiene un editor de ecuaciones disponible para el estudiante, un sistema de cálculo simbólico para validar respuestas, además de un sistema de retroalimentación ante las respuestas del estudiante. Por otra parte, el applet de GeoGebra, fue diseñado de acuerdo a una serie de decisiones didácticas en torno al objetivo de la propuesta de investigación y a las limitaciones que presenta el artefacto digital en

relación a las tareas propuestas. La tarea consiste en dos cuestionarios, diseñados de tal manera que presenta en primer lugar la situación que se debe analizar y considerar al momento de responderlos. Como se puede apreciar en Figura 1, contiene la figura dinámica compuesta por un deslizador (vértice B) que hace variar el representamen de la figuras geométricas en forma coordinada con el representamen tanto de las gráficas de las funciones de las áreas de las figuras geométricas y del intervalo numérico de las imágenes de ambas funciones. Así también, se pueden apreciar las proyecciones ortogonales de las funciones sobre los ejes.

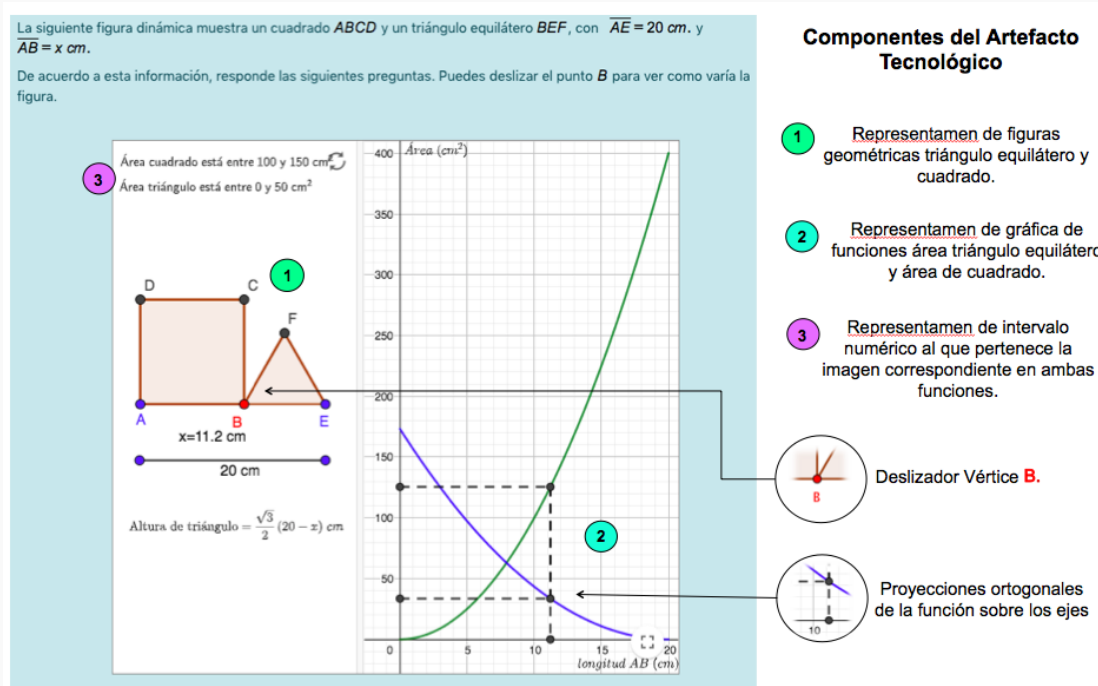


Figura 1: Situación y Figura dinámica con sus componentes

Participación del profesor.

El profesor tendrá el rol de mediar el proceso considerando tanto el trabajo de los estudiante y la plataforma, observar las estrategias abordadas, reacciones, aportes de los estudiantes y la interacción entre ellos en los distintos momentos con el fin de obtener información relevante para la investigación.

Momento 1: Desarrollo de cuestionario 1. En grupos de tres estudiantes distribuidos en salas independiente, se espera que desarrollen de forma individual la secuencia de tareas en la plataforma y puedan compartir sus estrategias, mientras el profesor podrá visitar las distintas salas.

El cuestionario esta compuesto de dos preguntas con que se espera que el que el estudiante pueda familiarizarse con la situación y la figura dinámica. Esta primera etapa de trabajo podría llevar al estudiante a activar conocimientos previos referentes a funciones y a estimar la imagen en ambas funciones para un determinado valor de x , en la pregunta 1 y determinar la pre-imagen de las funciones para un determinado valor de y en la pregunta 2. Además, se espera que explique la estrategia utilizada para responder. (ver Figura 2). Cabe destacar que tanto en el valor de x en la primera pregunta así como el valor del área en la pregunta dos están definido de manera aleatoria.

Pregunta 1
Sin responder aún
Puntúa como 1,00
Marcar pregunta
Editar pregunta

¿Cuál es el área del cuadrado $ABCD$ y del triángulo BEF , si $x = 13.3$ cm?

Respuesta:

Área del cuadrado =

Área del triángulo =

Explica el procedimiento que utilizaste en la pregunta 1 para llegar a tu respuesta. Puedes escribir en el siguiente espacio, o bien, adjuntar un archivo. Ej. una fotografía.

Figura w: Pregunta 1 de cuestionario 1

Momento 2: **Exposición grupal en salas independientes.** Luego de terminar el desarrollo del cuestionario 1, se espera que los estudiantes expongan en sus salas ante el profesor.

Momento 3: **Desarrollo de cuestionario 2.** En los mismos grupos de trabajo, se espera que los estudiantes respondan el cuestionario 2 de forma independiente en la plataforma y que puedan compartir sus ideas y estrategias con sus compañeros de grupo.

El cuestionario 2 posee una única pregunta, en que se espera que el estudiante pueda encontrar una buena aproximación del valor de x para el cual las áreas de ambas figuras son iguales (ver Figura 4).

¿Para que valor de x , el área del cuadrado $ABCD$ es igual al área del triángulo BEF ?

Respuesta:

Las áreas son iguales si $x =$

Figura 3: Pregunta de cuestionario 2

Al igual que las preguntas anteriores, el estudiante podrá argumentar su procedimiento.

La respuesta a esta pregunta es un número irracional, sin embargo, el estudiante a priori podría no saberlo. De este modo, el trabajo matemático puede ser abordado desde distintos caminos. El estudiante podría plantear una ecuación que le permita llegar al resultado a través de un desarrollo algebraico, o bien utilizar la figura dinámica para obtener una aproximación de ese valor, ya sea visualizando la gráfica de las funciones, visualizando los intervalos numéricos al que pertenecen las imágenes de ambas funciones o visualizando la representación geométrica de las figuras que se acompaña de un valor para x . En el caso de que el estudiante lograra ingresar una respuesta exacta que puede obtener desde un desarrollo algebraico, al ser ingresada en la plataforma, el sistema la considerará totalmente correcta si además indica la unidad de medida correspondiente. Ahora, independiente de la estrategia utilizada, si el estudiante ingresa una buena aproximación del valor solicitado, el sistema le indicaría que la repuesta es parcialmente correcta, pues si bien es una buena aproximación no es el valor exacto. Es posible que el estudiante piense que hay un error en la plataforma al considerar errada la respuesta que el considera correcta, ante lo cuál se espera que

el estudiante calcule las áreas de ambas figuras para el valor obtenido, en ese momento podría observar que las áreas no son exactamente iguales, de esta manera podría repetir el proceso con nuevas aproximaciones, luego se espera que el estudiante logre identificar la necesidad, para este caso particular, de plantear una ecuación para llegar a la solución de manera algebraica.

Momento 4: **Plenario y cierre.** Se espera que los estudiantes compartan sus apreciaciones en relación a ambos cuestionarios y al trabajo realizado identificando sus fortalezas y dificultades, mientras el profesor podrá mediar la conversación con el fin de obtener mayor información en relación a la problemática.

RESULTADOS Y CONCLUSIÓN

Dentro de lo observado en la implementación de la propuesta de innovación resulta muy interesante ver que los estudiantes en respuesta al contrato didáctico, consideran que los procedimientos y respuestas válidas ante la tarea planteada, son aquellas que se consiguen a través de procedimientos de cálculo, aplicación de fórmulas o ecuaciones, incluso llegando a manifestar sentir que “hacen trampa” al utilizar la figura dinámica, perdiendo de vista los distintos representamen presentes en la tarea, esto sin dudas nos interpela como profesores, pues el trabajo matemático de los estudiante se ve condicionado de acuerdo a lo que ellos creen que el profesor espera.

Así también, se observó que frente a tareas que consideran registros de representación distintos al algebraico, los estudiantes son capaces de desarrollar un trabajo matemático que propicia la articulación entre distintos registros por medio de un artefacto tecnológico que permitió activar los planos semiótico-instrumental ([Sem-Ins]) e instrumental-discursivo ([Ins-Dis]), lo que bajo la teoría del ETM, es un aspecto importante, pues mientras la tarea o secuencia de tareas propicie la activación de la mayor cantidad de génesis, el trabajo del estudiante será más completo (Kuzniak & Richard, 2014). Es importante destacar que, si bien los estudiantes no lograron articular los distintos registros de representación presentes en la figura dinámica hacia el registro algebraico, la posibilidad de manipular la figura geométrica y el que esta se modificara de manera coordinada con las otras representaciones presentes, propicio la visualización que fue fundamental para que el estudiante lograra dar una respuesta ante la tarea y comprender de mejor manera la intersección de la gráfica de las funciones. En consecuencia, es fundamental transitar hacia la articulación de los distintos registros de representación (Duval, 2006), contemplando tareas que consideren una primera instancia de trabajo en otros registros distintos al algebraico y que permitan ver las limitaciones y potencialidades de estos de acuerdo a la tarea.

Por otra parte, la tecnología ha sido siempre una herramienta importante al servicio de la educación, sin embargo por si sola no es suficiente, debemos ampliar nuestros conocimientos de tecnología para poder ligarlo a nuestros conocimientos didácticos de la disciplina, y de esta manera lograr utilizar de manera adecuada sus múltiples elementos, más aún cuando hoy en día considerar la tecnología en nuestras prácticas pedagógicas se transforma en una necesidad.

Un aspecto que a pesar de no tener directa relación con el objetivo de investigación, pero que sería interesante de abordar en un futuro estudio, se evidencio en relación a las unidades de medidas. Los estudiantes no comprenden la importancia de las unidades de medida, la mayoría no las considera al momento de responder, llegando incluso a confundirlas con variables al presentarse

junto a expresiones algebraicas. Ante esto, es inevitable hacer la conexión con uno de los obstáculos epistemológicos en la evolución de la noción de función, que da cuenta de la disociación entre la matemática y las leyes físicas, sin dudas de alguna manera se sigue manifestando esta dificultad, de ahí que es importante la contextualización dentro del trabajo matemático.

Referencias

- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, 9, 143–168.
- Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 17(4(1)), 17–27. <https://doi.org/10.12802/reime.13.1741b>
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - Mathematics Education*, 48(6), 721–737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.



UNA APROXIMACIÓN A LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DEL CÁLCULO EN PROFESORES CHILENOS

Cristián Aldo Bustos Tiemann, Elisabeth Ramos Rodríguez

La presente comunicación tiene por objeto mostrar los resultados obtenidos en un estudio que pretendió indagar en la forma en que profesores en ejercicio de educación secundaria enseñan los conceptos básicos del cálculo, límite, derivada e integral, profundizando en la transposición didáctica que realizan desde el saber sabio al saber a enseñar. Se realizó un test a profesores de matemática de Chile abordando su análisis, a la luz de la epistemología del cálculo y su tránsito del saber erudito al saber escolar. Los principales resultados dan cuenta de una tendencia a la enseñanza tradicional con énfasis en la definición erudita con algunos aportes de la geometría dinámica para la visualización conceptual.

Límites, derivadas, integrales, transposición didáctica, epistemología del cálculo

INTRODUCCIÓN

Si bien las problemáticas del cálculo hicieron sus primeras manifestaciones en la época de la antigua Grecia clásica, no fue sino hasta fines del siglo XVII y comienzos del siglo XVIII en que se desarrollaron métodos sistemáticos para su resolución. En toda esa trayectoria es posible observar que la historia y la epistemología dan cuenta de lo complejo que significó para el ser humano ver convertidos en lo que son hoy los objetos matemáticos de límite, derivada e integral. Sin embargo, hoy en día las dificultades relativas a la enseñanza y aprendizaje del cálculo implican tanto a los estudiantes que cursan la asignatura como a los docentes que la imparten. Evidencia de esto la podemos encontrar en numerosas investigaciones (Contreras, Luque, y Ordoñez, 2003; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) en donde destacan que, aunque se planteen cambios en su enseñanza, en general esta se sigue impartiendo de manera tradicional.

Algunos autores (Salinas y Alanís, 2009) consideran que este paradigma tradicional está en la secuencia de enseñanza en la que la que el profesor se limita a exhibir una estructura que da cuenta de que para enseñar derivadas, por ejemplo, habrá que enseñar antes límites (porque la derivada es un límite) y para enseñar límites habrá que enseñar antes funciones (porque los límites son de funciones) y para enseñar funciones habrá que enseñar antes los números reales (porque son funciones de variable real). En este mismo esquema el estudiante incorporará a sus conocimientos las aplicaciones de la derivada como procedimientos repetitivos del tipo: para obtener el máximo se deriva y se iguala a 0. Es decir, los métodos típicos de enseñanza tienden a centrarse en la práctica rutinaria y algorítmica del cálculo (Artigue, 1995; Yusof y Tall, 1999) lo cual trae como consecuencia que en situaciones en las que se requiere mayor manejo conceptual no sea posible abordarlas (Selden, Mason y Selden, 1994).

Es decir, las dificultades del cálculo se ponen fuertemente de manifiesto al considerar sus conceptos básicos como objetos de enseñanza

En Chile, los tópicos más avanzados relacionados con el cálculo, que se trataban en la educación secundaria tenían que ver con los conceptos de sucesión y sumatoria. Desde el año 2020 se ha incluido en el sistema escolar secundario, la asignatura “Límite, Derivadas e Integrales” con intención de abordar:

Conceptos y resultados que son útiles para estudiantes de Educación Media que quieren seguir estudios superiores, técnicos o universitarios, en que la asignatura de Matemática es una herramienta central; en particular, prepara para los cursos de Cálculo que habitualmente se dictan en la Educación Superior infinitesimal (Ministerio de Educación de Chile, MINEDUC, 2021, p. 21).

Este cambio curricular hace que profesores del sistema escolar se vean enfrentado a la enseñanza de temas que no habían tratado desde que fue su formación profesional. Bajo este escenario, este estudio pretende indagar en la forma en que profesores en ejercicio de educación secundaria enseñan los conceptos básicos del cálculo, a saber, límites, derivadas e integrales, profundizando en la transposición didáctica que realizan desde el saber sabio al saber a enseñar.

MARCO REFERENCIAL

El marco referencial usado en este estudio se basa en la teoría de la Transposición Didáctica cuyo principal exponente es Yves Chevallard (1991) entendida esta como el conjunto de transformaciones que sufre un saber a efectos de ser enseñado, es decir, la traslación de conocimientos científicos a conocimientos escolares. En este sentido se distinguen tres modos del saber: el *saber sabio*, que es el saber especializado, la matemática pura, y que no está necesariamente vinculado con la enseñanza primaria o secundaria. El *saber a enseñar*, aquel que sirve para ser presentado al estudiante explicitado en los textos escolares, programas de estudio y otros materiales de apoyo. Y finalmente se tiene el *saber enseñado* definido como aquel que es registrado en la acción del docente en el aula y que no coincide necesariamente con los objetivos programados en el nivel del *saber a enseñar*. La transformación desde el *saber sabio* al *saber a enseñar* es una transposición externa que ocurre en la noósfera (docentes, padres especialistas de la disciplina, autoridades políticas) y es la primera etapa de la Transposición Didáctica. posteriormente la transformación del *saber a enseñar* al *saber enseñado* corresponde a una transposición interna y ocurre en la tríada saber-profesor-estudiante.

Saber Sabio en relación al cálculo

Diversas investigaciones realizadas con profesores dan cuenta de las dificultades que pueden darse al trabajar y enseñar los conceptos básicos del cálculo. Entender, por ejemplo, que en la construcción del concepto de límite no hay movimiento alguno ni acercamiento hacia un último término significa comprender el saber sabio que se corresponde con la definición ε - δ traducida por Weierstrass en el siglo XIX y que conocemos hoy en día. Según Hitt (2013) el problema principal para comunicar estos conceptos en el aula radica en el lenguaje natural utilizado pues al decir “el límite cuando n tiende a infinito”, por ejemplo, estamos incorporando la idea de movimiento. Finalmente es posible considerar en el saber sabio del concepto su generalización a otros contextos matemáticos como los espacios topológicos.

En cuanto al concepto de derivada los conceptos que dieron origen a su desarrollo fueron el problema de la tangente a una curva cualquiera y el cálculo de máximos y mínimos. Esto comenzó en la Grecia antigua (S. III a.C.) y continuó hasta el siglo XVII en donde con Newton y Leibniz se

encontraron métodos sistemáticos de resolución. Sin embargo, no fue sino hasta la comprensión del concepto de límite que se logró conformar el objeto derivada. Según Pinto y Parraguez (2013) es posible considerar varias formas de generalización: para funciones en varias variables, para el análisis complejo, en el análisis funcional, el concepto de función diferenciable en espacios de Banach, etc. que sitúan a la derivada como un objeto matemático potente que no solo resuelve problemas de la matemática, sino que también de otras áreas.

Respecto del concepto de integral es posible remontarse a la antigua Grecia en donde según Bárcenas (2006) se estableció la idea de medida y que toda figura geométrica tiene área. Es así como se tiene el trabajo de la cuadratura de la parábola de Arquímedes y el método exhaustivo. Posteriormente en el S. XVII se tiene el método de los indivisibles de Cavalieri y de allí en adelante la integración en los trabajos de Newton y Leibniz, la integral de Cauchy, la integral de Riemann, la integral de Lebesgue además de otros desarrollos igualmente importantes que Bravo y Cantoral (2012) resumen en la siguiente secuencia histórica: la integral como suma de un número infinito de “cantidades infinitamente pequeñas”, como proceso de anti derivación y como la existencia del límite de las sumas de Riemann.

Saber a Enseñar en relación al cálculo

En el caso de la transposición didáctica del cálculo los libros de texto y los programas de estudio representan una propuesta del saber a enseñar y es común que los docentes recurran a ellos como elementos centrales de consulta. Según Chevallard (1991), “la textualización del saber conduce primeramente a la delimitación de saberes parciales”, es decir, la delimitación es un proceso necesario para poder comunicar el Saber a Enseñar. Sin embargo, esta delimitación según Coartan (1996), ha producido desde el tiempo de Euler un oscurecimiento para la reciprocidad entre derivación e integración.

En la propuesta actual del MINEDUC, en el programa de la asignatura Límites, Derivadas e Integrales (2020), se introducen los conceptos del cálculo a través de una aproximación intuitiva. Para límites a través de patrones infinitos, para derivadas a través de situaciones de cambio y el concepto de razón de cambio y para integrales como proceso inverso de la derivación y el cálculo de áreas.

En el Manual Esencial, Estadística, Probabilidad y Precálculo (Varios autores, 2010) orientado para estudiantes chilenos de enseñanza secundaria se introducen los conceptos de límite y derivada por medio de la definición formal ϵ - δ y seguido de una serie de ejercicios de cálculo algorítmico. No aparece el tema de la integración.

METODOLOGÍA

La metodología de este trabajo es de carácter cualitativo con un diseño descriptivo y exploratorio. Se aplicó un test a 11 profesores de matemática de Chile que realizan clases en la enseñanza secundaria. En su construcción se empleó la validación de expertos, en este caso doctores en didáctica de la matemática. El test constó de dos ítems: (1) En el ámbito educativo, ¿cómo definiría a sus alumnos el concepto de (límite, derivada, integral);. (2) Entregue una actividad o tarea que haría a sus alumnos para que entienda el concepto de (límite, derivada, integral).

Se empleó el análisis de contenido cuyas unidades de análisis correspondieron a las respuestas del test. Las categorías se construyeron de acuerdo a la transposición didáctica de estos conceptos, a

saber, considerando la definición formal de límite, las nociones de tendencia, razón de cambio, área bajo la curva entre otros.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Al organizar los datos recogidos de las producciones se obtiene la tabla 1 que muestra las categorías y sus frecuencias surgidas de las producciones de los docentes:

Límite	Derivada	Integral
Definición formal de límite de función 2/11	Definición formal con límite 2/11	Antiderivada 2/11
Como tendencia o aproximación 4/11	Razón de cambio 2/11	Área bajo la curva 5/11
Existencia de límites laterales 2/11	Pendiente de recta tangente 8/11	Sumas de Riemann 2/11
Definición formal de límite de sucesión 1/11	No responde 2/11	Aproximación por el límite de suma de áreas de rectángulos 6/11
Divisibilidad infinita 2/11		No responde 2/11

Tabla 1: Resumen de la presencia de las categorías en las respuestas de los profesores

En muchos casos se da más de una categoría para la pregunta pues hay profesores que definían, por ejemplo, la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto y, además como una razón de cambio. Por otro lado, algunos profesores preferían comenzar por la actividad y después entregar una definición que surgiera de la misma. Los dos profesores que no respondieron en derivada e integral resultaron ser los mismos.

Para el concepto de límite se dieron tres casos donde los profesores lo definirían usando la notación formal ϵ - δ , dos para funciones y uno para sucesión dando cuenta de una definición más cercana al saber sabio en el nivel escolar. También se destaca el obstáculo epistemológico de considerar el paso al límite como una tendencia o aproximación.

Se dan dos casos que abordan el concepto de manera intuitiva a través de la divisibilidad infinita lo que está más acorde al saber a enseñar planteado en el programa del MINEDUC (2021). Para los límites laterales los profesores consideraron actividades de completar tablas acercándose por valores desde la derecha y desde la izquierda. También se propone analizar las gráficas de algunas funciones para visualizar diferentes formas de acercamiento. Sin embargo, no mencionan el uso de Geogebra en tanto que sí lo hacen con los conceptos de derivada e integral

Respecto del objeto derivada solo dos profesores presentaron el concepto a través de la definición formal como límite, saber sabio, pero después en las actividades pedían encontrar la pendiente de la recta tangente en un punto sin decir cómo relacionan la definición dada con la interpretación geométrica.

La mayoría de los profesores (8 de 11) explicaría el concepto como la pendiente de la recta tangente por medio del análisis de gráficos de funciones usando Geogebra, es decir por medio de una actividad y no con la definición formal. Un profesor plantea analizar gráficos de distancia versus tiempo en donde la derivada representa la velocidad. Esto es más acorde al programa de MINEDUC en donde se plantea describir la derivada como función de pendientes de rectas tangentes en una segunda actividad, pues la primera propuesta por el programa es considerar la derivada como razón de cambio. Además, esta idea para derivada asociada a la pendiente se corresponde con el saber a enseñar y responde también a uno de los problemas que dieron origen a la derivada.

En cuanto al concepto integral, en general se dieron dos tipos de propuestas de enseñanza, la integral como antiderivada en donde se pide calcular la primitiva de algunas funciones y como área bajo la curva. Sin embargo, en esta última se distinguen dos miradas, una que lo hace a partir de sumas de Riemann, saber sabio, y otra que lo hace de manera más intuitiva usando el método exhaustivo para calcular el área de un círculo o mediante la suma de las áreas de rectángulos que dividan la superficie bajo la curva. Esta segunda mirada se corresponde con el saber a enseñar y la propuesta de MINEDUC. Se destaca el uso de Geogebra para estimar el área bajo la curva usando sumas superiores e inferiores de rectángulos.

CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos es posible observar que la tendencia a definir los conceptos de límite, derivada e integral de una manera formal está presente en muchos profesores seguido de ejercicios y actividades tradicionales, como el cálculo de primitivas o área bajo la curva en el caso de las integrales o del cálculo de la pendiente de la recta tangente dadas ciertas funciones, principalmente algebraicas. En este sentido se asume la definición de derivada e integral como un determinado límite infinito pasando por alto el hecho de que históricamente el concepto formal de límite es muy posterior a la forma en que surgieron los conceptos de derivada e integral y que por tanto se pueden introducir sin acudir de forma inmediata al concepto de límite.

En general, el uso de la geometría dinámica se realiza principalmente para visualizar la idea contenida en el concepto. La utilización de Geogebra, y no otra herramienta digital, es también común a todos.

Es de notar también que hubo profesores que no respondieron sobre los conceptos de derivada e integral, incluso algunos declaraban que no sabrían cómo definir dichos conceptos o qué tipo de actividad podrían llevar al aula escolar. Esto puede indicar que no recuerdan mucho de dichos conceptos o que perciben que su enseñanza a nivel escolar debe ser diferente a su formación disciplinar recibida, pero se ven sobrepasados al tener que mostrar una propuesta.

Se espera que este estudio evidencie la manera en que profesores de matemática en ejercicio enfrenta la enseñanza del cálculo a la luz de las nuevas exigencias curriculares en Chile y al mismo tiempo promueva la reflexión no solo sobre la transposición didáctica de los objetos límite, derivada e integral, sino que también sobre el rol que tiene cada uno de ellos en la estructuración de los cursos de cálculo para la enseñanza escolar.

Referencias

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Baeza, A., Córdova, C., García, M. (2010) et al. *Manual esencial estadística, probabilidad y precálculo*. Santiago, Chile: Santillana del Pacífico
- Bárcenas, D. (2006). *La integral de Lebesgue un poco más de 100 años después*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XIII, No. 1
- Bravo, S. y Cantoral, R. (2012). Los libros de texto de Cálculo y el fenómeno de la Transposición Didáctica. *Revista Educación Matemática*, 1, (1)
- Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique
- Contreras, A., Luque, L. y Ordoñez, L. (2003). Una perspectiva de la enseñanza-aprendizaje de la continuidad y la derivada de una función en bachillerato y universidad. *Revista de Educación*, 331, (pp. 399-419).
- Courant, R. (1996). Introducción al cálculo y al análisis matemático. México: Ed. Limusa, Vol. 2, 6ª reimpresión. (Primera versión en alemán en 1927).
- Hitt, F. (2013). El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo: Infinito potencial versus infinito real. *Revista de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, El Cálculo y su Enseñanza*, 4, 103-122. Obtenido de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/
- MINEDUC. (2021). *Matemática. Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales para Formación Diferenciada 3º y 4º Medio*. Santiago de Chile: Autor
- Pinto, I., Parraguez, M. (2013). *Una comprensión de la derivada desde los modos del pensamiento*. *Revista Chilena de Educación Matemática, RECHIEM*, Volumen 7 N° 1 (2013). ISSN nº 0718-1213
- Sánchez-Matamoros G., García M., y Llinares S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.
- Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la Enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12(3): 355-382.
- Selden, J., Mason, A. y Selden, A. (1994). Even good calculus students can't solve non-routine problems. En Kaput, J. y Dubinsky, E. (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning*. 3, 19-26.
- Yusof, M. y Tall, D. (1999). Changing attitudes to university mathematics through problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 67-82.

UNA MIRADA AL SENTIDO NUMÉRICO DE PROFESORES CHILENOS

Macarena Reyes Bravo, Valeria Randolph Veas, Sara Tarisfeño Vásquez

En el contexto de las Jornadas Regionales de Educación Matemática en Chile se realizó un taller sobre sentido numérico a profesores que realizan clases de matemática, mayormente en educación básica. Inicialmente, se piloteó un instrumento cuyos reactivos miden componentes del sentido numérico con el propósito de evaluar la comprensión de los números y las operaciones de los profesores participantes, y su inclinación a usar dicha comprensión en las justificaciones entregadas a sus respuestas. Los resultados muestran que predomina el uso de reglas; sin embargo, se obtienen respuestas basadas en sentido numérico. Las evidencias entregan información sobre esta noción, lo que puede orientar el énfasis de la formación inicial y continua sobre los números y las operaciones del profesorado.

Sentido numérico, componentes del sentido numérico, profesores de educación básica

INTRODUCCIÓN

No podríamos poner en duda la importancia de la enseñanza y el aprendizaje de los números y las operaciones en los primeros años de escolaridad, considerando su incidencia en la formación de niños que logran desenvolverse en la sociedad. Es tal su alcance que, en Chile, la carga curricular del eje Números y Operaciones —1° a 6° año básico— abarca el 45% de los Objetivos de Aprendizaje, en contraste a los cuatro ejes temáticos restantes.

En esa línea, quienes enseñan matemática tienen la responsabilidad de tener un amplio conocimiento sobre el tema. Este estudio examina el sentido numérico de profesores chilenos en ejercicio en el contexto de un taller realizado en las Jornadas Regionales de Educación Matemática en Valparaíso durante el año 2020, cuyo desempeño laboral mayormente se ubica en educación básica. El propósito es evaluar las respuestas del profesorado frente a situaciones que promueven el uso del sentido numérico, analizando las justificaciones de sus decisiones.

SENTIDO NUMÉRICO

El sentido numérico se considera un término polisémico pues posee distintas acepciones dependiendo del campo que lo investigue. Whitacre, Henning y Atabaş (2020) realizan una revisión sistemática de la literatura con el fin de desenredar las concepciones de este término. En esa labor identifican tres constructos, siendo uno de ellos el sentido numérico maduro.

De acuerdo a lo descrito por los autores, esta noción es la más investigada por el campo de la educación matemática. Los estudios se centran en estudiantes de primaria, secundaria y futuros profesores, considerando en las investigaciones números de varios dígitos y el sistema numérico de los números racionales.

Esta comunicación considera el sentido numérico maduro como “la comprensión general de una persona sobre el número y las operaciones junto con la capacidad e inclinación de usar esta comprensión de manera flexible para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para manejar números y operaciones” (McIntosh, Reys y Reys, 1992, p. 3).

Las investigaciones sobre sentido numérico acentúan su mirada en estructuras conceptuales subyacentes denominadas componentes, asociadas a términos como comprensión general, inclinación, expectativa, flexibilidad. Un ejemplo de ellas es el uso de puntos de referencia para realizar comparaciones entre números o al efectuar estimaciones de la medida de un objeto. Para este caso, las componentes consideradas son las expuestas por Yang y Sianturi (2020), debido a su reciente publicación y a que el primer autor tiene una vasta trayectoria en el tema.

C1: Comprender el significado básico de números y operaciones, implica comprensión profunda de los números y las operaciones considerando el sistema de numeración y el sistema numérico en que habitan (naturales, enteros y racionales en educación básica).

C-2: Reconocer el tamaño de los números, logrando comparar y ordenar algunos números flexiblemente, sin depender de algoritmos estandarizados.

C-3: Utilizar múltiples representaciones de números y operaciones, abarcando la comprensión profunda de las representaciones numéricas —pictóricas o simbólicas— y los conceptos que estas involucran.

C-4: Reconocer el efecto relativo de las operaciones en los números, identificando el efecto de las cuatro operaciones básicas en los cálculos efectuados.

C-5: Juzgar la razonabilidad del resultado de un cálculo, al resolver problemas numéricos aplicando estrategias de cálculo mental y/o estimación, juzgando la razonabilidad de los resultados obtenidos.

METODOLOGÍA

Se presenta un estudio exploratorio de corte cualitativo, particularmente un estudio de caso con profesores en ejercicio, ya que implica la investigación “de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (Stake, 2007, p.11). La información obtenida tributa al estudio doctoral de la autora principal, puesto que la actividad realizada permite pilotear ítems de sentido numérico que han sido aplicados en otros países.

El instrumento fue respondido por 76 profesores en ejercicio de diversas regiones del país, al iniciar el taller mencionado previamente. La asistencia se vio favorecida debido a que la modalidad del taller fue virtual, considerando el contexto de crisis sanitaria que se vive actualmente. El instrumento se diseñó en Google Forms y constó de 6 preguntas de selección única, requiriendo en dos casos la justificación de su respuesta. Cada pregunta contó con un tiempo determinado y con espacio para contestar en el caso de ser necesaria la justificación de sus decisiones. Para esta aplicación, se solicitó no utilizar papel, lápiz ni calculadora para responder.

Las preguntas fueron adaptadas de diversos instrumentos aplicados internacionalmente (Cheung y Yang, 2018; Yang y Sianturi, 2020; Almeida, Bruno y Perdomo, 2014). Las respuestas a preguntas de selección fueron clasificadas en correctas e incorrectas. Las justificaciones fueron interpretadas por las tres investigadoras —individualmente en primera instancia y luego contrastadas grupalmente— adaptando las categorías de sentido numérico empleadas por Almeida, Bruno y Perdomo (2014) en su estudio efectuado a estudiantes de Licenciatura en Matemática en España. Estas son: basadas

en sentido numérico; basado en reglas; razonamiento incompleto o poco claro; y razonamiento erróneo.

RESULTADOS

Para esta comunicación se ha considerado el análisis de las dos primeras situaciones planteadas a los profesores participantes, pues solicitaban una justificación a la respuesta entregada, lo que enriqueció su análisis.

a) Primera situación

En relación a la primera situación, que se presenta en la Figura 1, las opciones de respuestas que se propusieron a los participantes fueron “Tomás”, “Juan” y “No puedo determinarlo”. Los porcentajes que se obtuvieron a partir de las frecuencias de elección para cada una de las alternativas alcanzaron un 8%, 92% y 0% respectivamente, siendo “Juan”, en consecuencia, la respuesta mayormente seleccionada por los participantes.

En una maratón, Tomás corre $\frac{4}{9}$ km y Juan $\frac{3}{5}$ km. ¿Quién corre más?

Figura 1. Primera situación.

Respecto a las justificaciones, los profesores participantes evidencian distintos argumentos que revelan que una minoría de ellos utiliza como estrategia el sentido numérico. La Tabla 1 muestra la clasificación de dichas justificaciones considerando las categorías anteriormente mencionadas.

	Juan	Tomás
Basadas en sentido numérico	9	0
Basdas en reglas aritméticas	31	5
Razonamiento incompleto o poco claro	22	1
Razonamiento erróneo	8	0
Total	70	6

Tabla 1: Clasificación de las justificaciones entregadas por los profesores.

En el caso de quienes respondieron correctamente, es decir “Juan”, y justificaron mostrando sentido numérico, se encontraron respuestas como “ $\frac{4}{9}$ es menor que $\frac{1}{2}$ mientras que $\frac{3}{5}$ es mayor que $\frac{1}{2}$ de km, por tanto, corre más Juan”; “Estimé cuál de las fracciones era aproximada a 0,5. Tomás corrió menos de la mitad y Juan más de la mitad”. En los ejemplos presentados se observa que los profesores activan sus conocimientos sobre la magnitud de los números y utilizan puntos de referencia ($\frac{1}{2}$, la mitad y 0,5) para realizar la comparación, activando la componente C-2.

Quienes respondieron correctamente también, pero utilizaron mayormente reglas aritméticas, evidencian respuestas como “multipliqué cruzado y escogí es mayor”; “amplifiqué las fracciones y luego vi cuál de ellas era más “grande””; “el cociente de Juan es mayor que el de Tomás”. Se

identifica en estas respuestas la utilización de algoritmos estandarizados para encontrar la solución. Si bien aciertan en la solución del problema, estos ítems pudieron ser resueltos sin la utilización de lápiz y papel, por lo que, si los números no hubiesen sido dígitos, las estrategias por las que optaron se hubieran complejizado.

Sumado a lo anterior, un gran número de respuestas correctas presentaron justificaciones incompletas o poco claras, tales como *“me hice la imagen mental del trayecto recorrido y comparé las dos imágenes”*; *“Porque la distancia es mayor”*; *“imaginé la gráfica”*. Independiente que su respuesta fue correcta, la justificación entregada no permite identificar el razonamiento puesto en juego. Algunos posibles escenarios de explicación para esta falta de justificación podrían estar relacionados con un tiempo insuficiente para dar la respuesta, la no resolución de la situación de manera mental, o con una falta de conocimiento para realizar justificaciones, lo que podría hacer pensar que, entonces, la solución al problema incluso pudo ser al azar.

Finalmente, se identifica que un grupo de profesores contesta correctamente con errores en su argumento. Algunos ejemplos recolectados son *“Porque el denominador es más pequeño y porque al dividir cruzado da un valor más alto”*; *“porque a Juan le faltan tan solo 2 partes del total recorrido, mientras que a Tomás le faltan 5 del total”*; *“numerador más chico es mayor”*. En estas respuestas se logran identificar errores clásicos como comparar solo numeradores ya que se concibe la fracción como dos números naturales separados por una línea; o algunas convenciones mal empleadas como que si el denominador es un número menor la fracción será mayor (funciona para las fracciones unitarias).

Respecto a las respuestas incorrectas, 5 de 6 profesores justifican utilizando el algoritmo de la multiplicación cruzada. La otra respuesta obtenida está incompleta y no se puede determinar el objeto de ella.

b) Segunda Situación

De la misma forma que se analizó la primera situación, se hizo con la segunda, la que se presenta en la Figura 2.

Una botella de agua de 600 ml cuesta 1800 pesos, mientras que una botella de agua de 1500 ml cuesta 3500 pesos. ¿Cuál de las botellas es más rentable?

Figura 2. Segunda situación.

Las posibles respuestas a esta situación fueron “Botella de 600 ml”, “Botella de 1500 ml” y “No puedo determinarlo”. Los porcentajes obtenidos en relación a la frecuencia de elección de cada respuesta fueron 16%, 83% y 1% respectivamente.

Respecto a las justificaciones, la Tabla 2 muestra la clasificación de respuestas correctas e incorrectas, considerando las categorías utilizadas para este análisis.

	Botella de 600 ml	Botella de 1500 ml
Basadas en sentido numérico	2	25
Basdas en reglas aritméticas	7	21
Razonamiento incompleto o poco claro	3	11
Razonamiento erróneo	0	6
Total	12	63

Tabla 2: Clasificación de las justificaciones entregadas por los profesores.

Respecto a quienes contestaron correctamente, y sus respuestas estuvieron basadas en sentido numérico, se encuentran respuestas como *“la botella de 1500 ml es más rentable ya que si compro dos botellas de 600 ml tendría que gastar 3600 pesos y solo obtendría 1200 ml, que es menos que 1500 ml”*; *“Si comprara 2 botellas de 600ml tendría 1200 ml por 3600 pesos, por lo cual es conveniente comprar la de 1500ml por 3500 pesos. Obtengo 300ml más por 100 pesos menos”*. En estos ejemplos se puede observar que los profesores no tienen necesidad de calcular el precio exacto para la misma cantidad de agua, sino que juzgan la razonabilidad de las alternativas ofrecidas usando estimaciones y cálculos mentales, activando la componente del sentido numérico C-5.

En relación a quienes contestaron correctamente y basaron sus respuestas en reglas aritméticas, se presentaron justificaciones como *“Porque el cociente entre ambos (valor y ml), es menor el valor que resulta en la botella de 1500 ml”*; *“Calculando el valor unitario de los ml”*; *“Regla de tres”*. Estas afirmaciones indican la necesidad de comparar el precio por la misma cantidad de ml en cada botella, realizando procedimientos convencionales.

El resto de quienes contestaron correctamente entregaron respuestas incompletas o poco claras como *“Son más ml por menos plata”*; o respuestas erróneas como *“multipliqué 1800 por 3 para encontrar el valor de ml más cercano y me paso del valor de 3500”* indicando una dificultad en la comprensión de la situación.

Sobre quienes contestaron incorrectamente, se identifican dos justificaciones basadas en sentido numérico correcto, pero que seleccionan erradamente la alternativa. También hay presencia de respuestas basadas en reglas pero que cometen algún error en la interpretación o en los cálculos efectuados, por ejemplo *“Dividiendo la cantidad de ml por el valor, para así conocer y comparar el valor de cada ml”*. Finalmente, se identifican justificaciones incompletas o poco claras como *“Analizando, graficando las botellas”*.

CONCLUSIONES

El objetivo de esta comunicación es evaluar el sentido numérico de 76 profesores chilenos participantes de un taller sobre el tema, analizando sus justificaciones frente a dos situaciones en que subyacían dos componentes de este constructo.

Los resultados mostraron, en ambas situaciones, un alto porcentaje de respuestas correctas, aun cuando en la aplicación se controlaron variables como el tiempo y el uso de lápiz y papel. En la primera situación —comparación entre fracciones— se observa que el profesorado tiende a utilizar

mentalmente algoritmos establecidos, sin recurrir al sentido numérico que podría simplificar la búsqueda de la respuesta. En el caso de la segunda situación que implicó juzgar la alternativa más conveniente, se observa mayor utilización de sentido numérico ya que la mayoría de quienes responden correctamente realizan estimaciones. Una razón puede ser que este contexto es más cotidiano que la comparación de fracciones, por lo que tienen certeza que el camino seleccionado llevará a buen puerto.

La investigación entrega información enriquecedora sobre el sentido numérico, considerando la carencia de estudios sobre el tema en el país. Los hallazgos se condicen con los encontrados por investigadores internacionales y sirven de antecedente para continuar ahondando en la investigación sobre este constructo en distintos niveles educativos.

Referencias

- Almeida, R., Bruno, A., & Perdomo Díaz, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de Las Ciencias*, 32(2), 9–34. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.997>
- Cheung, K. L., & Yang, D. C. (2018). Examining the differences of Hong Kong and Taiwan students' performance on the number sense three-tier test. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(7), 3329-3345.
- McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2–8.
- Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Whitacre, I., Henning, B., & Atabaş, Ş. (2020). Disentangling the Research Literature on Number Sense: Three Constructs, One Name. *Review of Educational Research*, 90(1), 95-134. doi:10.3102/0034654319899706
- Yang, D. C., & Wu, W. R. (2010). The study of number sense: Realistic activities integrated into third-grade math classes in Taiwan. *Journal of Educational Research*, 103(6), 379–392. <https://doi.org/10.1080/00220670903383010>
- Yang, D. C., & Sianturi, I. A. J. (2020). Sixth Grade Students' Performance, Misconception, and Confidence on a Three-Tier Number Sense Test. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1–21. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10051-3>

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA DESARROLLAR COMPONENTES DE LA INFERENCIA ESTADÍSTICA INFORMAL

Soledad Estrella, Tamara Rojas, Rodrigo Salinas

El estudio presenta los resultados de la implementación de una de las cuatro clases diseñadas en un Grupo de Estudio de Clases bajo una Ingeniería Didáctica que promueven el razonamiento inferencial informal, RII. Esta clase fue implementada en dos escuelas de la Región de Valparaíso para estudiantes de 12 – 13 años con el objetivo de desarrollar en ellos componentes relacionados al RII. Para el análisis de los datos se crearon categorías que permitieron clasificar las respuestas de los estudiantes en distintos niveles de desarrollo según los componentes del RII. Los resultados muestran que la clase planificada dentro de una secuencia de aprendizaje permite que los estudiantes expresen algunos componentes de la inferencia estadística informal al responder a situaciones de incertidumbre.

Didáctica de la Estadística, Inferencia informal, Estudio de Clases, ISI, RII

ANTECEDENTES

En la actualidad las personas constantemente están enfrentadas por los distintos medios de comunicación o redes sociales, a gráficos, diagramas, tablas, u otras representaciones de datos. Por lo que urge que la ciudadanía pueda leer y desarrollar las habilidades que le permitan interpretar la información que entregan dichos datos. El estudio de la estadística proporciona a las personas las herramientas y las ideas para enfrentarse inteligentemente a la información numérica que emerge del mundo cotidiano (del Pino y Estrella, 2012; Garfield y Ben-Zvi, 2008).

Una de las áreas de la Estadística, la inferencia, favorece el desarrollo del razonamiento estadístico. Esta involucra conceptos como definiciones, procedimientos, fórmulas; y contenidos propios como las pruebas de hipótesis, estimaciones, e intervalos de confianza (Cf., Estrella y González-Ruiz, 2021), siendo el razonamiento inferencial formal (RIF) uno de los niveles más altos del razonamiento inferencial (Ben-zvi y Garfield, 2004). La inferencia estadística informal (ISI, por sus siglas en inglés) permite estudiar expresiones cualitativas de incertidumbre en lugar de cuantitativas y familiarizar a estudiantes de primaria con procesos involucrados en el razonamiento estadístico inferencial informal (RII) y con el razonamiento estadístico en general (Bakker y Derry, 2011; Estrella, 2017, 2018; Makar y Rubin 2018). De acuerdo al paradigma ISI, Makar y Rubin (2018) señalan 5 componentes fundamentales y sobre el cual se basa la presente investigación, estos son: ver más allá de los datos, uso de un lenguaje con incertidumbre, uso del contexto, consideración del agregado y el uso de la evidencia basada en los datos.

Con el fin de identificar la presencia de componentes de la inferencia estadística informal, y considerando responder a las exigencias del currículum en el eje de estadística y probabilidades y al contexto de enseñanza online, nos preguntamos, ¿los estudiantes de grado 7 logran realizar inferencias informales a través de lecciones que promueven el análisis de muestras de datos?

METODOLOGÍA

Sujetos. Esta investigación es de tipo cualitativa, los sujetos de estudio son 70 estudiantes, quienes cursaban el grado 7, pertenecientes a dos establecimientos, ambos de la Región de Valparaíso, el Colegio B de Playa Ancha, conformado por 32 estudiantes en modalidad mixta; y el Colegio A de Limache, conformado por 38 estudiantes, únicamente varones. En ambos colegios las edades fluctuaban entre los 12 y 13 años. Los datos se recabaron con las producciones fotografiadas de las respuestas de los estudiantes y por los videos de las clases.

Método. Se realizó una articulación la Ingeniería Didáctica, ID, (Artigue, 1995) y el Estudio de Clases, EC, (Isoda y Olfos, 2009, 2021; Olfos, Morales y Estrella, 2015). Esta articulación se produce porque el ciclo de ID permite el análisis de resultados obtenidos, en cada una de las actividades de aprendizaje centrales de cada sesión. Mientras que el EC nos permite generar un diseño de esta clase y la elaboración de un producto mejorado final por cada clase, posterior al análisis de resultados. A continuación se presenta un esquema que resume la articulación realizada entre ID y EC, y que muestra como la Ingeniería Didáctica queda contenida dentro del proceso de Estudio de Clases, considerando la elaboración de un producto final de la clase fuera del proceso de ID, pero en el cual se consideran los análisis realizados.

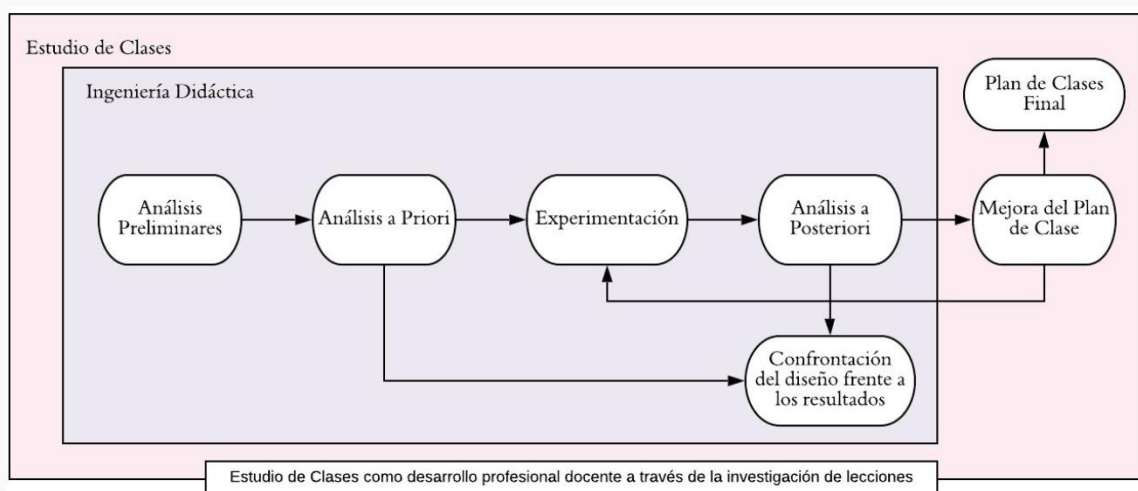


Figura 1: Articulación entre ID y Estudio de Clases.

El diseño de la clase contempla el currículo matemático escolar, el marco conceptual ISI y artículos científicos que dieran cuenta de variadas propuestas de aprendizaje. Para la clase planificada se realizó una adaptación del problema presentado en Watson (2003) y aplicado por Estrella (2010). Las modificaciones realizadas a la presentación del problema tuvieron el propósito de considerar los procesos de enseñanza y aprendizaje en modalidad online.

Tarea. Para la primera lección que se presenta en este escrito, se consideró desde el currículo nacional el Objetivo de Aprendizaje OA16, Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera manual y/o con software educativo” (MINEDUC, 2015). Con foco en el quinto indicador que señala: “Verbalizan y comunican información presentada en gráficos”.

Esta lección se centra en una representación de datos que permite a los estudiantes responder a la pregunta principal: ¿Cómo llegará Tom a clases al día siguiente? (ver Tabla 1 y Figura 2). Esta representación usa elementos icónicos para presentar los datos de la variable (tipos de transporte) con cinco categorías asociadas; y la variable dicotómica género (niña o niño); presenta una escala en el eje horizontal que se asocia a la frecuencia del número de niños que asiste a la escuela en un día determinado.

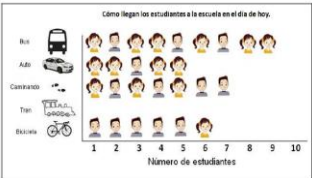
Actividad de Enseñanza	Conceptos	Componentes de Razonamiento inferencial informal	Actividad de Aprendizaje	Recursos
Presenta un gráfico de datos con un dato faltante para realizar una predicción en un escenario de incerteza	Variable, categorías de la variable; datos representados; mayoría	Argumentar con evidencia basada en la mayoría de los datos graficados; generalizando más allá de ellos y uso de lenguaje con incertidumbre	Predecir en qué categoría se encuentra el dato faltante, más allá de los datos proporcionados en una representación de datos	

Tabla 1: Resumen del diseño de la clase 1 planificada en un Grupo de Estudio de Clases.

La lección promueve valorar los datos en una situación incertidumbre, para generalizar más allá de los datos (Figura 2), usando estos como evidencia al responder la pregunta central. Para este propósito se presenta un video con la situación de Tom y la pregunta para que los estudiantes respondan por medio de formularios de Google.



Figura 2: Representación de los datos presentada a los estudiantes. Fuente: Estrella 2010.

Para lograr categorizar las respuestas de los estudiantes se levantaron categorías con códigos. La Tabla 2 resume las categorías levantadas de acuerdo a los componentes del RII, explicitando ejemplos de argumentos de estudiantes en la clase.

Código	Descripción	Ejemplo
5	Realiza una predicción estadística basada en los datos representados. Se utilizan expresiones con incertidumbre asociada a los datos	“En Bus es más probable porque la mayoría de los niños toma el bus” “Probablemente en bicicleta, porque la mayoría de los niños usan la bicicleta para ir a la escuela” “Posiblemente en bus porque $\frac{1}{3}$ de los niños va en bus” más probabilidades”.
4	Realiza una predicción estadística basada en los datos representados considerando “la mayoría”. No se utilizan expresiones con incertidumbre asociada a los datos.	“Bicicleta, más niños usan las bicis para ir a la escuela” “Bus, porque la mayoría va en bus” “[Bus] porque es seguro, además que muchos escogieron el bus”
3	Usa los datos representados, pero no generaliza más allá de los datos ya que sus argumentos se basan en buscar un equilibrio, o lo contrario a la mayoría. Cualquier cosa puede pasar. No se utilizan expresiones con incertidumbre asociadas a los datos	“Tren porque hoy no hay nadie en el tren” “En auto porque allí solo hay un niño” “Puede ser cualquiera depende de lo que él desee”

2	Realiza afirmaciones sin usar los datos como evidencia, se basa en patrones numéricos o narra historias, sus respuestas se basan en experiencias propias o interpretaciones erróneas de la situación. No utiliza expresiones con incertidumbre asociadas a los datos.	“Camina, el es el único muchacho al final de la línea de los que caminan” “En tren porque vive lejos” “Auto así no se resfría nuevamente” “Bus porque así es como yo llego a la escuela”
1	No utiliza los datos como evidencia para realizar afirmaciones. Manifiesta reticencia a predecir o interactuar con la representación. No se utilizan expresiones con incertidumbre asociadas a los datos	“Del mismo modo que lo hace cualquier otro día” “No lo sé porque no hay información sobre Tom”

Tabla 2: Categorías con descripción de los componentes de ISI y ejemplos de argumentos de estudiantes.

RESULTADOS

El análisis de los datos muestra que en el Colegio A la mayoría de los estudiantes responden en el ámbito de los códigos 2 y 3. Del total del curso, el 50% de los estudiantes respondieron con argumentos que se ubican en la categoría 2, mostrando que estos estudiantes no realizan inferencias informales, ya que en sus argumentos no se logran observar componentes del RII. En la categoría 2 los estudiantes narran historias ingenuas e incluyen otros factores, como por ejemplo, que el tren estaba en mantenimiento, el tráfico, la distancia o la rapidez de cada medio de transporte, datos que no son posibles de extraer desde la representación. Otras respuestas de los estudiantes quedan en la categoría 3, esto significa que utilizan los datos como evidencia, pero no logran generalizar más allá de los datos, ni utilizan un lenguaje con incertidumbre para responder al problema central.

Las respuestas del 50% de los estudiantes del colegio B se clasificaron mayoritariamente en la categoría 2, esto es, no realizan inferencias informales. En sus respuestas no utilizan los datos como evidencia, acuden a narrar historias con los medios de transportes, lo que influye en el uso de un lenguaje con certezas. Incluyen además variables como la pandemia y la posibilidad de contagiarse usando expresiones como “ [Llega en auto] Porque es más seguro de que no se contagie”, argumentos que no se puede extraer a partir de la representación de datos y por ende la componente “generalización más allá de los datos” no cobra sentido en los argumentos.

CONCLUSIONES

A partir del análisis realizado a las evidencias entregadas y videos de la clase, para ambos establecimientos, la lección permitió a un grupo menor de estudiantes expresar las componentes de la inferencia estadística informal. En ambos colegios hubo respuestas de estudiantes que pudieron ser clasificadas en la categoría 5, puesto que expresaban el uso de los datos proporcionados y generalizaban más allá de esos datos. Sin embargo, la componente del RII más

débil que se presentó en los estudiantes de ambos cursos fue la falta de un lenguaje que expresase la incertidumbre.

En concordancia con Bakker y Derry (2011), consideramos que si los estudiantes tienen mayor familiarización con la inferencia estadística informal a través de la enseñanza escolar, ellos podrían llegar a comprender los procesos involucrados en el razonamiento estadístico inferencial informal y en el razonamiento estadístico en general.

Referencias

- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 33, 60.
- Bakker, A., & Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1–2), 5–26.
- Ben-Zvi, D., & Garfield, J. B. (Eds.). (2004). The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking (pp. 3-16). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer academic publishers.
- del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: Relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 49(1), 53-64.
- Estrella, S. (2010). Instrumento para la evaluación del conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de primaria. (Tesis de magister publicada). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso: Chile.
- Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En Salcedo, A. (Ed.), *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI (173-194)*. Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Universidad Central de Venezuela.
- Estrella, S. (2018). Data representations in early statistics: Data sense, meta-representational competence and transnumeration. In *Statistics in early childhood and primary education* (pp. 239-256). Springer, Singapore.
- Estrella, S. & González-Ruiz, I. (2021). Intervalo de confianza como modelo estadístico en tareas de alta demanda cognitiva en contexto de salud. En *Aportes a la práctica docente desde la Didáctica de la Matemática. Modelación matemática*. Editorial GRAO. (En Prensa).
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice. Dordrecht, The Netherlands: Springer
- Isoda, M. (2020). *Teaching Multiplication with Lesson Study: Japanese and Ibero-American Theories for International Mathematics Education*. Springer Nature.
- Isoda, M., & Olfos, R. (2009). El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Makar, K., & Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. In *International handbook of research in statistics education* (pp. 261-294). Springer, Cham.
- Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8 (1).

- MINEDUC (2015). Bases Curriculares Séptimo Básico a Segundo Medio. Ministerio de Educación. Descargado de: https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-37136_bases.pdf
- Olfos, R., Morales, S., & Estrella, S. (2015). Clase pública de un estudio de clases de estadística: Una instancia de cambio de creencias en los profesores. *Revista Electrónica Educare*, 19(3), 339.
- Watson, J., y Kelly, B. (2003). Inference from a pictograph: Statistical literacy in action. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity* (Proceedings of the 26th annual conference of the MERGA, pp. 720-727). Sydney.



EXPERIENCIAS DE AULA

ALFABETIZACIÓN DIGITAL EN ADULTOS MAYORES. UNA EXPERIENCIA EN MODALIDAD VIRTUAL EN EL CONTEXTO DEL APRENDIZAJE SERVICIO

Mauricio Moya Márquez.

La alfabetización digital en adultos mayores es una experiencia relevante en un mundo altamente tecnologizado, la cual ocurre normalmente de manera presencial en una sala de laboratorio con apoyo directo de los tutores que están muy cercanos ellos. Sin embargo, la emergencia sanitaria ha generado la necesidad de recurrir a la virtualidad para que los adultos no pierdan la oportunidad de seguir aprendiendo sobre las tecnologías digitales. Es así como se propone compartir una experiencia de 2020, en la que participaron estudiantes de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa UCSH junto a los docentes a cargo, en el contexto de la Práctica Inicial II y donde se utiliza la metodología de Aprendizaje Servicio. Los estudiantes desarrollaron la labor de tutores y se hicieron cargo de los adultos mayores en sesiones sincrónicas de una hora a la semana durante octubre y noviembre. El análisis se centra en la planificación, implementación y reflexión de la experiencia.

Alfabetización digital, adultos mayores, aprendizaje servicio, clases en línea.

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es compartir una experiencia desarrollada por estudiantes de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa (PMIE) de la Universidad Católica Silva Henríquez (UCSH), a través de su Práctica Inicial II, en la cual el foco de atención fue la alfabetización digital en adultos mayores, considerando que estos estudiantes tienen en su formación asignaturas relacionadas con informática educativa y, por ello, competencias para realizar una tutoría inicial respecto de temas como fundamentos básicos del uso del computador, uso de Internet y las redes sociales que permiten estar conectados con los demás, a través de diferentes formatos y dispositivos. En el contexto del Aprendizaje Servicio (AS), los estudiantes desarrollan un trabajo de planificación, implementación y reflexión durante la experiencia. Por cierto, la calidad del trabajo realizado fue monitoreada por los docentes a cargo de la práctica.

El desafío fue desarrollar la experiencia de manera virtual, a través de la plataforma Zoom, donde los adultos participantes debieron conectarse desde sus hogares con diferentes niveles de compañía familiar para el uso del computador o celular. Por su parte, todo el apoyo tutorial de los estudiantes en práctica se realizó también desde sus hogares y sus propias conexiones y dispositivos.

Al ser una experiencia de AS, uno de los focos del trabajo estuvo puesto en la reflexión que fue sistematizada en ciclos, acorde a la propuesta de *ABC Lab* de la UCSH, entidad que supervisa la implementación de la metodología de AS.

ANTECEDENTES

La situación sanitaria en Chile, con motivo de la pandemia por el virus COVID – 19, ha obligado la suspensión de todo tipo de clases presenciales y los establecimientos han debido implementar una modalidad a distancia. Dicha situación ha significado un gran desafío para docentes, estudiantes y sus familias. Del mismo modo, instituciones asociadas a programas para el adulto mayor han tenido que suspender y buscar alternativas remotas para poder seguir atendiendo a las personas.

Acorde a la literatura existen diferencias entre los conceptos de “educación a distancia”, “educación virtual” y “educación en línea”, entre otros. Para efectos de esta experiencia de aula se puede definir la educación en línea (online) como:

... aquella en donde los docentes y estudiantes participan e interactúan en un entorno digital, a través de recursos tecnológicos haciendo uso de las facilidades que proporciona el internet y las redes de computadoras de manera sincrónica... Para la educación en línea podemos tomar como ejemplo a las clases que se imparten mediante sesiones de Zoom, ... (Edu News, 2020)

El propósito es que se logre un ambiente educativo altamente interactivo, a cualquier hora y desde cualquier lugar (Gallardo, 2007).

Práctica docente y AS

El concepto de práctica claramente tiene que ver con la manera en que un futuro profesor se prepara para el mundo laboral en un centro educacional (Ávila et al., 2018). Es aquí donde se produce una transformación con el fin de alcanzar cierto dominio a partir de la experiencia en las aulas. Flores et al. (2016) señala que este es el espacio para conectar sus saberes con la realidad. Es por ello, que la reflexión toma un rol relevante en toda la carrera docente, lo que significa un proceso de construcción del conocimiento (Ávila et al., 2018).

Sin duda, las prácticas de los futuros docentes también han sufrido una adaptación, ya que su implementación ha debido ser de manera virtual en los establecimientos. Esto además incluye el trabajo con centros comunitarios, lo que permite reforzar aspectos propios de la inclusión.

El AS puede definirse como:

... una metodología educativa que ofrece reconocimiento académico, que integra el servicio comunitario con el currículum de formación profesional y la reflexión estructurada para enriquecer las experiencias educativas, promover el compromiso social activo y contribuir en fortalecer a las comunidades (Aramburuzabala, McIlrath y Opazo, 2019; Jacoby, 1996; Furco, 1996; Sigmon, 1979, citados por Vidal y Opazo, 2020).

La presente experiencia combina los objetivos de la práctica inicial que deben desarrollar los estudiantes con el AS, para finalmente realizar una alfabetización digital con adultos mayores. Desde el programa de Práctica Inicial II, se enfatizan las siguientes competencias (EEMIE, 2019): a) Ejercer una labor docente que responda a las necesidades y características de la comunidad

educativa (...), b) Implementar acciones pedagógicas pertinentes, contingentes y de acuerdo con la planificación elaborada, en coherencia con las necesidades y características de la comunidad (...).

El AS requiere un compromiso concretado en una acción clara de servicio a los demás (Vidal y Opazo, 2020). Si los estudiantes son conscientes de lo que aprenden cuando hacen el servicio, solo pueden expresar gratitud en lugar de esperar que les den las gracias.

Alfabetización digital y educación para adultos

Respecto de la alfabetización digital, se asume que el estudiante debe adquirir competencias básicas en el uso del computador, conocimientos generales del sistema operativo, programas básicos y especialmente los servicios de Internet más usados, tales como la navegación y el uso del correo electrónico (Paz, 2008). A esto se deben agregar, por cierto, las populares redes sociales que permiten conectarse con otros de diversas formas y con muchos propósitos. Puede entenderse la alfabetización digital como un “conjunto de hábitos a través de los cuales se interactúa con las tecnologías de la información y la comunicación para aprender, trabajar, socializar, divertirse, etc.” (Paz, 2008).

Algunos beneficios que otorga la alfabetización digital corresponden, entre otros, a: aumentar la autoestima y ejercitar el cerebro, mejorar la memoria y reforzar los conocimientos adquiridos, a través de los estímulos audiovisuales permiten activar las vivencias y recuerdos (Bolaños y Ordoñez, 2007).

Desde la andragogía acorde a Knowles (1990), se rescatan los siguientes elementos básicos, entre otros: a) Fijar un clima cooperativo de aprendizaje, b) realizar un diagnóstico de las necesidades y de los intereses del adulto, c) diseñar las actividades secuenciales para alcanzar los objetivos, d) ejecutar el diseño seleccionando métodos, materiales, y recursos, e) evaluar la calidad de la experiencia de aprendizaje y replantear objetivos y actividades.

METODOLOGÍA

La experiencia se centra en un caso de estudiantes de la PMIE de práctica inicial II, quienes realizan una intervención de alfabetización digital a través del Programa para el Adulto Mayor de la Municipalidad de Santiago, de manera online. El contacto con este grupo humano se debe a los encargados de Vinculación con el Medio de la UCSH, quienes además facilitaron el soporte tecnológico a través de la plataforma Zoom. En el 2° semestre de 2020, la práctica inicial II estuvo compuesta por dos secciones de 23 estudiantes cada una, a cargo de dos docentes de la Escuela de Educación Matemática e Informática Educativa (EEMIE). Cada sección se hizo cargo de un grupo de adultos mayores (10 a 12), con los que se trabajó aproximadamente 1 hora semanal durante 5 semanas, en dos horarios. La actividad además fue monitoreada por *ABC Lab* y se utilizó el Modelo de Reflexión Colaborativa según los lineamientos de Vidal y Opazo (2020).

Una parte fundamental de la experiencia fue la planificación conjunta de las sesiones. Esto involucró tanto a los docentes como a los estudiantes de práctica, pues esto considera los recursos y materiales de apoyo necesarios para el trabajo. Los estudiantes de práctica inicial II debieron elaborar en equipo diversos materiales como la página web (<https://nbarrar.wixsite.com/alfabetizaciandn>), cápsulas de video y documentos explicativos con el fin de facilitar la tarea de los adultos mayores, especialmente durante el resto de la semana hasta

la siguiente sesión. Entre las dos secciones de estudiantes se conformaron ocho equipos de trabajo. La distribución de temas fue como sigue: 1) Página Web (WIX)/ Google Drive, 2) Fundamentos del PC, 3) Redes sociales 1 (Facebook), 4) Video Bienvenida a la Experiencia, 5) Internet/ búsqueda de información, 6) Correo electrónico, 7) Redes sociales 2 (Instagram/WhatsApp) y 8) Video Despedida a la Experiencia.

Los aspectos centrales del análisis de esta experiencia fueron: a) La planificación, b) la implementación y el avance en las sesiones y c) la reflexión de los estudiantes en los diferentes ciclos semana a semana. Por ejemplo, la planificación para uno de los días fue como sigue:

Sesión	Actividades y contenidos	Reflexión
04.11	- Saludo afectuoso y consulta sobre cómo están los adultos. - Los tutores trabajan con los temas de la semana según ritmo de avance del adulto mayor. - Revisan la comunicación por WhatsApp/ Web WhatsApp. - Los adultos crean su Facebook y realizan una publicación. Se conectan con otros participantes. - Trabajan paso a paso con aquellos/as que van más lento. - Retroalimentan lo aprendido y atienden las dudas. - Tarea: revisan Página Web y practican los aprendido. - Despedida afectuosa y desear una buena semana.	Ciclo 1, patrones

Tabla 1: Planificación para la sesión 04.11.2020

Los estudiantes realizan la experiencia desarrollando el modelo de reflexión a través de **Instagram**. Después de cada sesión y hasta la siguiente, cada uno realiza primero su reflexión en forma individual, luego con su pareja y a continuación realizan una publicación. Todos hacen lo mismo, según el ciclo de reflexión en el que estén. Acorde a Vidal y Opazo (2020, p.10), los ciclos involucrados en el proceso son: a) Previo/activación (antes de comenzar), b) cero/descripción (al comenzar), c) primero, patrones (en la mitad), d) segundo/explicación y proposición (antes de finalizar), e) tercero/ proflexión (después de finalizar la experiencia). Cada ciclo tiene un color distintivo y permite identificar el momento de las reflexiones (Activación/amarillo, descripción/naranja, patrones/ rosado, explicación y proposición/azul, proflexión/verde). Finalmente, en cada ciclo las parejas deben “postear” a las otras reaccionando a las reflexiones que han realizado.

En la siguiente tabla se describen algunos de los ciclos. Notar que para cada ciclo hay un grupo de preguntas centrales que guían la reflexión:

Ciclo	Preguntas centrales	Momento
Cero, descripción	¿Qué ocurre? ¿Quiénes participan? ¿Dónde? ¿Qué características? ¿Qué no ocurrió?, ¿Quiénes no participaron? ¿Dónde no ocurrió? ¿Qué determinantes sociales, económicos, políticos o educativos mantienen y perpetúan el desafío social o la situación problemática? ¿Qué podemos hacer en este trabajo para abordar estos desafíos y no perpetuarlos?	Al comenzar el trabajo y haber establecido un primer contacto con la comunidad.
Primero, patrones	¿Cómo suele ocurrir? ¿Cuáles son las similitudes con otras experiencias que conozcamos? ¿Cómo se aborda el trabajo? ¿Cómo lo abordan las diferentes personas y entidades sociales implicadas? ¿Cómo se utilizan las habilidades y conocimientos de todas las personas implicadas? ¿Cómo se promueve el bien común?	Aproximadamente a la mitad del trabajo.

Tabla 2: Ciclo 0 y 1 de Modelo de Reflexión AS (Vidal y Opazo, 2020)

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Tras haber realizado la experiencia completa de 5 sesiones en línea más el cierre y despedida, algunas de las reflexiones individuales de los estudiantes de práctica fueron las siguientes:

- El trabajo realizado considero que fue bastante tranquilo sin casi ningún inconveniente por nuestra parte solo problemas de tiempo y de nervios, pero más allá de eso nada en especial. (Ciclo 0, naranja, J. R.)
- Siento que nuestro trabajo hasta al momento ha sido bastante bueno. Creo que Juan Carlos confía bastante en nosotras, por lo que él no tiene problema alguno de preguntarnos o señalarnos que en su pantalla le aparece de forma diferente en comparación a nosotras, así mismo nosotras hemos podido salir adelante a pesar de estos obstáculos. (Ciclo 1, rosado, K. M.)
- Pudimos trabajar bien, aunque tuvimos algunos problemas de organización en el sentido de que no nos pusimos de acuerdo quién hablaría y explicaría ciertas partes de la presentación, por lo que nos interrumpíamos a veces. Pero a pesar de todo, pudimos complementar las explicaciones, haciéndolas siempre más claras. (Ciclo 2, azul, M. P.)

Dentro de las reflexiones grupales a través de Instagram se pueden destacar las siguientes:

- Gran parte de las personas que pertenecen a este desafío se presentan cada sesión con ganas de aprender, haciendo las tareas que les entregamos para que las realicen por sí mismos durante la semana, llegando a la próxima sesión comentándonos si es que lograron realizar la tarea o no, recalando qué parte les costó más por realizar. (Ciclo 1, rosado, **tabkess.as**)

- Muchos y muchas participantes buscan mantener el contacto con sus seres queridos y amigos en contexto de pandemia, en la mayoría de los casos lo más fácil y adecuado es por medio de la tecnología, por lo que, hace este desafío muy importante (Ciclo 2, azul, **galactic_cats_nm**).
- El desafío sigue siendo el mismo, pero mientras pasan las semanas el desafío se modifica según lo que aprenden nuestros alumnos. En la educación para que esta sea óptima debe existir un ambiente grato y para conseguir esto la comunicación es esencial, nuestra alumna nos dio las posibilidades para trabajar así, además de lo que somos y de dónde venimos para poder aportar en la formación de la asignatura en cuestión sobre la alumna. Nuestra sociedad necesita estar en constante educación, independiente a la edad de las personas en cuestión ... (Ciclo 3, verde, **the.nabe**)

A partir de la experiencia se pueden establecer algunas conclusiones:

- Es factible desarrollar en línea un curso de alfabetización digital con adultos mayores a través de la plataforma Zoom, a pesar de las dificultades técnicas propias de la experiencia. Todo depende del trabajo adecuado y comprometido de los tutores.
- Los estudiantes comprenden el sentido de la experiencia y el compromiso que requiere. En sus reflexiones se puede observar la manera en que dimensionan el trabajo y cómo los involucra.
- La modalidad de parejas de los estudiantes atendiendo a un adulto mayor es acertado, ya que se crea un ambiente afectivo y de confianza, se facilita la tarea y la reflexión de AS.
- La experiencia mostró de que hay adultos en diferentes niveles, incluso aquellos más avanzados que requieren otros desafíos, pero también están los que necesitan más ayuda para lograr las tareas. El trabajo debe ser personalizado y “paso a paso” en la línea de Knowles (1990) y la planificación debe modificarse según las necesidades y experiencias particulares.
- El trabajo de 1 hora semanal puede ser poco para una tarea como esta, ya que en algunos casos no se alcanzó a trabajar con todos los temas propuestos. No obstante, lo más importante fue que los adultos hayan aprendido algo útil para ellos acorde a sus reales necesidades.
- Finalmente, la reflexión sistemática sobre la experiencia tanto individual como grupal es fundamental.

Como primera experiencia de alfabetización digital virtual, ha cumplido las expectativas. Sin embargo, requiere ajustes y revisar nuevamente la planificación. En esta oportunidad se puso atención en las reflexiones de los estudiantes de práctica que realizaron la labor de tutores. En otra implementación, será pertinente registrar además las percepciones de los propios adultos mayores.

Referencias

- Ávila, J., Moya, M., Díaz, L., y Urbina, M. (2018). Caracterización de las emociones que concurren en estudiantes de pedagogía en matemáticas e informática educativa en el contexto de su práctica profesional. Informe de avance (no publicado) de proyectos (semilla y estudios) 2018. UCSH.

- Bolaños, D., & Ordoñez, P. (2007). *Alfabetización digital estrategias educativas para el desarrollo de competencias básicas en el uso de herramientas informáticas desde la perspectiva andragógica* (Doctoral dissertation, Universidad de Nariño).
- Edu News. (2020, 20 de noviembre). *Educación en línea, virtual, a distancia y remota de emergencia, ¿cuáles son sus características y diferencias?* <https://observatorio.tec.mx/edu-news/diferencias-educacion-online-virtual-a-distancia-remota>.
- EEMIE (2019). Programa de Práctica Inicial II 2019. UCSH.
- Flores, M.; Brunaud, L.; Gutiérrez, M.; Moreno, P.; Ramírez, P. y Yáñez, R. (2016). Lineamientos del eje de prácticas pedagógicas progresivas. *Documento no publicado*. Facultad de Educación. UCSH – Chile.
- Gallardo, S. C. (2007). El constructivismo social como apoyo en el aprendizaje en línea. *Apertura*, 7(7), 46-62.
- Knowles, M. S. (1990). *The adult learner: A neglected species* (4 ed.). Houston: Gulf Publishing.
- Paz, L. E. (2008). Alfabetización digital en el Adulto Maduro una estrategia para la Inclusión Social. *E-mail Educativo*, 1(1).
- Vidal, S. y Opazo, H. (2020). Propuesta. Modelo de reflexión colaborativa en aprendizaje servicio - ABC Lab. Universidad Católica Silva Henríquez.

APRENDIZAJE DEL CÁLCULO: UNA PROPUESTA DE INNOVACIÓN INCORPORANDO TECNOLOGÍA

Rodolfo Rojas Muñoz

Esta experiencia se desarrolla en el curso de Cálculo para la carrera de Bachillerato en Ciencias y Recursos Naturales en el Campus Patagonia de la Universidad Austral de Chile. Participan en la experiencia 13 estudiantes de un curso de 25 en forma voluntaria. La experiencia consiste en realizar 2 proyectos apoyados con software, en duplas o individualmente, durante un mes cada uno relacionados con los objetivos de aprendizaje de los conceptos de Derivada e Integral Definida, respectivamente. Los estudiantes que no participan de los proyectos realizan controles de desarrollo como herramientas de evaluación. El objetivo de la experiencia es la construcción social del conocimiento matemático (CSCM) utilizando tecnología y tratando de cumplir con los principios del conectivismo de Siemens (Soto-Córdova, 2020). Los resultados indican que los estudiantes que realizaron los proyectos obtuvieron mejores aprendizajes que sus compañeros, pero se logró poca transferencia de conocimientos entre pares.

Palabras claves: Construcción Social del Conocimiento Matemático, Aprendizaje del Cálculo, Aprendizaje usando TICs, Aprendizaje Basado en Proyectos, Aprendizaje Autónomo.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de conceptos matemáticos avanzados relacionados con el Cálculo suele ser de una gran complejidad para los estudiantes universitarios de primer año. Una de las fuentes principales de complejidad, viene dado por el lenguaje propio de las matemáticas universitarias y preuniversitarias. Dos Santos (2012, p.135) afirma “que uno de los problemas centrales en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo... fue el exceso de rigor con que generalmente se suele presentar dicho contenido a los estudiantes” refiriéndose a los estudiantes de un primer curso de cálculo en Brasil. Por otro lado, Gaete (2019, p.11) indica que “no existe una relación recíproca entre la matemática escolar, en donde predomina la justificación razonada, y el cotidiano de la gente, en donde prima la funcionalidad del conocimiento matemático”.

Esto también es afectado por el desarrollo curricular del tema, en particular, en un curso de Cálculo que transita por diversos temas del Análisis de manera muy rápida y en la secuencia tradicional: Límites, Derivadas, Integrales y Ecuaciones Diferenciales. Orden y tiempo que no tienen relación con su desarrollo histórico y que hace ver al “Cálculo como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes a los que hay que buscarles aplicaciones” (Cordero, 2003, p.8) y donde “difícilmente se alcanza a mirar una metodología que les permita estudiar fenómenos de variación continua” (Cordero, 2003, p.7).

Desde otro punto de vista, la Enseñanza Remota de Emergencia (ERT) nos hace mirar qué es lo que se debe hacer para un aprendizaje remoto en entorno virtual. Castrillón (2017, p.1), en una investigación para “promover la construcción social del conocimiento matemático utilizando tecnología”, señala que “el conocimiento matemático es una construcción colectiva” que depende de “las características sociales, culturales y tecnológicas del contexto donde se desarrolla”. Además, Soto-Córdova (2020, p.80) menciona que en un entorno de aprendizaje virtual los estudiantes participan en ámbitos de (re)construcción del saber mediante redes establecidas informalmente

(Soto-Córdova, 2020, p.80), por lo que se hace vital tener la habilidad de identificar las fuentes confiables dentro de esta nube.

MARCO METODOLÓGICO

La innovación actual se implementará en un curso de Cálculo, diferencial e integral, que se dicta regularmente para el Bachillerato en Ciencias y Recursos Naturales en el Campus Patagonia de la Universidad Austral, ubicado en la ciudad de Coyhaique, Chile, en el segundo semestre del año 2020. En este curso hay 25 estudiantes inscritos, sin embargo, sólo 23 de ellos están participando de las actividades del curso. También, 2 estudiantes de Bachillerato en Ciencias de la Ingeniería están participando en el curso.

En su forma regular presencial, el curso de Cálculo (MATM121) consta de 4 capítulos: Límites, Derivadas, Integrales y Ecuaciones Diferenciales, y considera semanalmente 6 horas pedagógicas presenciales y 6 horas cronológicas de trabajo autónomo durante 17 semanas. Este año, debido a la cuarentena, el periodo fue reducido a 13 semanas y 4 horas pedagógicas presenciales y 2 horas de trabajo autónomo. Entonces, decidimos reducir los capítulos a 3: Derivadas, Integrales y Ecuaciones Diferenciales, distribuyendo contenidos de límite en los primeros dos capítulos y reduciendo igualmente los contenidos de cada capítulo.

En cuanto a las evaluaciones, de manera tradicional, cada capítulo consideraba una evaluación sumativa mensual. Este año se consideró reemplazar estas evaluaciones por Trabajos de Investigación mensuales con avances semanales, desarrollados en duplas de estudiantes, pero sobre una base voluntaria. Aquellos estudiantes que desearan evaluaciones tradicionales, se les evaluó con controles semanales en los primeros dos capítulos y una prueba en el tercer capítulo.

En este contexto, en el primer capítulo Derivadas, se propone que los estudiantes realicen una investigación sobre la variación temporal de un fenómeno apoyados por herramientas computacionales. En el segundo capítulo Integrales, se propone que los estudiantes realicen una investigación que consiste en medir el área y el perímetro de un objeto geográfico a su elección, utilizando herramientas computacionales. Finalmente, para el último capítulo Ecuaciones Diferenciales, se propone que los estudiantes investiguen y relaten un fenómeno biológico o bioquímico relacionado con un Modelo Matemático de los indicados en el capítulo 8 del libro Matemáticas para Ciencias (Neuhauser, 2004, pp. 473-522).

Dupla	Primer Proyecto	Segundo Proyecto	Presentación Final
1	Crecimiento de un frijol	Lago Negro	Crecimiento alométrico
2	Expansión de una Colonia de Hongos	Área de una Colonia de Hongos	Efecto Allee
3	Desplazamiento de pelotas por una rampa	Lago General Carrera	Modelo de Levins

4	Evaporación de cubos de hielo	Controles	Ecuación de von Bertalanffy
5	Controles	Controles	Modelo jerárquico de competición
6*	Péndulo	Reserva Coyhaique	Ecuación Logística
7	Péndulo	Delta del Río Aysén	Modelo de compartimentos
8*	Controles	Controles	Homeostasis
9#	Huracán Isaac	Laguna glaciár Jokulsarlon	Producción del Jerez

Tabla 1: Trabajos de Investigación realizados por los estudiantes del curso de Cálculo (MATM121) en el segundo semestre de 2020 en modalidad online. * Trabajos realizados individualmente. # Trabajos realizados por la dupla de estudiantes de Ingeniería, donde el tercer contenido es Series.

Cada dupla de estudiantes recibió, en general, retroalimentación semanal después de cada avance y debían presentar un informe de tipo científico que contuviera un marco teórico donde presentaran el contenido matemático, la metodología en donde describieran el software usado, los resultados de sus mediciones y las conclusiones conectadas con su trabajo.

Por otro lado, el profesor continuó realizando clases virtuales sobre el tema. Estas clases fueron de tipo discursivo, en un formato tradicional donde se observan las características del discurso Matemático Escolar, con apoyo de diapositivas, donde se plantea el conocimiento de forma acabada en forma de definiciones, teoremas y ejemplos. Los controles constaron de 2 preguntas, enfocadas en cada una de las dos clases semanales.

ALGUNOS RESULTADOS

Péndulo

Para el primer capítulo, una dupla de estudiantes analizó la variación en el movimiento de medio ciclo de un péndulo. Los estudiantes analizaron el movimiento usando el software Tracker y planillas Excel. Los estudiantes midieron posiciones y velocidades (rapideces) cartesianas del péndulo y también calcularon la variación promedio por cada cuadro, que correspondía a 1/30 segundo. Sin embargo, no realizaron ninguna conexión entre velocidad y derivada.

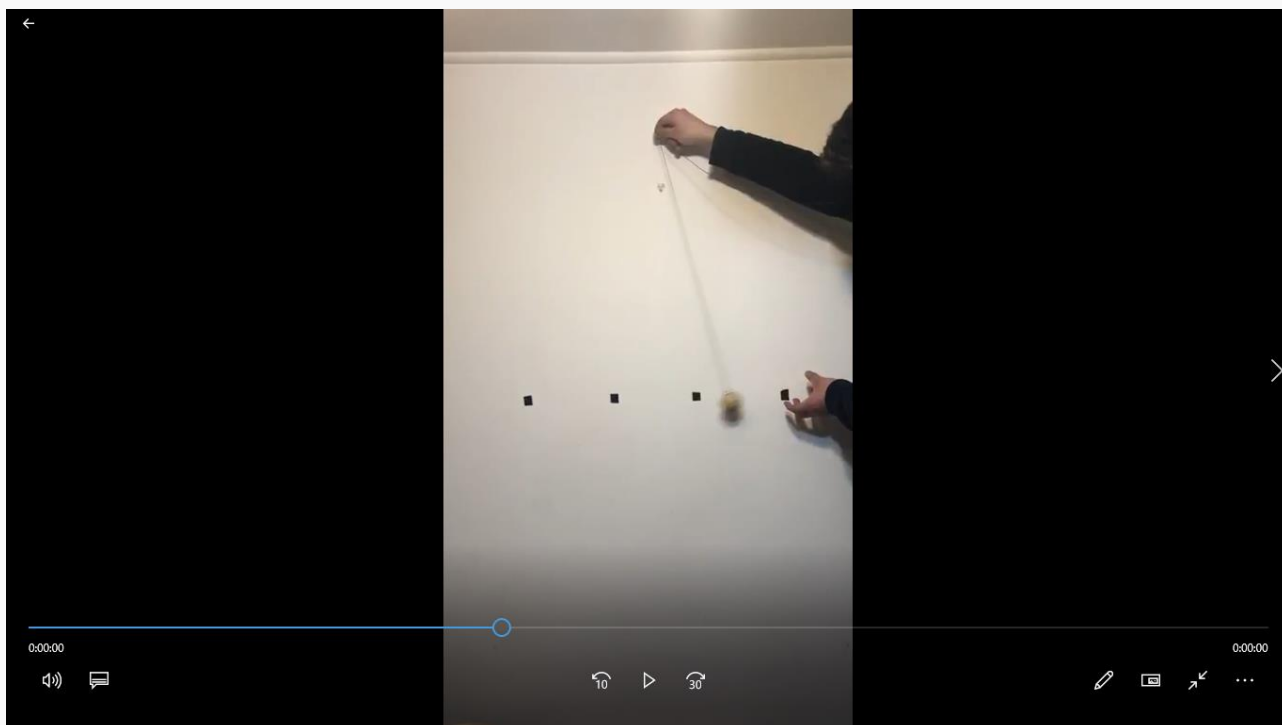


Figura 1: Extracto video de movimiento pendular. Las marcas en la pared indican una distancia de 20 cm entre sus centros.

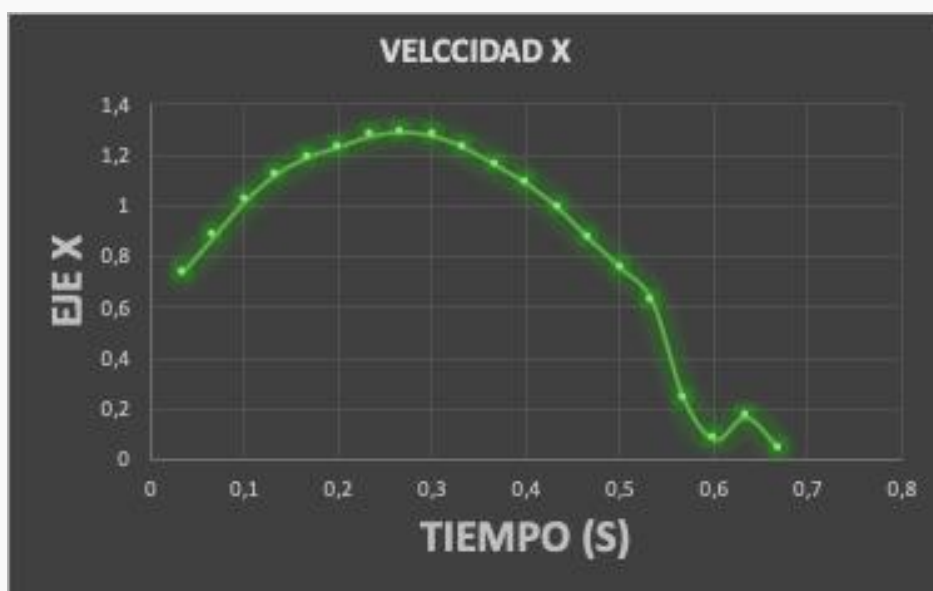


Figura 2: Velocidad (rapidez) horizontal del péndulo con los datos entregados por el software Tracker.

Delta del Río Aysén

Para el segundo capítulo, una dupla de estudiantes calculó el área y el perímetro del Delta del Río Aysén. Los estudiantes usaron las herramientas Poligonal y Polígonos del software GeoGebra para estimar en forma cada vez más precisa el perímetro y el área del delta, y Excel para transformar

unidades y sumar las partes. Aunque su medida de referencia fue imprecisa, lograron conectar la idea de integral definida con el cálculo del área y del perímetro mediante particiones.

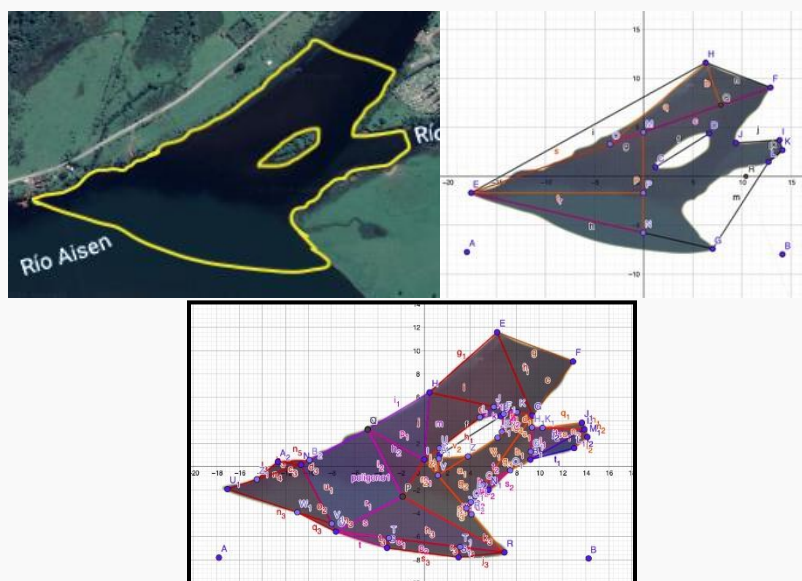


Figura 3: Delta del Río Aysén. Foto Satelital, Primera Partición, Refinamiento.

CONCLUSIONES

Los resultados nos indican que los estudiantes que realizaron el proyecto tuvieron mejores aprendizajes que sus compañeros del grupo de control, donde dentro de las razones que llevaron a estos resultados estuvieron el mayor tiempo de dedicación, la posibilidad de autoevaluarse y autorregularse y un trabajo que parte desde sus propios referentes teóricos.

Sin embargo, los dominios fueron de todas formas bajos, en comparación con años anteriores, debido principalmente a la baja asistencia, los contenidos dictados en forma más superficial y las clases aún más expositivas que las presenciales.

La innovación propiamente tal muestra eso sí debilidades como el desarrollo del trabajo fuera del aula y la falta de transferencia de conocimientos entre pares, que es esencial para la construcción social del conocimiento, y por ende, no logra rediseñar el discurso matemático escolar. Aunque si hubo pequeñas instancias de transferencia, éstas no lograron impactar en los estudiantes del grupo de control.

Referencias

- Castrillón, O. (2017). Construcción social del conocimiento matemático mediado por tecnologías digitales (Póster). II Congreso de Educación Matemática en América Central y El Caribe, Colombia, 2 p.
- Cordero, F. (2003). Introducción. Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V., México, pp. 1-20.
- Dos Santos, E. (2012). Idoneidad de Procesos de Estudio del Cálculo Integral en la Formación de Profesores de Matemáticas: Una Aproximación desde la Investigación en Didáctica del

Cálculo y el Conocimiento Profesional (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España, 475 p.

- Gaete, C. (2019). Estudio socioepistemológico de la integral definida a través de la categoría de modelación, un modelo de anidación de prácticas y un marco de referencia de los usos de la medida (Tesis Doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, 150 p.
- Neuhauser, C. (2004). *Matemáticas para Ciencias*. Pearson Educación, S.A., España.
- Soto-Córdova, I. (2020). La relación estudiante-docente en tiempos de cuarentena: desafíos y oportunidades del aprendizaje en entornos virtuales. *Revista Saberes Educativos*, N°5, Julio-Diciembre 2020, pp. 70-99.



ENSEÑANDO MATEMÁTICA (Y OTRAS CLASES) VIRTUALMENTE EN CONTEXTOS RURALES: UNA EXPERIENCIA DESDE HONDURAS

Ledher Manuel López Urquía

La pandemia COVID-19 ha provocado que se establezcan nuevas formas de organizar la enseñanza. En Honduras, la situación no es diferente. Si bien todos los centros educativos se enfrentan a una realidad económica preocupante, deserción escolar y a bajo acceso a servicios básicos y tecnológicos, aquellos que atienden a la población rural adquieren un papel mucho más arduo. Desde mi papel como docente de uno de los colegios rurales expongo algunas de las estrategias y herramientas que funcionaron ante esta nueva realidad durante el año 2020.

Contexto rural, enseñanza de las matemáticas, clases virtuales, Honduras

INTRODUCCIÓN

La pandemia del COVID-19 provocó que los sistemas educativos reorganizaran su forma de enseñar como medida de mitigación a una situación totalmente inesperada y que afectaría a la permanencia presencial dentro de las aulas de clase. En Honduras, el 12 de marzo de 2020 se emite un comunicado indicando la suspensión de labores educativas por 14 días. Para el 16 de marzo de 2020 se habían suspendido las clases presenciales en todos los niveles educativos, una medida que se alargaría durante el resto del año y que se ha mantenido discretamente en 2021. Como estrategia para continuar con las actividades educativas, se establecieron líneas de comunicación y acción a través de salas de reuniones virtuales, uso de redes sociales como WhatsApp, Facebook, Twitter.

Sin embargo, para la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), la medida de las llamadas “clases virtuales” ha resaltado otros problemas que enfrenta no sólo Honduras, sino la región en general: la brecha en el acceso a las computadoras y a internet en los centros educativos y en los hogares, la disparidad de acceso a dispositivos digitales e internet entre las poblaciones urbanas y rurales, y entre las personas con y sin discapacidades, y también ha puesto de relieve para toda la región de América Latina los desafíos en la formación de los docentes en materia de TIC, todo esto lleva a la conclusión de que los procesos de enseñanza y aprendizaje a distancia no están garantizados (CEPAL, 2020).

La CEPAL considera que esto afectará a los más vulnerables (entendiéndose como aquellas personas de escasos recursos económicos) y que el impacto de la suspensión de la actividad educativa también afectará a la nutrición de los niños, y en el mercado laboral.

Los datos presentados por el Observatorio Universitario Nacional e Internacional (OUDENI) de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM) de Honduras, concuerdan con los planteamientos anteriores al afirmar que “los docentes tienen alta conectividad a la red por telefonía móvil, pero baja disposición de equipo de computación” (OUDENI, 2020, p.4) y que “se ha mantenido la actividad educativa para más de la mitad del alumnado, pero los de menos recursos han quedado al margen” (OUDENI, 2020, p.6).

El centro educativo IHER PRODAPMA es una institución que atiende a estudiantes de 14 años en adelante, la mayoría de ellos provenientes de zonas rurales, donde la economía se define en función de la producción agrícola, regiones donde la tecnología, el acceso a servicios básicos, a educación, a salud, es más difícil para la mayoría de los habitantes.

Si bien la actividad aparentemente es la misma (la agricultura), presenta variaciones entre un municipio y otro. Mientras que, en Marcala, San José, Chinacla, por ejemplo, la producción se orienta más al café, en Yarula, la agricultura gira en torno al maíz. Esta forma de subsistencia genera una realidad que siempre coloca a muchos de ellos entre los municipios pobres del país.

La unión de estas realidades, aunque crítica y alarmante, también ofrece una oportunidad para mejorar, renovar y establecer nuevas formas de comunicación, enseñanza-aprendizaje, y potenciar tanto en los jóvenes como docentes competencias acordes a la realidad emergente ante COVID.

DESARROLLO

Antecedentes

En 2019, producto de la evaluación de competencias docentes, se detectó en la institución un focalizado bajo nivel de desempeño de TICS, lo cual no es de sorprenderse, ya que ni el centro ni los estudiantes poseían acceso a las herramientas, instrumentos o aparatos que se relacionan con las TIC, esto llevaba al docente a una situación de no utilización y por ende de acomodamiento al no verse en la necesidad de formarse en ese tema. Por supuesto, todos los docentes pueden utilizar en menor o mayor escala los softwares de Word, Excel, PowerPoint, Internet; también redes sociales y otras aplicaciones como YouTube, Netflix, como medios de entretenimiento.

Como resultado de lo anterior, se estableció una comisión (donde el autor de este documento fue partícipe), para la implementación de un curso de formación docente donde se pone especial énfasis en la competencia digital docente, sin embargo, no logró ejecutarse en su totalidad como consecuencia directa a las medidas de prevención del COVID-19.

En los meses siguientes al establecimiento de la cuarentena general en el país, el centro educativo se enfrentó a la realidad de una amplia deserción de estudiantes producto de a) falta de aparatos para recibir clases a distancia (no contaban con computadoras y en algunos casos ni con celulares), b) factores económicos, entre los cuales destaca la falta de ellos para comprar servicio de Internet; c) factores relacionados a la movilidad y acceso de servicios, d) factores emocionales, y e) factores relacionados a la salud y muerte.

En consecuencia, el centro educativo se vio en la necesidad de establecer directrices de actuación para continuar con el año académico 2020. En este documento se presentan algunas de las experiencias realizadas por el autor, no se pretende decir cuál herramienta es mejor que otra, sino que, en consideración a toda la realidad descrita en los párrafos anteriores, cuáles tuvieron más éxito o mejor desempeño.

Metodología

En un primer momento, se crearon grupos de *WhatsApp* como estrategia para comunicación directa con estudiantes. Como la herramienta más inmediata, en las primeras clases se usó de esa forma: audios de voz, explicaciones por mensajes, fotografías de ejercicios y vídeos.

Posteriormente, si bien *WhatsApp* siguió siendo el medio de comunicación directo, se realizaron ajustes y se implementó una estrategia donde se recibían clases a través de salas de reuniones virtuales, trabajo autónomo en casa, atención y control personalizado a través de mensajes y llamadas.

Análisis

De la Gestión de Contenidos

En una primera experiencia se buscó trabajar con *Google Classroom* pero para muchos estudiantes fue confuso o no podían acceder a través de sus móviles. Como medida para resolver esto y en consideración a distintas disertaciones teóricas se decidió utilizar Moodle. Para ello se adquirió un sitio en milaulas.com. Las ventajas del sitio iban en la facilidad de acceso por parte de los estudiantes, la manera de enviar tareas es comprensible, se dispone de aspectos generales para la organización de los contenidos, permite hacer foros, chats; los recursos que se comparten pueden ser de distintas fuentes y diferentes formatos.

Consecutivamente con el paso de los meses se implementó el uso de *Google Drive* como repositorio de documentos, imágenes y otros, relacionados al trabajo educativo social de los estudiantes. También es importante señalar que los estudiantes contaban con libros de texto, si bien, algunos no son lo suficientemente explícitos en temas, son herramientas claves para los procesos educativos.

De las herramientas de comunicación

El utilizar la plataforma Moodle permitió crear comunicaciones asíncronas utilizando foros. Otra estrategia asíncrona consistía en vídeos; algunos tomados desde *YouTube* y otros diseñados y grabados por el maestro de clase, en un primer momento, fueron enviados por medio de *WhatsApp*. Para la grabación de ellos se utilizaba *PowerPoint*, luego *Screencast-o-matic*, y finalmente con el grabador de pantalla de *Apowersoft*, como auxiliar también se usó *Recordit*.

Respecto a las salas de reuniones virtuales, la experiencia nacional impulsaba el uso de *Zoom*. A pesar de eso, en el contexto rural el acceder a *Zoom* es complicado: muchos jóvenes que se conectan desde sus celulares nunca pudieron acceder a las salas virtuales. Ante esto, y la apertura de acceso libre de *Google Meet* se decidió probarlo: el uso de ella fue más exitosa. La comparativa técnica de uno con el otro genera divisiones de opinión, pero la experiencia indica que, en los contextos rurales de Honduras, es más fácil acceder a reuniones virtuales por *Google Meet*. Sin embargo, *Zoom* sigue siendo altamente utilizado, así como *Skype*, *Cisco Webex* y *Microsoft Teams*.

Junto a las reuniones virtuales se utilizaron otras herramientas y aplicaciones para hacer más dinámicas las clases, a continuación, se enumeran algunas de las utilizadas de forma exitosa:

- a) *Mentimeter*, permite realizar consultas si bien la versión gratuita solo permite dos consultas es una forma interesante para iniciar clases.
- b) Presentaciones digitales, ya sea de *PowerPoint* o de Diapositivas de Google.
- c) Uso de Pizarra Virtual, para clases menos técnicas se usó *Jamboard*, *Witeboard*, y *Microsoft Whiteboard* pero para clases de matemáticas se utilizó prioritariamente *IDroo*.

- d) Otras aplicaciones, actividades interactivas obtenidas de las siguientes páginas:
<https://www.interactive-maths.com/>, <https://www.mathgames.com/>,
<https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/>,
<https://www.mathlearningcenter.org/apps>, por nombrar algunas.

Otras aplicaciones que se usaron son: *Genially*, *Kahoot*, *Padlet*, *linoit*.

De las herramientas de evaluación

A través de la plataforma Moodle se aplicaron algunos cuestionarios, la mayoría de las tareas y actividades fueron enviadas también por la misma plataforma para su revisión. Usar esta plataforma permite al estudiante revisar las retroalimentaciones de las tareas, llevar un control de sus puntos y tomar decisiones de mejora en el proceso formativo.

Otras aplicaciones que fueron utilizadas para realizar procesos evaluativos tanto diagnóstico, formativo y/o sumativo, se encuentran en *Quizzis*, *Genially*, *Kahoot*, *Padlet* y *Google Forms*.

Para resolver algunas tareas se les enseñó y se diseñaron actividades usando *Pixabay* como biblioteca de imágenes, *Draw.io* para esquemas mentales, y aplicaciones móviles como *CamScanner*.

Conclusiones

Como se explicó anteriormente, lo que se pretende es compartir cuales aplicaciones funcionaron en un contexto rural durante un periodo educativo complejo. Cada uno de los recursos aquí mencionados tiene características diversas y cumplen con objetivos diferentes, pero es de hecho que la experiencia permite argumentar que ellas funcionan en lugares con poca conectividad y donde los usuarios cuentan con nada o escasa práctica en el uso de TICS.

Conviene recalcar que muchas de las herramientas descritas durante el 2020 ofrecían todas sus cualidades de forma gratuita y actualmente se requiere la compra para usarlas completamente. Esto no es extraño ya que en un mundo donde las transformaciones son constantes, muchas de estas herramientas deben evolucionar y adaptarse frente al riesgo de desaparecer por otras más novedosas o con funciones más integradoras.

Como información adicional, es oportuno mencionar que esta experiencia se comparte (con otros colegas) y se reproduce en otros ámbitos educativos (donde el autor labora) y los resultados de efectividad se mantienen. Añadido a esto, la práctica de este autor sirve como base para establecer acciones de mejora en 2021 en el centro IHER PRODAPMA ya que, a la fecha de redacción de este documento, se continua con clases de forma virtual, así, el compartir conocimiento permite sistematizar acciones educativas para acompañar a los estudiantes, que estos obtengan aprendizajes duraderos y a la vez, potenciar e impulsar el desarrollo profesional docente.

Referencias

- Comisión Económica para América Latina y el Caribe-CEPAL. (2020). *América Latina y el Caribe ante la pandemia del COVID-19 y el Caribe Efectos económicos y sociales*. Informe Especial COVID-19.
https://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/45337/6/S2000264_es.pdf

- Observatorio Universitario Nacional e Internacional-LOUDENI. (2020). *La situación educativa hondureña en el contexto de la pandemia del covid-19: escenarios para el futuro como una importante oportunidad de mejora*. Autor: UPNFM.

ESTUDIO DE CLASES EN CONTEXTOS VIRTUALES: REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS HASTA 100

Jocelyn Aguilera Aravena, Joaquín Cubillos González , Sergio Morales Candía

El estudio de clase ha sido desarrollado en un contexto de la educación presencial desde hace más de una década en Chile. Hoy dada la contingencia pandémica mundial, hemos llevado la sala de clase al espacio virtual. Proponemos, compartir nuestra experiencia docente, a partir de una actividad práctica desarrollada por un equipo de docentes (de formación básica, especialistas en matemática y didácticas de la matemática) centradas en el objeto matemático de números desde el tránsito existente en las distintas representaciones que los estudiantes puedan construir a partir del enfoque de problemas matemáticos. Centraremos nuestra mirada en la etapa de análisis posterior a la primera implementación del plan de clase y las modificaciones generadas por el equipo docente a partir de la observación de ella.

Estudio de clases, clases virtuales, Representaciones de números, educación primaria.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo busca compartir una experiencia de desarrollo profesional docente a partir de la construcción de una clase diseñada para estudiantes de segundo año de educación básica cuyo objetivo es encontrar distintas formas de representar números de manera concreta, pictórica y simbólica. Mediante la resolución de problemas, se espera que los estudiantes, busquen, utilicen y describan diferentes cantidades. En un comienzo 9 (para activar conocimientos previos) y luego 36 (problema central sobre cosecha de manzanas). Se finaliza con una institucionalización describiendo algunas representaciones. Pondremos especial atención en el diseño del objetivo de clase previo a la primera implementación y las modificaciones incorporadas post implementación, seleccionando momentos críticos, considerando los aportes y apreciaciones de la docente que implementa la clase, del equipo que la diseña y del especialista externo que no observa la clase, pero genera apreciaciones a partir de las discusiones generadas en los espacios de reunión formal que tenemos como grupo de Estudio de Clase. Junto con ello, revisaremos los fundamentos formales que sustentan nuestra propuesta.

ANTECEDENTES

La *educación virtual* corresponde a una de las modalidades de educación no presencial más recientes en relación con la creación de instancias de enseñanza y de aprendizaje empleando tecnologías de la información y la comunicación. Durante los últimos años ha sido entendido y aceptado como un sistema de aprendizaje innovador, basado en la red online, que ha roto con las brechas de tiempo y de espacio que suponen la educación presencial (Garrison y Anderson, citado por Azuaje, 2012, Llopiz, Andreu, González, Alberca, Fuster- Guillén y Palacios-Garay, 2020).

En los últimos años, debido al estallido social del 2019 y a la pandemia del Covid19 del año 2020, Chile ha experimentado cambios importantes y desafiantes en términos formativos, en ese contexto se ha llevado a cabo un proceso de virtualización masivo, tanto en los procesos de enseñanza y aprendizajes escolares, como en los procesos de formación inicial y continua de profesores. Así, plataformas como zoom, meet, teams, whatsapp, entre otras, se han posicionado como elementos

claves en la reconceptualización de la sala clase como un espacio virtual para la educación a distancia, tanto para estudiantes como para profesores.

Este trabajo da cuenta de una experiencia virtual de desarrollo profesional docente basada en la práctica del Estudio de Clases, la cual ha logrado captar la atención internacional como instancia de desarrollo profesional docente para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes (Isoda, Arcavi & Mena, 2008). Esta actividad se asocia a un proceso de investigación realizado por profesores que diseñan conjuntamente una clase que implementan y mejoran continuamente (Isoda & Olfos, 2009). Por otro lado, White y Lim (2008) también se refieren al Estudio de Clases como una modalidad de desarrollo profesional docente, inicial o continua, implementada por un equipo de docentes, de una o varias escuelas, que ha sido empleada hace más de 130 años en escuelas y Universidades japonesas para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas.

Representaciones

Un tema clave abordado en el Estudio de Clases que se presenta en este trabajo se refiere al desarrollo de la habilidad representación matemática, la cual es presentada de manera explícita en el plan de clase diseñado y materializada en la implementación de la clase mediante la gestión docente y la práctica matemática realizada por los estudiantes, donde explicitan las relaciones matemáticas asociadas al tránsito entre dos o más representaciones. Lo que permite según Duval (2009), generar saltos cognitivos por parte de los estudiantes. De hecho, Duval (1993) posiciona la idea de representación semiótica como un aspecto esencial de la conceptualización al explicitar que solo por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos, haciendo referencia a que no es posible alcanzar la comprensión conceptual si no es por medio de las representaciones semióticas de los mismos. D'Amore (2006) explicita la ventaja en el ámbito educativo cuando las representaciones se abordan a partir de un contexto de la vida real, pues, según indica, genera la facilidad y las condiciones para que los estudiantes puedan trabajar libremente y con ello generar también representaciones auxiliares que favorezcan la comprensión de la tarea matemática en la resolución del problema.

METODOLOGÍA

Esta propuesta se centra en un caso de un conjunto de profesores chilenos de la región de Valparaíso que emplea el Estudio de Clases como estrategia de desarrollo profesional para el diseño de una propuesta de aprendizaje virtual centrada en el concepto de número. El grupo de estudio de clases está compuesto por tres profesores de enseñanza básica y dos profesores de enseñanza media quienes mediante el análisis de las implementaciones de la clase diseñada poco a poco van identificando aspectos críticos del plan de clases que van mejorando a medida que avanza el proceso de estudio de clases.

El formato de plan de clases utilizado corresponde a una matriz compuesta, por 6 filas asociadas a distintos momentos de la clase (inicio, activación de conocimientos previos, planteamiento del problema, resolución del problema, compartiendo ideas y estrategias, cierre) y por tres columnas que corresponden a actividad de aprendizaje, intervención docente/respuestas de estudiantes, y evaluación de la marcha de la clase.

El análisis presentado en este trabajo se enfoca en *el problema de la clase*, y se aborda a partir del análisis de tres aspectos: (1) planificación de la tarea matemática, (2) primera implementación de la clase, y (3) reformulación del plan de clase a partir del análisis de la implementación.

Plan de clase

Tal como se ha enunciado anteriormente, el plan de clase centra su atención en un problema matemático real que emerge a partir de la presentación de un video donde se contextualiza el problema en una situación de cosechas de manzanas. El objetivo es encontrar distintas formas de representar números de manera concreta, pictórica y simbólica.

A continuación, se adjunta tabla con elementos importantes en término de la reformulación al plan de clase a partir de la implementación, centrándonos en el momento de *planteamiento del problema*

Plan de Clase previo a la implementación docente	Primera implementación de la clase	Reformulación de la clase a partir del análisis de la implementación
Problema de la clase: representar de dos maneras distintas la cantidad de manzanas que hay en la lámina.		
a) ¿De qué se trató el video? <i>una situación de 2 hermanos que cosechan manzanas</i> ¿qué son para ustedes las etiquetas?	Al momento de implementar la clase, estas preguntas tuvieron la respuesta esperada, según lo planificado. Es por ello, que no presentaron cambios.	a) ¿De qué se trató el video? <i>una situación de 2 hermanos que cosechan manzanas</i> ¿qué son para ustedes las etiquetas?
b) ¿Cuál es el problema que tiene Javier y su hermano? <i>el hermano de Javier no sabe leer números</i>		b) ¿Qué problema tiene Fernando? <i>Fernando no sabe leer números</i>
c) ¿Qué debe hacer Javier para ayudar a su hermano? <i>crear 2 etiquetas para representar la cantidad de manzanas</i>	Al momento de implementar la clase, estas preguntas tuvieron la respuesta esperada, según lo planificado. Es por ello, que no presentaron cambios.	c) ¿Qué debe hacer Javier para ayudar a su hermano? <i>crear 2 etiquetas para representar la cantidad de manzanas</i>

	A partir de la implementación de la clase, decidimos incorporar la pregunta D, pues, en la implementación hubo un grupo importante de estudiantes que contó las manzanas rojas y otro que contó las blancas. Esto no lo habíamos considerado en el diseño del plan de clase. Junto con ello, agregamos la actividad de otorgarle un tiempo específico para que los estudiantes cuenten de manera individual, la cantidad de manzanas que hay, para luego, generar un espacio de conteo en conjunto.	d) ¿Qué observamos en el árbol? [manzanas rojas y círculos blancos] ¿Qué representan los círculos rojos y blancos? [manzanas rojas son las que quedan el en árbol y los blancos son las recolectadas] Se otorga 1 minuto para que los niños cuenten las manzanas, luego se cuenta en conjunto estudiante/docente.
2.2 Solicita a que los estudiantes abran los sobres y revisen los materiales contenidos en él. Recordar a los estudiantes que pueden utilizar recursos concretos como las láminas de bloques. Luego plantea las siguientes preguntas: a) ¿Qué materiales hay dentro del sobre? b) ¿Qué creen que debemos hacer con ellos?	Al momento de implementar la clase, estas preguntas tuvieron la respuesta esperada, según lo planificado. Es por ello, que no presentaron cambios.	2.2 Solicita a que los estudiantes abran los sobres y revisen los materiales contenidos en él. Recordar a los estudiantes que pueden utilizar recursos concretos como las láminas de bloques. Luego plantea las siguientes preguntas: a) ¿Qué materiales hay dentro del sobre? b) ¿Qué creen que debemos hacer con ellos?



	Como equipo, decidimos agregar un apartado con sugerencias, pues en la implementación de clase, la docente tuvo que reaccionar a cuestiones que no habíamos considerado.	Sugerencias: (a) Dirigir preguntas a estudiantes particulares para monitorear la comprensión de las actividades (b) Si observa que los estudiantes no han logrado comprender la tarea que deben resolver, se sugiere volver a proyectar el video. (c) Solicitar de manera explícita que los estudiantes muestren los materiales contenidos en el sobre a la cámara. (d) Si los estudiantes no poseen el material, se sugiere buscar material concreto que tengan en su hogar, por ejemplo, lápices, porotos, entre otros y proyectar siempre la hoja de trabajo.
--	---	--

Tabla 1: Elementos importantes en término de la reformulación al plan de clase

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Tras cumplido el primer ciclo de estudio de clases (incluida una implementación), el grupo reflexiona en torno a oportunidades de mejora del plan. Para ello la profesora que implementa comenta percepciones y se observa momentos del video de la clase.

Surgen en el grupo las siguientes observaciones:

- Gestión del video (presentación del video, número de reproducciones, retroalimentación posterior, duración, contenido).
- Adecuar la tarea central para que los recursos sean coherentes con el contenido que se presenta.
- Explicitar la gestión docente en la revisión de los recursos asociados al problema y su uso.
- Creación y/o modificación de preguntas e instrucciones para conducir el momento y asegurar la comprensión de la actividad
- Posibles dificultades para entender el problema planteado

En el contexto de tareas asociadas a representaciones de números, vistos como cardinal de un conjunto (principalmente en las que se planteen imágenes asociadas a objetos u objetos reales), debemos advertir que los estudiantes pueden quedarse en la actividad del conteo, y no avanzar. Una adecuada introducción y redacción del video, y la gestión docente posterior son aspectos que pueden implicar un cambio positivo en la comprensión de la tarea.

Referencias

- Cueva, M. A. L., & Terrones, S. A. C. (2020). Repercusiones de las clases virtuales en los estudiantes universitarios en el contexto de la cuarentena por covid-19: El caso de la PUCP. *Propósitos y Representaciones*, 8(SPE3), 588.
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 177-196.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Isoda, M., Arcavi, A., & Lorca, A. M. (Eds.). (2008). *El estudio de clases japonés en matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Ediciones Universitarias de Valparaíso de la Universidad Católica de Valparaíso.
- Isoda, M., & Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- White, A. L., & Lim, C. S. (2008). Lesson study in Asia Pacific classrooms: Local responses to a global movement. *ZDM*, 40(6), 915.



UN ESTUDIO DE CLASES CONCERNIENTE AL CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UN ELIPSOIDE DESDE UN ANÁLISIS INFINITESIMAL

Mirko Briones Ganga, Christian Antonio López López, Jorge Eduardo Olivares-Aguilera

Se construye una secuencia de clases para enseñar el concepto de volumen de un elipsoide a estudiantes de enseñanza media y primer año de universidad que cursan la asignatura de Cálculo I. El análisis tanto curricular como de los textos del estudiante de la asignatura de Matemática, dan cuenta que los procesos de aproximación al valor real del volumen en cuerpos redondos no se abordan debidamente, puesto que prevalece un tratamiento procedimental por sobre uno conceptual, más aún, el concepto de error (inherente a todo proceso de aproximación) no es tomado en consideración. Así también, el análisis evidencia que no se fomenta la construcción de estrategias por parte de las y los estudiantes, lo cual repercute negativamente en su aprendizaje. La secuencia de clases tiene por objetivo que las y los estudiantes sean capaces de construir estrategias desde un análisis infinitesimal para calcular el volumen de un elipsoide.

La construcción, implementación y posterior análisis de la secuencia de clases, se sustenta desde la metodología de Estudio de Clases Japonés

Estudio de Clases Japonés, Volumen, Elipsoide, Análisis Infinitesimal, GeoGebra.

INTRODUCCIÓN

Se presenta una investigación de Educación en Matemática que da cuenta de una experiencia en aula virtual concerniente a la enseñanza del concepto de volumen de un elipsoide desde un análisis infinitesimal. Diversos autores dan cuenta de dificultades presentes en la enseñanza del volumen, por ejemplo, cuando se visualiza desde una perspectiva multiplicativa (Vergnaud, 1983) o por otro lado, las relacionadas a la articulación entre las representaciones aditiva y multiplicativa (Chamorro, 2003). Dichas dificultades se agudizan cuando los cuerpos asociados al concepto son redondos, dejando de lado aspectos como el error generado en la aproximación a través de cuerpos rectos cada vez más finos, más aún, si la metodología de aprendizaje está sustentada mediante de procesos algorítmicos con escasa o nula reflexión de lo que ocurre. Para abordar estas dificultades, se construye una secuencia de clases, considerado como metodología el Estudio de Clases Japonés (Isoda et al., 2012).

La secuencia consta de un total de tres clases, las cuales fueron aplicadas en tres grupos de estudiantes. Posteriormente, las clases fueron mostradas a un grupo de docentes en matemática con el propósito de realizar mejoras a la propuesta y así, un rediseño de la secuencia. Para el desarrollo de las tareas matemáticas se propone el uso de software GeoGebra y material concreto, específicamente un elipsoide y figuras pequeñas de lego (bloques de plástico de distintas formas y tamaños), ambas contribuyen en la exploración del objeto matemático desde una perspectiva infinitesimal.

ANTECEDENTES

En la enseñanza del concepto de volumen, son varios los autores que señalan que la formación didáctica del docente es escasa, consecuencia de aquello, es la repercusión negativa en el aprendizaje de los estudiantes. En concordancia con lo anterior, Guillén (2010) señala que el gran reto sigue siendo que la geometría de los sólidos vuelva a todas las clases.

A continuación, se sintetizan estudios concernientes al concepto de volumen. Los cuales se presentan cronológicamente.

1983. Hans Freudenthal: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures

Establece el concepto volumen desde una perspectiva psicológica, manifiesta que el volumen puede ser entendido como el espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos, como la cantidad de unidades que forman un cuerpo, como función de medida, entre otras.

Concerniente a la medición del volumen, el autor plantea que las manipulaciones concretas con volúmenes facilitan el aprendizaje, además, están menos expuestos al empobrecimiento fenomenológico, debido al doble aspecto del contenido y el volumen, y al carácter concreto de las operaciones de conservación del volumen.

1983. Gérard Vergnaud: Didactique et acquisition du concept du volumen

Propone que existen dos formas de considerar el volumen. La primera como unidimensional, es decir, se efectúa una medición o comparación mediante la utilización de estructuras aditivas. A una tal medida se le asigna una cantidad de magnitud un número real positivo. De esta forma, mediante un proceso aditivo, se obtiene una medida resultante que incluye el número de veces que se ha utilizado dicho patrón para comparar. La segunda, considera el volumen como un producto de medida, es decir, para encontrar el volumen de un prisma rectangular, multiplicamos la medida de sus tres dimensiones.

2003. M. Carmen Chamorro: Didáctica de las matemáticas (edición año 2006)

La autora pone énfasis en la importancia de poder articular de forma eficiente sus dos representaciones (como magnitud unidimensional o como producto de medidas propuestas por Vergnaud) para así evidenciar la relación entre ellas.

2005. María Sáiz Roldán: Transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del volumen

El texto propone que la importancia del trabajo cualitativo, previo a cualquier consideración de tipo cuantitativo. Este trabajo cualitativo puede iniciarse con la búsqueda en el entorno objetos con volumen medibles de todo tipo. Objetos huecos y sólidos, cerrados y abiertos, llenos y vacíos, de manera que todos los significados del concepto se pongan en juego.

Así también, propone que aspectos cuantitativos del volumen deben postergarse; si acaso se llega al trabajo con fórmulas, en primaria bastará con estudiar el caso de algunos de los poliedros y prismas más comunes, puede pensarse, incluso, en posponer todo este trabajo hasta la secundaria. En sexto se podría explorar la fórmula para obtener el volumen de un prisma rectangular, pero es muy poco probable que un niño de esa edad logre deducir la fórmula a partir de esas exploraciones.

No obstante, trabajar con arreglos tridimensionales de cubitos puede resultar fructífero a un plazo más largo.

2011. M. Sanmiguel y Ma. Jesús Salinas: Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2° de ESO relacionadas con el concepto de volumen y su medida.

La investigación deja en evidencia que la adquisición del concepto de volumen es tardía y requiere una profundización del concepto, de tal manera que aporte nuevas estrategias de resolución. Así también, destaca la necesidad de estrategias de conteo, muestra una confusión en los conceptos de área y volumen, una falta de vocabulario y la necesidad de familiarizar al estudiante con situaciones de medida o comparación en contextos. Finalmente, proponen que los estudiantes no adquieren la noción de trilinealidad ni la estructura multiplicativa del volumen, pero sí una estructura de tipo superficie.

METODOLOGÍA

El hacer matemática es ante todo y principalmente una actividad humana, dicha actividad, está sujeta a fenómenos principalmente de carácter social. En esta investigación, se consideró analizar un fenómeno en particular inmerso en la realidad escolar chilena, con la finalidad de comprender las acciones de los sujetos (estudiantes) en función de la praxis desde un enfoque cualitativo. Así también, es esencial comprender cómo las y los estudiantes (o comunidades de estudiantes), adquieren, desarrollan y utilizan sus conocimientos a través de la práctica en esta disciplina.

En concordancia con lo que plantea González (2003), al tratar de comprender la realidad circundante en su carácter específico, se persigue transformar una realidad enmarcada y contextualizada. Las y los estudiantes investigados, no son meros aportadores de datos para formular después generalizaciones, sino que los valores de esos datos estriban en la mejora que pueden traer para los propios estudiantes que los suministraron. Desde esta perspectiva, dada la necesidad de describir, comprender e interpretar los significados que las y los estudiantes les dan a sus propias acciones, el paradigma adecuado que sustenta esta investigación es el interpretativo – comprensivo. Además, como se pretende estudiar situaciones didácticas en torno a una secuencia de clases, es pertinente utilizar el Estudio de Clases Japonés como metodología.

ESTUDIO DE CLASES JAPONÉS

Es un ciclo donde los docentes se proponen mejorar progresivamente sus métodos de enseñanza por medio de la colaboración con otros profesores, en este ciclo se examina y critica constructivamente sus prácticas de enseñanza (Isoda et al., 2012). Su origen proviene de Japón y comenzó a desarrollarse como práctica pedagógica en la era Meiji a finales del siglo XIX.

El Estudio de Clase consiste en tres etapas, estas son: preparación, clase a investigar y sesiones de revisión (Isoda et al., 2012).

La etapa de preparación alude a planificar una clase e identificar las problemáticas concerniente a un objeto matemático, lo anterior se manifiesta en la construcción de un plan de clases. Un aspecto importante en este proceso es que se realiza mediante la colaboración entre docentes. La etapa de la clase a investigar es la aplicación del plan de clases elaborado en la etapa anterior y ejecutado al menos por un docente presente en la construcción. Además, en esta instancia participan en la

observación de la clase un grupo de docentes y directivos (ya sea perteneciente al establecimiento o no), estos toman apuntes de la clase observada para un posterior análisis. Finalmente, en la etapa de sesión de revisión, las personas que estuvieron presentes en la clase impartida realizan observaciones con el propósito de mejorar el plan de clase, esto último contribuye en el aprendizaje de los docentes involucrados en este proceso. Posteriormente, teniendo en consideración lo que acontece en las tres etapas, se ajusta el plan de clases para una nueva implementación, de esta manera, se vuelve a dar inicio el ciclo hasta acordar que el plan de clases es el apropiado.

ANÁLISIS

Como se menciona previamente, la investigación consta en implementar tres clases. Cabe mencionar que la primera clase es de utilidad para que las y los estudiantes construyan una estrategia para el cálculo de un área determinada y que posteriormente, en la tercera clase, esta estrategia logre ser extrapolada para calcular el volumen de un elipsoide.

Concerniente a la primera clase, la totalidad de estudiantes logran operacionalizar el concepto de función para determinar una altura en particular como una en general en una determinada situación en dos dimensiones (esto es de ayuda para el desarrollo de la actividad posterior). Así también, construyen estrategias para calcular el área de la función $\text{seno}(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ mediante la utilización del método exhaustivo. Finalmente, un alto porcentaje logra generalizar la estrategia construida previamente para calcular el área solicitada mediante una representación algebraica, obtenida desde un análisis infinitesimal mediante el uso del software GeoGebra.

Con respecto a la segunda clase, la totalidad de estudiantes logran operacionalizar el concepto de función para determinar una altura (tanto particular como general), pero esta vez, la actividad estrata en el ámbito en tres dimensiones. Es decir, las y los estudiantes logran extrapolar la estrategia utilizada en la primera clase para resolver la actividad propuesta en esta clase.

Finalmente, concerniente a la tercera clase, las y los estudiantes logran extrapolar la estrategia utilizada al final de la clase 1 (calcular el área de la función $\text{seno}(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$), obteniendo el cálculo del volumen de un elipsoide. Generalizan sus argumentos mediante una representación algebraica desde un análisis infinitesimal, esto último sustentado desde las propiedades que obtuvieron en la visualización (ya sea desde la manipulación del material concreto o el uso del software GeoGebra). Así también, los resultados dan a entender que construyen un lenguaje simbólico más elaborado. Es decir, con la experiencia que otorga la totalidad de los applets (utilizados en las tres clases), las y los estudiantes generan una estrategia desde la manipulación del software, afinan sus estrategias por medio de la representación gráfica y así, argumentar algebraicamente la aproximación infinitesimal al cálculo del volumen del elipsoide en su forma general.

CONCLUSIONES

El estudio de clases realizado aborda el concepto del volumen de un elipsoide, generando para el estudiante la construcción de un significado propio del objeto matemático a partir de la experiencia. Es así como en el transcurso de la secuencia de clases se fueron tratando temas como la dependencia de la altura de una figura o cuerpo a través de una función, como también la aproximación al valor real del volumen de un elipsoide desde el espacio ocupado a través del material concreto y posteriormente en GeoGebra.

La secuencia de clases logra relacionar los elementos necesarios para el desarrollo de la actividad de la clase tres y con ello precisar en la adquisición del concepto volumen. Algunos estudiantes recurren a elementos como el área basal y la altura de los prismas para conjeturar el volumen del elipsoide, siendo estas ideas extrapoladas de las primeras clases de la secuencia.

El uso de material concreto marca el inicio de una problemática mayor, acerca de la infinitud de bloques pequeños que deben introducir en un elipsoide para obtener una aproximación al cálculo de su volumen (volumen visto como espacio ocupado), como también el cómo disminuir el error inherente a tal aproximación. La manipulación del software GeoGebra juega un papel fundamental en este punto, otorga la visualización del método exhaustivo para la aproximación y contribuye en el análisis infinitesimal generado por parte de las y los estudiantes, lo cual queda sintetizado en una representación algebraica. De esta manera, logran dar sentido a la noción de error producto de los espacios no ocupados, ya sea en la función seno(x), mediante el análisis de los rectángulos utilizados para la aproximación, como también, por los bloques utilizados al calcular el espacio ocupado del elipsoide facilitado o por la falta o exceso en los prismas visualizados en el elipsoide a través de software. Esto permitió reflexionar acerca del posible uso de bloques infinitamente pequeños, lo cual decantó en expresiones algebraicas distintas para el volumen del elipsoide.

Desde las representaciones entregadas por parte de las y los estudiantes, en la tercera clase, es posible inferir que lo construido por ellos puede ser aplicado no solo para el elipsoide del diseño implementado, sino que para cualquier cuerpo geométrico que esté definido mediante una función, permitiendo modelar situaciones abstractas o reales lo que da al concepto de volumen una funcionalidad.

La metodología de Estudio de Clases Japonés, no sólo permitió explorar en cada ciclo los argumentos que se exponían, sino que además, permitió rediseñar la secuencia de clases. Esta última logra promover en las y los estudiantes la construcción de estrategias para comprender el concepto tratado.

A modo de proyección, se pretende expandir la secuencia de clases para todo el programa del plan diferenciado de Matemática: Límites, Derivadas e Integrales, puesto que no se logra abordar conceptos importantes para el cálculo del volumen como por ejemplo el infinito actual, la noción límite o el concepto de integral de Riemann, esto es debido a la limitación del tiempo para implementar la secuencia. Por lo cual, esta secuencia de clases viene a ser un complemento para el nuevo plan diferenciado mencionado anteriormente, pretendemos que sea de ayuda para introducir al estudiante a un análisis infinitesimal para el cálculo del volumen.

Referencias

- Chamorro, C. (2003/2006). *Didácticas de las Matemáticas*. Pearson.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS.
- González, A. (2003). Los paradigmas de investigación en las Ciencias Sociales. *ISLAS*, 45(138), 125-136.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). SEIEM

- Isoda, M., Arcavi, A., y Mena, A. (2012). *El estudio de clases japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Saiz, M. (2005). Algunos objetos mentales relacionados con el concepto de volumen de maestros de primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 447-478.
- Sanmiguel, M., y Salinas, M. (2011). Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2° de ESO relacionadas con el concepto de volumen y su medida. *Investigación en Educación Matemática XV*, 543- 554.
- Vergnaud, G. (1983). *Didactique et acquisition du concept du volumen*. RDM.



UNA PROPUESTA INTERDISCIPLINARIA ENTRE MATEMÁTICA Y MÚSICA: EL METRÓNOMO Y SU GÉNESIS INSTRUMENTAL

Víctor Manuel Pando San Martín

Este trabajo propone una actividad interdisciplinaria entre Matemática y Música, que tiene por objetivo principal lograr una alta motivación en los alumnos durante las clases de matemática, utilizando la música y el metrónomo para generar conexiones entre lo que es familiar para ellos, su entorno y sus conocimientos. La propuesta recoge ideas de otras investigaciones, que han expuesto tecnologías, conceptos y objetivos de aprendizaje para ser trabajados en actividades interdisciplinarias. La actividad fue aplicada en alumnos de 15, trabajando especialmente dos objetos matemáticos, la medición del tiempo y las proporciones. A partir del marco teórico y las respuestas esperadas de los alumnos, se propone una caracterización de la génesis instrumental para el metrónomo, convirtiéndolo en un instrumento para medir el tiempo con especial utilidad en la música. Los resultados muestran que, durante el proceso de génesis experimentado en la actividad, los alumnos dan variados usos a los objetos de estudio.

Matemática, música, génesis, instrumental, metrónomo

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge en el contexto de la asignatura Seminario de Avance de la Propuesta de Innovación, inspirado en trabajos como los de An, Kulm & Ma (2008), An & Craparo (2011), Liern (2008), Liern (2009), entre otros, que buscan conexiones entre matemática y música con propósitos educativos.

An & Capraro (2011) creen que la carencia de sentido, la naturaleza abstracta de la disciplina y lo abrumador o repetitivas que pueden ser las lecciones de Matemática lleva a algunos estudiantes a tomar una actitud negativa con la asignatura, reduciendo la motivación, confianza y la autoestima en las lecciones de Matemática.

La problemática de la baja autoestima en los alumnos en el aula de matemáticas motiva el objetivo de esta propuesta de innovación, el cual es crear un ambiente de trabajo de alta motivación, que estimule a los alumnos en etapa escolar a involucrarse en la actividad y generar conexiones entre conceptos matemáticos, su conocimiento existente y lo que es familiar para ellos en su diario vivir.

SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y LA MÚSICA

Los aportes a la educación inician principalmente con variados autores investigando sobre las conexiones teóricas o de contenidos entre ambas disciplinas con un objetivo más bien educativo.

Liern (2008) muestra las relaciones entre fracciones y algunos conceptos musicales, mientras que en Liern (2009), el autor expone algunas relaciones entre matemática y la música popular principalmente española, relacionando secuencias numéricas con patrones rítmicos de algunos ejemplos de música folclórica.

En Conde et al. (2011), los autores presentan un conjunto de actividades divididos en 7 módulos, diseñados para explorar contenidos como la transmisión y percepción del sonido perteneciente al campo de la Física, el ritmo, la tonalidad y el sistema de signos musicales del área de la música, mientras que desde la Matemática se propone como objeto de estudio la medida del tiempo y los números fraccionarios.

También la Doctora An, en conjunto con otros investigadores han publicado una variedad de artículos estudiando los beneficios que podría tener un currículo integrado entre Matemática y Música. Por ejemplo, en An, Capraro & Tillman (2013), se concluye que las lecciones integradas de música y

matemática tienen efectos positivos en múltiples niveles de habilidad Matemática, mientras que An et al. (2008), se muestra en un estudio exploratorio que lecciones integradas de Matemática y Música tienen efectos positivos en la actitud y creencias de los estudiantes sobre el aprendizaje de las Matemáticas.

MARCO TEÓRICO

La génesis instrumental estudia cómo el proceso de un artefacto convirtiéndose en un instrumento, de tal manera que se integra al humano para hacer matemáticas. Trouche, en 2004 sugiere que la génesis instrumental puede ser vista como la combinación de dos procesos, llamados Instrumentalización e Instrumentación.

La Instrumentalización desde la perspectiva de Trouche (2004), es un proceso que parte en el sujeto y va hacia el artefacto. Tomando como ejemplo el uso de un software, el usuario inicialmente debe probar las distintas funciones de los botones, luego descubre y configura atajos del teclado, configura la barra de tareas, ajustando las opciones que ofrece el artefacto a la medida del sujeto. Mientras que la Instrumentación, también bajo la mirada de Trouche (2004) es un proceso que inicia en el artefacto y va hacia el sujeto, donde el sujeto reconoce los posibles usos del artefacto, sus limitaciones y potencialidades, modificando conductas y conocimientos progresivamente mientras se utiliza el artefacto.

METODOLOGÍA

Sujetos de estudio

El cuestionario fue explicado en una clase de una hora de duración, con 20 alumnos de 15 años. Luego de la clase, los alumnos tuvieron 24 horas para terminar el cuestionario y enviar sus respuestas por correo, subiendo fotos u otro archivo digital según su preferencia.

En esta actividad se pretende abordar, entre otros, los siguientes objetivos de aprendizaje de la asignatura de Matemáticas, pertenecientes a diferentes años de la etapa escolar de la asignatura de Matemáticas, según las bases curriculares de primero a sexto básico (MINEDUC, 2015) y las bases de séptimo básico a segundo medio (MINEDUC, 2018).

MA01 OA16: Usar unidades no estandarizadas de tiempo para comparar la duración de eventos cotidianos

MA04 OA21: Realizar conversiones entre unidades de tiempo en el contexto de relación resolución de problemas: el número de segundos en un minuto, el número de minutos en una hora, el número de días en un mes y el número de meses en un año.

MA07 (7°Básico) OA21: Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: Realizando tablas de valores para relaciones proporcionales. Graficando los valores de la tabla. Explicando las características de la gráfica. Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

MA1M (1°Medio) OA01: Calcular operaciones con números racionales en forma simbólica.

Instrumento

La actividad está compuesta fue realizada en una clase a través de un cuestionario (ver figura 1), diseñado para explorar algunas etapas de la música como la interpretación musical y percusión corporal, además de movilizar variados contenidos mientras se utiliza el metrónomo virtual.

Instrucciones Iniciales:

- Observa el video que se encuentra en el link <https://youtu.be/UI-lb1RBDPw>, luego intenta imitar la secuencia rítmica con aplausos que se muestra, debes repetirla hasta que puedas realizarla en forma fluida y sin volver a ver el video.
- Ingresa nuevamente a www.google.com y busca la palabra "metrónomo". Ejecuta la secuencia rítmica con el metrónomo a 120 ppm, luego repetir con 140 ppm y después a 160 ppm, recuerda intentar coordinar la mayor cantidad de aplausos de la secuencia rítmica con las pulsaciones del metrónomo.

A partir de las instrucciones responde los siguientes problemas:

- a) Cuenta cuantas pulsaciones del metrónomo dura una sola repetición de la secuencia rítmica ¿Crees que es posible coincidir todos los aplausos de la secuencia con algún pulso del metrónomo?. Fundamenta tu respuesta.
- b) Calcula la duración en segundos de una sola repetición de la secuencia rítmica cuando el metrónomo está a 120 ppm, 140 ppm, 160 ppm y a 180 ppm.
- c) Calcula el tempo para que una sola repetición de la secuencia rítmica dure 2, 4 y 6 segundos.
- d) ¿Que ocurrirá con la duración de un pulso cuando el tempo sea muy cercano a 0?. Fundamenta tu respuesta.
- e) Imagina el número más grande que se te ocurra y llámalo M. ¿Que ocurrirá con la duración de un pulso si fuera posible poner el metrónomo a M pulsos por minuto?. Considera que el zumbido de una mosca producido por su vuelo ocurre aproximadamente a 1000 ppm. Fundamenta tu respuesta.
- f) Investiga y define ritmo, pulso y tempo en la música en una breve reseña de máximo 200 palabras relacionando los conceptos investigados con la experiencia de esta clase y la anterior.

Figura 1: Cuestionario

ANÁLISIS

Para el análisis se utilizó la metodología de la ingeniería didáctica propuesta por la didáctica francesa, que bajo la mirada de Godino et al. (2013), se destacan dos características.

Basada en intervenciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

La validación es esencialmente interna, fundada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (y no validación externa, basada en la comparación de rendimientos de grupos experimentales y de control).

Análisis a priori

Se pretende describir la génesis instrumental del metrónomo a partir de las respuestas esperadas por los alumnos. Considerando los procesos de instrumentalización e instrumentación desde la perspectiva de Trouche (2004), descrita en el marco teórico. Se propone entonces un esquema (Figura. 2) que caracteriza las etapas de la génesis instrumental del metrónomo, convirtiéndolo en un instrumento de medición del tiempo, con una especial en la Música.

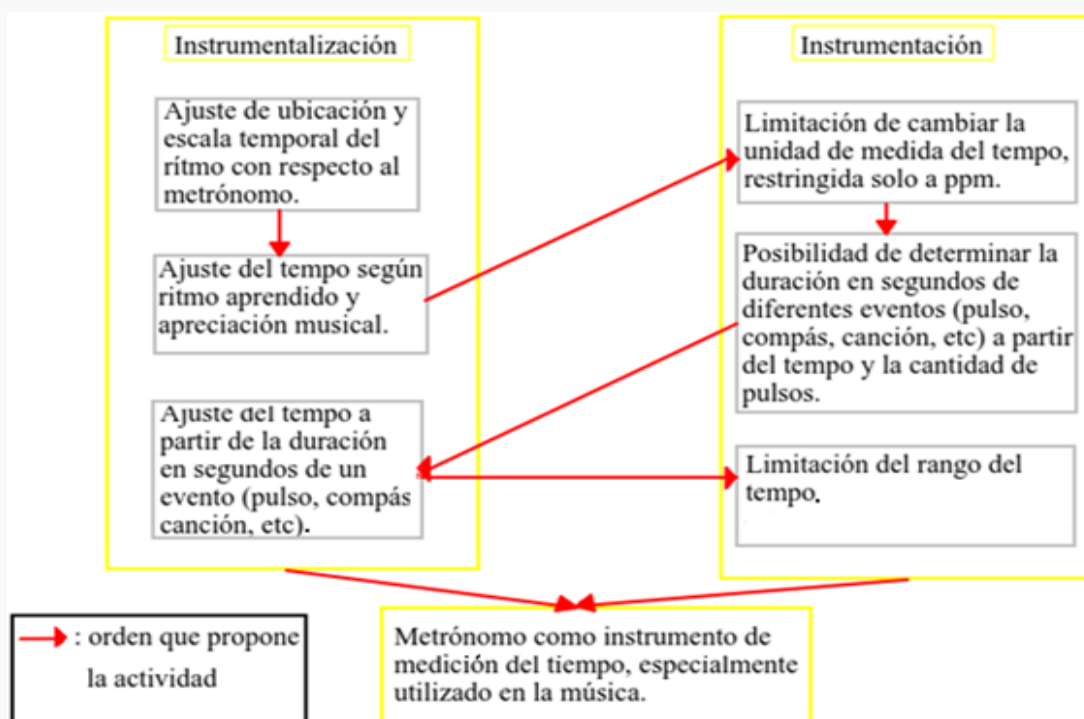


Figura 2: Génesis instrumental del metrónomo

Análisis a posteriori

Del total de 20 alumnos se registraron 17 muestras. A continuación, se presenta el caso de un alumno que logra en forma regular la génesis instrumental, presentando problemas menores en algunas etapas, logrando comprender algunos usos del metrónomo.

Luego de experimentar con el metrónomo en las partes a) y b) (ver figura 1), el alumno parece mostrar una buena interpretación de la unidad de medida, que le permite determinar la duración de eventos a partir de la cantidad de pulsos y tempo del metrónomo, entregando una buena respuesta y cierta justificación numérica a sus cálculos (ver figura 3). Luego en la parte c) (ver figura 1 y figura 3) si bien entrega las respuestas correctas, no muestra ni justifica sus procedimientos.

b) la duración de una repetición en 120 ppm es 3 (dividi $0,5 \times 6$), en 140 ppm me dio que iba a durar 2,52 segundos ($0,42 \times 6$). en 160 ppm dura 2,25 segundos cada ~~repetición~~ ($0,375 \times 6$) y en 180 ppm duraría solamente 1,98 ($0,33 \cdot 6$).

c) para tener 2 segundos de tiempo tiene que ser de 180 ppm, para 4 segundos debería ser en 90 ppm y para tener 6 segundos los ppm deben ser 60 ppm

Figura 3: Respuesta de alumnos preguntas b) y c)

Con respecto al dominio de la variable tiempo, la mayoría de los alumnos ignora parte de la pregunta, respondiendo desde la perspectiva del sonido, ignorando lo numérico y sin mencionar lo que ocurre con la duración del pulso. El caso analizado no es la excepción y cae en esta situación, mencionando en las preguntas d) y e) (ver figura 4 y figura 5) solo los efectos en la audición, sin mencionar una justificación numérica relacionada con la duración de un pulso.

d) yo creo que la secuencia seguiría sonando pero demasiado lento ya que en tiempo cercano a 0 sonaría muy despacio

Figura 4: Respuesta de alumno pregunta d)

e) yo creo que pasara que se escucharía un pitido constante y no se escucharía la secuencia rítmica.

Figura 5: Respuesta de alumno pregunta e)

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La actividad propuesta genero un alto compromiso de los alumnos, quienes lograron involucrarse con la actividad y conectar algunos elementos de su entorno como la música con los conocimientos matemáticos puestos en juego.

Los alumnos que logran un nivel parcial o regular de la génesis instrumental del metrónomo dan uso a sus conocimientos previos sobre la medición del tiempo y la proporción inversa entre otros, otorgándole sentido al uso del metrónomo para la ejecución e interpretación musical.

Al realizar la actividad durante la clase de matemática, se destinó más tiempo del esperado en la práctica del ritmo y a la primera etapa de la génesis sobre el ajuste y ubicación temporal, dejando un tiempo acotado para ver el resto de las etapas relacionadas con los conceptos matemáticos. Así, un real trabajo interdisciplinario entre matemática y música, incluyendo algunas partes del trabajo en la asignatura de música podría permitir lograr mayor éxito por parte de los alumnos en la génesis.

Referencias

- An, S., Capraro, M. (2011). Music-Math Integrated Activities for Elementary and Middle School Students. Irvine, CA: Education for All.
- An, S., Capraro, M. & Tilman, D. (2013). Elementary Teachers Integrate Music Activities into Regular Mathematics Lessons: Effects on Students' Mathematical Abilities. *Journal for Learning through the Arts*, 9(1), 1-20.
- An, S., Kulm, G. & Ma, T. (2008). The Effects of a Music composition Activity on Chinese Students Attitudes and Beliefs towards Mathematics: An Exploratory Study. *Journal of Mathematics Educación*, 1(1), 96-113.
- Conde, L., Figueras, O., Liern, V. & Pluvinage, F. (2011). El sonido de las fracciones: una propuesta interdisciplinaria de enseñanza. *Suma*, 68(1), 107-113.
- Godino, J., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. & Wilhelmi, M. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education*. 2810- 2819. Ankara, Turkey.
- Liern, V. (2008). La Música y el número siete. Historia de una relación controvertida. *Suma*, 58(1), 137-143
- Liern, V. (2009). Las matemáticas y la música popular. *Suma*, 62(1), 107-113.
- Ministerio de Educación de Chile (2015). Bases Curriculares 7° básico a 2° medio.
- Ministerio de Educación de Chile (2018). Bases Curriculares Primero a Sexto Básico.
- Trouche, L. (2004). Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Students' Command Process through Instrumental Orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.



UNA PROPUESTA PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS: UN CASO DE ESTUDIO DE CLASES EN EL CONTEXTO DEL JUEGO DE TETRIS

Sergio Morales, Alejandra Mondaca, Rodrigo Salinas

En este trabajo se presenta una experiencia de aula que aborda la conceptualización de las transformaciones isométricas con énfasis en el uso de representaciones matemáticas en cuarto básico mediante el juego del Tetris. La clase fue diseñada en el contexto de un Estudio de Clases virtual por profesores de enseñanza básica y enseñanza media e implementada en distintos cursos de un colegio de la comuna de Calle Larga. Los resultados de la clase muestran que los estudiantes logran reconocer y representar los elementos y movimientos característicos de las traslaciones y rotaciones.

Palabras clave: Estudio de Clases, Transformación Isométrica, Representaciones

Introducción

El proceso de virtualización de la labor pedagógica generado por la pandemia en la escuela ha generado una variedad de cambios y oportunidades de aprendizaje para los docentes, quienes han debido adaptar su trabajo profesional a las exigencias del contexto actual. Es en este plano que surge la oportunidad de construir mecanismos eficientes para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en un contexto virtual mediante instancias de fortalecimiento profesional docente a través la práctica de un proceso colaborativo de Estudio de Clase en favor de mejorar los aprendizajes matemáticos en estudiantes en contextos virtuales.

El grupo de estudio de clase que diseñó la clase se conformó con profesores de educación básica y media de la Región de Valparaíso, quienes a través de una revisión exhaustiva de los objetivos priorizados y textos de estudio para cuarto básico determinaron la pertinencia de abordar el tema de las transformaciones isométricas en cuarto básico. Para ello, se adoptó como estilo de clases el Enfoque de Resolución de Problemas (Isoda y Olfos, 2009; Isoda, 2011), donde a través de variadas estrategias los estudiantes pueden dar solución de una situación problemática, que, en este caso, tiene como objetivo introducir las transformaciones isométricas, con énfasis en los conceptos de rotación y traslación. Para esta clase, se decidió utilizar como herramienta de aprendizaje el juego del Tetris, el cual permite reconocer y representar los elementos conceptuales que caracterizan las transformaciones isométricas en estudio, facilitando la comunicación matemática del proceso de resolución del problema central de la clase.

Antecedentes

Transformaciones Isométricas

Según las Bases Curriculares chilenas las transformaciones isométricas se abordan a partir de tercero básico con el objetivo de desarrollar el pensamiento espacial de los estudiante, sin embargo, en cursos previos se puede observar un énfasis en tareas de representación y descripción de la

posición de objetos y personas en relación a sí mismos y a otros, incluyendo derecha e izquierda, lo que forma parte de los conocimientos previos que son necesarios para activar la comprensión de las transformaciones isométricas. En tercero básico, los estudiantes se enfocan tanto en la descripción de la localización absoluta y relativa de un objeto, como en el reconocimiento en el entorno de figuras 2D trasladadas, reflejadas y rotadas, siendo el primer curso en que se presentan estos conceptos de manera explícita, mientras que en cuarto básico deben ser los estudiantes quienes trasladen y roten figuras 2D.

El texto escolar de tercero básico distribuido por el ministerio de educación durante el 2021 define el concepto de traslación como el movimiento de una figura en el plano, sin girarla, conservando el tamaño y la forma. Con respecto a la Rotación, el texto la define como el movimiento de una figura alrededor de un punto que mantiene la forma y el tamaño de esta.

Por otra parte, Alexander y Koeberlein (2013) definen la traslación como un tipo de transformación en que cada punto de la figura original se asocia con un segundo punto ubicándolo a través de un movimiento de longitud y dirección fijas. Respecto del concepto de rotación es presentada como una transformación donde cada punto de la figura dada conduce a un punto (su imagen) por rotación respecto a un punto dado a través de una medida angular prescrita.

Estudio de Clases

El Estudio de Clases es un tipo de investigación centrado en un proceso cíclico de reflexión y acción que se desarrolla sobre la práctica profesional docente y favorece el mejoramiento de la capacidad de enseñanza de los profesores, impactando de forma positiva en el aprendizaje de los estudiantes (Isoda y Olfos, 2009). Otros autores reportan que el Estudio de Clases aporta en la mejora de la planificación, la presentación y las evaluaciones de la lección (Cohan y Honigsfeld, 2007). Por su parte, Murata (2012) da cuenta que la práctica del Estudio de Clases conlleva cambios en las prácticas de los profesores. Estos antecedentes dan cuenta de los beneficios del Estudio de Clases para los profesores en relación con su potencial para la construcción de conocimiento profesional a través de la articulación entre conocimientos teóricos acerca de la enseñanza y la práctica misma.

Metodología

La propuesta presentada en este trabajo se enfoca en la introducción virtual del concepto de transformación isométrica en cuarto básico. El diseño de la clase fue llevado a cabo por cinco profesores de enseñanza básica y dos profesores de enseñanza media mediante la práctica del Estudio de clases, lo que se realizó de manera virtual empleando el recurso de google meet.

El proceso de Estudio de Clases se estableció en tres momentos claves:

Planificación de la clase: Inició con el análisis conjunto de los objetivos curriculares asociados a las transformaciones isométricas en cuarto básico desde las bases curriculares, continuó con un estudio matemático con énfasis en los conceptos de traslación y rotación y con la definición de un contexto con el potencial de visibilizar los aspectos conceptuales claves y de generar en los estudiantes reacciones afectivas positiva hacia la práctica matemática durante la clase, lo que llevó a seleccionar el juego del Tetris como el contexto para la clase. Producto de este proceso se generaron dos versiones del Plan de Clase, donde cada una de las versiones que emerge corresponde a una mejora del anterior producto de la implementación.

Implementación del Plan: El plan de la clase fue implementado inicialmente en un tercero y luego en un cuarto básico lo que permitió poner a prueba la propuesta generando mejoras en la primera y segunda versión del Plan de Clases respectivamente, dando origen a una tercera versión del Plan de Clase que fue implementado finalmente en cuarto básico. La elección de los cursos respondió a la disponibilidad de la escuela que facilitó las condiciones para las implementaciones. Por otro lado, las clases implementadas fueron video grabadas desde hangout meet por la profesora que la implementó para luego poner a disposición del equipo el video para su posterior análisis.

Mejora del Plan de Clases: Esto se llevó a cabo mediante el análisis de las videograbaciones de las implementaciones de las distintas versiones del Plan. Para ello, cada integrante observó la clase por separado, para luego reflexionar conjuntamente en torno a las fortalezas y los aspectos a mejorar del plan de clases. Este proceso inicia con la impresión de la clase del profesor encargado de la implementación, para luego continuar con el análisis realizado por el resto de observadores, el foco de este análisis gira en torno al contraste entre la propuesta teórica del plan de clases y su implementación en un curso real.

La propuesta de enseñanza para la introducción de las transformaciones isométricas que se presenta a continuación corresponde a la tercera versión del Plan de Clases obtenida luego de dos implementaciones previas.

Análisis

La clase se compone de tres momentos que denominaremos como inicio, desarrollo y cierre. A continuación, abordaremos estos momentos presentando las actividades de aprendizaje propuestas en cada uno de ellos para promover la conceptualización de las transformaciones isométricas.

Inicio: este momento tiene como finalidad introducir el tema a trabajar y evidenciar los conocimientos previos de los estudiantes. Para ello, se presentan las siguientes dos actividades (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

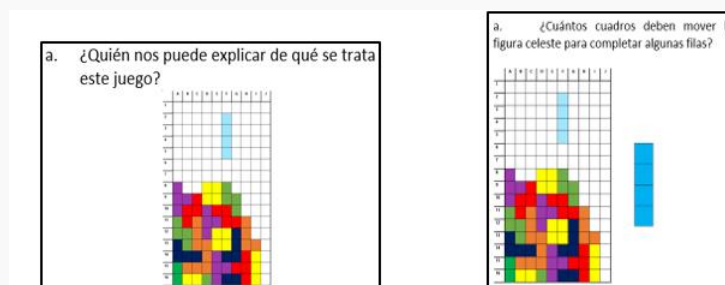


FIGURA 1. ACTIVIDADES DE ACTIVACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

La **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, en el caso en que se pregunta ¿Quién nos puede explicar de qué se trata este juego?, busca verificar que los estudiantes conozcan el juego del Tetris y reconozcan los movimientos que realizan las piezas al completar o eliminar filas. para ello, se propone que el estudiante oriente a los estudiantes a través de preguntas tales como ¿Qué debemos hacer para eliminar una fila? ¿Qué hacemos cuando nos quedamos sin espacios en las filas? ¿Qué tipo de figuras se usan? ¿Las figuras pueden cambiar de tamaño y de forma?

La Figura 1, en el caso que se pregunta ¿Cuántos cuadros deben mover la figura celeste para completar algunas filas?, tiene como objetivo que los estudiantes representen el movimiento que debe realizar una figura en la cuadrícula del juego para completar la mayor cantidad de filas. Algunas preguntas recomendadas para gestionar esta tarea son ¿La figura celeste cambió de tamaño o de forma luego del movimiento? ¿Desde dónde se realiza el movimiento de la figura? ¿La figura cambió de tamaño o de forma al moverla?

Desarrollo: este momento gira en torno al problema de la clase (ver Figura 2), el cual busca a través de la manipulación del material concreto que los estudiantes tomen conciencia de los movimientos que definen las transformaciones y que hagan uso de representaciones para describir el movimiento de las fichas en la cuadrícula. La gestión del desarrollo de la clase se lleva a cabo mediante tres etapas:

1) *Planteamiento del Problema.* Se presenta el problema a los estudiantes y se les plantea la siguiente pregunta, ¿qué movimientos podemos hacer con la ficha rosada y celeste para completar la mayor cantidad de filas?

2) *Solucionando el Problema.* Este momento tiene la intención de un trabajo individual donde cada estudiante a través de la manipulación de las fichas y cuadrícula, encuentre los movimientos para eliminar la mayor cantidad de filas.

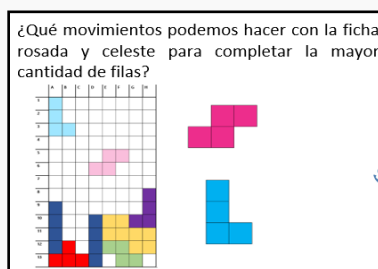


Figura 2. Problema central de la clase

3) *Compartir Ideas.* En este momento los estudiantes muestran sus producciones y comunican sus hallazgos en la resolución del problema. Se analizan las estrategias e identifican las distintas formas de resolver el problema y representar las estrategias empleadas. La figura 3, muestra una posible estrategia de resolución con las respectivas representaciones de los movimientos ejecutados.

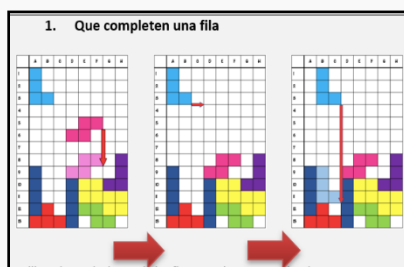


FIGURA 3. ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

Algunas preguntas docentes definidas para orientar la gestión de este momento son ¿qué tipos de movimiento aplican a la figura? ¿Cuántos movimientos le aplican a la figura? ¿Cómo le llamarías a esos movimientos?

Cierre: Este momento comienza con la siguiente pregunta ¿con cuál de las estrategias es posible terminar el juego? a través de esta pregunta el profesor busca que los estudiantes reflexionen y contrasten las distintas estrategias de resolución generadas en relación con la eficiencia para ganar el juego. Posteriormente, se realiza la síntesis de ideas e institucionalización de los conceptos de traslación y rotación a partir de las representaciones empleadas por los estudiantes para describir el movimiento de las figuras.

Conclusión

El ciclo de Estudio de Clases permitió la mejora continua del plan de clases, el cual se fue robusteciendo gracias al análisis luego de cada implementación. Este producto final, moviliza los aprendizajes de los estudiantes respecto de las transformaciones isométricas a través de las resoluciones de actividades de aprendizaje y la gestión de ellas en un contexto virtual. El uso de material concreto permite que los estudiantes puedan manipular las fichas y dejar registro de sus representaciones para dar solución al problema central de la clase.

Referencias

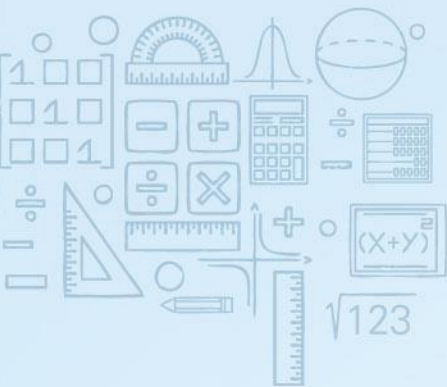
- Alexander D., & Koeberlein, G. (2013). Geometría. México: Ediciones OVA.
- Cohan, A., & Honigsfeld, A. (2007). Incorporating 'lesson study' in teacher preparation. In *The Educational Forum* (Vol. 71, No. 1, pp. 81-92). Taylor & Francis Group.
- Isoda, M. (2011). El estudio de clases: enfoques sobre la resolución de problemas en la enseñanza de matemáticas en la experiencia japonesa. *Mejoramiento escolar en acción*, 65.
- Isoda, M., & Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases*. Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Murata, A. (2012). Making Connections Among Student Learning, Content, and Teaching: Teacher Talk Paths in Elementary Mathematics Lesson Study. *Journal for Research in Mathematics Education*.

RESUMEN TALLERES

Ponencia	Expositor(es)	Institución
Construyendo el triángulo de pascal con un problema cotidiano, una situación didáctica de cuadrículas.	Juan Pablo González Arriagada, Gabriel Torres Mayorga, Amy Toscano Esmeral, Camila Herrera Valenzuela.	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Oportunidades para desarrollar el pensamiento algebraico en la educación básica: conexiones entre el currículum nacional y la investigación	Eder Pinto, Cristina Ayala-Altamirano	Universidad del Desarrollo (Chile), Universidad de Granada (España)
Plataformas virtuales para la enseñanza sincrónica y asincrónica	Alexis Alberto Parada Suárez	Umáximo
Exploraciones sonoras y rítmicas para el estudio de fracciones y múltiplos	M. Alicia Venegas-Thayer, Rodrigo Díaz	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Colegio Mater Dei
Numeración maya con material manipulativo	Paola Donoso Riquelme, Marlon Jiménez Valenzuela	Universidad de Magallanes, Escuela Oficial Urbana Mixta Integral de Guatemala
Una propuesta de actividades para la escuela secundaria sobre geometría fractal basada en el diseño de antenas multibanda	Artigue Carro, María Victoria (*); Fanaro, María de los Ángeles (**); Lacués Apud, Eduardo Mario (*)	(*) Universidad Católica del Uruguay; (**) Núcleo de Estudios Educativos y Sociales (NEES) Facultad de Ciencias Exactas UNICEN y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina
Vivenciando experiencias estadísticas y probabilísticas que provocan un razonamiento inferencial informal	Maritza Méndez-Reina, Soledad Estrella, Jocelyn Vanessa Aguilera Aravena, Pedro Vidal-Szabó	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Proyectos matemáticos en el aula. La formación ciudadana desde la educación matemática crítica.	Victor Miguel Parra González, Rodrigo Enrique Panes Chavarría	Universidad del Bio Bio, Universidad del Bio Bio
Taller de introducción al pensamiento computacional para matemática	Rodrigo Fábrega Lacoa, Juan Domínguez Caro	Scratch al Sur, Fundación Cruzando
Didáctica teatral para enseñar matemática	Aldo La Barra, Lina Wistuba, María Elena Ovalle	Exacta
Diversidad e Inclusión en Educación Matemática	Melissa Andrade-Molina; Luz Valoyes-Chávez; Alex Montecino; Daniela Soto; Pilar Peña-Rincón; Tamara Del Valle; Anahí Huencho	PUCV; UCT; UCSH; USACH; PUC; UMCE; UCT





XXIV JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUSPICIADORES Y PATROCINADORES



28 y 29 de abril 2021
Universidad Católica Silva Henríquez
Santiago de Chile

